R Conti
28.12.44

ULISSE DINI

PROFESSORE DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

DI

ANALISI INFINITESIMALE

Riprodotte con alcune modificazioni e aggiunte dalle Lezioni dettate la prima volta nell'anno scolastico 1876-77 nella Regia Università di Pisa, e successivamente autografate nel 1877-78

Vol. I. – Calcolo Differenziale.

PISA

STAB. TIPOGRAFICO SUCC. FRATELLI NISTRI

1907

PREFAZIONE

Dopo 28 anni dacchè queste lezioni furono scritte e esposte per la prima volta ai giovani del second' anno di matematiche nella Università di Pisa, e successivamente autografate, mi decisi sul finire del 1905 a pubblicarle per le stampe.

Parrà questo assai strano ai lettori; e debbo perciò esporne le ragioni, sebbene il far ciò mi dolga in quanto mi costringe a parlare di me.

Mi riporto al tempo nel quale quelle lezioni furono scritte, cioè al 1877 e 1878.

Già una cinquantina d'anni prima Abel, Cauchy, Dirichlet e altri avevano incominciato a introdurre nella matematica uno speciale rigore quale non si era mai usato per lo avanti. Negli ultimi anni poi gli studii critici che i geometri tedeschi avevano intrapreso intorno ai punti fondamentali della matematica avevano messo in chiaro che molti dei metodi di dimostrazione usati nell'analisi infinitesimale, e alcuni anche dei principali teoremi di questa scienza erano tutt'altro che chiari e rigorosi.

Fino il teorema fondamentale, quello cioè pel quale si riteneva che ogni funzione finita e continua di una variabile, salvo punti eccezionali in numero finito, ammettesse sempre una derivata determinata e finita, veniva a mancare, e si erano trovati esempii di funzioni, finite e continue e dotate di espressione analitica, che non avevano mai la derivata o ne mancavano in infiniti punti di qualunque porzione comunque piccola dell'intervallo nel quale la variabile veniva considerata.

Una mancanza di precisione in alcune definizioni e nei concetti fondamentali, e segnatamente in quello di limite, dava luogo a non poche oscurità tanto da far sì che non risultasse chiaro e preciso neppure il significato dei simboli che poi si usavano. L'essersi fermati alla considerazione delle funzioni più comuni, e l'essersi voluti aiutare di troppo colle rappresentazioni geometriche e coi risultati pratici, — stando per così dire alle prime apparenze, e a ciò che si riscontrava nei casi che ogni giorno si presentavano sott'occhio — aveva portato ad enunciare come generali risultati che erano ben lungi dall'esserlo; mentre se si fossero sottoposti a scrupoloso esame i casi considerati ne sarebbe risultato che essi avevano soltanto l'apparenza della generalità, e che molti e molti altri casi erano venuti a sfuggire; e tutto questo aveva prodotto la mancanza di rigore e di chiarezza alla quale sopra accennammo.

E se certi dubbii qua e là si affacciavano a taluno alla mente, se qualche punto appariva qua e là oscuro, si credeva di togliere i dubbii e le oscurità con ragiona-

menti che alla loro volta erano oscuri ed involuti essi pure, forse anche più; mentre d'altra parte l'uso continuo che facevasi dei teoremi e delle regole dell'analisi infinitesimale, e l'estrema importanza dei resultati che se ne ottenevano facevano sì che tutti dovessero finire per ammettere la bontà di quei metodi, e porre in un canto i dubbii e le oscurità incontrate, quasi dicendo a sè stessi *allons en avant, la foi nous viendra.*

Ma dopo i risultati a cui avevano condotto gli studii critici dei quali parlavo più sopra, non era più possibile di chiudere gli occhi alla evidenza; e dei risultati medesimi era pure indispensabile di tener conto per trattare con rigore e con chiarezza il Calcolo infinitesimale.

Non si trattava con ciò di arrivare a cose nuove, a nuovi risultati; si dovevano ricostruire e porre su solide basi, pure completandoli in quanto fosse necessario, quelli che già si conoscevano, rassegnandosi a limitarne la generalità dove il nuovo estremo rigore lo avesse richiesto.

Nè si doveva per questo introdurre alcun che di astruso o di artificioso con nuove definizioni, o con nuovi concetti o nuovi simboli; perchè se questo avrebbe potuto permettere di conservare maggiore generalità e dare maggiore estensione ai risultati, e anche aggiungerne dei nuovi, è certo però che si correva il pericolo di portare, in un campo già vasto, risultati di un interesse bene spesso molto problematico, e di fare uscire la matematica da quei confini nei quali essa pure giova che resti, se si vuole che conservi veramente la sua utilità, oltre che come scienza astratta, anche per le possibili sue applicazioni alle altre scienze e alle cose della pratica; pure ammettendo che tale utilità debba essere intesa nel senso il più largo.

Con questi criterii mi accinsi a fare le mie lezioni di analisi infinitesimale sul principio dell'anno scolastico 1876-77.

Guidato dalle idee e dagli studii dei sommi geometri tedeschi Riemann, Weierstrass, G. Cantor, Schwarz, Du Bois-Reymond, ecc. stavo compilando già da alcuni anni il mio libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* nel quale alcune delle teorie fondamentali del calcolo infinitesimale trovavano già il loro posto; ma, oltre che mille occupazioni di genere diverso ne ritardavano il compimento, per la natura del libro stesso era naturale che io fossi molto trepidante nel pubblicarlo.

E ciò ben si comprende. Del tutto sconosciute o quasi quelle teorie e quei metodi in Italia, in Francia trattate brevemente, e soltanto per alcuni punti, in una bella memoria del Darboux sulle funzioni discontinue che non attrasse subito quanto meritava l'attenzione dei Geometri, dovevo naturalmente, come dicevo, essere molto esitante prima di decidermi a portare fra noi in tutte le loro parti fondamentali quelle teorie e quei metodi che sconvolgevano quello che si era ammesso da secoli.

Pubblicati però i miei *Fondamenti* sul finire del 1877, avrei potuto accingermi nel 1878 anche alla pubblicazione delle lezioni di analisi infinitesimale che allora erano già state scritte, e anche avevano incominciato ad avere una certa diffusione colle autografie; ma, pure vagheggiando l'idea di farne un giorno la pubblicazione in quanto mi pareva che non mancassero di presentare un certo interesse e una particolare importanza (*), fui portato naturalmente a differirla.

(*) Oltre che per l'esposizione delle varie parti del Calcolo infinitesimale fatta coi nuovi metodi perfettamente rigorosi e più chiari, a me sembrava che le mie lezioni potessero avere un particolare interesse anche per alcune delle teorie che in esse erano svolte.

Tali ad es. erano a mio credere, nel Calcolo differenziale, la teoria delle funzioni implicite, quella dei massimi e minimi per le funzioni di più variabili, e quelle considerazioni sugli sviluppi

E ciò per varie circostanze fra le quali quella che allora avevo in corso l'altra mia pubblicazione sulla *Serie di Fourier;* e più ancora perchè un tale libro di Calcolo, fatto con nuovi metodi e di tanta mole, prima di essere pubblicato per le stampe doveva essere bene rivisto, e in alcune parti, specialmente nel Calcolo integrale, essere modificato e anche accresciuto d'assai.

Ai primi del 1879, M. G. Faure-Bignet, per mezzo del mio compianto e carissimo amico il prof. E. Padova troppo presto rapito alla famiglia e alla scienza, mi propose di fare esso la edizione francese di quelle lezioni, mentre io avrei fatto la edizione italiana: ma, specialmente per difficoltà presentatemi dall'editore col quale già qualche trattativa avevo in corso per la pubblicazione delle stesse lezioni, risposi che ogni decisione doveva rimandarsi ad altro momento; altre pratiche da me allora iniziate per assicurarne e facilitarne la stampa in italiano furono pure abbandonate o almeno non furono spinte avanti con bastante alacrità; finchè, sopraffatto da nuove e gravi occupazioni nel 1880 e negli anni successivi, ogni mia cura per quella pubblicazione dovè forzatamente essere messa da parte, limitandomi, dopo, a rinnuovare le prime autografie ogni volta che se ne sentiva il bisogno.

Anche colle sole autografie però le mie lezioni andarono subito ugualmente abbastanza diffuse, e i concetti in esse svolti, i metodi in esse seguiti furono tosto accettati dai geometri almeno in Italia, tanto che nei varii trattati italiani che furono pubblicati dopo il 1880 gli autori, se anche non ricordarono particolarmente nessuno dei punti più salienti di quelle lezioni, dichiararono però sempre nelle loro prefazioni che avevano fatto largo uso delle lezioni medesime.

E se queste non furono ricordate nei trattati di Calcolo infinitesimale o di Analisi che comparvero all'estero, certo è però che anche all'estero furono ben conosciute, perocchè nella *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* più e più volte varii autori, tedeschi e americani, fecero richiamo alle mie *lezioni autografate di Analisi infinitesimale* oltre che ai *Fondamenti* che avevano avuto anche una traduzione tedesca (*).

Comunque del resto siano andate le cose, certo si è che, trascorso ormai sì lungo lasso di tempo, e dopo che tanti trattati esposti con pieno rigore e coi nuovi metodi si erano pubblicati in Italia e fuori, la pubblicazione delle mie lezioni, fatta ora, perdeva la maggior parte dell'interesse che pure avrebbe potuto avere se fosse stata fatta quando era tempo, cioè verso il 1880 o poco dopo.

D'altra parte, esaurite di nuovo al principio dell'anno scolastico 1905-906 le autografie che i miei studenti reclamavano, mi trovai naturalmente portato di nuovo

---

di Taylor che spiegano e mettono bene in evidenza come possa avvenire che, mentre lo sviluppo arrestato ad un termine qualsiasi dà *sempre* la funzione con tutto quel grado di approssimazione che si vuole quando si resta entro certi intervalli o entro certi campi convenientemente determinati, andando più oltre nello sviluppo avviene invece che, o i termini perdono ogni significato perchè non esistono più neppure le derivate della funzione o, pure esistendo queste derivate, lo sviluppo, anzichè avvicinarsi, si allontana sempre più dal valore della funzione, e può anche divenire divergente, e talvolta i termini dello sviluppo possono anche crescere indefinitamente. E nel calcolo integrale mi apparivano più specialmente interessanti ad es. gli studii generali sugli integrali delle funzioni sempre finite e di quelle che crescono all'infinito estesi ad intervalli finiti o ad intervalli infiniti, gli studii sulla integrazione per serie, quelli generali sugli integrali delle funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili ecc. E ciò per tacere di altri e non pochi punti delle stesse lezioni che pure avrebbero potuto richiamare l'attenzione degli studiosi.

(*) *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen ecc.* Deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth und Adolf Schepp (Leipzig — G. Teubner. 1892).

a pensare se non fosse il caso di pubblicare finalmente per le stampe quelle lezioni, anzichè autografarle ancora una volta.

Consigliato anche da amici e colleghi carissimi mi decisi per la stampa, coll'intendimento dapprima di attenermi alle autografie senza farvi alcun cambiamento; e ciò allo scopo non già di aggiungere un nuovo trattato di Analisi infinitesimale ai tanti che già si hanno, ma più specialmente per l'interesse storico che la pubblicazione a stampa poteva avere, quello cioè di mostrare quale si fosse nel 1877 — all'introduzione dei nuovi metodi — l'insegnamento del Calcolo in questa università alla quale mi legano tutti i ricordi della mia vita.

Che se come trattato di Calcolo infinitesimale fosse potuto apparire troppo minuzioso e troppo esteso per la maggior parte dei giovani studenti universitari che mirano agli studii di applicazione più che a quelli dell'alta matematica, era però da rilevare che, pure conservando una conveniente generalità, il rigore apportato negli studii anzichè complicare la scienza la rendeva più semplice e più chiara; mentre d'altra parte non si doveva dimenticare che, a Pisa, la scuola matematica e la Scuola normale superiore fiorenti portavano e portano tuttora a tenere anche gli alti studii in grande onore; e che in ogni modo pei giovani avviati alle scuole d'applicazione il libro, limitato per essi, nel suo svolgimento nel corso universitario, a certe parti soltanto, avrebbe pure potuto — come del resto la lunga esperienza mostrava — pienamente e utilmente servire; riservando poi per lezioni o per studii complementari le parti rimanenti per gli altri giovani.

Con tali intendimenti dunque mi accinsi alla pubblicazione delle lezioni autografate del 1877-78; e al proposito di non farvi cambiamenti altro che in qualche nota, e raramente e in via eccezionale, ma indicandoli allora sempre espressamente, anche nel testo, mi attenni fino a un certo punto nel modo il più scrupoloso; e questo mio proposito lo indicai più volte in varie di quelle note per dare ragione di alcune parti del testo medesimo. Ma giunto alle applicazioni geometriche del calcolo differenziale, pure mantenendo il piano delle dette lezioni del 1877-78 e pure avendo sempre in animo di farvi cambiamenti il meno possibile, non potei resistere al desiderio di introdurre alcune modificazioni alquanto sostanziali ed aggiunte in quella parte sì bella e sì importante delle applicazioni del calcolo infinitesimale.

Come già ho detto le mie lezioni erano basate sui concetti stessi che mi avevano guidato nei *Fondamenti*.

La teoria dei limiti che è come il fondamento dei nuovi metodi del calcolo infinitesimale, i concetti generali sulle funzioni, quelli sulle serie, e specialmente sulle serie convergenti in ugual grado quali si trovano esposti nei *Fondamenti*, formavano già ogni anno come l'introduzione al corso delle mie lezioni autografate; e per essa i *Fondamenti* appunto servivano di guida ai miei giovani.

Esaurita da parecchi anni l'edizione italiana anche di questi, ho creduto perciò opportuno di fare precedere le lezioni, a forma d'*Introduzione,* anche da quei capitoli dei miei *Fondamenti* che, sebbene li svolgessi ogni anno in buona parte nel corso, non facevano parte delle lezioni autografate; e ciò ho fatto portando negli stessi capitoli alcune modificazioni e aggiunte.

La circostanza però che le lezioni autografate del 1877-78 non erano precedute da questi capitoli dei *Fondamenti,* e l'altra che la stampa di essi è stata fatta soltanto dopo che quella del testo era già pressochè ultimata, hanno fatto sì che nel testo vi sono certi richiami ai *Fondamenti* che avrebbero potuto invece essere fatti alla *Introduzione,* e vi si trovano certe considerazioni che avrebbero potuto essere omesse o diversamente esposte, dopo quelle che si contengono nella *Introduzione* medesima; ma il lettore, avvertito ora anche di questo, non ne avrà da ciò alcuno inconveniente.

Questo per ciò che riguarda il volume attuale di questo trattato, cioè il Calcolo differenziale. Per la parte che riguarda il Calcolo integrale che già ho incominciato a stampare mi riservo di esporne il piano con qualche dettaglio nella prefazione dalla quale lo farò precedere.

Ora dirò soltanto che, entrato ormai nel concetto di fare, sia pure il meno possibile, modificazioni e aggiunte alle lezioni autografate, anche nel pubblicare il Calcolo integrale dovrò allontanarmi alquanto da queste, facendovi aggiunte in note e aggiunte e modificazioni nel testo, salvo, per queste ultime, a indicarle sempre almeno nei loro punti principali. E ciò tanto più che è specialmente per le modificazioni che già fino dai primi tempi avevo in animo di apportare a questa seconda parte delle mie lezioni che finii poi per non pubblicare cosa alcuna, lasciando affidata soltanto alle autografie la pubblicità di tutto.

Nelle due parti di questo trattato il lettore non troverà che raramente applicazioni e esercizii, e ciò costituisce un difetto che io pel primo riconosco. Ma l'estensione già estremamente grande che l'opera viene ad avere, e la circostanza che, per aggiungervi nuove applicazioni e esercizii in numero conveniente, la pubblicazione sarebbe stata ancora ritardata chi sa per quanto e forse abbandonata per sempre, mi hanno indotto a pubblicarla senza di quelli.

Al collega carissimo prof. Nicoletti, e agli egregi assistenti che ebbi successivamente durante la stampa di questo volume, il dott. Umberto Sbrana e il dott. Elia Levi, che mi coadiuvarono nella revisione delle bozze e talvolta mi dettero anche suggerimenti utilissimi, porgo ora le più vive grazie.

E dopo ciò chiedo venia al lettore se in questa prefazione così a lungo ho dovuto parlare di me nel fare quasi una storia delle peripezie che queste mie lezioni hanno avuto. Ciò mi è stato necessario di fare per spiegare le ragioni per le quali le lezioni stesse non vengono pubblicate che ora, e il lettore vorrà, io spero, scusarmene.

Pisa, 30 marzo 1907.

U. DINI.

INTRODUZIONE

I.

Considerazioni generali

1. — Le quantità che si presentano nelle matematiche sono di due specie: *quantità costanti, e quantità variabili.* Le prime hanno valori fissi e determinati, che in conseguenza non sono suscettibili nè di aumento nè di diminuzione; le seconde al contrario possono prendere più valori in numero finito, o in un numero grande quanto si vuole (infinito), per modo cioè che qualunque sia il numero di questi valori che già si abbiano, possano aversene o immaginarsene sempre degli altri.

Come è noto poi le quantità si distinguono in reali e complesse; e negli studii che stiamo per intraprendere avremo il più spesso da considerare le quantità reali; e anzi, salvo che non si avverta espressamente il contrario, intenderemo sempre di parlare di quantità reali.

2. — Essendo y una quantità variabile reale, immagineremo pel solito che i suoi valori siano rappresentati dai punti di una retta, determinando questi punti colle loro distanze contate da un punto fisso (*origine o zero*) in un senso o in un altro, e corrispondendo queste distanze ai valori numerici delle quantità che si considerano, e il senso essendo determinato dal segno di queste quantità.

Ammesso, in ordine alla teoria dei numeri incommensurabili, che ad ogni numero reale corrisponda un punto di una retta e viceversa, noi in ciò che segue per dire che i valori che si considerano di una certa quantità sono tutti compresi fra due numeri α e β, diremo bene spesso che cadono nell'intervallo (α, β) avendo così riguardo alla loro rappresentazione geometrica sulla linea retta; e per indicare che la variabile x ha il valore a diremo indifferentemente *punto* a o *valore* a della variabile.

Gli intervalli che considereremo potranno essere naturalmente finiti o infiniti; bene spesso però saranno finiti, e in tali casi verrà così ad essere

fatta una prima limitazione alla variabilità della variabile che si considera la quale non potrà prendere valori fuori di quegli intervalli.

Potrà darsi poi che in un intervallo si debba considerare un punto qualsiasi, o che si debbano considerare soltanto dei punti che soddisfano a condizioni speciali. Così ad es. fra 0 e 1, o nell'intervallo $(0, 1)$, potrà darsi che si debba considerare qualunque valore della variabile o qualunque punto, come potrà darsi invece che si debbano considerare soltanto ad es. valori razionali della variabile stessa, o come si dice, i punti razionali, restando così lasciati da parte tutti i valori o punti irrazionali ecc.; dal che apparisce che alla limitazione già indicata della variabile per la quale non le vengano assegnati valori altro che in intervalli finiti potranno essere aggiunte anche altre limitazioni.

3. — Similmente, avendo da considerare due variabili x e y, intenderemo bene spesso che ad esse corrisponda un punto del piano determinato dai valori delle variabili stesse, come se fossero due coordinate cartesiane rispetto a due assi ortogonali.

Talvolta poi alle due variabili si potranno riguardare come corrispondenti i punti di una superficie, considerando le variabili stesse come coordinate sulla superficie di questi punti, come sarebbero ad es. la longitudine e la latitudine nel caso della sfera, ecc.

Riguardando x e y come coordinate cartesiane dei punti di un piano, potrà darsi che per la loro variabilità non si abbia alcuna limitazione e che debbano essere considerate per tutti i valori reali, nel qual caso ad esse verrà a corrispondere qualunque punto del piano; come potrà darsi che si abbia una prima limitazione alla loro variabilità perchè si debbano considerare solo pei valori che corrispondono a punti che cadono in una porzione determinata del piano.

Così ad es. se per la x dovranno prendersi solo i valori compresi tra a e b e per la y quelli fra c e d (gli estr. incl.) i punti corrispondenti saranno quelli del rettangolo i cui vertici sono nei punti di coordinate (a, c), (b, c), (b, d), (a, d). Se per x e y dovranno prendersi i valori pei quali $x^2 + y^2 \leq 1$, i punti corrispondenti saranno quelli compresi entro la circonferenza di raggio 1 che ha il centro all'origine, e su questa circonferenza; se per x e y dovranno prendersi i valori pei quali si ha $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, i punti corrispondenti saranno quelli compresi fra le circonferenze col centro all'origine e coi raggi $\frac{1}{2}$ e 1, e su queste circonferenze. E se nel primo di questi casi dovrà essere sempre $x^2 + y^2 < 1$ e nel secondo $x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$ e $x^2 + y^2 < 1$, si verranno a considerare soltanto i punti *entro* la circonferenza di raggio uno, o *interni* allo spazio limitato dalle due circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ e 1, escludendo cioè i punti del contorno (formato da una o da due circonferenze) della porzione di piano che si considera.

E anche in questi casi, nelle porzioni determinate del piano, o come si dice, nei *campi* che si considerano, potrà darsi che si abbiano altre limitazioni alla variabilità delle nostre variabili, perchè potrà darsi che alcuni punti debbono essere lasciati da parte, come avviene ad es. quando non si debbono considerare altro che i valori razionali di x e y pei quali sono soddisfatte le condizioni precedenti, ecc.

4. — Similmente se si hanno tre variabili x, y, z, queste variabili considerate come coordinate cartesiane rispetto a tre assi ortogonali, per ogni sistema dei loro valori corrisponderanno ad un punto nello spazio; e potrà darsi che si debbano considerare i punti corrispondenti a qualsiasi sistema di valori di x, y, z, o quelli soltanto che, soddisfacendo a certe condizioni speciali, vengano ad essere contenuti in porzioni determinate dello spazio, o in campi speciali a tre dimensioni, come ad es. quelli entro la sfera di raggio 1 col centro all'origine e quelli alla superficie quando ci sia la condizione $x^2+y^2+z^2\leq 1$, e soltanto quelli *entro* la sfera (esclusa cioè la superficie) quando debba essere sempre $x+y^2+z^2<1$.

5. — Ed infine se si avranno più di tre variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, riportando a questo caso le considerazioni e il linguaggio geometrico diremo che ad ogni sistema di valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ per $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrisponde il punto di coordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nello spazio ad n dimensioni; e potrà darsi che si debbano considerare i punti corrispondenti a qualsiasi sistema di valori di queste variabili, come potrà darsi che si debbano considerare soltanto quelli che soddisfano a certe condizioni speciali, o quelli che, come si dice, cadono in campi speciali a n dimensioni; come ad esempio quelli pei quali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ debbono sempre mantenersi respettivamente negli intervalli (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ con esclusione o no di tutti o di alcuni dei valori estremi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, e di alcuni dei punti *interni* in quegli intervalli, ecc.

II.

Generalità sui gruppi (*) di numeri o di punti

6. — Siano dati alcuni numeri reali $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ definiti da certe leggi o da certe condizioni dalle quali uno qualunque di essi possa venire determinato; ma queste leggi o queste condizioni siano tutt'affatto qualunque e i valori che ci daranno per $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ siano in numero finito o infinito, o in altri termini questo numero finisca per arrestarsi o invece non si arresti mai, per modo cioè che qualunque sia il numero dei punti y che a un certo punto saranno stati determinati possano sempre, quando si voglia, determinarsene o immaginarsene ancora dei nuovi.

Diremo che questi numeri costituiscono un *gruppo di numeri;* e quando, come faremo spesso, li immagineremo rappresentati su una linea retta, di-

(*) La denominazione *Gruppo di punti* fu da me introdotta nei miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, Nistri, 1878) come traduzione della denominazione tedesca *Punktmengen* usata dal sig. G. Cantor che pel primo introdusse nella scienza queste considerazioni sui sistemi di punti di una linea retta in numero finito o in numero infinito che dipendono da certe leggi, estendendole poi anche ad altri elementi, e dando luogo a importanti teorie di alta analisi.

Dopo però fu introdotta la denominazione di *insieme di punti* o di *aggregati,* o di *sistemi lineari di punti,* e lo stesso Cantor in una lettera in francese indirizzata al sig. Mittag-Leffler e pubblicata a pag. 40 del Vol. 2 degli *Acta Mathematica* usò la parola *ensemble de points;* e ora la denominazione d'*insieme di punti* è quella più comunemente adottata, specialmente in Francia.

Qui però riproducendo pressochè immutati alcuni capitoli dei detti *Fondamenti* ecc. userò ancora la denominazione *gruppo di punti* che del resto in Italia trovasi ancora adottata in lavori pregevoli, pure avvertendo che le varie denominazioni *gruppi di punti, insieme di punti, aggregati,* o *sistemi lineari di punti,* corrispondono alla stessa cosa.

remo che i punti corrispondenti costituiscono *un gruppo di punti* (*). E così in particolare le classi di numeri razionali che servono a definire quelli incommensurabili costituiranno dei gruppi speciali di numeri; e i punti agli stessi numeri corrispondenti costituiranno gruppi di punti.

7. — Pel caso poi che si usi, come faremo il più spesso, quest' ultima denominazione, torna utile che noi diciamo fin d'ora che chiameremo *intorno di un punto* x preso in un intervallo finito (α, β) (gli estremi α e β inclusi o no) ogni intervallo, anche arbitrariamente piccolo ma di ampiezza sempre differente da zero, che goda della proprietà di essere tutto contenuto nell'intervallo dato e di avere il punto x nel suo *interno* quando questo punto è interno all'intervallo dato stesso, e averlo soltanto ad un estremo quando esso è un estremo dell'intervallo dato; e così sarà un intorno di un punto x *interno* all'intervallo dato (α, β) ogni intervallo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon')$, dove ε e ε' sono differenti da zero e positivi, che sia tutto contenuto nell'intervallo dato stesso; mentre se x è un estremo α o β, e si ha per es. $\alpha<\beta$, sarà suo intorno ogni intervallo $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ o $(\beta-\varepsilon, \beta)$ dove ε è positivo, che sia tutto contenuto in quello dato.

E distingueremo talvolta separatamente la parte di un intorno *a destra* di x e la parte dell'intorno *a sinistra,* intendendo con queste denominazioni le parti dell'intorno di x che sono respettivamente a destra e a sinistra di x (il punto x incluso), e allora se x sarà interno all'intervallo dato avremo sempre una parte di intorno a destra e una parte di intorno a sinistra, mentre se x sarà un estremo α o β avremo da considerare una parte soltanto dell'intorno.

E si intende che si potrà parlare di *intorni di un punto* anche per intervalli di ampiezza infinita, convenendo però allora di chiamare *intorno del punto all' infinito*, per es. di $x=+\infty$, ogni intervallo da un numero positivo grande quanto si vuole all'infinito dalla parte delle quantità positive.

(*) Coll'indicare cogli indici $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ i numeri y non s'intende che essi siano dati ordinatamente, per modo cioè che y_1 debba considerarsi come il primo degli stessi numeri, y_2 il secondo, y_3 il terzo, ..., y_n l'n^o ecc., poichè bene spesso neppure avrebbe un significato il parlare di *primo, secondo, terzo* ecc. dei detti numeri, nè questi potranno sempre ottenersi col dare i valori interi $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ a una variabile che figuri nella loro espressione.

Così ad esempio quando questi fossero i numeri razionali compresi fra 0 e 1 (0 e 1 ad es. esclusi) senza alcuna eccezione, *e non fosse stabilita alcuna legge speciale pel loro modo di succedersi*, s'intende che non avrebbe nessun significato il parlare di primo, secondo, terzo ecc. dei numeri stessi.

Salvo dunque il caso di avvertenza in contrario, i numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ staranno solo a indicare numeri o punti *qualunque* del gruppo presi in esso in quell'ordine e con quella legge che più ci piace, e non altro.

In ogni caso poi invece di parlare di *intorni* di punti potremo anche parlare di *intorni di numeri,* ma torna spesso più chiaro e più comodo di riferirsi a punti.

8. — Ciò posto, prendiamo a considerare un gruppo di punti (o di numeri) $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ il cui numero sia infinito, e che siano tutti contenuti in un intervallo finito (α, β) (gli estremi α e β inclusi o no); e indichiamolo con G.

Diremo *punti-limiti* di questo gruppo quei punti x (siano o no del gruppo) dotati della proprietà che in ogni loro intorno anche arbitrariamente piccolo cadono sempre infiniti punti del gruppo (*); e col processo della successiva divisione dell'intervallo (α, β) in $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ parti eguali sarà facile di dimostrare che *qualunque sia il gruppo di punti* G *che si considera, quando questi punti siano tutti contenuti in un intervallo finito* (α, β) *e siano in numero infinito, esiste sempre almeno un punto-limite che potrà essere o no un punto del gruppo.*

Si divida infatti l'intervallo (α, β) in due parti uguali con un punto γ.

In uno almeno dei due nuovi intervalli (α, γ) e (γ, β) verrà certamente a cadere un numero infinito di punti del gruppo; e se questo accadrà per uno solo degli stessi intervalli, per es. per l'intervallo (γ, β), noi prenderemo a considerare questo nuovo intervallo, mentre se in ambedue verranno a cadere infiniti punti del gruppo noi prenderemo a considerare uno qualunque dei due intervalli, per es. il primo.

Nell'un caso e nell'altro dunque noi avremo da considerare un nuovo intervallo, per es. (γ, β), metà del primo (α, β) e tutto contenuto in questo, nel quale cadranno infiniti punti del gruppo dato; e poi operando sul nuovo intervallo preso a considerare come si è operato sul primo, ne troveremo un altro al modo stesso che sarà contenuto nel precedente e sarà la metà di questo e in esso cadranno ancora infiniti punti del gruppo; e potendo continuare questo processo indefinitamente si vede subito che segnando sulla retta gli estremi inferiori e gli estremi superiori degli intervalli che si considereranno successivamente, e che andranno impiccolendo oltre ogni limite, si verranno a formare due classi di numeri sempre crescente o fissa la prima, e sempre decrescente o fissa la seconda le quali avranno le particolarità delle classi contigue, e definiranno perciò un numero determinato λ che potrà appartenere o no al gruppo dato, e potrà anche essere uno degli estremi dell'intervallo (α, β).

(*) La denominazione di punti-limiti fu introdotta da Cantor ed è comunemente usata. Alcuni Autori però hanno attribuito a questi punti anche il nome di *punti di accumulazione.*

Questo numero λ sarà evidentemente compreso in tutti gli intervalli costruiti successivamente, potendo però essere a uno degli estremi di questi intervalli (ciò che avverrà quando dopo un certo numero di operazioni successive quell'estremo resti sempre invariato); e esso sarà un punto-limite del gruppo, poichè per ogni intorno comunque piccolo che si prenda del punto stesso gli intervalli successivamente costruiti al loro successivo impiccolirsi finiranno per essere compresi in quell'intorno nel quale perciò verranno a cadere infiniti punti del gruppo.

Evidentemente poi con questo processo, oltre a giungere a costruire effettivamente punti-limiti di un gruppo, si mette in chiaro come bene spesso potranno esistere anche infiniti di tali punti, perchè potrà avvenire che fra gli intervalli che si lasciano da parte successivamente nel processo seguito ve ne sia un numero infinito nei quali cadono infiniti punti del gruppo, o ve ne siano alcuni che colla scomposizione successiva possono dar luogo a infiniti intervalli diversi che conducono ciascuno almeno a un punto-limite, ecc. (*).

9. — Ora questi punti-limiti del gruppo G costituiranno un nuovo gruppo di punti contenuti essi pure nell'intervallo dato (α, β), ma che però potrà avere soltanto un numero finito di punti e anche uno solo; e noi, in quanto risulta da G, lo diremo con Cantor *il primo gruppo derivato* di G e lo indicheremo con G'. Se poi questo gruppo G' sarà anch'esso composto di un numero infinito di punti, colla ripetizione del processo precedente potremo ottenere da esso un nuovo gruppo che si indicherà con G'' e si dirà il *secondo gruppo derivato* di G; e così in generale quando si possa ripetere ν volte

(*) Un gruppo, come già notammo, può avere anche punti a distanza infinita, nel senso che a distanze comunque grandi almeno da una parte si trovano sempre nuovi punti del gruppo.

In questi casi evidentemente il punto all'infinito è sempre un punto-limite; mentre allora — come avviene ad es. nel caso del gruppo formato dalla serie dei numeri naturali positivi $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — possono non esservi punti-limiti a distanza finita.

Esistendo però sempre anche in questi casi un punto-limite (a distanza infinita) si può dire che il teorema enunciato vale per qualunque gruppo che contenga un numero infinito di punti.

Gli studii però che qui facciamo, salvo i casi nei quali si avverte espressamente il contrario, si riferiscono sempre a gruppi tutti contenuti in intervalli finiti. Questi gruppi con una denominazione recentemente introdotta si chiamano gruppi *limitati*, e considerando anche il caso dei gruppi che si estendono all'infinito almeno da una parte, questi gruppi si dicono *limitati superiormente* o *inferiormente* secondochè la parte dalla quale *non* si estendono all'infinito è quella dei numeri positivi o quella dei numeri negativi.

di seguito lo stesso processo, giungeremo ad un gruppo che si indicherà con $G^{(\nu)}$ e si dirà il ν^o *gruppo derivato* di G.

E poichè potrà avvenire che formando successivamente i gruppi derivati di G si giunga a un gruppo derivato $G^{(\nu)}$ che sia composto soltanto di un numero finito di punti e che quindi non dia più luogo ad altri gruppi derivati, come potrà avvenire invece che, spingendo oltre quanto si vuole lo stesso processo, non si giunga mai a un gruppo derivato composto di un numero finito di punti soltanto, noi potremo dividere in due specie i gruppi (finiti o infiniti) di punti che cadono tutti in un intervallo finito, dicendo *gruppi di prima specie* quelli che hanno soltanto un numero finito di gruppi derivati o anche nessuno (il qual ultimo caso però avviene soltanto quando sono composti di un numero finito di punti), e dicendo invece *gruppi di seconda specie* quelli che hanno un numero infinito di gruppi derivati. E fra i gruppi di prima specie potremo dire gruppi di prima specie e di ordine zero o più semplicemente (senza ricordare la specie il che ora si rende inutile) *gruppi di ordine zero*, quelli che sono composti di un numero finito di punti e che quindi non hanno gruppi derivati; *gruppi di ordine primo* quelli che hanno un sol gruppo derivato; e in generale *gruppi di ordine* ν^o quelli che hanno soltanto ν gruppi derivati; e così se G sarà un gruppo di ordine ν, i gruppi $G', G'', \ldots G^{(\nu)}$ saranno degli ordini $(\nu-1), (\nu-2), \ldots$ e zero respettivamente.

Così per es. il gruppo di punti $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$ sarà di prima specie e di prim'ordine perchè ha soltanto un gruppo derivato che è quello composto dei due punti 0 e $\frac{1}{2}$; e il gruppo $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots)$ sarà di second'ordine perchè ha un primo gruppo derivato $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$ e un secondo gruppo derivato che si riduce al punto zero. E invece il gruppo G dei numeri razionali fra 0 e 1 sarà di seconda specie, perchè il suo primo gruppo derivato G' sarà composto di tutti i numeri (razionali e irrazionali) fra 0 e 1, e i gruppi derivati seguenti saranno sempre uguali a G'.

10. — Osserviamo ora che i punti che comporranno il primo gruppo derivato di un gruppo infinito G potranno non appartenere al gruppo stesso G, perchè i punti-limiti di un gruppo possono non appartenere al gruppo, come avviene per es. pel punto-limite zero pei gruppi indicati sopra.

Invece i punti che comporranno i gruppi derivati 2.°, 3.°, 4.°, ..., se questi gruppi esistono, apparterranno tutti *effettivamente* al primo gruppo derivato; giacchè se un punto x che appartiene al gruppo derivato $G^{(m)}$, essendo $m \geq 2$, non appartenesse anche a G', esisterebbe un intorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon')$ di questo punto nel quale cadrebbe soltanto un numero finito di punti di G, o non ve ne cadrebbe alcuno, e quindi nessun punto *interno* in questo intorno apparterrebbe a G', e in conseguenza neppure a G'', G''', .. $G^{(m)}$, ciò che è contro l'ipotesi.

Ne segue che, dopo ottenuto il primo gruppo derivato G', formando i gruppi derivati seguenti, quando esistono, non si otterranno punti nuovi; e quindi in particolare si può dire che *se un gruppo di punti di seconda specie è tale che un suo gruppo derivato contenga tutti i punti di una porzione* (a, b) *dell'intervallo dato, anche il suo primo gruppo derivato conterrà tutti questi punti.*

11. — Un gruppo G si dice che *contiene* un altro gruppo G_1 quando ogni punto di questo appartiene a G; e il gruppo G_1 alla sua volta si dice allora che è *contenuto* in G; quindi pel teorema dimostrato si può dire che *ogni gruppo derivato di un gruppo infinito* G *contiene tutti i gruppi derivati seguenti* quando esistono, mentre ad esempio il primo dei gruppi considerati al § 9 è contenuto nel secondo.

E chiamando, come si usa, *gruppi chiusi* quei gruppi che contengono il gruppo derivato, e *gruppi concentrati* quelli che sono contenuti nel gruppo derivato, si può dire che *ogni gruppo derivato di un gruppo* G *è un gruppo chiuso.*

Si chiamano *gruppi perfetti* quelli che si riproducono completamente nel gruppo derivato per modo che vengono a coincidere con questo e quindi anche coi gruppi derivati seguenti i quali dovranno evidentemente esistere.

E così ad esempio il gruppo dei numeri reali di un certo intervallo è un gruppo perfetto; mentre il gruppo dei numeri razionali di un dato intervallo o quello dei numeri irrazionali non sono perfetti e sono invece gruppi concentrati perchè evidentemente e l'uno e l'altro hanno per gruppo derivato quello di tutti i numeri reali che contiene tanto i numeri razionali che quelli irrazionali.

I gruppi perfetti riproducendosi continuamente nei loro gruppi derivati sono sempre di seconda specie; ma inversamente *non tutti* i gruppi di seconda specie sono perfetti. Così ad es. non è perfetto il gruppo dei punti razionali di un dato intervallo sebbene esso sia di seconda specie. È perfetto però il suo primo gruppo derivato.

Si distinguono poi da tutti i precedenti quelli che si chiamano *gruppi isolati,* cioè quei gruppi nessun punto dei quali appartiene al gruppo derivato come è ad es. il gruppo dei punti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; e tale denominazione è dovuta alla circostanza che in intorni ridotti sufficientemente piccoli di ogni punto del gruppo non esistono più punti del gruppo stesso, per modo che i punti del gruppo possono riguardarsi come staccati l'uno dall'altro.

12. — Quando si hanno due gruppi G e G_1, se fra i loro punti si può stabilire una corrispondenza biunivoca, per modo che ad ogni punto del primo gruppo ne corrisponda uno del secondo e viceversa, quei due gruppi sono considerati come *equivalenti,* e si dice che hanno la stessa *potenza.*

Naturalmente se un gruppo è finito (cioè composto di un numero finito di punti) bisogna che anche l'altro sia finito e composto dello stesso numero di punti perchè possano essere di uguale potenza, nè alcun che di speciale è da dirsi per essi; ma pei gruppi infiniti che sono quelli che ordinariamente si presentano negli studii molte altre considerazioni possono farsi.

Il gruppo (infinito) più semplice è quello G_N dei numeri naturali $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ e i gruppi che hanno la stessa potenza di questo si dicono *gruppi numerabili,* perchè i loro punti quando sia stabilita la corrispondenza indicata potranno essere rappresentati sempre con $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ e essere considerati nell'ordine di questi.

Così il gruppo G_p dei numeri pari avrà la stessa potenza di quello dei numeri naturali, e sarà quindi un gruppo numerabile, perchè una corrispondenza biunivoca potrà essere sempre stabilita in modo che ad ogni numero del gruppo G_p corrisponda il numero metà nel gruppo G_N, e reciprocamente ad ogni numero di G_N corrisponda il numero doppio in G_p.

Così pure il gruppo dei numeri razionali distinti $\frac{m}{n}$ avrà la stessa potenza di quello G_N dei numeri naturali, e quindi sarà un gruppo numerabile, perchè basterà immaginare scritti i numeri razionali in certi ordini determinati per potere stabilire la corrispondenza biunivoca sopra indicata colla serie dei numeri naturali.

Ad esempio se scriveremo successivamente i numeri $y = \frac{m}{n}$ in modo che venga scritto prima quello pel quale la somma dei numeri m e n è 1, (che sarà zero), poi si scrivano quelli nei quali la somma dei detti numeri m e n è 2, poi quelli nei quali la detta somma è $3, 4, 5, \ldots$ avendo sempre cura di scriverli in ogni gruppo parziale per es. nell'ordine decrescente di m, e tralasciando via via quei numeri che si fossero già trovati prima, potremo poi attribuire ai numeri y così scritti gli indici $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ successivamente e la corrispondenza voluta verrà stabilita.

In corrispondenza a questo ordinamento i numeri razionali verranno scritti così

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \frac{6}{1} \ldots$$

e questi numeri verranno rappresentati successivamente da $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, \ldots$

I gruppi poi che abbiano la stessa potenza di quello dei numeri reali compresi fra 0 e 1 per modo cioè che fra i numeri dei due gruppi si possa stabilire una corrispondenza biunivoca per la quale ogni numero del primo gruppo venga a corrispondere a un numero reale fra 0 e 1 e viceversa, si dirà che hanno la *potenza del continuo.*

13. — Premesse queste nozioni generali sui gruppi facciamo osservare che i gruppi di punti di prima specie, anche quando non sono di ordine zero, in qualunque porzione (a, b) dell'intervallo (α, β) in cui sono contenuti godranno della proprietà che togliendo dalla stessa porzione — con intervalli arbitrariamente piccoli (ma di ampiezza differente da zero) — gli intorni di un numero finito di punti, negli intervalli restanti non cadranno più punti del gruppo.

Supposto infatti che il gruppo G che si considera sia di ordine ν^o, nell'intervallo (a, b) (a e b inclusi) non cadrà nessun punto del ν^o gruppo derivato $G^{(\nu)}$ o ve ne cadrà soltanto un numero finito, e formando nello stesso intervallo per ognuno di questi punti (se ve ne sono) degli intorni arbitrariamente piccoli e togliendoli da (a, b), otterremo un numero finito di altri intervalli $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$, in ciascun dei quali non cadrà nessun punto del gruppo di $G^{(\nu-1)}$, o ve ne cadrà soltanto un numero finito, perchè altrimenti negli stessi intervalli dovrebbero cadere anche punti di $G^{(\nu)}$.

Togliendo ora in modo simile dagli intervalli $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots$ i punti di $G^{(\nu-1)}$, se ve ne sono, negli intervalli restanti, che saranno pure in numero finito, non avremo che un numero finito di punti di $G^{(\nu-2)}$, o anche nessuno; e così continuando si vede chiaramente che, dopo di avere tolti successivamente dai varii intervalli che successivamente si ottengono gli intorni sufficientemente piccoli dei punti di $G^{(\nu)}$, $G^{(\nu-1)}$, $G^{(\nu-2)}, \ldots, G', G$ che in essi cadono, e che evidentemente saranno in numero finito, resteranno degli intervalli nei quali non avremo più punti del gruppo dato.

È però da notare che se il gruppo non è di ordine zero il numero dei punti da togliersi così successivamente con intorni sufficientemente piccoli, sebbene sia sempre finito, andrà crescendo indefinitamente coll' impiccolire degli intorni che si toglieranno.

14. — Ed è pure da notare che pel teorema dimostrato possiamo anche dire che *pei gruppi di prima specie in ogni porzione dell' intervallo (α, β) esistono sempre alcuni intervalli nei quali non cadono punti del gruppo; e la stessa porzione può sempre dividersi in intervalli tali che la somma di quelli nei quali cadono punti del gruppo sia minore di quella quantità che più ci piace σ.*

Si osservi infatti che se G è il gruppo dato di ordine ν, e fra a e b (a e b inclus.) cadono m punti di $G^{(\nu)}$, e m è diverso da zero, gli intervalli coi quali questi punti si tolgono possono prendersi tutti eguali a $\frac{\sigma_\nu}{m}$, essendo σ_ν piccolo quanto si vuole, o anche minori di $\frac{\sigma_\nu}{m}$, e allora la loro somma non supererà σ_ν.

Dopo poi di avere tolti questi intervalli, se in quelli restanti cadranno m' punti di $G^{(\nu-1)}$, essendo m' diverso da zero, gli intervalli coi quali questi punti si tolgono potranno prendersi uguali a $\frac{\sigma_{\nu-1}}{m'}$ o anche minori, e così la loro somma non supererà $\sigma_{\nu-1}$, e la somma di tutti gli intervalli tolti non supererà $\sigma_\nu + \sigma_{\nu-1}$; e ora, così continuando, si vede chiaramente che ammesso anche, come precedentemente, che in tutti i successivi intervalli cadano sempre un certo numero di punti di tutti i gruppi $G^{(\nu-1)}, G^{(\nu-2)}, \ldots, G', G$ respettivamente (ciò che è il caso più sfavorevole), la somma degli intervalli che in fine saranno stati tolti non supererà $\sigma_\nu + \sigma_{\nu-1} + \sigma_{\nu-2} + \ldots + \sigma_1 + \sigma_0$; e quindi, siccome ν è un numero finito e le $\sigma_\nu, \sigma_{\nu-1}, \sigma_{\nu-2}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$ sono arbitrariamente piccole, la stessa somma potrà ridursi sempre minore di qualunque quantità data σ.

15. — Il teorema dimostrato mette in evidenza che ci sono gruppi infiniti, i punti dei quali possono racchiudersi in intervalli talmente piccoli che la somma degli intervalli nei quali vengono allora ad essere compresi i punti del gruppo sia piccola ad arbitrio, dopo di che negli intervalli rimanenti non cadranno più punti del gruppo. E vi sono invece altri gruppi, come ad es. quello dei numeri reali, o anche soltanto quello dei numeri razionali in un certo intervallo, pei quali ciò non è possibile in nessun modo, e per nessuna porzione dell' intervallo nel quale il gruppo è contenuto.

I primi gruppi vengono detti talvolta *gruppi di punti rinchiudibili,* e ad essi, per quanto abbiamo visto, appartengono in particolare tutti i gruppi di prima specie; i gruppi poi pei quali in ogni porzione comunque piccola di un certo intervallo cadono punti del gruppo, vengono detti *gruppi densi nell' intervallo.*

Queste considerazioni sui gruppi rinchiudibili e sui gruppi densi nell' intervallo si collegano con quelle relative ai gruppi che si dicono *misurabili,* e con ciò che si chiama la loro *misura;* ma noi non possiamo ora neppure fermarci a dare le definizioni relative, per non uscire di troppo dal campo che dobbiamo necessariamente assegnarci, e rimandiamo perciò agli autori che trattano di questi soggetti in modo speciale e dettagliato (*).

16. Consideriamo ora un gruppo qualunque di numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tutti *finiti,* cioè *compresi fra due numeri finiti* α e β (α e β inclusi o no); e indichiamo con λ un numero dotato della proprietà che nessuno dei numeri y sia maggiore di λ e tale inoltre che, per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, fra $\lambda-\sigma$ e λ (λ inclusive) esistano sempre uno o più numeri y.

Questo numero λ si dirà il *limite superiore dei numeri* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ o il *limite superiore del gruppo;* e se esso sarà uno di questi numeri (come avviene sempre, per es. quando il loro numero è finito) allora sarà al tempo stesso il loro *massimo;* mentre se non sarà uno degli stessi numeri, allora questi numeri, quantunque compresi in un intervallo finito, *non ammetteranno un massimo* e λ sarà soltanto il loro limite superiore.

Ora, *qualunque sia il gruppo dei numeri dati* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *che supponiamo tutti compresi in un intervallo finito* (α, β) *(gli estremi* α *e* β *inclusi o no)* è facile di dimostrare *che in questo intervallo (gli estremi inclusi) esiste sempre per essi un limite superiore* (che in alcuni casi sarà al tempo stesso il loro massimo).

Si divida infatti l'intervallo (α, β), nel quale supporremo ad es. $\alpha<\beta$, in due intervalli parziali (α, γ) e (γ, β) segnando il punto di mezzo γ dell'intervallo stesso come si fece al § 8 [pag. XVI], e si esamini se vi siano o no numeri y maggiori di γ; e se non ve ne sono si prenda a considerare il primo intervallo (α, γ), mentre se ve ne sono si consideri invece il secondo intervallo (γ, β) nel quale allora verranno pure a cadere punti del gruppo.

Ammesso poi ad es. di essere nel primo caso, si operi sull'intervallo (α, γ) come si è operato sul primo (α, β), dividendolo cioè per metà col segnare un nuovo punto γ_1. Degli intervalli (α, γ_1), (γ_1, γ) che così si formeranno uno sarà tale che non vi sarà nessun punto del gruppo a destra del suo estremo superiore, mentre in esso vi saranno sempre punti del gruppo; e allora noi prenderemo a considerare questo nuovo intervallo, e opereremo su esso come si è operato sui precedenti.

Così continuando indefinitamente, e intendendo sempre segnati sulla retta gli estremi inferiori e superiori degli intervalli che successivamente si con-

(*) V. ad es. Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris, Gauthier Villars et fils 1898.

sidereranno, questi estremi daranno luogo a due classi contigue di numeri che definiranno un numero λ, e ora sarà facile vedere che questo numero λ sarà appunto il limite superiore richiesto dei numeri del gruppo, e potrà essere o no al tempo stesso il loro massimo.

Osservando infatti che il numero λ sarà sempre nell'interno o a un estremo (quello superiore) dei varii intervalli successivamente formati, e osservando inoltre che in questi intervalli esisteranno sempre punti del gruppo mentre non ne esisteranno a destra dei loro estremi superiori, s'intenderà subito intanto come nessun numero λ' superiore a λ potrà appartenere al gruppo, perchè gli intervalli stessi al loro successivo impiccolire finiranno per divenire di ampiezza inferiore a $\lambda'-\lambda$ e allora i loro estremi superiori saranno fra λ e λ' senza arrivare a λ' e nessun punto alla destra di questi estremi (e quindi neppure λ') appartiene al gruppo.

Invece in ogni intorno $(\lambda-\sigma, \lambda)$ a sinistra di λ esisteranno sempre punti del gruppo perchè i detti intervalli finiranno per essere sempre di ampiezza inferiore a σ, e rimarranno quindi tutti compresi in quell'intorno e in essi si troverà sempre almeno un punto del gruppo che potrà anche essere lo stesso punto λ; e così evidentemente resta dimostrato quanto abbiamo enunciato.

In simil modo considerando il *limite inferiore* dei valori $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ si potrebbe dimostrare che *qualunque sia il gruppo dato dei numeri* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *quando essi siano compresi in un intervallo finito* (α, β) *esisterà sempre in questo intervallo (gli estremi inclusi) un limite inferiore degli stessi valori,* che in alcuni casi sarà anche il loro minimo.

È poi quasi superfluo di notare che quando l'intervallo nel quale cadono i numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sia di ampiezza infinita, allora o sarà $+\infty$ il limite superiore, o sarà $-\infty$ il limite inferiore, o anche sarà ad un tempo $+\infty$ il limite superiore e $-\infty$ il limite inferiore, non ostante anche che non possa dirsi propriamente che fra i numeri dati vi siano numeri y infiniti.

Notiamo poi in particolare che il limite superiore o il limite inferiore delle classi di numeri commensurabili che definiscono i numeri incommensurabili sono questi numeri incommensurabili stessi.

17. — Inoltre è da notare che *se i numeri* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *di un gruppo sono in numero infinito e non ammettono un massimo, il loro limite superiore sarà sempre un numero-limite del gruppo, e quindi sarà il massimo del primo gruppo derivato;* giacchè se si osserva che, per quanto piccolo sia il numero positivo σ, fra $\lambda-\sigma$ e λ devono cadere sempre numeri y e questi sono differenti da λ, indicando con y' uno di questi valori y compresi fra $\lambda-\sigma$ e λ e con σ' un numero positivo minore di $\lambda-y'$, si potrà dire che anche fra $\lambda-\sigma'$ e λ dovrà esistere almeno un altro numero y''; e essendo

ora σ'' un numero positivo minore di $\lambda - y''$, fra $\lambda - \sigma''$ e λ cadrà ancora un numero y'''; e così continuando si vede chiaramente che fra λ e $\lambda - \sigma$, per quanto piccolo sia il numero positivo σ, cadranno sempre infiniti numeri y, e perciò λ sarà un numero-limite del gruppo che si considera.

Lo stesso dicasi del limite inferiore del gruppo di numeri $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ quando essi non ammettono il minimo.

Questi risultati valgono evidentemente anche quando il limite superiore è $+\infty$ o il limite inferiore è $-\infty$.

III.

Dei limiti

18. — Il concetto di limite è uno dei più fondamentali di tutta la matematica. Noi lo incontriamo fino negli elementi, nella Geometria cioè e nell'Aritmetica; e dei limiti occorre valersi in tutti i rami della matematica come nelle sue applicazioni.

In particolare il calcolo infinitesimale è, si può dire, una continua applicazione della teoria dei limiti la quale ne forma quasi il suo esclusivo fondamento; quindi, per quanto ordinariamente la teoria dei limiti venga esposta diffusamente anche nell'Algebra complementare, è naturale che ne trattiamo anche qui, onde il concetto di limite e i teoremi principali che ne derivano, stabiliti con tutto il rigore desiderabile, restino chiari e precisi nella mente di tutti.

Abbiasi perciò una quantità reale y che pei valori che si considerano di un'altra quantità x, escluso tutt'al più il valore particolare $x = a$, ha sempre un valore determinato e finito (cioè che in valore assoluto non può superare un certo numero dato), sia che questi valori che si considerano di x formino una serie di quantità continue o una serie di quantità discrete (costituendo così soltanto un gruppo infinito di valori di cui a è un *punto-limite)*.

Allora se esisterà una quantità finita e determinata A che goda della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, coll'avvicinarsi indefinitamente di x per valori decrescenti o per valori crescenti alla quantità a, che ora supponiamo finita, *senza che x divenga mai uguale ad a*, la differenza $A - y$ finisca per *divenire e restare poi costantemente* inferiore in valore assoluto al numero scelto σ, si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per y quando x si avvicina sempre più ad a per valori decrescenti o per valori crescenti;

od anche che A è il limite dei valori che si hanno per y quando ci si avvicina indefinitamente ad a dalla parte destra o dalla parte sinistra di a, intendendo con ciò che i valori di x si riguardino, come al solito, rappresentati su una linea retta.

In altri termini si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per x a destra o a sinistra di a, o anche, più semplicemente, che A è il limite di y per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=a+0$ e $x=a-0$ respettivamente (*), quando preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si potrà trovare un numero ε, positivo nel primo caso e negativo nel secondo, tale che per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) la differenza $A-y$ sia sempre numericamente inferiore a σ.

Se poi avverrà che coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra, y prenda *anche* valori infiniti (cioè maggiori numericamente di qualunque numero dato) o che finiscano per divenire grandi quanto si vuole in valore assoluto, allora se per ogni numero positivo e grande quanto si vuole ω si potrà trovare un numero differente da zero ε, positivo quando i valori di x che si considerano sono a destra di a e negativo quando sono a sinistra, tale che per tutti i valori di x fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) y si mantenga sempre maggiore di ω in valore assoluto, si dirà che i valori di y coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra hanno per limite $\pm\infty$; o più semplicemente si dirà che y per $x=a$ a destra o a sinistra ha per limite $\pm\infty$, restandoci così l'indeterminazione soltanto nel segno; e quando fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) y abbia sempre lo stesso segno, allora anche il segno del limite sarà determinato, e questo limite secondo i casi sarà ora $+\infty$, ora $-\infty$.

E quando infine la variabile x possa crescere indefinitamente per es. per valori positivi e secondo certe leggi (come per es. per numeri interi), allora se esisterà un numero finito e determinato A dotato della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, si possa sempre trovare un numero positivo x' così grande che per ogni valore di x maggiore di x' che può prendersi in considerazione, la differenza corrispondente $A-y$ sia sempre numericamente inferiore a σ, si dirà che A è il limite dei valori che si hanno per y quando x cresce indefinitamente per valori positivi, o più semplicemente il limite di y per $x=+\infty$.

(*) Questi simboli $a+0$ e $a-0$ sono spesso usati per indicare i punti a destra o a sinistra di a respettivamente e vicini quanto si vuole ad a (a escluso), e noi pure li useremo in questo senso.

E si dirà infine che y ha per limite l'infinito (positivo o negativo) per $x=\pm\infty$, per es. per $x=+\infty$, quando per ogni numero arbitrariamente grande e positivo ω esisterà un numero positivo x' tale che per ogni valore di x maggiore di x', che può prendersi in considerazione, y sia sempre maggiore di ω in valore assoluto.

E così, in particolare, potremo dire che delle funzioni $\sqrt[3]{1+2x\,\mathrm{sen}^2(x-a)}$

$$(x-a)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-a},\quad \frac{1}{(x-a)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x-a}},\quad \frac{1}{x-a},\quad \frac{\mathrm{sen}\,x}{x},\quad x+\mathrm{sen}\,\frac{1}{x},$$

la prima e la seconda hanno respettivamente per limite uno e zero per $x=a$ a destra e a sinistra di a, la terza ha per limite $\pm\infty$ per $x=a$ a destra o a sinistra, la quarta ha per limite $+\infty$ per $x=a$ a destra e $-\infty$ per $x=a$ a sinistra, la quinta ha per limite zero per $x=+\infty$, e la sesta ha per limite $+\infty$ per $x=\infty$ e $-\infty$ per $x=-\infty$.

19. — Quando poi coll'avvicinarsi di x ad a indefinitamente a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o negativi, y si comporti in modo che non si venga a rientrare in nessuno dei casi precedenti, allora si dirà che y non ha limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra respettivamente, o per $x=\pm\infty$; e così, in particolare, se y sarà sempre finita, essa non avrà un limite determinato per $x=a$, per es. a destra, quando non esisterà un numero A che goda della proprietà che, per ogni valore di σ inferiore a un certo numero, esista un corrispondente ε (positivo) tale che la differenza $A-y$ pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$ sia sempre numericamente minore di σ; o, in altri termini, y non avrà un limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra quando, qualunque valore si attribuisca alla quantità A, esistano sempre dei valori di σ pei quali non è possibile di trovare un valore per la quantità ε che goda della proprietà che per *ogni valore di* x fra a e $a+\varepsilon$ la differenza $A-y$ sia *sempre* numericamente minore di σ.

Similmente y non avrà un limite determinato per $x=a$ a destra o a sinistra quando coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a essa prenda *anche* valori grandi numericamente quanto si vuole, ma almeno pei valori di ω maggiori di un dato limite, per quanto piccolo si prenda il numero ε, la stessa y pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$ sia ora maggiore ora minore di ω in valore assoluto.

Enunciati analoghi si hanno per le condizioni di indeterminazione del limite di y per $x=\pm\infty$; e così in particolare si può dire che le quantità $y=\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-a}$, $y=1+\frac{1}{x-a}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x-a}$ per $x=a$ a destra e a sinistra, e le quantità $y=\mathrm{sen}\,x$, $y=x\,\mathrm{sen}\,x$ per $x=\pm\infty$ non hanno limiti determinati.

20. — Queste considerazioni si estendono anche al caso in cui y varii insieme con più variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Così, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono quantità finite e se esiste una quantità finita e determinata A che goda della proprietà che, preso a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, esistano sempre delle quantità differenti da zero $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ tali, che pei valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che possono prendersi in considerazione fra a_1 e $a_1+\varepsilon_1$, fra a_2 e $a_2+\varepsilon_2, \dots,$ e fra a_n e $a_n+\varepsilon_n$ respettivamente (il sistema $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$ escl.) la differenza $A-y$ sia sempre numericamente minore di σ, si dice che A è il limite dei valori che si hanno per y quando $x_1, x_2, \dots, x_n$ si avvicinano indefinitamente ad $a_1, a_2, \dots, a_n$ per valori decrescenti o crescenti respettivamente secondochè le corrispondenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sono positive o negative.

E considerazioni simili a quelle fatte sopra trattandosi di una sola variabile, potrebbero farsi anche adesso pei casi in cui si presentano limiti infiniti o indeterminati, o in cui tutti o alcuni dei valori $a_1, a_2, \dots, a_n$ delle variabili sono infiniti.

21. — Fermiamoci ora più specialmente sul caso in cui y varia insieme con un'altra variabile soltanto x, per valori continui o per valori discreti, e osserviamo che per la definizione stessa di limite che abbiamo dato, i valori di y dalle due parti (destra e sinistra) del numero finito a potranno avere limiti differenti, e quindi non sarebbe preciso il dire semplicemente che y per $x=a$ ha per limite A, a meno che i valori di y dalle due parti di a avessero uno stesso limite, o che la limitazione posta per la variabilità di x determinasse essa stessa il senso secondo il quale x deve avvicinarsi ad a; e quando useremo questa locuzione vorrà dire che saremo in uno di questi casi, o che pel nostro studio sarà inutile l'occuparsi del senso secondo cui x si avvicina ad a.

Inoltre osserveremo esplicitamente che quand'anche sia conosciuto o possa effettivamente calcolarsi il valore y_a di y per $x=a$, non si deve mai confondere questo *valore speciale* di y per $x=a$ col *limite dei valori* che si hanno per y dall'una o dall'altra parte di a.

Per la definizione stessa di limite s'intende subito infatti che i significati di queste quantità sono bene differenti, poichè il limite di y dipende soltanto dai valori che si hanno per y nei punti $a+0$ o $a-0$ *fuori del punto limite* a, e non già dal valore speciale che si avesse per y in questo punto, del qual valore, se anche esiste, non ci si cura affatto quando si cerca il detto limite; e mentre in alcuni casi queste quantità (limite di y e valore di y nel punto limite) possono esistere entrambe ed essere uguali, in altri casi può avvenire che esista il valore limite di y a destra o a sinistra di a e non esista

il valore y_a o non abbia verun significato, come può esistere invece questo valore y_a di y e non il valore limite; o esistendo sì l'uno che l'altro possono essere differenti.

Così per esempio:

1.° Se i valori di y saranno quelli di $\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$, il valore y_a di y per $x=a$ non avrà alcun significato, mentre il valore limite per $x=a$ a destra o a sinistra di a sarà uno; e se i valori di y saranno quelli della funzione che chiamasi derivata di quella che per x diverso da a è uguale a $(x-a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, allora poichè, come vedremo in seguito, per x diverso da a sarà

$$y = 2(x-a)\operatorname{sen}\frac{1}{x-a} - \cos\frac{1}{x-a},$$

e per $x=a$ sarà invece

$$y_a = \lim_{h=0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = 0\,,$$

il valore y_a di y per $x=a$ sarà determinato e uguale a zero, mentre il valore limite dei valori che si hanno per y quando ci si avvicina indefinitamente ad a a destra o a sinistra non esiste affatto.

2.° Se i valori di y pei varii valori di x saranno quelli della serie

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots,$$

allora il valore y_π corrispondente a $x=\pi$ sarà zero, mentre il valore limite dei valori di y a destra di π sarà $-\frac{1}{2}$, e quello a sinistra di π sarà $\frac{1}{2}$, perchè, come si dimostra in Analisi con tutta facilità, e come noi purè avremo occasione di mostrare fra non molto, la somma di questa serie per x compreso fra $-\pi$ e π (gli estremi $\pm\pi$ esclusi) è $\frac{1}{2}x$.

Circostanze simili possono aversi nel caso di valori limiti di date quantità y per $x=\infty$.

Notiamo poi che almeno generalmente, come apparisce anche dalla definizione, col considerare il limite di y per $x=a$ (a destra o a sinistra) si ha in mira di studiare l'andamento dei valori di y *fuori* del punto limite a mentre si va verso questo punto da una parte o dall'altra, senza curarsi affatto di ciò che accade per y in questo punto. E aggiungiamo anche che il più spesso non si parla del detto limite altro che quando il valore y_a non è definito, o quando, essendo conosciuto, è differente da quello del limite, o quando infine non vuole considerarsi insieme cogli altri valori o non può ottenersi collo stesso processo che determina gli altri valori di y a destra o a sinistra di a, sia perchè questo processo per $x=a$ non ha più significato, sia perchè lo stesso valore y_a deve essere effettivamente determinato con un processo differente. E in generale quando si parla di limite, vi è l'idea di non potere mai raggiungere il valore-limite stesso.

22. — Ricordiamo che intorno ai limiti si hanno i noti teoremi relativi ai limiti delle somme, dei prodotti ecc. quando i termini o i fattori che compongono queste somme o questi prodotti sono in numero finito e hanno limiti determinati e finiti; e poichè la dimostrazione che ordinariamente se ne dà è semplice e rigorosa, non stiamo qui a ripeterla.

Però facciamo osservare esplicitamente che questi teoremi sui limiti delle somme o dei prodotti di più quantità non possono applicarsi rigorosamente (altro che sotto certe condizioni) al caso in cui il numero dei termini della somma o dei fattori del prodotto sia infinito (cioè possa supporsi maggiore di qualunque quantità assegnabile) o cresca indefinitamente coll'avvicinarsi di x ad a o col crescere indefinito di x; che anzi in molti casi essi non sono più affatto giusti, e se ne ha un esempio nella serie precedente

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots,$$

giacchè in questa, mentre il limite della sua somma per $x=\pi$ a destra di π è $-\frac{1}{2}\pi$ e a sinistra è $\frac{1}{2}\pi$, la somma dei limiti dei differenti suoi termini è zero.

E come questo possa avvenire si comprende subito quando si porti attenzione al processo che giova tenere per la dimostrazione rigorosa del teorema sul limite delle somme U che sono composte di un numero *finito* k di termini $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$.

Per queste infatti, se $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$ sono i limiti respettivi di $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$ per $x=a$ per es. a destra, è certo che preso un numero arbitrariamente piccolo σ_1 esisterà un numero diverso da zero e positivo ε_1 tale che pei valori di x nell'intervallo da a ad $a+\varepsilon_1$ (a escl.) la differenza u_1-l_1 sia in valore assoluto sempre inferiore a σ_1.

Così pure preso un altro numero comunque piccolo σ_2, esisterà un numero diverso da zero e positivo ε_2 tale che pei valori di x nell'intervallo da a ad $a+\varepsilon_2$ (a escl.) si abbia in valore assoluto $u_2-l_2<\sigma_2$; e quando ε_2 fosse inferiore a ε_1 basterebbe prendere ε_2 invece di ε_1 anche per la prima differenza per avere uno stesso intervallo di ampiezza diversa da zero $(a, a+\varepsilon_2)$ che servisse per ambedue le differenze u_1-l_1 e u_2-l_2.

Facendo lo stesso per u_3 si troverà un intervallo $(a, a+\varepsilon_3)$ nel quale la differenza u_3-l_3 sarà sempre numericamente inferiore a un numero dato comunque piccolo σ_3, e al solito se venisse $\varepsilon_3<\varepsilon_2$ basterebbe prendere ε_3 anche per le due prime differenze per avere uno stesso intervallo $(a, a+\varepsilon_3)$ che servisse ad un tempo per le tre differenze u_1-l_1, u_2-l_2 e u_3-l_3.

Così continuando, siccome k è un numero finito, s'intende subito che, operando successivamente nel modo indicato, si arriverà sempre a trovare un numero diverso da zero e positivo ε tale che per ogni valore di x che sia da considerarsi nell'intervallo $(a, a+\varepsilon)$ le differenze $u_1-l_1, u_2-l_2, u_3-l_3, \ldots, u_k-l_k$ siano *tutte* numericamente inferiori a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_k$ respettivamente; e così nello stesso intervallo la differenza

$$\mathrm{U}-(l_1+l_2+\ldots+l_k)=(u_1-l_1)+(u_2-l_2)+\ldots+(u_k-l_k)$$

sarà sempre numericamente inferiore a $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k$, e quindi anche a un numero dato arbitrariamente piccolo σ, perchè si può intendere di aver prese le $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_k$ tutte inferiori a $\frac{\sigma}{k}$, e così il teorema per le somme composte di un numero finito di termini resta dimostrato completamente e con tutto il rigore.

E la dimostrazione stessa che abbiamo fatto mette subito in evidenza come il teorema possa cessare di essere vero quando i termini della somma sono in numero infinito, o crescono di numero indefinitamente coll'avvicinarsi indefinito di x ad a.

Dovendo infatti in questo caso continuarsi indefinitamente la ricerca successiva dei numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, s'intende subito come potrà darsi che i numeri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ o gli intervalli $(a, a+\varepsilon_1), (a, a+\varepsilon_2), (a, a+\varepsilon_3), \ldots, (a, a+\varepsilon_n), \ldots$ che si troveranno successivamente con questo processo, pure risultando ciascuno diverso da zero, possano in certi casi andare impiccolendo tanto da far sì che il loro limite inferiore sia lo zero.

E allora, prendendo i numeri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ in modo che le loro somme successive siano sempre inferiori al numero scelto sopra σ (come potrebbe farsi ad es. prendendo $\sigma_2\leq\sigma_1^2, \sigma_3\leq\sigma_1^3, \ldots, \sigma_n\leq\sigma_1^n, \ldots$ con $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}<\sigma$ perchè allora le stesse somme sarebbero inferiori a $\sigma_1+\sigma_1^2+\sigma_1^3+\ldots+\sigma_1^n+\ldots$ e quindi a $\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}$), non si potrebbe trovare un intervallo *di ampiezza diversa da zero*

$(a, a+\varepsilon)$ nel quale le differenze successive $u_1 - l_1, u_2 - l_2, u_3 - l_3, \ldots, u_n - l_n, \ldots$ risultassero sempre numericamente inferiori a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots$ respettivamente anche al crescere indefinito di n; e quindi, ammesso anche che la serie $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n + \ldots$ fosse convergente e avesse per somma L, non si potrebbe più assicurare la esistenza di un intervallo diverso da zero $(a, a+\varepsilon)$ tale che pei valori di x che fossero da considerarsi in esso si avesse sempre $U - L < \sigma$, mentre della esistenza di un tale intervallo dovremmo essere sicuri per potere essere certi della esistenza del limite L per U.

Ragionamenti simili a questi dovranno essere fatti spesso nei nostri studii; ed è anche per darne subito un saggio che abbiamo trovato opportuno di esporre le considerazioni che ora abbiamo fatte.

23. — I teoremi ricordati sulle somme, sui prodotti ecc., servono in molti casi a rendere più semplice la ricerca dei limiti, ma bene spesso questa ricerca resta ancora difficilissima.

Sovente però non è necessario di eseguirla effettivamente, e basta limitarsi a constatare l'esistenza di un limite finito e determinato A per la quantità y che si considera; e per questo basta allora appoggiarsi secondo i casi sopra l'uno o l'altro dei due teoremi che ora passiamo ad esporre.

Il primo di questi teoremi serve pel caso in cui il valore di x pel quale si cerca il limite di y è finito, e si enuncia col dire che: *Affinchè i valori di y a destra o a sinistra di un numero finito a, per es. a destra, abbiano un limite determinato e finito, è necessario e sufficiente che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ esista un numero ε tale che le differenze $y_{a+\gamma} - y_{a+\delta}$ fra i valori di y corrispondenti a valori qualsiansi $a+\gamma$ e $a+\delta$ di x fra a e $a+\varepsilon$* (a escluso), *siano numericamente minori di σ.*

Per dimostrare questo teorema, diciamo prima di tutto, a scanso di equivoci, che potendo la x variare soltanto per valori discreti senza passare cioè per qualsiasi valore nel suo indefinito avvicinarsi ad a, noi parlando qui di valori di x negli intorni di a intendiamo sempre di riferirci ai valori che essa può prendere e non agli altri.

E ammesso questo, osserviamo prima che se esiste un limite determinato e finito A pei valori di y a destra di a, per ogni valore di σ esisterà un numero ε pel quale si avrà in valore assoluto $A - y_{a+\gamma} < \frac{\sigma}{2}$, $A - y_{a+\delta} < \frac{\sigma}{2}$, e quindi anche $y_{a+\gamma} - y_{a+\delta} < \sigma$ (*), per tutti i valori di γ e δ inferiori ad ε,

(*) Notiamo, ciò che del resto è bene evidente, che quando si hanno diseguaglianze fra valori assoluti come ad es. le due $|A| < a$, $|B| < b$, essendo a e b numeri positivi, siccome si ha $|A-B| \leq |A| + |B|$, si avrà sempre $|A-B| < a+b$, cioè mentre nel primo membro dei numeri A e B si fa la differenza, nel secondo dei due numeri a e b si fa la somma.

escluso lo zero, che potranno considerarsi; e si conclude perciò intanto che la condizione contenuta nell'enunciato del teorema è necessaria.

Per dimostrare poi che la stessa condizione è anche sufficiente, si osservi che se è soddisfatta, e se ε_1 è un valore di ε corrispondente al valore σ_1 di σ, indicando con α_1 un valore qualunque di y corrispondente a un valore di x fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escluso) potremo formare due numeri $\alpha_1 - \sigma_1$ e $\alpha_1 + \sigma_1$ che comprenderanno tutti i valori che si possono avere per y quando si fa variare x fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escluso), e in luogo di questi, per comodo di dimostrazione, potremo prendere anche i numeri $\alpha_1 - 2\sigma_1$ e $\alpha_1 + 2\sigma_1$.

Preso poi un altro numero σ_2 minore o uguale a $\frac{\sigma_1}{2}$ si troverà il corrispondente ε_2, e poichè naturalmente se la indicata condizione sarà soddisfatta per un numero ε_2 lo sarà anche per qualsiasi numero inferiore, il numero ε_2 potremo sempre supporlo *non superiore* a ε_1.

Fissato questo numero ε_2 si formeranno come precedentemente due nuovi numeri $\alpha_2 - 2\sigma_2$, $\alpha_2 + 2\sigma_2$, e questi comprenderanno i valori che si avranno per y facendo variare x fra a e $a+\varepsilon_2$ e saranno evidentemente compresi fra $\alpha_1 - \sigma_1 - 2\sigma_2$ e $\alpha_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2$ perchè α_2 non può scendere sotto a $\alpha_1 - \sigma_1$ nè andare sopra a $\alpha_1 + \sigma_1$; e quindi poichè $\sigma_2 \leq \frac{\sigma_1}{2}$, gli stessi numeri $\alpha_2 - 2\sigma_2$ e $\alpha_2 + 2\sigma_2$ saranno evidentemente compresi fra i precedenti $\alpha_1 - 2\sigma_1$ e $\alpha_1 + 2\sigma_1$, e uno almeno di essi sarà differente da questi.

Così continuando, giungeremo a formare due serie di numeri

$$A'_1 = (\alpha_1 - 2\sigma_1, \alpha_2 - 2\sigma_2, \alpha_3 - 2\sigma_3, \ldots),$$

$$A'_2 = (\alpha_1 + 2\sigma_1, \alpha_2 + 2\sigma_2, \alpha_3 + 2\sigma_3, \ldots),$$

che daranno luogo ad una scomposizione (A'_1, A'_2) di una serie di numeri in due classi contigue, e ora sarà facile vedere che il numero determinato e finito A che corrisponderà a questa scomposizione sarà appunto il limite dei valori di y a destra di a.

Si osservi infatti che pel modo secondo il quale sono state scelte le $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots$, per un valore sufficientemente grande di n le differenze successive $4\sigma_n$ fra i numeri delle due classi saranno inferiori a qualsiasi numero comunque piccolo σ, e siccome per ogni coppia $\alpha_n - 2\sigma_n$ e $\alpha_n + 2\sigma_n$ di questi numeri esiste il corrispondente numero diverso da zero e positivo ε_n tale che pei valori di x fra a e $a+\varepsilon_n$ (a escl.) i valori corrispondenti di y cadano fra gli stessi numeri $\alpha_n - 2\sigma_n$ e $\alpha_n + 2\sigma_n$ fra i quali trovasi pure sempre compreso il numero A, è certo che per gli stessi valori di y avremo in valore assoluto $A - y < \sigma$, e questo dimostra appunto che A è il limite cercato dei valori di y a destra di a; talchè si può ora evidentemente concludere che la condizione contenuta nell'enunciato del teorema dato sopra è anche sufficiente per l'esistenza del limite; e questo limite può anche essere trovato effettivamente col processo stesso che qui si è tenuto per dimostrarne l'esistenza.

24. — In modo del tutto simile si dimostra l'altro teorema di cui sopra abbiamo parlato, che serve utilmente pel caso in cui si cerca il limite di y per valori infiniti della variabile x, e che può enunciarsi dicendo che: *Affinchè i valori di y per valori infinitamente grandi di x positivi o negativi, per es. per valori positivi, abbiano un limite determinato e finito, è necessario e sufficiente che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esista un numero positivo ω talmente grande che per valori comunque presi x_1 e x_2 per x superiori ad ω si abbia sempre in valore assoluto $y_{x_1} - y_{x_2} < \sigma$.*

È da notare che questi due teoremi, che sono dovuti a Cauchy, possono anche leggermente modificarsi sostituendo nel primo alla differenza $y_{a+\gamma} - y_{a+\delta}$ l'altra $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ fra il valore $y_{a+\varepsilon}$ di y nell'estremo $a+\varepsilon$ e quello $y_{a+\delta}$ in un altro punto qualsiasi $a+\delta$ fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso), e nel secondo teorema sostituendo alla differenza $y_{x_1} - y_{x_2}$ quella $y_\omega - y_{x_1}$ fra il valore y_ω di y nel punto ω e quello y_{x_1} in un punto x_1 qualsiasi superiore ad ω; e ciò supposto naturalmente che, come può sempre farsi, il valore $a+\varepsilon$ nel primo caso e il valore ω nel secondo si prendano fra quelli che la x può prendere.

E queste modificazioni negli enunciati dei due teoremi possono farsi perchè quando siano soddisfatte le condizioni degli enunciati lo saranno anche queste ultime, e quando lo siano invece queste ultime, cogli stessi numeri ε o ω pei quali queste condizioni saranno soddisfatte pei numeri $\frac{\sigma}{2}$ verranno soddisfatte quelle degli enunciati dei teoremi pel numero doppio σ.

25. — Supponiamo ora che i valori che si considerano di y a destra o a sinistra di a, o per valori crescenti indefinitamente di x siano sempre finiti ma non abbiano un limite determinato.

Allora pei due teoremi precedenti dovranno esistere certi valori di σ pei quali non è più possibile di trovare il numero ε o il numero ω corrispondente; e quindi, se saremo per es. nel primo caso, indicando con σ uno di tali numeri positivi e sufficientemente piccoli, e con $(a, a+\varepsilon)$ un intervallo qualunque a destra o a sinistra di a (a escluso) che termini a uno dei valori $a+\varepsilon$ che x può prendere, esisterà in questo intervallo un punto $a+\delta$ pel quale si avrà numericamente $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta} \geq \sigma$, e poi anche nell'intervallo $(a, a+\delta)$ (a escluso) esisterà un punto $a+\delta'$ pel quale si avrà numericamente $y_{a+\delta} - y_{a+\delta'} \geq \sigma$, e nell'intervallo $(a, a+\delta')$ esisterà ancora un punto $a+\delta''$ pel quale si avrà pure numericamente $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta''} \geq \sigma$, e così di seguito indefinitamente.

Osservando dunque che y si mantiene finito in tutto l'intervallo $(a, a+\varepsilon)$ e così anche nei seguenti, basterà sommare le diseguaglianze che così successivamente si ottengono per concluderne che le differenze successive $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$, $y_{a+\delta} - y_{a+\delta'}$, $y_{a+\delta'} - y_{a+\delta''}$ ... non dovranno avere sempre lo stesso segno; e quindi poichè osservazioni analoghe possono farsi anche per l'altro caso in cui x deve crescere indefinitamente, si potrà ora evidentemente concludere che *quando i valori di y coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x, si mantengono sempre finiti ma non hanno un limite determinato, essi dovranno oscillare continuamente, e almeno alcune di tali oscillazioni dovranno farsi sempre fra limiti differenti fra loro più di una quantità determinata diversa da zero;* come avviene per es. nel primo caso per la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, e nel secondo per la funzione $\operatorname{sen} x$.

E per quanto abbiamo detto nel § 19 [pag. XXVIII] si avranno oscillazioni nei valori di y anche quando coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x, y finisca per prendere anche valori maggiori di qualunque quantità data senza però che possa dirsi che ha per limite l'infinito; ma allora i limiti entro i quali si faranno le oscillazioni finiranno per essere discosti l'uno dall'altro più di qualunque quantità data, o, come si dice, queste oscillazioni finiranno per avere un'ampiezza maggiore di qualunque numero dato.

26. — È però da notare che oscillazioni nei valori di y *potranno* avvenire anche quando il limite di questi valori per $x = a$ a destra o a sinistra o per $x = \infty$ sia una quantità finita e determinata A, giacchè dalla definizione di limite non viene di necessità che, a partire da un certo valore di δ, o di x, la differenza $y_{a+\delta} - A$ o l'altra $y_x - A$ col diminuire indefinitamente di δ, o col crescere sempre più di x, conservi sempre lo stesso segno, e vada sempre diminuendo in valore assoluto; ma in questo caso però queste oscillazioni finiranno per avvenire fra limiti vicini più di qualunque quantità data, o come si dice, finiranno per avere tutte una ampiezza minore di qualunque numero dato, senza però che sia necessario che questa ampiezza (che pure diminuisce oltre ogni limite) vada *costantemente* diminuendo.

E così anche potranno aversi oscillazioni nei soliti valori di y quando il loro limite sia l'infinito.

27. — Le osservazioni precedenti conducono subito a dimostrare che: *Se coll'avvicinarsi di x ad una quantità finita a, a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o per valori negativi per es. per valori positivi, un'altra quantità y conserva sempre lo stesso segno e non cresce o non decresce mai in valore assoluto, restando però sempre minore di un certo numero finito, essa per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\infty$ avrà un limite determinato e finito;* giacchè, siccome i valori di y sono sempre finiti e non possono oscillare coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a a destra o a sinistra o col crescere indefinitamente di x, essi per le osservazioni precedenti dovranno tendere verso un limite determinato e finito.

Notiamo che questo teorema risulta subito anche dalle considerazioni generali esposte nel § 16 intorno ai limiti superiori e inferiori dei gruppi di numeri, poichè si dimostra facilmente che pei gruppi di numeri formati dai valori di y nel caso in cui questi valori non vadano crescendo e in quello in cui non vadano decrescendo, il limite inferiore o superiore respettivamente è il limite degli stessi valori y.

E notiamo anche che da questo teorema risulta che, se coll'avvicinarsi di x ad una quantità a a destra o a sinistra, o col crescere indefinito di x, una quantità y finisce per non crescere o non decrescere più, essa per $x=a$ o per $x=\infty$ avrà sempre un limite finito o infinito.

E aggiungiamo infine che, secondo una denominazione introdotta da C. Neumann nel 1881, queste successioni di valori y che coll'avvicinarsi indefinito di x ad a a destra, o a sinistra o col crescere indefinito di x non crescono o non decrescono mai si dicono *monotone*, e noi pure useremo talvolta questa denominazione.

IV.

Concetto di funzione. — Continuità e discontinuità

28. — Premesse le considerazioni precedenti sui gruppi di punti e sui limiti, passiamo a occuparci delle funzioni, e incominciamo dallo stabilirne il concetto per quelle di una sola variabile reale.

Gli antichi usarono dapprima la parola funzione per esprimere le varie potenze di una stessa quantità, e solo da Leibnitz, dai Bernoulli e più specialmente poi da Eulero fu esteso il concetto di funzione fino a comprendere tutte le espressioni analitiche che contengono in un modo qualunque le variabili corrispondenti; e se anche alcuni nelle definizioni usavano parole e frasi generali che esprimevano concetti più generali, nel fatto però anche dando tali definizioni intendevano sempre di riferirsi al caso di legami *analitici* che espressamente o tacitamente supponevano esistere fra la funzione e le variabili.

Fu il primo Dirichlet nel secolo scorso che esplicitamente dette per la parola funzione un significato indipendente da qualunque ipotesi sulla possibilità di una espressione analitica, e chiamò funzione di una variabile reale x in un dato intervallo ogni quantità y che per ogni valore speciale di x compreso nello stesso intervallo (gli estremi inclusi) ha un valore *unico e determinato* che è conosciuto o può sempre aversi, senza occuparsi se la determinazione di questo valore di y si faccia per mezzo di operazioni analitiche sulla variabile stessa x, o in altro modo qualunque.

Noi adotteremo questo concetto di funzione, limitandoci specialmente alle funzioni reali e finite; e così per es. sarà funzione di x in un intervallo qualunque la quantità y che è somma della serie sempre convergente che considerammo al § 21, 2.° [pag. XXX]

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n x}{n},$$

perchè per ogni valore di x in quell'intervallo y avrà un valore finito e determinato; e sarà funzione della x in un certo intervallo una quantità y che pei valori razionali di x nello stesso intervallo è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno; e sarà pure funzione di x in un dato intervallo una quantità che pei valori razionali di x nello stesso intervallo è uguale a x e pei valori irrazionali è uguale a x^2, ...

Invece se per una quantità y fosse detto soltanto che in un intervallo che comprende il punto $x=0$ essa è uguale a $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, non si potrebbe considerarla come funzione di x in tutto lo stesso intervallo, perchè il suo valore per $x=0$ non sarebbe determinato; e solo diverrebbe una funzione di x in tutto lo stesso intervallo, quando le si assegnasse un valore speciale qualunque anche per $x=0$, come per es. quando si stabilisse che per $x=0$ essa prende il valore zero.

29. — Qui però è da osservare che definite le funzioni in un modo così generale, finchè non si pongano altre condizioni, non si avranno per esse proprietà generali che includano delle relazioni fra i valori che esse hanno in punti differenti qualunque (cioè per valori differenti di x) quand'anche questi punti si suppongano arbitrariamente vicini l'uno all'altro, perchè i valori che esse avranno in tali punti potranno essere tutt'affatto qualunque e indipendenti del tutto gli uni dagli altri. E ciò avverrà non ostante che debbano esservi una o più leggi determinate mediante le quali riescano determinati i singoli valori della funzione in ogni punto — giacchè evidentemente senza queste leggi, essendo infiniti i punti di un intervallo qualunque, non si potrebbe mai dire pienamente determinata la funzione —; talchè in particolare, senza fare qualche limitazione, non si potrà affatto parlare di quelle proprietà che più specialmente richiederemo nei nostri studii quali sono ad es. la continuità, la differenziabilità ecc. delle quali tratteremo più oltre.

Con tale definizione poi si dà luogo naturalmente anche alla domanda « se, conservando tutta la generalità contenuta nella definizione, una funzione y di x data in un certo intervallo possa sempre o no esprimersi analiticamente per tutti i valori della variabile nell'intervallo stesso per una o più serie finite o infinite di operazioni di calcolo da farsi sulla variabile », e a questa domanda, nello stato attuale della scienza, non può ancora rispondersi in modo pienamente soddisfacente, poichè, quantunque si sappia

ora che per estesissime classi di funzioni e anche per funzioni che presentano grandissime singolarità può darsi una espressione analitica (*), resta però ancora il dubbio che, non facendo nessuna limitazione, possano anche esistere funzioni per le quali ogni espressione analitica, almeno cogli attuali segni dell'analisi, è del tutto impossibile.

30. — Volendo ora fare uno studio sulle funzioni di una variabile reale y quali le abbiamo definite, incominceremo dal cercare quali distinzioni possono farsi in esse quando si ha riguardo alla continuità o alla discontinuità che esse possono presentare pei differenti valori della variabile nell'intervallo che si considera.

Indichiamo perciò con $f(x)$ la funzione che consideriamo in un intervallo finito (α, β) e ricordiamo espressamente che per la definizione che abbiamo data, essa avrà un valore unico e determinato in ogni punto dello stesso intervallo (i limiti inclusi); e, a meno che non si avverta espressamente il contrario, supponiamo sempre che essa sia reale e sia finita (cioè i suoi valori siano tutti compresi fra due numeri finiti) (**).

Diremo che essa è *continua* per $x=a$, o nel punto a dove ha il valore $f(a)$, quando per ogni numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, esisterà un numero differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε la differenza $f(a+\delta)-f(a)$ sia numericamente minore di σ; o, in altri termini, diremo che $f(x)$ è continua nel punto $x=a$ dove ha il valore $f(a)$, quando il limite dei suoi valori a destra e a sinistra di a è lo stesso ed è uguale a $f(a)$, o anche, se vuolsi, quando le quantità $f(a+h)$ e $f(a-h)$, dove h è positivo, per $h=0$ hanno per limite $f(a)$; o anche infine quando le quantità $f(a+h)-f(a)$ e $f(a-h)-f(a)$ hanno per limite zero per $h=0$.

Diremo poi che $f(x)$ è *discontinua* per $x=a$ quando non esiste per ogni valore positivo di σ un valore corrispondente positivo di ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε si abbia sempre numericamente $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$; o in altri termini, diremo che $f(x)$ è discontinua per

(*) Così ad es. si trova una espressione analitica per mezzo del quoziente di due serie per la funzione alla quale accennammo sopra che pei valori razionali di x è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno, ecc.

(**) Secondo le denominazioni recentemente introdotte specialmente in Francia, analoghe a quelle che già nella nota al § 8 [pag. XVII] dicemmo essere state introdotte pei gruppi di punti, queste funzioni i cui valori sono tutti compresi fra numeri finiti vengono dette *funzioni limitate* (bornées).

E quando i valori della funzione possano anche essere infinitamente grandi ma solo dalla parte dei numeri positivi, o solo da quella dei numeri negativi, si dicono respettivamente limitate *inferiormente* o limitate *superiormente*.

$x=a$ quando i valori $f(a+h)$ di $f(x)$ a destra di a e quelli $f(a-h)$ di $f(x)$ a sinistra di a non hanno limiti determinati sì gli uni che gli altri, o avendoli sono differenti dalle due parti di a, o essendo uguali differiscono dal valore $f(a)$ che ha la funzione nel punto a.

S'intende però che se a fosse un estremo α o β dell'intervallo, allora, tanto nel caso della continuità quanto in quello della discontinuità, non si potrebbe parlare di valori di $f(x)$ altro che da una parte di questo estremo, e quindi non si potrebbero considerare che i valori di $f(a+h)$ o quelli di $f(a-h)$, e il valore $f(a)$.

31. — Faremo poi sulle discontinuità che $f(x)$ può presentare nel punto a, le seguenti distinzioni.

1.° Nel caso che il punto a non sia un estremo dell'intervallo e la discontinuità che si ha in questo punto sia di quelle per le quali i valori $f(a+h)$ e $f(a-h)$ di $f(x)$ a destra e a sinistra di a hanno uno stesso limite determinato A ma differente dal valore $f(a)$ di $f(x)$ nel punto a, allora siccome la continuità della funzione in questo punto potrebbe ristabilirsi quando invece di $f(a)$ si prendesse A pel valore della funzione nel punto stesso, noi diremo con Riemann che si ha in a una *discontinuità che può togliersi* mutando il valore della funzione in quel punto.

2.° Nel caso poi che il punto a dove $f(x)$ è discontinua non sia un estremo dell'intervallo, e che i valori di $f(x)$ da una parte di a abbiano per limite $f(a)$, e quelli dall'altra parte non abbiano verun limite determinato o lo abbiano differente da $f(a)$, si dirà che $f(x)$ è *continua da una parte* (a destra o a sinistra) di a e è *discontinua dall'altra*, o più semplicemente si dirà che $f(x)$ è continua o è discontinua *soltanto da una parte* di a (*).

3.° Se da una parte di un punto a si ha discontinuità in $f(x)$, e questa discontinuità è tale che i valori di $f(x)$ dalla stessa parte di a hanno un limite determinato, si dirà che essa è una discontinuità *ordinaria* o una discontinuità di *prima specie;* mentre se gli stessi valori di $f(x)$ non hanno un limite determinato, la discontinuità si dirà di *seconda specie;* e così le discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione nel punto corrispondente saranno sempre discontinuità ordinarie dalle due parti di

(*) È da notare che ora che si ha il concetto di funzione continua in un punto a da una parte di questo punto, si può dire che, se y è una quantità che è data per *tutti* i valori di x compresi in un intervallo $(a, a\pm\varepsilon)$ a destra o a sinistra di a (a inclus.), il caso al quale accennammo al § 21 [pag. XXIX] in cui il valore y_a di y per $x=a$ coincide col limite dei valori che si hanno per y a destra o a sinistra di a, è soltanto quello in cui y, considerata come funzione di x, è funzione continua di x almeno dalla parte destra o dalla parte sinistra di a.

questo punto; e quando la funzione $f(x)$ in un punto a che non è un estremo dell'intervallo sarà discontinua, potrà avvenire che essa sia continua da una parte di a e dall'altra abbia una discontinuità ordinaria o una discontinuità di seconda specie, o, essendo discontinua dalle due parti di a, abbia da ambedue le parti una discontinuità ordinaria o una discontinuità di seconda specie, o abbia invece da una parte una discontinuità ordinaria, e dall'altra una discontinuità di seconda specie; e cambiando il valore della funzione in questo punto potremo sempre togliere la discontinuità almeno *da una parte* se essa è di prima specie, ma non già se è di seconda specie.

E così quando il punto di discontinuità $f(x)$ sia un estremo dell'intervallo, se la discontinuità sarà di quelle che ora abbiamo chiamate ordinarie potremo anche riguardarla come una di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto.

32. — Merita poi di essere osservato che quando da una parte di un punto a si avrà una discontinuità di seconda specie, i valori di $f(x)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a dalla stessa parte faranno continue oscillazioni (in numero infinito) di ampiezza maggiore di un certo numero dato (§ 25 [pag. XXXV e seg.]), perchè allora questi valori di $f(x)$ non avranno un limite determinato.

E di ciò si ha un esempio nella funzione che pei valori di x differenti da a è uguale a sen $\frac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, poichè questa funzione per $x=a$ a destra e a sinistra ha una discontinuità di seconda specie, e coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a dall'una o dall'altra parte di a oscilla continuamente fra -1 e 1.

Inoltre si può anche notare che una funzione che sia continua a destra e a sinistra di un punto a, o che abbia semplicemente una discontinuità ordinaria da una o da tutte e due le parti di questo punto, potrà fare essa pure in vicinanza del punto a dalla parte che si considera un numero infinito di oscillazioni, ma l'ampiezza di queste oscillazioni impiccolirà oltre ogni limite coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad a (§ 26 [pag. XXXVI]). Così avviene per es. nel punto $x=0$ per la funzione che per x diverso da zero è uguale a x sen $\frac{1}{x}$, e per $x=0$ è zero o ha un altro valore finito qualunque.

33. — Inoltre è da osservare che una funzione potrà essere continua o avere soltanto una discontinuità ordinaria da una parte di un punto a per es. a destra, e essere poi discontinua, e anche discontinua di seconda specie, a sinistra di punti che si trovano nelle parti a destra di ogni intorno di a arbitrariamente piccolo (cioè di punti situati a destra di a e vicini quanto

si vuole ad a); e viceversa può aversi discontinuità anche di seconda specie nel punto a a destra, e aversi continuità a sinistra di punti che siano vicini quanto si vuole ad a e siano a destra di a.

L'esservi infatti continuità a destra di un punto a, o anche soltanto l'esservi una discontinuità ordinaria porta che per ogni numero positivo σ esista un numero positivo ε tale che per ogni punto $a+\delta$ nell'intervallo $(a, a+\varepsilon)$, che ha l'*estremo inferiore* in a, si abbia numericamente

$$(1) \qquad f(a+\varepsilon)-f(a+\delta)<\sigma.$$

Invece l'esservi continuità o soltanto una discontinuità ordinaria a sinistra di un punto $x=a+\varepsilon'$ che si trova a destra di a e vicino quanto si vuole ad a, porta che per ogni numero positivo σ_1 esista un intervallo $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$, *coll'estremo superiore nel punto fisso* $a+\varepsilon'$, per ogni punto x del quale si abbia numericamente

$$(2) \qquad f(a+\varepsilon'-\varepsilon_1)-f(x)<\sigma_1;$$

e questo mostra subito quanto abbiamo detto sopra, giacchè delle due condizioni (1) e (2) l'una non trascina di necessità l'altra, inquantochè se coll'impiccolire di σ continua sempre ad esistere un intervallo $(a, a+\varepsilon)$ coll'estremo inferiore in a e nel quale è soddisfatta la condizione (1), non ne viene di necessità che coll'impiccolire di σ_1 debba continuare ad esistere un intervallo $(a+\varepsilon'-\varepsilon_1, a+\varepsilon')$ coll'estremo superiore nel *punto fisso* $a+\varepsilon'$ nel quale sia soddisfatta la condizione (2), e viceversa.

Del resto tali singolarità si riscontrano effettivamente per es. nelle funzioni — delle quali si ha pure una espressione analitica (*) — che sono continue nei punti irrazionali (cioè nei punti che corrispondono a valori irrazionali di x) di un dato intervallo e sono discontinue nei punti razionali dello stesso intervallo, e si riscontrano anche nella funzione che per x differente da a è uguale a $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-a}$ e per $x=a$ è zero, poichè questa funzione ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x=a$ a destra e a sinistra, mentre è continua in tutti i punti vicini quanto si vuole ad a a destra e a sinistra.

34. — Supponiamo ora che la funzione $f(x)$ abbia una discontinuità (di prima o di seconda specie) da una parte di un punto a per es. a destra, essendo però sempre numericamente inferiore a un numero finito A nell'intervallo nel quale si considera, o almeno in un certo intorno di a a destra.

(*) V. per la prima di queste funzioni i miei *Fondamenti per la teorica ecc.* al § 114, pag. 135 e seg.

Allora considerando i varii numeri differenti da zero e positivi, è certo che si dovrà poter trovare un numero σ_1 pel quale non sarà possibile di trovare un intorno $(a, a+\varepsilon_1)$ di a a destra nel quale il valore assoluto $|f(x)-f(a)|$ di $f(x)-f(a)$ sia sempre inferiore a σ_1, perchè se per qualunque numero comunque piccolo che si scegliesse per σ_1 l'indicato intorno di a esistesse, la funzione $f(x)$ sarebbe continua nell'intorno di a a destra, il che è contro il supposto. E se il detto intorno di a a destra non si potrà trovare pel numero σ_1, *a fortiori* non si potrà trovare pei numeri minori di σ_1.

Invece è certo che si potrà trovare un intorno di a a destra nel quale si abbia sempre $|f(x)-f(a)|<\sigma_0$ essendo σ_0 un numero positivo uguale o superiore a $2A$, e noi prenderemo a considerare l'intervallo da σ_1 a σ_0, e lo divideremo per metà nel punto σ_2.

Per σ_2 esisterà o non esisterà un intorno $(a, a+\varepsilon_2)$ pel quale si abbia sempre $|f(x)-f(a)|<\sigma_2$; e se esisterà noi prenderemo a considerare l'intervallo (σ_1, σ_2), mentre se non esisterà considereremo l'intervallo (σ_1, σ_0); e così nei due casi il nuovo intervallo da considerarsi sarà nelle stesse condizioni del primo, cioè pel numero corrispondente al suo estremo inferiore e *a fortiori* pei numeri σ minori non esisterà un intorno di a nel quale sia sempre $|f(x)-f(a)|<\sigma$, mentre pel numero corrispondente al suo estremo superiore e *a fortiori* pei numeri ω maggiori esisterà un intorno di a nel quale sarà sempre $|f(x)-f(a)|<\omega$.

Operando allora sul nuovo intervallo come si è operato sul primo si passerà a un terzo intervallo che godrà ancora delle stesse particolarità; e così continuando indefinitamente si formeranno due classi contigue di numeri che definiranno un numero σ' non inferiore a σ_1 e quindi diverso da zero; e pel modo con cui le due classi di numeri vengono costruite questo numero σ' godrà della proprietà che pei numeri $\omega>\sigma'$ esisterà un intorno di a a destra nel quale sarà sempre $|f(x)-f(a)|<\omega$, mentre pei numeri $\sigma<\sigma'$ *non* esisterà un intorno di a nel quale sia sempre $|f(x)-f(a)|<\sigma$; e questo numero che potremo indicare con σ_{a+0} si dirà il *salto* della funzione nel punto a *a destra*.

Analogamente si avrà un *salto* σ_{a-0} *a sinistra* di a quando $f(x)$ sia discontinua in a a sinistra. E quando $f(x)$ sia discontinua dalle due parti di a e in generale quando si considerino insieme le due parti di a si chiamerà *salto* della funzione nel punto a il maggiore σ_a fra i due numeri σ_{a+0} e σ_{a-0} che rappresentano il salto a destra e quello a sinistra.

E ora, con queste denominazioni potremo dire evidentemente che quando una funzione è tale che in un punto a da una parte per es. a destra è continua o ha soltanto una discontinuità ordinaria, mentre a sinistra di punti che sono a destra di a e vicini quanto si vuole ad a è discontinua, i salti che essa farà a sinistra di questi punti dovranno impiccolire oltre ogni limite coll'avvicinarsi indefinitamente degli stessi punti ad a; ma non potrà affermarsi la cosa inversa giacchè, come si è detto nel paragrafo precedente, esistono anche funzioni, come la solita funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, che sono continue in questi punti, e hanno una discontinuità di seconda specie nel punto a.

35. — Diciamo poi fin d'ora che quando $f(x)$ a destra o a sinistra di un punto a è continua o ha soltanto una discontinuità ordinaria, dietro le notazioni di Dirichlet, si suole indicare con $f(a+0)$ o $f(a-0)$ il limite per h positivo e tendente a zero dei valori $f(a+h)$ o $f(a-h)$ che si hanno per $f(x)$ dalla parte corrispondente di a (destra o sinistra). Conseguentemente quando in a vi sia continuità dalle due parti, o vi sia una di quelle discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto, le stesse quantità $f(a+0)$ e $f(a-0)$ saranno uguali fra loro e nel primo caso saranno anche uguali a $f(a)$. Le stesse quantità però non avranno verun significato quando la discontinuità che si ha in $f(x)$ dalla parte di a cui esse si riferiscono sia una discontinuità di seconda specie.

Nel caso poi che la discontinuità di $f(x)$ per $x=a$ da una almeno delle due parti per es. a destra sia una discontinuità ordinaria, il salto corrispondente della funzione sarà evidentemente il valore assoluto di $f(a+0)-f(a)$; e similmente il valore assoluto di $f(a-0)-f(a)$ sarà il salto di $f(x)$ nel caso che si abbia una discontinuità ordinaria a sinistra di a.

36. — Adesso troviamo utile di esporre il seguente teorema di Weierstrass relativo ai limiti superiori e inferiori (o massimi o minimi) dei valori di una funzione (reale e sempre finita) in un dato intervallo.

Sia perciò $f(x)$ la nostra funzione data arbitrariamente nell'intervallo da α e β (i limiti inclusi).

Pel teorema del § 16 [pag. XXIII] si può dire intanto che esisterà un limite superiore λ e un limite inferiore μ dei valori della stessa funzione in questo intervallo; e ora ci proponiamo di mostrare che *in questo intervallo esiste sempre almeno un punto determinato x'* (che può essere anche un estremo dell'intervallo stesso) *dotato della proprietà che pei valori di $f(x)$ corrispondenti ai punti di ogni intorno di x' anche arbitrariamente piccolo il limite superiore è ancora λ* (Weierstrass).

La dimostrazione di questo teorema si fa ancora col processo della divisione dell'intervallo in $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ parti uguali.

Supponiamo perciò come al solito $\beta>\alpha$, e dividiamo l'intervallo da α a β

in due intervalli uguali $\left(\alpha, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\left(\frac{\beta+\alpha}{2}, \beta\right)$, e immaginiamo determinati i limiti superiori λ_1 e λ_2 dei valori di $f(x)$ corrispondenti ai valori di x che cadono nel primo e nel secondo di questi intervalli respettivamente.

È chiaro che nessuno di questi numeri λ_1 e λ_2 potrà essere superiore a λ, perchè altrimenti nell'intervallo (α, β) vi sarebbero valori di $f(x)$ maggiori di λ, e neppure potranno essere tutti e due inferiori a λ, perchè altrimenti se fosse per es. $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda$, fra λ_2 e λ non vi sarebbero valori di $f(x)$ nell'intervallo (α, β) e per conseguenza nell'un caso e nell'altro λ non sarebbe il limite superiore corrispondente ai valori di $f(x)$ nello stesso intervallo; quindi uno almeno degli stessi numeri λ_1 e λ_2 dovrà essere uguale a λ.

Ora se $\lambda_1=\lambda$, qualunque sia del resto λ_2 (cioè $\leq\lambda$), noi ci occuperemo dell'intervallo cui corrisponde λ_1 (cioè del primo), mentre se λ_1 non è uguale a λ, ciò che porta che allora si abbia $\lambda_2=\lambda$, noi ci occuperemo del secondo intervallo; e quindi ponendo $\beta-\alpha=\gamma$, e indicando con α_1 un numero uguale a zero o a uno secondochè λ_1 è o no uguale a λ, e ponendo $x_1=\alpha+\frac{\gamma}{2}\alpha_1$, sarà $\left(x_1, x_1+\frac{\gamma}{2}\right)$ l'intervallo di ampiezza uguale a $\frac{\gamma}{2}$ di cui ci occuperemo, e nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ.

Operando ora in modo simile su questo intervallo, e indicando con α_2 un nuovo numero uguale a zero o a uno secondochè il limite superiore di tutti i valori di $f(x)$ corrispondenti al primo dei nuovi intervalli ottenuti è uguale o no a λ, e ponendo $x_2=x_1+\frac{\gamma}{2^2}\alpha_2$, si otterrà l'intervallo $\left(x_2, x_2+\frac{\gamma}{2^2}\right)$ nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; e così continuando col porre successivamente $x_3=x_2+\frac{\gamma}{2^3}\alpha_3, \ldots, x_n=x_{n-1}+\frac{\gamma}{2^n}\alpha_n$, dove $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ hanno al solito i valori 0 o 1 che si determinano successivamente nel modo che si è detto, dopo n di queste operazioni successive si giungerà all'intervallo $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ di ampiezza $\frac{\gamma}{2^n}$ nel quale il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ.

Ora, considerando le due serie di numeri che così si ottengono successivamente $(\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\left(\beta, x_1+\frac{\gamma}{2}, x_2+\frac{\gamma}{2^2}, \ldots, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ si vede che esse, col crescere sempre più di n, danno luogo ad una scomposizione di numeri in due classi contigue alle quali corrisponde un numero determinato x', che può essere anche un estremo α o β dell'intervallo dato, e che è compreso negli intervalli $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ che successivamente si ottengono (i limiti inclusi); e ora sarà facile di vedere che questo numero x' è appunto quello del quale si vuole dimostrare l'esistenza.

Osservando infatti che esso trovasi negli intervalli $\left(x_n, x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ (i limiti inclusi) si vede subito che uno almeno dei due intervalli (x_n, x') e $\left(x', x_n+\frac{\gamma}{2^n}\right)$ sarà di ampiezza differente da zero e in uno almeno di essi il limite superiore dei valori di $f(x)$ sarà ancora λ; quindi, poichè si ha evidentemente $x'-x_n \leq \frac{\gamma}{2^n}$, e $x_n+\frac{\gamma}{2^n}-x' \leq \frac{\gamma}{2^n}$, e n può prendersi così grande che $\frac{\gamma}{2^n}$ sia un numero minore di quella quantità che più ci piace, si conclude che effettivamente, qualunque sia il numero positivo e arbitrariamente piccolo ε, pei valori di x che cadono in uno almeno dei due intervalli $(x'-\varepsilon, x')$, $(x', x'+\varepsilon)$, e quindi anche pei valori di x fra $x'-\varepsilon$ e $x'+\varepsilon$ che cadono nell'intervallo dato da α a β (α e β inclusi) (o, il che è lo stesso, pei punti di ogni intorno di x') il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; e questo dimostra il teorema, poichè dal processo tenuto per trovare il punto x' risulta anche che di tali punti potrebbe esisterne più di uno.

Un teorema analogo si ha per il limite inferiore dei valori di $f(x)$ nell'intervallo (α, β).

37. — Poichè siamo a parlare di limite superiore e inferiore (o massimo e minimo) di una funzione in un dato intervallo diremo subito che la differenza fra il limite superiore e il limite inferiore (o fra il massimo e il minimo) dei valori di una funzione $f(x)$ in un dato intervallo si chiama *oscillazione della funzione nell'intervallo stesso:* e osserveremo che se x_1 e x_2 sono due valori di x in questo intervallo e D è l'oscillazione di $f(x)$ nello stesso intervallo, si avrà in valore assoluto $D \geq f(x_1)-f(x_2)$; e se l'intervallo è quello da a ad $a-\varepsilon$ o quello da $a-\varepsilon$ ad $a+\varepsilon$ e si ha sempre in esso $f(x)-f(a)<\sigma$, sarà evidentemente $D \leq 2\sigma$; e se da a ad $a+\varepsilon$ o da $a-\varepsilon$ ad $a+\varepsilon$ la funzione ammette effettivamente un massimo e un minimo si può anche affermare che allora sarà $D<2\sigma$.

38. — Se ora si considera un punto a che sia per es. *interno* all'intervallo nel quale una funzione $f(x)$ viene considerata, e si prende un suo intorno qualsiasi $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon)$ che abbia una parte a destra e una parte a sinistra, cioè con ε e ε_1 diversi da zero e positivi, la funzione in questo intorno avrà una certa oscillazione $D_{\varepsilon_1,\varepsilon}$; e evidentemente se la funzione stessa sarà continua in quel punto a questa oscillazione tenderà a zero all'impiccolire indefinito con una legge qualsiasi dell'intorno medesimo, o di ε e di ε_1.

Invece se la funzione sarà discontinua nello stesso punto a, la indicata oscillazione non potrà tendere a zero all'impiccolire indefinito dell'intorno corrispondente perchè altrimenti la funzione sarebbe continua in a; però considerando una serie successiva di intorni di quel punto che impiccoliscano con una data legge, e ciascuno dei quali sia contenuto nel precedente, evidentemente le oscillazioni corrispondenti ai successivi intorni o rimarranno invariate o andranno sempre impiccolendo, e quindi esse avranno un limite determinato (§ 27 [pag. XXXVII]) che sarà necessariamente diverso da zero.

Variando in un modo qualsiasi la legge colla quale si faranno impiccolire indefinitamente gli intorni di a, quand'anche colla nuova legge ogni intorno non venga più ad essere sempre contenuto nel precedente, è certo che i nuovi intorni finiranno per essere compresi in uno qualunque comunque piccolo che si scelga fra quelli che si ottenevano successivamente colla prima legge, come inversamente questi ultimi finiranno per essere contenuti in un intorno qualunque comunque piccolo che si scelga fra quelli ottenuti colla seconda legge; e questo basta per poter dire che anche con questa seconda legge il limite delle oscillazioni $D_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ esisterà e sarà quello stesso che si ottiene colla prima legge.

Questo limite delle $D_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ che viene così ad essere indipendente dalla legge che si fisserà per l'impiccolire indefinito degli intorni di a può essere indicato con D_a e si chiama l'*oscillazione della funzione nel punto a*.

Evidentemente il numero σ_a che al § 34 [pag. XLIV] abbiamo chiamato salto della funzione nel punto a non sarà mai superiore a D_a, come D_a non sarà mai superiore a $2\sigma_a$, e sarà quindi $\sigma_a \leq D_a \leq 2\sigma_a$, ovvero $\frac{1}{2} D_a \leq \sigma_a \leq D_a$.

39. — Infine osserveremo che se $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono un numero *finito* di funzioni di x in un dato intervallo e sono tutte continue in uno stesso punto a del medesimo intervallo, si vede facilmente che altrettanto accadrà della loro somma algebrica e del loro prodotto, e anche del quoziente di due qualunque fra esse quando però nel punto a la funzione denominatore sia differente da zero, ecc.

E osserveremo poi, una volta per sempre, che le considerazioni che abbiamo esposte per le funzioni reali di una variabile reale si riportano alle funzioni complesse di una variabile reale, considerando in esse separatamente le due funzioni parte reale e coefficiente dell'immaginario, e talvolta anche considerando semplicemente la funzione modulo della funzione stessa.

V.

Funzioni continue in un dato intervallo

40. — Si dicono *continue in un dato intervallo* quelle funzioni che in tutti i punti dell'intervallo stesso (gli estremi inclusi) sono continue; e si dicono *generalmente continue* in un intervallo quelle funzioni che sono discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo stesso talchè togliendo questi punti con intervalli piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti esse sono continue.

Così per es. la funzione $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, quando si prenda zero pel valore di essa nel punto $x=0$, è continua in qualunque intervallo; mentre la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, qualunque sia il valore che si prenda per essa nel punto $x=0$, è continua soltanto generalmente in quelli intervalli che contengono il punto $x=0$.

41. — Noi ci occuperemo ora in modo speciale delle funzioni che sono sempre finite e continue nell'intervallo finito (α, β) che si considera; e incominceremo perciò dall' osservare che, se $f(x)$ è una tale funzione, prendendo a piacere un numero differente da zero ma arbitrariamente piccolo e positivo σ, per ogni valore speciale a di x fra α e β (α e β inclusi) esisterà una speciale quantità differente da zero e positiva ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε pei quali il punto $a+\delta$ cade nell'intervallo che si considera (α, β) (α e β inclusi) (*) si abbia in valore assoluto $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$.

(*) **A scanso di equivoci facciamo osservare che noi diciamo sempre di limitarci a considerare i valori di δ numericamente minori di ε *pei quali il punto* $a+\delta$ *cade nell' intervallo dato* (α, β) (α e β inclus.), o i punti $a+\delta$ compresi fra $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$**

Però per uno stesso valore di σ potrà avvenire che il numero ε che serve per certi punti a non serva più per altri punti dello stesso intervallo, ma per questi debba essere diminuito; ed anche nasce il dubbio che, come accade quando ci si avvicina indefinitamente ai punti di discontinuità per le funzioni che sono soltanto generalmente continue, anche per le funzioni continue nello stesso intervallo, coll'avvicinarsi di x a certi punti speciali, ε possa impiccolire oltre ogni limite senza però raggiungere mai il valore zero (che sarebbe così soltanto il limite inferiore di tutti i valori ε).

In altri termini, si ha qui il dubbio che in certi casi non esista un numero ε differente da zero *che serva per tutti i valori di x da α a β* (α e β inclusi); ed è appunto per questo dubbio che dapprima venne da taluno proposto di distinguere la continuità di una funzione che è continua in un certo intervallo (α, β) in continuità *uniforme* e continuità *non uniforme*, secondochè per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esistesse o no un numero differente da zero e positivo ε tale che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε pei quali il punto $x+\delta$ cade nell'intervallo dato (α, β) (α e β inclusi) e per *tutti* i valori di x nello stesso intervallo (gli estremi ancora inclusi) si avesse in valore assoluto $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$.

Poco dopo però fu dimostrato da Cantor che se $f(x)$ è continua nell'intervallo da α a β, per ogni numero σ esiste sempre un tal numero ε *che serve per tutti i punti dell'intervallo stesso* e quindi la distinzione surriferita, alla quale era pure necessario di accennare, si rende del tutto inutile.

42. — Questo importante teorema di Cantor si dimostra nel modo seguente.

Consideriamo i valori di x fra α e β (α e β inclus.) e indichiamo con $\varepsilon(\sigma, x)$ un numero ε che pel valore speciale di x che si considera gode della proprietà che per tutti i valori di δ numericamente minori di ε e pei quali il punto $x+\delta$ cade fra α e β (α e β inclusi) si ha in valore assoluto $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$.

Per la continuità che noi supponiamo in $f(x)$ questo numero ε esisterà e sarà differente da zero, però esso non sarà bene determinato perchè ogni numero fra 0 e ε potrebbe servire egualmente. Per togliere questa indeterminazione, noi fisseremo di prendere per ε il limite superiore dei valori di ε

che cadono nell' intervallo stesso (α, β) perchè, per punti a sufficientemente vicini agli estremi α e β e in questi estremi, alcuni dei punti $a+\delta$ pei quali δ è numericamente minore di ε usciranno effettivamente dall' intervallo (α, β).

Si può osservare infatti che anche se a è sufficientemente vicino ad un estremo per es. ad α, o è in questo estremo, potrà darsi che debba ancora considerarsi un numero fisso e positivo $\varepsilon > a-\alpha$ tale che pei punti $a+\delta$ compresi fra α e $a+\varepsilon$ (a inclus.) si abbia numericamente $f(a+\delta)-f(a)<\sigma$; e allora, alcuni dei punti $a+\delta$ pei quali δ è numericamente minore di ε usciranno effettivamente dall'intervallo (α, β).

che rispetto al punto x sono compatibili colle proprietà che devono avere tutte le ε (il qual limite superiore pel teorema del § 16 [pag. XXIII] certamente esisterà), e riterremo che $\varepsilon(\sigma, x)$ ci indichi questo valore così determinato di ε pel punto x; e allora questa quantità $\varepsilon(\sigma, x)$ nell'intervallo (α, β) potrà riguardarsi come una funzione di x.

Da ciò segue che esisterà un limite inferiore λ' pei valori di $\varepsilon(\sigma, x)$ nell'intervallo stesso (α, β), e esisterà (§ 36 [pag. XLV e seg.]) almeno un punto x' fra α e β (α e β inclusi) dotato della proprietà che pei punti di ogni intorno di x' anche arbitrariamente piccolo, il limite inferiore dei valori corrispondenti di $\varepsilon(\sigma, x)$ è ancora λ'. Inoltre, siccome la funzione $f(x)$ è sempre continua, per il punto x' esisterà un numero positivo e differente da zero ε' dotato della proprietà che per tutti i valori di δ' numericamente minori di ε' pei quali il punto $x'+\delta'$ cade nell'intervallo dato si ha in valore assoluto $f(x'+\delta')-f(x')<\frac{\sigma}{2}$, e quindi nell'intervallo $(x'-\varepsilon', x'+\varepsilon')$ (o nella porzione di esso che cade nell'intervallo dato) le variazioni della funzione saranno sempre numericamente minori di σ.

Ne segue che per *tutti* i punti x che possono considerarsi nell'intervallo $\left(x'-\frac{\varepsilon'}{2}, x'+\frac{\varepsilon'}{2}\right)$ un valore per ε uguale a $\frac{\varepsilon'}{2}$ soddisfarà alla condizione di darci in valore assoluto $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$ per tutte le δ numericamente minori di questo ε e per le quali il punto $x+\delta$ resta nell'intervallo (α, β); quindi per tutti questi punti x la quantità $\varepsilon(\sigma, x)$ definita sopra non potrà essere inferiore a $\frac{\varepsilon'}{2}$, e λ' che è il limite inferiore dei valori $\varepsilon(\sigma, x)$ per gli stessi valori di x, e anche per tutti i valori di x fra α e β (α e β inclusi), non potrà essere minore di $\frac{\varepsilon'}{2}$.

Questo ci dimostra che per tutti i valori di x compresi nell'intervallo (α, β) (gli estremi inclusi), e per tutti i valori di δ numericamente minori di $\frac{\varepsilon'}{2}$ e pei quali il punto $x+\delta$ cade nell'intervallo stesso (α, β) si ha in valore assoluto $f(x+\delta)-f(x)<\sigma$; quindi il teorema resta così dimostrato.

43. — Notiamo che dal teorema precedente risulta subito l'altro che: *Se una funzione $f(x)$ è continua in tutto un intervallo (α, β), prendendo un numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, si potrà sempre scomporre l'intervallo totale (α, β) in un numero finito di intervalli parziali sufficientemente piccoli, ma tutti di ampiezza differente da zero, tali che le oscillazioni della funzione in ciascuno di essi siano tutte minori di σ;*

giacchè se ε è il numero di cui abbiamo mostrato sopra l'esistenza che serve per un numero σ' inferiore a $\frac{\sigma}{2}$, in ogni intervallo inferiore o uguale a ε le oscillazioni della funzione non saranno mai superiori a $2\sigma'$ (§ 37 [pag. XLVII]), e quindi saranno tutte inferiori a σ.

44. — Le funzioni continue in un dato intervallo godono anche di altre proprietà che per molto tempo si ritennero come di una evidenza immediata, ma che esigono pur nonostante una dimostrazione speciale quando si voglia fare uno studio rigoroso delle stesse funzioni.

Queste proprietà sono contenute nei seguenti teoremi, dei quali il primo, il terzo e il quarto si riferiscono più generalmente anche alle funzioni che sono continue soltanto in un punto.

Teorema I. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto determinato x' ed è conosciuta in un gruppo di punti dei quali x' è soltanto un punto-limite, essa sarà determinata anche nel punto x'.*

Infatti, se questo accade e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sono punti del gruppo dato disposti in modo che col crescere di n vadano sempre più avvicinandosi ad x', i valori $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n), \ldots, f(\alpha_{n+p}), \ldots$ sono conosciuti, e pel teorema di Cauchy (§ 23 [pag. XXXIII]) hanno un limite determinato perchè, a causa della continuità di $f(x)$, le differenze $f(\alpha_{n+p})-f(\alpha_n)$, qualunque sia il numero positivo p, col crescere indefinito di n finiscono per divenire e restare poi sempre numericamente minori di qualunque quantità data.

Ora se A è questo limite, nel punto x' sarà $f(x')=\mathrm{A}$, perchè se potesse essere per es. $f(x')=\mathrm{B}$, con B differente da A e per es. $\mathrm{A}<\mathrm{B}$, indicando con λ un numero qualunque compreso fra A e B (A e B escl.) e con n' un numero tale che per $n>n'$ i valori $f(\alpha_n)$ fossero sempre vicini a A più di quello che lo sia il numero λ, questi valori si manterrebbero discosti da B, cioè da $f(x')$, più di $\mathrm{B}-\lambda$, e quindi $f(x)$ non sarebbe continua nel punto x', perchè non esisterebbe un intervallo $(x'\pm\varepsilon, x')$, o $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ nel quale fosse sempre $f(x)-f(x')<\mathrm{B}-\lambda$ in valore assoluto. Il teorema è dunque dimostrato.

Da questo teorema si deduce immediatamente come corollario che:

Se una funzione $f(x)$ è continua in un certo intervallo (α, β) ed è conosciuta nei punti di un gruppo infinito G, essa è determinata anche nei punti di tutti i gruppi derivati di G.

45. — Di qui poi si ha subito il seguente:

Teorema II. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un certo intervallo (α, β) ed è conosciuta soltanto nei punti di un gruppo G di seconda specie di cui il primo gruppo derivato G' contiene tutti i punti dell'intervallo, essa sarà determinata anche negli altri punti.*

E così in particolare si può dire che: *Se la funzione $f(x)$ ha uno stesso valore A in tutti i punti di un gruppo G come quello ora considerato, essa sarà uguale ad A in tutto l'intervallo; e se una funzione $f(x)$ continua fra α e β è conosciuta in tutti i punti razionali dello stesso intervallo, essa sarà determinata anche nei punti irrazionali;* come anche: *se due funzioni continue nell'intervallo (α, β) sono uguali in tutti i punti del gruppo G di seconda specie ora indicato, esse saranno uguali anche in tutti gli altri punti.*

46. — Teorema III. *Se una funzione $f(x)$ è continua in un punto x', e in punti discosti da x' meno di qualunque quantità arbitrariamente piccola data prende il valore A o valori che numericamente differiscono da A meno di qualunque quantità data, si avrà $f(x')=A$,* giacchè se fosse per es. $f(x')=B$, con B differente da A, $f(x)$ nel punto x' non sarebbe continua.

47. — Teorema IV. *Se $f(x)$ è continua in un punto x' e coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad x' da una parte di x' finisce per non essere mai maggiore di A, mentre coll'avvicinarsi di x ad x' dall'altra parte di x' finisce invece per non essere mai minore di A, essa nel punto x' prenderà il valore A.*

È chiaro infatti che se non fosse $f(x')=A$, da una parte di x' la funzione $f(x)-A$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad x' finirebbe per essere sempre positiva o nulla, e dall'altra finirebbe invece per essere sempre negativa o nulla, e in x' non sarebbe zero, e quindi almeno da una parte di x' questa funzione $f(x)-A$ non sarebbe continua, ciò che è contro l'ipotesi.

48. — Teorema V. *Una funzione $f(x)$ che in un dato intervallo (α, β) è continua e non è costante, prende sempre effettivamente nello stesso intervallo il valore massimo e il valore minimo;* cioè esiste sempre nell'intervallo (gli estremi inclusi) almeno un punto determinato x' nel quale la funzione ha un valore che non è inferiore a nessuno dei valori che essa ha in tutti gli altri punti dello stesso intervallo, ma è invece superiore ad alcuni o a tutti questi valori; e esiste pure nello stesso intervallo almeno un punto determinato x'' nel quale il valore della funzione non è superiore a nessuno dei valori che essa ha in tutti gli altri punti, ma è invece inferiore ad alcuni o a tutti questi valori stessi (Weierstrass) (*).

Indichiamo infatti con λ il limite superiore dei valori della nostra funzione $f(x)$ nell'intervallo dato da α a β (gli estremi inclusi). Questo limite superiore esisterà, ed esisterà anche (§ 36 [pag. XLV]) almeno un punto x' dotato della proprietà che pei punti di ogni suo intorno, anche arbitrariamente piccolo, il limite superiore dei valori di $f(x)$ è ancora λ; quindi pel teorema III si avrà evidentemente $f(x')=\lambda$, e perciò λ sarà un massimo.

(*) Osserviamo che per le funzioni che non sono sempre continue nell'intervallo (α, β) non può darsi che il teorema del § 36 [pag. XLV] poichè per esse il massimo e il minimo possono evidentemente *non esistere*.

In modo simile si prova l'esistenza del minimo, e perciò il teorema può dirsi completamente dimostrato.

49. — Teorema VI. *Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo (α, β) e in questo intervallo prende anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, essa per un valore determinato di x nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche il valore zero.*

Per il teorema precedente infatti, la funzione $f^2(x)$, che è pure continua fra α e β (§ 39 [pag. XLVIII]) e non è mai negativa ammetterà un minimo che sarà al tempo stesso il limite inferiore dei valori che essa ha fra α e β (α e β inclusi). Ma per le ipotesi fatte nell'enunciato questo limite inferiore è zero, quindi esiste fra α e β (α e β inclusi) un valore determinato di x pel quale $f(x)=0$.

50. — Teorema VII. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e in questo intervallo prende anche valori numericamente vicini quanto si vuole ad una quantità determinata A, essa per un valore determinato di x nello stesso intervallo prenderà effettivamente anche il valore A.*

La funzione $f(x)-A$ infatti, nell'intervallo dato, prenderà anche valori numericamente minori di qualunque quantità data, e quindi (teor. prec.) per un certo valore x' di x in questo intervallo (gli estr. inclusi) prenderà anche il valore zero, e si avrà perciò $f(x')=A$.

51. Teorema VIII. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e per un valore a di x compreso in questo intervallo (α e β inclusi) è positiva, mentre per un valore b di x nello stesso intervallo (α e β pure inclusi) è negativa, per un valore determinato di x fra a e b prenderà il valore zero.*

Supponiamo infatti per es. $a<b$, e formiamo il gruppo dei valori positivi di $f(x)$ fra a e b (a incluso) e indichiamo con A il limite inferiore di questi valori. Siccome $f(x)$ è continua fra a e b, pel teorema precedente esisterà fra a e b un punto x' pel quale $f(x')=A$, e perciò per dimostrare il teorema enunciato basterà dimostrare che A deve essere uguale a zero.

Ora, ammettendo che A sia differente da zero, pel teorema dato sopra al § 43 si potrà trovare un numero differente da zero e positivo ε col quale si potrà dividere l'intervallo (a, b) in più intervalli successivi $(a, a+\varepsilon)$, $(a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$, $(a+2\varepsilon, a+3\varepsilon)$, ... in ciascuno dei quali le variazioni di $f(x)$ siano minori di A in valore assoluto; e poichè ε è differente da zero, il numero di questi intervalli sarà finito, e l'ultimo di essi $(a+m\varepsilon, b)$ potrà anche essere di ampiezza minore di ε.

Ora considerando il primo di questi intervalli $(a, a+\varepsilon)$, e osservando che $f(a) \geq A$, si vede subito che in esso la funzione $f(x)$ sarà sempre positiva, e quindi non inferiore ad A, e perciò anche $f(a+\varepsilon)$ sarà positiva e non inferiore ad A. Considerando poi il secondo intervallo $(a+\varepsilon, a+2\varepsilon)$ si conclude subito che anche in esso $f(x)$ è sempre positiva e quindi non inferiore ad A, e sarà perciò $f(a+2\varepsilon) \geq A$; e così continuando si giunge a concludere che, quando A fosse differente da zero, $f(x)$ sarebbe positiva e non mai inferiore ad A in tutto l'intervallo, e in particolare anche $f(b)$ sarebbe positiva e non inferiore ad A, ciò che è contro l'ipotesi. Conviene dunque ammettere che A sia zero, e $f(x')=0$; e poichè evidentemente il punto x' non può trovarsi nè in a nè in b, il teorema resta così dimostrato.

52. — Teorema IX. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β e in due punti a e b di questo intervallo (α e β inclusi) prende valori differenti* A e B, *essa per uno o più valori determinati di x fra a e b prenderà qualunque valore* C *compreso fra* A *e* B.

Considerando infatti la funzione $f(x)-C$, si vede subito che i suoi valori per $x=a$ e $x=b$ sono di segno contrario; e si conclude quindi (teor. prec.) che fra a e b esisterà almeno un valore determinato x' di x pel quale si avrà $f(x')-C=0$, ossia $f(x')=C$.

53. — Per questo teorema poi e per quello del § 48 si ha subito anche il seguente:

Teorema X. *Se la funzione $f(x)$ è continua fra α e β, in questo intervallo prenderà almeno una volta per un valore determinato della variabile un valore qualunque compreso fra il massimo e il minimo dei valori che essa ha nell'intervallo stesso.*

54. — Teorema XI. *Se la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo (α, β) e in alcuni intorni di uno dei due estremi, per es. di α, è costante e uguale ad* A, *senza però essere costante in tutto l'intervallo (α, β), e si ha per esempio $\alpha<\beta$, esisterà* nell'interno *dell'intervallo stesso un punto* determinato *x' dotato della proprietà che mentre fra α e x' (x' incluso) si ha sempre $f(x)=A$, in qualunque intervallo $(x', x'+\varepsilon)$ a destra di x' e coll'estremo inferiore in x' esisteranno sempre dei punti x pei quali* non *sarà* $f(x)=A$.

Col solito processo infatti della divisione successiva dell'intervallo (α, β), pel quale supporremo $\alpha<\beta$, in intervalli ciascuno metà del precedente, si incominci a dividere l'intervallo stesso in due intervalli (α, γ) e (γ, β) segnando il suo punto di mezzo γ; e se fra α e γ la funzione che si considera $f(x)$ avrà sempre il valore A — con che pel teorema del § 46, a causa della continuità, anche in γ avrà questo valore — si prenda a considerare il secondo intervallo (γ, β) nel quale la funzione non sarà sempre uguale ad A, mentre se fra α e γ essa avrà anche valori diversi da A si prenderà a considerare il primo intervallo (α, γ).

Supposto ad es. che si debba così considerare l'intervallo (γ, β) si procederà su questo come si è proceduto sul precedente (α, β), dando luogo con ciò ad un terzo intervallo da considerarsi pel quale si procederà al modo stesso; e così continuando si formeranno le solite due classi contigue di punti dotate della particolarità che indietro a ogni punto della prima classe, e in questo punto, la funzione avrà sempre il valore A, mentre fra ogni punto α_n della prima classe e il punto corrispondente β_n della seconda vi saranno sempre dei punti nei quali $f(x)$ ha valori diversi da A.

Queste due classi di numeri definiranno dunque un numero x' che godrà della proprietà che nei punti a sinistra di x' vicini quanto si vuole a x', e quindi anche in questo stesso punto x', la funzione avrà sempre il valore A, mentre in intorni a destra di x' comunque piccoli avrà anche valori diversi da A; e poichè evidentemente questo punto x' non potrà coincidere nè con α nè con β e sarà interno all'intervallo (α, β), il teorema resta completamente dimostrato.

55. — Da questo teorema risulta evidentemente che se fra α e β (α e β inclusi) esiste un punto *determinato* x' dotato della proprietà che in un intervallo arbitrariamente piccolo che ha questo punto nel suo interno o anche soltanto in un estremo, la funzione $f(x)$, che supponiamo continua fra α e β, ha sempre uno stesso valore A, esisterà una porzione *determinata* dell'intervallo (α, β), alla quale apparterrà il punto x', e pei punti della quale si avrà sempre $f(x')=A$, mentre fuori di questa porzione anche per punti vicinissimi ai suoi estremi non sarà sempre $f(x)=A$ (*); e per brevità di locuzione una tal porzione dicesi *tratto di invariabilità della funzione*, e diconsi *punti di invariabilità* i punti di essa, come in particolare poi diconsi *punti limiti di invariabilità* i punti estremi della stessa porzione.

E osserveremo che una funzione continua fra α e β e che non sia costante in tutto questo intervallo potrà avere nello stesso intervallo dei tratti

(*) Se la nostra funzione $f(x)$ fosse discontinua nell'intervallo (α, β) nel quale si considera, e in questo intervallo vi fosse un punto determinato x' negli intorni arbitrariamente piccoli del quale anche soltanto da una parte (lo stesso punto x' al più escluso) la funzione avesse sempre uno stesso valore A, allora, fatta astrazione dalle discontinuità che possono togliersi, quando ve ne siano, con un procedimento del tutto simile a quello tenuto sopra si dimostrerebbe ancora che esiste una porzione *determinata* dell'intervallo, alla quale appartiene il punto x', per ogni punto della quale salvo tutt'al più negli estremi si avrà sempre $f(x)=A$, mentre fuori di questa porzione anche per punti vicinissimi ai suoi estremi non sarà sempre $f(x)=A$; talchè si avranno ancora i tratti d'invariabilità quando si faccia tutt'al più astrazione da ciò che avviene agli estremi di questi tratti e dalle discontinuità che possono togliersi, quando ve ne siano.

di invariabilità, e il numero di questi tratti potrà anche essere infinito. E poichè il valore della funzione in un punto qualunque di un tratto di invariabilità è lo stesso di quello che essa ha nei punti estremi, potremo talvolta fare astrazione dai tratti di invariabilità, e limitarci a considerare i punti limiti di invariabilità.

Osserviamo ora che se in un intervallo (α, β) la funzione continua $f(x)$ *non è costante* e α e β non sono suoi punti di invariabilità, questo intervallo potrà sempre scomporsi in due altri intervalli (α, α_1), (α_1, β) in ciascuno dei quali $f(x)$ non sarà costante. Lo stesso accadrà se uno o tutti e due i punti α e β sono punti di invariabilità della funzione, poichè allora se α' e β' sono i punti limiti di invariabilità corrispondenti ai tratti di invariabilità cui appartengono i punti α e β, essi saranno evidentemente distinti, e basterà prendere per α_1 un punto compreso fra questi punti α' e β'; quindi poichè ciascuno dei due intervalli ottenuti può alla sua volta scomporsi in due altri intervalli nei quali $f(x)$ non è costante, si può dire evidentemente che se $f(x)$ nell'intervallo (α, β) non ha sempre lo stesso valore, questo intervallo potrà scomporsi in un numero grande quanto si vuole di intervalli parziali in ciascuno dei quali $f(x)$ non avrà sempre lo stesso valore.

56. — Sulle funzioni che sono continue in tutto un intervallo (α, β) e non hanno sempre lo stesso valore presenteremo ora altre osservazioni che ci condurranno poi ad una classificazione molto importante delle stesse funzioni.

Ricordiamo perciò che pel teorema del § 48 una qualunque $f(x)$ di queste funzioni ammette sempre nell'intervallo dato (α, β) (gli estremi inclusi) un massimo M e un minimo m fra tutti i valori che essa può prendere nell'intervallo stesso. In questo massimo e minimo però si ha soltanto il più grande e il più piccolo fra tutti i valori che la funzione può prendere fra α e β (α e β inclusi); ma si potranno avere fra α e β anche altri massimi e minimi in base alle considerazioni seguenti.

Supponendo che x' non sia un punto di invariabilità della funzione nell'intervallo (α, β) (α e β inclusi), diciamo, come è naturale, che nel punto x' la funzione è massima o minima quando il valore $f(x')$ che essa prende in quel punto è il massimo o il minimo respettivamente fra tutti i valori che essa prende in ogni intorno sufficientemente piccolo del punto stesso. Questo punto x' pel ricordato teorema del § 48 esisterà sempre per ogni intorno, e ne potrà anche esistere più di uno, potendo però trovarsi in uno o in tutti e due gli estremi dell'intorno.

E se (x_1, x_2) è un tratto di invariabilità della funzione, si dirà che la funzione è massima o minima in ogni punto x' di questo tratto e anche in tutto il tratto quando il valore che essa ha nel tratto stesso è il massimo

o il minimo respettivamente fra i valori che essa prende in ogni intorno sufficientemente piccolo di uno o di tutti e due i punti limiti di invariabilità x_1, x_2 dello stesso tratto secondochè *uno solo o tutti e due* questi punti cadono *nell'interno* dell'intervallo (α, β). Fuori di questi casi in un punto o in un tratto di invariabilità della funzione non si avranno nè massimi nè minimi.

A scanso di equivoci poi chiameremo massimi e minimi *assoluti* della funzione nell'intervallo (α, β) i numeri M e m considerati sopra, e con queste denominazioni sarà da osservare che anche questi massimi e minimi assoluti corrisponderanno sempre respettivamente a massimi e minimi della funzione, sia che i punti corrispondenti a questi valori siano punti di invariabilità della funzione o non lo siano. Inoltre potrà darsi che fra α e β (α e β inclusi) non vi sia che un sol punto o un solo tratto di invariabilità di $f(x)$ nel quale questa funzione abbia un valore massimo e questo allora sarà M, e potrà darsi che non vi sia che un solo punto o un solo tratto *nel quale* essa abbia un valore minimo e questo sarà m; come potrà darsi anche che fra α e β esistano più punti o più tratti nei quali la funzione è massima o minima, e in questo caso tutti i valori massimi e minimi della funzione che così si avranno saranno compresi fra M e m, o saranno uguali respettivamente a questi numeri, e dei massimi alcuni (differenti da M) potranno anche essere uguali a dei minimi (differenti però da m).

57. — E poichè, pel ricordato teorema del § 48, in ogni porzione dell'intervallo (α, β) che non appartiene tutta ad un tratto di invariabilità, esistono sempre dei punti o dei tratti determinati, nei quali la funzione ha il massimo M e il minimo m dei valori che essa può prendere nella stessa porzione, e si ha $M > m$, si conclude che se fra un massimo e un minimo della funzione (punti o tratti) non si hanno altri massimi o minimi, essi non potranno essere uguali; e se in due punti o tratti non appartenenti allo stesso tratto di invariabilità la funzione avrà due massimi, fra essi dovrà esistere almeno un punto o un tratto determinato nel quale la funzione ha un minimo inferiore ai massimi stessi.

Ne segue che se la funzione avrà massimi e minimi in punti o in tratti *determinati*, percorrendo l'intervallo per es. da α a β, da un punto o da un tratto dove la funzione è massima non si passerà ad un altro punto o ad un tratto dove essa è pur massima senza incontrare almeno un punto o tratto nel quale essa ha un valore minimo inferiore al massimo da cui siamo partiti. Inoltre in tutto l'intervallo fra un massimo e un minimo quando siano consecutivi la funzione sarà tale che dividendo in due l'intervallo con un punto qualunque preso in esso, negli intervalli che si otterranno essa avrà sempre il massimo in principio e il minimo in fine, o in altri termini nell'intervallo totale dal massimo al minimo la funzione andrà sempre decrescendo o rimarrà costante soltanto in alcuni tratti, e potrà anche restare costante in un numero infinito di tratti.

Viceversa da un minimo a un massimo consecutivi la funzione andrà sempre crescendo o resterà costante in alcuni tratti; e noi ora per indicare questo passaggio da un massimo a un minimo consecutivo o viceversa, diremo che la funzione *fa una oscillazione*, e chiameremo *ampiezza della oscillazione* la differenza fra il massimo e il minimo corrispondenti, riservando però ancora il nome di *oscillazione* di una funzione continua *in un dato intervallo* alla differenza fra il massimo e il minimo dei valori che essa prende in questo intervallo (§. 37 [pag. XLVII]).

58. — Osserviamo poi che se un punto $x=a$ fra α e β (α e β inclusi) non è un punto di invariabilità e in esso la funzione $f(x)$ ha un massimo o un minimo, dovrà esistere un intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ di questo punto tale che per tutti i punti $a+\delta$ e $a-\delta$ che cadono respettivamente a destra e sinistra di a nello stesso intorno le differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$ siano sempre negative o nulle, o sempre positive o nulle respettivamente, senza però esser sempre nulle nè le une nè le altre. E se il punto $x=a$ appartiene a un tratto di invariabilità e in esso si ha un massimo o un minimo, le differenze precedenti dovranno soddisfare alle stesse condizioni in un intorno $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ di questo punto che contenga nel suo *interno* uno o tutti e due i punti limiti di invariabilità, secondochè uno solo o tutti e due questi punti cadranno nell'*interno* dell'intervallo (α, β); e se infine per $x=a$ non si avrà nè un massimo nè un minimo, allora non sarà possibile di soddisfare a queste condizioni, e, qualunque siano gli intorni $(a-\varepsilon, a+\varepsilon')$ che si prenderanno, le differenze corrispondenti $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$, dove saranno differenti da zero, non saranno sempre tutte dello stesso segno.

Prendendo ora a considerare un punto $x=a$, che non appartenga a un tratto di invariabilità, o che tutt'al più sia un punto limite di invariabilità, si può osservare che per quanto piccolo si prenda un numero positivo ε, potrà avvenire che una almeno delle differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$, considerate pei valori di δ positivi e minori di ε, senza essere sempre zero per tutti questi valori di δ, divenga però sempre uguale a zero per alcuni di questi valori, o cambi continuamente di segno col variare di δ, o anche più generalmente vada ora crescendo ora diminuendo in valore assoluto coll'impiccolire sempre più di δ; in modo cioè che fra 0 e ε (0 escluso), per quanto piccolo sia ε, esistano sempre dei valori δ_1 di δ pei quali il valore assoluto di quella differenza è minore del valore assoluto della stessa differenza per alcuni valori di δ inferiori a δ_1. Allora la funzione $f(x)$ per $x=a$ avrà o non avrà un massimo o un minimo; ma sempre però nell'intorno del punto a, a destra o a sinistra o da ambedue le parti secondochè le dette singolarità si presenteranno per l'una o per l'altra delle due differenze $f(a+\delta)-f(a)$, $f(a-\delta)-f(a)$ o per tutte e due, la funzione stessa avrà un numero infinito di massimi e di minimi (in un numero infinito di punti o di tratti).

Riteniamo infatti che le dette singolarità si presentino per es. a destra di a, e sia δ_1 uno degli indicati valori di δ; e consideriamo il massimo e minimo assoluto di $f(x)$ fra a e $a+\delta_1$ (a e $a+\delta_1$ inclusi).

Supponiamo ε già sufficientemente piccolo; si vedrà subito che se $f(a)$ è un massimo di $f(x)$, esisterà sempre *nell'interno* dell'intervallo stesso $(a, a+\delta_1)$ un punto o un tratto determinato cui corrisponderà il minimo assoluto di $f(x)$ fra a e $a+\delta_1$, perchè per certi valori di δ inferiori a δ_1 il valore assoluto della differenza $f(a+\delta)-f(a)$ (che ora è negativa) sarà maggiore del valore assoluto della differenza $f(a+\delta_1)-f(a)$. Similmente si vedrà che, se in a si ha un minimo di $f(x)$, *nell'interno* dello stesso intervallo $(a, a+\delta_1)$ esisterà un punto o un tratto determinato nel quale si ha il massimo assoluto di $f(x)$, e parimenti, se in a non si ha nè un massimo nè un minimo, in un punto o in un tratto determinato nell'interno dello stesso intervallo si avrà ancora il massimo o il minimo assoluto di $f(x)$; talchè in ogni caso, per quanto piccolo sia ε, esisterà sempre un punto o un tratto determinato fra a e $a+\varepsilon$ (a e $a+\varepsilon$ esclusi) cui corrisponderà un massimo o un minimo di $f(x)$.

Prendendo ora per ε un valore ε_1 minore di ε e tale che fra a e $a+\varepsilon_1$ non sia contenuto il punto o il tratto che ora abbiamo determinato (neppure in parte), si giungerà alle stesse conclusioni per l'intervallo $(a, a+\varepsilon_1)$; e così continuando si vede chiaramente che il numero dei massimi e minimi (punti o tratti) che si avranno in qualunque intervallo $(a, a+\varepsilon)$, per quanto piccolo sia ε, sarà sempre infinito; e volendo, si potrà anche costruire quel numero che più ci piace di punti o tratti corrispondenti agli stessi massimi e minimi.

Viceversa, se si osserva che quando una funzione ha un massimo o un minimo in un punto *interno* di un intervallo (α, β), o in un tratto determinato *tutto* contenuto *nell'interno* di questo intervallo, essa col variare di x da α a β in alcuni tratti deve andare crescendo e in altri decrescendo, si potrà dire evidentemente che quando in ogni intorno di un punto a a destra o a sinistra, o dalle due parti la funzione $f(x)$ ha un numero infinito di massimi o di minimi (punti o tratti), l'una o l'altra delle due differenze $f(a+\delta)-f(a)$ e $f(a-\delta)-f(a)$ o tutte e due presenteranno le singolarità dette sopra.

59. — Queste osservazioni conducono a notare l'esistenza di funzioni continue che nell'intorno di punti speciali (come per es. il punto $x=0$ per la funzione $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big)$ hanno un numero infinito di massimi e minimi (punti o tratti) o fanno un numero infinito di oscillazioni.

In particolare poi ci permettono anche di notare che se una funzione $f(x)$ è continua in un dato intervallo e un estremo di questo intervallo non è un punto di invariabilità, essa nello stesso estremo o sarà massima o minima, o in ogni intorno di esso avrà un numero infinito di massimi e minimi (punti o tratti); e nel caso che la funzione abbia dei tratti di invariabilità, la stessa osservazione potrà farsi pei punti estremi di questi tratti.

60. — Inoltre per le stesse osservazioni le funzioni che sono continue in un dato intervallo finito potranno distinguersi

a) *in funzioni che nello stesso intervallo hanno un numero finito di massimi e di minimi* (punti o tratti) *o un numero finito di oscillazioni;*

b) *in funzioni che nello stesso intervallo hanno un numero infinito di massimi e di minimi o di oscillazioni.*

E per le prime, come ora mostreremo, i massimi e minimi saranno sempre in punti o tratti *determinati* dell'intervallo dato che potranno effettivamente trovarsi; mentre per le seconde potrà avvenire che essi si aggruppino (in numero infinito) negli intorni di un numero finito di punti speciali soltanto, in modo che, tolti questi punti con un numero finito di intervalli piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti la funzione abbia soltanto un numero finito di massimi e minimi (punti o tratti); e potrà anche avvenire che essi si trovino aggruppati negli intorni di un numero infinito di punti dello stesso intervallo, e in modo anche che almeno da certe porzioni dell'intervallo stesso non sia possibile isolare nessun intervallo nel quale cada soltanto un numero finito di massimi e di minimi.

61. — Che i massimi e minimi delle prime delle dette funzioni che noi supponiamo continue siano sempre in punti o tratti *determinati* dell'intervallo dato, che possono anche successivamente trovarsi, risulta con tutto il rigore dalle considerazioni seguenti.

Premettiamo che tenendo conto della denominazione di *successioni monotone* già introdotta al § 27 [pag. XXXVII] diremo ancora con C. Neumann, per brevità di linguaggio, che il corso o l'andamento di una funzione $f(x)$, continua o no, è *monotono*, o più semplicemente che la funzione è *monotona* in una porzione di un certo intervallo (α, β), che potrà essere anche l'intiero intervallo, quando essa col passare della variabile x da un estremo all'altro della stessa porzione non è mai crescente (cioè decresce o resta immutata) o non è mai decrescente.

In ogni punto c della porzione medesima (gli estr. incl.) una tale funzione sarà continua o avrà soltanto una discontinuità ordinaria (§ 32 [pag. XLII]) perchè negli intorni di quel punto essa non può fare infinite oscillazioni; e considerato per es. un intorno a destra di c *che sia sufficientemente piccolo* ma che esca dal tratto d'invariabilità corrispondente quando c sia un punto d'invariabilità della funzione, è certo che, coll'avvicinarsi indefinitamente di x a c (o all'estremo superiore del tratto d'invariabilità) a destra, la nostra funzione $f(x)$ dove non resterà invariata dovrà finire per variare sempre in un senso (essere sempre crescente cioè o sempre decrescente), perchè altrimenti in quell'intorno essa farebbe un numero infinito di oscillazioni.

In altri termini, qualunque sia il punto c preso a considerare, dovrà esistere uno degli indicati suoi intorni a destra, sufficientemente piccolo ma diverso da zero, nel quale la funzione col muoversi di x verso c, dove non è invariabile va sempre crescendo o sempre decrescendo, per es. sempre crescendo, e quindi se in c la funzione $f(x)$ sarà continua almeno a destra, il valore $f(c)$ — dovendo essere il limite di $f(x)$ a destra — verrà ad essere il limite superiore dei valori di $f(x)$ *fuori di* c in quell'intorno; e quindi, a causa della continuità di $f(x)$ nel punto c a destra, $f(c)$ sarà al tempo stesso il massimo dei valori di $f(x)$ nello stesso intorno; e in questo la funzione sarà monotona.

Le stesse particolarità si avranno per gli intorni del punto c a sinistra quando in c la funzione sia continua almeno a sinistra; e quindi se c sarà un punto *interno* alla porzione d'intervallo che si considera e in essa la funzione sarà continua, esisteranno sì a destra che a sinistra intorni di c sufficientemente piccoli ma finiti, in ciascuno dei quali *considerati separatamente* la funzione sarà monotona; ma il suo valore $f(c)$ in c potrà figurare come massimo quando si considera in confronto ai valori che la funzione ha negli intorni da una parte e come minimo quando si ha riguardo ai valori che essa ha dall'altra parte.

62. — Ciò premesso, si consideri una funzione $f(x)$ che sia finita e continua in tutto un intervallo (α, β) pel quale supporremo ad es. $\alpha<\beta$; e si ammetta di sapere che in questo intervallo essa ha un numero finito di massimi e minimi (punti o tratti) o un numero finito di oscillazioni, senza però essere monotona in tutto l'intervallo perchè una funzione che avesse questa

particolarità o sarebbe sempre costante, o varierebbe già sempre in un senso dove non restasse invariata nel passare da un estremo all'altro dell'intervallo, e quindi avrebbe già il suo massimo (punto o tratto) in un estremo e il minimo successivo nell'altro.

S'immagini allora diviso per metà col punto β_1 l'intervallo totale (α, β), formando così i due intervalli parziali (α, β_1) e (β_1, β).

Nel punto α per le considerazioni fatte nel paragrafo precedente la nostra funzione avrà necessariamente un massimo o un minimo (punto o tratto) rispetto ai valori che essa ha in un intorno sufficientemente piccolo di α a destra, e noi, per fissare le idee, supporremo che vi abbia per es. un massimo; e potrà darsi che nel nuovo intervallo (α, β_1) la nostra funzione risulti già monotona; mentre se questo non sarà si dividerà l'intervallo stesso (α, β_1) in due nuovi intervalli uguali (α, β_2) e (β_2, β_1) segnando il suo punto di mezzo β_2; e se neppure nell'intervallo (α, β_2) la funzione risulterà monotona si dividerà ancora per metà questo intervallo, e così si continuerà con successive divisioni per metà, finchè si giungerà a un intervallo (α, β_k) nel quale la funzione risulterà monotona mentre nell'intervallo precedente (α, β_{k-1}) non lo era; e questo intervallo dovrà trovarsi dopo un numero *finito* k di tali operazioni successive, perchè, per quanto dicemmo nel paragrafo precedente, esistono intorni di α a destra sufficientemente piccoli *ma diversi da zero* nei quali la funzione è monotona.

Ora se il punto β_k venisse ad appartenere a un tratto d'invariabilità che si protraesse a destra di β_k, questo tratto d'invariabilità dovrebbe terminare fra β_k e β_{k-1} a un certo punto γ_k *prima di* β_{k-1}, perchè se γ_k arrivasse a β_{k-1} la funzione risulterebbe monotona in tutto il tratto (α, β_{k-1}), il che è contro il supposto; quindi nel caso che il punto β_k appartenga effettivamente al detto tratto d'invariabilità potremo sostituire all'intervallo (α, β_k) l'intervallo maggiore (α, γ_k) considerando allora i due intervalli (α, γ_k) e (α_k, β_{k-1}) nel primo dei quali la funzione sarà monotona mentre nell'intervallo (α, β_{k-1}) non lo sarà.

Considerata nell'intervallo (α, β_k) o, secondo i casi, nell'altro (α, γ_k) la funzione avendo un massimo (punto o tratto) in α avrà il minimo (successivo) in β_k o γ_k; e sempre per le considerazioni del paragrafo precedente negli intorni *a destra* di β_k o di γ_k quando siano sufficientemente piccoli sarà pure monotona, e avrà in β_k o in γ_k un minimo o un massimo rispetto ai valori che essa ha in quegli intorni a destra.

Se questo valore sarà un minimo, esso sarà anche un minimo (assoluto) rispetto ai piccoli intorni *completi* di β_k o γ_k e allora, poichè da α a β_k o a γ_k la funzione è monotona, sarà già trovato il primo dei tratti *determinati* che si

cercavano nei quali la funzione considerata nell'intiero intervallo (α, β) passa da un massimo a un minimo successivo, e il detto tratto sarà (α, β_k) o (α, γ_k).

Se poi il valore di $f(x)$ nel punto β_k o γ_k sarà invece un massimo rispetto ai valori della funzione nei punti di quegli intorni a destra di β_k o γ_k nei quali, come abbiamo detto, sarà pure monotona, allora nell'intervallo (β_k, β_{k-1}) o nell'altro (γ_k, β_{k-1}) la funzione non potrà essere monotona, altrimenti essa verrebbe a risultare monotona (e non crescente) nell'intiero intervallo (α, β_{k-1}); quindi potremo operare sul nuovo intervallo (β_k, β_{k-1}) o (γ_k, β_{k-1}), che sarà al più la metà del primitivo (α, β), come si è operato su questo.

Si formerà così un nuovo intervallo (β_k, β'_{k_1}) o (γ_k, β'_{k_1}) nel quale la funzione sarà monotona e si comporterà come si comportava nell'intervallo (α, β_k) o (α, γ_k), cioè in esso sarà non crescente per modo che allora si potrà considerare l'intervallo (α, β'_{k_1}) invece dell'intervallo precedente (α, β_k) o (α, γ_k), perchè in esso la funzione sarà ancora monotona; e se β'_{k_1} appartenesse a un nuovo tratto di invariabilità che si protraesse a destra di β'_{k_1} fino ad un punto γ'_{k_1} *prima* di $\beta'_{k_1 - 1}$, si considererebbe invece l'intervallo (α, γ'_{k_1}).

Allora se in β'_{k_1} o γ'_{k_1} la funzione avrà un valore minimo fra quelli che essa ha negli intorni sufficientemente piccoli di β'_{k_1} o γ'_{k_1} nei quali sarà monotona, il nuovo intervallo trovato (α, β'_{k_1}) o (α, γ'_{k_1}) darà il primo dei tratti *determinati* che si cercavano nei quali la funzione passa da un massimo a un minimo successivo; se poi questo non avverrà si passerà ad operare sull'intervallo $(\beta'_{k_1}, \beta'_{k_1-1})$ o $(\gamma'_{k_1}, \beta'_{k_1-1})$ come si è operato negli intervalli precedenti (α, β) e (β_k, β_{k-1}) o (γ_k, β_{k-1}), e il nuovo intervallo sul quale opereremo sarà al più la metà del precedente.

Così continuando o si giungerà *dopo un numero finito* di operazioni a un intervallo $\left(\alpha, \beta^{(i)}_{k_i}\right)$ o $\left(\alpha, \gamma^{(i)}_{k_i}\right)$ che darà il primo dei tratti *determinati* che si cercano nei quali si passa da un massimo in α (punto o tratto) al minimo successivo in $\beta^{(i)}_{k_i}$ o $\gamma^{(i)}_{k_i}$ (punto pure o tratto), o il numero delle operazioni successive *si protrarrà indefinitamente,* e allora gli estremi superiori degli intervalli $\left(\alpha, \beta^{(i)}_{k_i}\right)$ o $\left(\alpha, \gamma^{(i)}_{k_i}\right)$ che successivamente si troveranno avranno un limite superiore λ compreso negli intervalli successivi che si troveranno a destra degli estremi medesimi $\beta^{(i)}_{k_i}$ o $\gamma^{(i)}_{k_i}$ — nei quali la funzione non sarà monotona —; e ora sarà facile vedere che l'intervallo (α, λ) sarà il primo degli intervalli cercati.

Presi infatti a considerare intorni a sinistra e intorni a destra di λ separatamente, in questi intorni quando siano sufficientemente piccoli la funzione sarà monotona; e quindi, poichè in tutti i tratti da α fino a punti sempre a sinistra di λ ma vicini quanto si vuole a λ essa è non crescente, tale sarà anche nei detti intorni a sinistra di λ, e quindi nell'intero tratto da α a λ; e in λ essa avrà un minimo rispetto ai valori che essa ha a sinistra. Invece rispetto ai valori che ha a destra di λ nei detti intorni, essa non potrà essere massima in λ, altrimenti la funzione continuerebbe ad essere non crescente anche da α fino a punti dopo di λ, il che non è; e così venendo λ ad essere un punto di minimo assoluto di $f(x)$ negli intorni (completi) sufficientemente piccoli di λ, resta ora completamente provato quanto abbiamo affermato sopra rispetto all'intervallo (α, λ).

Trovato ora questo primo intervallo determinato (α, λ) nel quale la funzione passa da un massimo al minimo successivo, si prenderà a considerare l'intervallo (λ, β); e operando su questo come si è operato sul primitivo (α, β) si troverà un altro intervallo determinato (λ, λ_1) nel quale la funzione passerà da un minimo in λ al massimo successivo in λ_1, e se λ_1 non sarà già in β si opererà al modo stesso sull'intervallo (λ_1, β) e si formerà un terzo intervallo determinato (λ_1, λ_2) nel quale la funzione passerà dal massimo in λ_1 al minimo successivo in λ_2, e così continuando ancora, ove occorra, è certo che dopo un numero *finito* di queste operazioni successive si dovrà giungere al punto β — supposto come dicemmo che l'intervallo (α, β) sia finito — perchè altrimenti essendo $\alpha, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tutti punti di massimo o di minimo avremmo fra α e β un numero infinito di massimi e minimi, il che è contro il supposto (*).

63. — Pel caso poi della seconda categoria di funzioni del § 60, cioè delle funzioni continue che in un dato intervallo hanno un numero infinito di massimi e minimi, è facile vedere che il numero delle oscillazioni la cui ampiezza — quale fu definita nel § 57 — è maggiore di un dato numero σ piccolo quanto si vuole è sempre finito, e solo va crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinitamente di σ.

(*) Quando la funzione data $f(x)$, pure avendo nell'intervallo finito (α, β) un numero finito di oscillazioni non è sempre continua, nel qual caso, come già notammo, le discontinuità saranno tutte discontinuità ordinarie, non valgono più in tutti i casi le particolarità del § 61; però con leggiere modificazioni al processo di dimostrazione tenuto sopra si trova ancora che l'intervallo totale (α, β) si può spezzare in un numero *finito* d'intervalli in ciascuno dei quali la funzione è monotona, salvo ad avere speciale riguardo a ciò che accade nei punti estremi degli intervalli medesimi.

Le funzioni, continue o no nell'intervallo (α, β), che in questo intervallo hanno un numero finito di oscillazioni, da alcuni Autori vengono dette le funzioni *che soddisfano alle condizioni di Dirichlet,* perchè Dirichlet ebbe continuamente a considerarle nei suoi studii sugli sviluppi delle funzioni in serie trigonometriche, ecc.

Preso infatti per σ un valore determinato, piccolo quanto si vuole, potremo (§ 43 [pag. LI]) immaginare decomposto l'intervallo dato (α, β) in un numero finito di intervalli

$$(\alpha, \alpha+\varepsilon), (\alpha+\varepsilon, \alpha+2\varepsilon), (\alpha+2\varepsilon, \alpha+3\varepsilon), \ldots, (\alpha+n\varepsilon, b),$$

(l'ultimo dei quali sarà di ampiezza uguale o inferiore ad ε) in ciascuno dei quali la oscillazione completa della funzione *nell'intervallo* (intesa nel senso del § 37) sia minore di σ; e in ciascuno di questi intervalli la funzione non potrà fare che oscillazioni di ampiezza minore di σ, sempre intendendosi per ampiezza di una oscillazione quella che definimmo al § 57.

Ne segue che la funzione non potrà fare oscillazioni di ampiezza maggiore di σ se non compiendole in parte in uno degli intervalli sopra indicati e in parte nei seguenti o nei precedenti; e quindi nel caso più sfavorevole, la funzione farà una prima oscillazione di ampiezza maggiore di σ fra α e $\alpha+2\varepsilon$, una seconda fra $\alpha+\varepsilon$ e $\alpha+3\varepsilon$, una terza fra $\alpha+2\varepsilon$ e $\alpha+4\varepsilon, \ldots$, e infine una n^a fra $\alpha+(n-1)\varepsilon$ e b, e si avranno così tutt'al più n oscillazioni di ampiezza maggiore di σ; e questo mostra appunto quanto abbiamo enunciato, perchè n è sempre finito per quanto piccolo si prenda il σ, e solo va crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinito di σ.

64. — Infine osserviamo che esempî di funzioni che sono continue in un dato intervallo e hanno un numero infinito di massimi e minimi nell'intorno di un numero finito di punti dello stesso intervallo si riscontrano nelle funzioni semplici $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $\operatorname{sen} n x \pi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} n x \pi}\right)$ dove n è numero determinato dato; poichè di queste la prima presenta le dette singolarità nell'intorno del punto $x=0$, e la seconda le presenta nell'intorno dei punti $x=\frac{m}{n}$, dove m è un numero intero.

Si hanno inoltre sotto forma analitica classi infinite di funzioni anche relativamente semplici che sono continue in tutto un intervallo e che hanno un numero infinito di massimi e di minimi nell'intorno di un numero infinito di punti, e anche di qualunque punto, in una porzione qualunque dello stesso intervallo; ma noi non possiamo ora fermarci a dare esempii di tali funzioni, e rimandiamo per queste ai Capitoli che trattano della condensazione delle singolarità e delle funzioni che non hanno mai derivata nei punti di un intervallo dato, nei miei *Fondamenti per la teorica* ecc.

VI.

Funzioni infinite volte discontinue

65. — Abbiamo già detto che le funzioni discontinue soltanto in un numero finito di punti dell'intervallo (α, β) in cui si considerano si chiamano generalmente continue, e il loro studio si riduce in sostanza a quello delle funzioni continue in tutto un intervallo. Ora diremo alcune cose intorno alle funzioni che, essendo discontinue in un numero infinito di punti dell'intervallo dato (α, β), possono distinguersi col nome di funzioni *infinite volte discontinue* (*).

Queste funzioni possono essere discontinue in qualunque punto di una o di più porzioni dell'intervallo dato (α, β), e possono anche invece in qualunque porzione di questo intervallo ammettere sempre dei punti di continuità; e per questo si dividono in due grandi classi, chiamando:

Funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni che sebbene infinite volte discontinue nell'intervallo dato (α, β), *in qualunque porzione* anche piccolissima di questo intervallo ammettono dei punti di continuità; e

Funzioni totalmente discontinue quelle funzioni che *almeno in alcune porzioni* dell'intervallo dato (α, β) sono discontinue in *ogni* punto.

Appartengono così alla classe delle funzioni punteggiate discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che in tutti i punti $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, dove n prende tutti i valori interi da 0 a ∞, ha il valore zero e negli altri punti ha il valore uno.

2.° La funzione che nell'intervallo da $x=1$ a $x=\frac{1}{2}$ (gli estremi incl.) ha il valore 1, da $x=\frac{1}{2}$ a $x=\frac{1}{2^2}$ $\left(\frac{1}{2^2}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2}$, da $x=\frac{1}{2^2}$ a $x=\frac{1}{2^3}$

(*) *Hankel* chiama queste funzioni, funzioni *linearmente discontinue*.

$\left(\frac{1}{2^3}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^2}$, e in generale da $x=\frac{1}{2^n}$ a $x=\frac{1}{2^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\text{ incl.}\right)$ ha il valore $\frac{1}{2^n}$.

3.° La funzione che in un gruppo infinito di punti di prima specie fra 0 e 1 è uguale a zero e negli altri punti è uguale a uno.

Appartengono invece alla classe delle funzioni totalmente discontinue fra 0 e 1:

1.° La funzione che pei valori razionali di x fra 0 e 1 è uguale a zero e pei valori irrazionali è uguale ad uno.

2.° La funzione che fra 0 e 1 ha il valore uno per tutto fuorchè negli intervalli di ampiezza ζ^n che hanno il loro punto di mezzo nei punti $x=\frac{1}{2^n}$, in tutta l'estensione dei quali (gli estremi inclusi) essa è uguale a zero pei valori razionali di x, e uguale a uno pei valori irrazionali, supposto che sia per es. $\zeta<\frac{1}{4}$, in modo da far sì che fra gli estremi successivi $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\zeta^n$, $\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}\zeta^{n-1}$ di due intervalli qualunque consecutivi ζ^{n-1} e ζ^n cada sempre un intervallo di ampiezza $\frac{1-(2\zeta)^{n-1}(1+\zeta)}{2^n}$ nel quale la funzione sia sempre uguale ad uno.

66. — Ora quando si abbia riguardo ai salti (§ 34 [pag. XLIII]) che le funzioni infinite volte discontinue possono fare nei differenti punti dell'intervallo dato, si vede chiaramente che, per le funzioni punteggiate discontinue, in qualunque porzione dello stesso intervallo esisterà sempre un altro intervallo nel quale si avranno salti minori di un numero arbitrariamente piccolo σ.

Viceversa se questo accade, qualunque sia σ, per una funzione infinite volte discontinua, è facile vedere che essa sarà punteggiata discontinua.

Prendendo infatti un intervallo qualunque (a, b) nell'intervallo dato (α, β), noi potremo trovare in esso un intervallo (a_1, b_1) nel quale i salti della funzione siano minori di un numero arbitrariamente piccolo σ_1, e in questo potremo prendere un altro intervallo (a'_1, b'_1) i cui estremi siano distanti da a_1 e b_1 respettivamente di una quantità determinata, come per es. siano ad una distanza da a_1 e b_1 uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_1, b_1).

Nell'intervallo (a'_1, b'_1) i salti della funzione saranno minori di σ_1, e in esso potremo trovare un altro intervallo (a_2, b_2) nel quale i salti della funzione siano minori $\frac{1}{2}\sigma_1$; e poi in questo intervallo (a_2, b_2) potremo prenderne un altro (a'_2, b'_2), come si è fatto nel caso precedente, i cui estremi a'_2 e b'_2 siano discosti da a_2 e b_2 respettivamente di una quantità uguale alla quarta parte dell'intervallo stesso (a_2, b_2). Similmente poi nell'intervallo (a'_2, b'_2) potremo trovare un altro intervallo (a_3, b_3) nel quale i salti della funzione siano minori di $\frac{1}{2^2}\sigma_1$...; e così seguitando formeremo una serie di intervalli $(a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), (a'_3, b'_3), \ldots (a'_n, b'_n) \ldots$ nei quali i salti della funzione saranno successivamente minori di $\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2^2}\sigma_1, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1, \ldots$ e uno qualunque di questi sarà tutto compreso negli intervalli precedenti e sarà anche *tutto interno* agli altri intervalli $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_n, b_n) \ldots$ nei quali si hanno pure salti minori di $\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2^2}\sigma_1, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1, \ldots$ respettivamente.

Ora poichè tutti questi intervalli vanno evidentemente impiccolendo oltre ogni limite col crescere indefinito di n, s'intende subito che gli estremi inferiori $a'_1, a'_2, a'_3 \ldots a'_n, \ldots$, e gli estremi superiori $b'_1, b'_2, b'_3 \ldots b'_n, \ldots$ dei primi intervalli costituiscono due classi contigue di numeri alle quali corrisponde un punto determinato α'; e ci è facile di vedere che in questo punto limite α' la nostra funzione $f(x)$ è sempre continua.

Si osservi infatti che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste sempre un numero n pel quale si ha $\frac{1}{2^{n-1}}\sigma_1 < \sigma$, e quindi esisterà un intervallo (a'_n, b'_n) che sarà *tutto situato nell'interno* di un altro intervallo (a_n, b_n) in ogni punto del quale i salti della funzione saranno minori di σ. Ora il punto α' può considerarsi come appartenente all'intervallo (a'_n, b'_n), quindi esisterà un intorno $(\alpha' - \varepsilon_1, \alpha' + \varepsilon')$ di questo punto tale che per tutti i punti x di esso la differenza $f(x) - f(\alpha')$ sia numericamente minore di σ; e perciò $f(x)$ nel punto α' sarà continua, e così nell'intervallo (α, β) sarà una funzione punteggiata discontinua, come appunto avevamo enunciato (*).

67. — Da ciò risulta che le funzioni punteggiate discontinue saranno le funzioni per le quali in qualunque porzione dell'intervallo in cui si considerano esiste sempre un altro intervallo nel quale i salti sono minori di un numero arbitrariamente piccolo; e le funzioni totalmente discontinue saranno invece le funzioni tali che, almeno per alcune porzioni dell'intervallo dato, in ogni intervallo piccolo quanto si vuole preso nelle stesse porzioni fanno salti maggiori di un certo numero sufficientemente piccolo ma determinato σ.

68. — Di qui segue che per le funzioni totalmente discontinue il numero dei punti dell'intervallo dato nei quali si hanno salti maggiori di un numero sufficientemente piccolo σ sarà sempre infinito; mentre per le funzioni punteggiate discontinue, e per queste soltanto, potrà anche avvenire (come avviene per es. per la seconda delle funzioni del § 65) che questo numero sia sempre finito, qualunque sia σ, e vada soltanto crescendo indefinitamente coll'impiccolire indefinitamente di σ.

69. — Per questa osservazione poi si può anche notare che appartengono sempre alla classe delle funzioni punteggiate discontinue quelle funzioni infinite volte discontinue che nell'intervallo dato hanno soltanto un numero finito di oscillazioni (*).

Per queste funzioni infatti, in ciascuno degli intervalli parziali nei quali esse fanno una sola oscillazione, e quindi anche in tutto l'intervallo (α, β), i salti maggiori di un numero arbitrariamente piccolo σ dovranno essere soltanto in un numero finito di punti, perchè altrimenti in quegli intervalli parziali avvenendo i salti sempre in un senso, la funzione dovrebbe divenire infinita; quindi le funzioni stesse non potranno essere che funzioni punteggiate discontinue.

(*) Si può osservare che gli intervalli successivi (a'_n, b'_n), invece di dedurli come abbiamo fatto noi dagli altri intervalli (a_n, b_n) col prendere i punti a'_n e b'_n discosti da a_n e b_n respettivamente di una quantità uguale alla quarta parte dell'intervallo (a_n, b_n), si potrebbero ottenere con altri processi coi quali l'intervallo (a'_n, b'_n) che si ha via via da dedurre dall'altro (a_n, b_n) non venisse così fortemente impiccolito; e allora invece di giungere ad un solo punto limite α' nel quale $f(x)$ è continua si potrebbe giungere *talvolta* anche ad un tratto-limite in tutti i punti del quale $f(x)$ è pure sempre continua.

(*) Queste funzioni naturalmente rientrano fra quelle che nella nota alla pag. LXV furono dette funzioni che soddisfano alle condizioni di Dirichlet.

VII.

Alcuni studii sulle serie

Generalità.

70. — La teoria delle serie viene esposta ordinariamente con abbastanza diffusione, almeno nelle sue parti fondamentali, nei corsi di Algebra, e qui ci limiteremo perciò a richiamarne i punti principali e ad esporre quelle altre parti di essa che più hanno interesse pel calcolo infinitesimale e per le matematiche superiori.

Ricordiamo perciò che si chiama *serie* un aggregato

(1) $$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

o Σu_n di termini reali o complessi il cui numero è infinito; e una serie si dice *convergente* quando il limite della somma s_n dei suoi primi n termini per n crescente indefinitamente è determinato e finito, e si dice *divergente* quando questo limite è infinito o non esiste; e talvolta anche quando questo limite non esiste si dice che la serie è *indeterminata.*

Nel caso della convergenza il limite s della somma s_n dei primi n termini della serie si dice *somma* o *valore* della serie; e talvolta si parla pure di somma delle serie divergenti quando il detto limite è infinito, dicendo che la somma della serie è infinita.

S'intende che, se una serie è complessa, per la sua convergenza dovranno essere convergenti separatamente la serie delle parti reali e quella dei coefficienti dell'immaginario dei singoli termini o, il che è lo stesso, dovranno avere limiti determinati e finiti il modulo delle somme successive s_n e anche i loro argomenti, salvo per questi le differenze di multipli di 2π che non hanno influenza sul valore del limite di s_n; e ciò a meno che il limite dei moduli delle s_n non sia zero nel qual caso sarà inutile occuparsi di quello degli argomenti.

71. — Quando una serie Σu_n è convergente si chiama *resto* della serie a partire dal termine u_m la somma della serie

(2) $$u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{m+p}+\ldots$$

formata dai termini che seguono u_m; e in questo caso, se s'indica con s la somma della serie data e con r_m il detto suo resto, si avrà sempre

(3) $$s=s_m+r_m,$$

perchè le somme successive dei termini della serie

(4) $$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_m,\ s_{m+1},\ s_{m+2},\ \ldots,\ s_{m+p},\ \ldots$$

dalla s_{m+1} in poi corrispondono alle altre

(5) $$s_m+r_{m,1},\ s_m+r_{m,2},\ \ldots,\ s_m+r_{m,p},\ \ldots$$

quando s'indichino con $r_{m,1}, r_{m,2}, \ldots, r_{m,p}, \ldots$ quelle della serie (2); e evidentemente se esiste un limite s delle somme successive (4) esisterà anche un limite r_m di quelle della serie (2) e viceversa, e si avrà appunto la formola (3).

Il resto r_m di una serie convergente (1) equivarrà dunque all'*errore* che si commette prendendo per somma della serie la somma dei suoi primi m termini; il quale errore viene così ad essere la somma delle serie che si ottiene incominciandola dal termine u_{m+1} che segue quello al quale ci si arresta nella somma s_m.

72. — Se una serie (1) è convergente, evidentemente il limite dei suoi termini u_n per n crescente indefinitamente è zero; ma il trovare soddisfatta questa condizione non basta per potere concludere che la serie è convergente.

Ciò è noto dagli elementi della teoria delle serie, nei quali si danno esempii semplicissimi di serie, come ad esempio la serie armonica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

che sono divergenti sebbene i loro termini tendano a zero al crescere indefinito di n; e ciò del resto risulta subito dall'osservare che, in ordine al secondo teorema fondamentale di Cauchy sui limiti (§ 24 [pag. XXXV]) applicato alle somme (4), *per la convergenza di una serie reale o complessa* (1) *è necessario e sufficiente che le differenze $s_{n+p}-s_n$ che corrispondono alle somme $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}$ di un numero* qualunque p *di termini consecutivi dopo l' n^o abbia per limite zero al crescere indefinito di n;* intendendo naturalmente, pel caso delle serie complesse, che questo equivalga a dire che debba avere per limite zero il modulo delle dette differenze $s_{n+p}-s_n$.

Da questo, e anche dalla formola (3), risulta inoltre che *se una serie è convergente, il limite per $n=\infty$ del suo resto r_n sarà necessariamente uguale allo zero;* ma inversamente il dire, come spesso si fa, che l'essere zero per $n=\infty$ il limite del resto di una serie è anche condizione sufficiente per la convergenza della serie medesima, propriamente è cosa del tutto inconcludente, poichè quando si ammette di potere prendere a considerare il resto di una serie quale lo abbiamo definito sopra, si viene ad ammettere già di sapere che la quantità chiamata resto ha un significato, ciò che equivale a sapere che la serie (2) e quindi la (1) è convergente.

73. — Essendo data la serie (1), se *si suppongono i suoi termini reali,* e si considerano le sue somme successive (4) incominciando da una qualsiasi di esse s_m, cioè le somme

$$s_m\ ,\ s_{m+1}\ ,\ s_{m+2}\ ,\dots, \tag{6}$$

è certo che queste somme avranno un limite superiore L_m e un limite inferiore l_m; e uno o tutti e due questi limiti potranno anche essere infiniti.

Lasciando per ora da parte quest'ultimo caso che evidentemente corrisponde *sempre* a serie divergenti, osserviamo per gli altri casi che quando si farà crescere m i numeri L_m o andranno diminuendo o rimarranno invariati, e invece i numeri l_m o andranno crescendo o rimarranno invariati; e quindi al crescere indefinito di m i numeri stessi avranno ciascuno un limite determinato (§ 27 [pag. XXXVII]); e noi chiameremo L il limite delle L_m e l quello delle l_m; e poichè le L_m non sono mai inferiori alle l_m, evidentemente i limiti l e L saranno sempre entrambi finiti.

Indicando ora con ε un numero determinato ma piccolo a piacere, e osservando che le somme successive (6) non superano L_m e non sono mai inferiori a l_m, si vede subito che al crescere indefinito di m esse finiranno per non superare più $L+\varepsilon$ e per non scendere al disotto di $l-\varepsilon$; quindi evidentemente se L e l avranno un valore comune λ (che per la nostra ipotesi sarà finito) la serie sarà convergente e la sua somma sarà λ.

Invece se L e l saranno diversi fra loro, per la definizione dei limiti inferiore e superiore è certo che le somme successive (6) al crescere indefinito di m finiranno per essere sempre comprese fra $l-\varepsilon$ e $L+\varepsilon$, — cioè oscilleranno fra questi numeri —, alcune essendo vicine quanto si vuole a l e altre vicine quanto si vuole a L, e talvolta anche uguali a l o a L. Allora la serie sarà necessariamente divergente, e la differenza limite $L-l$ si dirà la *misura della divergenza* (o della indeterminazione) *della serie.*

Solo quando questa misura sia zero la serie sarà convergente, e viceversa; talchè, *per una serie reale, come condizione necessaria e sufficiente*

della sua convergenza si può prendere quella che la misura della sua divergenza sia zero.

Poichè le somme successive (6) non superano L_m e non scendono al disotto di l_m è evidente che la differenza fra la s_{m+p} e la s_m, cioè la somma $r_{m.p}=u_{m+1}+u_{m+2}+\dots+u_{m+p}$, qualunque sia p non supererà la differenza L_m-l_m; e poichè questa differenza col crescere di m tende a $L-l$, così le somme stesse $r_{m.p}$ al crescere indefinito di m finiranno per non superare mai in valore assoluto la differenza $L-l$ più di un numero ε piccolo a piacere; e, se d è un numero qualunque superiore a questa differenza ma vicina ad essa quanto si vuole, le stesse somme $r_{m,p}$ a partire da un certo valore di m saranno sempre numericamente inferiori a d.

74. — Considerando ora anche il caso in cui uno o tutti e due i numeri l_m e L_m sono infiniti, osserviamo che supposto ad es. che l_m sia finito e L_m sia infinito, nel qual caso sarà $+\infty$, è certo che col crescere indefinito di m L_m rimarrà sempre $+\infty$ e sarà quindi $L=+\infty$, mentre l_m avrà ancora un limite l che sarà esso pure $+\infty$ o sarà un numero finito.

Se poi l_m sarà infinito, nel qual caso non potrà essere che $-\infty$, tale si manterrà anche al crescere indefinito di m e si avrà $l=-\infty$, mentre al tempo stesso L_m potrà essere esso pure $+\infty$ e allora sarà $L=+\infty$, o se L_m sarà finito avrà un limite L che sarà un numero finito o sarà $-\infty$.

In tutti questi casi evidentemente la serie sarà divergente; ma mentre nel caso in cui l e L risulteranno ambedue infiniti e dello stesso segno si potrà dire che la serie ha per somma l'infinito positivo o negativo secondochè sarà $l=+\infty$ e $L=+\infty$, o $l=-\infty$ e $L=-\infty$, negli altri casi non si potrà affatto parlare di somma delle serie (neppure somma infinita), e solo estendendo il concetto della *misura della divergenza* si potrà dire allora che *la misura della divergenza* (o indeterminazione) *della serie è infinita,* e le somme successive (6) dei suoi termini oscilleranno fra numeri sempre più discosti fra loro, e che si allontaneranno l'uno dall'altro più di qualunque numero dato.

75. — Fra le serie reali sono particolarmente studiate quelle a termini positivi per le quali le somme (4) costituiscono naturalmente una successione monotona, e hanno quindi sempre (§ 27 [pag. XXXVII]) un limite finito (serie convergenti) o un limite infinito (serie divergenti senza indeterminazione); e per queste serie si hanno varii teoremi notevoli che costituiscono altrettanti criterii per giudicare della loro convergenza o divergenza.

Fra questi criterii i due che più spesso si applicano sono i seguenti per le dimostrazioni dei quali rimandiamo agli ordinarii trattati di Algebra dove le dimostrazioni stesse si fanno con tutta facilità mediante il confronto della serie data con una progressione:

1.° Il criterio di *D'Alembert* che si enuncia col dire che *una serie reale e a termini positivi Σu_n è convergente quando il limite del rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ per $n=\infty$ esiste ed è minore dell'unità, ed è divergente quando il limite dello stesso rapporto è maggiore dell'unità;* restando l'incertezza quando questo limite è l'unità o non esiste.

2.° Il teorema di *Cauchy* che si enuncia col dire che *una serie reale e a termini positivi Σu_n è convergente quando il limite del radicale $\sqrt[n]{u_n}$ per $n=\infty$ esiste ed è minore dell'unità, ed è divergente quando questo limite è superiore all'unità,* restando così anche in questo caso l'incertezza quando lo stesso limite è l'unità o non esiste.

76. — E comprendendo ora anche il caso in cui i limiti dei rapporti $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ o dei radicali $\sqrt[n]{u_n}$ non esistono, si può dire in modo più generale che la stessa serie Σu_n sarà convergente quando al crescere indefinito di n i rapporti successivi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\ ,\ \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\ ,\ \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}\ ,\ \dots\ , \tag{7}$$

o i radicali successivi

$$\sqrt[n]{u_n}\ ,\ \sqrt[n+1]{u_{n+1}}\ ,\ \sqrt[n+2]{u_{n+2}}\ ,\ \dots \tag{8}$$

finiscono per restare sempre inferiori *ad un certo numero determinato* minore dell'unità, ed è divergente quando gli stessi rapporti o gli stessi radicali finiscono per restare sempre superiori alla unità.

E nel caso in cui si considerino i radicali (8), se si prendono a considerare i loro limiti superiore e inferiore Λ_n e λ_n per ogni valore particolare di n al di là di un certo numero, osserviamo che questi limiti superiore e inferiore al crescere indefinito di n non andranno mai crescendo o mai decrescendo respettivamente e quindi avranno limiti determinati Λ e λ; e per questo con ragionamenti del tutto simili a quelli del § 73 si giungerà a dimostrare che se il limite superiore Λ dei limiti superiori dei radicali (8) sarà minore dell'unità la serie data sarà evidentemente convergente, mentre se lo stesso limite Λ sarà maggiore dell'unità, o se essendo uguale alla unità le Λ_n saranno sempre superiori ad uno (*) la serie sarà divergente, perchè in questo

(*) Poichè al crescere indefinito di n le Λ_n non vanno mai crescendo, se il loro limite Λ sarà l'unità, esse non potranno essere mai inferiori ad uno ma potranno essere sempre uguali ad uno da un certo valore di n in poi; talchè col supporre che le stesse Λ_n siano sempre superiori ad uno si viene ad escludere quest'ultimo caso delle Λ_n sempre uguali ad uno a partire da un certo valore di n.

caso al di là di qualunque numero comunque grande si troveranno termini u_n pei quali sarà $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$, cioè termini u_n superiori o uguali all'unità.

Questa osservazione vale soltanto nella sua prima parte quando invece che ai radicali (8) si voglia applicare ai rapporti successivi (7).

77. — Facciamo anche osservare che quando per una serie a termini positivi Σu_n i rapporti successivi (7) o i radicali successivi (8) da un certo valore m di n in poi non siano mai superiori a numeri g e h inferiori all'unità, si ha subito il modo di calcolare *un limite superiore dell'errore* r_m (resto) che si commette fermandosi al termine u_m nella somma della serie, perchè evidentemente avremo allora

$$u_{m+1}\leq u_m g\ ,\ u_{m+2}\leq u_m g^2\ ,\ u_{m+3}\leq u_m g^3\ ,\ \dots$$

o

$$u_{m+1}\leq h^{m+1}\ ,\ u_{m+2}\leq h^{m+2}\ ,\ u_{m+3}\leq h^{m+3}\ ,\ \dots$$

e quindi sarà $r_m\leq u_m\,\frac{g}{1-g}$ nel primo caso, e $r_m\leq\frac{h^{m+1}}{1-h}$ nel secondo.

78. — Un altro teorema sulle serie che è dovuto ad *Abel*, e che giova anche per le serie complesse, si basa sul teorema dello stesso *Abel* che dice che: *Se $v_1, v_2, v_3, \dots, v_p$ sono quantità reali e finite tali che le somme successive*

$$v_1\ ,\ v_1+v_2\ ,\ v_1+v_2+v_3\ ,\ \dots\ ,\ v_1+v_2+\dots+v_p \tag{9}$$

siano tutte comprese fra due quantità a e A o uguali a queste quantità, essendo $a<A$, e se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_p$ sono quantità positive che non vanno crescendo, si avrà

$$\varepsilon_1 a\leq\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\dots+\varepsilon_p v_p\leq\varepsilon_1 A\ ,$$

Se poniamo infatti

$$v_1=s_1\ ,\ v_1+v_2=s_2\ ,\ v_1+v_2+v_3=s_3\ ,\ \dots\ ,\ v_1+v_2+\dots+v_p=s_p\ ,$$

avremo $v_1=s_1$, $v_2=s_2-s_1$, $v_3=s_3-s_2$, ..., $v_p=s_p-s_{p-1}$, e quindi

$$\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\dots+\varepsilon_p v_p=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)s_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)s_2+\dots+(\varepsilon_{p-1}-\varepsilon_p)s_{p-1}+\varepsilon_p s_p\ , \tag{10}$$

talchè sarà evidentemente

$$\varepsilon_1 a\leq\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\dots+\varepsilon_p v_p\leq\varepsilon_1 A\ ,$$

come abbiamo enunciato sopra.

E in forza di questo teorema si avrà anche la formola

$$\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_p v_p = \varepsilon_1 \mathrm{C},$$

essendo C un numero compreso fra a e A (a e A inclusi).

Un teorema simile si potrebbe avere pel caso che le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, essendo ancora sempre positive, non andassero decrescendo restando però sempre al disotto di un certo numero.

79. — Ammesso poi che *le quantità $v_1, v_2, \ldots, v_p$ possano anche essere tutte o in parte complesse, e tali però che i moduli delle somme successive* (9) *non superino mai un certo numero* A, *se le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ saranno ancora quantità positive che non vanno crescendo si avrà*

$$\operatorname{mod}\,(\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_p v_p) < \varepsilon_1 \mathrm{A},$$

perchè la formola (10) continuerà ancora a sussistere, e questa darà subito luogo alla disuguaglianza che abbiamo scritta.

80. — Dai teoremi dimostrati risulta immediatamente il teorema di *Abel* sulle serie al quale accennavamo sopra, cioè che: *Se una serie reale o complessa Σu_n è convergente, e le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ sono quantità che almeno a partire da un certo valore n' di n sono positive e non vanno crescendo, anche la serie $\Sigma \varepsilon_n u_n$ sarà convergente.*

Si osservi infatti che se Σu_n è convergente, per quanto dicemmo al § 72, esisterà un numero $n > n'$ tale che le somme $r_{n,p}$ di un numero qualunque p di termini consecutivi a incominciare dall' $(n+1)^o$ abbiano tutte moduli minori di una quantità arbitrariamente piccola σ, e quindi pel teorema del paragrafo precedente le somme corrispondenti della serie $\Sigma \varepsilon_n u_n$ avranno moduli minori di $\varepsilon_{n+1}\sigma$, e perciò anche questa serie sarà convergente.

Similmente si dimostra che *questo teorema sussisterà anche quando la serie data Σu_n è divergente, se i moduli delle somme successive s_n saranno sempre inferiori a un numero finito* (come avviene in particolare nel caso delle serie reali quando la misura della loro divergenza è finita), *purchè allora le $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \ldots$, oltre ad essere positive e non andare crescendo almeno a partire da un certo valore di n, tendano a zero al crescere indefinito di n.*

81. — Per dare subito una applicazione di questo teorema si osservi che le serie $1 + \sum\limits_1^\infty \cos n\varphi$ e $\sum\limits_1^\infty \operatorname{sen} n\varphi$ sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario della serie $\sum\limits_0^\infty e^{in\varphi}$ per la quale la somma dei primi $n+1$ termini $1 + e^{i\varphi} + (e^{i\varphi})^2 + \ldots + (e^{i\varphi})^n$ colla formola delle progressioni risulta

uguale a $\dfrac{1 - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$, ovvero a

$$\frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1} = \frac{(e^{i(n+1)\varphi} - 1)\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{2i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}},$$

o anche per la formola di Eulero a

$$\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{2}\left\{\cot\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\right\} i\,;$$

talchè si hanno le formole notevoli

$$(11)\quad \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos r\varphi = \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\,,\quad \sum_1^n \operatorname{sen} r\varphi = \frac{1}{2}\cot\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\,,$$

le quali col cambiare per es. φ in $\varphi + \pi$ danno luogo alle altre

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \sum_1^n (-1)^r \cos r\varphi = (-1)^{n} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,,\\ &\sum_1^n (-1)^{r-1} \operatorname{sen} r\varphi = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,. \end{aligned}\right.$$

Risultando da queste formole che le somme successive delle serie $\Sigma \cos n\varphi$ e $\Sigma \operatorname{sen} n\varphi$ per φ diverso da zero e dai multipli interi di 2π, e così quelle delle altre $\Sigma(-1)^n \cos n\varphi$ e $\Sigma(-1)^{n-1} \operatorname{sen} n\varphi$ per φ diverso dai multipli dispari di π sono sempre inferiori a numeri finiti, se ne dedurrà subito che, fatta solo eccezione pei detti valori di φ respettivamente, le serie $\Sigma a_n \cos n\varphi$, $\Sigma b_n \operatorname{sen} n\varphi$, $\Sigma(-1)^n a_n \cos n\varphi$, $\Sigma(-1)^n b_n \operatorname{sen} n\varphi$ sono sempre convergenti quando le a_n e così le b_n sono quantità positive che almeno a partire da un certo valore di n non crescono mai e hanno per limite zero per $n = \infty$ (*).

(*) Mutando nelle formole trovate (11) φ in $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$, o più generalmente φ in $\varphi + \alpha$ essendo α una costante reale qualsiasi, si giunge al modo stesso a dimostrare la convergenza di infinite altre serie trigonometriche simili per qualunque valore di φ che non sia delle respettive forme $2k\pi \mp \frac{\pi}{2}$ o $2k\pi - \alpha$.

In particolare dunque risulta di qui intanto la convergenza della serie

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\ldots$$

considerata al § 22 [pag. XXXI] e questo per tutti i valori di x, non esclusi ora i valori multipli dispari di π pei quali essa è zero.

82. — Le somme delle serie non sono somme ordinarie come quelle dell'aritmetica che sono composte di un numero finito di termini, ma sono *limiti di somme.*

Cangiando secondo leggi determinate l'ordine dei termini di una serie vengono naturalmente a cambiare tutte o alcune delle somme successive delle quali si deve prendere il limite (quando esiste) per avere la somma della serie, e può quindi venire a cambiare il loro limite, e talvolta non esistere più affatto se anche prima esisteva; e s'intende bene da ciò come, a differenza delle somme dell'aritmetica, se anche colla serie primitivamente scelta si aveva la convergenza e si aveva una data somma per la serie, dopo l'indicato cambiamento nell'ordine di successione dei suoi termini, può la serie restare ancora convergente ma cambiare di somma, e può anche divenire divergente.

Di qui la distinzione delle serie in *serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini* o *incondizionatamente,* e in serie non convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini o *semplicemente convergenti* secondochè la detta circostanza può o no presentarsi; e si ha il notissimo teorema di *Dirichlet,* per la dimostrazione del quale rimandiamo agli ordinarii corsi di Algebra, che dice che *onde una serie reale o complessa sia convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è necessario e sufficiente che la serie formata coi valori assoluti o coi moduli degli stessi termini sia convergente.*

83. — In seguito a questo teorema le serie *reali* a termini *positivi* quando sono convergenti lo sono sempre anche indipendentemente dall'ordine dei termini; e quindi quelle serie reali che sono convergenti soltanto semplicemente non possono trovarsi — come effettivamente vi si trovano — altro che fra quelle per le quali, quando si procede oltre quanto si vuole nella serie, s'incontrano sempre termini con segni positivi e termini con segni negativi.

E per queste serie reali che sono convergenti soltanto semplicemente, come anche in modo più generale per quelle i cui termini tendono a zero, e nelle quali la serie formata coi termini positivi e quella formata coi termini negativi sono entrambe divergenti, è notevole il teorema pel quale si può affermare che, *cangiando convenientemente l'ordine dei termini, le serie stesse*

si possono sempre ridurre ad essere convergenti e avere per somma una quantità qualunque data, e ridurle anche ad essere divergenti tanto da avere per somma $+\infty$ *o* $-\infty$, *o essere del tutto indeterminate; e ciò può farsi sempre in infiniti modi.*

Questo teorema è dovuto a *Riemann,* e la dimostrazione di esso può trovarsi negli ordinarii trattati d'Algebra, come anche nei miei *Fondamenti per la teorica ecc.* alla pag. 99.

In particolare da questo teorema si ha l'altro pure notevole che *se* $\Sigma\alpha_n$ *è una serie divergente a termini positivi che tendono a zero, formando una nuova serie* Σu_n *i cui termini positivi siano quelli di* $\Sigma\alpha_n$ *e i cui termini negativi siano ancora quelli di questa stessa serie presi negativamente, si potrà in infiniti modi far sì che la serie così formata* Σu_n *sia divergente e abbia per somma* $+\infty$ *o* $-\infty$ *o sia del tutto indeterminata; o sia convergente e abbia per somma una quantità qualunque data;* e ciò per quanto nelle infinite serie così formate per ogni termine ci sia il termine corrispondente uguale e di segno contrario.

Serie ordinate per le potenze di una variabile.

84. — I termini delle serie possono essere quantità costanti reali o complesse (serie numeriche), o essere quantità variabili dipendenti da una o più variabili, reali esse pure o complesse; e noi vogliamo ora occuparci più specialmente di queste ultime serie, non considerandole soltanto per valori particolari delle variabili dalle quali i loro termini dipendono, perchè allora divengono esse pure serie numeriche e non altro, ma considerandole per l'insieme dei valori che alle variabili possono essere attribuiti.

Fra queste serie a termini variabili, le più semplici sono quelle i cui termini procedono per potenze intere e positive di una variabile *complessa* $z=x+iy$ o $z=\rho e^{i\theta}$, essendo x e y le coordinate cartesiane e ρ e θ le coordinate polari di un punto qualsiasi del piano che come è noto dicesi indice della variabile z.

Queste serie naturalmente hanno la forma seguente

$$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots, \tag{1}$$

dove i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sono quantità costanti reali o complesse, e possono quindi rappresentarsi semplicemente con $\Sigma a_n z^n$; ed esse hanno alcune proprietà notevoli che, stante la loro importanza in tutta la matematica, troviamo opportuno di esporre, sebbene molte di esse si trovino dimostrate anche in quasi tutti i trattati di algebra moderna.

85. — Osserviamo che fra queste serie ve ne sono alcune che non sono convergenti per nessun valore di x, o come si dice in nessun punto del piano nel quale l'indice x si muove, ad eccezione del valore o punto $x=0$ pel quale si riducono a a_0, come ad es. la serie

$$(2) \qquad 1+x+1.2.x^2+1.2.3\,x^3+\ldots+1.2\ldots n\,x^n+\ldots$$

i cui termini quando x non è zero, per quanto piccolo sia il suo modulo ρ, hanno moduli che crescono all'infinito con n perchè il rapporto dei moduli dei termini che contengono x^n e x^{n-1} è $n\rho$ e cresce sempre indefinitamente con n.

Invece altre serie, come ad es. quella che rappresenta l'esponenziale e^x cioè

$$(3) \qquad 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini in tutto il piano, cioè per qualunque valore di x, come si vede facendo il rapporto di un termine al precedente nelle serie dei moduli; e altre infine sono convergenti soltanto pei valori di x il cui modulo non passa un certo confine, come ad es. la serie della progressione

$$(4) \qquad 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

che è convergente indipendentemente dall'ordine dei termini pei valori di x il cui modulo è minore dell'unità o, come si dice, entro il cerchio di raggio uno col centro nel punto $x=0$, ed è divergente pei valori di x il cui modulo è uguale o superiore alla unità cioè sul detto cerchio e fuori di esso.

86. — Ora è notevole che per queste serie $\Sigma a_n x^n$ il campo di convergenza è sempre un cerchio col centro nel punto $x=0$, che dicesi *cerchio di convergenza*, mentre il suo raggio dicesi *raggio di convergenza* della serie; con questo però che il raggio del cerchio può anche ridursi a zero e il cerchio quindi ridursi ad un punto come per la serie (2), e può essere infinito come nel caso della serie esponenziale (3), o essere finito e diverso da zero come nel caso della progressione (4). E dentro il cerchio di convergenza la serie è sempre anche convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, mentre fuori del cerchio è sempre divergente e i moduli dei suoi termini vanno crescendo oltre ogni limite al crescere indefinito di n, e sul cerchio la serie nei singoli punti può secondo i casi essere convergente, o essere divergente.

Per dimostrare in modo perfettamente rigoroso queste proprietà che sono di estrema importanza, indichiamo in generale con a'_n il modulo di a_n, e con ρ_0 il modulo di x in un certo punto x_0 del piano, e formiamo la serie dei moduli $\Sigma a'_n \rho_0^n$ corrispondente a questo punto, la quale sarà evidentemente la stessa per tutti i punti x che si trovano sulla circonferenza di raggio ρ_0.

Evidentemente, se questa serie $\Sigma a'_n \rho_0^n$ sarà convergente, la serie $\Sigma a'^n \rho^n$ lo sarà pure per ogni valore di ρ inferiore a ρ_0 perchè i suoi termini saranno inferiori a quelli della stessa serie $\Sigma a'_n \rho_0^n$, mentre se questa serie $\Sigma a'_n \rho_0^n$ sarà divergente lo stesso avverrà della serie $\Sigma a'_n \rho^n$ per i valori di ρ superiori a ρ_0.

D'altra parte, considerando questa serie $\Sigma a'_n \rho^n$ e in essa facendo variare ρ da 0 a ∞, se si troverà che per valori comunque grandi di ρ risulterà sempre convergente, ciò vorrà dire che la serie $\Sigma a_n x^n$ sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini per qualunque valore di x, e quindi saremo nel caso in cui il cerchio di convergenza è tutto il piano o il raggio di convergenza è infinito; e se invece avverrà che si arrivi a trovare un valore ρ_0 di ρ pel quale la serie $\Sigma a'_n \rho_0^n$ sia divergente, la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ per quanto abbiamo detto sarà pure divergente per ogni valore di ρ superiore a ρ_0, e la convergenza di essa non potrà aversi che per valori di ρ compresi fra 0 e ρ_0.

Considerando allora l'intervallo da 0 a ρ_0, divideremo questo intervallo per metà nel punto $\rho_1=\frac{\rho_0}{2}$, e formando poi la serie $\Sigma a'_n \rho_1^n$ corrispondente a questo valore ρ_1 di ρ esamineremo se essa sia divergente o convergente.

Nel primo di questi casi la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ sarà divergente per ogni valore di ρ superiore a ρ_1 e allora passeremo a considerare l'intervallo da 0 a ρ_1; nel secondo caso invece la serie stessa sarà convergente per ogni valore di ρ inferiore a ρ_1 come per $\rho=\rho_1$, e allora prenderemo a considerare l'intervallo da ρ_1 a ρ_0 che sarà, come l'altro da 0 a ρ_1, metà del precedente e compreso in questo.

Nell'un caso e nell'altro noi opereremo sul nuovo intervallo come si è operato sul precedente, dividendolo cioè per metà nel punto ρ_2 e considerando la serie $\Sigma a'_n \rho_2^n$ relativa a questo valore ρ_2 di ρ; e passeremo allora a un nuovo intervallo metà dell'ultimo intervallo considerato e compreso in questo che avrà ancora la proprietà che la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ pel valore di ρ corrispondente all'estremo superiore e pei valori maggiori sarà divergente, mentre pel valore di ρ corrispondente all'estremo inferiore e pei valori minori (se questo estremo non sarà più nel punto $x=0$) la stessa serie $\Sigma a'_n \rho^n$ sarà convergente.

Così continuando, evidentemente gli estremi superiori e inferiori degli intervalli che successivamente considereremo formeranno le solite due classi contigue di numeri che definiranno un numero determinato R (che potrà anche essere lo zero perchè i successivi intervalli potranno anche, in certi casi, incominciare sempre da 0); e ora sarà facile vedere che questo numero R sarà appunto il raggio del cerchio di convergenza del quale vogliamo dimostrare la esistenza.

Evidentemente infatti, siccome R sarà compreso nei successivi intervalli che si formeranno o sarà a uno degli estremi di questi, ogni numero $\overline{\rho}$ superiore ad R sarà pure superiore agli estremi degli stessi intervalli dopo che questi intervalli saranno divenuti inferiori a $\overline{\rho}-R$, e quindi per questo valore $\overline{\rho}$ di ρ la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ sarà divergente; e per una ragione simile, se R non sarà zero, per ogni valore $\overline{\rho}$ di ρ inferiore a R la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ sarà convergente; e questo mostra appunto che questo numero R determina un cerchio col centro all'origine *nell' interno* del quale la serie $\Sigma a_n x^n$ sarà sempre convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, mentre *all' esterno* non lo sarà.

Inoltre è facile vedere che pei punti esterni a questo cerchio la serie $\Sigma a_n x^n$ non sarà convergente neppure soltanto semplicemente, e anzi almeno per alcuni valori di n al di là di qualunque numero, e quindi per infiniti valori di n, i suoi termini avranno moduli maggiori di qualunque numero dato.

Se avvenisse infatti che per un punto x_0 *fuori* del detto cerchio, pel quale conseguentemente il modulo ρ_0 di x_0 sarebbe maggiore di R, i moduli $a'_n \rho_0^n$ dei termini della serie corrispondente $\Sigma a_n x_0^n$ non superassero *mai* un certo numero finito Λ (come in particolare dovrebbe avvenire se la serie stessa $\Sigma a_n x_0^n$ fosse convergente anche soltanto semplicemente) allora la serie dei moduli $\Sigma a'_n \rho_1^n$ corrispondente a un valore qualsiasi ρ_1 di ρ compreso fra R e ρ_0 (ρ_0 escl.) risulterebbe convergente perchè, potendo scriversi sotto la forma $\Sigma a'_n \rho_0^n \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^n$, i suoi termini da un certo valore di n in poi sarebbero sempre inferiori a quelli della progressione $\Sigma \Lambda \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^n$ che è convergente perchè $\rho_1 < \rho_0$, e questo è contro il supposto che R sia il raggio di convergenza della nostra serie $\Sigma a_n x^n$; quindi la proprietà enunciata sopra relativa ai punti esterni al cerchio di convergenza resta così dimostrata completamente.

Quanto poi ai punti sul cerchio di convergenza, evidentemente nulla ci permettono di assicurare le considerazioni che abbiamo fatto, e si comprende anzi che possono presentarsi, come effettivamente si presentano, tutti i casi; e così per le serie ordinate per le potenze di una variabile restano pienamente dimostrate tutte le particolarità che indicammo al principio di questo paragrafo.

87. — Il raggio del cerchio di convergenza di una serie ordinata per le potenze di una variabile potrà sempre trovarsi col processo stesso che abbiamo tenuto sopra per dimostrarne la esistenza.

Nel caso però che il rapporto $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ dei moduli dei coefficienti a_{n+1} e a_n della serie abbia un limite determinato, il raggio di convergenza della serie sarà precisamente l'inversa di questo limite, cioè sarà il limite del rapporto inverso $\frac{a'_n}{a'_{n+1}}$.

Considerando infatti la serie dei moduli $\Sigma a'_n \rho^n$, si vede che il rapporto di un termine di essa $a'_{n+1}\rho^{n+1}$ al precedente $a'_n \rho^n$ è $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}\rho$, e *se* $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ *ha un limite determinato* (finito o infinito) l, il limite del detto rapporto sarà $l\rho$, e questo pel teorema di D'Alembert (§ 74) ci mostra appunto che se $\rho < \frac{1}{l}$ si ha convergenza nelle serie $\Sigma a'_n \rho^n$ e se $\rho > \frac{1}{l}$ si ha divergenza, e quindi $\frac{1}{l}$ *sarà appunto il raggio di convergenza della serie.*

88. — Quando il rapporto $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ non abbia un limite determinato non si ha di qui il modo di determinare il raggio di convergenza della nostra serie $\Sigma a_n x^n$.

In ogni caso però il raggio di convergenza potrà sempre trovarsi, come osservarono Cauchy e Hadamard, considerando invece dei rapporti successivi $\frac{a'_{n+1}}{a'_n}$ i radicali successivi

$$\sqrt[n]{a'_n}\,,\ \sqrt[n+1]{a'_{n+1}}\,,\ \sqrt[n+2]{a'_{n+2}}\,,\ldots$$

dei moduli dei coefficienti al di là di un certo valore di n.

Per questi radicali infatti esisterà sempre *il limite dei limiti superiori* Λ_n che si hanno per essi per ogni valore speciale di n, e *indicandolo con* Λ e ricordando quanto si disse sopra al § 76 si vede subito che la serie $\Sigma a'_n \rho^n$ sarà convergente pei valori di ρ pei quali $\Lambda\rho < 1$, e sarà divergente pei valori di ρ pei quali $\Lambda\rho > 1$, e quindi *il raggio di convergenza sarà sempre* $\frac{1}{\Lambda}$.

89. — Aggiungiamo infine che quando x è sull'asse delle quantità reali, cioè quando le si attribuiscono soltanto valori x reali in un certo intervallo finito o infinito, e i coefficienti a_n sono reali, le serie $\Sigma a_n x^n$ diventano serie $\Sigma a_n x^n$ a termini reali ordinate per le potenze della variabile reale x,

e queste serie dovremo spessissimo considerarle nei nostri studii di analisi infinitesimale, ecc.

E notiamo anche che per queste serie reali $\Sigma a_n x^n$ si può avere con tutta facilità un limite superiore dell'errore r_m che si commette arrestandosi nella somma della serie a un certo termine $a_m x^m$.

Si consideri infatti dapprima il caso in cui essendo finito e uguale ad R il raggio di convergenza della serie, i suoi termini non crescono indefinitamente per $x = \mathrm{R}$ (cioè sul cerchio).

Allora indicando con g_m un numero positivo di cui gli stessi termini $a_n \mathrm{R}^n$ non sono mai maggiori in valore assoluto quando $n > m$, — pel qual numero g_m potremo evidentemente prendere il *massimo* valore assoluto dei termini stessi per $n > m$ se essi tendono a zero al crescere indefinito di n —, evidentemente pel valore assoluto $|r_m|$ dell'errore r_m avremo $|r_m| < g_m \sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{\bar{x}}{\mathrm{R}}\right)^n$ ovvero $|r_m| < g_m \frac{\bar{x}^{m+1}}{\mathrm{R}^m(\mathrm{R}-\bar{x})}$ essendo $\bar{x}$ il valore assoluto di x quando x è negativo.

Se poi sul cerchio di convergenza i termini $a_n \mathrm{R}^n$ prendono anche valori numericamente grandi quanto si vuole, allora, preso un numero R′ inferiore ad R ma vicino quanto si vuole ad R e del quale il valore $\bar{x}$ che si considererà sia inferiore in valore assoluto, si osserverà che venendo ad essere convergente la serie $\Sigma a_n \mathrm{R}'^n$ esisterà un *massimo* g'_m dei valori assoluti dei prodotti $a_n \mathrm{R}'^n$ per $n > m$, e allora con questo massimo g'_m pel valore assoluto $|r_m|$ dell'errore r_m avremo $|r_m| < g'_m \frac{\bar{x}^{m+1}}{\mathrm{R}'^m(\mathrm{R}'-\bar{x})}$.

Se poi la serie data $\Sigma a_n x^n$ sarà convergente in tutto il piano, allora si avranno ancora queste formole prendendo per R o per R′ un numero finito comunque grande superiore a $\bar{x}$.

90. — In particolare *se la serie $\Sigma a_n x^n$ ha per cerchio di convergenza quello di raggio uno e se i suoi coefficienti a_n da un certo valore n' di n in poi non vanno crescendo in valore assoluto,* allora per $m \geq n'$ avremo $|r_m| < \frac{a'_{m+1} \bar{x}^{m+1}}{1-\bar{x}}$, cioè l'*errore r_m sarà numericamente inferiore al valore assoluto del termine $a_{m+1} x^{m+1}$ che segue quello al quale ci fermiamo nella serie diviso pel numero $1-\bar{x}$ che misura la distanza del punto x che si considera al cerchio di convergenza.*

Serie convergenti in egual grado.

91. — Premessi questi studii sulle serie ordinate per le potenze di una variabile $\Sigma a_n x^n$, passiamo ad esporre alcune considerazioni e alcuni teoremi generali sulle serie reali Σu_n i cui termini in un dato intervallo finito o infinito (α, β) sono funzioni reali e finite di una variabile reale x o più generalmente dipendono da una variabile reale x che può prendere infiniti valori nello stesso intervallo (*).

Sia perciò

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

una tal serie Σu_n i cui termini nell'intervallo dato (α, β) (gli estremi α e β inclusi) sono funzioni reali e finite della variabile x, o dipendono da una variabile x che può prendere infiniti valori nello stesso intervallo, e questa serie sia convergente per tutti i valori x che possono considerarsi.

A causa di questa convergenza, *per ogni valore speciale a di x* che può considerarsi fra α e β (α e β inclusi), e per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ che si scelga e che *si terrà poi fisso,* esisterà un numero intero e finito m dotato della proprietà che pei valori di n non inferiori ad m il resto $\mathrm{R}_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ della serie data in valore assoluto sia minore di σ; però evidentemente per un altro valore speciale a_1 di x che si prenda a considerare potrà darsi che il numero trovato m non possa servire quando si conserva lo stesso numero σ, e occorra prendere un altro numero più grande m_1 che allora servirà anche pel punto a.

Ma prendendo poi un terzo punto a_2 potrà darsi che il numero trovato m_1 non serva anche per questo punto e occorra prenderne uno anche maggiore m_2; e così continuando col considerare sempre nuovi punti $a_3, a_4, a_5 \dots$ s'intende come potrà avvenire che i numeri $m, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, \dots$ vadano crescendo indefinitamente, senza però essere mai infiniti per nessun valore speciale di x che si considererà; o in altri termini, il detto numero m, *senza essere mai infinito,* potrà avere per limite superiore l'infinito; e allora per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ non esisterà un numero finito m dotato della proprietà che per $n \geq m$ e per *tutti i valori*

(*) Per semplicità consideriamo il caso di una sola variabile x, ma con leggiere modificazioni di parole quanto andiamo ad esporre vale anche pel caso di più variabili dalle quali dipendano i termini della serie e si estende pure al caso delle variabili complesse.

di x che possono considerarsi fra α e β (α e β inclusi) si abbia sempre in valore assoluto $R_n < \sigma$.

In vista di questa circostanza, quando si abbia una serie Σu_n i cui termini sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β) o anche più generalmente sono dati in un gruppo infinito di punti x dello stesso intervallo, si dirà che questa serie *è convergente uniformemente o in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β) o almeno *per tutti i punti o valori* x *che si possono considerare nello stesso intervallo* quando per *ogni* numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste un numero finito m dotato della proprietà che per $n \geq m$ e per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra α e β si ha in valore assoluto $R_n < \sigma$; e si dirà che la serie data Σu_n non è convergente in egual grado nello stesso intervallo o pei valori di x fra α e β che possono considerarsi quando non esiste per ogni numero positivo σ un numero finito m che soddisfa alle dette condizioni.

92. — Si dirà poi che la stessa serie Σu_n è convergente in egual grado *soltanto in generale* nell'intervallo dato (α, β) o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando, senza essere effettivamente convergente in egual grado nel senso indicato sopra, è tale però che, togliendo dallo stesso intervallo un numero finito p di intervalli che possono prendersi piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti o pei punti x che possono considerarsi in questi intervalli essa è convergente in egual grado.

93. — E si dirà infine che una serie Σu_n *è convergente in egual grado semplicemente* nell'intervallo (α, β), o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per *ogni* numero m' esiste un numero intero m non inferiore a m' e tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra α e β (α e β inclusi) il resto R_m corrispondente *a quel numero speciale* m sia numericamente inferiore a σ; e così si può asserire che una serie convergente in egual grado fra α e β lo sarà sempre anche semplicemente, ma almeno per ora, non si può affermare in generale la cosa inversa.

Però, quando ci si limiti a considerare le serie Σu_n che sono a termini positivi per tutti i valori di x che si considerano fra α e β e per le quali si fosse trovato che sono convergenti in ugual grado semplicemente per gli stessi valori di x, o quelle che avendo dei termini negativi si fosse pure trovato che restano convergenti in ugual grado semplicemente anche quando si riducono i loro termini ai rispettivi loro valori assoluti, allora si può anche dimostrare che le condizioni cui le serie stesse soddisfano portano di necessità la loro convergenza in ugual grado (in modo assoluto) pei valori che si considerano di x fra α e β.

Indicando infatti con $\Sigma u'_n$ la serie formata coi valori assoluti dei termini di Σu_n, e con m uno dei numeri non inferiori a m' che nelle ipotesi fatte godono della proprietà che il resto corrispondente R'_m di questa serie $\Sigma u'_n$ per tutti i valori di x che si considerano fra α e β sia inferiore a σ, s'intende subito che i resti successivi $R'_{m+1}, R'_{m+2}, \ldots$, della stessa serie (non essendo mai superiori a R'_m) saranno tutti inferiori a σ, e perciò evidentemente lo stesso accadrà pei valori assoluti dei resti corrispondenti R_m, $R_{m+1}, R_{m+2} \ldots$ della serie data Σu_n, e questa serie sarà convergente in ugual grado.

94. — Per mostrare fin d'ora la esistenza di serie Σu_n che, sebbene convergenti in tutto un intervallo, non sono in esso convergenti in ugual grado neppure semplicemente, faremo subito vedere che *questa circostanza si presenta sempre in ogni serie* Σu_n *i cui termini sono funzioni finite e continue di* x *in un punto* a *dello stesso intervallo* (*), *mentre in questo punto la somma* $f(x)$ *della serie è una funzione discontinua di* x.

Supponiamo infatti che almeno da una parte del punto a, per es. a destra, $f(x)$ sia discontinua, e indichiamo con m' un valore di n tale che per $n \geq m'$ e per $x = a$ si abbia in valore assoluto $R_n < \sigma$, e poniamo

$$f(a) = S_m + R_m, \quad f(a+\delta) = S'_m + R'_m,$$

dove m è finito e $\geq m'$.

Si avrà $f(a+\delta) - f(a) = S'_m - S_m + R'_m - R_m$, *e siccome* m *è un numero finito,* e le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sono continue per $x = a$, per quanto grande sia m potremo trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che pei valori di δ positivi e inferiori ad ε la somma S'_m che è composta di un numero finito di termini differisca da S_m in valore assoluto meno di una quantità positiva qualunque arbitrariamente piccola σ_1.

D'altra parte, se il salto di $f(x)$ nel punto a è maggiore di d, $f(a+\delta)$ e $f(a)$ almeno per alcuni dei valori di δ che si considerano devono differire fra loro più di d, e quindi evidentemente per gli stessi valori di δ i resti R_m e R'_m per quanto grande sia m verranno a differire fra loro di una quantità d' che sarà maggiore di $d - \sigma$, e R'_m in valore assoluto sarà maggiore di $d - 2\sigma$.

Ne segue che, se σ sarà sufficientemente piccolo, qualunque valore non inferiore a m' si prenda per m, esisteranno sempre alcuni dei detti valori

(*) Notiamo una volta per tutte, a scanso di equivoci, che quando si dice che una serie infinita di quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ hanno date proprietà, s'intende dire che queste proprietà sono verificate o possono verificarsi fino a valori di n grandi quanto si vuole.

di x che possono considerarsi fra α e β (α e β inclusi) si abbia sempre in valore assoluto $R_n < \sigma$.

In vista di questa circostanza, quando si abbia una serie Σu_n i cui termini sono funzioni di x in un dato intervallo (α, β) o anche più generalmente sono dati in un gruppo infinito di punti x dello stesso intervallo, si dirà che questa serie *è convergente uniformemente o in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β) o almeno *per tutti i punti o valori x che si possono considerare nello stesso intervallo* quando per *ogni* numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esiste un numero finito m dotato della proprietà che per $n \geq m$ e per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra α e β si ha in valore assoluto $R_n < \sigma$; e si dirà che la serie data Σu_n non è convergente in egual grado nello stesso intervallo o pei valori di x fra α e β che possono considerarsi quando non esiste per ogni numero positivo σ un numero finito m che soddisfa alle dette condizioni.

92. — Si dirà poi che la stessa serie Σu_n è convergente in egual grado *soltanto in generale* nell'intervallo dato (α, β) o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando, senza essere effettivamente convergente in egual grado nel senso indicato sopra, è tale però che, togliendo dallo stesso intervallo un numero finito p di intervalli che possono prendersi piccoli quanto si vuole, negli intervalli restanti o pei punti x che possono considerarsi in questi intervalli essa è convergente in egual grado.

93. — E si dirà infine che una serie Σu_n *è convergente in egual grado semplicemente* nell'intervallo (α, β), o pei valori di x che possono considerarsi in questo intervallo, quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per *ogni* numero m' esiste un numero intero m non inferiore a m' e tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra α e β (α e β incl.) il resto R_m corrispondente *a quel numero speciale m* sia numericamente inferiore a σ; e così si può asserire che una serie convergente in egual grado fra α e β lo sarà sempre anche semplicemente, mentre non sussiste sempre la cosa inversa perchè vi sono serie convergenti in ugual grado semplicemente che non sono convergenti in ugual grado (in modo assoluto) (*).

Però, quando per una serie Σu_n si trovi che essa è convergente in ugual grado semplicemente per tutti i valori di x che si possono considerare fra α e β

(*) Tale è ad es. nell'intervallo $(0, 1)$ la serie che per x diverso da uno è

$$x - x\left(1 - \frac{1}{\pi(1)}\right) + x^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{\pi(2)}\right) + x^3 - x^3\left(1 - \frac{1}{\pi(3)}\right) + \ldots + x^n - x^n\left(1 - \frac{1}{\pi(n)}\right) + \ldots$$

e per $x = 1$ è una serie convergente qualsiasi, per es. la serie $\sum \frac{1}{\pi(n)}$ (V. VOLTERRA, *Giorn. di Matemat.* di G. Battaglini, vol. XIX, pag. 79).

(α e β incl.) e tale si mantiene anche riducendola ai valori assoluti, è facile vedere che sarà anche convergente in ugual grado (in modo assoluto) per gli stessi valori di x.

Indicando infatti con $\Sigma u'_n$ la serie formata coi valori assoluti dei termini di Σu_n, e con m uno dei numeri non inferiori a m' che nella ipotesi fatta godono della proprietà che il resto corrispondente R'_m di questa serie $\Sigma u'_n$ per tutti i valori di x che si considerano fra α e β sia inferiore a σ, s'intende subito che i resti successivi $R'_{m+1}, R'_{m+2}, \ldots$, della stessa serie (non essendo mai superiori a R'_m) saranno tutti inferiori a σ, e perciò evidentemente lo stesso accadrà pei valori assoluti dei resti corrispondenti $R_m, R_{m+1}, R_{m+2} \ldots$ della serie data Σu_n, e questa serie sarà convergente in ugual grado.

94. — Per mostrare fin d'ora la esistenza di serie Σu_n che, sebbene convergenti in tutto un intervallo, non sono in esso convergenti in ugual grado neppure semplicemente, faremo subito vedere che *questa circostanza si presenta sempre in ogni serie Σu_n i cui termini sono funzioni finite e continue di x in un punto a dello stesso intervallo* (*), *mentre in questo punto la somma $f(x)$ della serie è una funzione discontinua di x.*

Supponiamo infatti che almeno da una parte del punto a, per es. a destra, $f(x)$ sia discontinua, e indichiamo con m' un valore di n tale che per $n \geq m'$ e per $x = a$ si abbia in valore assoluto $R_n < \sigma$, e poniamo

$$f(a) = S_m + R_m\,, \quad f(a+\delta) = S'_m + R'_m\,,$$

dove m è finito e $\geq m'$.

Si avrà $f(a+\delta) - f(a) = S'_m - S_m + R'_m - R_m$, *e siccome m è un numero finito,* e le funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sono continue per $x = a$, per quanto grande sia m potremo trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che pei valori di δ positivi e inferiori ad ε la somma S'_m che è composta di un numero finito di termini differisca da S_m in valore assoluto meno di una quantità positiva qualunque arbitrariamente piccola σ_1.

D'altra parte, se il salto di $f(x)$ nel punto a è maggiore di d, $f(a+\delta)$ e $f(a)$ almeno per alcuni dei valori di δ che si considerano devono differire fra loro più di d, e quindi evidentemente per gli stessi valori di δ i resti R_m e R'_m per quanto grande sia m verranno a differire fra loro di una quantità d' che sarà maggiore di $d - \sigma$, e R'_m in valore assoluto sarà maggiore di $d - 2\sigma$.

Ne segue che, se σ sarà sufficientemente piccolo, qualunque valore non inferiore a m' si prenda per m, esisteranno sempre alcuni dei detti valori

(*) Notiamo una volta per tutte, a scanso di equivoci, che quando si dice che una serie infinita di quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ hanno date proprietà, s'intende dire che queste proprietà si verificano fino a valori di n grandi quanto si vuole.

di δ pei quali R'_m sarà numericamente maggiore di σ; e perciò evidentemente la serie data Σu_n nell'intervallo (α, β) non sarà convergente in egual grado neppure semplicemente, e potrà tutt'al più essere convergente in egual grado soltanto in generale nello stesso intervallo quando i suoi termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ siano funzioni continue e la sua somma $f(x)$ sia generalmente continua nell'intervallo.

In conseguenza della proprietà dimostrata, noi possiamo dunque anche affermare in particolare che *se una serie Σu_n di funzioni u_n di x finite e continue in un certo intervallo (α, β) è convergente in ugual grado almeno semplicemente nello stesso intervallo, anche la sua somma sarà sempre una funzione finita e continua di x nell'intervallo medesimo.*

95. — Per potere giudicare se una serie Σu_n è convergente in ugual grado in un certo intervallo si hanno due teoremi che, sebbene non diano che condizioni sufficienti per tale convergenza, sono però molto importanti perchè servono in molti casi.

Il primo di questi teoremi si enuncia col dire che: *Se i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ della serie Σu_n sono funzioni di x sempre finite fra α e β (α e β inclusi), e se la serie $\Sigma u'_n$ formata coi limiti superiori dei valori assoluti degli stessi termini o con numeri maggiori di questi limiti è convergente, la serie data Σu_n per tutti i valori di x fra α e β (α e β incl.) sarà convergente e sarà quindi una funzione di x; e inoltre sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi termini e convergente in ugual grado.*

Indichiamo infatti con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ i valori assoluti di $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ per un valore speciale qualunque di x fra α e β (α e β inclusi).

La serie $\Sigma \rho_n$, avendo i suoi termini eguali o inferiori a quelli della serie $\Sigma u'_n$, sarà convergente, quindi pel valore speciale di x che si considera, e così anche per tutti gli altri, la serie Σu_n sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini, e essendo convergente rappresenterà una funzione di x in tutto l'intervallo.

Inoltre, poichè si ha $\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots \leq u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots$, indicando con m un numero tale che per $n \geq m$ si abbia $u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots < \sigma$, si vede subito che questo numero m gode anche della proprietà che per $n \geq m$ il resto R_n della serie Σu_n per *tutti* i valori di x fra α e β (α e β inclusi) in valore assoluto è sempre minore di σ; quindi la serie Σu_n nell'intervallo (α, β) sarà anche convergente in egual grado, e il teorema è completamente dimostrato.

96. — Un secondo teorema che può giovare per riconoscere la convergenza in ugual grado di una serie si basa su quelli di Abel dati sopra ai §§ 78

e 80 [pag. LXXVI e seg.] e può enunciarsi col dire che *se i termini u_n di una serie Σu_n sono funzioni di x sempre finite in un intervallo (α, β) che, almeno a partire da un certo valore di n, risultano da quelli di un'altra serie Σv_n moltiplicandoli per quantità positive ε_n che possono dipendere da x ma che, se ne dipendono, sono sempre inferiori a un numero finito e considerate per ogni valore di x separatamente non vanno crescendo al crescere indefinito di n, allora se la serie Σv_n sarà una serie numerica convergente, o se dipendendo da x sarà convergente in egual grado nel suddetto intervallo (α, β), anche la serie Σu_n sarà convergente in ugual grado nello stesso intervallo.*

Insieme poi a questo si ha anche l'altro teorema che dice che *se la serie Σv_n dalla quale risulta quella data Σu_n sarà divergente per tutti o per alcuni valori di x nell'intervallo (α, β) ma avrà le sue somme successive sempre comprese fra numeri finiti, cioè avrà una misura di divergenza finita, allora la serie data Σu_n sarà convergente in ugual grado nello stesso intervallo quando le ε_n, oltre a soddisfare alla condizione precedente, col crescere indefinito di n tenderanno a zero; supposto che quando dipendono da x tendano a zero in modo uniforme,* cioè siano tali che, preso un numero arbitrariamente piccolo σ, si possa trovare un numero finito m tale che pei valori di n superiori ad m si abbia $\varepsilon_n < \sigma$ per *qualunque* valore di x nello stesso intervallo (α, β).

Questi teoremi evidentemente sono immediata conseguenza di quello di Abel ricordato sopra.

97. — È da notare che se i termini u_n della serie Σu_n invece di essere funzioni di x fra α e β sono dati soltanto per alcuni valori di x corrispondenti a un gruppo di punti di prima o di seconda specie fra α e β, i teoremi dimostrati nei due paragrafi precedenti continuano ancora a sussistere, colla sola differenza che la somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n non sarà più una vera e propria funzione di x fra α e β ma sarà una quantità che avrà un significato soltanto pei valori di x pei quali sono dati i termini stessi u_n.

98. — I teoremi precedenti hanno una particolare importanza, e noi ce ne varremo subito per lo studio di alcune classi di serie.

Consideriamo dapprima una serie $\Sigma a_n x^n$ ordinata per le potenze di una variabile reale x e a coefficienti reali a_n, per la quale supporremo che R sia il suo raggio di convergenza; e prendiamo una porzione (α, β) dell'asse delle x tutta contenuta nel cerchio di convergenza, essendo $\alpha < \beta$.

Allora, indicando con a'_n i valori assoluti dei coefficienti a_n e supponendo dapprima che nessuno dei due estremi α e β dell'intervallo (α, β) sia sul cerchio di convergenza e che di essi per es. β sia il più vicino a questo cerchio e sia positivo, la serie dei massimi valori assoluti dei termini della serie data

$\Sigma a_n x^n$ pei valori di x nell'intervallo (α, β) sarà la serie $\Sigma a'_n \beta^n$ e sarà convergente, quindi pei teoremi dati sopra ai §§ 95 e 94 si può intanto asserire che *le serie reali $\Sigma a_n x^n$ ordinate per le potenze di una variabile x sono convergenti in ugual grado in ogni porzione (α, β) dell'asse delle x che non termini al cerchio di convergenza; e in questo intervallo (α, β) la loro somma è sempre una funzione finita e continua della x.*

Se poi la serie data $\Sigma a_n x^n$ sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini anche sul cerchio di convergenza, allora evidentemente la porzione (α, β) che si considera dell'asse delle x potrà arrivare anche al cerchio, e *si avrà convergenza in ugual grado e continuità nella somma della serie in tutto l'intervallo da $-R$ a R (gli estremi inclusi).*

99. — Se poi la serie stessa $\Sigma a_n x^n$ non sarà convergente indipendentemente dall'ordine dei termini sul cerchio di convergenza, ma sarà convergente semplicemente in uno o in tutti e due gli estremi $x=-R$ e $x=R$ dell'asse delle x su questo cerchio, allora, osservando che per *ogni* valore di x vicino ad R o $-R$ o uguale all'uno o all'altro di questi estremi i termini della serie corrispondente $\Sigma a_n x^n$ vengono da quelli della serie $\Sigma a_n R^n$ o $\Sigma a_n (-R)^n$ moltiplicandoli respettivamente per le quantità positive e sempre decrescenti $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ o $\left(\frac{x}{-R}\right)^n$, pel primo teorema del § 96 si vede subito che si avrà convergenza in ugual grado anche negli intorni $(R-\varepsilon, R)$ o $(-R, -R+\varepsilon)$ degli estremi stessi se in questi estremi la serie $\Sigma a_n x^n$ sarà convergente; e si può quindi affermare evidentemente che *il teorema precedente sulla convergenza in ugual grado e sulla continuità della serie $\Sigma a_n x^n$ varrà per qualsiasi porzione (α, β) dell'asse delle x contenuta nel cerchio di convergenza anche che termini al cerchio di convergenza, quando nell'estremo corrispondente su questo cerchio la serie data sia convergente anche soltanto semplicemente.*

100. — Si consideri ora la serie $\Sigma a_n z^n$ anche per valori complessi di z e ammettendo che i coefficienti a_n possano anche essere complessi; e si prendano ad esaminare le due serie reali formate dalle parti reali e dai coefficienti delle parti immaginarie della serie stessa per tutti i valori $z=\rho e^{i\varphi}$ di z corrispondenti ai punti della retta che passa per l'origine $z=0$ e fa l'angolo φ coll'asse delle x.

Queste serie saranno serie reali ordinate per le potenze di ρ e rientreranno quindi fra quelle considerate precedentemente, per modo che ad esse potranno applicarsi i risultati precedenti; quindi in particolare noi possiamo affermare che *se la serie $\Sigma a_n z^n$ sarà convergente anche soltanto semplicemente in uno o in tutti e due i punti $z=Re^{i\varphi}$, $z=Re^{i(\varphi+\pi)}$ della stessa retta che sono sul cerchio di convergenza, le due serie reali suddette, come funzioni di ρ, saranno convergenti in ugual grado in ogni porzione di quella retta anche se essa terminerà sul cerchio a uno dei detti punti $Re^{i\varphi}$ o $Re^{i(\varphi+\pi)}$ (pel quale si abbia convergenza nella serie data $\Sigma a_n z^n$); e nella stessa porzione (i suoi estremi inclusi) la serie stessa sarà una funzione finita e continua di ρ, per modo che il valore della serie complessa $\Sigma a_n z^n$ nel punto (R, φ) o $(R, \varphi+\pi)$ del cerchio, quando in questo punto vi sia convergenza, sarà il limite dei valori della somma della serie stessa nei punti interni al cerchio di convergenza e situati sulla detta retta quando questi punti si avvicinano indefinitamente al cerchio.*

101. — Aggiungiamo ora che le serie $\Sigma a_n z^n$ considerate sul cerchio di convergenza, cioè quando $z=Re^{i\varphi}$ e φ varia da 0 a 2π o da $-\pi$ a π, si riducono tutte a serie reali trigonometriche della forma $\Sigma \alpha_n \cos n\varphi$ e $\Sigma \beta_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi$ nelle quali i coefficienti α_n e β_n saranno numeri reali positivi o negativi.

Indicando con α'_n e β'_n i valori assoluti di questi coefficienti, le due serie si ridurranno alle altre $\Sigma \pm \alpha'_n \cos n\varphi$ e $\Sigma \pm \beta'_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi$; quindi se avverrà che, fatta soltanto eccezione per alcuni valori $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, di φ, le serie $\Sigma \pm \cos n\varphi$, e $\Sigma \pm \mathrm{sen}\, n\varphi$ dipendentemente dai segni dei loro termini, in ogni intervallo che non comprende questi punti $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ abbiano sempre una misura di divergenza inferiore a un numero finito (che potrà variare da intervallo a intervallo) allora *le serie stesse $\Sigma \alpha_n \cos n\varphi$ e $\Sigma \beta_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi$ saranno sempre convergenti in ugual grado in quegli intervalli che non comprendono i punti esclusi $\varphi, \varphi_1, \ldots$, tutte le volte che i valori assoluti α'_n e β'_n delle α_n e β_n al crescere indefinitamente di n tendano a zero senza andare mai crescendo; e negli stessi intervalli le somme delle dette serie saranno funzioni finite e continue di φ.*

S'intende che se le condizioni poste si troveranno verificate per una sola delle due serie $\Sigma \alpha_n \cos n\varphi$ e $\Sigma \beta_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi$, il teorema enunciato varrà soltanto per la serie corrispondente.

Questo teorema naturalmente può riguardarsi come relativo tanto alle serie $\Sigma a_n z^n$ ordinate per le potenze di una variabile considerate sul cerchio di convergenza, quanto a quelle classi di serie trigonometriche $\Sigma \alpha_n \cos n\varphi$ e $\Sigma \beta_n \,\mathrm{sen}\, n\varphi$ per le quali i coefficienti α_n e β_n hanno le particolarità ora indicate.

102. — Queste osservazioni ci permettono di trovare con tutta facilità la somma della serie

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{sen}\, x}{1} - \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 3x}{3} - \ldots$$

che noi considerammo già al § 22 [pag. XXXI] e anche al § 81 [pag. LXXIX], e anche quella dell'altra serie

(2) $$\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\dots$$

Si ricordi infatti che dall'Algebra si ha

$$\log(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots$$

pei valori reali e complessi di z nel cerchio di raggio 1, quando pel valore di $\log(1+z)$ per $z=0$ s'intende preso il valore 0, e poi partendo da questo punto s'intende che $\log(1+z)$ varii sempre con continuità (*); e si osservi che sul cerchio di convergenza per $z=e^{i\varphi}$ la serie del secondo membro si riduce all'altra $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{in\varphi}}{n}$ o alla somma $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\varphi}{n}+i\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}$.

Per quanto si vide al § 81 e per l'ultima osservazione che abbiamo fatta, si concluderà subito intanto che *per tutti i valori di φ compresi in una porzione qualsiasi $(-\pi+\alpha,\pi-\beta)$ dell'intervallo da $-\pi$ a π che non termini agli estremi $-\pi$ o π, le due serie $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{\cos n\varphi}{n}$ e $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}$ convergeranno in ugual grado e rappresenteranno funzioni finite e continue della variabile φ.*

Oltre a ciò per quanto dimostrammo nel paragrafo precedente per ogni valore di φ diverso da π e da $-\pi$ la somma della serie $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{in\varphi}}{n}$ sarà il limite di $\log(1+\rho e^{i\varphi})$ nel tempo che ρ tende a 1 a sinistra (cioè facendo passare ρ solo per valori inferiori ad 1), il che, per la continuità di questi logaritmi quando φ non è π nè $-\pi$, porta che la somma stessa sarà il valore di $\log(1+e^{i\varphi})$; quindi per avere la somma della serie $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{e^{in\varphi}}{n}$ o quelle delle due $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\varphi}{n}$ e $\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}$ basterà trovare il detto valore di $\log(1+e^{i\varphi})$ pei valori indicati di φ.

(*) S'intende subito come la definizione di continuità che abbiamo data per le funzioni di una variabile reale al § 30 [pag. XL] possa estendersi al caso delle funzioni reali di più variabili, e del resto noi ce ne occuperemo diffusamente quando tratteremo di queste funzioni alle quali, volendolo, si possono sempre ridurre quelle che si considerano come funzioni di una variabile complessa z studiando separatamente in esse la parte reale e il coefficiente dell'immaginario.

Ora osservando che

$$1+e^{i\varphi}=e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}+e^{\frac{i\varphi}{2}}\right)=2e^{\frac{i\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2},$$

con $\frac{\varphi}{2}$ inferiore a $\frac{\pi}{2}$ in valore assoluto, si vede subito che si ha

$$\log(1+e^{i\varphi})=\log 2\cos\frac{\varphi}{2}+i\frac{\varphi}{2}+2k\pi i,$$

essendo k un numero intero da determinarsi e $\log 2\cos\frac{\varphi}{2}$ un numero reale; quindi evidentemente sarà

$$\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\varphi}{n}=\log 2\cos\frac{\varphi}{2},\quad \Sigma(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}=\frac{\varphi}{2}+2k\pi,$$

e la prima di queste formole varrà evidentemente anche per $\varphi=\pm\pi$; e ora, osservando che per quanto abbiamo dimostrato la serie $\Sigma(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}$ deve essere continua anche per $\varphi=0$ e in questo punto essa ha il valore zero, si conclude che $k=0$ e si hanno le formole notevoli

(3) $$\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\varphi}{n}=\log 2\cos\frac{\varphi}{2},\quad \Sigma(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} n\varphi}{n}=\frac{\varphi}{2}$$

che valgono per tutti i valori di φ da $-\pi$ a π (gli estremi $\pm\pi$ esclusi per la seconda di queste formole), e che dànno le somme cercate delle serie (1) e (2) scritte sopra col semplice cambiamento di φ in x.

103. — Infine aggiungiamo che dai teoremi dimostrati risulta subito anche la generalizzazione del noto teorema di Cauchy sul prodotto delle serie che si dimostra in ogni trattato d'Algebra, cioè del teorema che dice che se $\sum_0^\infty u_n$ e $\sum_0^\infty v_n$ sono due serie (reali o complesse) convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, tale sarà pure la serie $\sum_0^\infty w_n$ dove

(4) $$w_n=u_n v_0+u_{n-1}v_1+u_{n-2}v_2+\dots+u_0 v_n,$$

e la sua somma sarà il prodotto delle somme delle due serie date $\sum_0^\infty u_n$ e $\sum_0^\infty v_n$.

Se non si pongono infatti le condizioni che le due serie $\sum_0^\infty u_n$ e $\sum_0^\infty v_n$ siano convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini, limitandoci a supporre che siano convergenti ma ponendo al tempo stesso la condizione che risulti convergente la serie $\sum_0^\infty w_n$, allora si potrà osservare che pei teoremi precedenti le serie $\sum_0^\infty u_n x^n$, $\sum_0^\infty v_n x^n$ e $\sum_0^\infty w_n x^n$, oltre ad essere convergenti per $x=1$, saranno convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini pei valori di x numericamente inferiori ad uno, e inoltre, come funzioni di x negli intorni del punto $x=1$, saranno funzioni finite e continue per modo che i loro valori $\sum_0^\infty u_n$, $\sum_0^\infty v_n$ e $\sum_0^\infty w_n$ corrispondenti a $x=1$ saranno i limiti dei valori che si hanno per esse quando essendo x sempre inferiore ad uno si avvicina ad uno indefinitamente.

Ma, a causa delle particolarità ora indicate, per questi valori di x inferiori ad uno il teorema di Cauchy ricordato sopra è certamente applicabile alle serie $\Sigma u_n x^n$ e $\Sigma v_n x^n$, e quindi si ha $\sum_0^\infty w_n x^n = \sum_0^\infty u_n x^n \sum_0^\infty v_n x^n$; e per questo evidentemente al limite si troverà $\sum_0^\infty w_n = \sum_0^\infty u_n \sum_0^\infty v_n$, ciò che mostra che *il teorema di Cauchy sul prodotto delle serie $\sum_0^\infty u_n$ e $\sum_1^\infty v_n$ vale anche quando una o tutte e due queste serie sono convergenti soltanto semplicemente purchè si riscontri che la serie prodotto $\sum_0^\infty w_n$, nella quale w_n è data dalla* (4), *è anch' essa convergente.*

Teoremi sui limiti delle serie.

104. — La considerazione delle serie convergenti in ugual grado permette di dare alcuni teoremi coi quali in molti casi la ricerca dei limiti delle serie può farsi come se si trattasse di somme composte con un numero finito di termini.

Questi teoremi sono i seguenti:

Teorema I. *Se i termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ di una serie Σu_n sono funzioni di x in un intervallo $(a, a+\varepsilon)$ posto per es. a destra di un punto a e la cui ampiezza è differente da zero ma arbitrariamente piccola, o anche son dati soltanto in un gruppo infinito di punti x dello stesso intervallo pei quali a è semplicemente un punto limite; e se i loro limiti u'_n per $x=a+0$ sono determinati e finiti, e la serie Σu_n nell'intervallo stesso o pei valori di x che si possono considerare è convergente in ugual grado, allora la somma $U^{(x)}$ di questa serie avrà essa pure un limite determinato e finito per $x=a+0$, e questo limite sarà la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$* (la quale per conseguenza si ridurrà a un polinomio o sarà convergente).

Siano infatti x_1 e x_2 due qualunque dei valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso); si avrà

$$U^{(x_1)} - U^{(x_2)} = \sum_1^m \left\{ u_n^{(x_1)} - u_n^{(x_2)} \right\} + R_m^{(x_1)} - R_m^{(x_2)},$$

indicando in generale con $u_n^{(x)}$ e $R_m^{(x)}$ i valori di u_n e R_m pel valore x della variabile; e per le ipotesi ammesse si potrà sempre scegliere m in modo che per *tutti* i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$, e quindi anche pei valori di x_1 e x_2, i resti $R_n^{(x)}$ siano numericamente minori di un numero arbitrariamente piccolo σ.

Ma poichè il numero m, dopo di essere stato scelto in tal modo, può riguardarsi come un numero fisso, pel teorema di Cauchy del § 23 [pag. XXXIII], si potrà evidentemente trovare un numero $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tale che per tutti i valori di x_1 e x_2 compresi fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escl.) la somma $\sum_1^m \left\{ u_n^{(x_1)} - u_n^{(x_2)} \right\}$ sia essa pure numericamente minore di σ; quindi evidentemente si avrà in valore assoluto $U^{(x_1)} - U^{(x_2)} < 3\sigma$, e pel ricordato teorema di Cauchy la somma $U^{(x)}$ della serie data avrà un limite determinato e finito per $x=a+0$.

Ora, chiamando U questo limite, si potrà evidentemente prendere un numero $\varepsilon_2 \leq \varepsilon$ talmente piccolo che per tutti i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon_2$ (a escl.) la differenza $U^{(x)} - U$ sia numericamente minore di σ; quindi poichè si ha

$$U^{(x)} - \sum_1^m u'_n = \sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) + R_m^{(x)},$$

si vede subito che sarà

$$U - \sum_1^m u'_n = \sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n) + R_m^{(x)} + \theta\sigma,$$

con θ compreso fra -1 e $+1$; e ora osservando anche che a causa della convergenza in ugual grado di Σu_n fra a e $a+\varepsilon$, a partire da un certo valore m' di m i resti $R_m^{(x)}$ sono sempre numericamente minori di σ, e per quanto grande si prenda m si può sempre prendere poi ε_2 così piccolo che la somma $\sum_1^m (u_n^{(x)} - u'_n)$ sia anch'essa numericamente minore di σ, si conclude che a partire da un certo valore di m si avrà sempre in valore assoluto

$\mathrm{U}-\sum_1^m u'_n < 3\sigma$, e perciò la serie $\Sigma u'_n$ sarà un polinomio o sarà convergente e avrà per somma U, e questo completa la dimostrazione del teorema.

Notiamo che quando per solo dato si avesse che fra a e $a+\varepsilon$ la serie Σu_n è convergente in ugual grado *soltanto semplicemente,* colla prima parte della dimostrazione precedente si troverebbe ancora che la somma $\mathrm{U}^{(x)}$ di questa serie ha un limite determinato e finito per $x=a+0$; ma resterebbe incerto se questo limite fosse o no la somma della serie dei limiti Σu_n. Però quando si sapesse anche che la serie limite $\Sigma u'_n$ si riduce a un polinomio o è convergente, allora si potrebbe ancora affermare che il limite di Σu_n è la somma della serie Σu_n, perchè in tal caso indicando con R'_m il resto di questa serie $\Sigma u'_n$ si avrebbe la formola

$$\mathrm{U}^{(x)}-\sum u'_n=\sum_1^m (u_n^{(x)}-u'_n)+\mathrm{R}_m^{(x)}-\mathrm{R}'_m\,;$$

e scegliendo m in modo che sia maggiore di quel numero m' dopo il quale R'_m è zero o è numericamente minore di σ, e sia tale che si abbia sempre $\mathrm{R}_m^{(x)}<\sigma$, e prendendo poi ε sufficientemente piccolo, si troverebbe ancora che $\lim \mathrm{U}^{(x)}=\Sigma u'_n$.

105. — Il teorema dimostrato dà solo una condizione sufficiente per l'esistenza del limite di una serie. Una condizione che sia al tempo stesso *necessaria e sufficiente* per l'esistenza del detto limite si ha dal seguente

Teorema II. *Se i termini di una serie Σu_n sono funzioni di x in un dato intervallo (α,β), o dipendono da una variabile x che può prendere un numero infinito di valori dei quali a è un punto-limite, e se i limiti u'_n degli stessi termini u_n per $x=a$ a destra o a sinistra, per es. a destra, sono determinati e finiti, affinchè il limite della somma $\mathrm{U}^{(x)}$ della serie Σu_n per $x=a+0$ sia determinato e finito e sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$, è necessario e sufficiente:*

1.° *che questa serie dei limiti $\Sigma u'_n$ sia convergente;*

2.° *che per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ e per ogni numero intero m' comunque grande si possano trovare due numeri ε e m dei quali il primo sia differente da zero e positivo e il secondo sia intero e maggiore di m' e tale che per tutti i valori di x che si possono considerare fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) il resto $\mathrm{R}_m^{(x)}$ della serie Σu_n sia numericamente minore di σ.*

Supponiamo infatti che la serie dei limiti $\Sigma u'_n$ sia convergente, e osserviamo che si ha

$$(1)\qquad \mathrm{U}^{(x)}-\sum u'_n=\sum_1^m (u_n^{(x)}-u'_n)+\mathrm{R}_m^{(x)}-\mathrm{R}'_m\,,$$

essendo R'_m il resto della serie dei limiti $\Sigma u'_n$.

In questa formola m potrà supporsi maggiore del numero m' a partire dal quale, a causa della convergenza di $\Sigma u'_n$, si ha in valore assoluto $\mathrm{R}'_m<\sigma$; quindi, osservando che quando è soddisfatta anche la seconda delle condizioni poste sopra si possono sempre trovare due numeri m ed ε pei quali $\mathrm{R}_m^{(x)}$ per *tutti* i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) sia anch'esso numericamente inferiore a σ, e poi, dopo di aver fissato così il valore di m, prendendo un numero $\varepsilon_1\leq\varepsilon$ si potrà anche fare in modo che quando x è compreso fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto $\sum_1^m (u_n^{(x)}-u'_n)<\sigma$, si conclude subito che per questi valori di x si avrà sempre in valore assoluto $\mathrm{U}^{(x)}-\Sigma u'_n<3\sigma$, e perciò sarà $\lim \mathrm{U}^{(x)}=\Sigma u'_n$.

Viceversa se $\lim \mathrm{U}^{(x)}=\Sigma u'_n$, la serie $\Sigma u'_n$ sarà convergente e si potrà trovare un numero m' dopo il quale sia sempre in valore assoluto $\mathrm{R}'_m<\frac{\sigma}{3}$; preso poi un numero $m>m'$, si potrà anche trovare un numero corrispondente ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ si abbia sempre in valore assoluto $\mathrm{U}^{(x)}-\Sigma u'_n<\frac{\sigma}{3}$, e $\sum_1^m(u_n^{(x)}-u'_n)<\frac{\sigma}{3}$; e allora per gli stessi valori di x, a causa della formola (1), si avrà anche evidentemente $\mathrm{R}_m^{(x)}<\sigma$, talchè il teorema può dirsi ora completamente dimostrato.

106. — L'ultima parte della dimostrazione precedente mostra anche che se $\lim \mathrm{U}^{(x)}=\Sigma u'_n$, per *ogni* numero m superiore a un certo numero m' esisterà un numero ε_1 tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon_1$ (a escl.) si abbia in valore assoluto $\mathrm{R}_m^{(x)}<\sigma$.

Viceversa, se questo accade ripetendo i ragionamenti fatti in fine del § 104 si trova che $\lim \mathrm{U}^{(x)}=\Sigma u'_n$; quindi si può evidentemente enunciare anche il seguente:

Teorema III. *Se i termini di una serie Σu_n sono funzioni di x in un dato intervallo (α,β), o dipendono da una variabile x che può prendere un numero infinito di valori dei quali a è un punto-limite, e se i limiti degli stessi termini per $x=a+0$ sono determinati e finiti, affinchè il limite della somma $\mathrm{U}^{(x)}$ della serie Σu_n per $x=a+0$ sia determinato e finito* e sia la somma della serie dei limiti $\Sigma u'_n$ (che si suppone convergente), *è necessario e sufficiente che per ogni numero arbitrariamente piccolo e positivo σ e per* ogni *valore di m superiore a un dato numero abbastanza grande m' esista un numero ε* (variabile o no con m) *tale che per tutti i valori di x che possono considerarsi fra a e $a+\varepsilon$ (a escl.) il resto $\mathrm{R}_m^{(x)}$ della serie Σu_n sia numericamente minore di σ.*

Notiamo esplicitamente, a scanso di equivoci, che la condizione contenuta in questo teorema è condizione *necessaria* per l'esistenza del limite della somma $U^{(x)}$ della serie Σu_n *quando* (come nel teorema) *si richiede anche che questo limite sia la somma della serie dei limiti* $\Sigma u'_n$, ma cessa però di esser tale quando, senza occuparsi della serie $\Sigma u'_n$, si richiede semplicemente che la somma $U^{(x)}$ abbia un limite determinato e finito, giacchè evidentemente, a causa della eguaglianza

$$U^{(x_1)} - U^{(x_2)} = \sum_1^m (u_n^{(x_1)} - u_n^{(x_2)}) + R_m^{(x_1)} - R_m^{(x_2)} ,$$

l'esistenza del limite di $U^{(x)}$ porta soltanto che pei valori di x fra a e $a+\varepsilon$, quando ε è sufficientemente piccolo, si abbia in valore assoluto $R_m^{(x_1)} - R_m^{(x_2)} < \sigma$.

107. — I teoremi dimostrati conducono subito ad altri che si riferiscono alla continuità delle funzioni espresse in serie che qui troviamo opportuno di dimostrare.

Il primo di questi teoremi si enuncia col dire che: *Se in un intorno comunque piccolo ma differente da zero* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *di un punto* a *i termini* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *di una serie* Σu_n *sono funzioni finite di* x *che nel punto* a *sono anche continue qualunque del resto esse siano nei punti vicini, e questa serie nello stesso intorno è convergente in ugual grado almeno semplicemente, la somma della serie* Σu_n *sarà una funzione di* x *finita e continua per* $x = a$.

Questo teorema risulta immediatamente dal teorema del § 104, e risulta anche da quello dato in principio del § 94, e anzi può dirsi che non ne differisca che per l'enunciato, giacchè se $f(x)$ potesse esser discontinua per $x = a$, per quanto allora si disse, la serie Σu_n nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ non sarebbe convergente in ugual grado neppur semplicemente.

Osserviamo poi che, per quanto si dimostrò nel § 104, nel teorema ora enunciato si può fare a meno di porre a priori la condizione della convergenza della serie Σu_n per $x = a$, purchè però si sappia che in *tutti gli altri* punti dell'intorno $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ la serie stessa Σu_n è convergente in ugual grado in modo assoluto.

108. — Dal teorema dimostrato risulta poi, come caso particolare, anche quello enunciato in fine del § 94, cioe il teorema che dice che: *Se i termini di una serie* Σu_n *sono funzioni di* x *finite e continue in tutto un intervallo* (α, β) *nel quale la serie stessa è convergente in ugual grado almeno semplicemente, anche la sua somma* $f(x)$ *sarà una funzione di* x *finita e continua in questo intervallo;* e per questo teorema si può affermare che

Se una serie Σu_n *è convergente in ugual grado almeno semplicemente in tutto un intervallo* (α, β), *la sua somma* $f(x)$ *in questo intervallo non*

potrà essere discontinua altro che in quei punti nei quali una o più delle funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *siano discontinue.*

109. — Limitandosi poi al caso delle *serie* Σu_n *i cui termini, oltre essere funzioni finite e continue della* x *in tutto l'intervallo* (α, β), *sono sempre positivi almeno a partire da un certo valore finito di* n, si può dimostrare anche la proposizione reciproca di quella ora enunciata, facendo cioè vedere che *quando la loro somma è una funzione finita e continua della* x *queste serie sono convergenti in ugual grado in tutto l'intervallo* (α, β).

Si osservi infatti che se Σu_n è una serie per la quale sono soddisfatte le condizioni ora indicate, per ogni valore speciale di x fra a e β esisteranno infiniti numeri m maggiori di un dato numero m' e tali che i resti corrispondenti $R_n^{(x)}$ della serie data pel valore x che si considera e per $n \geq m$ siano sempre numericamente inferiori a σ.

Fra questi infiniti numeri m potremo prendere il minimo che indicheremo con $m_{x,\sigma}$; e allora, lasciando invariato il σ, questo numero $m_{x,\sigma}$ acquisterà un significato determinato per ogni valore di x, e la quantità $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ potrà riguardarsi come una funzione finita e determinata di x per tutti i valori di x fra α e β.

Da ciò segue (§ 16 [pag. XXIII] e § 36 [pag. XLV]) che esisterà un limite inferiore μ pei valori di $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ nell'intervallo stesso (α, β), e esisterà pure fra α e β almeno un punto determinato x' dotato della proprietà che pei punti di ogni intorno di x' anche arbitrariamente piccolo il limite inferiore di $\frac{1}{m_{x,\sigma}}$ sia ancora μ.

Ora, siccome nel punto x' la serie Σu_n è convergente, si potrà trovare per essa un numero finito $m_1 > m'$ tale che per $n \geq m_1$ si abbia sempre $R_n(x') < \frac{\sigma}{3}$; quindi poichè si ha

$$f(x'+\delta) - f(x') = \sum_1^{m_1} \left\{ u_n(x'+\delta) - u_n(x') \right\} + R_{m_1}(x'+\delta) - R_{m_1}(x') ,$$

osservando che, per la continuità di $f(x)$ e dei termini $u_n(x)$, esiste un intervallo $(x'-\varepsilon_1, x'+\varepsilon_2)$ nel quale si ha

$$f(x'+\delta) - f(x') < \frac{\sigma}{3} \;,\quad \sum_1^{m_1} \left\{ u_n(x'+\delta) - u_n(x') \right\} < \frac{\sigma}{3} ,$$

si conclude che in questo intervallo si avrà $R_{m_1}(x'+\delta) < \sigma$; e ora avendo riguardo anche alla condizione posta che i termini di Σu_n siano tutti positivi a partire da un certo valore di n, si vede di qui che sarà $R_n(x) < \sigma$ per tutti i valori di n non inferiori a m_1 e per tutti i punti x fra $x' - \varepsilon_1$ e $x' + \varepsilon_2$.

Ne segue che μ non sarà inferiore a $\frac{1}{m_1}$, e perciò $m_{x,\sigma}$ non sarà mai superiore a m_1, e questo evidentemente ci mostra appunto che sotto le ipotesi fatte la serie Σu_n è convergente in ugual grado fra α e β e la nostra proposizione è dimostrata.

210. — Come conseguenza poi del teorema ora dimostrato faremo notare che evidentemente esso può anche generalizzarsi col dire che: *Se Σu_n è una serie reale o complessa i cui termini sono funzioni finite e continue della x in tutto l'intervallo (α, β) (gli estr. inclusi), e oltre esser convergente indipendentemente dall'ordine dei termini è tale altresì che la somma della serie dei valori assoluti o moduli corrispondente $\Sigma u'_n$ è una funzione finita e continua della x in tutto l'intervallo, la serie stessa Σu_n sarà convergente in ugual grado nell'intervallo dato (α, β).*

CALCOLO DIFFERENZIALE

I.

Degli infinitesimi e degli infiniti

1. — Si dice che una quantità variabile α diviene *infinitesima* o *infinitamente piccola* quando, diminuendo indefinitamente in valore assoluto (*), ha per limite lo zero.

E si dice che una quantità α diviene *infinita* o *infinitamente grande,* quando il suo limite è l'infinito, positivo o negativo.

Il limite s'intende preso col tendere di un'altra quantità x (per valori continui o per valori discreti) verso un numero determinato a a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o per valori negativi, e quindi propriamente si dovrebbe dire che α diviene infinitesima od infinita per $x=a$ a destra o a sinistra, quando il suo limite, a destra o a sinistra di a, è zero, o è infinito respettivamente, ecc. Però bene spesso la natura della questione fissa il senso secondo cui il limite viene preso, o fa sì che questo senso sia indifferente e allora si rende inutile la distinzione indicata. Noi perciò, pur tenendo mente sempre a questa distinzione, non la faremo esplicitamente altro che nei casi in cui sia indispensabile a farsi per non cadere in equivoci.

Aggiungiamo che in certe questioni conviene anche considerare dei casi in cui col tendere di x ad a a destra o a sinistra, o col crescere indefinitamente di x per valori positivi o per valori negativi, la quantità α, senza avere propriamente per limite $\pm\infty$, finisce per prendere *anche* valori grandissimi e maggiori di qualsiasi numero dato. Anche in questi casi, volendo

---

(*) Questo non porta che y debba diminuire *continuamente* in valore assoluto. Può anche oscillare continuamente, mantenendosi però da un certo punto in poi sempre inferiore in valore assoluto a un numero dato comunque piccolo σ, come chiaramente risulta dal concetto di limite giustamente inteso.

avere speciale riguardo alla circostanza che α prende anche valori maggiori di qualunque numero dato, si dice ancora talvolta che α diviene infinita per $x = a \pm 0$ o per $x = \pm \infty$; qui però, quando dovremo riferirci a questo genere d'infiniti, lo diremo sempre espressamente, per modo che quando si dirà semplicemente che α diviene infinita, *senza altra avvertenza,* s'intenderà di riferirci a quegli infiniti pei quali $\lim \alpha = \pm \infty$.

2. — Ci fermeremo ora dapprima sulle quantità che divengono infinitesime per $x = a$ a destra o a sinistra, o per $x = \pm \infty$; e su queste faremo le osservazioni seguenti.

La quantità α che diviene infinitesima non si considera al limite, ma *fuori del limite* mentre a questo limite si avvicina. Essa dunque è una quantità come tutte le altre ed è di sua natura variabile; ed il suo carattere essenziale sta in ciò, che per quanto piccolo sia divenuto il suo valore assoluto nei punti ove è diversa da zero, avvicinandosi x sempre più ad a (a destra o a sinistra) o crescendo sempre più x, il valore stesso finirà per divenire, e restare poi, sempre, ancora più piccolo.

Essa poi, mentre ha per limite zero, fuori del limite, almeno ordinariamente, sarà diversa da zero, e su essa potranno farsi calcoli come su tutte le altre quantità, appunto perchè si considera sempre fuori del limite. In particolare dunque si potranno considerare anche i quozienti di quantità infinitesime, come anche i limiti di esse, senza che questi quozienti o i loro limiti cessino, almeno in un immenso numero di casi, di avere un significato; anzi nel calcolo differenziale avremo ad ogni istante da considerare di tali casi, poichè una parte principale di questo calcolo consiste appunto nello studio dei limiti di certi quozienti d'infinitesimi *(derivate).*

3. — Due quantità α ed α_1 che divengono ambedue infinitesime, tendono ambedue a zero; però s'intende bene come esse possano tendere a zero in modo differente, l'una avvicinandosi a zero più rapidamente dell'altra. Così per es. le due quantità x^2 e x^3 divengono ambedue infinitesime col tendere di x a zero, ma la seconda vi tende più rapidamente della prima. La seconda in certo modo finisce coll'esser sempre immensamente più piccola in confronto alla prima, e la prima, sebbene infinitesima, immensamente grande in confronto alla seconda, perchè la seconda finisce coll'essere una frazione, piccola quanto si vuole, della prima. È questa considerazione che porta a stabilire i diversi ordini di infinitesimi quando essi si confrontano fra loro pel loro modo di tendere allo zero.

4. — Si consideri un infinitesimo α, pel quale riterremo che, mentre tende a zero, almeno da un certo punto in poi, non passi mai per zero, pur divenendo alla fine e mantenendosi poi sempre numericamente minore di qualunque quantità data; e insieme ad α si consideri un altro infinitesimo β.

Il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ di questi infinitesimi avrà un significato, e potrà avere per limite zero, o una quantità determinata e finita, o $\pm \infty$, o non avere un limite determinato; e noi nel primo caso diremo che β diviene infinitesimo di *ordine superiore* ad α; nel secondo diremo che β diviene infinitesimo dello *stesso ordine* di α; e nel terzo che β diviene infinitesimo di *ordine inferiore* ad α. Nel quarto caso poi se il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$, senza avere un limite determinato, in valore assoluto resterà sempre maggiore di un numero differente da zero e positivo, e minore di un certo numero pur differente da zero e finito, si potrà dire ancora che α e β divengono infinitesimi dello *stesso ordine*, mentre se il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ potrà accostarsi quanto si vuole a zero, o passare per zero, restando però sempre minore in valore assoluto di un certo numero positivo, potremo dire soltanto che β diviene infinitesimo di ordine *non minore* di α; e se il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ non potrà accostarsi a zero col suo valore assoluto più di una certa quantità, ma potrà prendere anche valori numericamente maggiori di qualunque numero dato, allora potremo dire soltanto che β diviene infinitesimo di ordine *non maggiore* di α; nel caso infine che lo stesso rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ possa al tempo stesso accostarsi quanto si vuole a zero, o passare per zero, e prendere valori numericamente maggiori di qualunque numero / u dato non potremo propriamente paragonare, come negli altri casi, gli ordini di infinitesimo di β e di α.

Così, p. es., supponendo $\beta = \operatorname{sen}^2 \alpha$, si vede subito che se α è un infinitesimo a cui ci si riferisce, $\operatorname{sen}^2 \alpha$ sarà un infinitesimo di *ordine superiore* ad α, giacchè si ha $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha$, e $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$.

Supponiamo invece $\beta = \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha$; si vede che β è un infinitesimo dello *stesso ordine* di α, giacchè si ha $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}\right) = \lim \left(1 + 2\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}\right) = 3$; e supponendo, p. es., $\beta = \sqrt{\alpha + \operatorname{sen} \alpha}$, si vede che β è un infinitesimo di *ordine inferiore* ad α, perchè $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\sqrt{\alpha + \operatorname{sen} \alpha}}{\alpha} = \lim \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}} = \infty$.

Similmente se si ha, p. es., $\beta = 2\alpha + \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{\alpha}$ bisognerà riguardare β

come dello *stesso ordine* di α, perchè il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ coll'impiccolire di α indefinitamente, senza avere un limite determinato, oscilla fra 1 e 3; se $\beta = \alpha \operatorname{sen} \frac{1}{\alpha}$ bisognerà riguardare β semplicemente come infinitesimo di *ordine non minore* di α; se $\beta = \alpha \left(2 + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\right)$, bisognerà riguardare β come infinitesimo di *ordine non maggiore* di α, quando α tende a zero per valori positivi; e infine se si avrà $\beta = \alpha \left(2 + \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\right)$ non si potrà in nessun modo confrontare l'ordine di infinitesimo di β con quello di α.

5. — Quando α è l'infinitesimo a cui tutti gli altri vengono riferiti, vien sempre supposto, come già dicemmo sopra, che esso sia di quelli che, pur tendendo a zero, almeno da un certo punto in poi non passano mai per zero.

Esso poi suol essere detto l'*infinitesimo principale*, o infinitesimo principale del primo ordine, talchè, limitandoci ora e in seguito, finchè non si avverta espressamente il contrario, ai primi tre casi considerati sopra (quelli cioè nei quali $\frac{\beta}{\alpha}$ ha per limite lo zero, o ha per limite una quantità determinata e finita, o ha per limite l'infinito) si potrà dire evidentemente che, nel primo dei detti tre casi, β dovrà riguardarsi come un infinitesimo di ordine superiore al primo, nel secondo come un infinitesimo del prim'ordine, e nel terzo come un infinitesimo di ordine inferiore al primo.

E poichè se nel secondo caso si ha $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k$, con k quantità determinata, finita e diversa da zero, fuori del limite sarà $\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon$, ove ε è nullo o è un nuovo infinitesimo, si concluderà subito che la formula $\beta = \alpha (k + \varepsilon)$, con k determinato e finito e diverso da zero, ed ε nullo o infinitesimo, darà l'espressione degl'infinitesimi del prim'ordine di cui noi ci occupiamo (quelli cioè pei quali $\frac{\beta}{\alpha}$ ha un limite determinato, finito e diverso da zero) riferiti all'infinitesimo principale α.

E poichè se si pone $\alpha\varepsilon = \beta_1$, β_1 sarà ancora nullo o sarà un infinitesimo d'ordine superiore al primo, si potrà dire altresì che la forma generale degl'infinitesimi del primo ordine riferiti all'infinitesimo principale α verrà data anche dalla formola

$$\beta = \alpha k + \beta_1,$$

ove k è determinato e finito e diverso da zero, e β_1 è nullo o è un infinitesimo di ordine superiore al primo; restando così β scomposto in una parte ancora infinitesima e del prim'ordine, e in una parte nulla, o infinitesima di ordine superiore al primo.

6. — Quando α è l'infinitesimo principale del primo ordine, α^n, ove n è un numero positivo che può anche esser fratto o incommensurabile, sarà un infinitesimo di ordine superiore o inferiore al primo secondochè $n > 1$ o $n < 1$, e noi lo diremo un infinitesimo dell'ordine n.

Quindi, secondo le denominazioni date sopra, un infinitesimo β potrà dirsi di ordine n quando si abbia $\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k_n$, dove k_n è una quantità determinata, finita e diversa da zero; e così, sempre limitandoci agli infinitesimi che abbiamo detto sopra di considerare, si potrà dire che la formola $\beta = \alpha^n (k_n + \varepsilon)$, ove ε è zero o è un nuovo infinitesimo, darà l'espressione generale degli infinitesimi dell'ordine n riferiti all'infinitesimo principale α.

E poichè se si pone $\beta_1 = \alpha^n \varepsilon$, β_1 sarà ancora zero o sarà un altro infinitesimo di ordine superiore ad n, evidentemente si potrà dire altresì che la espressione generale degl'infinitesimi di ordine n è anche data dalla formola

$$\beta = \alpha^n k + \beta_1,$$

ove k è una quantità determinata diversa da zero e finita, e β_1 è zero o è un infinitesimo di ordine superiore ad n, scomponendosi così l'infinitesimo generale β di ordine n in una parte ancora infinitesima dell'ordine n e in una parte nulla o infinitesima e di ordine superiore ad n.

E si può notare in particolare che, secondo queste denominazioni, β sarà un infinitesimo del secondo ordine quando $\frac{\beta}{\alpha}$ è infinitesimo del primo ordine, β sarà infinitesimo di terz'ordine quando $\frac{\beta}{\alpha}$ è infinitesimo del secondo ordine ecc.....

In particolare ancora, quando si tratta, p. es., di linee trigonometriche, prendendo l'arco x al suo tendere a zero come infinitesimo principale, si può dire che per x tendente a zero (a destra o a sinistra) il seno dell'arco x, cioè $\operatorname{sen} x$ è un infinitesimo del prim'ordine (perchè $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$).

La differenza $1 - \cos x$ è invece infinitesima del second'ordine perchè si ha

$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} .$$

La tangente $\operatorname{tg} x$ è infinitesima del prim'ordine (sempre rispetto all'arco x) perchè $\lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$, ecc. ...

Oltre poi agl'infinitesimi di ordine determinato (intero, fratto o incommensurabile) altri ve ne sono di ordine non perfettamente determinato che dovrebbero dirsi di ordine respettivamente minore o maggiore di qualsiasi quantità data; ma di questi non troviamo opportuno l'occuparci in questo momento.

Noteremo anche che quando si cangia l'infinitesimo principale, prendendo per infinitesimo principale un altro che rispetto al primo non è del prim'ordine, l'ordine di tutti gli altri infinitesimi viene evidentemente a cangiarsi ecc...

7. — Il calcolo sugl'infinitesimi si fa più specialmente considerandoli in quozienti o in somme composte di termini il cui numero è infinito, o diviene infinito col tendere a zero degl'infinitesimi che in esse figurano, e cercando poi i limiti di questi quozienti o di queste somme.

Questo calcolo è fondato principalmente sopra due teoremi, il primo dei quali è il seguente:

Il limite del quoziente $\frac{\beta}{\alpha}$ di due infinitesimi non viene alterato quando ad essi si aggiungano o si tolgano altri infinitesimi che sieno di ordine superiore rapporto a ciascuno di essi rispettivamente, e purchè i due infinitesimi primitivi α e β, nel loro tendere a zero, non passino continuamente per zero.

Sia infatti β_1 un infinitesimo di ordine superiore a β, e α_1 un infinitesimo di ordine superiore ad α.

I rapporti $\frac{\beta_1}{\beta}$ e $\frac{\alpha_1}{\alpha}$, per le ipotesi fatte, avranno un significato, e saranno due nuovi infinitesimi ε_1 ed ε_2; quindi si avrà

$$\frac{\beta \pm \beta_1}{\alpha \pm \alpha_1} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 \pm \frac{\beta_1}{\beta}}{1 \pm \frac{\alpha_1}{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 \pm \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_2} ,$$

e al limite sarà $\lim \frac{\beta \pm \beta_1}{\alpha \pm \alpha_1} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, ciò che dimostra il teorema.

Farò notare esplicitamente che questo teorema vale non solo nel caso in cui il limite di $\frac{\beta}{\alpha}$ è determinato e finito, ma anche nel caso in cui questo limite è infinito o non esiste, nel senso però che quando si ha $\lim \frac{\beta}{\alpha} = +\infty$ o $= -\infty$, si ha anche $\lim \frac{\beta \pm \beta_1}{\alpha \pm \alpha_1} = +\infty$ o $= -\infty$; e quando $\frac{\beta}{\alpha}$ non ha alcun limite, lo stesso accade di $\frac{\beta \pm \beta_1}{\alpha \pm \alpha_1}$.

8. — Prima di dare anche il secondo dei teoremi su cui si fonda il calcolo sugl'infinitesimi, premettiamo la osservazione seguente.

Siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ degli infinitesimi il cui numero sia infinito, o vada crescendo indefinitamente a misura che essi tendono a zero. Ognuno di questi infinitesimi presi isolatamente, dovendo tendere a zero, finirà per divenire e restare poi sempre numericamente inferiore a un numero positivo dato arbitrariamente σ; però s'intende che potrà benissimo avvenire che quando si è giunti a quel punto dopo il quale si ha sempre in valore assoluto $\varepsilon_1 < \sigma$, non si abbia ancora, pure in valore assoluto, $\varepsilon_2 < \sigma$.

E quando, continuando ad avvicinarsi al limite, si giunga ad un punto (come dovrà pure avvenire) dopo il quale in valore assoluto si ha anche $\varepsilon_2 < \sigma$, potrà darsi che non sia ancora $\varepsilon_3 < \sigma$; e potrà darsi poi che quando si sia giunti ad avere anche $\varepsilon_3 < \sigma$ non si abbia ancora $\varepsilon_4 < \sigma \ldots$; e in generale s'intende che via via che i successivi infinitesimi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ si riducono in valore assoluto inferiori a σ, essendo il loro numero infinito, o crescendo esso indefinitamente, potrà darsi che vi restino sempre altri infinitesimi da considerare che non siano ancora divenuti inferiori a σ, per modo, cioè, che non si giunga mai ad un punto dopo il quale ognuno degl'infinitesimi che devono considerarsi sia sempre numericamente inferiore a σ.

E che tali circostanze in certi casi effettivamente si presentino, si riscontra subito considerando, p. es., la serie d'infinitesimi α, $\alpha^{\frac{1}{2}}$, $\alpha^{\frac{1}{2^2}}$, $\alpha^{\frac{1}{2^3}}$, $\alpha^{\frac{1}{2^4}}$, ..., $\alpha^{\frac{1}{2^n}}$, ... ove α è un infinitesimo; quindi, quando si hanno da considerare degl'infinitesimi il cui numero sia infinito o vada crescendo indefinitamente col tendere di essi a zero, gioverà fare la distinzione che viene suggerita dalle considerazioni precedenti; e noi per brevità di locuzione diremo che quest'infinitesimi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n \ldots$ sono *infinitesimi in egual grado,* o anche, *convergono a zero in egual grado* o *in modo uniforme* quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, coll'avvicinarsi sempre più al limite, si giunga sempre ad un punto dopo il quale *ciascuno* degl'infinitesimi che si avranno allora da considerare sia sempre numericamente inferiore a σ; mentre se questa condizione non si potrà soddisfare, si dirà che le quantità $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, sebbene infinitesime, non lo sono in egual grado, o anche (il che è lo stesso) non convergono a zero in egual grado o in modo uniforme.

Similmente poi, se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ sono infinitesimi di ordine superiore agli infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$, respettivamente, per semplicità di linguaggio si dirà che $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ *sono uniformemente* infinitesimi di ordine superiore a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ quando i rapporti $\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}, \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}, \frac{\varepsilon_3}{\alpha_3}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n}, \ldots$ sono infinitesimi che convergono a zero in modo uniforme.

9. — Ciò premesso è facile dimostrare il seguente teorema che è quello cui alludevamo sopra:

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ sono infinitesimi positivi, che fuori del limite sono differenti da zero, e il loro numero è infinito o cresce indefinitamente col tendere di essi a zero, e la loro somma ha un limite determinato e finito, il limite di questa somma non verrà alterato quando agli infinitesimi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ che la compongono, si aggiungano o si tolgano altri infinitesimi che rispetto ad essi siano uniformemente di ordine superiore.

Sia infatti

$$\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots \alpha_n + \ldots\ldots) = S,$$

essendo S una quantità determinata e finita; e sieno $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ infinitesimi uniformemente di ordine superiore a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ respettivamente. Ponendo $\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \beta_1$, $\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \beta_2$, ... $\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} = \beta_n$, ..., si avrà

$$(\alpha_1 \pm \varepsilon_1) + (\alpha_2 \pm \varepsilon_2) + \ldots + (\alpha_n \pm \varepsilon_n) + \ldots = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots \pm \beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\alpha_2 \pm \ldots \pm \beta_n\alpha_n \pm \ldots$$

talchè per dimostrare il teorema enunciato, basterà evidentemente far vedere che la somma $\pm \beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\alpha_2 \pm \ldots\ldots \pm \beta_n\alpha_n \pm \ldots\ldots$ ha per limite lo zero.

Ora per le ipotesi fatte su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, cioè che qualunque sia il numero σ, a partire da un certo punto in poi, col tendere a zero di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ si abbia in valore assoluto $\beta_1 < \sigma$, $\beta_2 < \sigma$, $\beta_3 < \sigma, \ldots$ e ciò per ogni infinitesimo β ad un tempo, ne segue subito che sarà in valore assoluto

$$\pm \beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\alpha_2 \pm \beta_3\alpha_3 \pm \ldots\ldots \pm \beta_n\alpha_n \pm \ldots < (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n + \ldots)\sigma,$$

e perciò si avrà $\lim(\pm \beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\alpha_2 \pm \ldots\ldots \pm \beta_n\alpha_n \pm \ldots) = 0$, ciò che, come abbiamo detto, dimostra completamente il teorema enunciato.

10. — L'utilità di questi teoremi pel calcolo dei limiti di quozienti, o di somme di infinitesimi, si fa subito manifesta.

Supponiamo infatti p. es. di avere da calcolare il limite del quoziente $\frac{\alpha}{\beta}$, essendo α e β due infinitesimi che non passano per zero mentre tendono a zero, e che non sono perfettamente conosciuti. E propriamente supponiamo che α si componga, p. es. di due parti, α_1 e α_2, la prima delle quali si conosca perfettamente, e la seconda non sia perfettamente conosciuta di forma o di valore, ma si sappia però che è infinitesima di ordine superiore ad α_1; e lo stesso accada per β, essendo β_1 e β_2 le parti che la compongono.

Allora per il primo dei teoremi precedenti sarà inutile starci ad occupare di ciò che si riferisce alla precisa determinazione di α_2 e β_2, poichè avendosi $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, queste quantità α_2 e β_2 non vengono ad avere nessuna influenza sul limite di $\frac{\alpha}{\beta}$ e possono senz'altro trascurarsi; riducendosi così il calcolo del limite di $\frac{\alpha}{\beta}$ a quello ben più semplice del limite di $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, dove α_1 e β_1 sono infinitesimi perfettamente conosciuti.

Lo stesso può dirsi evidentemente pel caso delle somme di infinitesimi.

11. — Sugli infinitesimi aggiungiamo ora anche le osservazioni seguenti.

Quando si abbia una eguaglianza fra soli infinitesimi e sia p. es. $\Omega = \alpha_1 + \alpha_2$ essendo Ω un infinitesimo, e α_1 e α_2 due altri infinitesimi dei quali il secondo α_2 sia di ordine superiore a quello di α_1, allora, dietro l'osservazione che in ultima analisi, almeno ordinariamente, si devono considerare gli infinitesimi in quozienti o in somme per passare poi al limite, e su questo non ha influenza la presenza di α_2 quando vi è l'infinitesimo di ordine inferiore α_1 (salvo a tener mente sempre alle restrizioni contenute nell'enunciato dei teoremi precedenti) si usa spesso di trascurare subito α_2, scrivendo senz'altro $\Omega = \alpha_1$.

Questa uguaglianza cessa con ciò di essere rigorosa, ma l'errore non ha nessuna influenza al limite sui resultati finali, nei quali l'esattezza si ristabilisce perfettamente; talchè avendo in mira soltanto questi resultati finali, la cosa non arreca nessun danno, mentre arreca vantaggi immensi per la semplicità che bene spesso introduce nei calcoli, poichè per essa si tolgono spesso di mezzo delle quantità che, sia per essere complicate, sia per non essere perfettamente conosciute, complicano la questione, senza poi che possa essere di nessun vantaggio il trascinarle dietro nei calcoli, nei quali all'ultimo devono venire di per sè stesse a sparire. Queste considerazioni costituiscono un principio di applicazione costante nelle matematiche che si enuncia semplicemente così, in modo non preciso, ma ormai consacrato dall'uso: *Gli infinitesimi di ordine superiore spariscono di fronte a quelli di ordine inferiore.*

12. — A questo principio poi si aggiunge l'altro che risulta dalle considerazioni seguenti.

Quando con un processo qualunque si sia trovato che due quantità A e B finite o fisse (cioè che non variano al successivo impiccolire degli infinitesimi che si considerano) se pur differiscono fra loro, differiscono soltanto per una quantità infinitesima, per modo cioè che si abbia $A - B = \alpha$, essendo α una quantità nulla o infinitesima, allora evidentemente (osservando che α quando fosse diversa da 0, potrebbe sempre supporsi ridotta minore di qualunque quantità data, mentre d'altra parte $A - B$ ha un valore determinato e fisso perchè tali sono A e B) è forza concludere che il valore $A - B$ non può essere differente da zero, ma deve essere uguale a zero, e perciò fra A e B non esiste differenza alcuna e si ha $A = B$.

Questo fa sì che quando in una eguaglianza compariscono quantità fisse e quantità infinitesime per modo che essa si riduca alla forma $A + \alpha = B + \beta$, ove α e β sono quantità infinitesime, e A e B sono quantità fisse, tanto che questa eguaglianza sia perfettamente rigorosa, quanto che (essendo stata dedotta da una eguaglianza non del tutto rigorosa fra infinitesimi come quelle che nel paragrafo precedente dicemmo essere spesso considerate) essa fuori del limite non sia rigorosa altro che all'infuori di quantità infinitesime di dati ordini, se ne dedurrà sempre l'eguaglianza perfettamente rigorosa $A = B$ fra le quantità fisse A e B.

Questo equivale a dire che, nell'uguaglianza data, le quantità infinitesime possono in questi casi venire tralasciate, stabilendo una equazione fra le sole quantità fisse; e ciò senza togliere all'eguaglianza il suo rigore se tal rigore vi era, e anzi introducendolo con ciò in tutta la sua pienezza quando, per operazioni del genere di quella indicata nel paragrafo precedente, il rigore stesso fosse stato in parte perduto. Ciò si enuncia spesso col dire che *gli infinitesimi spariscono di fronte alle quantità finite* (quantità fisse); però si deve notare che anche questo è soltanto un modo di dire puramente convenzionale, perchè in questo caso non è già che le quantità infinitesime, che compariscono nella primitiva eguaglianza, si facciano sparire noi per comodo di calcolo o per altra ragione, ma è invece che queste quantità infinitesime (quando siano introdotte nuovamente anche quelle che potessero essere necessarie a ristabilire il rigore nella primitiva eguaglianza e che coi processi del paragrafo precedente fossero state originariamente soppresse) vengono a sparire da per sè identicamente e indipendentemente dalle quantità fisse; e ciò per la ragione che, a calcoli eseguiti, si troverebbe che

nella equazione vengono ad esistere nei due membri le stesse quantità infinitesime, le quali possono di conseguenza sopprimersi senza veruno inconveniente, o queste quantità infinitesime si trovano tutte in un membro e si distruggono fra loro identicamente, restando sempre con ciò una eguaglianza perfettamente rigorosa soltanto fra le quantità fisse che comparivano nella uguaglianza primitiva.

13. — È utile ora fare anche osservare che se si ha una eguaglianza nella quale compariscono varie potenze positive di uno stesso infinitesimo α in numero finito, come p. es. la seguente

$$(1) \qquad A_1 \alpha^{s_1} + A_2 \alpha^{s_2} + \ldots\ldots + A_p \alpha^{s_p} = B_1 \alpha^{s_1} + B_2 \alpha^{s_2} + \ldots\ldots + B_p \alpha^{s_p},$$

ove p è finito, $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_p, B_1, B_2 \ldots\ldots B_p$ sono quantità fisse, e si ha p. es. $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots\ldots < s_p$, allora tanto che questa eguaglianza sia stata già dimostrata perfettamente rigorosa, quanto che vi sia qualche dubbio per essere state soppresse alcune quantità infinitesime di ordine superiore ad α^{s_p}, per modo cioè che essa possa dirsi dimostrata vera soltanto all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore ad α^{s_p}, dico che *si dovrà sempre avere* $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2, \ldots\ldots, A_p = B_p$, *cioè i coefficienti delle stesse potenze di* α *dovranno uguagliarsi.*

Si osservi infatti che, dividendo per α^{s_1} (*), si ottiene l'eguaglianza

$$A_1 + A_2 \alpha^{s_2 - s_1} + A_3 \alpha^{s_3 - s_1} + \ldots + A_p \alpha^{s_p - s_1} = B_1 + B_2 \alpha^{s_2 - s_1} + B_3 \alpha^{s_3 - s_1} + \ldots + B_p \alpha^{s_p - s_1},$$

che deve sussistere come la precedente in modo pienamente rigoroso, o soltanto all'infuori di infinitesimi di ordine superiore ad $\alpha^{s_p - s_1}$, quindi per quanto si è detto nel paragrafo precedente, si conclude subito intanto che sarà $A_1 = B_1$.

Sopprimendo ora nella eguaglianza precedente (1) nel primo membro il termine $A_1 \alpha^{s_1}$, e nel secondo il termine uguale $B_1 \alpha^{s_1}$, si giunge ad una eguaglianza dello stesso genere

$$A_2 \alpha^{s_2} + A_3 \alpha^{s_3} + \ldots + A_p \alpha^{s_p} = B_2 \alpha^{s_2} + B_3 \alpha^{s_3} + \ldots + B_p \alpha^{s_p},$$

(*) La divisione per α^{s_1} può farsi solo quando α non sia zero. Conseguentemente se α fosse uno di quegli infinitesimi che passano continuamente per zero mentre tendono al limite, la divisione per α^{s_1} s'intenderà fatta solo pei valori di α diversi da zero; e questa circostanza non porta affatto restrizioni nel teorema.

la quale darà al modo stesso $A_2 = B_2$; quindi evidentemente si troverà successivamente $A_3 = B_3$, $A_4 = B_4$, ..., $A_p = B_p$, come abbiamo detto sopra.

In particolare dunque si può dire che se si avrà

$$A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_n \alpha^n = B_1 \alpha + B_2 \alpha^2 + \ldots\ldots + B_n \alpha^n ,$$

dovrà essere $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$, ..., $A_n = B_n$.

Più generalmente poi, quando α_1, α_2 ...... α_n siano n infinitesimi in numero finito e di ordini differenti fra loro, per modo che p. es. l'ordine di α_2 sia superiore a quello di α_1, quello di α_3 sia superiore a quello di α_2 ecc., allora, se sarà stata dimostrata con tutto il rigore, o tranne tutto al più all'infuori di infinitesimi di ordine superiore ad α_n, la eguaglianza

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + A_n \alpha_n = B_1 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + B_n \alpha_n ,$$

seguendo lo stesso processo che abbiamo tenuto sopra si dimostrerà che $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$ .... $A_n = B_n$.

E così in particolare quando, invece dell'eguaglianza precedente, si abbia l'altra più semplice

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots\ldots + A_n \alpha_n = 0 ,$$

e si sappia al solito che essa sussiste rigorosamente, o anche si sappia soltanto che essa è stata dimostrata all'infuori di infinitesimi di ordine superiore ad α_n, si potrà subito asserire che $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \ldots\ldots = A_n = 0$.

14. — Sugli infiniti noi potremmo fare considerazioni del tutto simili a quelle che abbiamo fatte per gli infinitesimi. Qui però ci limiteremo a parlare degli ordini di infinito; e supponendo perciò che α sia una quantità che diviene infinita in modo che pur avendosi $\lim \alpha = \pm \infty$, fuori del limite sia sempre finita, e rappresentando con β un'altra quantità che diviene infinita essa pure nel senso indicato al paragrafo primo, ma senza escludere per essa che possa avere valori infiniti anche fuori del limite, si dirà

1.° che β diviene infinita dello stesso ordine di α quando $\frac{\beta}{\alpha}$ ha un limite determinato e finito e differente da zero.

2.° che β diviene infinita di ordine inferiore ad α quando il limite di $\frac{\beta}{\alpha}$ è zero.

3.° che β diviene infinita di ordine superiore ad α quando il limite di $\frac{\beta}{\alpha}$ è $\pm \infty$.

E nel caso che $\frac{\beta}{\alpha}$ non abbia un limite determinato (finito o infinito) si dirà ancora che β diviene infinito dello stesso ordine di α quando il valore assoluto del rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ si mantenga sempre discosto da zero più di un certo numero e si mantenga inferiore a un numero finito; come si dirà che β diviene infinito di ordine non minore di α quando il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ mantenendosi ancora numericamente discosto da zero più di un certo numero finito, prenderà anche valori assoluti maggiori di qualunque numero dato; e si dirà che β diviene infinito di ordine non maggiore di quello di α quando lo stesso rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$, mantenendosi sempre numericamente inferiore a un numero finito, in valore assoluto si avvicinerà quanto si vuole allo zero o passerà per zero. E nel caso infine che il rapporto $\frac{\beta}{\alpha}$ in valore assoluto si accosti anche quanto si vuole a zero o passi per zero, e nello stesso tempo possa anche prendere valori maggiori di qualunque numero dato, non si potranno propriamente paragonare gli ordini di infinito di β e di α.

15. — Questi ultimi casi però nei quali $\frac{\beta}{\alpha}$ non ha un limite determinato (finito o infinito) saranno da noi sempre lasciati da parte finchè non si avverta espressamente il contrario; talchè nei casi che noi considereremo ordinariamente, gli infiniti β dello stesso ordine di α verranno ad essere tutti compresi nella formula $\beta = \alpha(k + \varepsilon)$, ove k è una quantità determinata e finita e diversa da zero, ed ε è nullo o è un infinitesimo, o nell'altra

$$\beta = \alpha k + \alpha \varepsilon = \alpha k + \beta_1 ,$$

ove β_1, se è un infinito, è di ordine inferiore ad α.

Quando poi α si consideri come infinito principale del primo ordine, e α^n, con n positivo ma qualunque, si dica un infinito dell'ordine n, la forma generale degl'infiniti β di ordine n verrà data dalla formola

$$\beta = \alpha^n k_n + \beta_1 ,$$

ove β_1, se è un infinito, è di ordine inferiore ad n, e k_n è una quantità determinata, finita e diversa da zero.

Siccome poi, se α è un infinito, $\frac{1}{\alpha}$ è un infinitesimo, si può dire anche evidentemente che gl'infinitesimi corrispondono a infiniti di ordine negativo, e viceversa; talchè le teorie degl' infiniti e degl' infinitesimi possono, quando si voglia, riunirsi in una sola.

S'intende che si suppone qui, come già del resto abbiamo detto al principio del § 14 [pag. 14], che l'infinito α che deve servire di termine di confronto a cui gli altri si riferiscono, sia di quelli che, pur avendo per limite $\pm\infty$, fuori del limite hanno sempre valori finiti; al modo stesso che, trattandosi degl' infinitesimi, si supponeva sempre che l'infinitesimo, cui ci si riferiva come termine di confronto, fosse di quelli che pur avendo per limite zero, fuori del limite sono sempre diversi da zero.

16. — Aggiungiamo infine che, supponendo che gl' infinitesimi e gl' infiniti di una data quantità y si prendano al limite per $x=a$ a destra o a sinistra, per es. a destra, e prendendo $x-a$ come *infinitesimo di primo ordine*, e $\frac{1}{x-a}$ come *infinito di primo ordine*, si potrà dire che y per $x=a+0$ diverrà *infinitesimo di ordine* n, quando si avrà $\lim \frac{y}{(x-a)^n} =$ quantità finita diversa da zero; mentre diverrà invece *infinito dell' ordine* n quando si avrà $\lim y\,(x-a)^n =$ quantità finita diversa da zero.

E se sarà $\lim \frac{y}{(x-a)^n}=0$, y sarà *infinitesimo di ordine superiore ad* n; mentre se sarà $\lim \frac{y}{(x-a)^n}=\pm\infty$, y sarà *infinitesimo di ordine inferiore ad* n; come se sarà $\lim y\,(x-a)^n=\pm\infty$, y sarà *infinito di ordine superiore ad* n; mentre se sarà $\lim y\,(x-a)^n=0$, y sarà *infinito di ordine inferiore ad* n.

Invece se gl' infinitesimi e gl' infiniti di y si considerano per $x=\pm\infty$, per esempio, per $x=+\infty$, e $\frac{1}{x}$ e x si prendono respettivamente per *infinitesimi* o *infiniti* di *prim' ordine*, allora y, per $x=\infty$, sarà *infinitesimo di ordine* n, o di *ordine superiore*, o di *ordine inferiore* quando si abbia respettivamente o $\lim \frac{y}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \lim yx^n =$ quantità finita diversa da zero, o $\lim yx^n=0$, o $\lim yx^n=\pm\infty$; mentre y *sarà infinito dell' ordine* n, o di *ordine superiore*, o di *ordine inferiore* quando si abbia respettivamente o $\lim \frac{y}{x^n} =$ quantità finita diversa da zero, o $\lim \frac{y}{x^n}=\pm\infty$, o $\lim \frac{y}{x^n}=0$.

S'intende che qui pure escludiamo i casi in cui le quantità di cui si deve prendere il limite non hanno un limite determinato, finito o infinito.

II.

Derivate di una funzione

17. — Sia $f(x)$ una funzione che in un punto a dell' intervallo (α, β) in cui si considera è finita e continua (*).

Se a è un punto *interno* a questo intervallo (α, β), si chiama derivata di questa funzione nello stesso punto a il limite del rapporto $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ dell' accrescimento (positivo o negativo) $f(a+h)-f(a)$ della funzione all' accrescimento h della variabile, preso questo limite per h tendente a zero tanto per valori positivi quanto per valori negativi, e nell' ipotesi che esso sia determinato, finito e indipendente dal segno di h.

Quando poi questo limite sia infinito, essendo determinato o no di segno, si usa ancora talvolta di considerarlo, dicendo però allora espressamente che la derivata di $f(x)$ nel punto corrispondente a è infinita; ma fuori di questi casi conviene dire che la derivata della funzione $f(x)$ nel punto a non esiste o è indeterminata.

18. — Stando dunque all' ordinario concetto di derivata, s' intende sempre che il limite del rapporto $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ si prende tanto per $h=+0$ quanto per $h=-0$; e considerando così nello stesso tempo il limite per $h=+0$ e quello per $h=-0$, per l'esistenza della derivata medesima si esige che questi limiti siano entrambi determinati e finiti e uguali fra loro, o eccezionalmente siano entrambi infiniti.

(*) Per la definizione delle funzioni, come per quelle relative alla continuità, alla discontinuità, ai limiti superiori, inferiori ecc., non che per le proprietà generali delle funzioni continue ecc., io intendo sempre di riferirmi a quanto trovasi detto in proposito nei primi capitoli del mio libro: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

In questi ultimi tempi però (*) si è dovuto riconoscere, che, almeno quando si devono fare studi che abbiano la maggiore generalità possibile conviene tenere separate le considerazioni relative al rapporto $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per valori positivi di h, da quelle relative allo stesso rapporto per valori negativi di h.

E designando allora in generale col nome di *rapporto incrementale* l'espressione $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quando il segno di h non è fissato, per distinguere il caso in cui h è positivo da quello in cui h è negativo, si è stabilito di chiamare *rapporto incrementale destro* il valore di questo rapporto corrispondente ai valori positivi di h, e *rapporto incrementale sinistro* quello corrispondente ai valori negativi di h.

Riservando poi ancora il nome semplicemente di *derivata* o quello di *derivata ordinaria* al limite del rapporto incrementale quando questo limite si suppone determinato ed è lo stesso qualunque sia il segno di h, si è convenuto di chiamare *derivata nel punto a a destra* il limite del rapporto incrementale destro $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ per h tendente a zero per valori positivi quando questo limite è determinato (finito o infinito); e si è convenuto di chiamare *derivata nel punto a a sinistra* il limite del rapporto incrementale sinistro che, con $h>0$, possiamo indicare con $\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$, preso ancora questo limite per h tendente a zero per valori positivi, e nell'ipotesi che esso sia determinato; talchè con questa distinzione la derivata ordinaria, oltre a mancare nei punti nei quali manca almeno una delle due derivate, mancherà anche nel caso in cui, pure esistendo ambedue queste derivate, esse non sono uguali fra loro; mentre la stessa derivata ordinaria esisterà sempre, e avrà un valore determinato e finito uguale al valore comune delle derivate a destra e a sinistra, nei punti nei quali queste due derivate esistono e hanno uno stesso valore finito; e se il punto a sarà un estremo dell'intervallo (α, β), la derivata che si potrà avere in quel punto non sarà mai una vera e propria derivata ordinaria nel senso stabilito nel paragrafo precedente, per quanto verrà da noi ciò non ostante riguardata come tale; ma sarà soltanto una derivata a destra o una derivata a sinistra nell'estremo considerato.

(*) Non si deve dimenticare che queste lezioni sono la riproduzione pura e semplice per le stampe di quelle da me svolte nella Università di Pisa e autografate nel 1877; e allora le considerazioni che qui si fanno intorno alle derivate avevano un assoluto carattere di novità, ed erano quindi naturali le locuzioni « *negli ultimi tempi ecc.* », ed altre simili che qua e là incontreremo, e che non avrei più introdotte ora se avessi voluto fare una pubblicazione del tutto nuova.

19. — Pel caso poi dei punti a nei quali le derivate a destra o a sinistra sono infinite, gioverà far subito la osservazione seguente.

Quando in un punto a si vuol considerare la derivata a destra o a sinistra di una funzione $f(x)$, non volendo fin da principio disporre le cose in modo che la derivata stessa abbia poi necessariamente ad essere infinita, conviene supporre che la funzione data $f(x)$, almeno dalla parte corrispondente, sia finita e continua, qualunque essa sia del resto rispetto alla continuità nei punti vicini. Ma quando queste derivate (come il più spesso si fa) devono essere considerate in ogni punto di un dato intervallo, volendo allora che, fatta tutt'al più eccezione per un numero finito di punti, il caso ordinario, *almeno per quanto poi sarà possibile*, sia quello delle derivate a destra e a sinistra sempre determinate e finite, conviene allora porre fin da principio, come condizione necessaria, la condizione che la funzione data $f(x)$ sia finita e continua *almeno generalmente* (*), per modo cioè che, esclusi soltanto un numero finito di punti mediante loro intorni arbitrariamente piccoli, negl'intervalli restanti (i quali saranno allora in numero finito) sia sempre finita e continua.

Ponendo dunque d'ora innanzi questa restrizione, potremo supporre che l'intervallo (α, β) nel quale $f(x)$ si considera sia di quelli nei quali essa è sempre finita e continua; e allora uno qualunque dei suoi rapporti incrementali relativi al punto a, per esempio, quello destro $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, considerato per tutti i valori di h che cadono in un intervallo arbitrariamente piccolo (δ, ε), $(0<\delta<\varepsilon)$ che non racchiude il punto $h=0$, sarà pure continuo, e quindi non potrà passare da valori grandissimi positivi a valori grandissimi negativi senza passare per tutti quanti i valori intermedî; talchè quando ciò avvenisse, il limite dello stesso rapporto per $h=+0$ sarebbe evidentemente indeterminato.

Questo ci mostra che la restrizione posta nella funzione $f(x)$ porta di necessità che le sue derivate a destra dei singoli punti x fra α e β siano sempre *determinate* e *finite*, o siano *infinite* e *determinate di segno*, o siano del tutto *indeterminate;* e lo stesso accade delle derivate a sinistra; quindi in particolare si può dire che se la derivata ordinaria della stessa funzione $f(x)$ in un punto a sarà infinita, allora o avverrà che essa sia determinata di segno, essendo, per esempio, $+\infty$, e in tal caso sì la derivata a destra

(*) Notiamo esplicitamente che ora e in seguito si dirà che una funzione in un dato intervallo soddisfa a certe condizioni o ha certe date proprietà soltanto *in generale* o *generalmente,* quando, eccettuato soltanto un numero *finito* di punti isolati nello stesso intervallo, in tutti gli altri soddisfa a quelle date condizioni, e ha quelle date proprietà.

che quella a sinistra sarà eguale a $+\infty$; o avverrà che la stessa derivata sia infinita e indeterminata di segno, e allora una delle sue derivate a destra o a sinistra sarà sempre eguale a $+\infty$, e l'altra sarà eguale a $-\infty$.

Ciò equivale a dire che l'essere in un punto a infinita e indeterminata di segno la derivata ordinaria di una funzione $f(x)$ corrisponde ad una vera e propria indeterminazione della derivata stessa nel senso che il limite del rapporto incrementale corrispondente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ non è indipendente dal segno che si dà ad h; mentre l'essere la stessa derivata infinita e determinata di segno corrisponde a un caso limite di piena determinazione della derivata, nel senso che il rapporto incrementale ha un limite indipendente dal segno di h, e solo questo limite è $+\infty$, o è $-\infty$; e noi perciò, trovando opportuno di non distinguere sempre in ciò che segue quest'ultimo caso da quello in cui la derivata di $f(x)$ è determinata e finita, dichiariamo esplicitamente che quando diremo, per esempio, che — *una funzione* $f(x)$ *in un punto* a *ha una derivata determinata* — intenderemo di includere tanto il caso in cui questa derivata è determinata e finita, quanto quello in cui è infinita e determinata di segno, riserbandoci poi di aggiungere alle parole — *derivata determinata* — anche la parola — *finita* — quando si voglia escludere il caso che questa derivata sia infinita; e riservandoci pure di dire derivata — *infinita e indeterminata di segno* — in quei casi in cui occorra di riguardare come distinti dai punti d'indeterminazione della derivata quei punti speciali nei quali essa è infinita in modo che la derivata a destra sia, per esempio, $+\infty$ e quella a sinistra sia $-\infty$.

E aggiungerò esplicitamente, a scanso pure di equivoci, che s'intende subito che nei punti estremi dell'intervallo (α, β) nei quali, come già abbiamo detto, figura da derivata ordinaria soltanto la derivata a destra o quella a sinistra, questa derivata, se è infinita sarà sempre determinata di segno, talchè essa non potrà figurare altro che fra le derivate determinate, o non esistere affatto.

20. — Gli studi che noi dobbiamo fare in queste lezioni non possono estendersi alla considerazione delle derivate a destra o di quelle a sinistra delle funzioni $f(x)$ finite e continue in tutto un intervallo (α, β), ma vengono limitati ai casi in cui esiste la *derivata ordinaria,* che noi d'ora innanzi distingueremo col semplice nome di « *derivata* » rappresentandola colla notazione $f'(x)$.

Rispetto ora alla esistenza di questa derivata, ricorderemo che (come già dicemmo nei paragrafi 17 e 18 [pag. 17 e seg.]) la derivata stessa deve riguardarsi come non esistente non solo in quei punti a nei quali uno almeno dei due

rapporti incrementali, destro e sinistro, non ha un limite determinato, ma anche per quelli nei quali gli stessi rapporti hanno un limite determinato che però non è lo stesso per tutti e due; ed è per questo che, coi concetti che ora abbiamo sui limiti, il primo pensiero che ci si affaccia alla mente è quello che, almeno finchè si conserva al concetto di funzione finita e continua tutta la sua generalità, abbiano anche ad esistere infinite funzioni che, pur essendo finite e continue in tutto un intervallo (α, β), mancano ciò non ostante di derivata in infiniti punti dell'intervallo stesso (α, β), e anche in ogni punto.

Invece, per le funzioni finite e continue in tutto un intervallo, la esistenza almeno *in generale* di una derivata non solo determinata ma anche finita pei varii punti dell'intervallo stesso, fu ammessa quasi fino agli ultimi tempi senza dar luogo a veruna obiezione, ritenendola come sufficientemente dimostrata da poche considerazioni intorno alle tangenti alle curve che si ammetteva che rappresentassero geometricamente la funzione data; senza che neppure mai si sospettasse che potessero esistere anche funzioni continue per le quali era impossibile una rappresentazione geometrica per mezzo delle ordinarie curve dotate di tangente determinata; e senza che neppure si sospettasse che ammettere l'esistenza della tangente alla curva rappresentativa che si adoprava per rappresentare la funzione, era precisamente lo stesso che ammettere la esistenza della derivata della funzione medesima.

Ampère però fino dal 1806 tentò pel primo di dimostrare analiticamente la esistenza di questa derivata; ma la dimostrazione che egli tentò di darne, oltrechè (per quanto egli non lo dica esplicitamente) sarebbe limitata alle funzioni finite e continue che nell'intervallo finito nel quale si considerano presentano soltanto un numero finito di oscillazioni (*), non può dirsi, neppure per questo caso speciale, una dimostrazione della esistenza della derivata.

Ampère infatti si limiterebbe tutt'al più a mostrare che se una tale funzione nell'intervallo nel quale si considera è sempre finita e non è costante, la sua derivata non può essere sempre zero o sempre infinita, ritenendo poter poi da questo solo dato concluderne che la derivata deve essere sempre determinata e finita almeno in generale; senza pensare che il trarre in questa guisa le sue conclusioni equivaleva appunto ad ammettere l'esistenza della derivata, poichè con ciò egli veniva appunto a passar sopra al caso che principalmente era necessario di escludere, quello cioè della mancanza del limite di $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per h tendente a zero per valori positivi o per valori negativi.

(*) Ai tempi di Ampère alle funzioni che in un intervallo finito presentano un numero infinito di oscillazioni non si era minimamente pensato, e quindi non c'è da meravigliarsi che Egli non vi accennasse affatto nel suo teorema.

Si aggiunge poi che un accurato esame della dimostrazione di Ampère mostra che i suoi ragionamenti neppure conducono alla conclusione che la derivata di una funzione, come quella indicata sopra, non può essere sempre zero o sempre infinita.

Riducendoli infatti rigorosi, si riscontra che essi si riferiscono soltanto alle derivate p. es. a destra, considerate separatamente da quelle a sinistra; e indipendentemente da questo essi permetterebbero solo di concludere che se avvenisse che la derivata di una funzione, che in tutto un intervallo è continua, e non è mai crescente o non è mai decrescente, fosse sempre zero o sempre infinita, la funzione stessa sarebbe una costante o sarebbe infinita, o per ogni valore di σ, arbitrariamente piccolo nel 1° caso e arbitrariamente grande nel 2°, non esisterebbe un numero positivo e differente da zero ε tale che per tutti i valori di h numericamente inferiori a ε, e per tutti i valori di x nell'intervallo stesso, si avesse sempre rispettivamente, in valore assoluto $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<\sigma$, o $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>\sigma$; e questo è lungi dal porre in evidenza una contradizione, e non ci dà affatto le conclusioni indicate sopra.

Dopo il tentativo fatto da Ampère per dimostrare l'esistenza della derivata, nessun'altra dimostrazione è stata data che in sostanza non presenti tutti o alcuni degli inconvenienti che si riscontrano in quella di Ampère; e in alcuni trattati di calcolo si è anche continuato a valersi per questa dimostrazione delle solite considerazioni, prive di ogni rigore, intorno alle tangenti della curva rappresentativa di $f(x)$; talchè, nonostante le varie dimostrazioni che varî geometri tentarono di darne, l'esistenza, anche in generale, di una derivata per le funzioni che sono finite e continue in tutto un intervallo fu sempre ben lungi dall'essere pienamente assicurata.

Gli ultimi studi hanno ormai posto in chiaro che non poteva avvenire altrimenti; e che qualunque dimostrazione si fosse tentato di dare della esistenza della derivata, essa doveva necessariamente resultare affetta da qualche errore.

Si conoscono ora infatti anche infinite funzioni che, sebbene siano finite e continue in tutto un intervallo dato, non presentino oscillazioni e abbiano anche espressioni analitiche (per serie) non molto complicate, pur nonostante mancano della derivata in un numero infinito di punti di qualsiasi porzione anche ristrettissima dello stesso intervallo; e altre anche se ne conoscono, finite pure e continue, e dotate di una espressione analitica assai semplice, che non hanno *mai* una derivata determinata e finita; quindi oltre a potersi ormai ritenere come indubitato che è impossibile dimostrare l'esistenza di una derivata determinata e finita per ogni funzione finita e continua, si può ritenere come assicurato altresì che la mancanza della derivata in alcune funzioni finite e continue non può attribuirsi ad una troppo grande generalità introdotta nel concetto di funzione, poichè tale mancanza si riscontra anche in alcune classi di funzioni analitiche assai semplici; come si può dire inoltre che, mentre la condizione della continuità di una funzione finita in tutto un intervallo dato è condizione necessaria per l'esistenza di una derivata determinata e finita in ogni punto dello stesso intervallo, essa non è però condizione sufficiente per l'esistenza, neppure soltanto in generale, della derivata medesima; e onde questa derivata esista, anche soltanto in generale, bisogna che, oltre ad essere continua, la funzione soddisfi anche ad altre condizioni speciali.

La ricerca di queste condizioni è uno dei soggetti di studio dell'Analisi moderna, ma questi studî sono ancora ben lungi dall'essere completi e anche dall'essere molto avanzati.

Noi poi non possiamo neppure esporre ciò che è stato fatto fin qui in questo indirizzo; solo diremo che per tali studî sembra non basti limitarsi a considerare la funzione finita e continua data $f(x)$, ma bisogna al tempo stesso considerare le infinite funzioni $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ che si ottengono da lei togliendovi (o aggiungendovi) le infinite funzioni di 1° grado $\mu x+\nu$, e bisogna considerare separatamente, almeno in principio, le derivate a destra da quelle a sinistra; talchè sembra anche che le sole considerazioni che si erano fatte finora per dimostrare l'esistenza in generale della derivata, non bastano neppure per trovare delle classi generali di funzioni finite e continue per le quali, indipendentemente dalla loro espressione analitica particolare, si può esser certi dell'esistenza della loro derivata, o per trovare delle condizioni semplici e al tempo stesso generali sotto le quali questa derivata esiste [*].

21. — Per le funzioni alle quali il calcolo differenziale deve applicarsi, l'esistenza, almeno in generale, di una derivata determinata, e il più spesso anche finita, è sempre necessaria; talchè, finchè non si conoscono le condizioni ora indicate, bisognerà d'ora innanzi, per le funzioni da considerarsi, porre sempre esplicitamente la condizione della esistenza di una derivata determinata.

Il calcolo differenziale viene così ad essere più limitato di quello che si era creduto finora, ma non cessa per questo di essere la parte principale delle matematiche superiori, sia perchè esso è il più potente strumento di calcolo che finora si abbia, sia perchè mentre si è trovato che esistono funzioni analitiche assai semplici che mancano di derivata determinata anche in tutti i punti di un dato intervallo, non è però men vero che finora queste funzioni

(*) Vedasi per questo il mio libro ricordato sopra *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.*

appariscono soltanto nel dominio della Analisi astratta, mentre quelle che fin qui si sono presentate nelle applicazioni sono tutte funzioni per le quali l'esistenza, in generale, di una derivata determinata e finita è fuori di ogni dubbio, potendo per esse questa derivata effettivamente trovarsi.

D'altra parte poi, ove un giorno avvenisse (come pur forse è probabile) che si trovasse opportuno di considerare nelle applicazioni anche funzioni finite e continue prive di derivata, e ciò senza avere al tempo stesso un metodo di calcolo da sostituirsi in quei casi al calcolo differenziale, noi saremmo immediatamente arrestati nella trattazione della maggior parte dei problemi relativi, e dovremmo quindi tornare a limitarci a quelle applicazioni nelle quali l'esistenza della derivata è sempre ammissibile; talchè nonostante le limitazioni che pure è necessario introdurre nel calcolo differenziale, le quali del resto hanno il vantaggio di renderlo semplice e chiaro e perfettamente rigoroso, la sua importanza resta ancora grandissima.

Noi dunque ammettendo sempre d'ora innanzi, esplicitamente o sottinteso, salvo quando si avverta espressamente il contrario, che le funzioni $f(x)$ che dovremo considerare in un dato intervallo, oltre essere finite e continue, abbiano sempre una derivata determinata, almeno in generale, passeremo ad esporre i principî fondamentali del calcolo differenziale con quella maggior generalità che essi hanno attualmente; e cominceremo perciò coll'occuparci in modo speciale delle derivate delle funzioni.

Derivate di alcune funzioni semplici.

22. — Premettiamo che, dalla definizione stessa della derivata risulta immediatamente che *la derivata di una funzione che in tutto un intervallo ha uno stesso valore finito (cioè la derivata di una costante) è zero in tutto l'intervallo;* e passiamo a cercare la derivata della funzione x^m, ove si suppone che m sia un numero reale qualunque, tale però che, pel valore che si considera di x, x^m abbia anche un valore reale e non abbia un valore infinito (cioè m negativo escluso quando $x=0$, ecc.).

Posto perciò $f(x)=x^m$, e supposto dapprima che x sia differente da zero, si osserverà che

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=x^m\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m-1}{h}=x^{m-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m-1}{\frac{h}{x}},$$

e ponendo $\frac{h}{x}=\alpha$, e ricordando che qualunque sia il segno di α si ha dall'algebra

$\lim\limits_{\alpha=0}\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}=m$, si troverà subito che $\lim\limits_{h=\pm 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m\,x^{m-1}$; talchè indicando per ora in generale anche con $\mathrm{D}f(x)$ la derivata di $f(x)$, si concluderà intanto che, per x diverso da zero, la derivata di x^m è data dalla formola

$$\mathrm{D}\,x^m=m\,x^{m-1}. \tag{1}$$

Per $x=0$ poi, osservando che per $m>0$ si ha

$$[\mathrm{D}\,x^m]_{x=0}=\lim\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim h^{m-1},$$

si vede subito che per $m>1$ la derivata di x^m nel punto $x=0$ è nulla, e per m compreso fra zero ed uno (0 e 1 escl.) questa derivata è infinita, mentre per $m=1$ è uguale all'unità; quindi osservando che gli stessi resultati si hanno evidentemente per $x=0$ anche dalla formola generale (1), e questa formola, a causa dell'osservazione fatta in principio di questo paragrafo, può considerarsi come giusta anche per $m=0$, si conclude che, facendo eccezione pel punto $x=0$ quando m è negativo, e intendendo di parlare soltanto di derivata a destra per $x=0$ quando per x negativo x^m sia immaginario, la formola (1) può riguardarsi come giusta in tutti i casi.

E s'intende che se x è positivo, nell'applicare la formola (1) bisogna aver riguardo ai due valori reali che talvolta hanno x^m e x^{m-1}, dovendo in questi casi prendere per tutte e due queste quantità il valore positivo, o prendere per tutte e due il valore negativo.

Supponendo in particolare $m=\frac{p}{q}$, si ha dalla (1)

$$\mathrm{D}\sqrt[q]{x^p}=\frac{p}{q}\sqrt[q]{x^{p-q}},$$

e per $m=\frac{1}{2}$ si ha

$$\mathrm{D}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

talchè si vede che nella derivazione dei radicali, questi radicali continuano a comparire nella derivata collo stesso indice, ecc.

23. — Passiamo ora a trovare le derivate delle funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$.

Poniamo perciò in primo luogo $f(x)=\operatorname{sen} x$; si troverà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

e quindi passando al limite si otterrà subito

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{D}\operatorname{sen}x=\cos x\,.$$

Ponendo poi $f(x)=\cos x$, si troverà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

e quindi al limite si avrà

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{D}\cos x=-\operatorname{sen}x\,.$$

Posto poi $f(x)=\operatorname{tg}x$, per x diverso dai multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$ si troverà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}x}{h}=\frac{\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}h}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}h}-\operatorname{tg}x}{h}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}h}{h}\,\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}h}=\frac{\operatorname{tg}h}{h}\,\frac{1}{\cos^2x}\,\frac{1}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}h},$$

e quindi al limite si avrà

$$\text{(4)}\qquad \mathrm{D}\operatorname{tang}x=\frac{1}{\cos^2x}\,.$$

Similmente ponendo $f(x)=\cot x$, per x diverso dai multipli di π si troverà

$$\text{(5)}\qquad \mathrm{D}\cot x=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}\,.$$

24. — Vogliansi ora le derivate delle funzioni iperboliche $\operatorname{senh}x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh}x$, $\coth x$.

Posto perciò $f(x)=\operatorname{senh}x$, si osserverà che

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{\operatorname{senh}(x+\delta)-\operatorname{senh}x}{\delta};$$

e siccome dalla formola

$$\operatorname{senh}p-\operatorname{senh}q=2\operatorname{senh}\frac{p-q}{2}\cosh\frac{p+q}{2},$$

si trae subito che

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{\operatorname{senh}\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\cosh\left(x+\frac{\delta}{2}\right),$$

passando al limite per $\delta=\pm 0$, e osservando che

$$\lim\frac{\operatorname{senh}\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}=1\,,\ \text{ e }\ \lim\cosh\left(x+\frac{\delta}{2}\right)=\cosh x\,,$$

si troverà

$$\text{(6)}\qquad \mathrm{D}\operatorname{senh}x=\cosh x\,.$$

In modo simile si troverebbe

$$\text{(7)}\qquad \mathrm{D}\cosh x=\operatorname{senh}x\,,$$

$$\text{(8)}\qquad \mathrm{D}\operatorname{tgh}x=\frac{1}{\cosh^2x}\,,$$

$$\text{(9)}\qquad \mathrm{D}\coth x=-\frac{1}{\operatorname{senh}^2x}\,;$$

quest'ultima però soltanto nell'ipotesi di x diverso da zero.

25. — Vogliasi ora la derivata di $\log x$, essendo i logaritmi neperiani, o a base e, con $e=\lim\limits_{p=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$, e essendo x diverso da zero e positivo.

Per questo si osserverà che per x diverso da zero e positivo si ha

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\log x+\log\left(1+\frac{h}{x}\right)-\log x}{h}=\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\,\frac{1}{x},$$

da cui, ponendo $\frac{h}{x}=\alpha$

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}\,\frac{1}{x}=\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\,\frac{1}{x},$$

e quindi, passando al limite per $h=0$ o $\alpha=0$, qualunque sia il segno di h si ottiene

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{D} \log x = \frac{1}{x}.$$

Se i logaritmi invece di essere neperiani, avessero una base qualunque a, allora siccome si ha $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \log_e x \, \log_a e$, evidentemente sarebbe

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{D} \log_a x = \log_a e \; \mathrm{D} \log_e x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \log_e a}.$$

26. — Vogliansi ora le derivate delle esponenziali a^x e e^x. Ponendo per questo $f(x)=a^x$, si osserverà che

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \frac{a^h-1}{h},$$

e ponendo anche $a^h = 1 + \frac{1}{\alpha}$, o $h = \log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, con α crescente indefinitamente per valori positivi o negativi, si troverà

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \frac{1}{\alpha \log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{a^x}{\log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}};$$

talchè, passando al limite si otterrà

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{D}\, a^x = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \log_e a.$$

Supponendo ora in particolare $a=e$, si trova

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{D}\, e^x = e^x$$

ciò che mostra che *la derivata della esponenziale neperiana e^x è la esponenziale stessa.*

Derivate delle somme, dei prodotti e dei quozienti.

27. — Conosciute le derivate delle funzioni semplici considerate nei paragrafi precedenti, si possono facilmente determinare le derivate di funzioni analitiche ben più complicate, mediante i teoremi, che noi pure esporremo in queste lezioni, relativi alla derivazione delle somme, dei prodotti, dei quozienti, delle funzioni di funzioni, delle funzioni inverse e delle serie, e mediante quelli sulle funzioni implicite e sulle funzioni composte.

Incominceremo perciò dall'esporre i teoremi relativi alla derivazione delle somme, dei prodotti, e dei quozienti.

Teorema I. — *La derivata di una somma algebrica $f(x)$ di un numero finito di funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ che* nel punto *a nel quale si cerca la derivata di $f(x)$, oltre essere finite e continue, ammettono una derivata determinata e finita, esiste e si ottiene facendo la somma algebrica delle derivate delle stesse funzioni in quel punto.*

Infatti se si ha

$$f(x) = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots\ldots \pm \varphi_n(x),$$

sarà

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\varphi_1(a+h)-\varphi_1(a)}{h} \pm \frac{\varphi_2(a+h)-\varphi_2(a)}{h} \pm \ldots\ldots \pm \frac{\varphi_n(a+h)-\varphi_n(a)}{h},$$

e venendo ora ad esistere il limite del rapporto incrementale che figura nel primo membro, esisterà $f'(a)$, ed avremo

$$f'(a) = \varphi'_1(a) \pm \varphi'_2(a) \pm \ldots\ldots \pm \varphi'_n(a),$$

come abbiamo enunciato.

Se però il numero delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ fosse infinito, il teorema potrebbe cessare di sussistere, non essendo sempre vero che il limite di una somma algebrica, composta di un numero infinito di termini, è la somma algebrica dei varî limiti.

Si deve poi notare esplicitamente che le condizioni poste nel teorema si riferiscono *al punto speciale a* nel quale si cerca la derivata della somma algebrica $f(x)$, e pei punti fuori di a non si suppone nulla intorno alla esistenza o alla natura delle derivate delle singole funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, e neppure intorno alla continuità di queste funzioni; come si deve pure notare che se *una sola* delle funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ che compongono la somma algebrica $f(x)$ nel punto a avesse la derivata infinita o ne mancasse affatto, il processo stesso di dimostrazione testè seguito ci mostra che altrettanto accadrebbe per la somma algebrica delle funzioni medesime; mentre se due o più funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ nel punto a avessero la derivata infinita o ne mancassero affatto, in quel punto la loro somma algebrica potrebbe benissimo avere anche una derivata determinata e finita.

Il teorema dimostrato è utile evidentemente pel calcolo delle derivate di funzioni più complicate di quelle dei paragrafi precedenti.

Così, per esempio, se si avrà

$$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x + \operatorname{tang} x - \cosh x + x^3 - \sqrt[3]{x},$$

in forza del teorema dimostrato e delle formole precedenti si potrà dire subito che

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{senh} x + 3x^2 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

per x diverso da zero e dai multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$.

28. **Teorema II.** — *La derivata del prodotto $f(x)$ di un numero finito di funzioni $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$, che* nel punto *a nel quale si cerca la derivata di $f(x)$, oltre essere finite e continue, ammettono una derivata determinata e finita, esiste e si ottiene facendo la somma*

$$\varphi'_1\varphi_2\varphi_3\ldots\ldots\varphi_n + \varphi_1\varphi'_2\varphi_3\ldots\ldots\varphi_n + \varphi_1\varphi_2\varphi'_3\ldots\ldots\varphi_n + \ldots\ldots + \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\ldots\varphi_{n-1}\varphi'_n$$

dei prodotti della derivata di ciascuna funzione in quel punto moltiplicata per le altre funzioni respettivamente.

Si ha infatti

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\varphi_1(a+h)\,\varphi_2(a+h)\,\ldots\ldots\,\varphi_n(a+h) - \varphi_1(a)\,\varphi_2(a)\,\varphi_3(a)\,\ldots\ldots\,\varphi_n(a)}{h},$$

e poichè, per l'ipotesi ammessa intorno alle derivate di $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$.... $\varphi_n(x)$ nel punto a, si ha ancora

$$\frac{\varphi_1(a+h)-\varphi_1(a)}{h} = \varphi'_1(a) + \alpha_1 \quad , \quad \frac{\varphi_2(a+h)-\varphi_2(a)}{h} = \varphi'_2(a) + \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad \frac{\varphi_n(a+h)-\varphi_n(a)}{h} = \varphi'_n(a) + \alpha_n,$$

ovvero

$$\varphi_1(a+h) = \varphi_1(a) + [\varphi'_1(a) + \alpha_1]\,h \quad , \quad \varphi_2(a+h) = \varphi_2(a) + [\varphi'_2(a) + \alpha_2]\,h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \quad \varphi_n(a+h) = \varphi_n(a) + [\varphi'_n(a) + \alpha_n]\,h,$$

ove α_1, α_2, ..., α_n sono quantità nulle, o che, col tendere a zero di h, divengono infinitesime, si avrà

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\Big\{[\varphi_1+(\varphi'_1+\alpha_1)h]\,[\varphi_2+(\varphi'_2+\alpha_2)h]\ldots[\varphi_n+(\varphi'_n+\alpha_n)h] - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n\Big\},$$

ed eseguendo il prodotto si troverà

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \varphi'_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n + \varphi_1\varphi'_2\ldots\varphi_n + \ldots\ldots + \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}\varphi'_n + \Omega,$$

Ω essendo una somma di un numero finito di termini composti ciascuno di un numero finito di fattori uno dei quali almeno è uguale ad h o a una delle quantità α_1, α_2, ..., α_n, e gli altri hanno valori numericamente inferiori ad un numero finito.

Osservando dunque che, siccome le quantità α_1, α_2, ..., α_n sono in numero finito, quando h sia già sufficientemente piccolo potranno supporsi *tutte* numericamente minori di quel numero che più ci piace, si vede subito che il limite del rapporto incrementale del primo membro esisterà, ed avremo quindi

$$f'(a) = \varphi'_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_n + \varphi_1\varphi'_2\varphi_3\ldots\varphi_n + \ldots\ldots + \varphi_1\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}\varphi'_n,$$

come volevamo dimostrare.

Si deve notare che se i fattori φ_1, φ_2, ..., φ_n che compongono il prodotto $f(x)$ fossero in numero infinito, il teorema dimostrato *potrebbe* cessare di sussistere; come si può anche notare esplicitamente che nella dimostrazione non si suppone nulla intorno alla natura e alla esistenza della derivata dei fattori φ_1, φ_2, ..., φ_n, e neppure intorno alla continuità di questi fattori nei punti fuori di a, talchè in questi punti le derivate stesse potrebbero anche mancare affatto o essere infinite, e le funzioni φ_1, φ_2, ..., φ_n potrebbero anche essere discontinue, e il teorema non cesserebbe per questo di essere sempre vero pel punto a quando continuassero ad essere soddisfatte le condizioni che abbiamo poste nel suo enunciato.

Questo teorema poi insieme ai precedenti può evidentemente servire al calcolo delle derivate anche di funzioni complicatissime.

Così, p. es., avendosi

$$f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{tang} x \cosh x + e^x \operatorname{sen} x \log x,$$

si trova subito ora

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tang} x \cosh x + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}\cosh x + \sqrt{x}\operatorname{tang} x \operatorname{senh} x +$$

$$+ e^x \operatorname{sen} x \log x + e^x \cos x \log x + \frac{e^x \operatorname{sen} x}{x}.$$

29. — In particolare poi supponendo $f(x) = k\varphi(x)$, ove k è una costante e $\varphi(x)$ è una funzione che nel punto a è continua e ammette una derivata deter-

minata e finita, pel teorema precedente si trova la formola $D_a\,[k\varphi(x)] = k\varphi'(a)$, che risulta subito anche dalla definizione della derivata, e per la quale si ha che *la derivata del prodotto della funzione $\varphi(x)$ per una quantità costante k si ottiene moltiplicando questa costante per la derivata della funzione.*

Supponendo poi $f(x) = [\varphi(x)]^m$, con m intero e positivo, si trova la formola

(1) $$D_a\,[\varphi(x)]^m = m\,[\varphi(a)]^{m-1}\,\varphi'(a),$$

che dà sotto una forma semplice la derivata nel punto a della potenza intera e positiva di una funzione $\varphi(x)$ che nello stesso punto a è finita e continua e ha una derivata determinata e finita.

E così supponendo ora p. es.

$$f(x) = 3\,\mathrm{sen}^2 x + (\log x)^2\,\mathrm{tangh}\,x + \mathrm{senh}^3 x\,\cosh x,$$

si trova subito

$$f'(x) = 6\,\mathrm{sen}\,x\,\cos x + \frac{2\log x\,\mathrm{tgh}\,x}{x} + \left(\frac{\log x}{\cosh x}\right)^2 + 3\,\mathrm{senh}^2 x\,\cosh^2 x + \mathrm{senh}^4 x.$$

30. — **Teorema III.** *La derivata del quoziente $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ di due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ in un punto a, nel quale esse sono finite e continue e ammettono una derivata determinata e finita e la funzione denominatore è diversa da zero, esiste ed è data dalla formola*

$$f'(a) = \frac{\varphi'(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi'(a)}{\psi^2(a)};$$

cioè si ottiene togliendo dal prodotto della derivata del numeratore moltiplicata pel denominatore il prodotto del numeratore moltiplicato per la derivata del denominatore, e dividendo tutto pel quadrato del denominatore.

Per dimostrare rigorosamente questo teorema, osserviamo prima che, siccome nel punto a la funzione del denominatore $\psi(x)$ è al tempo stesso continua e diversa da zero, esisterà un intorno di a nel quale $\psi(x)$ sarà sempre diversa da zero, e quindi quando h sia abbastanza piccola in valore assoluto, il quoziente $\dfrac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$ avrà sempre un significato.

Così essendo, si potrà scrivere

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} - \frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\} = \frac{\varphi(a+h)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi(a+h)}{h\,\psi(a)\,\psi(a+h)};$$

quindi, osservando che per l'ipotesi ammessa intorno alla esistenza della derivata di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ nel punto a, si ha

$$\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} = \varphi'(a)+\alpha, \qquad \frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h} = \psi'(a)+\beta;$$

ovvero

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\,[\varphi'(a)+\alpha], \quad \psi(a+h) = \psi(a) + h\,[\psi'(a)+\beta],$$

con α e β nulli o infinitesimi con h, si avrà subito

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{[\varphi'(a)+\alpha]\,\psi(a) - \varphi(a)\,[\psi'(a)+\beta]}{\psi(a)\,\psi(a+h)},$$

talchè, passando al limite, coll'osservare anche che $\psi(x)$ è continua nel punto a e perciò si ha $\lim\psi(a+h) = \psi(a)$, si troverà infine

$$f'(a) = \frac{\varphi'(a)\,\psi(a) - \varphi(a)\,\psi'(a)}{\psi^2(a)},$$

come appunto volevasi dimostrare.

Anche in questo caso poi si può notare che la dimostrazione non suppone nulla intorno alla esistenza e alla natura delle derivate delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, e neppure intorno alla continuità di queste funzioni nei punti fuori di a; talchè in questi punti le derivate di queste funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ potrebbero anche mancare od essere infinite, come potrebbero anche queste funzioni stesse essere discontinue, e il teorema non cesserebbe per questo di essere vero pel punto a, quando continuassero ad essere soddisfatte tutte le condizioni che abbiamo poste nel suo enunciato.

31. — Supponendo $f(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$, sempre sotto l'ipotesi che nel punto a la funzione $\psi(x)$ sia continua e diversa da zero, e ammetta una derivata determinata e finita, il teorema dimostrato ci dà la formola semplice

(2) $$D_a\left[\frac{1}{\psi(x)}\right] = -\frac{\psi'(a)}{\psi^2(a)};$$

e supponendo invece

$$f(x) = \psi[(x)]^{-m} = \frac{1}{[\psi(x)]^m},$$

con m intero e positivo, il teorema stesso ci dà l'altra formola

$$D_a\,[\psi(x)]^{-m} = -\frac{D_a\,[\psi(x)]^m}{[\psi(a)]^{2m}} = -\frac{m\,[\psi(a)]^{m-1}\,\psi'(a)}{[\psi(a)]^{2m}},$$

ovvero

(3) $$D_a\,[\psi(x)]^{-m} = -\frac{m\,\psi'(a)}{[\psi(a)]^{m+1}} = -\,m\,[\psi(a)]^{-m-1}\,\psi'(a),$$

che comprende come caso particolare la formola (2); e ora a causa della formola (1) si vede subito di qui che la derivazione delle potenze intere e negative di una funzione $\psi(x)$ si fa colla stessa regola di quella che si ha nel caso delle potenze intere e positive, per tutti i punti a nei quali la funzione $\psi(x)$ è finita e continua e diversa da zero e ammette una derivata determinata e finita.

Merita poi di esser notato che queste formole (1), (2), (3), come i tre teoremi precedenti si estendono anche al caso in cui invece di parlare di derivate ordinarie (come noi abbiamo fatto) si parli semplicemente di derivate a destra o derivate a sinistra del punto a; e per fare questa estensione basta ripetere precisamente le dimostrazioni precedenti.

32. — Aggiungiamo che gli ultimi due teoremi, oltre a servire al calcolo delle derivate di funzioni complicatissime, possono servire anche a ritrovare quelle di alcune funzioni semplici, come apparisce dai seguenti esempi.

1.° Avendo $f(x) = \mathrm{tg}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,(x)}{\cos\,(x)}$, con l'applicazione del teorema del § 30 [pag. 32] si ritrova subito

$$\mathrm{D}\,\mathrm{tg}\,x = \frac{\cos x\ \cos x - \mathrm{sen}\,x\ (-\mathrm{sen}\,x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

come si trovò già al § 23 [pag. 26] per x diverso dai multipli dispari di $\dfrac{\pi}{2}$.

2.° Similmente, osservando che

$$\cot x = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\ ,\ \mathrm{tgh}\,x = \frac{\mathrm{senh}\,x}{\cosh x}\ ,\ \coth x = \frac{1}{\mathrm{tgh}\,x}\ ,$$

coll'applicazione delle formole dei due paragrafi precedenti, si ritrovano i valori delle derivate $\mathrm{D}\cot x$, $\mathrm{D}\,\mathrm{tgh}\,x$, $\mathrm{D}\coth x$ che già trovammo ai § 23, 24 [pag. 26 e 27] ecc.

3.° Osservando che $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\mathrm{cosec}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,x}$ si trova che, per x diverso dai multipli dispari di $\dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$\mathrm{D}\sec x = -\frac{\mathrm{D}\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x\ \sec x\ ,$$

e per x diverso dai multipli interi di π, si ha

$$\mathrm{D}\,\mathrm{cosec}\,x = -\frac{\mathrm{D}\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x\ \mathrm{cosec}\,x.$$

4.° Avendo $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$, si trova che per $x > 0$ si ha

$$\mathrm{D}\frac{1}{\log x} = -\frac{1}{(\log x)^2}\,\mathrm{D}\log x = -\frac{1}{x\,(\log x)^2}\ ,$$

e similmente si trova per esempio

$$\mathrm{D}\left(\frac{x^2+\mathrm{sen}\,x}{e^x+\log x}\right) = \frac{1}{(e^x+\log x)^2}\left\{(2x+\cos x)\ (e^x+\log x) - (x^2+\mathrm{sen}\,x)\ \left(e^x+\frac{1}{x}\right)\right\},$$

quando $e^x + \log x$ non è zero, e s'intende che i logaritmi siano neperiani.

Derivate delle funzioni di funzioni.

33. — Sia u una funzione reale di x continua in ogni punto di un intervallo finito o infinito (α, β), e i cui valori siano tutti compresi fra i numeri finiti o infiniti λ e Λ, per modo che mentre x percorre l'intervallo (α, β) i valori di u percorrano una o più volte l'intervallo (λ, Λ); e sia al tempo stesso z una quantità che per ogni valore di u fra λ e Λ ha un valore unico e determinato per modo da essere una vera e propria funzione ad un sol valore di u fra λ e Λ.

Allora z, oltre a potersi considerare come una funzione di u fra λ e Λ, può anche considerarsi come una funzione di x fra α e β; e riguardata come funzione di x verrà detta *funzione di funzione per mezzo di* u, o semplicemente *funzione di funzione.* E quando sia p. es. $z = z(u)$, con $u = u(x)$ (*), si potrà scrivere evidentemente $z = z\,\{u(x)\}$.

Similmente se, essendo z funzione di u_1, u_1 sarà funzione di x ma data come funzione di funzione di x per mezzo di u_2 in dati intervalli, per modo che sia $z = z(u_1)$, con $u_1 = u_1(u_2)$ e $u_2 = u_2(x)$, si dirà che z *è funzione di funzione per mezzo di* u_1 *e* u_2, o semplicemente ancora *funzione di funzione,* e si potrà scrivere $z = z\,\{u_1[u_2(x)]\}$; e in generale quando si avrà

$$z = z(u_1)\ ,\ \text{con}\ u_1 = u_1(u_2)\ ,\ u_2 = u_2(u_3)\ ,\ \ldots\ ,\ u_{n-1} = u_{n-1}(u_n)\ ,\ u_n = u_n(x)\ ,$$

z si dirà *funzione di funzione per mezzo di* $u_1, u_2 \ldots u_n$, o semplicemente *funzione di funzione,* per modo che in particolare quando si abbia p. es.

$$z = \log(u_1)\ ,\ \text{con}\ u_1 = \mathrm{sen}^2 u_2\ ,\ u_2 = \cosh u_3\ ,\ u_3 = e^x,$$

(*) Quando date quantità $u, v \ldots$ sono funzioni di un'altra quantità p. es. x, per indicare le caratteristiche di queste funzioni torna spesso comodo di usare, come già abbiamo fatto, le lettere corrispondenti $u, v \ldots$, scrivendo cioè $u(x)$, $v(x) \ldots$ per rappresentare le stesse funzioni.

z sarà una funzione di funzione per mezzo di u_1, u_2, u_3 che potrà anche scriversi come funzione di x sotto la forma $z = \log\{\operatorname{sen}^2 [\cosh e^x]\}$, e ciò per qualsiasi valore di x da $-\infty$ a $+\infty$.

34. — Ora quando si abbia una *funzione di funzione* per mezzo di una o di più altre funzioni, e sia p. es. $z = z(u_1)$, con $u_1 = u_1(u_2)$, $u_2 = u_2(u_3)$, ..., $u_n = u_n(x)$, ben s'intende che, riguardata z come funzione di x, la sua derivata rapporto ad x, quando esista, potremmo cercare di determinarla valendoci delle proprietà e dei valori che la funzione stessa z viene ad avere quando si riguarda come un'ordinaria funzione di x senza occuparci delle funzioni intermediarie $u_1, u_2 \ldots u_n$; e così nel caso in cui sieno date espressioni analitiche per le singole funzioni $z(u_1)$, $u_1(u_2) \ldots\ldots u_n(x)$ potremmo cercare di determinare la derivata stessa esprimendo effettivamente z in funzione analitica di x, e poi applicando, talvolta i teoremi dei paragrafi precedenti, e tal'altra la definizione generale.

Ordinariamente però questa derivata può trovarsi con un processo speciale assai semplice, poichè, almeno nei casi che ordinariamente si presentano, si può applicare il seguente:

Teorema. — *Se si indica con a_n il valore di u_n pel valore a della variabile x, con a_{n-1} il valore di u_{n-1} (u_n) per $u_n = a_n$, con a_{n-2} il valore di u_{n-2} (u_{n-1}) per $u_{n-1} = a_{n-1}, \ldots$ e infine con z_a il valore di $z(u_1)$ o di z per $u_1 = a_1$; e si suppone che le funzioni $z, u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ considerate rispettivamente come funzioni delle variabili $u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n, x$ per $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$, $x = a$, oltre essere finite e continue, ammettano una derivata determinata e finita rapporto alle variabili corrispondenti nei punti $a_1, a_2 \ldots, a_n, a$ respettivamente, allora la derivata di z presa rapporto alla variabile x* nel punto *a esisterà, e sarà uguale al prodotto delle derivate delle singole funzioni $z, u_1, u_2, \ldots, u_n$ per $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$, $x = a$, prese rispettivamente queste derivate rapporto alle variabili $u_1, u_2, u_3 \ldots x$ da cui le funzioni stesse dipendono direttamente; per modo cioè che indicando con $D_{u_1} z$, $D_{u_2} u_1$, $D_{u_3} u_2, \ldots, D_{u_n} u_{n-1}$, $D_x u_n$ queste derivate, e con $D_x z$ la derivata di z rispetto ad x si avrà*

$$D_x z = D_{u_1} z \, D_{u_2} u_1 \, D_{u_3} u_2 \ldots\ldots D_{u_n} u_{n-1} \, D_x u_n, \tag{1}$$

sempre intendendo che debba essere $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2 \ldots\ldots u_n = a_n$, $x = a$, essendo a un valore determinato della variabile x.

Per dimostrare questa formola, incominciamo dall'osservare che se si dà ad x l'accrescimento positivo o negativo h, e s'indicano con δ_n, δ_{n-1}, $\delta_{n-2}, \ldots, \delta_2, \delta_1, \delta$ gli accrescimenti respettivi corrispondenti delle funzioni

$u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots\ldots u_2, u_1, z$, e con z_{a+h} il valore corrispondente di z, si avrà

$$u_n(a+h) - u_n(a) = \delta_n \quad , \quad u_{n-1}(a_n + \delta_n) - u_{n-1}(a_n) = \delta_{n-1},$$
$$u_{n-2}(a_{n-1} + \delta_{n-1}) - u_{n-2}(a_{n-1}) = \delta_{n-2}, \ldots, u_2(a_3 + \delta_3) - u_2(a_3) = \delta_2,$$
$$u_1(a_2 + \delta_2) - u_1(a_2) = \delta_1 \;,\; z(a_1 + \delta_1) - z(a_1) = z_{a+h} - z_a = \delta;$$

e a causa della continuità le quantità $\delta, \delta_1, \delta_2 \ldots\ldots, \delta_{n-2}, \delta_{n-1}, \delta_n$ saranno nulle o almeno diverranno infinitesime insieme con h.

Ora se, almeno a partire da un certo valore di h e per quanto h si impiccolisca poi in valore assoluto, le quantità $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$ (fuori del limite per $h = \pm 0$) si manterranno sempre differenti da zero, si potrà scrivere evidentemente

$$\frac{z_{a+h} - z_a}{h} = \frac{z(a_1+\delta_1) - z(a_1)}{\delta_1} \, \frac{u_1(a_2+\delta_2) - u_1(a_2)}{\delta_2} \, \frac{u_2(a_3+\delta_3) - u_2(a_3)}{\delta_3} \ldots$$
$$\ldots \frac{u_{n-1}(a_n+\delta_n) - u_{n-1}(a_n)}{\delta_n} \, \frac{u_n(a+h) - u_n(a)}{h}; \tag{2}$$

e quindi passando al limite per $h = \pm 0$ si troverà che il limite esiste, e esiste quindi la derivata di z rispetto ad x, e si ha appunto

$$D_x z = D_{u_1} z \, D_{u_2} u_1 \, D_{u_3} u_2 \ldots\ldots D_{u_n} u_{n-1} \, D_x u_n.$$

Se poi per quanto piccolo sia già divenuto h in valore assoluto, col farlo impiccolire sempre più si troveranno sempre dei valori di h pei quali alcune delle quantità $\delta_n, \delta_{n-1} \ldots \delta_1, \delta$ sono eguali a zero, allora dovrà esistere almeno una delle quantità

$$u_n(x) \;,\; u_{n-1}(u_n) \ldots u_s(u_{s+1}) \;,\; u_{s-1}(u_s) \ldots u_1(u_2) \;,\; z(u_1) \tag{3}$$

che *per infiniti valori di h* (*), comunque piccoli in valore assoluto, riprenderà sempre il valore primitivo; e se una di queste quantità è p. es. $u_{s-1}(u_s)$ altrettanto accadrà delle funzioni seguenti $u_{s-2}(u_{s-1})$, $u_{s-3}(u_{s-2})$, ..., $u_1(u_2)$, $z(u_1)$ per gli stessi valori di h, perchè sono tutte funzioni a un sol valore; talchè quando si consideri il rapporto $\frac{z_{a+h} - z_a}{h}$ soltanto per gli infiniti valori di h

(*) Questi valori di h quando vi sono dovranno necessariamente essere in numero *infinito*, altrimenti, scrivendoli in ordine decrescente in valore assoluto h_1, $h_2, \ldots h_p$, si comprende subito che al tendere indefinito di h a zero le quantità $\delta_n, \delta_{n-1}, \ldots \delta_2, \delta_1, \delta$ da h_p in poi si manterrebbero sempre diverse da zero, e saremmo quindi ancora nel caso precedente.

che fanno riprendere a una delle funzioni (3) il valore che esse avevano originariamente per $x=a$, si può asserire intanto che questo rapporto, come anche il limite dei valori che esso ha quando h si accosta indefinitamente a zero, *passando soltanto per gli indicati valori*, sarà uguale a zero.

D'altra parte se per la prima delle funzioni (3) si ha già la particolarità che $u_n(a+h)$ per infiniti valori diversi da zero e positivi o negativi di h in vicinanza di $h=0$ riprenda il valore primitivo $u_n(a)$ o a_n, allora il rapporto $\frac{u_n(a+h)-u_n(a)}{h}$ per gli indicati valori di h sarà sempre zero; talchè, osservando che *qualunque siano i valori pei quali si fa passare* h questo rapporto $\frac{u_n(a+h)-u_n(a)}{h}$ per $h=\pm 0$ deve avere un limite determinato e finito, perchè per ipotesi la funzione $u_n(x)$ nel punto a ha una derivata determinata e finita, si può evidentemente asserire che il limite per $h=\pm 0$ dei valori dello stesso rapporto dovrà essere uguale a zero (*); e quindi, in particolare, questo limite sarà uguale a zero anche quando si faccia avvicinare h a zero passando soltanto per speciali valori scelti nel modo che più potrà trovarsi opportuno.

Similmente, se è soltanto $u_{s-1}(u_s)$ *la prima* delle funzioni (3) che, quando si muta x in $a+h$, riprende il valore primitivo a_{s-1} per infiniti valori positivi o negativi di h diversi da zero, allora per h abbastanza piccolo la funzione precedente $u_s(u_{s+1})$ non riprenderà mai il valore primitivo di a_s, e δ_s non sarà zero; talchè, considerando il rapporto $\frac{u_{s-1}(a_s+\delta_s)-u_{s-1}(a_s)}{\delta_s}$, si può senz'altro affermare che esso avrà sempre un significato per ogni valore diverso da zero ma comunque piccolo di h, e il suo limite per $h=\pm 0$ dovrà essere lo zero, sia che si faccia passare h soltanto per determinati valori, sia che si faccia passare per altri valori qualunque, perchè per le nostre ipotesi $u_{s-1}(u_s)$ per $u_s=a_s$ ha una derivata determinata e finita.

Osservando dunque che la formola (2) sussiste ancora evidentemente per quei valori di h, diversi da zero ma in vicinanza di $h=0$, pei quali nessuna delle funzioni (3) riprende il valore primitivo $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{s-1}, \ldots, a_1, z_a$, s'intende subito che il rapporto $\frac{z_{a+h}-z_a}{h}$ ha per limite zero anche quando si fa avvicinare h a 0 passando soltanto pei valori ora indicati; e questo,

(*) Questo dimostra che *se una funzione $u(x)$ nell'intorno di un punto a riprende infinite volte il valore $u(a)$ che essa ha nel punto a, la sua derivata in questo punto,* quando esiste, *ha necessariamente il valore zero.* E questa osservazione vale evidentemente anche per le derivate a destra e per le derivate a sinistra considerate separatamente.

unito a quanto si è detto sopra, basta per poter dire che lo stesso rapporto ha per limite zero qualunque sia il modo di convergere a zero di h, e in conseguenza che la derivata di z come funzione di x nel punto a esiste ancora ed ha per limite lo zero; dunque, poichè in questo caso una almeno delle quantità $D_{u_1}z$, $D_{u_2}u_1$, ..., $D_{u_n}u_{n-1}$, $D_x u_n$ deve essere zero, si può evidentemente concludere che la formola (1) continua ancora a sussistere; e il teorema resta ora completamente dimostrato.

35. — Si deve notare che le condizioni poste nell'enunciato del teorema si riferiscono tutte al punto a nel quale si cerca la derivata di z, e non si richiede nulla rispetto agli altri punti dell'intorno di a; e se le condizioni stesse si verificheranno per tutti i punti x di un dato intervallo il teorema stesso sarà applicabile in ogni punto di questo intervallo; talchè evidentemente in particolare noi possiamo anche aggiungere che quando le funzioni $u_n(x)$, $u_{n-1}(u_n)$, $u_{n-2}(u_{n-1})$, ... $u_2(u_3)$, $u_1(u_2)$, $z(u_1)$ oltre essere finite e continue, abbiano ciascuna una derivata determinata e finita rispetto alla variabile da cui dipendono direttamente, e ciò in ogni punto dei respettivi intervalli (α, β), (α_n, β_n), $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$....... (α_2, β_2), (α_1, β_1) entro i quali vengono a variare $x, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1$ respettivamente, allora anche la derivata di z rispetto ad x avrà un valore determinato e finito in ogni punto dell'intervallo (α, β), e questo valore sarà dato dalla formola (1).

E così quando si abbia per es.

$$z=\log u_1, \quad \text{con } u_1=\operatorname{sen}^2 u_2, \quad u_2=e^x,$$

si potrà dire evidentemente che, per tutti i valori finiti di x pei quali e^x non è un multiplo intero di π (onde non sia zero u_1), si ha

$$D_x z = D_{u_1}(\log u_1)\, D_{u_2}(\operatorname{sen}^2 u_2)\, D_x e^x,$$

ovvero

$$D_x z = \frac{2 \operatorname{sen} u_2 \cos u_2\, e^x}{u_1} = \frac{e^x \operatorname{sen} 2e^x}{\operatorname{sen}^2 e^x}.$$

E quando si abbia

$$z=\operatorname{sen} u_1, \quad \text{con } u_1=\operatorname{sen} u_2, \quad u_2=u_3 \operatorname{sen} u_3, \quad u_3=\operatorname{tg} x,$$

per x finito e diverso dai multipli interi dispari di $\frac{\pi}{2}$ si avrà

$$D_x z = \frac{\cos u_1 \cos u_2 (\operatorname{sen} u_3 + u_3 \cos u_3)}{\cos^2 x}.$$

Aggiungeremo inoltre che il processo stesso che abbiamo tenuto per dimostrare la formola (1) ci mostra anche che quando per un punto a o pei valori corrispondenti di $u_n, u_{n-1}, \ldots\ldots, u_2, u_1$ una delle derivate $D_{u_1} z$, $D_{u_2} u_1$, $D_{u_3} u_2 \ldots\ldots D_{u_n} u_{n-1}$, $D_x u_n$ non esista affatto, o abbia un valore infinito, mentre le altre hanno tutte un valore determinato, *finito e diverso da zero*, allora z considerata come funzione di x nei respettivi casi verrà a mancare essa pure di derivata o l'avrà infinita; talchè, in certo modo, anche in questi casi la formula (1) potrà riguardarsi come valida pel calcolo di $D_x z$, nel senso che essa ci darà ancora il valore infinito della derivata $D_x z$ o ci avvertirà della mancanza di questa derivata.

E così in particolare, quando si abbia per es.

$$z = \sqrt[3]{u_1}\ ,\ \text{con}\quad u_1 = \operatorname{sen} u_2\ ,\ u_2 = e^x\ ,$$

pei valori finiti di x pei quali e^x è un multiplo di π la derivata di z rispetto ad x sarà infinita, mentre negli altri punti sarà data dalla formola

$$D_x z = \frac{\cos u_2\, e^x}{3\sqrt[3]{u_1^2}} = \frac{e^x \cos e^x}{3\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 e^x}}\ ,$$

che quando si applichi anche per $e^x = k\pi$ ci dà pure $D_x z = \infty$, per modo che può considerarsi come valida per tutti i valori finiti di x.

36. — Faremo anche osservare che siccome bene spesso certe quantità, date come funzioni analitiche di x assai complicate, possono anche riguardarsi come funzioni di funzioni per mezzo di funzioni assai semplici, così il calcolo delle derivate di funzioni molto complicate, o delle quali la derivata non saprebbe determinarsi coi processi dati nei paragrafi precedenti, può ridursi al calcolo delle derivate di funzioni molto semplici per mezzo del teorema che abbiamo dato poc'anzi.

A mostrar ciò chiaramente noi riporteremo i seguenti esempi:

1.° Quando si abbia $z = f(a+x)$, o $z = f(ax)$ con a quantità costante, si osserverà che posto $u = a+x$, o $u = ax$, si avrà $z = f(u)$ con $u = a+x$, o $z = f(u)$ con $u = ax$, e così z potrà considerarsi come funzione di funzione, e per tutti i valori di x o di u pei quali $f(u)$ ammette una derivata determinata e finita, si avrà nel primo caso $D_x z = f'(u) = D_{(a+x)} z$, e nel secondo $D_x z = a f'(u) = a\, D_{ax} z$, cioè nel primo caso la derivata di z si otterrà facendo la derivazione come se $a+x$ fosse la variabile; e nel secondo si otterrà ancora facendo la derivazione come se la variabile fosse ax, e poi moltiplicando per a la derivata ottenuta.

2.° Quando si abbia $z = [\varphi(x)]^m$, con m reale e costante ma qualunque, si osserverà che, posto $u = \varphi(x)$, si avrà $z = u^m$ con $u = \varphi(x)$, cioè z verrà ad essere una funzione di funzione; e quindi per tutti i punti x pei quali $\varphi(x)$ è finita e continua e ammette una derivata determinata e finita e z è reale

e finita, si avrà $D_x z = m\, u^{m-1} D_x u$, ovvero $D_x \varphi(x)^m = m[\varphi(x)]^{m-1} \varphi'(x)$, ciò che mostra che la derivazione della potenza $[\varphi(x)]^m$ si fa sempre con la stessa regola che si dette già pel caso di m intero.

3.° Più generalmente, se si avrà $z = f\{\varphi(x)\}$, col porre $u = \varphi(x)$ si otterrà $z = f(u)$ con $u = \varphi(x)$, e si ridurrà così z una funzione di funzione, per modo che si avrà $D_x z = f'(u)\, \varphi'(x)$ per tutti i punti x pei quali $f'(u)$ e $\varphi'(x)$ sono determinate e finite, ecc. ...

E così, per es., per x finito e diverso da zero, si troverà subito che

$$D \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \frac{-\cos\dfrac{1}{x}}{x^2}\ ,\ D\cos\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{x^2}\ ,\ \text{ecc.} \ldots$$

4.° Se si avrà, per es., $z = e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ dove s'intende che per $x = 0$ l'esponente di e sia zero, si porrà $z = e^u$ con $u = x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, e si troverà quindi che per x finito e diverso da zero si ha

$$D\, e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}} = e^u\, D_x u = e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}\left(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right),$$

e per $x = 0$, indicando con $\left(D\, e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)_0$, $(D_u\, e^u)_0$, $(D_x u)_0$ le derivate corrispondenti, coll'osservare che $(D_x u)_0 = \lim \dfrac{h^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{h}}{h} = 0$, si trova invece

$$\left(D\, e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)_0 = \left(D_u\, e^u\right)_0 \left(D_x u\right)_0 = 0\ ,$$

ciò che mostra che la derivata della funzione $e^{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$, sebbene esista sempre per tutti i valori finiti di x, incluso il valore $x = 0$, ha una discontinuità di seconda specie per $x = 0$.

Similmente se $z = e^{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$, ove s'intende ancora che per $x = 0$ l'esponente di e sia zero, si trova che per x finito e diverso da zero si ha sempre

$$D\, e^{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}} = e^{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{\cos\dfrac{1}{x}}{x}\right),$$

mentre per $x = 0$ la funzione $e^{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ non ha derivata determinata.

5.° Se si ha, per es., $z = \log^n x$, ove il simbolo $\log^n x$ indica la quantità $\log\log\log\log \ldots\ldots \log x$, dove il segno log è ripetuto n volte, si ridurrà

z funzione di funzione col porre $z = \log u_1$, con $u_1 = \log u_2$, $u_2 = \log u_3$, ..., $u_{n-1} = \log x$, e si troverà così che per tutti i valori di x pei quali $\log^n x$ è reale e finito, si ha

$$D \log^n x = \frac{1}{u_1 u_2 \ldots\ldots u_{n-1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{n-1} x}.$$

6.° Se si ha, per es., $z = \log \{\cos [\cos (\cos x)]\}$, si porrà $z = \log u_1$, con $u_1 = \cos u_2$, $u_2 = \cos u_3$, $u_3 = \cos x$, e si troverà così che per tutti i valori finiti di x si ha

$$D \log \{\cos[\cos(\cos x)]\} = -\frac{\operatorname{sen} u_2 \operatorname{sen} u_3 \operatorname{sen} x}{u_1} = -\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x) \operatorname{sen}[\cos(\cos x)]}{\cos[\cos(\cos x)]}.$$

7.° Se si ha infine $z = \log \left\{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right\}$, si porrà $z = \log u$ con $u = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$; e quindi, osservando che per x diverso dai multipli pari di π si ha

$$D_x u = \frac{\cos x(1-\cos x) - (1+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - 1}{(1-\cos x)^2},$$

si troverà subito che, per x diverso dai multipli pari di π e dai multipli di $\frac{\pi}{2}$ della forma $(4k+3)\frac{\pi}{2}$, si ha

$$D \log \left\{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right\} = D_u \log u \, D_x u = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - 1}{(1-\cos x)(1+\operatorname{sen} x)}.$$

37. — Prima di lasciare questo soggetto delle funzioni di funzioni, facciamo notare che se z è una funzione di funzione per mezzo di una sola funzione u, per modo che sia $z = z(u)$ con $u = u(x)$, e se *in ogni punto* di un intorno di un punto a, che per semplicità supporremo interno all'intervallo che si considera, $u(x)$ è finita e continua, e in a ammette una derivata determinata e finita e diversa da zero; e similmente z, considerata come funzione di x, nello stesso punto a ammette pure una derivata determinata e finita, allora z, considerata anche come funzione di u, ammetterà una derivata determinata e finita nel punto $u_a = u(a)$, e si avrà la formola

$$D_u z = \frac{D_x z}{D_x u}, \tag{4}$$

che servirà a determinare anche $D_u z$ nel punto u_a, e che ricondurrà subito

alla formola precedente $D_x z = D_u z \, D_x u$, la quale verrà così a valere anche in questo caso.

Con queste ipotesi infatti, posto $u(a+h) - u(a) = \delta$, si vede subito che quando h impiccolisce in valore assoluto, δ diverrà una funzione continua di h che non passerà per zero altro che per $h = 0$ e cangerà segno con h (perchè altrimenti il rapporto $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ non avrebbe un limite determinato e diverso da zero); e quindi, quando h sia divenuto sufficientemente piccolo, δ prenderà *qualunque* valore compreso fra $-\varepsilon$ ed ε, essendo ε un numero positivo che può supporsi piccolo a piacere.

Segue da ciò che se il rapporto $\frac{z(u_a+\delta) - z(u_a)}{\delta}$ col tendere di h e quindi di δ a zero avrà un limite determinato, allora pel fatto che δ passerà per qualunque valore fra $-\varepsilon$ e ε la derivata $D_u z$ di z rispetto ad u per $u = u_a$ verrà ad esistere e sarà uguale a questo limite; quindi, poichè effettivamente il detto limite esiste a causa della formola

$$\frac{z(u_a+\delta) - z(u_a)}{\delta} = \frac{\dfrac{z_{a+h} - z_a}{h}}{\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}},$$

(che evidentemente per le ipotesi fatte ha sempre un significato finchè h non è zero), si conclude subito che anche $D_u z$ per $u = u_a$ esiste e si ha la formola (4), ciò che dimostra appunto quanto abbiamo enunciato.

È da notare che con ragionamenti simili si trova che la formola (4) sussiste anche se $D_x u = +\infty$, o $= -\infty$ purchè non sia al tempo stesso infinita $D_x z$; e può dirsi che la stessa formola (4) sussiste anche se $D_x u = 0$, purchè però allora si ponga la condizione che non sia $D_x z = 0$, e che x non sia un punto di massimo o di minimo di u, e u non riprenda il valore u_a in punti vicini quanto si vuole ad a (e ciò per far sì che δ cangi segno e passi per zero soltanto per $h = 0$).

Risultati simili si hanno quando invece di $D_x u$ si sappia che esiste $D_u z$ ecc. ....

Derivate delle funzioni inverse.

38. — Sia $y = f(x)$ una funzione di x fra $-\infty$ e $+\infty$, o più generalmente fra α e β, e nell'intervallo (α, β) nel quale si considera sia sempre finita e continua.

Mentre la variabile x percorre l'intervallo (α, β), y varierà, per es., fra i numeri finiti γ e δ, e potrà variare non prendendo che una volta sola uno stesso valore fra γ e δ, o prendendolo più volte.

Se si verifica il primo caso, cioè se y prende una sola volta lo stesso valore fra γ e δ (come avviene, per es., quando si ha $y = \operatorname{sen} x$, e x varia soltanto fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$), e γ e δ sono i valori minimo e massimo di y o viceversa, allora oltre a poter dire che per ogni valore di x fra α e β vi è un valore di y fra γ e δ, si può dire inversamente che per ogni valore di y nell'intervallo (γ, δ) vi è un valore corrispondente di x fra α e β; o, in altri termini, dato y fra γ e δ, vi è sempre un valore unico e determinato di x (fra α e β), talchè x si può riguardare alla sua volta come una funzione $\psi(y)$ di y per tutti i valori di y fra γ e δ, nel senso generale da noi ammesso per la definizione delle funzioni (a un sol valore quali le supponiamo sempre in queste lezioni).

Se poi, mentre x percorre l'intervallo (α, β), y prende più volte uno stesso valore (come avviene, per es., se $y = \operatorname{sen} x$ ed x varia fra 0 e 2π) allora allo stesso valore di y non corrisponderà più un valore unico e determinato per x, e x non potrà riguardarsi come funzione (a un sol valore) di y, altro che in certi casi e sempre sotto certe limitazioni.

Fermiamoci a considerare soltanto il primo caso e quei casi speciali del secondo nei quali è possibile limitare la variabilità di x in distinti tratti speciali, in modo che, in ciascun tratto, y non prenda che una sola volta uno stesso valore, ciò che, come è facile a vedersi, equivale a supporre che fra α e β esistano dei tratti speciali (α_1, β_1) nei quali la funzione data $y = f(x)$ si mantiene sempre crescente o sempre decrescente quando x passa dall'estremo α_1 all'estremo β_1.

Allora nell'intervallo totale (α, β), o almeno in questi intervalli parziali (α_1, β_1) insieme alla funzione data $y = f(x)$ si avrà un'altra funzione corrispondente $x = \psi(y)$, e noi diremo questa nuova funzione $\psi(y)$ la *funzione inversa* della primitiva $f(x)$.

Inversamente $f(x)$ sarà allora la funzione inversa di $\psi(y)$; e queste funzioni $f(x)$ e $\psi(y)$ saranno legate in modo che per ogni valore di x nell'intervallo (α, β) o (α_1, β_1) la funzione $f(x)$, o y, ha un valore compreso in un certo intervallo (γ, δ) e tale che per esso il valore corrispondente di $\psi(y)$ è appunto il valore primitivo x; come inversamente per ogni valore speciale di y fra γ e δ, la funzione $\psi(y)$, o x, ha un valore fra α e β o fra α_1 e β_1 che è quello pel quale la funzione $f(x)$ riproduce il valore y.

In altri termini, con le limitazioni che abbiamo poste, si ha $y = f[\psi(y)]$, e $x = \psi[f(x)]$; e la funzione $f[\psi(y)]$, cioè y, può riguardarsi come una funzione di funzione di y per mezzo di x data dalle formole

$$y = f(x) \quad \text{con} \quad x = \psi(y);$$

come $\psi[f(x)]$, cioè x, può riguardarsi come una funzione di funzione di x per mezzo di y data dalle formole

$$x = \psi(y) \quad \text{con} \quad y = f(x);$$

e inoltre la funzione $\psi(y)$ può riguardarsi come un valore di x che soddisfa identicamente alla equazione $y - f(x) = 0$; come anche la funzione $f(x)$ può riguardarsi come un valore di y che soddisfa identicamente alla equazione $x - \psi(y) = 0$; per modo che, per es., la funzione inversa di $f(x) = x^2$ è il valore positivo di $\sqrt{y}$ se x è positivo, ed è il valore negativo di $\sqrt{y}$, se x è negativo; la funzione inversa di $f(x) = \operatorname{sen} x$, per x compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ è il valore di $\operatorname{arc\,sen} y$ che trovasi compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, ecc. ...

39. — Ammesso ora che la funzione data $f(x)$ in un punto a *interno* all'intervallo (α, β) o (α_1, β_1) nel quale si considera abbia una derivata determinata (finita o infinita) e nei punti di un intorno di a (come del resto fu già supposto in principio) sia finita e continua, è facile vedere che, per quanto si disse nel § 37 [pag. 42] e per le osservazioni fatte sopra, la derivata della funzione inversa $\psi(y)$, presa rispetto ad y, esiste anch'essa nel punto y_a corrispondente ad $x = a$, e può determinarsi facilmente senza che vi sia neppur bisogno di conoscere la funzione inversa stessa $\psi(y)$.

Consideriamo infatti x come funzione di funzione della x stessa mediante la formola $x = \psi(y)$, con $y = f(x)$; e osserviamo che colle nostre ipotesi, quand'anche nel punto a che si considera sia $f'(a) = 0$, nei punti fuori di a che cadono in ogni intorno di a, la funzione $f(x)$ non prenderà mai il valore che essa ha nel punto a stesso, e questo punto non sarà mai un punto di massimo o di minimo di $f(x)$.

Da ciò, per quanto si disse al § 37 [pag. 42], si dedurrà subito che

$$\psi'(y_a) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'[\psi(y_a)]},$$

e questo mostra che *per ogni punto y_a che corrisponde a un punto a interno all'intervallo (α, β) o (α_1, β_1), la derivata rispetto ad y della funzione inversa $\psi(y)$, sotto le fatte ipotesi, sarà sempre l'inversa della derivata $f'(a)$ della funzione diretta $f(x)$*; e quindi quando per punto a possa prendersi un punto qualunque x interno all'intervallo (α, β) o (α_1, β_1), e si conosca

$\psi(y)$, o anche soltanto si abbia modo di conoscere $f'(x)$ come funzione di y, si avrà la derivata rispetto ad y di $\psi(y)$ in funzione di y.

40. — Il teorema ora dimostrato con certe restrizioni potrebbe estendersi anche al caso in cui x sia un estremo dell'intervallo (α, β) o (α_1, β_1).

Esso poi serve benissimo al calcolo delle derivate di alcune funzioni inverse, riducendolo a quello delle derivate delle funzioni dirette, come apparisce chiaramente dai seguenti esempi, nei quali, per seguire le notazioni ordinarie, sono applicati i resultati precedenti dopo aver cangiato x in y, e y in x.

1.° Sia $y = \text{arc sen}\, x$.

Considerando y come un arco di circonferenza contato dal punto che si prende ordinariamente come origine degli archi, e riguardando y come corrispondente all'estremo finale dell'arco, si vede subito che, quando si considera y separatamente in ogni mezza circonferenza che termini al diametro verticale $\left(\text{cioè nei punti } (2k+1)\frac{\pi}{2}\, , \, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ la funzione arc sen x può riguardarsi come la funzione inversa di sen y; e quindi per ogni valore finito di x, all'infuori tutt'al più dei valori $x = \pm 1$ (pei quali y viene a cadere negli estremi $(2k+1)\frac{\pi}{2}\, , \, (2k+3)\frac{\pi}{2}\Big)$ sarà

$$D\, \text{arc sen}\, x = \frac{1}{\cos y} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

il segno superiore avendosi quando y, o arc sen x è nella mezza circonferenza a destra del diametro verticale, e il segno inferiore quand'è nella mezza circonferenza a sinistra.

2.° Sia $y = \text{arc cos}\, x$.

In ogni mezza circonferenza al disopra e al disotto del diametro orizzontale, arc cos x sarà la funzione inversa di cos y, e quindi per ogni valore di x fra -1 e 1, tranne tutt'al più pei valori $x = \pm 1$ pei quali y viene ad essere multiplo di π, si avrà fra -1 e 1,

$$D\, \text{arc cos}\, x = -\frac{1}{\text{sen}\, y} = \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

il segno — avendosi quando l'arco termina al disopra del diametro orizzontale, e il segno + quando termina al disotto.

E così quando i due archi arc sen x e arc cos x terminano ambedue nel primo quadrante, insieme alla formola $D\, \text{arc sen}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, si ha l'altra

$D\, \text{arc cos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}$; e questo doveva essere perchè, essendo in questo caso $\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} = \text{cost.}$, la derivata di arc sen x + arc cos x doveva appunto essere lo zero.

3.° Sia $y = \text{arctg}\, x$.

Finchè y viene a terminare soltanto in punti appartenenti a porzioni della circonferenza che non comprendono gli estremi del diametro verticale, arctg x può riguardarsi come la funzione inversa della funzione sempre finita e continua tg y ecc. ....; e perciò si ha

$$D\, \text{arc tg}\, x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

per tutti i valori finiti di x.

4.° Similmente prendendo $y = \text{arc cot}\, x$, si trova

$$D\, \text{arc cot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$$

per tutti i valori finiti di x.

5.° Se $y = a^x$, a^x sarà la funzione inversa di $x = \log_a y$, e quindi sarà, come già trovammo

$$D\, a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{y \log_e a}\right)} = y \log_e a = a^x \log_e a$$

per tutti i valori finiti di x.

6.° Trovato ora $D\,\text{arc sen}\, x$, $D\,\text{arc tg}\, x, \ldots\ldots\ldots$, per quanto si vide trattando delle funzioni di funzioni, si può dir subito che quando z è una funzione di x che ammette una derivata determinata e finita, si hanno le formole

$$D\, \text{arc sen}\, z = \pm \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}}\, , \quad D\, \text{arc tg}\, z = \frac{z'}{1+z^2}\, ,$$

la prima delle quali vale per tutti i valori di x pei quali z è compreso fra 1 e -1 (1 e -1 per ora esclusi), e la seconda per tutti i valori di x pei quali z è finito; e nella prima dovendo prendersi il segno + quando arc sen z termina a destra del diametro verticale, e il segno — quando termina a sinistra.

E in particolare, supponendo $z = \frac{x}{a}$ con a costante e reale, si ha di qui:

$$D\, \text{arc sen}\, \frac{x}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, , \quad D\, \text{arc tg}\, \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}\, .$$

III.

Proprietà generali delle derivate

41. — Prima di procedere oltre in queste lezioni, è utile premettere alcune proprietà generali delle funzioni $f(x)$ che in tutto un intervallo sono finite e continue, e ammettono sempre una derivata (ordinaria) determinata (finita, cioè, o infinita e determinata di segno).

Incominciamo perciò dal dimostrare il seguente

Teorema. — *Se $f(x)$ è una funzione che in tutto un intervallo (α, β)* (α e β inclusi) (*) *è finita e continua, e per tutti i punti x fra α e β* (α e β al più esclusi) *ammette una derivata determinata (finita, o infinita e determinata di segno), questa derivata in una porzione qualunque dello stesso intervallo:*

1.° *Non potrà avere sempre un valore infinito;*

2.° *Non potrà avere sempre il valore zero, e in infiniti punti avrà anche valori finiti e diversi da zero, a meno che non sia costante in tutta la porzione che si considera dello stesso intervallo.*

La dimostrazione di questo teorema, come quella di molti altri relativi essi pure alle derivate ordinarie o anche soltanto alle derivate a destra o a sinistra, o ai rapporti incrementali, si fa servendosi delle funzioni $\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu$ che si ottengono dalla funzione data $f(x)$ togliendovi (o aggiungendovi) le infinite funzioni di primo grado $\mu x + \nu$, ove μ e ν sono quantità costanti.

(*) S'intende che l'intervallo (α, β) può anche essere soltanto una parte di quello nel quale la funzione $f(x)$ è data, potendo α e β essere due punti qualsiasi presi nell'intervallo dato, e le condizioni che qui si richiedono per $f(x)$ bastando che siano soddisfatte nell'intervallo (α, β).

Prendiamo infatti una porzione qualunque (a, b) dell'intervallo (α, β) che si considera (gli estremi inclusi o no), e formiamo la funzione

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a} \{ f(b) - f(a) \}$$

che evidentemente è una delle funzioni $\varphi(x)$ sopra indicate.

Questa funzione $\varphi(x)$ si annullerà per $x = a$ e $x = b$, sarà finita e continua in tutto l'intervallo (a, b), e la sua derivata, che indicheremo con $\varphi'(x)$, per quanto si disse al § 27 [pag. 29] sarà sempre determinata tranne tutt'al più negli estremi a e b, e sarà infinita soltanto quando lo sia quella di $f(x)$.

Annullandosi ora questa funzione $\varphi(x)$ per $x = a$ e $x = b$, ed essendo sempre continua, se essa non sarà zero in tutto l'intervallo (a, b), esisterà necessariamente almeno un punto determinato x', nell'*interno* dell'intervallo stesso, nel quale essa prenderà effettivamente il valore massimo o il valore minimo; quindi tanto che $\varphi(x)$ sia sempre zero fra a e b, quanto che non lo sia, esisterà sempre almeno un punto determinato x', nell'*interno* dell'intervallo (a, b), dotato della proprietà che, nei punti x differenti da x' e appartenenti ad ogni suo intorno sufficientemente piccolo, i valori della funzione $\varphi(x)$ non saranno mai superiori o non saranno mai inferiori a quello che essa ha nel punto x', potendo però essere uguali a questo valore $\varphi(x')$; per modo cioè che si potrà trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che, per tutti i valori di h positivi e inferiori ad ε, le due differenze $\varphi(x'+h) - \varphi(x')$, $\varphi(x'-h) - \varphi(x')$, dove non sono nulle, avranno sempre uno stesso segno determinato per tutti i valori di h; e perciò i rapporti incrementali

$$\frac{\varphi(x'+h) - \varphi(x')}{h}, \quad \frac{\varphi(x'-h) - \varphi(x')}{-h}$$

dove non saranno nulli avranno ciascuno uno stesso segno per tutti i valori di h, e il segno dell'uno sarà opposto al segno dell'altro, talchè i loro limiti per $h = +0$, se esistono, dovranno essere nulli o di segno contrario.

Ma questi limiti esistono effettivamente e devono avere uno stesso valore determinato (finito, o infinito e determinato di segno) perchè, per le ipotesi fatte, $f(x)$, e perciò anche $\varphi(x)$, in ogni punto interno fra a e b (e quindi anche nel punto x') ammettono una derivata determinata; dunque si può dire intanto evidentemente che la derivata di $\varphi(x)$, e così anche quella di $f(x)$ non potrà essere infinita nel punto x', e perciò non potrà essere infinita in tutti i punti dell'intervallo (a, b); e questo dimostra intanto la prima parte del teorema.

Ora, non potendo la derivata di $\varphi(x)$ nel punto x' essere infinita, e, per le ipotesi fatte, dovendo anche essere determinata, è chiaro che il resultato precedente potrà solo sussistere quando si abbia $\lim \frac{\varphi(x' \pm h) - \varphi(x')}{\pm h} = 0$, cioè quando sia $\varphi'(x') = 0$; e allora sarà

$$f'(x') = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \tag{1}$$

quindi si può dire intanto che se fra a e b (a e b al più esclusi) $f(x)$ ha una derivata sempre finita, o infinita e determinata di segno, esisterà sempre *entro* l'intervallo (a, b) un punto determinato x' nel quale $f'(x)$ ha un valore finito, e pel quale si ha la formola precedente.

Inoltre, supponendo ora che $f(x)$ fra a e b non abbia sempre lo stesso valore, si vede subito che, se $f(a)$ ed $f(b)$ sono differenti fra loro, il valore di $f'(x')$ nel punto x' sarà diverso da zero.

E se invece sarà $f(a) = f(b)$, potremo sempre prendere fra a e b due altri punti a' e b' pei quali non sia $f(a') = f(b')$, e allora nel punto x' corrispondente al nuovo intervallo (a', b') la funzione $f'(x')$ sarà pure differente da zero; quindi, se $f(x)$ non è costante fra a e b, esisteranno sempre punti determinati x' nei quali $f'(x)$ è finita e differente da zero; e poichè i punti a' e b' potranno prendersi in infiniti modi, di questi punti x' ne esisterà un numero infinito in ogni intervallo comunque piccolo nel quale $f(x)$ non sia costante; e questo evidentemente dimostra la seconda parte del teorema, talchè esso resta ora completamente dimostrato.

Osserviamo che, in quanto qui si dimostra che quando $f(x)$ non è costante la sua derivata non può essere sempre zero o sempre infinita, questo teorema costituisce quello che propriamente si era proposto Ampère di dimostrare limitatamente alle sole funzioni che allora si consideravano che hanno soltanto un numero finito di oscillazioni nell'intervallo che si considera, ritenendo che ciò potesse bastare ad assicurare l'esistenza della derivata; ma, come è bene evidente, questo è un teorema che *dà una proprietà delle derivate quando esistono*, e non già un teorema che dimostra l'esistenza delle derivate, neppure limitatamente alle funzioni indicate, perchè in esso si suppone esplicitamente questa esistenza.

42. — Il teorema dimostrato dà luogo alle osservazioni seguenti.

1.° Osserviamo che, in forza della seconda parte di questo teorema, si può dire che: *Le funzioni finite e continue in un intervallo (α, β) che in ogni punto di questo intervallo hanno sempre la derivata zero, sono costanti in tutto l'intervallo;* e questo porta subito evidentemente a concludere che: *Se in un dato intervallo due funzioni finite e continue $f(x)$ e $F(x)$ ammettono*

sempre una stessa derivata determinata e finita, o almeno sono tali che le indeterminazioni che presentano queste derivate sono le stesse per tutte e due, e per modo che la differenza delle due funzioni abbia sempre per derivata zero, allora queste funzioni nello stesso intervallo non potranno differire l'una dall'altra che per una quantità costante.

E così in particolare: *Se una funzione $f(x)$ in tutto un intervallo è sempre finita e continua, e la sua derivata esiste ed ha sempre uno stesso valore μ, questa funzione $f(x)$* (avendo sempre la stessa derivata della funzione μx) *in tutto l'intervallo dato sarà una funzione di primo grado $\mu x + \nu$, ecc....*

2.° Osserviamo in secondo luogo che la formola (1) ci mostra che: *Se la funzione $f(x)$ è finita e continua in tutto un intervallo (α, β) e, eccettuati tutt'al più gli estremi di quest'intervallo, ha sempre una derivata determinata, indicando con x_0 e $x_0 + h$ (h positivo o negativo) due punti qualunque di questo intervallo (che potranno anche essere gli estremi α e β), e con θ un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) che dipende da x_0 e da h e dalla natura della funzione, si avrà sempre la formola seguente*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h), \quad \text{o} \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h), \text{ (*)} \tag{2}$$

che è di una applicazione continua; e evidentemente (potendo sempre x_0 e $x_0 + h$ considerarsi come estremi α e β di un intervallo dato) potrà dirsi anche che questa formola per essere applicabile richiede soltanto che nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$ la $f(x)$ sia sempre finita e continua, e in tutti i punti di quest'intervallo (gli estremi x_0 e $x_0 + h$ al più esclusi) ammetta sempre una derivata determinata (finita cioè, o infinita e determinata di segno).

La formola $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$, nella quale h può essere tanto positivo che negativo, e che in sostanza non è che la (1), costituisce il teorema conosciuto sotto il nome di *teorema degli accrescimenti finiti.*

(*) Insieme a questa formola

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h), \tag{α}$$

che serve a dare il valore di $f(x_0 + h)$, si ha l'altra

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + [f'(x_0) + \varepsilon] h, \tag{β}$$

con ε nulla o infinitesima, della quale ci siamo valsi nei §§ 28 e seg. [pag. 30 e seg.]; ma mentre quest'ultima (β) suppone l'esistenza della derivata di $f(x)$ nel punto x_0 senza richiedere nulla nè per le derivate nè per la continuità della funzione negli altri punti dell'intervallo da x_0 a $x_0 + h$, la nuova formola (α) invece non suppone nulla per la derivata nel punto x_0 ma richiede che la funzione $f(x)$ sia finita e continua in tutto l'intervallo da x_0 a $x_0 + h$ (gli estr. incl.), e nei punti di questo intervallo, salvo tutt'al più gli estremi, abbia anche una derivata determinata (finita, o infinita e determinata di segno).

3.° Servendosi poi della formola (1) o della (2) si può anche evidentemente asserire che: *Se nell'intervallo* (α, β) *la funzione* $f(x)$ *è sempre finita e continua, e, eccettuati tutt'al più gli estremi dell'intervallo, in tutti gli altri punti ammette una derivata determinata, allora quando avvenga che in due punti* a e b *dell'intervallo* (α, β), *che possono anche coincidere coi suoi estremi* α e β, *la funzione stessa* $f(x)$ *prenda uno stesso valore, esisterà sempre* nell'interno *dell'intervallo* (a, b) *almeno un punto determinato* x' *nel quale si avrà* $f'(x') = 0$.

In particolare dunque: *fra due valori* a *e* b *che annullano una funzione* $f(x)$ *che nell'intervallo* (a, b) *(gli estremi inclus.) è finita e continua e ammette una derivata determinata in tutti i punti, tranne tutt'al più negli estremi* a *e* b, *esiste sempre almeno un valore* x' (differente da a e da b) *che annulla la derivata* $f'(x)$.

Questo teorema costituisce una generalizzazione grandissima del teorema di *Rolle* che si dà nell'Algebra per le funzioni razionali intere. Qui viene dimostrato per tutte le funzioni finite e continue che hanno una derivata determinata (finita, o infinita e determinata di segno) in tutto l'intervallo che si considera tranne tutt'al più negli estremi.

4.° Questa osservazione ci conduce subito a dimostrare anche il seguente teorema, che può considerarsi come una generalizzazione di quello della osservazione 2ª, e che è anch'esso di una applicazione grandissima: *Se* $f(x)$ *è una funzione finita e continua in tutto un intervallo* (x_0, x_0+h), *in ogni punto del quale, tranne tutt'al più negli estremi, ammette sempre una derivata determinata; e se inoltre* $F(x)$ *è un'altra funzione che nello stesso intervallo è anch'essa finita e continua, e in ogni punto differente dagli estremi* x_0 *e* x_0+h *ammette una derivata che è finita e differente da zero, mentre in questi estremi può anche non avere derivata o averla uguale a zero o infinita, si avrà la formola seguente*

$$(3) \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)},$$

essendo θ *un numero compreso fra* 0 *e* 1 (0 *e* 1 *esclusi*).

Si osservi infatti che le condizioni poste per $F(x)$ ed $F'(x)$ portano che $F(x_0+h) - F(x_0)$ non sia zero (oss. 3ª), e si consideri la funzione

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)} \{ F(x) - F(x_0) \},$$

che si annulla per $x = x_0$ e per $x = x_0 + h$.

Per il teorema dell'osservazione precedente si vedrà subito che deve esistere un punto x', o $x_0+\theta h$, *interno* all'intervallo dato nel quale sia $\psi'(x_0+\theta h) = 0$, e perciò si avrà appunto la formola (3).

Si può notare che, invece di supporre che $F'(x)$ non sia mai zero o infinito fra x_0 e x_0+h, potremmo supporre che non lo fosse $f'(x)$, e non fosse $F(x_0+h) - F(x_0) = 0$, ecc. (*).

(*) Il teorema dimostrato può anche essere generalizzato in varî modi, e uno di questi modi è il seguente.

Siano $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ $n-1$ punti distinti qualsiansi presi in un intervallo (a, b) (gli estremi incl.) nel quale le n funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sono finite e continue; e in ogni punto della porzione da a_1 a a_{n-1} di questo intervallo (gli estr. a_1, a_{n-1} al più escl.) queste funzioni abbiano ciascuna una derivata determinata (finita o infinita), senza però che queste derivate siano mai infinite insieme.

Il determinante

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots\ldots & f_n(x) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \ldots\ldots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \ldots\ldots & f_n(a_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & \ldots & f_n(a_{n-1}) \end{vmatrix}$$

sarà una funzione $\varphi(x)$ che sarà anch'essa finita e continua fra a e b, che si annullerà nei punti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, e avrà una derivata determinata (§ 27 [pag. 29]) in ogni punto x fra a_1 e a_{n-1} (gli estr. a_1, a_{n-1} al più escl.); e quindi, pel teorema 3° dato sopra, fra due qualsiansi a_r e a_s dei punti $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ esisterà almeno un punto $x_{r.s}$ nel quale la derivata di $\varphi(x)$ sarà zero, cioè avremo la formola

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} f'_1(x_{r.s}) & f'_2(x_{r.s}) & \ldots & f'_n(x_{r.s}) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \ldots\ldots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \ldots\ldots & f_n(a_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & \ldots & f_n(a_{n-1}) \end{vmatrix} = 0.$$

Indicando quindi con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ gli n determinanti che vengono dalla matrice

$$(\gamma) \qquad \left\| \begin{matrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \ldots\ldots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \ldots\ldots & f_n(a_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & \ldots\ldots & f_n(a_{n-1}) \end{matrix} \right\|$$

sopprimendovi respettivamente la prima, la seconda, ..., e la n^a colonna, avremo

43. — Aggiungerò ora che la seconda parte del Teorema del § 41 [pag. 48] può essere completata, poichè si può facilmente dimostrare che: *Se $f(x)$ è una funzione finita e continua e ammette una derivata determinata in ogni punto di un dato intervallo (α, β) tranne tutt' al più negli estremi; e se in due punti a e b di questo intervallo, la derivata ha valori differenti* A, B, *questa derivata in uno o più punti* interni *all' intervallo (a, b) prenderà qualunque valore μ compreso fra* A *e* B *(*A *e* B *al più esclusi).*

Supponiamo infatti, per fissare le idee, $a<b$, e consideriamo la funzione $\varphi(x)=f(x)-\mu x-\nu$ (ν costante), che evidentemente è finita e continua nell'intervallo (a, b) (gli estr. incl.), e in ogni punto, tranne tutt'al più negli estremi, ammette sempre, come $f(x)$, una derivata determinata.

---

la formola generale notevole

$$(\delta)\quad \Delta_1 f'_1(x_{r,s})-\Delta_2 f'_2(x_{r,s})+\Delta_3 f'_3(x_{r,s})-\ldots+(-1)^{n-1}\Delta_n f'_n(x_{r,s})=0,$$

che col cambiare gli indici r e s darà luogo a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ formole simili cogli stessi coefficienti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, nelle quali però alcuni punti intermedii $x_{r,s}$, sebbene relativi a combinazioni differenti (a_r, a_s) dei punti $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, potranno anche essere gli stessi, con che allora il numero delle formole distinte verrà ad essere minore di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

In particolare se per una delle funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, per es. per la $f_n(x)$ saremo sicuri che la derivata non è mai zero fra a_r e a_s, come avverrà ad es. se $f_n(x)$ fra a_r e a_s non prenderà mai due volte lo stesso valore, allora la formola precedente ci darà l'altra

$$(-1)^n\Delta_n=\Delta_1\frac{f'_1(x_{r,s})}{f'_n(x_{r,s})}-\Delta_2\frac{f'_2(x_{r,s})}{f'_n(x_{r,s})}+\ldots+(-1)^{n-2}\Delta_{n-1}\frac{f'_{n-1}(x_{r,s})}{f'_n(x_{r,s})},$$

che esprime il determinante Δ_n relativo ai valori delle $n-1$ funzioni $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ nei punti $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ per gli altri determinanti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ ai quali dà luogo la matrice (γ), e pei valori delle derivate delle stesse funzioni e della $f_n(x)$ in un punto intermedio $x_{r,s}$ fra a_r e a_s.

E se saremo sicuri che uno dei determinanti $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, per es. Δ_i, è diverso da zero, la formola precedente ci darà anche il valore del rapporto $\frac{\Delta_n}{\Delta_i}$.

In particolare se si suppone $n=3$, e si prende $f_1(x)=1$, $f_2(x)=f(x)$, e $f_3(x)=F(x)$, con $a_1=x_0$, $a_2=x_0+h$, e si pongono per $f(x)$ e $F(x)$ fra x_0 e x_0+h le condizioni che si avevano sopra, si ritrova di qui la formola (3).

E in particolare ancora, se supponiamo, ad esempio, $f_1(x)=k_1$, $f_2(x)=x-k_2$, $f_3(x)=(x-k_3)^2, \ldots, f_{n-1}(x)=(x-k_{n-1})^{n-2}$, $f_n(x)=f(x)$, con $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}$ quantità costanti, ne dedurremo formole notevoli che varranno per ogni funzione $f(x)$ che fra a e b ha le solite particolarità; e in queste quando le costanti k_2, $k_3, \ldots k_{n-1}$ siano tutte eguali fra loro il determinante Δ_n sarà un determinante di Vandermonde.

Indicando con h un numero positivo sufficientemente piccolo, e supponendo dapprima A<B si vede subito che si ha

$$\lim\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}<0\ ,\ \text{e}\ \lim\frac{\varphi(b-h)-\varphi(b)}{-h}>0\ ;$$

e quindi esisterà un numero differente da zero e positivo ε tale che pei punti x compresi fra a e $a+\varepsilon$ (a escluso) e per quelli compresi fra $b-\varepsilon$ e b (b escluso), si avranno respettivamente le diseguaglianze $\varphi(x)-\varphi(a)<0$, $\varphi(x)-\varphi(b)<0$, le quali ci mostrano intanto che il minimo dei valori di $\varphi(x)$ (che pure deve esistere perchè $\varphi(x)$ è continua) non può essere nè nel punto a nè nel punto b.

Ne segue che nell'intervallo (a, b) esisterà almeno un punto *interno* x' nel quale la funzione $\varphi(x)$ prende effettivamente questo valor minimo, e in esso, pei valori positivi di h inferiori a un dato numero, si avrà evidentemente $\varphi(x'+h)-\varphi(x')\geq 0$, $\varphi(x'-h)-\varphi(x')\geq 0$, e perciò anche

$$\frac{\varphi(x'+h)-\varphi(x')}{h}\geq 0\ ,\ \frac{\varphi(x'-h)-\varphi(x')}{-h}\leq 0\ ;$$

quindi, poichè anche nel punto x' deve esistere una derivata determinata di $\varphi(x)$, sarà evidentemente $\varphi'(x')=0$, ovvero $f'(x')=\mu$.

Ragionamenti simili possono farsi pel caso di A>B; quindi è certo ora che esisterà sempre fra a e b almeno un punto interno x' tale che in esso si avrà $f'(x')=\mu$, e con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Questo teorema dà luogo evidentemente anche all'altro che può enunciarsi col dire che: *Quando una funzione $f(x)$ è finita e continua in tutti i punti di un dato intervallo (α, β) (gli estremi inclusi), e in ogni punto dello stesso intervallo tranne tutt' al più negli estremi ammette sempre una derivata determinata, questa derivata, per quanto possa anche essere infinite volte discontinua, fra α e β prenderà sempre qualunque valore compreso fra il suo limite inferiore e il suo limite superiore* Λ, perchè pei numeri indicati sopra con A e B potranno sempre prendere, se non precisamente λ e Λ, numeri $\lambda+\varepsilon$ e $\Lambda-\varepsilon_1$ vicini a λ e a Λ quanto si vuole se λ e Λ sono finiti, e numeri grandi quanto si vuole se uno o tutti e due questi limiti λ e Λ sono infiniti; e questo teorema, oltre a sussistere nel caso di λ differente da Λ, può riguardarsi come giusto anche nel caso di λ e Λ finiti e uguali tra loro, perchè allora evidentemente la derivata di $f(x)$ è sempre uguale a λ.

44. — Diamo subito qualche applicazione delle formole (2) e (3), incominciando dall'applicare la formola (2).

Sia perciò $f(x)$ una funzione che in un piccolo intervallo a destra o a sinistra di un punto speciale, per es. nell'intorno a destra $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$, è finita e continua, e ammette una derivata determinata in tutti i punti, tranne tutt'al più negli estremi α e $\alpha+\varepsilon$.

Indicando con h una quantità positiva arbitrariamente piccola, per la formola (2) si avrà $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha+\theta h)$, essendo al solito θ un valore speciale dipendente da α e da h e dalla natura della funzione $f(x)$, e compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi).

È chiaro che i valori di $f'(x)$ per $x=\alpha+0$ se avranno per limite l'infinito dovranno averlo determinato di segno, perchè se avvenisse che in punti x_1 e x_2 compresi in un intorno comunque piccolo $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ a destra del punto α la $f'(x)$ prendesse valori grandissimi positivi ω, e valori negativi grandissimi $-\omega_1$, fra x_1 e x_2, pel teorema del paragrafo precedente, essa prenderebbe anche qualunque valore compreso fra $-\omega_1$ e ω, e allora anzichè aver per limite $\pm\infty$ non avrebbe nessun limite; dunque poichè evidentemente, se i varî valori di $f'(x)$ per $x=\alpha+0$ hanno un limite determinato (finito quindi o infinito e determinato di segno), anche i valori speciali $f'(\alpha+\theta h)$ che figurano nella formola precedente per $h=+0$ avranno questo stesso limite, si può evidentemente asserire che: *Se la funzione $f(x)$ è finita e continua in un intorno a destra di un punto α (α inclus.), e nei punti x di quest' intorno, tranne tutt' al più nel punto α nel quale è incerto, ammette sempre una derivata determinata $f'(x)$, allora se questa derivata per $x=\alpha+0$ avrà un limite determinato (finito, o infinito e determinato di segno) la derivata di $f(x)$ presa nel punto α a destra esisterà essa pure e sarà uguale a questo limite stesso.*

Invece se $f'(x)$ per $x=\alpha+0$ non avrà un limite determinato, ma oscillerà fra limiti finiti mentre x si avvicina ad α indefinitamente a destra, allora o la derivata di $f(x)$ presa nel punto α a destra sarà ancora determinata e finita, o il rapporto incrementale destro corrispondente $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ col tendere di h a zero per valori positivi oscillerà anche esso fra limiti finiti, che saranno compresi fra quelli fra i quali oscilla $f'(x)$, e il più spesso saranno più ristretti di questi.

Risultati simili si hanno per gli intorni di α a sinistra.

Questo teorema è utile specialmente pel caso in cui la funzione $f(x)$ che si considera ammette ordinariamente una derivata, e solo in certi punti speciali o non l'ammette o si è incerti sulla esistenza e sulla natura di essa, come appunto è avvenuto in molti casi nei paragrafi precedenti.

Così per es. si può dire ora che la derivata di $y=\text{arc sen}\,x$, a sinistra per $x=1$, e a destra per $x=-1$, quando y è nel primo o nel quarto quadrante è $+\infty$, mentre quando y è nel secondo o nel terzo è $-\infty$.

Similmente osservando che per x diverso da zero e positivo la derivata di $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, per il teorema precedente si può concludere che per $x=0$ questa derivata a destra è $+\infty$, come già trovammo ecc.

E così pure prendendo per es. le funzioni che per x diverso da zero sono respettivamente uguali a $x\,\text{sen}(\log x^2)$, e a $x^2\,\text{sen}\frac{1}{x}$, e per $x=0$ sono zero, e osservando che, per x diverso da zero, le loro derivate respettive sono

$$\text{sen}(\log x^2)+2\cos(\log x^2),\quad \text{e}\quad 2x\,\text{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\,,$$

e queste derivate non hanno un limite determinato quando x si avvicina indefinitamente a zero a destra o a sinistra, ma oscillano fra limiti finiti, per il teorema precedente si vedrà subito che le derivate di queste funzioni prese nel punto zero a destra o a sinistra, potranno non esistere; ma se non esistono, i loro rapporti incrementali corrispondenti dovranno mantenersi sempre fra limiti finiti.

E difatti ricorrendo alla definizione per calcolare queste derivate anche nel punto $x=0$, si trova che per la prima funzione la derivata non esiste nè a destra nè a sinistra, ed il rapporto incrementale corrispondente $\frac{f(\pm h)-f(0)}{\pm h}$, essendo uguale a $\text{sen}(\log h^2)$, oscilla fra -1 e 1 al continuo impiccolirsi di h in valore assoluto; mentre per la seconda funzione si trova invece che nel punto $x=0$ esiste ancora la derivata ordinaria ed è uguale a zero, perchè essa non è altro che il limite per $h=\pm 0$ di $\frac{h^2\,\text{sen}\frac{1}{h}}{h}$ o di $h\,\text{sen}\frac{1}{h}$, e questo limite è evidentemente lo zero.

45. — Diamo ora qualche applicazione della formola (3).

Supponiamo perciò che la nostra funzione $f(x)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad un punto α a destra o a sinistra, per es. a destra, possa anche crescere indefinitamente o divenire infinitesima, o anche possa avere una discontinuità di prima o di seconda specie per $x=\alpha$; ma fuori del punto α nei punti di un intorno sufficientemente piccolo di α a destra, abbia sempre valori finiti e sia continua e ammetta una derivata determinata $f'(x)$; e, servendoci della formola (3), proponiamoci di studiare come il modo di comportarsi della funzione $f(x)$, coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α a destra, dipenda dal modo di comportarsi della derivata $f'(x)$.

Per questo nella formola (3) si supponga dapprima $F(x)=(x-\alpha)^{-k}$, essendo k una costante qualsiasi diversa da zero; e si prenda $x_0=\alpha+\delta$,

$x_0 + h = \alpha + \varepsilon$, con δ ed ε numeri positivi diversi da zero, ma arbitrariamente piccoli e tali che $\delta < \varepsilon$.

Allora evidentemente la formola (3) sarà applicabile tanto nel caso di k positivo, quanto in quello di k negativo, perchè il punto α non è contenuto nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$, e quindi si avrà

$$f(\alpha+\varepsilon) - f(\alpha+\delta) = (\delta^{-k} - \varepsilon^{-k})\,\frac{f'(\alpha+\delta_1)}{k\,\delta_1^{-k-1}}, \tag{4}$$

con δ_1 compreso fra δ e ε; e di qui si trarrà

$$f(\alpha+\varepsilon)\,\delta^k - f(\alpha+\delta)\,\delta^k = \left\{1 - \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k\right\} \frac{f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1}}{k}.$$

Ora evidentemente il numero positivo ε può supporsi piccolo quanto si vuole; e se si suppone k positivo, per quanto piccolo si prenda ε si potrà poi prendere δ ancora differente da zero e positivo, e talmente più piccolo che le due quantità $f(\alpha+\varepsilon)\,\delta^k$, $\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k$ siano minori di quella quantità che più ci piace; quindi evidentemente per k positivo si potrà scrivere

$$\lim_{\delta=0} f(\alpha+\delta)\,\delta^k = -\frac{1}{k} \lim_{\delta_1=0} f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1},$$

tutte le volte che uno almeno di questi due limiti sia determinato (finito cioè, o infinito e determinato di segno); e poichè quando $f'(\alpha+\delta)\,\delta^{k+1}$ per $\delta = \pm 0$, o $f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}$ per $x = \alpha + 0$, hanno un limite determinato e finito, o hanno per limite l'infinito, questo limite è anche evidentemente quello di $f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1^{k+1}$, si conclude che in questi casi si avrà

$$\lim f(x)\,(x-\alpha)^k = -\frac{1}{k} \lim f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1},$$

i limiti intendendosi presi per $x = \alpha + 0$; e questo ci permette intanto di affermare che: *Se la funzione $f(x)$ nei punti x di un intorno a destra di α (α escluso) è finita e continua e ammette sempre una derivata determinata $f'(x)$ che col tendere di x ad α può anche crescere oltre ogni limite; allora se per $x = \alpha + 0$ la derivata $f'(x)$ diviene infinita di un ordine $k+1$ superiore al primo, e per modo che il prodotto $f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1}$ per $x = \alpha + 0$ abbia un limite determinato finito e differente da zero A, la funzione $f(x)$ per $x = \alpha + 0$ diverrà infinita dell'ordine k, e si avrà*

$$\lim f(x)\,(x-\alpha)^k = -\frac{A}{k};$$

e se $f'(x)$ diviene infinita per $x = \alpha + 0$ di un ordine superiore a un numero $k+1$ maggiore dell'unità per modo che sia $\lim f'(x)\,(x-\alpha)^{k+1} = +\infty$, *o* $= -\infty$, *la $f(x)$ diverrà infinita di ordine superiore a k, e si avrà rispettivamente* $\lim f(x)\,(x-\alpha)^k = -\infty$, o $= +\infty$; *mentre se $f'(x)$ diviene infinita per $x = \alpha + 0$ di ordine inferiore a $k+1$, la $f(x)$ diverrà infinita di ordine inferiore a k, e quindi potrà anche restar finita.*

Similmente, prendendo invece nella formola (3) $F(x) = \log(x-\alpha)$, e osservando che allora si ha

$$\frac{f(\alpha+\varepsilon)}{\log\delta} - \frac{f(\alpha+\delta)}{\log\delta} = -\left(1 - \frac{\log\varepsilon}{\log\delta}\right) f'(\alpha+\delta_1)\,\delta_1,$$

dove δ_1 è ancora compreso fra δ e ε (δ e ε esclusi), con ragionamenti analoghi a quelli fatti sopra si troverà subito che: *Conservando le ipotesi precedenti intorno alla funzione $f(x)$ e alla sua derivata $f'(x)$, si può dire anche che se questa derivata $f'(x)$ per $x = \alpha + 0$ diviene infinita del prim' ordine, e per modo che il prodotto $f'(x)\,(x-\alpha)$ abbia per limite una quantità determinata finita e differente da zero A, la funzione $f(x)$ diverrà infinita come* $\log(x-\alpha)$, *e il quoziente* $\frac{f(x)}{\log(x-\alpha)}$ *avrà anche esso per limite A; e se la derivata $f'(x)$ diviene infinita di ordine superiore al primo per modo che sia* $\lim f'(x)\,(x-\alpha) = +\infty$, *o* $= -\infty$, *la funzione $f(x)$ diverrà infinita di ordine superiore a quello di* $\log(x-\alpha)$, *e si avrà* $\lim \frac{f(x)}{\log(x-\alpha)} = +\infty$ *o* $= -\infty$, *mentre se $f'(x)$ per $x = \alpha + 0$ diviene infinita di ordine inferiore al primo, la funzione $f(x)$ diverrà infinita di ordine inferiore a quello di* $\log(x-\alpha)$, *e quindi potrà anche restar finita;* e in tutti e tre questi casi si avrà sempre $\lim \frac{f(x)}{\log(x-\alpha)} = \lim f'(x)\,(x-\alpha)$, i limiti essendo presi per $x = \alpha + 0$.

46. — Supponiamo ora nella formula (4) k negativo e uguale a $-p$; si avrà

$$f(\alpha+\varepsilon) - f(\alpha+\delta) = (\varepsilon^p - \delta^p)\,\frac{f'(\alpha+\delta_1)}{p\,\delta_1^{p-1}}, \tag{5}$$

e quindi evidentemente quando avvenga che, con p positivo e fisso scelto a piacer nostro, le quantità $\frac{f'(\alpha+\delta)}{\delta^{p-1}}$ per $\delta = +0$, o $\frac{f'(x)}{(x-\alpha)^{p-1}}$ per $x = \alpha + 0$, abbiano per limite zero o una quantità finita, o oscillino fra limiti finiti (per modo cioè da mantenersi sempre numericamente inferiori ad una quantità finita), si potrà sempre determinare ε in modo che, per tutti i valori di δ inferiori ad ε, la differenza $f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha+\delta)$ sia sempre numericamente inferiore a qualunque numero dato σ.

Ma se ciò accade, pel noto teorema di Cauchy sui limiti, la funzione $f(x)$ per $x=\alpha+0$ avrà un limite determinato e finito A; talchè, osservando anche che, se $f'(x)$ si mantiene sempre numericamente inferiore a un numero finito, il rapporto $\frac{f'(x)}{(x-\alpha)^{p-1}}$ (che può anche scriversi sotto la forma $f'(x)\,(x-\alpha)^{1-p}$) per $p<1$ ha per limite lo zero, e se $f'(x)$ diviene infinita per $x=\alpha+0$, ma di un ordine che è inferiore al primo, e differisce dal primo per un numero p compreso fra 0 e 1 o più di questo numero, lo stesso rapporto si mantiene sempre numericamente inferiore ad una quantità finita, si potrà intanto evidentemente concludere che: *Se nei punti di un intorno di α a destra (α escluso) la funzione $f(x)$ ammette una derivata determinata che si mantiene sempre numericamente inferiore a un numero finito, o che, se cresce indefinitamente col tendere di x ad α a destra, diviene infinita soltanto di un ordine che è inferiore al primo e che differisce dal primo per un numero finito p o più di questo numero, allora la funzione $f(x)$ coll'avvicinarsi indefinitamente di x ad α* a destra *si manterrà sempre numericamente inferiore ad una quantità finita, e avrà un limite determinato; per modo che nel punto α* a destra *la funzione $f(x)$ stessa sarà continua o avrà soltanto una discontinuità ordinaria; e quindi cambiando, se occorre, il valore della funzione $f(x)$ nel punto α, col prendere $f(\alpha+0)$ invece di $f(\alpha)$ per valore di $f(x)$ nel punto α, la continuità di $f(x)$ in questo punto α* a destra *verrà sempre ad aversi.*

Così essendo, e supponendo perciò senz'altro che la funzione $f(x)$ sia continua anche nel punto α a destra, si osserverà che allora nella formola (5) si può supporre senz'altro $\delta=0$, e si ha perciò $\frac{f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)}{\varepsilon^p}=\frac{f'(\alpha+\delta_1)}{p\,\delta_1^{p-1}}$; talchè in particolare col supporre ora che sia $f(\alpha)=0$, si può evidentemente concludere che: *Se per $x=\alpha+0$ la funzione $f(x)$ diviene infinitesima, e la sua derivata diviene invece infinita, ma di ordine inferiore al primo per un numero p, per modo che $f'(x)\,(x-\alpha)^{1-p}$ abbia un limite determinato e finito A, la funzione $f(x)$, sempre* per $x=\alpha+0$, *diverrà infinitesima di ordine p e si avrà $\lim\frac{f(x)}{(x-\alpha)^p}=\frac{A}{p}$; e se $f'(x)$ diviene infinita per $x=\alpha+0$ ma di ordine inferiore o di ordine superiore a $1-p$ per modo cioè che nel primo caso sia $\lim f'(x)\,(x-\alpha)^{1-p}=0$, e nel secondo caso sia $\lim f'(x)\,(x-\alpha)^{1-p}=+\infty$ o $-\infty$, la funzione $f(x)$ per $x=\alpha+0$ diverrà infinitesima di ordine superiore o inferiore a p respettivamente; mentre infine se la funzione $f'(x)$ diviene anch'essa infinitesima e di ordine $p-1$, la fun-*

zione data $f(x)$ diverrà infinitesima di un ordine p superiore di un'unità all'ordine di infinitesimo di $f'(x)$ per $x=\alpha+0$.

Risultati analoghi si otterrebbero facendo nella (3) $F(x)=\frac{1}{\log(x-\alpha)}$; e quando tutti questi risultati si applichino ad un tempo sì alle derivate a destra che a quelle a sinistra del punto α, essi verranno relativi ai valori di $f(x)$ sì a destra che a sinistra del punto α, ecc.

47. — Prima di por fine a questi studî generali noi esporremo alcuni altri risultati che sono di un'applicazione continua.

Diciamo perciò che una funzione finita $f(x)$ è *crescente* o *decrescente in un punto α a destra* secondo che il valore $f(\alpha)$ che essa ha in quel punto è minore respettivamente o maggiore di quelli che essa ha negli altri punti di un intorno sufficientemente piccolo di α a destra; e diciamo invece che essa è *crescente* o *decrescente in un punto α a sinistra* secondochè il valore $f(\alpha)$ che essa ha in quel punto è maggiore respettivamente o minore di quelli che essa ha negli altri punti di un intorno sufficientemente piccolo di α a sinistra.

E nel caso che $f(x)$ si consideri dalle due parti di un punto α, nel quale essa è finita, diciamo semplicemente che essa *è crescente nel punto* α quando è crescente a destra e a sinistra di α; e diciamo invece che essa è *decrescente* nel punto α quando è decrescente sì a destra che a sinistra di α; e nel caso infine che nel punto α la funzione $f(x)$ sia uguale a $+\infty$ o a $-\infty$ avvertiamo soltanto (senza entrare in speciali schiarimenti che sarebbero certo superflui) che nello stesso punto α $f(x)$ potrà considerarsi ancora come crescente da una parte e decrescente dall'altra ecc.

Fermandoci ora al caso in cui $f(x)$ nel punto α ha un valore finito, osserviamo che se in un punto α a destra questa funzione $f(x)$ è crescente o è decrescente, esisterà sempre un valore differente da zero e positivo h_1 tale che, per h diverso da zero e positivo e inferiore ad h_1, si avrà sempre $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$, o sempre $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$ respettivamente; mentre se nel punto α a sinistra la funzione $f(x)$ è crescente o è decrescente, pei valori di h differenti da zero e positivi e inferiori a un certo numero h_1 si avrà sempre $f(\alpha-h)-f(\alpha)<0$, o sempre $f(\alpha-h)-f(\alpha)>0$ respettivamente; talchè, se la $f(x)$ si considera nello stesso tempo a destra e a sinistra di α, e se in α essa è crescente, avremo ad un tempo le due disuguaglianze

$$(6)\qquad f(\alpha+h)-f(\alpha)>0\quad,\quad f(\alpha-h)-f(\alpha)<0\;;$$

mentre se $f(x)$ in α è decrescente, avremo invece le altre

$$(7)\qquad f(\alpha+h)-f(\alpha)<0\quad,\quad f(\alpha-h)-f(\alpha)>0\;;$$

e viceversa.

Con queste definizioni poi non possiamo lasciare di osservare che quando una funzione finita $f(x)$ si consideri per es. dalle due parti di un punto α, potrà anche avvenire che in questo punto essa non possa riguardarsi nè come crescente nè come decrescente; e ciò perchè essa in quel punto abbia un valore massimo o minimo fra quelli che essa prende in tutti gli intorni sufficientemente piccoli del punto stesso, o perchè in un piccolo intorno di quel punto stesso essa abbia sempre uno stesso valore, o perchè infine, oscillando essa continuamente nelle vicinanze di α, finisca per passare continuamente pel valore $f(\alpha)$ o prendere continuamente valori maggiori e valori minori di $f(\alpha)$ (come avviene per es. per la funzione che per $x=0$ è uguale ad A e per x diverso da zero è uguale ad $A+x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$), per modo cioè che non sia possibile trovare il numero h_1 tale che per $h<h_1$ siano sempre soddisfatte tutte e due le diseguaglianze (6) o le diseguaglianze (7).

48. — Ammesso ora che una funzione finita $f(x)$ a destra o a sinistra di un punto α sia crescente, è chiaro che il corrispondente rapporto incrementale destro o sinistro $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$, o $\frac{f(\alpha-h)-f(\alpha)}{-h}$ coll'impiccolire di h finirà col mantenersi sempre discosto da zero e positivo, e solo potrà avere per limite zero per $h=+0$; e se la funzione $f(x)$ a destra e a sinistra di un punto α sarà decrescente, il corrispondente rapporto incrementale destro o sinistro coll'impiccolire di h finirà per mantenersi sempre discosto da zero e negativo, e solo potrà avere per limite zero.

Viceversa, se per es. il rapporto incrementale destro pel punto α coll'impiccolire di h finirà per esser sempre discosto da zero e positivo, o sempre discosto da zero e negativo, e solo potrà avere per limite lo zero per $h=+0$, la funzione $f(x)$ nel punto α a destra sarà crescente o decrescente respettivamente ecc.; talchè in ogni caso valendosi dei rapporti incrementali di $f(x)$ (i quali evidentemente hanno un significato anche se la funzione nel punto corrispondente α è discontinua) si potrà sempre decidere se in un punto α, da una o da tutte e due le parti, una funzione $f(x)$ sia crescente o decrescente, o non sia nè crescente nè decrescente, ecc.

In particolare dunque nel caso che nel punto α per es. a destra la funzione $f(x)$, oltre essere finita e continua, abbia una derivata determinata a destra, si potrà asserire che quando questa derivata sia differente da zero, la funzione data $f(x)$ sarà crescente o decrescente nel punto α a destra secondochè la derivata stessa sarà positiva o negativa; e ciò perchè allora evidentemente il rapporto incrementale destro $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ coll'impiccolire

di h finirà per mantenersi sempre discosto da zero e sempre positivo o sempre negativo respettivamente; e così più particolarmente ancora si può ora affermare che: *Se in un punto α una funzione $f(x)$, oltre essere finita e continua, ha la sua derivata ordinaria determinata e differente da zero, la funzione stessa nel punto α sarà crescente o decrescente secondochè questa derivata è positiva o negativa, per modo che quando la derivata di una funzione finita e continua $f(x)$ sia sempre determinata in tutti i punti di un dato intervallo (a, b) non si avrà incertezza altro che in quei punti nei quali questa derivata sarà uguale a zero.*

49. — L'ultimo teorema viene costantemente applicato pel confronto dei differenti valori di una funzione, o per studiare il loro modo di variare quando la variabile cresce o diminuisce. Noi perciò riteniamo utile di applicarlo subito ai seguenti esempi.

1.° Si abbia la funzione $f(x)$ che per x diverso da zero è uguale a $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, e per $x=0$ è uguale a 1.

La sua derivata per x diverso da zero sarà

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg} x)}{x^2};$$

quindi poichè per x compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (0 escluso) si ha sempre $x<\operatorname{tg} x$, e $\cos x$ è positivo, si conclude che per i valori di x diversi da zero e compresi fra zero e $\frac{\pi}{2}$ la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è sempre decrescente, e lo stesso avverrà anche per x fra $\frac{\pi}{2}$ e π $\left(\frac{\pi}{2}\text{ e }\pi\text{ incl.}\right)$, perchè allora evidentemente $f'(x)$ è sempre negativo.

Pel punto $x=0$ la derivata di $f(x)$ si calcolerà in seguito cercando il limite di $\frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h}-1}{h}$ o $\frac{\operatorname{sen} h-h}{h^2}$ per $h=\pm 0$, o anche per mezzo del teorema del § 44 [pag. 55] considerandola come il limite per $x=\pm 0$ dei valori che ha $f'(x)$ quando x è diverso da zero; però siccome si troverà che questa derivata è zero, non si potrà trarre da ciò nessuna conseguenza intorno al modo di comportarsi di $f(x)$ per $x=0$ a destra, ma converrà ricorrere al rapporto incrementale destro.

Ora siccome questo rapporto è $\frac{\operatorname{sen} h-h}{h^2}$, è evidente che, per h diverso da zero e positivo, esso è negativo; quindi si può ora evidentemente concludere che la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, il cui valore per $x=0$ si suppone uguale all'unità, è sempre decrescente da 0 a π; talchè, osservando che per $x=0$ essa è l'unità, e per $x=\frac{\pi}{2}$ è uguale a $\frac{2}{\pi}$, e per $x=\pi$ è zero, si può anche evidentemente affermare che per x compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ la funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è sempre compresa fra 1 e $\frac{2}{\pi}$, e fra $\frac{\pi}{2}$ e π è compresa fra $\frac{2}{\pi}$ e 0, e fra 0 e π diminuisce sempre andando da 1 a zero.

Non lascerò di fare osservare che, anche indipendentemente dall'esame dell'effettivo valore $\frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2}$ del rapporto incrementale destro relativo al punto $x=0$, si poteva subito vedere, che per h diverso da 0 e positivo esso doveva essere negativo, giacchè pel teorema degli accrescimenti finiti (§ 42 2.° [pag. 51]) si riscontra subito in generale che quando la funzione finita e continua $f(x)$ nei punti di un intervallo (α, β) (α e β al più esclusi) ha la sua derivata sempre determinata e sempre differente da zero e dello stesso segno, e si ha per es. $\alpha<\beta$, anche i rapporti incrementali destri relativi al punto α saranno sempre differenti da zero e avranno il segno che avrà $f'(x)$ fra α e β, e solo il loro limite potrà essere lo zero.

Ed aggiungerò anche che quando fra α e β (α e β al più esclusi) è soddisfatta la condizione che $f'(x)$ sia sempre differente da zero, pel teorema del § 43 [pag. 54] sarà già soddisfatta di per sè la condizione che $f'(x)$ sia sempre dello stesso segno fra α e β (gli estremi α e β al più esclusi).

2.° Avendosi $f(x)=x\cos x - \operatorname{sen} x$, se si osserverà che derivando si ha $f'(x) = -x \operatorname{sen} x$, pel teorema del paragrafo precedente e per la osservazione fatta ora, si concluderà subito che da 0 a π la funzione data è sempre decrescente, da π a 2π è crescente, da 2π a 3π è decrescente, ecc.

3.° Avendosi per es. la funzione $f(x)=\log x + \cos x$, si osserverà che per $x=0$ essa è $=-\infty$, e per x diverso da zero e positivo la sua derivata è $\frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$, e si concluderà subito che se α_1 è il valore fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ che annulla la derivata $\frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$, la funzione data $f(x)$ fra 0 e α_1 sarà sempre crescente; e se α_2 è il valore successivo di x che annulla $\frac{1}{x} - \operatorname{sen} x$, la funzione $f(x)$ fra α_1 e α_2 sarà sempre decrescente, ecc.

IV.

Derivazione per serie

50. — Uno dei processi che spesso torna comodo di usare pel calcolo delle derivate è quello della *derivazione per serie;* il quale non è altro in sostanza che una applicazione del teorema che già abbiamo dato per la derivata delle somme composte di un numero finito di termini, esteso, sotto certe condizioni, al caso in cui il numero di questi termini è infinito.

Nell'applicare però questo processo conviene andare molto cauti, perchè quando si ha una funzione $f(x)$ espressa per mezzo di una serie di termini che in un punto a hanno ciascuno una derivata determinata e finita, non sempre avviene che la derivata di questa funzione, se pure esiste, sia la somma della serie formata dalle derivate dei singoli termini della serie primitiva.

Nè ciò può a noi recar meraviglia per quanto sappiamo intorno ai limiti delle serie, e dopo quanto dicemmo quando ci occupammo delle derivate delle somme composte di un numero finito di termini; che anzi fin d'allora fummo portati naturalmente a pensare che il teorema relativo alle derivate di queste somme potesse non restare sempre applicabile al caso in cui il numero dei termini che le compongono è infinito; e del resto poi i numerosi esempi che s'incontrano in analisi non lasciano alcun dubbio intorno alla inesattezza che, almeno in generale, si ha in quel teorema quando si estende alle serie, se non si introducono certe condizioni speciali.

Essendo però comodissimo in molti casi il metodo di derivazione per serie, ben s'intende quanto sia utile il conoscere alcuni dei casi nei quali esso è pienamente rigoroso; e noi esporremo perciò i teoremi seguenti.

51. **Teorema I.** — *Se in un intorno comunque piccolo ma differente da zero* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *di un punto* a, *i termini* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ *di una serie convergente* Σu_n *sono funzioni finite di* x *che per* $x=a$ *sono continue*

e ammettono anche una derivata determinata e finita u'_n, qualunque cosa poi avvenga per l'esistenza o per la natura delle derivate negli altri punti, allora tutte le volte che pei punti $a+\delta$ che cadono nello stesso intorno (a escluso) la serie dei rapporti incrementali $\sum\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}\right\}$ *è convergente in egual grado, la somma $f(x)$ della serie Σu_n per $x=a$ avrà anch'essa una derivata determinata e finita che sarà la somma della serie $\Sigma u'_n$ delle derivate dei suoi termini, la quale sarà convergente o si ridurrà a un polinomio.*

Questo teorema risulta immediatamente, come caso particolarissimo, da un altro che già conosciamo sui limiti delle serie.

52. **Teorema II.** — *Affinchè la somma $f(x)$ di una serie convergente Σu_n, i cui termini soddisfano ancora alle condizioni precedenti, abbia una derivata determinata e finita per $x=a$, e questa sia la somma della serie $\Sigma u'_n$ delle derivate di $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, è necessario e sufficiente:*

1.° che questa serie $\Sigma u'_n$ delle derivate sia convergente;

2.° che, per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ, si possa trovare un numero differente da zero e positivo ε tale che, per ogni valore speciale di δ numericamente inferiore a ε, e pel quale il punto $a+\delta$ cade nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$, esista un numero finito m variabile con δ, e non inferiore ad un numero dato m' (dipendente soltanto da σ), pel quale le tre quantità $\sum_1^m\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}$, $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, *e* $\frac{R_m(a)}{\delta}$ *siano tutte numericamente inferiori a σ; intendendo qui in generale che $R_m(x)$ rappresenti il resto $\sum_{m+1}^{\infty} u_n$ della serie Σu_n pel valore x della variabile.*

Osserviamo infatti che se queste condizioni sono soddisfatte, siccome la serie $\Sigma u'_n$ è convergente, esisterà un numero finito m' tale che il resto R'_n di questa serie per $n \geq m'$ sia numericamente inferiore a σ; e quindi poichè qualunque sia m si può sempre porre

$$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\sum u'_n=\sum_1^m\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}+$$
$$+\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}-\frac{R_m(a)}{\delta}-R'_m,$$

supponendo che m sia un numero maggiore di m' che pel valore di δ che si considera soddisfa alle condizioni dette sopra, si vedrà subito che in valore assoluto si ha $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\sum u'_n<4\sigma$, per tutti i valori di δ diversi da zero e numericamente inferiori ad ε che possono considerarsi; e

questo mostra intanto che, se le dette condizioni sono soddisfatte, si ha $\lim\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}=\sum u'_n$, cioè si ha $f'(a)=\sum u'_n$.

Viceversa se $f(x)$ per $x=a$ ha una derivata determinata e finita che è la somma della serie $\Sigma u'_n$, questa serie sarà convergente; e allora oltre ad esistere un numero m' tale che per $m \geq m'$ si abbia in valore assoluto $R'_m<\frac{\sigma}{4}$, esisterà anche un numero ε differente da zero e positivo e tale che, per tutti i valori di δ diversi da zero e numericamente inferiori ad ε la differenza $\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}-\sum u'_n$ sia essa pure numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{4}$.

D'altra parte, a causa della convergenza di Σu_n per tutti i valori di x fra $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$ che cadono nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$, per ognuno dei valori di δ che si considerano, presi separatamente, esiste evidentemente un numero corrispondente $m \geq m'$ pel quale le due quantità $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$ saranno ambedue numericamente inferiori a $\frac{\sigma}{4}$, e questo numero m, sebbene coll'impiccolire di δ andrà crescendo indefinitamente, per ogni valore speciale di δ avrà sempre un valore finito; dunque per questi valori di δ e di m si avrà in valore assoluto $\sum_1^m\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}-u'_n\right\}<\sigma$, e con ciò il teorema resta completamente dimostrato.

53. — I teoremi precedenti suppongono soltanto l'esistenza delle derivate dei termini u_n della serie Σu_n *nel punto speciale a*, senza occuparci di ciò che accade nei punti vicini.

Quando però si sappia che questi termini ammettono una derivata determinata e finita non soltanto nel punto a ma in tutti i punti di un intorno sufficientemente piccolo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ del punto stesso a, allora osservando che lo stesso accade (§ 27 [pag. 29]) per tutte le somme $\sum_1^m u_n(x)$ qualunque sia il numero m purchè finito, e indicando con $u'_n(x)$ la derivata di $u_n(x)$, si vedrà subito che per tutti i valori di δ pei quali il punto $a+\delta$ cade nell'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$, pel teorema degli accrescimenti finiti (§ 42 2.° [pag. 51]), si ha

$$\sum_1^m\left\{\frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta}\right\}=\frac{\sum_1^m u_n(a+\delta)-\sum_1^m u_n(a)}{\delta}=\left[\sum u'_n(x)\right]_{x=a+\theta\delta},$$

ovvero

$$\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u'_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} = \sum_1^m \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\},$$

ove θ è un numero positivo che dipende da m e da δ e che è lo stesso per tutti i termini della nostra somma; e quindi in questo caso la seconda delle condizioni del teorema precedente si può ridurre allora a una condizione del tutto simile per le tre quantità $\sum_1^m \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\}$, $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, e $\frac{R_m(a)}{\delta}$.

54. — Restando ora in quest'ultimo caso, nel quale cioè si ammette che i termini u_n della nostra serie abbiano una derivata determinata e finita *in ogni punto* di un intorno di a, è facile vedere che considerazioni simili alle precedenti conducono a dimostrare anche il seguente

Teorema III. — *Se nei punti di ogni intorno sufficientemente piccolo* $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ *di un punto* a *una serie* Σu_n *è convergente e i suoi termini ammettono ciascuno una derivata determinata e finita; e se nello stesso intorno la serie* $\Sigma u'_n(x)$ *di queste derivate è convergente in egual grado; allora anche la somma* $f(x)$ *della serie* Σu_n *nel punto* a *avrà una derivata determinata e finita che sarà la somma della serie corrispondente delle derivate* $\Sigma u'_n(a)$.

Si osservi infatti che in questo caso la prima delle condizioni del teorema II. è già soddisfatta, e s'indichi con m' un numero tale che, per $m \geq m'$ e per tutti i valori di x fra $a-\varepsilon_1$ e $a+\varepsilon_2$, il resto $R'_n(x)$ della serie $\Sigma u'_n(x)$ sia numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{8}$.

Questo numero m' esisterà perchè da $a-\varepsilon_1$ a $a+\varepsilon_2$ la serie $\Sigma u'_n(x)$ è convergente in ugual grado, e comunque sia poi preso un numero $m > m'$ si avrà in valore assoluto $R_m - R_{m'} = \sum_{m'+1}^{m} u'_n(x) < \frac{\sigma}{4}$; quindi osservando che si ha evidentemente

$$\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} = \sum_1^{m'} \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} +$$
$$+ \sum_{m'+1}^{m} \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\},$$

ove θ è un numero compreso fra 0 e 1 che dipende da m e da δ e che è lo stesso in tutti i termini della somma $\sum_{m'+1}^{m}$, si vede intanto che per tutti i valori di δ da $-\varepsilon_1$ a ε_2 e per tutti i valori di m superiori ad m',

l'ultima somma $\sum_{m'+1}^{m} \left\{ u'_n(a+\theta\delta) - u'_n(a) \right\}$, che evidentemente è uguale a $\sum_{m'+1}^{m} u'_n(a+\theta\delta) - \sum_{m'+1}^{m} u'_n(a)$, sarà numericamente inferiore a $\frac{\sigma}{2}$.

D'altra parte, per essere m' finito, esiste sempre un numero ε tale che per tutti i valori di δ numericamente inferiori ad ε si ha in valore assoluto $\sum_1^{m'} \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\} < \frac{\sigma}{2}$, giacchè la somma $\sum_1^{m'} u_n(x)$ per $x=a$ ammette per derivata $\sum_1^{m'} u'_n(a)$; dunque si può intanto affermare che *per ogni valore* di m non inferiore a m', e per gli stessi valori di ε e di δ, la somma $\sum_1^m \left\{ \frac{u_n(a+\delta)-u_n(a)}{\delta} - u'_n(a) \right\}$ sarà necessariamente minore di σ.

Si aggiunga ora che a causa della convergenza di Σu_n in tutto l'intervallo $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ per ognuno degli stessi valori di δ esiste un corrispondente valore di $m \geq m'$ pel quale le due quantità $\frac{R_m(a+\delta)}{\delta}$, $\frac{R_m(a)}{\delta}$ sono anch'esse numericamente inferiori a σ; si concluderà con ciò evidentemente che anche la seconda delle condizioni del teorema II sotto la forma cui l'abbiamo ridotta nel paragrafo precedente è soddisfatta, e questo dimostra completamente il teorema enunciato.

Si deve anche notare che il teorema dimostrato sussiste per tutti i punti dell'intorno $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2)$ differenti dagli estremi $a-\varepsilon_1$, $a+\varepsilon_2$, poichè per ognuno di questi punti x si potrà sempre fare un intorno $(x-\varepsilon'_1, x-\varepsilon'_2)$ tutto contenuto nel primitivo $(a-\varepsilon_1, a-\varepsilon_2)$, e pel quale le condizioni poste nell'enunciato del teorema saranno tutte soddisfatte.

55. — Il teorema dimostrato è il più semplice che finora si abbia intorno alla derivazione per serie, ed è quello perciò di cui ci si vale più comunemente per assicurarsi della possibilità di tali derivazioni.

Esso poi ci fa subito conoscere due classi di serie alle quali la derivazione termine a termine è sempre applicabile; e queste classi di serie sono quelle che ora passiamo a considerare.

1.° Quando si abbia, p. es., la serie reale $\Sigma a_n x^n$ ordinata per le potenze intere e positive della variabile x, e il cui cerchio di convergenza sia quello di raggio ρ diverso da zero, allora, mentre per i teoremi noti sulla convergenza in ugual grado delle serie si può affermare che *per tutti i valori reali di* x *fra* $-\rho$ *e* ρ *(*$-\rho$ *e* ρ *al più esclusi) questa serie* $\Sigma a_n x^n$ *rappresenta una funzione finita e continua* $f(x)$, è facile vedere che pel teorema precedente si può affermare altresì che *per gli stessi valori di x questa funzione ammette anche una derivata determinata e finita che è la somma della serie delle derivate, per modo che si ha $f'(x) = \Sigma\, n\, a_n\, x^{n-1}$; e questa derivata è anch'essa una funzione finita e continua per ciascuno degli stessi valori di x.*

Indicando infatti con a'_n i valori assoluti di a_n e con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, e formando la serie $\Sigma\, a'_n\, (\rho - \varepsilon)^n$ dei massimi valori assoluti dei termini di $\Sigma\, a_n\, x^n$ quando x è compresa fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$, basterà osservare che questa serie $\Sigma\, a'_n\, (\rho - \varepsilon)^n$ è convergente per concludere subito intanto (in forza di un teorema noto) che fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$ la serie data $\Sigma\, a_n\, x^n$ è convergente in egual grado, e per ogni valore di x compreso fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$, o fra $-\rho$ e ρ ($-\rho$ e ρ al più esclusi) rappresenta una funzione di x finita e continua $f(x)$.

Presa poi la serie $\Sigma\, n\, a'_n\, (\rho - \varepsilon)^{n-1}$ dei massimi dei valori assoluti che si hanno pei termini della serie dèlle derivate quando x è compreso fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$, si può osservare che se ε' è un altro numero positivo differente da ε, e compreso fra 0 ed ε, la serie $\Sigma\, a'_n\, (\rho - \varepsilon')^n$ è convergente, e questo porta che lo sia anche la serie $\Sigma\, n\, a'_n\, (\rho - \varepsilon)^{n-1}$ perchè i termini di questa si deducono da quelli dell'altra $\Sigma\, a'_n\, (\rho - \varepsilon')^n$ moltiplicandoli respettivamente per le quantità $\dfrac{n}{\rho - \varepsilon'} \left(\dfrac{\rho - \varepsilon}{\rho - \varepsilon'}\right)^{n-1}$ le quali tendono a zero al crescere indefinito di n perchè, considerando la serie da esse formata, e applicando uno qualunque degli ordinari criteri di convergenza delle serie a termini positivi coll'osservare che $\dfrac{\rho - \varepsilon}{\rho - \varepsilon'} < 1$, si riscontra subito che esse costituiscono una serie convergente; dunque, venendo ora ad esser convergente anche la serie $\Sigma\, n\, a'_n\, (\rho - \varepsilon)^{n-1}$, si conclude subito che anche la serie $\Sigma\, n\, a_n\, x^{n-1}$ è convergente in egual grado fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$; e questo pel teorema del paragrafo precedente basta per poter concludere che per ogni valore di x fra $-(\rho - \varepsilon)$ e $(\rho - \varepsilon)$, e quindi anche fra $-\rho$ e ρ ($-\rho$ e ρ al più esclusi) la sua somma è la derivata della somma $f(x)$ della serie primitiva $\Sigma\, a_n\, x^n$, ed è anch'essa una funzione finita e continua di x (*).

(*) Si può osservare in generale che *avendo una serie $\Sigma\, a_n\, z^n$ dove z è una variabile complessa, e essendo φ_n una quantità che cresce indefinitamente con n, e per la quale il modulo del rapporto $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$ tende all'unità al crescere indefinito di n, la serie $\Sigma\, \varphi_n\, a_n\, z^n$ ha lo stesso cerchio di convergenza della serie data $\Sigma\, a_n\, z^n$.*

E ciò perchè se ρ è il raggio di convergenza (finito o infinito, e che naturalmente si supporrà diverso da zero) della serie data $\Sigma\, a_n\, z^n$, e ρ' è un numero positivo qualsiasi inferiore a ρ, e ρ'' è un altro numero positivo pure inferiore a ρ ma superiore a ρ' (preso cioè fra ρ' e ρ), e a'_n e φ'_n sono i moduli di a_n e φ_n, la serie $\Sigma\, \varphi'_n\, a'_n\, \rho'^n$ sarà convergente, perchè i suoi termini si dedurranno da quelli della serie certamente convergente $\Sigma\, a'_n\, \rho''^n$ moltiplicandoli per le quantità $\varphi'_n \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^n$ che tendono a zero al crescere indefinito di n perchè sono i termini della serie $\Sigma\, \varphi'_n \left(\frac{\rho'}{\rho''}\right)^n$ che, coll'applicazione del primo degli ordinarii criterii di convergenza delle serie a termini positivi, si vede subito che è convergente.

E ora, in forza di questa osservazione generale, si vede subito che la serie $\Sigma\, n\, a_n\, x^{n-1}$ delle derivate di quella $\Sigma\, a_n\, x^n$ che si considerava sopra ha lo stesso cerchio di convergenza di questa, e quindi essa è convergente in egual grado negli intorni di qualunque punto x posto *entro* il cerchio di convergenza; e questo porta pure senz'altro alla conclusione, trovata sopra con un procedimento particolare, della derivabilità della serie $\Sigma\, a_n\, x^n$ entro il suo cerchio di convergenza.

In particolare dunque, poichè ad esempio si sa dall'algebra che la serie $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ per x compreso fra -1 e 1 rappresenta $\log(1+x)$, quando non si sapesse già che la derivata di $\log(1+x)$ è $\dfrac{1}{1+x}$, potremmo subito trovarla coll'applicazione del teorema precedente per gli stessi valori di x (gli estremi ± 1 esclusi), perchè pel teorema stesso si ha

$$\mathrm{D} \log(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} \,.$$

E similmente, siccome dall'algebra si sa che le serie $\sum_0^\infty \dfrac{x^n}{\pi(n)}$, $\sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{\pi(2n+1)}$, $\sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{\pi(2n)}$, $\sum_0^\infty \dfrac{x^{2n+1}}{\pi(2n+1)}$ e $\sum_0^\infty \dfrac{x^{2n}}{\pi(2n)}$ sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini in tutto il piano, e rappresentano respettivamente le funzioni e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$, basterà applicare ad esse il teorema precedente della derivazione per serie per ritrovare che le derivate prime di queste funzioni sono appunto e^x, $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$ per qualunque valore di x.

2.° Quando si abbia una serie trigonometrica $\Sigma\, (a_n \cos n\, x + b \operatorname{sen} n\, x)$ dove a_n e b_n sono quantità reali tali che le serie $\Sigma\, a'_n$ e $\Sigma\, b'_n$ formate dai loro valori assoluti, e così le altre $\Sigma\, n\, a'_n$ e $\Sigma\, n\, b'_n$ siano convergenti, allora mentre pel solito teorema sulla convergenza in egual grado delle serie si può affermare che *la somma della serie stessa $\Sigma\, (a_n \cos n\, x + b_n \operatorname{sen} n\, x)$ è una funzione finita e continua $f(x)$ per qualunque valore reale e finito di x*, pel teorema del paragrafo precedente si può affermare altresì che *questa funzione ammette sempre una derivata determinata e finita che è la somma* *della serie delle derivate, per modo che per qualunque valore reale e finito di x si ha $f'(x) = \Sigma(-n a_n \operatorname{sen} n x + n b_n \cos n x)$; e anche questa derivata $f'(x)$ è una funzione di x finita e continua.*

In questo caso infatti le serie $\Sigma(a'_n + b'_n)$, $\Sigma(n a'_n + n b'_n)$, formate con numeri maggiori dei massimi valori assoluti che si hanno in qualunque intervallo pei termini della serie data e per quelli della serie delle derivate, sono entrambe convergenti; dunque le due serie $\Sigma(a_n \cos n x + b_n \operatorname{sen} n x)$, $\Sigma(-n a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x)$ sono convergenti in egual grado in qualunque intervallo finito; e questo porta subito a concludere quanto abbiamo enunciato sopra.

In particolare dunque le due serie $\sum \pm \frac{\cos n x}{n^s}$, $\sum \pm \frac{\operatorname{sen} n x}{n^s}$, ove $s > 2$ rappresentano funzioni finite e continue che hanno una derivata determinata e finita per qualunque valore finito di x, e questa derivata è data respettivamente dalla somma dell'una o dell'altra delle due serie delle derivate $\sum \mp \frac{\operatorname{sen} n x}{n^{s-1}}$, $\sum \pm \frac{\cos n x}{n^{s-1}}$, ed è anch'essa una funzione finita e continua della x.

V.

Derivate degli ordini superiori

56. — Quando in un dato intervallo (α, β), che può anche esser quello da $-\infty$ a $+\infty$, la funzione $f(x)$ ammette una derivata determinata e finita $f'(x)$ in tutti i punti x, questa derivata sarà una nuova funzione della x nell'intervallo (α, β).

Se dunque in un punto a fra α e β questa funzione $f'(x)$ oltre essere finita sarà anche continua, potrà avvenire che in quel punto abbia anch'essa una derivata determinata che, se a è, per es., *interno* all'intervallo (α, β), sarà il limite di $\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$ per $h = \pm 0$; e allora, dicendo $f'(x)$ la *derivata prima* di $f(x)$, la nuova derivata di $f'(x)$ si chiamerà la *derivata seconda*, e pel punto a s'indicherà con $f''(a)$.

Questa derivata seconda di $f(x)$ potrà dunque, come la prima, non esistere mai o esistere soltanto in punti speciali dell'intervallo (α, β), o anche esistere in tutti i punti x di quest'intervallo e essere sempre finita, e allora sarà una nuova funzione di x $f''(x)$ che se in alcuni punti sarà anche continua, potrà negli stessi punti ammettere una nuova derivata.

Questa nuova derivata, quando esista, sarà derivata prima di $f''(x)$, e derivata seconda di $f'(x)$, e noi la diremo *derivata terza* di $f(x)$ e, pel punto a potremo indicarla con $f'''(a)$; e così continuando si vede che, se non in tutto l'intervallo, almeno in alcuni punti speciali di esso, potrà anche esistere una *derivata quarta* $f^{\text{IV}}(x)$ di $f(x)$, e così pure una *derivata quinta* $f^{\text{V}}(x)$, ..., e in generale una *derivata ennesima* $f^{(n)}(x)$ della $f(x)$.

Queste derivate si diranno anche *derivate successive*, o *derivate degli ordini* 1°, 2°,..., n° di $f(x)$, essendo $f'(x)$ la derivata del prim'ordine, $f''(x)$ quella del secondo, $f'''(x)$ quella del terzo,..., e $f^{(n)}(x)$ quella dell'ordine n°.

La derivata prima però (cioè quella che noi abbiamo considerata negli studî fatti fin qui) continueremo a dirla semplicemente *derivata* di $f(x)$, quando non si abbia da considerarla insieme alle derivate degli ordini superiori, e che non vi sia pericolo di cadere in equivoci; e oltre a indicare queste derivate dei vari ordini colle notazioni $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, almeno per ora, le indicheremo talvolta anche colle altre $\mathrm{D}f(x)$, $\mathrm{D}^2 f(x), \ldots$, $\mathrm{D}^n f(x)$.

Per analogia poi, anche la funzione data $f(x)$ gioverà qualche volta di considerarla come una derivata, dicendola però *derivata di ordine zero,* per significare che nessuna derivazione le è stata applicata; e la indicheremo allora con $f^0(x)$ o $\mathrm{D}^0 f(x)$.

57. — Le derivate dei vari ordini per una funzione $f(x)$ finita e continua in tutto un intervallo (α, β) possono anche, come abbiamo detto, non esistere mai, o esistere soltanto in alcuni punti speciali dell'intervallo stesso (α, β).

E siccome per la determinazione del valore della quantità che abbiamo chiamata derivata seconda di $f(x)$ nel punto a, bisogna servirsi soltanto dei valori $f'(x)$ della derivata prima nelle vicinanze di a e non già di quelli nei punti molto discosti da a, così è chiaro che per l'esistenza della derivata seconda nel punto a, e similmente per quella della derivata terza ecc.... non è necessario che esistano respettivamente le derivate prima, seconda ecc.... nei punti molto discosti da a, ma basta che esistano nei punti di intorni comunque piccoli di a; e d'altra parte poi, se $f'(x)$ esiste ed è finita nei punti che sono in un piccolo intervallo $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_2)$ che racchiude nel suo interno il punto a, niuno c'impedisce di considerare questo piccolo intervallo invece dell'intervallo primitivo (α, β) e ad esso applicare quanto si disse sopra; e il modo di comportarsi di $f(x)$, e delle sue derivate dei varî ordini fuori dell'intervallo $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_2)$, quando esistano, non avrà evidentemente influenza su ciò che accadrà nel punto a e negli altri punti *interni* a quest'intervallo $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_2)$.

Insieme a questo però giova notare esplicitamente che onde la derivata seconda di $f(x)$ esista in un punto a è sempre necessario, come già notammo, che la derivata prima esista e sia finita in tutti i punti di un certo intorno $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_1)$ del punto a e, in questo punto almeno, sia anche continua; similmente poi, onde nel punto a esista la derivata terza di $f(x)$, è sempre necessario che la derivata prima e seconda $f'(x)$ e $f''(x)$ esistano e siano finite, e la prima sia anche continua in piccoli intorni di a e la seconda lo sia almeno in questo punto a, potendo però la derivata prima $f'(x)$ essere finita e continua in ogni punto di un intorno $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_2)$ maggiore di quello $(a-\varepsilon''_1, a+\varepsilon''_2)$ nel quale la derivata seconda $f''(x)$ esiste ed è finita; e in generale, onde in un punto a esista anche la derivata n^{ma} $f^{(n)}(x)$ di $f(x)$

è sempre necessario che le derivate degli ordini precedenti $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ siano determinate e finite in alcuni intorni del punto stesso a $(a-\varepsilon'_1, a+\varepsilon'_2)$, $(a-\varepsilon''_1, a+\varepsilon''_2)$, ..., $(a-\varepsilon_1^{(n-1)}, a+\varepsilon_2^{(n-1)})$ che possono anche andare successivamente diminuendo; ed è necessario inoltre che le prime $n-2$ di queste derivate siano anche continue in ogni punto degli stessi intorni, mentre per la derivata $(n-1)^a$, cioè per quella immediatamente precedente a $f^{(n)}(a)$, *è necessario soltanto* che essa sia continua nel punto a.

È anche opportuno di notare esplicitamente che quando una funzione $f(x)$ è infinita in un punto a, essendo, per es. $+\infty$ (*), mentre negli altri punti (considerati separatamente) di ogni intorno abbastanza piccolo di a è sempre finita e continua, allora potrà darsi che in questi ultimi punti la sua derivata $f'(x)$ abbia sempre un valore determinato e finito, mentre nel punto a non può evidentemente parlarsi della derivata di $f(x)$ intesa nel modo ordinario, poichè il rapporto incrementale corrispondente ad a è sempre infinito.

In certi casi però il limite di $f'(x)$ per $x=a\pm 0$ può essere determinato ma essendo infinito (§ 45 [pag. 57 e seg.]), e allora, per l'analogia che si ha coi casi in cui sì la funzione che questo limite sono finiti, si dice talvolta che esso è la derivata di $f(x)$ nel punto a.

Noi però, per non far nascere equivoci, quando parleremo di derivata nel punto a, intenderemo sempre che *in quel punto, e in ogni intorno sufficientemente piccolo* di esso, la funzione di cui si prende la derivata sia finita, e allora se la derivata stessa sarà infinita, ciò sarà da attribuirsi all'essere infinito il limite del rapporto incrementale corrispondente, e non già all'essere infinita la funzione; per modo che se occorre talvolta di considerare anche qualche derivata di ordine superiore che sia infinita in un punto a, s'intenderà sempre che in intorni sufficientemente piccoli di a, tutte le derivate dei varî ordini che precedono la prima derivata infinita siano sempre determinate e finite.

Infine aggiungiamo che come si considerano talvolta le derivate (prime) a destra e a sinistra di un punto a, si potrebbero pure considerare le derivate degli ordini superiori sì a destra che a sinistra di a; ma noi in queste lezioni non potremo occuparci di queste derivate altro che relativamente ai punti estremi dell'intervallo nel quale la funzione data $f(x)$ viene considerata.

58. — Premesse queste generalità, passiamo a dare le derivate dei varî ordini delle funzioni semplici che noi abbiamo considerate nelle lezioni precedenti, e quelle delle loro funzioni inverse.

(*) S'intende con questo che il limite dei valori di $f(x)$ per $x=a$ nell'intorno che si considera sia $+\infty$.

Il calcolo di queste derivate non presenta difficoltà veruna, poichè si fa determinando successivamente, coi processi che già conosciamo, la derivata prima delle derivate che via via si calcolano.

Si trova così evidentemente

$$\mathrm{D}\,x^m = m\,x^{m-1}\,,\ \mathrm{D}^2 x^m = m\,(m-1)\,x^{m-2}\,,\ \mathrm{D}^3 x^m = m\,(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3}\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \mathrm{D}^n x^m = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}\,,\ldots\ldots$$

quando però per m negativo x sia sempre diverso da zero, e per m positivo e fratto x sia ancora diverso da zero, o almeno l'ordine più alto della derivata che si deve considerare sia un numero inferiore ad m, onde l'esponente di x nelle varie derivate che si considerano non sia mai negativo.

E nel caso particolare di m intero e positivo, si avrà sempre, qualunque sia x

$$\mathrm{D}\,x^m = m\,x^{m-1}\,,\ \mathrm{D}^2 x^m = m\,(m-1)\,x^{m-2}\,,\ \mathrm{D}^3 x^m = m\,(m-1)\,(m-2)\,x^{m-3}\,,\ldots$$
$$\ldots\,\mathrm{D}^{m-1} x^m = m\,(m-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,x\,,\ \mathrm{D}^m x^m = m\,(m-1)\ldots 3.\,2\,.\,1 = \text{cost.}$$

e le derivate degli ordini seguenti $(m+1)^0$, $(m+2)^0$, ... saranno tutte zero.

Similmente si troverà per le derivate di $\operatorname{sen} x$

$$\mathrm{D}\operatorname{sen} x = \cos x\,,\ \mathrm{D}^2\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x\,,\ \mathrm{D}^3\operatorname{sen} x = -\cos x\,,\ \mathrm{D}^4\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x\,,$$
$$\mathrm{D}^5\operatorname{sen} x = \cos x\,,\ \mathrm{D}^6\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x,\ldots,$$

e per le derivate di $\cos x$ avremo

$$\mathrm{D}\cos x = -\operatorname{sen} x\,,\ \mathrm{D}^2\cos x = -\cos x\,,\ \mathrm{D}^3\cos x = \operatorname{sen} x\,,\ \mathrm{D}^4\cos x = \cos x\,,$$
$$\mathrm{D}^5\cos x = -\operatorname{sen} x\,,\ \mathrm{D}^6\cos x = -\cos x\,,\ldots\ldots,$$

e al modo stesso troveremo

$$\mathrm{D}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\ \mathrm{D}^2\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,,\ \mathrm{D}^3\operatorname{tg} x = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x},\ldots,$$
$$\mathrm{D}\cot x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,,\ \mathrm{D}^2\cot x = \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,,\ \mathrm{D}^3\cot x = \frac{-2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{6\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x},\ldots,$$
$$\mathrm{D}\operatorname{senh} x = \cosh x\,,\ \mathrm{D}^2\operatorname{senh} x = \operatorname{senh} x\,,\ \mathrm{D}^3\operatorname{senh} x = \cosh x\,,\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{D}\cosh x = \operatorname{senh} x\,,\ \mathrm{D}^2\cosh x = \cosh x\,,\ \mathrm{D}^3\cosh x = \operatorname{senh} x\,,\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{D}\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\cosh^2 x},\ \mathrm{D}^2\operatorname{tgh} x = -\frac{2\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}\,,\ \mathrm{D}^3\operatorname{tgh} x = -\frac{2}{\cosh^2 x} + \frac{6\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^4 x}\ldots,$$
$$\mathrm{D}\coth x = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x},\ \mathrm{D}^2\coth x = \frac{2\cosh x}{\operatorname{senh}^3 x}\,,\ \mathrm{D}^3\coth x = \frac{2}{\operatorname{senh}^2 x} - \frac{6\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^4 x}\ldots,$$
$$\mathrm{D}\,a^x = a^x\log_e a\,,\ \mathrm{D}^2 a^x = a^x(\log_e a)^2\,,\ \mathrm{D}^3 a^x = a^x(\log_e a)^3\,,\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{D}\,e^x = \mathrm{D}^2 e^x = \mathrm{D}^3 e^x = \ldots\ldots\ldots = e^x\,,$$
$$\mathrm{D}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}\,,\ \mathrm{D}^2\log_a x = -\frac{\log_a e}{x^2}\,,\ \mathrm{D}^3\log x = \frac{2\log_a e}{x^3}\,,\ldots\ldots,$$

e se i logaritmi sono neperiani avremo invece

$$\mathrm{D}\log x = \frac{1}{x}\,,\ \mathrm{D}^2\log x = -\frac{1}{x^2}\,,\ \mathrm{D}^3\log x = \frac{2}{x^3}\,,\ldots\ldots\ldots$$

e similmente per le funzioni inverse $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, ... avremo

$$\mathrm{D}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \mathrm{D}^2\operatorname{arc\,sen} x = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{D}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}\,,\ \mathrm{D}^2\operatorname{arc\,tg} x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,,\ \ldots\ldots\ldots,$$

escludendo al solito in tutte queste formole i punti x che riducono infinite le funzioni, o alcuna delle derivate, ecc., e prendendo per semplicità, come sempre faremo in seguito, per $\operatorname{arc\,sen} x$ e $\operatorname{arc\,tg} x$ l'arco minore di $\frac{\pi}{2}$ in valore assoluto che ha per seno o per tangente x, ecc....

E si può notare in particolare che da queste formole apparisce che la esponenziale neperiana e^x ha tutte le derivate eguali a sè stessa; come apparisce anche che le derivate seconde di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono uguali a queste funzioni stesse, ma cangiate di segno, e le loro derivate quarte sono le funzioni medesime; mentre per le funzioni iperboliche $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ le derivate seconde riproducono già le funzioni primitive medesime, per modo cioè che nelle funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e nelle iperboliche $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ si ha una specie di periodicità nelle derivate che per $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ va di quattro in quattro, e per $\operatorname{senh} x$ o $\cosh x$ va di due in due, ecc....

59. — Le derivate degli ordini superiori delle somme, dei prodotti e dei quozienti di più funzioni, nei punti nei quali queste funzioni hanno le varie derivate determinate e finite, almeno fino a quell'ordine a cui occorre di considerarle, e inoltre le funzioni che sono al denominatore sono differenti da zero, si determinano successivamente applicando i teoremi che abbiamo dato pel caso della derivata prima.

Al modo stesso si può procedere per le funzioni di funzioni, per le funzioni inverse e anche per le serie quando ad esse la derivazione è successivamente applicabile; e noi perciò non ci fermeremo ad esaminare particolarmente tutti questi casi, e ci limiteremo a considerare il caso delle somme algebriche composte di un numero finito di termini, e quello del prodotto di due fattori, ciò che ci condurrà a risultati molto notevoli.

Incominciando dal primo caso, osserveremo che se si ha

$$f(x) = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots\ldots\ldots \pm \varphi_m(x)\,,$$

dove m è finito, la prima derivata sarà

$$f'(x) = \varphi'_1(x) \pm \varphi'_2(x) \pm \ldots\ldots \pm \varphi'_m(x),$$

e quindi con derivazioni successive si avrà

$$f''(x) = \varphi''_1(x) \pm \varphi''_2(x) \pm \ldots\ldots \pm \varphi''_m(x),$$
$$f'''(x) = \varphi'''_1(x) \pm \varphi'''_2(x) \pm \ldots\ldots \pm \varphi'''_m(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \varphi_1^{(n)}(x) \pm \varphi_2^{(n)}(x) \pm \ldots\ldots \pm \varphi_m^{(n)}(x),$$

ciò che mostra che la derivata n^a della somma algebrica di più funzioni si ottiene facendo la somma delle derivate n^e delle singole funzioni, nell'ipotesi sempre che nel punto x che si considera, le derivate n^e delle funzioni che compongono la somma siano tutte determinate e finite.

60. — Nel caso poi del prodotto $f(x) = u(x)\, v(x)$, o più semplicemente $f(x) = uv$ di due funzioni u e v, osserveremo che, nei punti x nei quali le varie derivate di u e di v che si hanno a considerare sono tutte determinate e finite, con successive derivazioni si trova

$$D(uv) = u'v + uv',$$
$$D^2(uv) = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$D^3(uv) = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

talchè avendo riguardo ai valori che qui abbiamo scritto di $D(uv)$, $D^2(uv)$, $D^3(uv), \ldots$, si può intanto affermare che almeno pei primi ordini di derivazione le derivate del prodotto uv si possono ottenere sviluppando colla ordinaria regola di Newton i binomi $(u+v)^1, (u+v)^2, (u+v)^3 \ldots$, e ponendo nei termini nei quali mancherebbe il fattore u o il fattore v, il fattore stesso coll'esponente zero, e poi sostituendo agli esponenti $1, 2, 3 \ldots$, gli indici corrispondenti di derivazione $', '', ''' \ldots$ e sopprimendo gli esponenti zero.

Ora osservando che si ha

$$(u+v)^n = n_0 u^n + n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + n_{n-2} u^2 v^{n-2} + n_{n-1} u v^{n-1} + n_n v^n,$$

dove $n_0, n_1, n_2 \ldots n_{n-2}, n_{n-1}, n_n$ sono i coefficienti binomiali, si vede subito che, secondo la legge suindicata, per la derivata n^{ma} del prodotto uv, si dovrebbe avere

$$(1)\quad D^n(uv) = n_0 u^{(n)} v + n_1 u^{(n-1)} v' + n_2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + n_{n-1} u' v^{(n-1)} + n_n u v^{(n)};$$

quindi per dimostrare che la legge stessa sussiste per tutti gli ordini di derivazione, o in altri termini, per dimostrare che questa formola (1) è giusta qualunque sia n (quando le derivate che vi compariscono sono tutte determinate e finite) basterà far vedere che, ammettendola vera per l'ordine $n-1$ di derivazione, essa sussiste altresì per l'ordine n.

Ora ammettendo che nel punto x si abbia

$$D^{n-1}(uv) = (n-1)_0 u^{(n-1)} v + (n-1)_1 u^{(n-2)} v' + (n-1)_2 u^{(n-3)} v'' + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_p u^{(n-p-1)} v^{(p)} + (n-1)_{p+1} u^{(n-p-2)} v^{(p+1)} + \ldots + (n-1)_{n-1} u v^{(n-1)}$$

ove $(n-1)_0, (n-1)_1, (n-1)_2 \ldots (n-1)_{n-1}$ sono i coefficienti binomiali dell'ordine $n-1$, con una nuova derivazione, quando nel punto x anche le derivate $u^{(n)}, v^{(n)}$ sono determinate e finite, si trova subito

$$D^n(uv) = (n-1)_0 u^{(n)} v + \{(n-1)_1 + (n-1)_0\} u^{(n-1)} v' + \{(n-1)_2 + (n-1)_1\} u^{(n-2)} v'' +$$
$$\ldots + \{(n-1)_{p+1} + (n-1)_p\} u^{(n-p-1)} v^{(p+1)} + \ldots + \{(n-1)_{n-1} + (n-1)_{n-2}\} u' v^{(n-1)} + (n-1)_{n-1} u v^{(n)};$$

quindi, poichè si ha come è noto $(n-1)_0 = (n-1)_{n-1} = n_0 = n_n = 1$, e $(n-1)_{p+1} + (n-1)_p = n_{p+1}$, si avrà la formola seguente

$$D^n(uv) = n_0 u^{(n)} v + n_1 u^{(n-1)} v' + n_2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + n_{n-1} u' v^{(n-1)} + n_n u v^{(n)},$$

che non è altro che la (1); talchè può dirsi ora completamente dimostrato che le successive derivazioni del prodotto uv, pei punti nei quali le varie derivate di u e v che si hanno da considerare sono determinate e finite, si possono sempre eseguire con la legge che abbiamo enunciato sopra, per modo che la derivata n^{ma} è sempre data dalla formola (1).

Questa formola è dovuta a *Leibnitz*.

61. — Valendoci delle derivate successive, si dimostrano con tutta facilità alcune formole che hanno una grandissima importanza.

Indichiamo perciò con $f(x)$ una funzione di x finita e continua in tutto un intervallo (x_0, x_0+h), per la quale richiederemo anche che nei punti di questo intervallo (l'estremo x_0+h al più escluso) le sue derivate fino alla $(n-1)^{ma}$ inclusive, oltre essere determinate, siano anche finite e continue; e nel punto x_0 sì esse che la funzione primitiva $f(x)$ siano tutte uguali allo zero; mentre poi per le derivate n^{me} richiederemo soltanto che nei punti dello stesso intervallo (ambedue gli estremi x_0 e x_0+h ora al più esclusi) siano sempre determinate (finite cioè, o infinite e determinate di segno).

Inoltre indichiamo con $F(x)$ una funzione che fra x_0 e x_0+h sodisfa alle condizioni che abbiamo poste per $f(x)$, inclusa quella di essere zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate nel punto x_0, e soddisfa inoltre alla condizione di essere finita e differente da zero, sì essa che le sue prime n derivate in tutti gli altri punti dell'intervallo (x_0, x_0+h) (x_0+h al più escluso) (*).

Sarà facile vedere che, sotto queste ipotesi, si ha la formola seguente

$$(2)\qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}=\frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)}=\ldots=\frac{f^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}{F^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}=\frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)},$$

con h_1 compreso fra 0 e h, h_2 compreso fra 0 e h_1, h_3 compreso fra 0 e $h_2, \ldots, h_n$ compreso fra 0 e h_{n-1} (i limiti successivi 0 e h, 0 e h_1, 0 e $h_2, \ldots, 0$ e h_{n-1} sempre esclusi), per modo cioè che si può anche scrivere

$$(3)\qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h)}{F^{(n)}(x_0+\theta_n h)},$$

con θ_n compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi).

Per dimostrare questa formola si osservi dapprima che ricordando la formola (3) del § 42, 4° [pag. 52] si ha subito

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}=\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)},$$

con θ compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), e h_1 compreso fra 0 e h (0 e h esclusi); e si può notare che per la legittimità di questa formola basterebbe supporre che $f'(x)$ e $F'(x)$ fra x_0 e x_0+h soddisfacessero soltanto a quelle condizioni che abbiamo posto sopra per $f^{(n)}(x)$ e $F^{(n)}(x)$ respettivamente.

Soddisfacendo però $f'(x)$ e $F'(x)$ a tutte le condizioni che loro abbiamo imposto fra x_0 e x_0+h, e quindi anche fra x_0 e x_0+h_1, si potrà applicare

(*) Faremo notare che propriamente la condizione che la $F(x)$ e le sue prime n derivate siano differenti da zero in tutti i punti interni dell'intervallo $(x_0\, x_0+h)$ basta porla soltanto per la derivata n^{ma}, poichè, siccome si ha $F(x_0)=F'(x_0)=F''(x_0)=\ldots=F^{(n-1)}(x_0)=0$, se avvenisse che una delle derivate di ordine inferiore ad n, p. es. la $F^{(m)}(x)$ $(0\leq m<n)$, fosse zero per un valore x_1 differente da x_0 e compreso fra x_0 e x_0+h, allora per un valore x_2 compreso fra x_0 e x_1 si annullerebbe anche la derivata seguente $F^{(m+1)}(x)$ (§ 42, 3.° [pag. 52]); e così pure in punti diversi da x_0 e compresi fra x_0 e x_0+h si annullerebbero le successive derivate fino all'n^{ma} inclusiva.

Similmente la condizione che nei punti interni all'intervallo (x_0, x_0+h) siano finite e continue tanto $f(x)$ e $F(x)$ che le loro prime $n-1$ derivate, basta porla soltanto per le derivate $(n-1)^e$, ponendo però al tempo stesso per la derivata n^{ma} della funzione $F(x)$ la condizione che nei punti compresi fra x_0 e x_0+h (gli estremi al più esclusi) questa derivata n^{ma} sia sempre finita.

la formola precedente anche al rapporto $\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}$, e si troverà allora anche la formola

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}=\frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)},$$

con h_2 compreso fra 0 e h_1 (0 e h_1 esclusi), e qui pure potrebbe farsi per $f''(x)$ e $F''(x)$ l'osservazione che abbiamo fatta sopra per $f'(x)$ e $F'(x)$.

Potendo ora ripetere successivamente lo stesso processo a causa delle condizioni che abbiamo poste per $f(x)$ e $F(x)$, è chiaro che si giungerà infine alla formola

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)}=\frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)}=\ldots\ldots=\frac{f^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}{F^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})}=$$
$$=\frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)},$$

nella quale per le ultime derivate $f^{(n)}(x)$ e $F^{(n)}(x)$ basterà che si abbiano le condizioni che nelle formole precedenti si avevano per le derivate prime, seconde,....., e perciò si richiederà soltanto che esse soddisfino alle condizioni poste sopra; quindi poichè da questa formola, col porre $h_n=\theta_n h$, si ha subito anche la (3), si conclude che le formole (2) e (3) sono ora dimostrate completamente per tutte le funzioni $f(x)$ e $F(x)$ che soddisfano alle condizioni poste sopra.

E poichè la formola (3) può anche scriversi sotto la forma

$$(4)\qquad f(x_0+h)=\frac{F(x_0+h)}{F^{(n)}(x_0+\theta_n h)}\,f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

si ha così il valore della funzione variata $f(x_0+h)$, quando $f(x)$ soddisfa alle condizioni poste sopra, espresso per un valore della sua derivata n^{ma} in un punto compreso fra x_0 e x_0+h (x_0 e x_0+h esclusi), e pei valori di un'altra funzione $F(x)$ e della derivata n^{ma} di questa funzione $F(x)$ stessa la quale, sebbene debba soddisfare alle condizioni che per lei abbiamo poste sopra, conserva però ancora una grandissima arbitrarietà.

E s'intende che il valore di θ_n che comparisce in queste formole, e che deve essere compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), oltre a dipendere da n, da x_0 e da h, dipende anche dalla natura sì della funzione $f(x)$ che dell'altra $F(x)$ (*).

(*) Si può osservare che ripetendo successivamente i procedimenti tenuti nella nota alle pag. 53 e 54 si potrebbero ottenere molte altre formole nelle quali figurano successivamente le derivate dei varii ordini delle n funzioni $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots,$

62. — Prendiamo ora in particolare $F(x) = (x - x_0)^m$, con m positivo, e osserviamo che, qualunque sia y, questo valore di $F(x)$ fra x_0 e $x_0 + h$ soddisfa a tutte le condizioni poste sopra finchè $m > n - 1$, e qualunque sia x si ha allora $F^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-n+1)(x-x_0)^{m-n}$.

Dalla (4) si otterrà subito la formola seguente

$$(5) \qquad f(x_0 + h) = \frac{h^m \theta_n^{n-m}}{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h),$$

dove m è un numero positivo qualunque superiore a $n - 1$, e θ_n è un numero che oltre a dipendere dalla natura della funzione $f(x)$ dipende da m, n, x_0 e h, ed è compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi); talchè supponendo ora $m = n$ si otterrà come caso particolare l'altra formola

$$(6) \qquad f(x_0 + h) = \frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h),$$

dove $\pi(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$, e θ_n è ancora un numero dipendente dalla natura della funzione $f(x)$ e da n, x_0, e h, e compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi); e questa al pari della formola (5) servirà a dare il valore della funzione variata $f(x_0 + h)$ espresso semplicemente per un valore della sua derivata n^{ma} in

---

$f_n(x)$ della nota stessa fino a quelle dell'ordine $(n-2)^{mo}$, supposto naturalmente che queste funzioni ammettano le derivate almeno fino a quest'ordine.

Queste formole sono tutte come la (β) o la (δ) della nota stessa, poichè non ne differiscono altro che pel cambiamento delle derivate prime nelle derivate degli ordini superiori, sempre in punti intermedii fra a_1 e a_{n-1} (questi punti esclusi); ed è con considerazioni successive, tutte del genere di quelle che ci condussero alla (β) e alla (δ), che si vede che queste formole devono aversi.

Di tali formole ve ne ha almeno una che contiene le derivate $(n-2)^{me}$ in un punto k fra a_1 e a_{n-1} (questi punti escl.), perchè come il determinante (α) della stessa nota si annulla negli $n-1$ punti $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$, così il determinante derivato, cioè quello che si deduce dal determinante (α) sostituendovi nella prima linea le derivate prime delle funzioni $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, si annulla in $n-2$ punti $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ *interni* agli intervalli $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-2}, a_{n-1})$; e quindi il determinante che al posto delle stesse funzioni ha le derivate seconde si annulla in $n-3$ punti $c_1, c_2, \ldots, c_{n-3}$ interni agli intervalli (b_1, b_2), $(b_2, b_3), \ldots\ldots, (b_{n-3}, b_{n-2}); \ldots\ldots$, e così continuando si giunge finalmente a trovare che il determinante che al posto delle stesse funzioni ha le derivate $(n-2)^e$ si annulla in un punto k *interno* all'intervallo (a_1, a_{n-1}); e si ha quindi la formola che viene dalla (β) o dalla (δ) della nota stessa cambiandovi le derivate prime di $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ nelle derivate d'ordine $n-2$ delle stesse funzioni nel punto k.

Particolarizzando poi alcune di queste funzioni come si fece nella nota medesima si ottengono formole molto notevoli, fra le quali quella d'interpolazione di Lagrange, e altre formole pure d'interpolazione, ecc.

un punto $x_0 + \theta_n h$ compreso fra x_0 e $x_0 + h$ (x_0 e $x_0 + h$ esclusi), quando fra x_0 e $x_0 + h$ la funzione $f(x)$, oltre a essere sempre finita e continua, è tale che in tutti i punti di questo intervallo ($x_0 + h$ al più escluso) le sue derivate fino alle $(n-1)^{me}$ inclusive esistono e sono finite e continue, e nel punto x_0 sì esse che la funzione $f(x)$ sono tutte uguali a zero; e inoltre le derivate n^{me} nei punti dello stesso intervallo (x_0 e $x_0 + h$ ora al più esclusi) sono sempre determinate. (*)

(*) Aggiungiamo che quando, mantenendo ferme le varie condizioni che si avevano sopra per $f(x)$ e per le sue prime $n-1$ derivate nell'intervallo da x_0 a $x_0 + h$, che può essere supposto comunque piccolo, non si pone più anche l'altra condizione che si aveva per la validità della formola (6), cioè che le derivate n^{me} siano determinate in ogni punto *interno* all'intervallo stesso, esistendo poi o no nei punti estremi x_0 e $x_0 + h$, e si pone invece l'altra che *la derivata n^{ma} esista e sia determinata e finita nel punto x_0, qualunque cosa poi accada per questa derivata negli altri punti,* *allora* si può dimostrare che *si ha la formola seguente*

$$(\alpha) \qquad f(x_0 + h) = \frac{h^n}{\pi(n)} \left\{ f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n \right\},$$

essendo ε_n una quantità che tende a zero all'impiccolire indefinito di h.

Se si considera infatti la funzione $f(x) - \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$, si vede subito che per $x = x_0$ essa avrà anche la derivata n^{ma}, e questa derivata sarà zero; e applicandole la formola (6) scritta pel caso delle derivate $(n-1)^{me}$, avremo

$$f(x_0 + h) - \frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0) = \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)} \left\{ f^{(n-1)}(x_0 + \theta_{n-1} h) - \theta_{n-1} h f^{(n)}(x_0) \right\},$$

con θ_{n-1} diverso da zero e compreso fra 0 e 1; e siccome $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ si potrà anche scrivere

$$f(x_0 + h) - \frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0) = \frac{h^n}{\pi(n-1)} \theta_{n-1} \left\{ \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \theta_{n-1} h) - f^{(n-1)}(x_0)}{\theta_{n-1} h} - f^{(n)}(x_0) \right\};$$

e poichè, esistendo la derivata n^{ma} di $f(x)$ nel punto x_0, la quantità che moltiplica $\frac{h^n}{\pi(n-1)}$ al tendere di h a zero tenderà essa pure a zero, indicandola con $\frac{\varepsilon_n}{n}$ si potrà scrivere senz'altro

$$f(x_0 + h) = \frac{h^n}{\pi(n)} \left\{ f^{(n)}(x_0) + \varepsilon_n \right\},$$

essendo ε_n una quantità che diviene infinitesima con h; e così la formola (α) resta completamente dimostrata.

E qui inoltre, sebbene possa apparire superfluo, notiamo una volta per tutte che, tanto ora come nel seguito di questi studi, quando si considerano soltanto valori positivi, o soltanto valori negativi di h, e x si fa restare fra x_0 e $x_0 + h$, s'intende sempre che le derivate di $f(x)$ nel punto x_0 devono esser prese soltanto a destra o a sinistra respettivamente, e in questi punti la loro continuità non può essere che continuità a destra o a sinistra.

E s'intende pure che la condizione che la derivata di un certo ordine sia finita e continua in un punto x_0 è sempre soddisfatta da sè quando nel punto stesso x_0 la derivata dell'ordine seguente ha un valore determinato e finito, ecc.

63. — Si deve inoltre notare che, dalla dimostrazione che qui abbiamo fatta delle formole precedenti, apparisce subito che propriamente per la legittimità delle stesse formole non possono dirsi necessarie tutte le condizioni che noi abbiamo poste per le funzioni $f(x)$ e $F(x)$ delle formole (2), (3) e (4), o per la funzione $f(x)$ delle formole (5) e (6); e quando si conoscessero le successive quantità h_1, h_2 .... h_{n-1} che figurano nella dimostrazione, onde esser sicuri dell'esattezza delle stesse formole, basterebbe assicurarsi che le condizioni poste per le derivate prime delle funzioni che vi compariscono fossero soddisfatte fra x_0 e x_0+h, quelle poste per le derivate seconde fossero soddisfatte fra x_0 e x_0+h_1, quelle poste per le derivate terze lo fossero fra x_0 e x_0+h_2,.., e infine quelle poste per le derivate n^{me} fossero soddisfatte fra x_0 e x_0+h_{n-1}.

Oltre a ciò si deve anche notare che dall'una e dall'altra delle formole (5) e (6) apparisce anche che, quando la funzione $f(x)$ soddisfa alle condizioni poste sopra, $f(x_0+h)$ col tendere di h a zero diviene infinitesimo di ordine n tutte le volte che per $x=x_0$ le *sole* derivate che si annullano (oltre alla funzione) sono le prime $n-1$, e i valori delle derivate n^{me} (a destra o a sinistra secondo che h è positivo o negativo) per $x=x_0$ hanno un limite determinato e finito (che allora sarà anche differente da zero § 44 [pag. 55 e seg.] perchè sarà la derivata a destra o a sinistra nel punto x_0), ecc.

VI.

Formole del Taylor e di Maclaurin

64. — La formola del Taylor dà lo sviluppo della funzione variata $f(x_0+h)$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di h; e per quanto richieda certe limitazioni nella natura della funzione $f(x)$, è applicabile ciononostante in casi estesissimi, ed è una delle formole più importanti dell'intera matematica.

Noi esporremo perciò questa formola, colle condizioni sotto le quali essa può dirsi rigorosa finchè ci si limita alle funzioni reali $f(x)$ di una variabile reale; e per questo incominceremo dal premettere la dimostrazione di un'altra formola che dicesi la *formola del Taylor abbreviata*, e che in sostanza non è che quella stessa del Taylor nella quale la serie è stata arrestata a un certo termine completandola invece coll'aggiunta di un altro termine che, quando la formola del Taylor sussiste, non è altro che l'errore che si commette nella serie arrestandosi al termine stesso, o il resto della serie.

65. — Sia perciò $f(x)$ una funzione di x che per tutti i valori di x compresi nell'intervallo da x_0 a x_0+h (questi estremi incl.) è finita e continua, e pei punti dell'intervallo stesso (x_0+h al più escluso) le sue prime $n-1$ derivate $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ siano anch'esse finite e continue, e le derivate n^{me} siano tali esse pure, o almeno siano sempre determinate (finite cioè, o infinite e determinate di segno) in tutti i punti fra x_0 e x_0+h tranne tutto al più in questi punti estremi x_0 e x_0+h.

La formola del Taylor abbreviata che ora si tratta di dimostrare sarà la seguente

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots\ldots+ \tag{1}$$
$$+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\alpha_n f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

dove θ_n è un numero determinato compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), e per α_n può prendersi una qualunque delle tre quantità

$$\frac{h^n}{\pi(n)}\,,\quad \frac{h^n\,\theta_n^{n-m}}{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}\,,\quad \frac{F(x_0+h)}{F^{(n)}(x_0+\theta_n h)}\,;$$

nella seconda delle quali m è un numero positivo qualsivoglia superiore a $n-1$, e nella terza $F(x)$, oltre a soddisfare, insieme alle sue derivate, a quelle condizioni stesse che si sono poste per la funzione $f(x)$ e per le sue derivate, soddisfa altresì all'altra di essere uguale a zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate nel punto x_0, e di avere le derivate n^{me} finite e differenti da zero in tutti i punti fra x_0 e x_0+h (x_0 e x_0+h al più esclusi). E s'intende che, a seconda del valore che si prende per α_n, il numero θ_n avrà differenti valori, ma sempre compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi).

Per dimostrare la formola (1), osserviamo che essa nel caso particolare di $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ si riduce alle formole (4), (5) e (6) dei §§ 61 e 62 [pag. 81 e 82] che sono state già dimostrate; e quindi per dimostrarla in generale basterà cercare di ricondurla a questo caso di una funzione che, oltre a soddisfare a tutte le condizioni sopra indicate, soddisfa all'altra di essere zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate per $x=x_0$.

Per questo prendiamo a considerare una funzione ausiliaria di x

$$f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)\,,$$

che è quella che risulta dai primi n termini del secondo membro della (1) stessa col sostituirvi $x-x_0$ al posto di h; e indichiamola con $\varphi(x)$.

Questa funzione $\varphi(x)$ sarà un polinomio di grado $n-1$ rispetto ad x; e quindi sarà finita e continua insieme alle sue derivate, e qualunque sia x si avrà

$$\varphi'(x)=f'(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f'''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-2}}{\pi(n-2)}f^{(n-1)}(x_0)\,,$$

$$\varphi''(x)=\qquad f''(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-3}}{\pi(n-3)}f^{(n-1)}(x_0)\,,$$

. . . . ,

$$\varphi^{(n-1)}(x)=\qquad f^{(n-1)}(x_0)\,,$$

e le derivate seguenti $\varphi^{(n)}(x), \varphi^{(n+1)}(x),\ldots$ saranno zero; talchè, facendo $x=x_0$, si otterranno le formole $\varphi(x_0)=f(x_0)$, $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$, $\varphi''(x_0)=f''(x_0)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0)=f^{(n-1)}(x_0)$, $\varphi^{(n)}(x_0)=0$, le quali ci permettono subito di asserire che

la funzione $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$ soddisfarà a tutte le condizioni che abbiamo posto per la funzione $f(x)$, e soddisfarà altresì all'altra di essere uguale a zero insieme alle sue prime $n-1$ derivate per $x=x_0$; e quindi questa funzione $\psi(x)$ sarà una di quelle alle quali possono applicarsi le formole suindicate dei §§ 61 e 62 [pag. 81 e 82].

Questo porta immediatamente che si abbia $\psi(x_0+h)=\alpha_n\,\psi^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, dove θ_n e α_n hanno il significato che loro abbiamo attribuito sopra; quindi osservando che si ha

$$\psi(x_0+h)=f(x_0+h)-\varphi(x_0+h)=f(x_0+h)-f(x_0)-\frac{h}{1}f'(x_0)-\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)-\ldots\ldots-$$
$$-\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)\,,$$

e che per x compreso fra x_0 e x_0+h si ha $\psi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$, si trova subito la formola seguente

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\alpha_n f^{(n)}(x_0+\theta_n h)\,,$$

che è appunto la formola (1) che si trattava di dimostrare.

66. — Prendendo $\alpha_n=\dfrac{h^n}{\pi(n)}$, la formola precedente assume la forma

$$(2)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)\,,$$

che è quella sotto la quale viene ordinariamente usata (*).

(*) Quando si lasciano ferme le condizioni poste per $f(x)$ e per le sue prime $n-1$ derivate, ma poi, anzichè porre come abbiamo fatto sopra la condizione che le derivate n^{me} di $f(x)$ siano determinate in ogni punto fra x_0 e x_0+h (gli estremi x_0 e x_0+h al più escl.), si pone invece l'altra che *la derivata n^{ma} di $f(x)$ esista e sia determinata e finita nel punto x_0, senza curarci di ciò che accade della stessa derivata negli altri punti fuori di x_0, allora,* applicando alla funzione $\psi(x)$ considerata sopra la formola (α) della nota al § 62 [pag. 83], si vede subito che si avrà $\psi(x_0+h)=\dfrac{h^n}{\pi(n)}\{\psi^{(n)}(x_0)+\varepsilon_n\}$, e quindi in questo caso *invece della* (2) *potremo scrivere la formola seguente*

$$(\alpha)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{\pi(n)}\{f^{(n)}(x_0)+\varepsilon_n\}\,,$$

essendo ε_n una quantità che tende a zero all'impiccolire indefinito di h.

E noi pure la useremo sotto questa forma che è la più semplice, avvertendo però che quanto si dice per questa formola vale anche per quelle corrispondenti agli altri due valori di α_n, bastando per questo cangiare sempre, in ciò che segue, la quantità $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ nell'una o nell'altra delle due

$$\frac{h^n\,\theta^{n-m}}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)\,,\quad \frac{F(x_0+h)}{F^n(x_0+\theta_n h)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

nelle quali θ_n è un numero determinato variabile dall'una delle stesse espressioni all'altra, ma però sempre compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi).

Questa formola, nel caso ora considerato, può dunque tener luogo di quella di Taylor abbreviata data sopra; e per essa inoltre restano estese al caso delle derivate n^{me} le osservazioni che facemmo nella nota alla pag. 51 pel caso delle derivate prime.

Con questa formola poi, come dovrò fare rilevare anche in altre occasioni, alcuni dei risultati che trovansi esposti nel testo di queste lezioni avrebbero potuto semplicizzarsi, e talvolta rendersi anche più generali, ma poichè, come già dissi nella nota a pag. 18, in questa pubblicazione ho inteso di riprodurre le mie lezioni autografate del 1877, così, salvo quando sia assolutamente indispensabile qualche leggiero cambiamento, manterrò il testo di quelle lezioni, riservandomi solo di indicare qua e là, in queste note, quelle particolarità che trovo ora opportuno di non omettere, e di indicarlo espressamente quando qualche aggiunta venga fatta nel testo.

E così intanto aggiungerò anche l'osservazione che quando per una funzione $f(x)$ siano soddisfatte ad un tempo le condizioni per le quali si ha la formola (6) data sopra, e quelle per le quali si ha la formola (α) di questa nota, cioè quando le derivate n^{me} di $f(x)$ siano determinate in tutto l'intervallo da x_0 a x_0+h, tranne tutt'al più nell'estremo x_0+h, e siano finite nel punto x_0, allora confrontando fra loro le stesse formole (6) e (α), si vede che sarà $f^{(n)}(x_0+\theta_n h)-f^{(n)}(x_0)=\varepsilon_n$, e questo ci porta ad affermare che quand'anche $f^{(n)}(x)$ sia discontinua nel punto x_0, i valori θ_n o i punti $x_0+\theta_n h$ che figurano nella (6) saranno sempre tali che al tendere di h a zero i valori corrispondenti di $f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ dovranno tendere verso $f^{(n)}(x_0)$.

E per quanto poi si riferisce a questi numeri θ_n che figurano nella formola (6), osserviamo in modo generale che quando una funzione $f(x)$ ammette *nel punto* x_0 una derivata determinata e finita dell'ordine $n+1$ successivo a quello che figura nella formola stessa (6), qualunque cosa poi accada di questa derivata $(n+1)^a$ nei punti fuori di x_0, allora basterà questo evidentemente per poter dire che in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 sono soddisfatte le condizioni di validità della (6), e quindi pei valori sufficientemente piccoli di h sussisterà sempre la formola stessa coi soliti valori convenienti di θ^n.

In pari tempo però, a causa della (α), si avrà anche l'altra

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\dots+\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{\pi(n+1)}\{f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_{n+1}\},$$

dove ε_{n+1} tende a zero all'impiccolire indefinito di h; quindi, mentre si vede di qui che l'esistenza di una derivata determinata e finita dell'ordine $n+1$ nel punto x_0 porta che per h sufficientemente piccolo si abbiano insieme la (α) di questa nota

67. — Valendoci ora della (2), e prima anche di dedurne la serie di Taylor, troviamo opportuno di fare subito osservare che, dando ad n i valori $1, 2, 3, \dots, n$ successivamente, essa dà luogo alle formole seguenti:

$$(3)\left\{\begin{aligned}
&f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta_1 h)\,,\\
&f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0+\theta_2 h)\,,\\
&f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x_0+\theta_3 h)\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
&f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\dots\dots+\\
&\qquad\qquad+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)\,,
\end{aligned}\right.$$

dove $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ sono numeri determinati compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) che dipendono anche dalla natura della funzione $f(x)$; e queste formole valgono pel caso che fra x_0 e x_0+h la funzione $f(x)$, oltre ad essere finita e continua, abbia le derivate determinate, almeno fino alla prima per la 1ª delle stesse formole, fino alla seconda per la 2ª, fino alla terza per la 3ª, ecc., potendo anche queste derivate non esistere affatto nell'estremo (x_0+h), e

---

per l'ordine $(n+1)^{mo}$, e la (6) data sopra per l'ordine precedente n, confrontando fra loro queste due formole si vede anche che si avrà

$$f^{(n)}(x_0+\theta_n h)=f^{(n)}(x_0)+\frac{h}{n+1}\{f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_{n+1}\},$$

ovvero

$$\theta_n\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_n h)-f^{(n)}(x_0)}{\theta_n h}=\frac{1}{n+1}\{f^{(n+1)}(x_0)+\varepsilon_{n+1}\};$$

e di qui osservando che, per le nostre ipotesi, al tendere di h a zero il rapporto del primo membro tende verso $f^{(n+1)}(x_0)$, si dedurrà subito che, *se* $f^{(n+1)}(x_0)$ *non è zero,* θ_n *dovrà tendere verso* $\frac{1}{n+1}$ *all'impiccolire indefinito di* h.

È questa una particolarità notevole dei numeri θ_n che figurano nella formola di Taylor abbreviata (6) quando nel punto x_0 esiste anche la derivata dell'ordine seguente $(n+1)^0$ ed è finita e diversa da zero; e per essa si può dire in particolare che *il numero* θ *che figura nella solita formola degli accrescimenti finiti* $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$, *quando* $f(x)$ *ha una derivata seconda nel punto* x_0 *finita e diversa da zero, al tendere a zero di* h *tenderà sempre verso* $\frac{1}{2}$.

l'ultima delle derivate che comparisce in ciascuna delle stesse formole rispettivamente potendo mancare anche nell'altro estremo x_0, e potendo anche essere infinita (e determinata di segno) in un numero finito o infinito di punti fra x_0 e x_0+h.

E si può quindi aggiungere che quando x_0 e h_1 sono tali che per ogni valore di x fra x_0 e x_0+h_1 la funzione $f(x)$ ammette sempre alcune derivate dei primi ordini, allora qualunque cosa accada delle derivate degli ordini seguenti, una o più delle formole (3) saranno sempre applicabili per il valore x_0 di x e per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_1 (h_1 incluso) (*).

68. — Per vedere ora come la formola (2) conduca alla serie del Taylor, procederemo come segue.

Ammettiamo che per tutti i valori di x compresi fra x_0 e x_0+h (x_0+h al più escluso) le derivate $f^{(n)}(x)$ della nostra funzione $f(x)$ esistano e siano sempre finite e continue fino a valori di n grandi quanto si vuole; per quanto col crescere indefinito di n queste derivate stesse, pur essendo sempre finite, possano anche andare crescendo oltre ogni limite.

Allora la formola (2) varrà fino a valori comunque grandi di n, per modo che qualunque sia n si avrà

$$(4)\qquad f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots.+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)\,;$$

quindi se si considera la serie

$$(5)\qquad f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots.+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+$$
$$+\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0)+\ldots..$$

che è appunto la serie di Taylor, a causa della formola (4) la somma dei suoi primi n termini, per ogni valore di n, differirà da $f(x_0+h)$ per la quantità $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ nella quale le θ_n hanno i soliti valori determinati compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) dipendenti da x_0, da n, da h e dalla natura della funzione $f(x)$.

(*) S'intende che anche la formola (α) della nota al paragrafo precedente conduce ad altrettante formole del genere delle (3) date sopra.

Di qui risulta subito che se col crescere indefinito di n la quantità $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ avrà per limite zero, la serie di Taylor (5) sarà convergente e avrà per somma $f(x_0+h)$; e questo mostra intanto che se $f(x)$ è una funzione di x finita e continua nell'intervallo $(x_0\,,\,x_0+h)$ e nei punti di questo intervallo (x_0+h al più escluso) le sue derivate dei vari ordini sono finite anch'esse e continue (per quanto queste derivate $f^{(n)}(x)$ col crescere indefinito di n, pure essendo sempre finite, possano anche andar crescere indefinito di n, pure essendo sempre finite, possano anche andar crescendo oltre ogni limite), allora quando avverrà che, pel valore che si considera di h la quantità $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, per *quei valori speciali determinati di* θ_n che figurano nella formola (4), dipendenti da x_0, da n, da h e dalla natura della funzione $f(x)$ e compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), abbia per limite zero col crescere indefinito di n, si avrà la formola seguente

$$(6)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\ldots,$$

che è appunto la formola di Taylor.

Viceversa se, restando sempre le stesse le condizioni ora indicate rispetto alla funzione $f(x)$ e alle sue derivate in un certo intervallo $(x_0\,,\,x_0+h)$, questa formola (6) sussisterà per un valore di h compreso fra 0 e h_1 (non escluso il caso di $h=h_1$), allora la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ avrà per limite zero al crescere indefinito di n, giacchè in tal caso insieme alla formola (4) si avrà la (6), e quindi $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ rappresenterà il resto della serie convergente (5) a partire dal termine n^{mo}; dunque si può ora evidentemente concludere che: *Quando la funzione $f(x)$ è finita e continua nell'intervallo $(x_0\,,\,x_0+h)$ (gli estremi inclusi), e nei punti dello stesso intervallo (x_0+h al più escluso) le sue derivate dei vari ordini n, considerate per ogni valore di n separatamente, sono finite e continue esse pure, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la formola di Taylor pel valore x_0 di x* e pel valore che si considera di h *sussista, è che la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ abbia per limite zero al crescere indefinito di n, quando in essa per θ_n si prendono certi valori speciali determinati compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) che dipendono da x_0, da n, da h e dalla natura della funzione data $f(x)$, e che sono quelli stessi che compariscono nella formola (4).*

S'intende poi che se la funzione $f(x)$ e le sue derivate soddisfano alle condizioni ora indicate in tutto un intervallo (x_0, x_0+h_1), onde la formola di Taylor sussista per ogni valore di h compreso fra 0 e h_1 (h_1 incluso) è necessario e sufficiente che la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ col crescere indefinito di n abbia per limite zero per *tutti* gli stessi valori di h compresi fra 0 e h_1 (h_1 incluso).

69. — Sulla formola di Taylor giova ora di fare le osservazioni seguenti.

Quando *per un dato valore di h*, pel quale fra x_0 e x_0+h sono soddisfatte le condizioni poste sopra per $f(x)$ e per le sue derivate di qualsiasi ordine, si trova che la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^n(x_0+\theta_n h)$ non ha per limite zero, allora la formola di Taylor (6) corrispondente a quel valore x_0 di x, *almeno per quel valore speciale di h*, non sussiste più; e siccome per la somma dei primi n termini della serie stessa si ha ancora dalla (4)

$$(7) \qquad f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)=$$
$$=f(x_0+h)-\frac{h^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n h),$$

si vede subito che: *Se la quantità stessa* $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, pel valore che si considera di h, *al crescere indefinito di n, non ha un limite determinato, la serie di Taylor* (5) *sarà essa pure indeterminata; se questo limite esiste, ma è infinito, la serie di Taylor* (5) *sarà divergente; e se infine detto limite ha un valore determinato e finito* $\psi(x_0, h)$, *la serie di Taylor* (5) *è convergente ed ha per somma* $f(x_0+h)-\psi(x_0, h)$, *per modo che allora invece della formola* (6) *si ha l'altra*

$$f(x_0+h)=\psi(x_0, h)+f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\ldots\ldots$$

Viceversa, a causa della (7) si può anche asserire che se pel solito valore di h che si considera la serie di Taylor (5) è indeterminata o divergente, la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ non avrà nessun limite o lo avrà infinito; e se la serie stessa è convergente, la sua somma sarà $f(x_0+h)$, o ne differirà per una quantità determinata e finita $\psi(x_0, h)$ che

non sarà altro che il limite per $n=\infty$ di $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$; talchè in particolare può dirsi che *il sapere soltanto che la serie di Taylor corrispondente a un valore x_0 di x è convergente per un dato valore di h, pel quale la funzione f(x) e le sue derivate fra x_0 e x_0+h sono sempre determinate e finite, non può bastare a farci concludere che la serie stessa ha per somma $f(x_0+h)$, e che di conseguenza la formola di Taylor (6) sussiste per quel valore di h, ma bisogna sempre avere riguardo anche alla quantità* $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, *ed esaminare se essa tende o no a zero al crescere indefinito di n.*

Un esempio di funzioni $f(x)$ per le quali si presenta la particolarità che la serie di Taylor corrispondente al valore x_0 di x

$$(8) \qquad f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\ldots$$

sia convergente per dati valori di h senza avere per somma $f(x_0+h)$, si ha considerando la funzione $f(x)=\varphi(x)+e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$, dove $\varphi(x)$ è una qualunque delle funzioni per le quali la formola di Taylor corrispondente

$$\varphi(x_0+h)=\varphi(x_0)+\frac{h}{1}\varphi'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}\varphi^{(n-1)}(x_0)+\ldots$$

sussiste per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_1 (h_1 incluso o no).

Si vedrà in seguito infatti che la funzione $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ ha tutte le sue derivate nulle per $x=x_0$, e quindi per ogni valore di x fra x_0 e x_0+h_1 la funzione $f(x)$ ha tutte le sue derivate finite e continue come la $\varphi(x)$, e si ha $f(x_0)=\varphi(x_0)$, $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$, $f''(x_0)=\varphi''(x_0)$, ...; e conseguentemente la serie di Taylor corrispondente (8), coincidendo con quella che corrisponde a $\varphi(x_0+h)$, è convergente per h compreso fra 0 e h_1, ma invece di aver per somma $f(x_0+h)$ ha per somma la quantità $\varphi(x_0+h)$ che differisce da $f(x_0+h)$ di $e^{-\frac{1}{h^2}}$; per modo che si può anche asserire che in questo caso la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, invece di avere per limite zero al crescere indefinito di n, ha per limite $e^{-\frac{1}{h^2}}$.

70. — Quando fra x_0 e x_0+h (x_0+h al più escluso) le derivate dei vari ordini della funzione finita e continua $f(x)$ sono finite e continue esse pure, e al tempo stesso, *almeno pel valore di h che si considera*, sussiste la formola di Taylor (6), allora, siccome insieme a questa si ha anche la formola (4) che sussiste per qualunque valore finito di n, si vede subito che per quel

valore speciale di h la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h)$ rappresenta il resto della serie di Taylor a partire dal suo termine n^{mo}.

Negli altri casi poi, se fra x_0 e $x_0 + h$ ($x_0 + h$ al più escluso) la funzione finita e continua $f(x)$ ammette le derivate almeno fino a un certo ordine, osservando che allora almeno fino a certi valori di n si ha ancora la formola (4), s'intende subito che fino a questi valori di n la quantità corrispondente $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h)$ ha ancora un significato; però in tali casi rappresenterà semplicemente l'errore che si commette prendendo come valore di $f(x_0 + h)$ la somma

$$(9) \qquad f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) \cdot \cdots\cdots + \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$

dei primi n termini della serie di Taylor, e non sarà quindi affatto il resto di questa serie, la quale anzi può, secondo i casi, essere convergente pel valore di h che si considera ma senza avere per somma $f(x_0 + h)$, e può essere divergente o essere indeterminata, o anche può avere i suoi termini a partire da un certo punto (dopo l'n^{mo}) privi del tutto di significato.

Ciononostante, seguendo ancora le denominazioni primitivamente introdotte, si suole in tutti i casi indicare questa quantità $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h)$ col nome di *resto della serie di Taylor;* talchè, accettando noi pure questa denominazione ormai consacrata dall'uso, salvo a tenere sempre presenti le osservazioni che abbiamo fatte, si potrà dire che la quantità R_n chiamata *resto della serie di Taylor* è data dalla formola

$$(10) \qquad R_n = \frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h),$$

e per quanto si disse ai §§ 61 e 62 [pagg. 81 e 82] è anche data dalle altre

$$(11) \qquad \begin{cases} R_n = \dfrac{h^n \theta^{n-m}}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h), \\[2ex] R_n = \dfrac{F(x_0 + h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta_n h)} f^{(n)}(x_0 + \theta_n h), \end{cases}$$

ove $m > n-1$, e θ_n e $F(x)$ hanno i significati che già tante volte abbiamo indicati.

71. — Alle forme precedenti del resto R_n della serie di Taylor, la prima delle quali è quella di *Lagrange,* possono anche aggiungersene altre.

Supponiamo infatti che almeno le prime $n-1$ derivate della funzione finita e continua $f(x)$ siano finite e continue in tutti i punti compresi fra x_0 e $x_0 + h$ (x_0 e $x_0 + h$ ora inclusi), e negli stessi punti, tranne tutto al più negli estremi, le derivate n^{me} siano determinate *e finite;* e indicando con R_n la differenza fra $f(x_0+h)$ e la somma (9), qualunque sia questa differenza, osserviamo che, essendo h naturalmente diverso da zero, e essendo p un numero diverso da zero e positivo che potremo scegliere a nostro arbitrio, il rapporto $\frac{R_n}{h^p}$ avrà sempre un significato, e chiamandolo P, questo numero P avrà un valore determinato che dipenderà da x_0, da n, da p, da h e dalla natura della funzione $f(x)$, e sarà $R_n = h^p P$.

In seguito a questo si avrà la formola seguente

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \\ + \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + h^p P,$$

che può anche porsi sotto la forma

$$f(x_0) + \frac{(x_0 + h - x_0)}{1} f'(x_0) + \frac{(x_0 + h - x_0)^2}{1.2} f'(x_0) + \cdots + \\ + \frac{(x_0 + h - x_0)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + (x_0 + h - x_0)^p P - f(x_0 + h) = 0;$$

talchè prendendo a studiare una funzione ausiliaria $\varphi(z)$ che viene dal primo membro di questa lasciandovi invariati $x_0 + h$ e P, e cambiandovi x_0 in z, cioè considerando la funzione

$$\varphi(z) = f(z) + \frac{(x_0 + h - z)}{1} f'(z) + \frac{(x_0 + h - z)^2}{1.2} f''(z) + \cdots + \\ + \frac{(x_0 + h - z)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(z) + (x_0 + h - z)^p P - f(x_0 + h)$$

per tutti i valori di z fra x_0 e $x_0 + h$ (x_0 e $x_0 + h$ inclusi), e nell'ipotesi che P sia ancora la stessa quantità che comparisce nelle formole precedenti, si può intanto evidentemente asserire che questa funzione $\varphi(z)$ si annullerà per $z = x_0$ e per $z = x_0 + h$.

Osservando dunque che, per le ipotesi fatte intorno a $f(x)$ fra x_0 e x_0+h (gli estremi inclusi), questa funzione $\varphi(z)$ è finita e continua per gl' indicati valori di z, e oltre a ciò in ogni punto dell'intervallo (x_0, x_0+h) tranne tutt'al più negli estremi ammette sempre (§§ 27 e 28 [pag. 29 e seg.]) una derivata determinata e finita $\varphi'(z)$, per il teorema 3.° del § 42 [teorema di Rolle a pag. 52] si conclude subito che fra x_0 e x_0+h (x_0 e x_0+h esclusi) deve esistere almeno un punto z_1 nel quale questa derivata è eguale a zero; quindi, poichè eseguendo le derivazioni e riducendo si trova subito che

$$\varphi'(z) = \frac{(x_0+h-z)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n)}(z) - p\,(x_0+h-z)^{p-1}\,\mathrm{P}\,,$$

e ciò per tutti i valori di z fra x_0 e x_0+h (x_0 e x_0+h al più esclusi), si conclude che per un valore speciale z_1, che evidentemente può anche porsi sotto la forma $z_1 = x_0 + \theta'_n h$, con θ'_n compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), si avrà

$$\frac{(x_0+h-z_1)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n)}(z_1) - p\,(x_0+h-z_1)^{p-1}\,\mathrm{P} = 0\,,$$

ovvero $\mathrm{P} = \dfrac{h^{n-p}\,(1-\theta'_n)^{n-p}}{p\,\pi(n-1)} f^{(n)}(x_0+\theta'_n h)$, e perciò sarà:

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^n\,(1-\theta'_n)^{n-p}}{p\,\pi(n-1)} f^{(n)}(x_0+\theta'_n h)\,, \tag{12}$$

e

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x_0) + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n\,(1-\theta'_n)^{n-p}}{p\,\pi(n-1)} f^{(n)}(x_0+\theta'_n h)\,, \tag{13}$$

dove θ'_n è ancora un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) che dipende da n, da p, da x_0, da h e dalla natura della funzione $f(x)$.

La forma (12) del resto della serie di Taylor è quella che volevamo trovare, ed è dovuta ai sigg. *Schlomilch* e *Roche;* e si deve notare che a differenza delle (10) e (11) essa suppone che le derivate di $f(x)$ fino alle $(n-1)^{me}$ inclusive siano determinate, finite e continue anche per $x = x_0 + h$, e le n^{me} siano determinate e finite in tutto il solito intervallo da x_0 a x_0+h (gli estremi per queste ultime al più esclusi).

In questa p può avere un valore qualunque diverso da zero e positivo; e nel caso particolare di $p = n$ essa riconduce al solito valore (10) di R_n, mentre per $p = 1$ conduce alla formola

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^n\,(1-\theta'_n)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n)}(x_0+\theta'_n h)\,, \tag{14}$$

che è quella di *Cauchy*.

Nel calcolo integrale poi daremo anche un'altra forma del resto della serie di Taylor espresso per mezzo di un integrale definito.

72. — Siccome nelle varie espressioni che noi abbiamo dato per R_n compariscono sempre i numeri θ_n e θ'_n, intorno ai quali si sa soltanto che essi hanno valori *determinati* compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), senza però che il più di sovente si abbia il modo di determinarli esattamente, così s'intende che bene spesso accadrà che le espressioni medesime di R_n non serviranno a darci il suo valore preciso, e neppure a darci il suo limite per $n = \infty$, quando è il caso di cercarlo; talchè, quando con valersi soltanto dei risultati precedenti si voglia decidere intorno alla applicabilità o no della serie di Taylor a una funzione data $f(x)$, bene spesso non si potrà giungere a nessuna conclusione per quanto si sappia che fra x_0 e x_0+h (x_0+h al più escluso) le derivate dei varî ordini di questa funzione $f(x)$, considerate per ogni ordine separatamente, sono sempre finite e continue.

Vi sono però due casi abbastanza estesi nei quali, indipendentemente dalla conoscenza del valore preciso di R_n, si può assicurare che il suo limite per $n = \infty$ è uguale a zero per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_1 (h_1 incluso), per modo che per gli stessi valori di h la formola di Taylor è sempre applicabile; e questi casi sono i seguenti.

1.° Quando fra x_0 e x_0+h_1 (x_0+h_1 per ora al più escluso) le derivate $f^{(n)}(x)$ di $f(x)$, oltre essere finite e continue per ogni valore comunque grande di n, si mantengono sempre numericamente inferiori ad un numero finito e positivo A, allora per ogni valore di h compreso fra 0 e h_1 (h_1 incluso), indipendentemente dalla conoscenza del valore preciso del resto corrispondente $\dfrac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$, si può asserire che questo resto col crescere indefinito di n ha sempre per limite zero, e la serie di Taylor corrispondente al valore x_0 di x è sempre applicabile per tutti gli stessi valori di h fra 0 e h_1 (h_1 incluso).

In questo caso infatti, indicando con h' il valore assoluto di h_1 che evidentemente può supporsi sempre finito, è certo che in valore assoluto si avrà sempre $\dfrac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h) < \mathrm{A}\,\dfrac{h'}{1}\cdot\dfrac{h'}{2}\cdot\dfrac{h'}{3}\cdots\dfrac{h'}{n-1}\cdot\dfrac{h'}{n}$; e siccome col crescere indefinito di n le quantità $\dfrac{h'}{n}$ finiscono per divenire e restare sempre inferiori a quel numero che più ci piace σ, si vede subito di qui che nel caso attuale il limite di $\dfrac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0+\theta_n h)$ per $n = \infty$, è uguale a zero per ogni valore di h compreso fra 0 e h_1 (h_1 incluso).

2.° — Quando poi fra x_0 e x_0+h_1 (x_0+h_1 per ora al più escluso) le derivate n^{me} di $f(x)$, sebbene sempre finite per ogni valore speciale di n, crescono però oltre ogni limite al crescere indefinito di n, allora si potrà ancora asserire che per ogni valore di h compreso fra 0 e h_1 (h_1 incluso) il resto corrispondente della serie di Taylor ha per limite zero per $n=\infty$, e che in conseguenza la serie di Taylor corrispondente al valore x_0 di x continuerà ancora a sussistere per gli stessi valori di h, tutte le volte che i valori di $f^{(n)}(x)$ siano tali che il prodotto $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x)$, per ogni valore di x compreso fra x_0 e x_0+h (x_0+h al più escluso) e per h compreso fra 0 e h_1 (h_1 incluso), abbia sempre per limite lo zero.

Ciò equivale anche a dire che quando esisterà un numero h_1 o un intervallo (x_0, x_0+h_1) tale che, se h' è il valore assoluto di h_1, e σ è un valore positivo arbitrariamente piccolo, almeno a partire da un certo valore determinato di n in poi, e per ogni valore di x fra x_0 e x_0+h_1 (x_0+h_1 al più escluso) si abbia sempre in valore assoluto $f^{(n)}(x) \leq \sigma \frac{\pi(n)}{h'^n}$, allora la formola di Taylor corrispondente al valore x_0 di x sarà giusta per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_1 (h_1 incluso).

Se poi pei medesimi valori di x fra x_0 e x_0+h_1 (x_0+h_1 al più escluso) si avrà soltanto $f^{(n)}(x) < \frac{\pi(n)}{h'^n}$, la stessa formola sarà ancora giusta per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_1, ma resterà incerta per $h=h_1$, giacchè allora a partire da un certo valore di n in poi, e per gli indicati valori di x, si avrà sempre in valore assoluto $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x) < \left(\frac{h}{h_1}\right)^n$; e quindi se $\frac{h}{h_1} < 1$, si avrà evidentemente $\lim \frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x) = 0$, mentre per $h=h_1$ rimarrà incertezza intorno al valore del limite di $\frac{h^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x)$.

È bene osservare che, onde riconoscere se sono soddisfatte le condizioni precedenti pei varii valori di x fra x_0 e x_0+h_1, basta cercare se queste condizioni sono soddisfatte quando in esse per $f^{(n)}(x)$ si pone il limite superiore dei valori assoluti di $f^{(n)}(x)$ nello stesso intervallo.

Inoltre è da osservare che, nei due casi ora considerati, per quanto non abbiamo posta veruna condizione intorno alla esistenza o alla natura delle derivate dei vari ordini della funzione $f(x)$ nel punto x_0+h_1, ciononostante, in conseguenza delle altre condizioni che abbiamo posto, queste derivate

saranno determinate e finite anche nel punto x_0+h_1, e tutt'al più, nel secondo caso, potranno crescere indefinitamente con n.

È chiaro infatti che se *nel punto* x_0+h_1 la derivata n^{ma} di $f(x)$ ($n \geq 1$), presa a sinistra o a destra secondochè h_1 è positivo o negativo, fosse la prima derivata che non avesse un valore determinato e finito, allora, pel teorema del § 44 [pag. 55] i valori di $f^{(n)}(x)$ nei punti x interni all'intervallo (x_0, x_0+h_1) col tendere di x a x_0+h_1 o avrebbero per limite l'infinito o non avrebbero alcun limite determinato; quindi, poichè il verificarsi di queste ultime circostanze per le derivate n^{ma} porta necessariamente (§ 46 [pag. 59]) che le derivate seguenti $(n+1)^{me}$ in punti interni all'intervallo (x_0, x_0+h_1) prendano anche valori numericamente maggiori di qualunque numero dato, si vede immediatamente che, ove per una delle derivate di $f(x)$ *nel punto* x_0+h_1 non avvenisse precisamente quello che avviene per le derivate stesse negli altri punti fra x_0 e x_0+h_1, sarebbe sempre impossibile di soddisfare alle altre condizioni che noi abbiamo poste rispetto alle derivate seguenti $f^{(n)}(x)$ nei punti x *interni* all'intervallo (x_0, x_0+h_1).

73. — Le condizioni date nel paragrafo precedente, sotto le quali la formola di Taylor corrispondente al valore x_0 di x è sempre applicabile per tutti i valori di h compresi fra zero e un certo numero positivo o negativo h_1 (h_1 al più escluso), sono evidentemente soltanto condizioni *sufficienti*.

Quando esse non sono soddisfatte, la formola di Taylor corrispondente al punto x_0 può ancora essere applicabile, se non per tutti, almeno per alcuni valori di h compresi fra zero e un certo numero positivo o negativo h_1, poichè può ancora avvenire che il resto della serie corrispondente a questi valori di h abbia per limite zero; e in simili casi per decidere la questione conviene studiare con processi speciali questo resto, o valersi dei teoremi che vengono dati in proposito nella teoria delle funzioni di una variabile complessa.

E quando non si riesca a decidere la questione, o quando si sappia che la formola di Taylor corrispondente al valore x_0 di x non sussiste per alcun valore di h perchè il suo resto non tende mai a zero al crescere indefinito di n, o anche perchè, per quanto piccolo si prenda in valore assoluto un certo numero h_1, le derivate degli ordini superiori di $f(x)$, almeno da un certo ordine in poi, non sono determinate e finite per tutti i valori di x diversi da x_0+h_1 che cadono nell'intervallo (x_0, x_0+h_1), allora invece della vera formola del Taylor, converrà fare uso dell'altra che, come già abbiamo detto, suole chiamarsi *formola del Taylor abbreviata*

$$(15)\quad f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n-1)}(x_0) + R_n\,,$$

nella quale R_n è dato da una qualunque delle formole (10), o (11), e che, come sappiamo, richiede soltanto che $f(x)$ sia finita e continua in tutto l'intervallo da x_0 a x_0+h (gli estr. incl.), e nei punti dell'intervallo stesso (x_0+h al più escluso) le derivate di $f(x)$ siano sempre finite e continue almeno fino a quelle dell'ordine $n-1$ inclusive, e le derivate n^{me} negli stessi punti da x_0 a x_0+h (x_0 e x_0+h al più esclusi) siano sempre determinate (finite cioè, o infinite e determinate di segno).

E R_n potrà anche prendersi come dato dalle formole (12) o (14) ammettendo però allora che da x_0 a x_0+h (gli estremi al più escl.) le derivate n^{me} di $f(x)$ siano anche finite, e le prime $n-1$ derivate siano finite e continue anche nel punto x_0+h.

Ora, tanto nei casi in cui la formola del Taylor corrispondente al valore x_0 di x e al valore che si considera di h è applicabile, quanto anche in quelli in cui si ha soltanto la formola abbreviata (15), può giovare evidentemente di conoscere un limite dell'errore che si commette, prendendo come somma della serie, o più generalmente come valore di $f(x_0+h)$, la somma (9), cioè la somma

$$f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi\,(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$$

di un certo numero n dei primi termini della serie del Taylor stessa; e a ciò serve utilmente il teorema che dice che: *Pei valori di h compresi fra zero e un certo numero sufficientemente piccolo in valore assoluto h_0 (h_0 incluso) l'errore che si commette prendendo per valore di $f(x_0+h)$ la somma dei primi n termini della serie del Taylor è sempre minore del valore assoluto del termine (differente da zero) a cui ci si arresta, tutte le volte che la derivata di $f(x)$ di ordine uguale a quello della derivata che comparisce in questo termine sia finita e continua nel punto x_0, e qualunque cosa accada per le derivate degli ordini seguenti.*

Per dimostrare questa proprietà, supponiamo di arrestarci al termine n^{mo} della serie del Taylor, il qual termine può esser supposto differente da zero; e osserviamo dapprima che la ipotesi che abbiamo fatta sopra, che nel punto x_0 la derivata $(n-1)^{ma}$ di $f(x)$ sia finita e continua, include naturalmente l'altra che questa derivata $(n-1)^{ma}$ esista e sia finita anche nei punti di un certo intorno di x_0 a destra o a sinistra; e questo porta che nei punti dello stesso intorno le derivate degli ordini precedenti esistano esse pure e siano finite e continue, e che in conseguenza, *per valori di h sufficientemente piccoli*, sussistano sempre le prime $n-1$ delle formole (3), e in particolare sussista la $(n-1)^a$.

Indicando con E_n l'errore che si commetterà prendendo, come abbiamo detto, per valore di $f(x_0+h)$ la somma dei primi n termini della serie del Taylor corrispondente (il quale errore nel caso che la formola di Taylor sussista è il resto corrispondente della serie del Taylor stessa) si potrà scrivere

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-2}}{\pi\,(n-2)}f^{(n-2)}(x_0)+\frac{h^{n-1}}{\pi\,(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+E_n\,;$$

e per le ipotesi fatte, quando h è abbastanza piccolo in valore assoluto ed ha il segno che deve essergli attribuito, si avrà anche come già abbiamo detto

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-2}}{\pi\,(n-2)}f^{(n-2)}(x_0)+\frac{h^{n-1}}{\pi\,(n-1)}f^{(n-1)}(x_0+\theta_{n-1}h)\,,$$

con $0<\theta_{n-1}<1$; e quindi sarà

$$E_n=\frac{h^{n-1}}{\pi\,(n-1)}\left\{f^{(n-1)}(x_0+\theta_{n-1}h)-f^{(n-1)}(x_0)\right\}\,, \tag{16}$$

e indicando con u_{n-1} il termine n^{mo} della serie al quale supponiamo di arrestarci, se u_{n-1}, e quindi $f^{(n-1)}(x_0)$, sarà diverso da zero, si potrà anche scrivere

$$E_n=\frac{f^{(n-1)}(x_0+\theta_{n-1}h)-f^{(n-1)}(x_0)}{f^{(n-1)}(x_0)}\,u_{n-1}\;;$$

e ora osservando che, per essere $f^{(n-1)}(x)$ finita e continua nel punto x_0, si può sempre determinare un numero h_0 tale che pei valori di x fra x_0 e x_0+h_0 (x_0+h_0 al più escluso) la quantità $\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{f^{(n-1)}(x_0)}$ sia sempre numericamente inferiore a quel numero che più ci piace, si conclude subito, come volevamo, che quando $f^{(n-1)}(x)$ nel punto x_0 è finita e continua e differente da zero, l'errore E_n per tutti i valori di h compresi fra zero e un numero sufficientemente piccolo h_0 (h_0 ora incluso) è sempre numericamente inferiore al valore assoluto di u_{n-1}; e, *dipendentemente dalla piccolezza di h_0, quest'errore E_n può anche supporsi arbitrariamente piccolo in confronto* *dello stesso termine* u_{n-1}, *perchè con* h_0 *sufficientemente piccolo e* $h \leq h_0$ *il fattore che moltiplica* u_{n-1} *in* E_n *può rendersi piccolo quanto si vuole* (*).

74. — Oltre a ciò poi osserviamo che, anche ammettendo soltanto che in un intorno di x_0 la derivata $f^{(n-1)}(x)$ sia sempre determinata e finita (essendo ancora o no continua e differente da zero nel punto x_0), dalla formola precedente (16) *si ha sempre, in valore assoluto, per l'errore* E_n

$$\mathrm{E}_n \leq \frac{h'^{n-1}}{\pi(n-1)} \mathrm{D}_{n-1,h}, \tag{17}$$

ove h' *è il valore assoluto di* h, *e* $\mathrm{D}_{n-1,h}$ *è l'oscillazione di* $f^{(n-1)}(x)$ *fra* x_0 *e* x_0+h; e di qui, come del resto poteva dedursi subito anche dalla (16), si conclude pure immediatamente che quando $f^{(n-1)}(x)$ è finita e continua nel punto x_0, essendo o no differente da zero in questo punto, e la continuità avendosi a destra o a sinistra secondo che i valori che si vogliono considerare per h sono positivi o negativi, si potrà sempre trovare un numero h_0 tale che, pel valore x_0 di x e per tutti i valori di h compresi fra 0 e h_0 (h_0 incluso), l'errore E_n che si commette prendendo la somma

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1\,.\,2}+\ldots\ldots+f^{(n-1)}(x_0)\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}$$

dei primi n termini della serie del Taylor come valore di $f(x_0+h)$, sia sempre numericamente inferiore a quel numero che più ci piace σ.

E lo stesso avverrà anche se $f^{(n-1)}(x)$ non è continua nel punto x_0, perchè, *in ogni caso*, se indichiamo con $\mathrm{D}_{n-1,i}$ l'oscillazione di $f^{(n-1)}(x)$ in un in-

(*) I risultati qui esposti sono quali si trovano nelle lezioni autografate dal 1877 che qui si riproducono.

Tenendo conto però di quanto si disse nella nota al § 66 (pag. 87 e seg.), e avendo riguardo alla formola (α) di quella nota nella quale sia cambiato n in $n-1$, si vede subito che senza richiedere la continuità di $f^{(n-1)}(x)$ nel punto x_0 e neppure l'esistenza di questa derivata fuori di x_0, l'errore E_n del quale parlavamo sopra viene dato dalla formola $\mathrm{E}_n = \frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}z_{n-1}$, e quindi quando $f^{(n-1)}(x_0)$ non è zero si ha anche $\mathrm{E}_n = \frac{z_{n-1}}{f^{(n-1)}(x_0)}u_{n-1}$, con z_{n-1} che tende a zero con h: e con questo il teorema dato sopra resta dimostrato anche per un caso molto più generale, poichè qui si richiede soltanto che la derivata $(n-1)^a$ di $f(x)$ esista e sia finita e diversa da zero nel punto x_0, senza curarsi di ciò che accade di questa derivata fuori di x_0. In altri termini *per la validità del teorema basta che i termini della formola di Taylor abbiano un significato fino all'ultimo che si considera, e che questo sia finito e diverso da zero*, e il teorema, enunciato così, viene posto sotto una forma generalissima.

tervallo i anche assai grande che parta da x_0 a destra o a sinistra secondo che h è positivo o negativo e nel quale la stessa $f^{(n-1)}(x)$ sia sempre determinata e finita, è certo che finchè x_0+h è compreso in questo intervallo i si avrà sempre $\mathrm{D}_{n-1,h} \leq \mathrm{D}_{n-1,i}$, e quindi basterà prendere h_0 in modo che

$$\text{sia in valore assoluto } h_0 \leq i, \text{ e } \frac{h_0^{n-1}}{\pi(n-1)}\mathrm{D}_{n-1,i} < \sigma, \text{ o } h_0 < \sqrt[n-1]{\frac{\sigma\,\pi(n-1)}{\mathrm{D}_{n-1,i}}},$$ $= \sqrt[n-1]{\frac{\sigma\pi(n-1)}{2M}}$

M = massimo valore assoluto.

perchè si abbia $\mathrm{E}_n < \sigma$, e evidentemente il numero h_0 che verrà così determinato, oltre a dipendere dal numero σ e dalla natura della funzione $f(x)$, dipenderà il più spesso anche dal numero n.

75. — Gli ultimi resultati, oltre a darci dei limiti superiori dell'errore che si commette quando come somma delle serie del Taylor corrispondente al valore x_0 di x, o più generalmente come valore di $f(x_0+h)$ si prende la somma

$$f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$$

dei primi n termini della serie stessa, danno luogo anche ad un'altra osservazione importante.

I resultati del paragrafo precedente infatti ci mostrano che, valga o no lo sviluppo completo in serie del Taylor pel valore x_0 di x e per certi valori di h, avverrà sempre che quando in questa serie ci si arresti ad un termine pel quale le derivate corrispondenti di $f(x)$ sono ancora finite in un intorno più o meno grande del punto x_0 (qualunque cosa accada del resto per le derivate degli ordini superiori), l'errore che si commette prendendo per valore assoluto di $f(x_0+h)$ la somma dei primi termini soltanto della serie del Taylor potrà sempre rendersi inferiore a quella quantità che più ci piace σ quando si prendano per h dei valori qualunque compresi fra zero e un certo numero sufficientemente piccolo h_0 (h_0 incluso); per modo che la formola

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$$

potrà riguardarsi come giusta all'infuori di quantità la cui piccolezza resterà sempre del tutto in nostro arbitrio; e ciò, come già dicemmo, anche di fronte al termine $\frac{h^{(n-1)}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)$, se esso è differente da zero e $f^{(n-1)}(x)$ è anche continua nel punto x_0 (*); o in altri termini: *Quando in un punto x_0 almeno alcune delle prime derivate dei primi ordini della funzione data $f(x)$ esistono e sono finite e continue, potendo però mancare la continuità in x_0 per l'ultima di queste derivate che si considererà senza cessare per questo di essere finita in un certo intorno di x_0, allora la formola del Taylor corrispondente arrestata ai primi termini, pei valori di h compresi fra zero e un numero sufficientemente piccolo h_0,* (che si determinerà col processo indicato nel paragrafo precedente), *potrà sempre riguardarsi come valida all'infuori di quantità che, dipendentemente dalla piccolezza di h_0, saranno arbitrariamente piccole.*

Considerando dunque in modo speciale il caso in cui la funzione data $f(x)$ nel punto x_0 ha tutte le derivate dei vari ordini determinate e finite, mentre la formola del Taylor corrispondente al valore x_0 di x non sussiste per alcun valore di h diverso da zero (come avviene p. es. per la funzione $f(x)$ considerata in fine del § 69 [pag 93]), si ha qui il fatto singolare che la somma di un numero finito qualunque dei primi termini della serie del Taylor

$$f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\dots+\frac{h^{n-1}}{\pi(n-1)}f^{(n-1)}(x_0)+\dots$$

ci dà valori approssimati quanto si vuole di $f(x_0+h)$ per ogni valore di h compreso fra zero e un dato numero sufficientemente piccolo h_0, mentre ciò non avviene quando si consideri la serie, la quale può avere una somma che può esser differentissima da $f(x_0+h)$, e può anche essere indeterminata o divergente.

Ora, ponendo mente ai resultati del paragrafo precedente, si spiega subito come una tale singolarità possa presentarsi; giacchè se si osserva che, come già dicemmo, il numero h_0 ora indicato, oltre a dipendere dalla natura della funzione $f(x)$ e dal numero σ che dà l'approssimazione della somma dei primi n termini della serie al valore $f(x_0+h)$, dipenderà ordinariamente anche dal numero n di questi termini, s'intende subito che quando si lascia fermo σ, potrà benissimo avvenire che, crescendo sempre più n, il numero corrispondente h_0, sebbene continui ad esistere e sia sempre diverso da zero, vada ogner più impiccolendo ed abbia per limite inferiore lo zero; e allora, poichè col crescere oltre ogni limite di n verrà a restringersi indefinitamente l'intervallo $(0, h_0)$ nel quale devono esser presi i valori di h onde esser sicuri che

(*) Per quanto dicemmo nella nota al paragrafo precedente, questa condizione della continuità di $f(x)$ nel punto x_0 può del tutto omettersi.

la somma dei primi n termini resti approssimata a $f(x_0+h)$ più di σ, s'intende subito che potrà anche benissimo accadere che, qualunque valore differente da zero si prenda per h, queste somme al crescere sempre più di n finiscano col restare sempre discoste da $f(x_0+h)$ più di σ, e la formola del Taylor in conseguenza non sussista per alcun valore di h.

Considerazioni simili potrebbero farsi nel caso che la formola del Taylor sussistesse soltanto per alcuni valori di h compresi fra zero e un dato numero h_1 (*).

76. — Ponendo $x_0+h=x$, la formola del Taylor si trasforma nell'altra

$$f(x)=\sum_0^\infty\frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0)\,, \tag{18}$$

che dicesi ancora formola del Taylor per la funzione $f(x)$; e questa dà il valore di $f(x)$ in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $x-x_0$ per quei valori speciali di x pei quali si verifica che nei punti dell'intervallo (x_0, x) la funzione $f(x)$ è sempre finita e continua, e negli stessi punti (il punto x al più escluso) ha finite e continue anche le derivate dei vari ordini, e oltre a ciò il resto $\frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0+\theta_n(x-x_0))$ corrispondente al valore x che si considera, e nel quale θ_n è al solito un numero determinato compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), ha per limite zero al crescere indefinito di n.

In particolare dunque se, essendo a e b due quantità differenti fra loro, una delle quali può anche essere uguale a x_0, le indicate circostanze si verificheranno per tutti i valori di x e di x_0 compresi fra a e b (gli estremi a e b al più esclusi), allora la formula (18) darà lo sviluppo della funzione $f(x)$ in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $x-x_0$ per tutti i valori di x e di x_0 compresi fra a e b (a e b al più esclusi).

La somma poi di un numero qualunque dei primi termini della serie $\sum_0^\infty\frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)}f^{(n)}(x_0)$ darà sempre un valore quanto si vuole approssimato al

(*) A queste conclusioni si potrebbe giungere subito anche partendo dalla solita formola (α) della nota al § 66 pag. 87 e seg.; però, non avendosi allora la condizione della esistenza delle derivate $(n-1)^e$ determinate e finite di $f(x)$ fuori del punto x_0, non si può determinare il limite superiore $\sqrt[n-1]{\frac{\sigma\,\pi(n-1)}{D_{n-1,i}}}$ del valore assoluto di h_0 per ogni valore di n, e per ogni numero arbitrariamente piccolo σ che venga dato, come si potè fare nel § 74.

valore corrispondente di $f(x)$, e più anche del termine diverso da zero a cui ci si arresta, tutte le volte che x sia sufficiente prossimo a x_0, ecc.

77. — Lo studio della serie di Taylor si collega evidentemente con quello delle serie ordinate per le potenze intere e positive di una variabile, e s'intende quindi come per procedere nello studio medesimo giovino le proprietà generali di queste ultime serie.

Ricordiamo perciò che se si ha una serie $\sum_0^\infty A_n\,(x-x_0)^n$ ordinata per le potenze di $x-x_0$, questa serie, quando sia convergente in un punto indice di una quantità reale o complessa x diversa dalla quantità x_0, ammette sempre un cerchio di convergenza il cui centro è in x_0 e il cui raggio ρ è diverso zero, essendo finito o infinito; e quindi in particolare quando x_0 e i coefficienti A_n sono reali ed x deve pure esser reale, questa serie avrà un valore reale e finito per tutti i valori di x compresi nell'intervallo $(x_0+\rho\,, x_0-\rho)$ tranne tutto al più negli estremi.

Considerando dunque una porzione qualsivoglia (a, b) di questo intervallo, che per brevità sarà detto *l'intervallo reale di convergenza della serie,* è certo che nella porzione (a, b), la quale potrà anche essere l'intero intervallo di convergenza, la somma della serie data $\sum_0^\infty A_n\,(x-x_0)^n$ sarà una funzione reale e finita $\varphi(x)$ di x in tutti i punti, tranne tutt'al più negli estremi a e b quando questi estremi coincidano con $(x_0-\rho)$ e $(x_0+\rho)$; e per quanto si disse trattando della derivazione per serie al § 55 [pag. 69 e seg.], si vede subito anche che, questa funzione $\varphi(x)$ per tutti i valori di x fra a e b (a e b al più esclusi se $a=x_0-\rho$ e $b=x_0+\rho$) avrà tutte le sue derivate dei vari ordini finite e continue, e queste derivate si otterranno applicando la derivazione successiva termine a termine alla serie data, per modo che insieme alla formola

$$\varphi(x)=\sum_0^\infty A_n\,(x-x_0)^n\,,$$

si avrà anche, qualunque sia p

$$\varphi^{(p)}(x)=\sum_0^\infty (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)\,A_{n+p}\,(x-x_0)^n=\pi(p)\sum_0^\infty (n+p)_p\,A_{n+p}\,(x-x_0)^n,$$

essendo $(n+p)_p$ il solito coefficiente binomiale; talchè, facendo in queste formole $x=x_0$ si vede subito che si avrà $A_n=\dfrac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}$, e la serie $\sum_0^\infty A_n\,(x-x_0)^n$ non sarà altro che la serie del Taylor corrispondente alla funzione $\varphi(x)$ col punto iniziale x_0, e per ogni valore di x nella porzione $(a\,, b)$ e anche nell'intero intervallo di convergenza (gli estr. al più esclusi).

78. — Queste osservazioni generali ci permettono di dire che partendo da una serie di Taylor $\sum_0^\infty \dfrac{(x-x_0)^n}{\pi(n)}\,f^{(n)}(x_0)$, se si riscontrerà che essa è convergente in qualche punto x (diverso dal punto x_0), essa certamente ammetterà un intervallo di convergenza finito o infinito $(x_0-\rho\,,\ x_0+\rho)$, per quanto possa anche avvenire che non rappresenti mai la funzione $f(x)$ in nessun punto x di quest'intervallo (diverso sempre dal punto x_0), o la rappresenti soltanto in alcuni punti o in alcune porzioni $(a\,, b)$ dell'intervallo medesimo.

E se esisterà effettivamente una porzione (a, b) che comprenda il punto x_0 e nei punti della quale (tranne tutt'al più in uno o in tutti e due gli estremi a e b se $a=x_0-\rho$ o $b=x_0+\rho$) la serie $\sum_0^\infty \dfrac{(x-x_0)^n}{\pi(n)}\,f^{(n)}(x_0)$ rappresenti la funzione $f(x)$ per modo che si abbia per gli stessi punti

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}\,(x-x_0)^n\,,$$

allora, per le osservazioni precedenti, nella stessa porzione (a, b) alla serie medesima sarà applicabile anche la derivazione successiva termine a termine, per modo cioè che le somme delle serie derivate successive saranno le derivate di $f(x)$.

79. — Ciò posto, anzichè partire, come finora abbiamo fatto, dalle solite condizioni poste sempre in precedenza, cioè che nell'intervallo $(x_0\,, x)$ la funzione $f(x)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate dei varii ordini, e che sia verificata la solita condizione pel limite del resto della serie di Taylor, ammettiamo ora invece la possibilità dello sviluppo della funzione $f(x)$ secondo una serie come quella di Taylor $\sum_0^\infty \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}\,(x-x_0)^n$ per tutti i valori di x che cadono in una porzione determinata (a, b) dell'intervallo di convergenza $(x_0-\rho\,, x_0+\rho)$ di questa serie (a o b al solito esclusi se $a=x_0-\rho$ o $b=x_0+\rho$).

Allora, per quanto dicemmo nel paragrafo precedente, come conseguenza di questa possibilità si concluderà subito *la esistenza delle derivate della $f(x)$ per gli stessi valori di x fra a e b;* e sia che x_0 appartenga o no all'intervallo (a, b) si concluderà anche l'esistenza di una funzione $\varphi(x)$ finita e continua in tutto l'intervallo di convergenza salvo tutt'al più gli estremi, che nei punti della indicata porzione (a, b) coinciderà con $f(x)$, e in tutta la parte rimanente dell'intervallo di convergenza potrà essere diversa dalla $f(x)$ la quale potrà anche non essere stata data in tutto questo intervallo; e la stessa $\varphi(x)$ sarà sviluppabile in serie di Taylor, col punto iniziale x_0, anche nella porzione (a, b); e in ogni caso nel punto x_0 sì essa che le sue derivate coincideranno coi valori della funzione $f(x)$ e delle varie sue derivate.

Segue da ciò evidentemente che si possono ora modificare gli enunciati del § 68 (pag. 90 e seg.), e in particolare, quando ci si limiti al caso che il punto x_0 appartenga all'intervallo (a, b), si può ora asserire che: *Se nel punto x_0 la funzione $f(x)$ e le sue derivate dei varii ordini sono determinate e finite per modo che i termini della serie* $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}(x-x_0)^n$ *abbiano tutti un significato, allora affinchè la formola del Taylor* $f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}(x-x_0)^n$ *valga pei punti x di un intervallo (a, b) cui appartiene il punto x_0 (a e b al più esclusi se essi sono gli estremi dell'intervallo di convergenza della serie) è necessario e sufficiente che* per gli stessi valori di x *la funzione $f(x)$ sia finita e continua insieme alle sue derivate dei vari ordini, e che il resto corrispondente* $\frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)} \{ x_0 + \theta_n (x-x_0) \}$ *converga a zero col crescere indefinito di n, quando per θ_n si prendano i soliti valori determinati compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) e dipendenti dalla natura di $f(x)$, dal numero n, e dai valori di x e x_0.*

80. — Le osservazioni generali del § 77 (pag. 106) permettono anche di dimostrare che: *Se una funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie* $\sum_0^\infty A_n (x-x_0)^n$ *ordinata per le potenze di $x - x_0$ in un intervallo (a, b) (a e b al più esclusi nei soliti casi) questa funzione $f(x)$ sarà anche sviluppabile in serie di Taylor ordinata per le potenze di $x - x_1$, essendo x_1 un valore compreso fra a e b (e tutt'al più differente da a e b nei soliti casi in cui a o b coincidano con gli estremi $x_0 - \rho$ o $x_0 + \rho$ dell'intervallo di convergenza di* $\sum_0^\infty A_n (x-x_0)^n$).

E se ρ_1 è la più piccola delle due quantità $(x_0+\rho)-x_1$, e $x_1-(x_0-\rho)$ il nuovo sviluppo $\sum_0^\infty \frac{(x-x_1)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_1)$ *varrà per tutti i valori di x compresi in quella porzione di intervallo $(x_1-\rho_1, x_1+\rho_1)$ che cade nell'intervallo (a, b) esclusi soltanto, e tutt'al più, i valori x che fossero uguali a $x_0-\rho$ o a $x_0+\rho$; e in certi casi lo stesso sviluppo potrà anche valere in punti posti fuori dell'intervallo $(x_1-\rho_1, x_1+\rho_1)$.*

Osserviamo infatti che se per x compreso fra a e b (a e b al più esclusi nei soliti casi) si ha $f(x) = \sum_0^\infty A_n (x-x_0)^n$, allora per quanto si disse nel

§ 77 [pag. 106] sarà anche

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= A_0 + A_1(x_1-x_0) + 2_0 A_2 (x_1-x_0)^2 + \ldots + p_0 A_p (x_1-x_0)^p + \sum_1^\infty (n+p)_0 A_{n+p} (x_1-x_0)^{n+p}, \\
f'(x_1) &= A_1 + 2_1 A_2 (x_1-x_0) + \ldots + p_1 A_p (x_1-x_0)^{p-1} + \sum_1^\infty (n+p)_1 A_{n+p} (x_1-x_0)^{n+p-1}, \\
\frac{1}{(2)} f''(x_1) &= 2_2 A_2 + \ldots + p_2 A_p (x_1-x_0)^{p-2} + \sum_1^\infty (n+p)_2 A_{n+p} (x_1-x_0)^{n+p-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{p)} f^{(p)}(x_1) &= p_p A_p + \sum_1^\infty (n+p)_p A_{n+p} (x_1-x_0)^n,
\end{aligned}$$

dove p è un numero intero qualsiasi, e in generale con m_s s'indicano i soliti coefficienti binomiali; e quindi si avrà evidentemente

$$\begin{aligned}
f(x_1) + \frac{(x-x_1)}{1} f'(x_1) + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} f''(x_1) + \ldots + \frac{(x-x_1)^p}{\pi(p)} f^{(p)}(x_1) = A_0 + A_1(x-x_0) + \\
+ A_2(x-x_0)^2 + A_p (x-x_0)^p + \sum_1^\infty A_{n+p} \{ (x_1-x_0)^{n+p} + (n+p)_1 (x_1-x_0)^{n+p-1}(x-x_1) + \\
+ (n+p)_2 (x_1-x_0)^{n+p-2}(x-x_1)^2 + \ldots\ldots + (n+p)_p (x_1-x_0)^n (x-x_1)^p \}.
\end{aligned}$$

Ora, indicando con A'_{n+p} il valore assoluto di A_{n+p}, e con μ e ν i valori assoluti di (x_1-x_0) e $(x-x_1)$, si vede immediatamente che i valori assoluti dei termini della serie del secondo membro non sono superiori a

$$A'_{n+p} \{ \mu^{n+p} + (n+p)_1 \mu^{n+p-1} \nu + (n+p)_2 \mu^{n+p-2} \nu^2 + \ldots + (n+p)_p \mu^n \nu^p \},$$

e quindi essi sono sempre inferiori a $A'_{n+p}(\mu+\nu)^{n+p}$; dunque, poichè quando ad x si danno soltanto i valori fra a e b che trovansi compresi fra $(x_1-\rho_1)$ e $(x_1+\rho_1)$, ove ρ_1 ha il significato stabilito nell'enunciato del teorema, si ha sempre $\mu+\nu < \rho$, e quindi la serie $\sum_0^\infty A'_n (\mu+\nu)^n$ è convergente, si riconosce subito che per gli stessi valori di x (e talvolta anche evidentemente per valori di x fuori dell'intervallo $(x_1-\rho_1, x_1+\rho_1)$), il secondo membro della formola precedente, a partire da un certo valore di p in poi, si manterrà sempre numericamente inferiore a quella quantità positiva che più ci piace σ; e questo evidentemente ci permette di dire che per gli stessi valori di x avremo

$$f(x) = \lim_{p=\infty} \sum_0^p \frac{(x-x_1)^p}{\pi(p)} f^{(p)}(x_1), \quad \text{ovvero} \quad f(x) = \sum_0^\infty \frac{(x-x_1)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_1),$$

come appunto volevamo dimostrare.

81. — Questo resultato porta anche facilmente a concludere che: *Quando una funzione $f(x)$ è sviluppabile in un dato intervallo (a, b) in serie ordinata per le potenze di una quantità $x - x_0$, lo sviluppo non può farsi che in un sol modo, e se il punto x_0 appartiene all'intervallo (a, b) lo sviluppo stesso non è altro che quello di Taylor* $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$.

Ammesso infatti che pei punti x fra a e b (a e b al più esclusi nei soliti casi) esistessero due sviluppi differenti per modo che si avesse

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n (x - x_0)^n, \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_0^\infty A'_n (x - x_0)^n,$$

sarebbe evidentemente $\sum_0^\infty (A_n - A'_n)(x - x_0)^n = 0$ per gli stessi valori di x; e quindi la nostra ipotesi porterebbe l'esistenza di una funzione $\varphi(x)$ che fosse zero in una porzione (a, b) dell'intervallo di convergerza $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ (a e b al più esclusi nei soliti casi), e in tutto questo intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ fosse rappresentata sempre da una serie $\sum_0^\infty B_n (x - x_0)^n$ i cui coefficienti non fossero tutti uguali allo zero.

Ora, quando il punto x_0 appartenesse all'intervallo (a, b), allora avendosi, per tutti i valori di x fra a e b, $\varphi^{(p)}(x) = 0 = \pi(p) \sum_0^\infty (n+p)_p B_{n+p} (x - x_0)^n$, col fare $x = x_0$ si troverebbe subito $B_p = 0$ per qualunque valore intero di p, e quindi i due sviluppi supposti differenti non ne farebbero che uno; dunque basta ora considerare il caso in cui x_0 non appartenga all'intervallo (a, b).

Ma, supponendo per es. $x_0 < a < b$, pel teorema del paragrafo precedente si vede subito che la funzione $\varphi(x)$ si potrebbe sviluppare in serie di Taylor ordinata per le potenze di $x - a$ per tutti i valori di x compresi fra $a - (x_0 + \rho - a)$ e $a + (x_0 + \rho - a)$, o fra $2a - (x_0 + \rho)$ e $x_0 + \rho$; e quindi poichè $\varphi(x)$ e le sue derivate sono zero per $x = a$, si conclude intanto che altrettanto accadrebbe fra $2a - (x_0 + \rho)$ e $(x_0 + \rho)$, cioè in un intervallo non inferiore al doppio di (a, b).

Ora, se $2a - (x_0 + \rho)$ fosse già inferiore o uguale a x_0, saremmo così ritornati nel caso precedente, e si concluderebbe quindi immediatamente che $B_n = 0$; quando poi $2a - (x_0 + \rho)$ fosse ancora superiore a x_0, si passerebbe in un modo simile ad un intervallo non inferiore al doppio del precedente e poi, occorrendo, ad un altro intervallo ancora non inferiore al doppio di quello ottenuto, ecc., talchè si giungerebbe sempre evidentemente ad un intervallo nel quale si troverebbe anche il punto x_0, e allora si concluderebbe pure

che $B_n = 0$; dunque si può ora evidentemente affermare che in ogni caso la funzione $f(x)$ pei valori di x fra a e b non potrà ammettere che uno sviluppo $\sum_0^\infty A_n (x - x_0)^n$ per potenze intere di $x - x_0$; e se il punto x_0 apparterrà all'intervallo (a, b), questo sviluppo, per quanto si disse in fine del § 77 [pag. 106] sarà appunto quello di Taylor corrispondente a $f(x)$; talchè il teorema enunciato è ora completamente dimostrato.

È poi da notare che da questo teorema risulta anche immediatamente che: *Se due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono sviluppabili ambedue in serie ordinata per le potenze di $x - x_0$ in certi intervalli che hanno a comune una parte (a, b), e in una porzione comunque piccola (a', b') di (a, b) queste funzioni sono uguali, esse saranno uguali in tutto l'intervallo (a, b) giacchè le serie ad esse corrispondenti saranno perfettamente le stesse.*

82. — Non lasceremo questi studî generali senza fare esplicitamente la osservazione seguente.

In ciò che precede noi, avendo in mira di conservare la massima generalità, abbiamo sempre ammesso che avendosi una funzione $f(x)$ in un intervallo cui appartiene un punto x_0, la serie di Taylor corrispondente $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$, sebbene il più spesso convergente in un certo intervallo, potesse anche non rappresentare mai la funzione $f(x)$ o la rappresentasse soltanto in punti staccati dello stesso intervallo (diversi da x_0), o soltanto in porzioni (a, b) dell'intervallo medesimo e alle quali appartenga o no il punto x_0.

Ora, quando si trovi che la serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$ è convergente almeno in un punto (diverso da x_0), è certo, come già dicemmo al § 77 [pag. 106], che essa sarà convergente in tutti i punti di un intervallo che sarà quello di convergenza $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ (gli estremi $x_0 - \rho$, $x_0 + \rho$ al più esclusi); e in questo intervallo essa rappresenterà una funzione $\varphi(x)$ dotata di tutte le proprietà che si richiedono per essere sviluppabile nell'intervallo stesso in serie di Taylor, e anzi la serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$ non sarà altro che la serie di Taylor $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} \varphi^{(n)}(x_0)$ corrispondente a $\varphi(x)$; dunque, lasciando da parte il caso in cui la serie data $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$ rappresenti la funzione $f(x)$ in un intervallo dato (a, b) cui appartiene il punto x_0, noi possiamo asserire che negli altri casi, dei quali noi abbiamo ammesso sinora la possibilità, insieme alla $f(x)$ esisterà un'altra funzione $\varphi(x)$ che sarà uguale a $f(x)$

per $x = x_0$ e per gli altri valori di x (se pure esistono) pei quali la serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x)$ rappresenta effettivamente $f(x)$; e nel punto x_0 anche le derivate dei varii ordini di $\varphi(x)$ saranno uguali alle derivate corrispondenti di $f(x)$.

Non essendo dunque da ammettere, almeno a priori, che in ogni caso abbiano a trovarsi soddisfatte le varie ipotesi che noi abbiamo fatto sul modo di comportarsi di $f(x)$ rispetto alla sua sviluppabilità per mezzo della serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$ nell'intorno di un punto x_0, è indubitato che la possibilità della esistenza contemporanea di funzioni come la $f(x)$ e la $\varphi(x)$ è piuttosto da ammettersi che da escludersi a priori; solo, onde questo accada, bisognerà che negl'intervalli che hanno un estremo in x_0, e in alcuni punti dei quali la funzione $f(x)$ non è sviluppabile per mezzo della serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$, si abbiano delle singolarità nelle derivate di $f(x)$; o risultando queste derivate sempre finite e continue, per ogni ordine separatamente, nei punti degli stessi intervalli, o anche nell'intero intervallo di convergenza della serie, bisognerà che almeno per alcuni di questi punti x il resto corrispondente $\frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}\{x_0 + \theta_n(x-x_0)\}$ non abbia per limite zero col crescere indefinito di n, e ciò senza neppure escludere che avvenga che *nel punto* x_0 le derivate dei varii ordini di $f(x)$ si mantengano numericamente inferiori a un numero finito anche al crescere indefinito di n.

Ora, evidentemente il fatto della esistenza delle derivate determinate e finite di $f(x)$ *nel punto* x_0 non esclude la possibilità del primo caso, poichè, mentre un tal fatto porterà qualche limitazione rispetto ai valori da attribuirsi ad $f(x)$ in un piccolo intorno di x_0, non ne porterà già pei valori di $f(x)$ in punti x ad una certa distanza da x_0; e d'altra parte poi, mentre dalla esistenza delle varie derivate di $f(x)$ nel punto x_0 si deve inferirne che per ogni derivata $f^{(n)}(x)$ *separatamente* debba esistere a destra o a sinistra di x_0, o dalle due parti, un intorno differente da zero e nei punti del quale questa derivata è finita e continua, non viene però escluso con ciò che questi intorni possano anche essere differenti per le varie derivate, e possano andare successivamente e indefinitamente impiccolendo col crescere oltre ogni limite dell'ordine di derivazione; e evidentemente quando ciò avvenga, almeno da una parte di x_0 non esisterà neppure un intorno *determinato e fisso* di x_0 nei punti del quale *ogni derivata* di $f(x)$ sia sempre finita e continua; dunque, per queste sole considerazioni generali, l'esistenza di funzioni per le quali si presenti il primo dei casi testè indicati, può dirsi quasi del tutto fuori di dubbio.

Si aggiunge poi che, indipendentemente anche da ogni considerazione generale, la possibilità di funzioni per le quali si presenti il secondo caso non può mettersi in dubbio, poichè di tali funzioni si hanno effettivamente esempî in quella considerata in fine del § 69 [pag. 93], e in infinite altre consimili.

Dunque finchè ci teniamo, come noi abbiamo sempre fatto, nel caso di funzioni di variabili reali, resta ora fuori di dubbio che quando si sa che una funzione $f(x)$ è finita e continua in un intervallo (a, b) cui appartiene un punto x_0, e in questo punto ha tutte le sue derivate dei varii ordini determinate e finite, allora, quand'anche si abbia pure per dato che le derivate dei vari ordini di $f(x)$ sono finite e continue per tutti i punti x fra a e b, è certo che, a meno che non si sappia che questa funzione $f(x)$ per tutti i punti x fra a e b (gli estremi al più esclusi) è sviluppabile per mezzo della serie di Taylor $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$, o a meno che non siano date altre sue proprietà speciali, non si potrà asserire (come pure bene spesso veniva fatto in passato) che i valori di $f(x)$ e delle sue varie derivate nel punto x_0 caratterizzino completamente la funzione per tutti i punti x fra a e b (a e b al più esclusi), per modo cioè che la funzione debba dirsi perfettamente determinata nell'intervallo (a, b) quando si conoscono i valori $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,... di $f(x)$ e delle sue derivate nel punto x_0.

E neppure può dirsi che i valori di $f(x)$ in un piccolo intorno di x_0 caratterizzino completamente la funzione nelle altre parti dell'intervallo (a, b), quand'anche in tutti i punti di (a, b) la stessa $f(x)$ debba essere finita e continua insieme alle sue varie derivate, poichè se un tale intorno è, per es. l'intervallo $(x_0, x_0 + \alpha)$, e si ha $a < x_0 + \alpha < b$, essendo α positivo, nel punto $x_0 + \alpha$, valendoci dei valori dati di $f(x)$ nell'intervallo $(x_0, x_0 + \alpha)$, si potranno calcolare anche le varie derivate a sinistra di $f(x)$ e quindi anche le derivate ordinarie; ma poichè la conoscenza dei soli valori $f(x_0 + \alpha)$, $f'(x_0 + \alpha)$, $f''(x_0 + \alpha)$, ... non basta, come abbiamo detto, a determinare completamente la funzione fra $x_0 + \alpha$ e b, questa funzione resterà ancora determinata soltanto nell'intervallo $(x_0, x_0 + \alpha)$, finchè per essa non si diano altre condizioni speciali.

E si può inoltre aggiungere che quando siano dati i valori di $f(x)$ e delle sue derivate nel punto x_0, e la serie $\sum_0^\infty \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$ sia convergente almeno in un punto diverso da x_0, questi valori caratterizzano sempre una funzione $\varphi(x)$ finita e continua insieme alle sue derivate dei varî ordini in un certo intervallo $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ (gli estremi $x_0 - \rho$ e $x_0 + \rho$ al più esclusi), e *dotata anche della proprietà di essere nello stesso intervallo sviluppabile in serie di Taylor*, e di prendere, sì essa che le sue derivate, nel punto x_0 i valori dati per $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)\ldots$; ma la funzione $f(x)$ potrà differire da questa funzione $\varphi(x)$ per una delle infinite funzioni $\psi(x)$ che nel punto x_0 sono uguali a zero, insieme alle varie loro derivate, e negli altri punti sono finite e continue ecc... e l'esistenza delle quali non può minimamente porsi in dubbio (§ 69 in fine [pag. 93]).

83. — La formola di Taylor $f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}(x-x_0)^n$, quando $x_0 = 0$ si riduce all'altra più semplice

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{\pi(n)} x^n, \tag{19}$$

che dicesi *formola di Maclaurin* dal nome del primo che la dette, per quanto Maclaurin stesso la considerasse come un caso particolare di quella di Taylor.

La serie di Maclaurin dunque gode delle proprietà della serie di Taylor, e quindi in particolare la somma di un numero qualunque dei suoi primi termini dà sempre un valore approssimato al valore di $f(x)$ quanto si vuole, e più anche del termine diverso da zero a cui ci si arresta, quando il valore che si considera di x sia sufficientemente piccolo in valore assoluto ecc...; e quando la serie stessa sia convergente in un punto diverso da zero, lo sarà in tutto un intervallo $(-\rho, \rho)$ finito o infinito (gli estremi $-\rho$ e ρ al più esclusi), e ci darà il valore di $f(x)$ in serie ordinata per le potenze intere e positive di x per tutti quei valori di x compresi nell'intervallo $(-\rho, \rho)$ pei quali siano soddisfatte le condizioni generali che si dettero pel caso della serie di Taylor.

Quando poi nei punti fra 0 e x (x al più escluso) le derivate dei varii ordini di $f(x)$ sono finite e continue, dalle note espressioni del resto della serie di Taylor, si vede subito che il *resto* corrispondente *della serie di Maclaurin* pel valore x è dato da una qualsiasi delle formole:

$$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\theta_n x),\ R_n = \frac{x^n\,\theta_n^{n-m}}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} f^{(n)}(\theta_n x),\ R_n = \frac{F(x)}{F^{(n)}(\theta_n x)} f^{(n)}(\theta_n x) \tag{20}$$

o da una delle due

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta_n)^{n-1}}{\pi(n-1)} f^{(n)}(\theta_n x),\ R_n = \frac{x^n(1-\theta_n)^{n-p}}{p\,\pi(n-1)} f^{(n)}(\theta_n x); \tag{21}$$

dove p è un numero positivo qualsiasi, e nelle ultime delle quali, almeno per p diverso da n, si suppone che le varie derivate di $f(x)$, almeno fino a quelle dell'ordine $n-1$, esistano anche nel punto x; e in tutte queste formole le θ_n sono quantità determinate i cui valori possono differire dall'una formola all'altra, ma sono tutti compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi) e dipendono dalla natura della funzione $f(x)$, da x, da n, ecc.

Valendoci poi delle proprietà generali stabilite pel caso della serie di Taylor, si può asserire in particolare che *quando per tutti i punti x compresi in un intervallo $(0, \alpha)$ (α al più escluso) le varie derivate di $f(x)$ sono sempre finite e continue, affinchè la formola di Maclaurin sussista per gli stessi valori di x (α escluso o no) è necessario e sufficiente che il resto corrispondente della serie converga a zero col crescere indefinito di n*, e per quanto si disse al § 79 [pag. 107 e seg.] questo enunciato può anche modificarsi col dire che: *Affinchè a una funzione $f(x)$ sia applicabile lo sviluppo in serie di Maclaurin per tutti i valori di x compresi fra 0 e un certo numero α (α al più escluso) è necessario e sufficiente che per gli stessi valori di x differenti da α la funzione $f(x)$ sia sempre finita e continua insieme alle sue varie derivate, e la quantità conosciuta sotto il nome di resto della serie, e data dalle formole* (20) *o* (21), *abbia per limite zero col crescere indefinito di n.*

E s'intende che queste condizioni saranno sempre soddisfatte quando nell'intervallo $(0, \alpha)$ le derivate di $f(x)$ soddisfino alle condizioni che noi indicammo al § 72 [pag. 97] pel caso dell'intervallo (x_0, x_0+h); e quindi in particolare una funzione $f(x)$ sarà sempre sviluppabile in serie di Maclaurin fra 0 e α quando in quell'intervallo le varie sue derivate si mantengono sempre numericamente inferiori ad un numero finito A.

84. — La formola di Maclaurin si applica continuamente alla ricerca degli sviluppi delle funzioni $f(x)$ in serie ordinate secondo le potenze della variabile x, e ciò si fa servendoci dei teoremi ora enunciati.

Noi, per dare qualche esempio, l'applicheremo ora ai seguenti casi.

1.° Sia $f(x) = e^x$. Osservando che le derivate di e^x sono tutte uguali ad e^x, e quindi, finchè x è finito, sono sempre inferiori ad un dato numero finito, e per $x=0$ si riducono tutte all'unità, si ha subito dalla formola di Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

per qualunque valore finito di x.

2.° Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, osservando che si ha $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{\text{IV}}(x) = \operatorname{sen} x$, e in generale $f^{(4m)}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4m+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4m+2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(4m+3)}(x) = -\cos x$, si trova subito coll'applicazione della formola di Maclaurin, e qualunque sia x

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \cdots\cdots$$

Similmente, se $f(x) = \cos x$, si trova

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \cdots\cdots$$

3.° Se $f(x) = \log(1+x)$, ove i logaritmi sono neperiani, si osserverà che

$$(22) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}\,,\; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,,\; f'''(x) = \frac{1\,.\,2}{(1+x)^3}\,, \ldots,\; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{\pi(n-1)}{(1+x)^n}\,,$$

talchè si concluderà intanto che le derivate di $\log(1+x)$ sono tutte finite e continue pei varî valori di x compresi fra -1 e 1 e diversi da -1, e quindi per decidere se la formola di Maclaurin sia o no applicabile a $\log(1+x)$ per questi valori di x, basterà esaminare il resto della serie corrispondente valendoci delle formole (20) o (21).

Ora, valendoci della prima delle formole (20) si trova subito che in questo caso si ha $R_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n(1+\theta_n x)^n}$, e se x è positivo e non supera l'unità, per $n = \infty$ si avrà $\lim R_n = 0$ giacchè anche θ_n è positivo e tutt'al più, pure essendo sempre diverso da zero, può avere per limite zero per $n = \infty$; dunque si conclude intanto che la formola di Maclaurin è applicabile a $\log(1+x)$ pei valori di x compresi fra 0 e 1 (1 incluso).

Valendoci poi della prima delle formole (21) si vede subito che, per x negativo ed eguale a $-x_1$, si ha $R_n = \pm\dfrac{x_1^n(1-\theta_n)^{n-1}}{(1-\theta_n x_1)^n} = \pm\dfrac{x_1^n}{1-\theta_n x_1}\left(\dfrac{1-\theta_n}{1-\theta_n x_1}\right)^{n-1}$;

e quindi se x_1 non è uguale ad 1, osservando che la frazione $\dfrac{1-\theta_n}{1-\theta_n x_1}$ non supera l'unità, e solo può avere per limite l'unità, e il denominatore $1-\theta_n x_1$ non è inferiore a $1-x_1$, si conclude che anche in questo caso si ha $\lim R_n = 0$; talchè si può ora affermare che per tutti i valori di x compresi fra -1 e 1 (-1 escluso) la formola di Maclaurin è applicabile a $\log(1+x)$, e si ha perciò

$$(23) \qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots;$$

e, per quanto noi abbiamo qui escluso il caso di $x = -1$, si vede subito che questa formola può riguardarsi come valida anche per questo valore di x.

85. — Troviamo utile ora di fare l'osservazione seguente.

Data una funzione $f(x)$ pei valori reali di x compresi in un certo intervallo $(\alpha\,,\beta)$, che può anche essere quello da $-\infty$ a $+\infty$, avviene bene spesso che il suo sviluppo in serie di Maclaurin $\sum_0^\infty \dfrac{x^n}{\pi(n)} f^{(n)}(0)$, o in serie di Taylor $\sum_0^\infty \dfrac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x_0)$, ove x_0 è un punto speciale fra α e β, mentre sussiste in una porzione $(a\,,b)$ di questo intervallo, non sussista affatto nelle porzioni rimanenti dell'intervallo stesso $(\alpha\,,\beta)$.

Ciò vuol dire che la funzione $f(x)$, che pure esiste anche pei valori di x fuori dell'intervallo $(a\,,b)$ non può per questi valori di x svilupparsi in serie altro che con leggi differenti, per modo quindi che la funzione $f(x)$ stessa in certi intervalli venga ad avere una espressione analitica, e in altri venga ad averne invece altre, le quali poi possono anche servire al tempo stesso in porzione dell'intervallo nel quale serviva l'espressione analitica primitiva, o anche in tutto l'intervallo medesimo; e può anche accadere che l'espressione analitica da sostituirsi nei nuovi intervalli a quella che non è più applicabile sia una nuova serie di Taylor per la quale viene cangiato il valore iniziale x_0, per modo cioè che la quantità $x - x_0$ rispetto alle potenze della quale la nuova serie viene ordinata, sia differente da quella che compariva nella serie di Taylor (o di Maclaurin) primitiva.

Di ciò si ha un esempio semplice nella funzione $\log(1+x)$, per la quale la serie di Maclaurin cessa di essere applicabile pei valori positivi di x superiori all'unità, mentre la funzione $\log(1+x)$ esiste per tutti i valori di x da -1 a $+\infty$, e quindi anche pei valori di x da 1 a ∞.

Per questa funzione infatti, indicando con x_0 un numero qualunque compreso fra -1 e $+\infty$ (-1 escluso), e avendo riguardo alle formole (22), si trova che la serie di Taylor corrispondente è la seguente

$$\log(1+x_0) + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n(1+x_0)^n}\,;$$

quindi, poichè prendendo il suo resto R_n sotto la forma

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n}{\pi(n)} f^{(n)}\{x_0 + \theta_n(x-x_0)\} = (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n}\,\frac{1}{\{1+x_0+\theta_n(x-x_0)\}^n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left\{\frac{x-x_0}{1+x_0+\theta_n(x-x_0)}\right\}^n,$$

si vede subito che per $x_0 < x \leq 2x_0 + 1$, si ha $\lim R_n = 0$; e prendendo invece R_n sotto l'altra forma

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n (1-\theta_n)^{n-1}}{1 \,.\, 2 \dots (n-1)} f^{(n)}\{x_0 + \theta_n (x - x_0)\} = (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n (1-\theta_n)^{n-1}}{\{1 + x_0 + \theta_n (x-x_0)\}^n},$$

ovvero

$$R_n = -\left(\frac{x_0 - x}{x_0+1}\right)^n \left(\frac{1-\theta_n}{1-\theta_n \dfrac{x_0-x}{x_0+1}}\right)^{n-1} \frac{1}{1-\theta_n \dfrac{x_0-x}{x_0+1}},$$

si trova che, anche per x diverso da -1 e compreso fra -1 e x_0, si ha $\lim R_n = 0$, si conclude che per tutti i valori di x compresi fra -1 e $2x_0+1$, non escluso il valore $2x_0+1$, e neppure evidentemente il valore -1, si ha in serie di Taylor

$$(24) \qquad \log(1+x) = \log(1+x_0) + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n}{n(1+x_0)^n},$$

talchè, supponendo per es. $x_0 > 0$, si ha così uno sviluppo di $\log(1+x)$ in serie di Taylor che oltre a servire, come la serie di Maclaurin (23), pei valori di x compresi fra -1 e 1 (-1 e 1 inclusi), serve anche per quelli che cadono nell'intervallo esterno da 1 a $2x_0+1$, ($2x_0+1$ incluso).

86. — Si può ora notare che la formola (24) avremmo potuto anche dedurla dalla (23) cambiandovi x in $\dfrac{x-x_0}{1+x_0}$, ciò che avrebbe appunto portato che la nuova variabile x, per l'applicabilità della formola (24), dovesse sempre restare compresa fra -1 e $2x_0+1$; e in generale si può anche notare che tanto la formola di Taylor come quella di Maclaurin, con opportuni cambiamenti di variabili e opportune trasformazioni, conducono ad altre formole importantissime; ma noi non possiamo ora fermarci a ritrovare queste formole (*).

(*) Fra le formole che si deducono con tutta facilità da quella di Taylor merita di essere segnalata quella data da *Giovanni Bernoulli* nel 1694.

Per trovarla consideriamo nella solita formola di Taylor il punto x_0 come variabile chiamandolo x, e il punto x come fisso chiamandolo a, supposto naturalmente che in ogni punto fra a e x, salvo tutt'al più nel punto a dove però $f(x)$ deve essere ancora finita e continua, la funzione stessa $f(x)$ abbia le derivate $f'(x)$, $f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ determinate e finite, per ogni ordine n separatamente, pure potendo crescere indefinitamente con n.

Allora la formola di Taylor darà subito la seguente

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(x) - \frac{(x-a)^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \frac{(x-a)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} f'''(x) - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x) + \dots\dots$$

Infine facciamo notare che quando le condizioni per lo sviluppo di una funzione in serie di Taylor o in serie di Maclaurin non sono soddisfatte, si dice che queste serie sono in difetto; e si potrebbe vedere che in questi casi bene spesso avviene che $f(x_0+h)$ e $f(x)$, invece di essere sviluppabili in serie ordinate per le potenze intere e positive di h, o di $x - x_0$, o di x, sono sviluppabili in serie che contengono potenze fratte o negative di queste quantità h, $x - x_0$ o x, o contengono logaritmi di queste stesse quantità, ecc.

che supponendovi $a = 0$ si riduce all'altra

$$f(x) = f(0) + x f'(x) - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} f'''(x) - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x) + \dots\dots$$

che è appunto quella di Bernoulli; e per la validità di questa formola, oltre alla esistenza delle derivate di qualunque ordine fra a e x o fra 0 e x, si richiede anche che le quantità respettivanente corrispondenti al resto della serie di Taylor cioè $\pm \dfrac{(x-a)^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x - \theta_n (x-a))$, o $\pm \dfrac{x^n}{\pi(n)} f^{(n)}(x - \theta_n x)$, nelle quali le θ_n sono i soliti numeri compresi fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi), abbiano per limite zero al crescere indefinito di n.

Particolarizzando la funzione $f(x)$ la formola di Bernoulli conduce ad altre molto notevoli.

In particolare prendendo $f(x) = (x+b)^m$, con b ed m costanti reali qualsiansi, si ottiene una formola che serve a calcolare assai rapidamente, con bastante approssimazione, il valore di certi radicali (v. ad es. BERTRAND, *Calcul différentiel*, pag. 311).

Bernoulli pubblicò la sua formola negli *Acta Eruditorum Lipsiae* nel 1694 [pag. 438], mentre Taylor non pubblicò la sua che nel 1715 nel suo libro *De Methodo incrementorum* [pag. 38], e poichè da quella di Bernoulli si deduce subito quella di Taylor tanto da potersi riguardare le due formole come una sola, giustamente Giovanni Burcardi, uno degli allievi di lui, nelle *Opera omnia* di Giov. Bernoulli [Tom. II, pag. 489 e 519] ebbe a lamentare che Taylor non accennasse affatto a quella formola pubblicata dal Bernoulli più che vent'anni prima.

VII.

Limite delle espressioni che si presentano sotto forme indeterminate

87. — Bene spesso accade che, avendosi una frazione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ i cui termini sono continui pel valore particolare a di x a destra o a sinistra, essa per questo valore a di x prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Allora i suoi due termini divengono insieme infinitesimi per $x=a$ a destra o a sinistra, e s'intende quindi che non di rado il loro quoziente potrà avere un limite determinato e finito, o un limite infinito, quando questo limite si prenda a destra o a sinistra secondo i casi.

Un tal limite, quando esiste, si usa chiamarlo *il vero valore* per $x=a$ delle funzioni che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; però, siccome la continuità a destra o a sinistra delle due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ nel punto a non porta la continuità corrispondente nello stesso punto per la funzione quoziente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, la quale anzi, *se è definita soltanto da questo quoziente*, nel punto a deve esser considerata come priva affatto di significato, così s'intende subito che la indicata locuzione deve riguardarsi come scorretta, a meno che non si sappia in qualche modo che il presentarsi la detta funzione sotto quella forma dipende soltanto dalla forma analitica sotto cui è stata posta la quale vale soltanto pei valori di x *diversi da* a, e si sappia altresì che la funzione stessa è definita da formole o leggi tali che portino assolutamente la sua continuità a destra o a sinistra del punto a per modo che il suo valore nel punto a sia appunto il limite di quel quoziente.

Lo stesso deve dirsi per le funzioni che per $x=a$ si presentano sotto le altre forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, ∞^0, 1^∞, 0^0, $\infty - \infty$, per modo quindi che, in ciascuno di questi casi, a meno che circostanze speciali non ci consentano di usare la locuzione anzidetta, volendo usare una locuzione precisa, converrà sempre parlare di *limite dei valori* per $x=a$ a destra o a sinistra, anzichè parlare di *vero valore* per $x=a$ delle funzioni corrispondenti.

E osservazioni simili possono farsi pel caso che i limiti debbano esser presi per $x=+\infty$ o per $x=-\infty$.

88. — I limiti di cui qui è parola si potranno spesso determinare con processi ed artifizî speciali dipendenti dalla natura della funzione cui essi si riferiscono; e questi processi o artifizî, come sono sempre in generale quelli che si usano quando si ha da cercare il limite di una espressione analitica, si riducono sempre in sostanza a trasformare con successive operazioni legittime, e finchè la variabile è fuori del limite, la espressione data in altre espressioni che mettano in evidenza quale è la quantità che dovrà essere presa come il limite cercato.

Indipendentemente però da questi processi od artifizî speciali, in molti casi ci si può valere utilmente di un metodo che ora passeremo ad esporre, che in sostanza corrisponde anche questo a una o più trasformazioni determinate della espressione data; ma pel quale però, oltre a certe restrizioni di cui parleremo più sotto, si richiede sempre che per le funzioni che compariscono nelle espressioni di cui si ha da cercare il limite, si possano considerare le derivate, almeno fino a quelle di un certo ordine, nel punto a, o in tutti i punti di un intorno sufficientemente piccolo del punto stesso a, a destra o a sinistra (a al più escluso), o per valori grandissimi positivi o negativi di x, secondochè i limiti si devono prendere a destra o a sinistra dello stesso punto a, o per $x=+\infty$ o $x=-\infty$ respettivamente.

Incominciamo a considerare il caso delle funzioni $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ che per $x=a$ o per $x=+\infty$ si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; e, ammettendo dapprima che i limiti siano presi per es. a destra di un punto a posto a distanza finita, supponiamo in primo luogo che in a esistano le derivate di $f(x)$ o di $\varphi(x)$ senza curarsi di ciò che accadrà pei punti fuori di a.

Osservando che, per essere $f(a)=\varphi(a)=0$, l'espressione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a+h$, con h diverso da zero, può scriversi sotto la forma $\dfrac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}$, si vede subito che in questo caso il limite cercato, per $x=a+0$ o per $h=+0$, è precisamente il rapporto $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, tutte le volte che questo rapporto non torna a presentarsi sotto la forma $\frac{0}{0}$, o si presenta sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$; e così, quando si verifichino le varie condizioni che ora abbiamo posto, il problema è già risoluto.

Ammettiamo ora invece che in tutti i punti di un intorno $(a, a+\varepsilon)$ a destra del punto a le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ siano sempre finite e continue, e la funzione denominatore $\varphi(x)$ non sia zero altro che nel punto a; e supponiamo inoltre che nei punti dello stesso intorno (a al più escluso) la funzione $f(x)$ abbia almeno la prima derivata determinata (finita cioè, o infinita e determinata di segno), e negli stessi punti fuori di a la funzione $\varphi(x)$, oltre ad avere la sua derivata $\varphi'(x)$ determinata, l'abbia anche finita e differente da zero, ciò che corrisponde ad essere finita, e non passare infinite volte per zero nelle vicinanze di a a destra.

Allora per una formola nota (§ 61 [pag. 79 e seg.]) quando $0<h\leq\varepsilon$ si avrà sempre

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{f'(a+h_1)}{\varphi'(a+h_1)} \tag{1}$$

con h_1 compreso fra 0 e h (0 e h esclusi); talchè facendo convergere h a 0 si vede di qui intanto che quando fra a e $a+\varepsilon$ (a al più escluso) $f'(x)$ è sempre determinata, e $\varphi'(x)$, oltre essere determinata, è anche finita e differente da zero, se avverrà che il rapporto delle derivate $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ abbia un limite determinato e finito per $x=a$ a destra, o abbia un limite infinito, allora anche il rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ avrà un limite determinato (finito o infinito) che sarà appunto quello che si troverà per $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; talchè anche in questo caso il problema che ci siamo proposti resterà subito risoluto.

Se però il rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ non avrà un limite determinato (finito o infinito) per $x=a$ a destra, allora potrà esser benissimo che, ciò nonostante, la funzione primitiva $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ abbia ancora un limite determinato (finito o infinito), perchè la quantità h_1 che comparisce nella formola (1) coll'impiccolire di h può non prendere tutti i valori compresi fra 0 e ε, ma prenderne soltanto alcuni; e quando quest'ultima circostanza si presenti, anche il rapporto $\frac{f'(a+h_1)}{\varphi'(a+h_1)}$ potrà non prendere tutti i valori di $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, e potrà darsi che prenda sempre soltanto valori prossimi quanto si vuole a una certa quantità finita, o valori numericamente maggiori di qualunque numero dato per modo da avere un limite determinato e finito, o avere per limite l'infinito; talchè in questo caso col semplice esame del rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ non si potrà evidentemente concludere nulla intorno all'esistenza o al valore del limite di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, e converrà seguire altri processi speciali che conducano al calcolo di questo limite, se pure esiste.

89. — Malgrado questa eccezione però, è chiaro che quanto abbiamo dimostrato basta intanto per poter dire che quando sia data una funzione $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per la quale $f(x)$ e $\varphi(x)$, insieme alle loro prime derivate, soddisfino alle condizioni poste sopra, se si vorrà determinare il limite per $x=a$ (per es. a destra) del rapporto stesso $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (quando questo limite esiste) si prenderà senz'altro per questo limite il rapporto delle derivate $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ nel punto a quando queste derivate esistono, se questo rapporto avrà un significato; e quando queste derivate non esistano o almeno si sia incerti sulla loro esistenza, o esistendo si trovi che il loro rapporto si presenta ancora sotto la forma $\frac{0}{0}$ o sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$, allora se le derivate esisteranno fuori di a converrà prendere ad esaminare il rapporto delle derivate $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ fuori del punto a, e cercare, con un processo o con un altro, se esso abbia o no un limite determinato, facendo anche, ove occorra, su questo nuovo rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ quelle trasformazioni analitiche che più si crederanno del caso.

E se si troverà in particolare che le derivate di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ hanno limiti determinati (finiti, o infiniti) per $x=a+0$, ciò che (§ 44 [pag. 55]) corrisponderà ancora al caso in cui queste derivate esistono anche nel punto a a destra, e i loro valori $f'(a)$ e $\varphi'(a)$ sono appunto questi limiti, allora il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, e quindi anche quello del rapporto primitivo $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, si troverà ancora senz'altro, come nel primo caso, uguale al rapporto $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ delle derivate nel punto a tutte le volte che questo rapporto abbia un significato; ma se quest'ultima circostanza non si presenterà, e se, senza poter dire che il nuovo rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ manca di limite, come anche senza riuscire a trovare trasformazioni adattate che ci permettano di calcolare questo limite quando esso esiste, si troverà invece che si ricade nel caso precedente, in quanto che le derivate di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ prese nel punto a a destra vengono ad esistere e sono finite e continue, ma sono ambedue uguali a zero, per modo quindi che per $x=a$ il rapporto medesimo $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ prenda esso pure la forma $\frac{0}{0}$, allora potremo vedere di applicare a questo nuovo rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ il processo stesso che abbiamo indicato per il rapporto primitivo $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, passando cioè al rapporto $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ delle derivate seconde; e ciò nell'ipotesi che le derivate seconde di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ esistano nel punto a e il loro rapporto non si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$ o sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$; o altrimenti nella ipotesi che le derivate prime di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ siano finite e continue nei punti di un certo intorno di a a destra, e negli stessi punti (a al più escluso) le derivate seconde di $f(x)$ siano determinate, e quelle di $\varphi(x)$ oltre essere determinate siano anche finite e diverse da zero § 61 [pag. 79 e seg.].

Rispetto a $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ potremo poi ripetere gli stessi ragionamenti; e così in generale noi possiamo ora dire evidentemente che se esisterà un intorno a destra di a nei punti del quale (a incluso) almeno fino a un certo ordine le derivate di $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono sempre finite e continue, e si troverà che fra queste derivate la prima che non si annulla nel punto a è la p^a derivata di $f(x)$ o la q^a di $\varphi(x)$, senza che le varie derivate di $\varphi(x)$ che si avranno da considerare siano mai zero nei punti differenti da a dell'intorno che si considera, allora per calcolare il limite cercato di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ basterà valersi rispettivamente dell'una o dell'altra delle due formole $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(p)}(a)}{\varphi^{(p)}(a)}$, o $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(q)}(a)}{\varphi^{(q)}(a)}$; e propriamente in questo caso per le *ultime derivate d'ordine* p *o d'ordine* q che si considereranno basterà essere certi della loro esistenza nel punto a senza curarci di ciò che avviene nei punti vicini ad a.

E si può aggiungere inoltre che potranno farsi, ove occorra, convenienti trasformazioni sui rapporti $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \ldots$ che si avranno successivamente da considerare, e anche, quando ne sia il caso, si potrà tornare ad applicare i processi precedenti dopo fatte queste trasformazioni; e se si riuscirà a trovare il limite di uno dei nuovi rapporti o delle nuove quantità alle quali si perverrà, quando questo limite esista, allora il valore limite che così si troverà si potrà sempre prendere come il limite cercato del primitivo rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; e ciò quand'anche nel punto a le derivate di $f(x)$ e $\varphi(x)$ o delle altre funzioni che si saranno dovute considerare cessino d'esistere, o siano infinite, o discontinue, ecc., purchè però nei punti fuori di a di un certo intorno a destra di a le varie derivate di $\varphi(x)$ o delle altre funzioni dei denominatori che si avranno da considerare siano sempre determinate, finite, continue e diverse da zero, ad eccezione tutt'al più delle ultime per le quali basterà che siano semplicemente determinate e diverse da zero.

La regola che viene di qui pel calcolo del limite delle quantità che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, riducendolo a quello del rapporto delle derivate prime, è detta la *regola di L'Hospital.* Pare però che prima fosse conosciuta da *Giovanni Bernoulli,* il quale in ogni modo la dette anche pei casi nei quali è necessario di ricorrere anche alle derivate di ordine superiore (*Opera omnia,* tom. I, pag. 401 e seg.).

90. — Aggiungiamo che al processo indicato non farà eccezione il caso in cui qualcuno dei rapporti che si avranno successivamente da considerare per $x=a$ si presenti sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, poichè, come fra poco vedremo, anche questo caso, quando il limite del rapporto stesso esiste, si tratta precisamente come il caso ora considerato dei rapporti che si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; e così noi possiamo ora affermare che quando un rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a$ prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ senza che il suo denominatore passi infinite volte per zero quando x converge ad a, colla considerazione dei rapporti successivi $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \ldots$, e, occorrendo, con opportune trasformazioni fatte su essi come dicemmo sopra, si potrà in un immenso numero di casi determinare il limite per $x=a$ a destra o a sinistra del rapporto primitivo $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; e al processo che abbiamo indicato farà solo ec-

cezione il caso in cui i successivi rapporti che si avranno da considerare per $x=a$ continuino sempre a presentarsi sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$, senza che si possano mai fare su essi delle trasformazioni adattate che permettano di calcolare il loro limite, come pure farà eccezione il caso in cui qualcuno di questi rapporti manchi assolutamente di limite, o le derivate che in esso compariscano non soddisfino più alle condizioni che loro abbiamo imposte sopra.

91. — Nelle ricerche precedenti pel calcolo del limite delle espressioni $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ che per $x=a$ prendono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ abbiamo supposto che a sia un numero finito.

Talvolta però un rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ considerato al crescere indefinito di x, per valori per es. positivi, si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ per $x=\infty$, e allora è facile pure di vedere che il metodo da seguirsi per calcolare il suo limite, quando questo limite esiste, sarà ancora quello che abbiamo dato sopra pel caso di a finito.

Se noi poniamo infatti $x=\frac{1}{z}$, e prendiamo z come nuova variabile, le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ si ridurranno alle altre $f\left(\frac{1}{z}\right)$ e $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$; e allora, invece di doverle considerare per valori grandissimi della variabile, le dovremo considerare pei valori di z in intorni a destra del punto $z=0$, e il limite di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=\infty$ equivarrà a quello di $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ per $z=0$ a destra.

Ora ammettendo che le derivate del primo ordine delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ pei valori di x al di là di un certo limite siano sempre determinate e finite, e quelle di $\varphi(x)$ siano anche differenti da zero, è certo che altrettanto accadrà § 34 [pag. 36] per le derivate rispetto a z, $-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right)$, $-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)$, delle funzioni $f\left(\frac{1}{z}\right)$ e $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ nei punti diversi da 0 in ogni intorno sufficientemente piccolo a destra del punto $z=0$; dunque per ciò che precede si può dire immediatamente che quando il rapporto $\dfrac{-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}$ o $\dfrac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}$, abbia un limite determinato (finito o infinito) per $z=0$ a destra, questo limite sarà appunto il limite cercato di $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ per $z=0$ a destra.

Rimarrà invece incertezza intorno all'esistenza e al valore di quest'ultimo limite se il rapporto suindicato $\dfrac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}$ non avrà un limite determinato; e quindi osservando ora che cercare il limite di questo rapporto per $z=0$ a destra equivale a cercare quello di $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ per $x=\infty$, si conclude evidentemente che se $f'(x)$ e $\varphi'(x)$ soddisfaranno alle condizioni poste sopra, e se $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ avrà un limite determinato per $x=\infty$, esso sarà appunto il limite cercato di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, e rimarrà la solita incertezza nel caso che il limite di $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ per $x=+\infty$ non esista; per modo che si può ora evidentemente asserire che il metodo dato sopra pel caso in cui si deve cercare il limite di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per un valore finito a di x a destra o a sinistra si applica anche al caso in cui si deve cercare il limite del rapporto stesso per $x=\infty$.

E si può aggiungere che, chiamando derivata di $f(x)$ per $x=\infty$ il limite per $x=\infty$ della derivata $f'(x)$ di $f(x)$, quando questo limite esiste, si potrà dire altresì che se il rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=\infty$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ e le derivate di $f(x)$ e $\varphi(x)$ soddisfano alle condizioni poste sopra, il limite per $x=\infty$ dello stesso rapporto sarà uguale alla quantità $\frac{f'(\infty)}{\varphi'(\infty)}$ tutte le volte che esso abbia un significato, ecc.

92. — Trattato così completamente il caso delle funzioni che per un dato valore a di x o per $x=\infty$ si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, passiamo ad occuparci di quelle che si presentano sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Sia perciò $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ una di queste funzioni che per $x=a$ o per $x=\pm\infty$ si presentano sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Osservando che questa funzione può anche considerarsi come il quoziente $\dfrac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$ delle due funzioni $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ e $\dfrac{1}{f(x)}$ che per $x=a$ o per $x=\pm\infty$ si riducono ambedue a zero, si vedrà subito che, volendolo, il caso delle funzioni che per un valore particolare, finito o infinito, di x si presentano sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$ si può sempre ridurre a quello delle funzioni che per lo stesso valore di x si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$; e dopo di ciò potrebbe essere applicato il metodo che abbiamo dato sopra per quest'ultimo caso, e colle restrizioni che in esso abbiamo poste.

93. — Del resto poi se si suppone che le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, pure avendo per limite l'infinito per $x=a$ a destra o a sinistra o per $x=\pm\infty$, nei punti diversi da a di un intorno del punto a dalla parte corrispondente, o per valori grandissimi di x, si mantengano sempre finite e continue, e negli stessi punti le loro derivate prime siano sempre determinate e quelle di $\varphi(x)$ siano anche finite e diverse da zero; o, in altri termini, se, fuori del punto a, o per valori grandissimi di x, per le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ e per le loro derivate si pongono le stesse condizioni che ponevamo sopra nel caso dei quozienti $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ che per $x=a$ o per $x=\pm\infty$ prendevano la forma $\frac{0}{0}$, allora è facile vedere che quando il quoziente $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a$ o per $x=\pm\infty$ si presenta sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$, il suo limite si calcola ancora valendosi del quoziente $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ delle derivate di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ quando questo quoziente ha un limite determinato (finito o infinito), precisamente come si farebbe se il rapporto $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a$ o per $x=\pm\infty$ si presentasse sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Consideriamo infatti dapprima il caso in cui $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$ per $x=a$; e, per fissare le idee, supponiamo che si voglia trovare il limite di $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a$ a destra.

Presi allora due numeri differenti da zero e positivi ε e δ, dei quali il secondo sia minore del primo, e supposto che essi siano tanto piccoli che i due punti $a+\delta$ e $a+\varepsilon$ vengano a cadere in un intorno a destra di a nel quale sono soddisfatte le condizioni poste sopra, per quanto dicemmo al § 42, 4° [pag. 52] si avrà la formola $\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a+\delta)}{\varphi(a+\varepsilon)-\varphi(a+\delta)}=\dfrac{f'(a+\delta_1)}{\varphi'(a+\delta_1)}$, o anche

$$\frac{f(a+\delta)}{\varphi(a+\delta)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(a+\varepsilon)}{f(a+\delta)}}{1-\dfrac{\varphi(a+\varepsilon)}{\varphi(a+\delta)}}=\frac{f'(a+\delta_1)}{\varphi'(a+\delta_1)},$$

dove δ_1 è un numero compreso fra δ ed ε (δ ed ε esclusi).

Ora, se il rapporto $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ per $x=a+0$ avrà un limite determinato e finito A, o un limite infinito, per es. $+\infty$, è chiaro che allora prendendo ε e quindi δ e δ_1 ognor più piccoli, il secondo membro di questa formola finirà per divenire e restare poi prossimo quanto si vuole ad A, o per divenire e restare poi sempre positivo e maggiore di quel numero che più ci piace, per modo cioè che il suo limite per $\varepsilon=0$ sia rispettivamente A o $+\infty$, e allora anche il primo membro della stessa formola avrà un limite che sarà pure A, o $+\infty$.

D'altra parte, siccome $f(x)$ e $\varphi(x)$ fuori del punto a sono sempre finite, mentre per $x=a+0$ hanno per limite l'infinito, qualunque sia il grado di piccolezza che si prenderà per ε, si potrà prendere poi il δ talmente piccolo che i due rapporti $\dfrac{f(a+\varepsilon)}{f(a+\delta)}$, e $\dfrac{\varphi(a+\varepsilon)}{\varphi(a+\delta)}$ siano sempre di quel grado di piccolezza che più ci piace, per modo che il limite del primo membro all'impiccolire sempre più di ε, e corrispondentemente di δ, sia appunto quello di $\dfrac{f(a+\delta)}{\varphi(a+\delta)}$ per $\delta=+0$, o di $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a+0$, che certo verrà esso pure ad esistere; quindi si può ora evidentemente concludere che se $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ha un limite determinato per $x=a+0$, altrettanto accadrà pel rapporto dato $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, e i limiti di questi rapporti $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ e $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ saranno uguali fra loro; per modo che, sotto queste ipotesi, resterà incertezza intorno alla esistenza o al valore del limite di $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ soltanto nel caso in cui $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ non abbia un limite determinato, il tutto precisamente come trovammo sopra pel caso in cui $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ per $x=a$ prendeva la forma $\frac{0}{0}$.

Lo stesso accade quando i limiti di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ si debbono trovare per $x = \pm \infty$; e per vedere questo basta ora ripetere i ragionamenti fatti nel § 91 [pag. 126 e seg.] o anche seguire un procedimento simile a quello che ora abbiamo tenuto (e che avremmo pure potuto seguire al § 91 stesso); talchè può dirsi che resta ora dimostrato completamente quanto enunciammo sopra.

Aggiungiamo che, come nel caso delle indeterminazioni della forma $\frac{0}{0}$, così anche nel caso attuale, quando per $f(x)$ e $\varphi(x)$ esistano alcune delle derivate degli ordini superiori, e per esse siano soddisfatte quelle condizioni stesse che allora si dettero, potremo sempre, per calcolare il limite di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, passare dal rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ agli altri rapporti $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, $\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)}$, . .

94. — Non si deve però tralasciare di osservare che nel caso attuale quando il limite di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ si cerca per $x = a$, *con a finito,* il ridurre il calcolo di questo limite a quello dei rapporti $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$,... non arrecherà nessun vantaggio se non si potranno fare trasformazioni convenienti su questi rapporti, o se non si conosceranno alcune loro proprietà speciali; inquantochè, come già sappiamo (§ 46 [pag. 59 e seg.]), le derivate per $x = a$ di $f(x)$ e $\varphi(x)$ saranno infinite come le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ o saranno indeterminate, e quindi il rapporto $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ per $x = a$ si presenterà ancora sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, o mancherà assolutamente di significato in uno almeno dei suoi termini, talchè, senza fare su esso trasformazioni adattate, o senza conoscere qualche sua proprietà speciale, avremo ancora le stesse difficoltà che si avevano dapprima, ecc...

Però il passare dal rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ai rapporti successivi $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ ... potrà ancora in molti casi essere utile, perchè i nuovi rapporti potranno talvolta mettere in evidenza la possibilità di certe trasformazioni che dal primitivo rapporto non apparivano, e mediante le quali il limite possa essere facilmente determinato.

95. — I casi delle funzioni che per $x = a$ o per $x = \pm \infty$ si presentano sotto una delle altre forme indeterminate $0 \times \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0, $\infty - \infty$, si riducono subito a quelli ora considerati.

Quando si abbia infatti un prodotto $u = f(x)\,\varphi(x)$ che per $x = a$ o per $x = \pm \infty$ prende la forma $0 \times \infty$, si scriverà questo prodotto sotto la forma

$u = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, o sotto l'altra $u = \dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, e così per lo stesso valore di x si presenterà sotto le forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, e allora per trovare il suo limite, quando esiste, si potranno applicare i processi dei paragrafi precedenti, non dimenticando però le restrizioni alle quali essi sono soggetti.

Quando poi si abbia una funzione $u = [f(x)]^{\varphi(x)}$, che per $x = a$ o per $x = \pm \infty$ si presenti sotto una delle altre forme indeterminate ∞^0, 1^∞, 0^0, per trovarne il limite, quando esiste, si osserverà prima che basterà cercare il limite del suo logaritmo, e ripassare poi dai logaritmi ai numeri; quindi, poichè si ha $\log u = \varphi(x) \log f(x)$, la ricerca da farsi si ridurrà sempre a quella del limite di una espressione che per $x = a$ o per $x = \pm \infty$ si presenta sotto la forma $0 \times \infty$, e che, come abbiamo già detto, si riduce alla sua volta al calcolo del limite di una espressione che si presenta sotto le forme precedenti $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

E quando infine si abbia una funzione $u = f(x) - \varphi(x)$ che per $x = a$ o per $x = \pm \infty$ prende la forma $\infty - \infty$, allora si cercherà il limite della espressione $e^{f(x)-\varphi(x)} = \frac{e^{-\varphi(x)}}{e^{-f(x)}}$ o dell'altra $e^{f(x)-\varphi(x)} = \frac{e^{f(x)}}{e^{\varphi(x)}}$, che per gli stessi valori di x si presenteranno sotto la forma $\frac{0}{0}$ o sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$; e se questo limite esisterà, potremo ancora applicare i processi precedenti per trovarne il suo valore v, dopo di che si avrà immediatamente anche il limite cercato di u, il quale non sarà altro che $\log v$.

E così in ogni caso la ricerca del limite delle espressioni che per un valore particolare di x si presentano sotto una delle varie forme indeterminate che qui abbiamo considerate, coll'applicazione dei processi generali da noi indicati si ridurrà al calcolo del limite di una espressione che per lo stesso valore di x si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ o sotto l'altra $\frac{\infty}{\infty}$, e per la quale potranno quindi applicarsi le considerazioni che noi abbiamo svolto nei paragrafi precedenti.

S'intende poi che nei casi particolari potremo talvolta valerci di altri processi speciali più adattati per riportare al caso delle espressioni che si presentano sotto le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ il calcolo del limite di espressioni che si presentano sotto altre forme indeterminate, ecc.

96. — Diamo ora alcuni esempi di limiti di espressioni che si presentano

sotto forme indeterminate, calcolandoli coi metodi che risultano dai paragrafi precedenti.

1.° Volendo il limite delle espressioni $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$, che per $x=0$ si presentano tutte sotto la forma $\frac{0}{0}$, si osserverà che i quozienti corrispondenti delle derivate prime sono respettivamente $\frac{\cos x}{1}$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{2x}$, $\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$, e quindi si troverà subito intanto che le prime due hanno per limite l'unità, come già sapevamo, mentre per la terza, quando non si voglia far uso della proprietà già trovata che $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, si passerà al quoziente $\frac{\cos x}{2}$ delle derivate seconde e si troverà che il suo limite è $\frac{1}{2}$; e per la quarta poi, siccome anche il quoziente delle derivate seconde $\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$ per $x=0$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, si dovrà passare al quoziente delle derivate terze. E poichè questo quoziente è $\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$ e il suo limite è 2, sarà trovato così anche il limite della quarta delle espressioni date, e questo limite sarà 2.

Similmente prendendo l'espressione $\frac{x^2 - x}{x - 1 - \log x}$ che per $x=1$ prende la forma $\frac{0}{0}$, si osserverà che il quoziente delle derivate prime corrispondenti è $\frac{2x-1}{1-\frac{1}{x}}$, e per $x = 1+0$ ha per limite $+\infty$, e per $x = 1-0$ ha per limite $-\infty$, e si concluderà quindi che il limite di $\frac{x^2-x}{x-1-\log x}$ per $x=1$ a destra è $+\infty$, e a sinistra è $-\infty$.

E prendendo l'espressione $\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$, con a diverso da zero e positivo, che fu considerata appunto da Giovanni Bernoulli *(Opera omnia* tom. I, pag. 401 e seg.), e che per $x=a$ si riduce a $\frac{0}{0}$, si osserverà che il quoziente delle derivate è

$$\frac{\frac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}} - \frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}},$$

e quindi il limite della espressione stessa per $x=a$ sarà $\frac{16}{9}a$.

Avendo l'espressione $\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}$ che, quando per $\operatorname{arc\,tg} x$ si intendano presi archi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, per $x=+\infty$ prende la solita forma $\frac{0}{0}$, si osserverà che il quoziente delle derivate prime con una opportuna trasformazione si riduce alla forma $\frac{1+x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, e anche all'altra $\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$ che ha per limite l'unità, e si concluderà quindi che il limite della espressione data per $x=+\infty$ è l'unità.

2.° Prendendo l'espressione $\frac{\cot x}{\log x}$ che per $x=+0$ si riduce alla forma $\frac{\infty}{\infty}$, si osserverà che il quoziente corrispondente delle derivate si può scrivere $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, e per $x=+0$ ha per limite l'infinito negativo, e perciò anche $\frac{\cot x}{\log x}$ per $x=+0$ ha per limite $-\infty$.

Similmente prendendo l'espressione $\frac{\log x}{x^n}$ che, qualunque sia n purchè positivo, per $x=+\infty$ si riduce a $\frac{\infty}{\infty}$ si osserverà che il quoziente delle derivate si può porre sotto la forma $\frac{1}{nx^n}$, e per $x=+\infty$ ha per limite zero; e si concluderà quindi che $\lim_{x=+\infty}\frac{\log x}{x^n} = 0$, qualunque sia il numero positivo n.

Avendo poi l'espressione $\frac{a^x}{x^n}$ che per $a>1$, e n positivo e qualunque, si riduce a $\frac{\infty}{\infty}$ per $x=+\infty$, si osserverà che i quozienti delle successive derivate sono i seguenti $\frac{a^x\log_e a}{nx^{n-1}}$, $\frac{a^x(\log_e a)^2}{n(n-1)x^{n-2}}$, $\frac{a^x(\log_e a)^3}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$, ..., e se n è intero si giungerà ad uno di questi quozienti della forma $\frac{a^x(\log_e a)^n}{\pi(n)}$ che per $x=+\infty$ avrà per limite l'infinito; e se n non è intero si giungerà ad uno di questi quozienti, in cui l'esponente di x al denominatore sarà compreso fra 0 e 1, e allora nel quoziente seguente questo esponente sarà negativo e perciò il limite del quoziente stesso sarà ancora l'infinito; talchè qualunque sia il numero positivo n, si avrà sempre $\lim\frac{a^x}{x^n} = \infty$ per $x=+\infty$.

3.° Avendo l'espressione $x \cot x$ che per $x = 0$ prende la forma $0 \times \infty$, si scriverà sotto la forma $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$ che per $x = \pm 0$ diviene $\frac{0}{0}$, e si concluderà subito che il suo limite per $x = \pm 0$ è l'unità.

Similmente avendo l'espressione $x^n \log x$ che per n qualunque, ma positivo e per $x = 0$ si riduce a $0 \times \infty$, si osserverà che ponendola sotto la forma $\frac{\log x}{x^{-n}}$ per $x = 0$ diviene $\frac{-\infty}{\infty}$ e quindi il suo limite per $x = +0$ è uguale a quello del quoziente $\frac{1}{-n x^{-n}}$ delle derivate di $\log x$ e di x^{-n}, e perciò è uguale a zero qualunque sia n.

E avendo l'espressione $a^{-x} x^n$ che, con $a > 1$, e n positivo e qualunque, per $x = +\infty$ diviene $0 \times \infty$, si osserverà che essa può scriversi sotto la forma $\frac{x^n}{a^x}$ che per $x = +\infty$ diviene $\frac{\infty}{\infty}$, e che, per quanto si trovò sopra ha per limite zero; e si concluderà quindi che $\lim_{x=+\infty} a^{-x} x^n = 0$.

E quando si abbia una espressione della forma $\frac{a^{-\frac{1}{(x-x_0)^n}}}{(x-x_0)^m}$, ove $a > 1$ e m ed n sono positivi, osservando che col porre $(x - x_0)^n = \frac{1}{y}$, o $x - x_0 = \frac{1}{y^{\frac{1}{n}}}$, si riduce alla forma $a^{-y} y^{\frac{m}{n}}$ si concluderà subito che per $y = +\infty$ o $x = x_0 + 0$ essa ha per limite zero, e perciò si ha, qualunque siano i numeri positivi m ed n, $\lim_{x=x_0+0} \frac{a^{-\frac{1}{(x-x_0)^n}}}{(x-x_0)^m} = 0$; e se n è un numero intero pari si troverà che si ha anche $\lim_{x=x_0-0} \frac{a^{-\frac{1}{(x-x_0)^n}}}{(x-x_0)^m} = 0$, talchè resta ora provato quanto osservammo al § 69 [pag. 92 e seg.] intorno al valore delle derivate dei varî ordini di $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ nel punto x_0.

4.° Avendo da cercare il limite per $x = +0$ delle tre espressioni x^x, $(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$, $(\cot x)^{\operatorname{sen} x}$ che per $x = 0$ si riducono rispettivamente a 0^0, 1^∞, ∞^0, si osserverà che i loro logaritmi neperiani sono $x \log x$, $\frac{\log(1 + \operatorname{sen} x)}{x}$, $\operatorname{sen} x \log(\cot x)$, e per $x = 0$ prendono le forme respettive $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, e dietro quanto si è detto hanno per limiti respettivamente 0, 1, 0; per modo che si può concludere che le funzioni x^x, e $(\cot x)^{\operatorname{sen} x}$ per $x = +0$ hanno per limite 1, e la funzione $(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ ha per limite la base e dei logaritmi neperiani.

5.° Infine avendo da cercare il limite per $x = +0$ della espressione $-\log(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{x}$ che per $x = 0$ prende la forma indeterminata $\infty - \infty$, si porrà $u = -\log(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{x}$ e si osserverà che allora $e^u = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{sen} x}$, e coi processi precedenti, o anche scrivendo $e^u = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, si troverà subito che $\lim_{x=+0} e^u = 0$, e perciò $\lim_{x=+0} u = -\infty$.

Avendo poi l'espressione $\frac{1}{x} - \cot x$ che per $x = 0$ si riduce pure a $\infty - \infty$, invece di valerci dei processi precedenti, torna più comodo porla sotto la forma $\frac{1 - x\cot x}{x}$, ovvero sotto l'altra $\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x}$ che per $x = 0$ si riduce a $\frac{0}{0}$; e allora coi soliti processi, andando fino alle derivate seconde, si trova che il limite della espressione stessa $\frac{1}{x} - \cot x$ per $x = \pm 0$ è uguale a zero.

97. — Troviamo utile ora di osservare che il calcolo del limite delle espressioni che per un valore particolare di x si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ deve farsi bene spesso per riconoscere l'ordine d'infinitesimo o d'infinito di una funzione quando è fissato l'infinitesimo o l'infinito principale.

I metodi precedenti servono dunque a risolvere questi problemi relativi agli ordini d'infinitesimo o d'infinito, e tutti gli esempi che abbiamo dato relativi a espressioni delle forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ possono riguardarsi come relativi ad altrettanti di questi problemi.

Così in particolare avendo trovato che si ha

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg} x} = 1, \qquad \lim_{x=+0} \frac{\cot x}{\log x} = -\infty,$$

si può dire che per $x = +\infty$ la funzione $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ diviene infinitesima come $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg} x$, e per $x = +0$ la funzione $\cot x$ diviene infinita di ordine superiore a quello di $\log x$; e prendendo x o $\frac{1}{x}$ come infiniti o infinitesimi principali o viceversa, per x crescente indefinitamente o per x tendente a zero, e osservando che abbiamo trovato che $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty$, $\lim\limits_{x=0} x \cot x = 1$, $\lim\limits_{x=+0} x^n \log x = 0$, $\lim\limits_{x=+\infty} a^{-x} x^n = 0$, si può affermare che per $x = \pm 0$ la funzione $\cot x$ diviene infinita di primo ordine, e la funzione $\log x$ per $x = +0$ diviene infinita sì ma di un ordine inferiore a quello della inversa di qualunque potenza positiva di x per modo che, per quanto divenga anch'essa infinita, si mantiene sempre immensamente inferiore all'inversa di qualunque potenza positiva di x; e similmente per $x = +\infty$ il $\log x$ diviene infinito, ma di ordine inferiore a quello di qualsiasi potenza positiva comunque piccola di x; e così $\frac{1}{\log x}$ per $x = +0$ o per $x = +\infty$ diviene infinitesimo di ordine inferiore a quello di qualsiasi potenza positiva di x o di $\frac{1}{x}$ per modo da doversi dire che è un infinitesimo non confrontabile con queste potenze; e noi a questo genere d'infinitesimi accennammo già in fine del § 6 [pag. 8].

Similmente dalle formole precedenti si vede che la funzione esponenziale a^x, quando $a > 1$, per $x = +\infty$ diviene infinita di ordine superiore a quello di qualsiasi potenza positiva comunque grande della x, e per $x = -\infty$ diviene invece infinitesima di ordine superiore a quello di qualsiasi potenza negativa e comunque grande della x.

Al modo stesso si trova che $\log(\log x)$ o $\log^2 x$ col crescere indefinito di x per valori positivi, per quanto divenga infinita, non può riguardarsi che come infinita di un ordine inferiore a quello di qualsiasi potenza positiva di x o di $\log x, \ldots$; per modo da dover dire che gli ordini d'infinito di $\log x$ per $x = +0$ o $x = +\infty$ non possono venir determinati quando si confrontino con quelli delle potenze di $\frac{1}{x}$ o di x; quelli di $\log^2 x$ per $x = \infty$ non possono determinarsi confrontandoli con quelli delle potenze di x, o di $\log x$, ecc.

VIII.

Differenziali delle funzioni di una variabile. Differenze, e rapporti incrementali di ordine superiore

98. — A differenza dell'algebra che studia le quantità in uno stato di grandezza fissa e determinata, e si occupa delle relazioni che devono sussistere per valori determinati delle variabili fra quantità che soddisfano a date condizioni, il calcolo differenziale invece studia l'andamento delle funzioni e le variazioni che esse ricevono quando la variabile, o le variabili che sono considerate come indipendenti passano per tutti i differenti stati di grandezza entro dati limiti e specialmente in vicinanza di valori determinati.

Ora, restando ancora nel caso delle funzioni finite e continue $f(x)$ di una variabile reale, osserviamo che se questa funzione $f(x)$ in un punto x ha una derivata (ordinaria) determinata e finita $f'(x)$, si ha $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, dove il limite dev'esser preso per $h = \pm 0$, o soltanto per $h = +0$ o per $h = -0$, secondochè il punto x è interno all'intervallo che si considera o è soltanto in un estremo di questo intervallo; quindi fuori del limite sarà $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$, ovvero $f(x+h) - f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$, dove ε è una quantità che è zero o diviene infinitesima con h; talchè se s'indica con $\Delta f(x)$ l'accrescimento (positivo o negativo) $f(x+h) - f(x)$ che riceve la funzione $f(x)$ quando x passa da x a $x+h$, si avrà $\Delta f(x) = h f'(x) + h\varepsilon$, cioè quest'accrescimento si comporrà di due parti; l'una $hf'(x)$ che, quando $f'(x)$ non sia zero, e h si consideri come infinitesimo del prim'ordine, diverrà infinitesima di prim'ordine con h, e l'altra $h\varepsilon$ che, se non sarà assolutamente zero, diverrà invece infinitesima di ordine superiore rispetto ad h.

Ora, siccome nel calcolo differenziale si considerano le variazioni che subiscono le funzioni quando le variabili passano pei differenti loro stati di grandezza e specialmente quand'esse variano per gradi insensibili, e in confronto agli accrescimenti che ricevono le variabili, s'intende subito come debbano studiarsi in modo speciale gli accrescimenti $\Delta f(x)$ mentre h tende a zero; e poichè quando questi accrescimenti devono considerarsi in quozienti o in somme infinite, delle quali si abbia poi da cercare il limite, la prima $hf'(x)$ delle due parti che li compongono (salvo a tenere presenti le condizioni poste negli enunciati teoremi dei §§ 7, 8 e 9 [pag. 8 e segg.]) può sostituirsi agli accrescimenti stessi $\Delta f(x)$ di $f(x)$, si capisce subito anche come la stessa parte $hf'(x)$ debba avere una straordinaria importanza nel calcolo, e debba essa ordinariamente venire considerata in modo speciale invece degli accrescimenti completi $\Delta f(x)$.

Essa perciò, riguardata, quale è appunto, come una parte della differenza $f(x+h)-f(x)$, viene detta il *differenziale* di $f(x)$; e indicandola col simbolo $df(x)$ viene considerata anche nel caso in cui $f'(x)=0$, nel qual caso essa è zero in modo assoluto.

99. — Il differenziale dunque di una funzione $f(x)$ in un punto x dove la sua derivata prima (ordinaria) $f'(x)$ è determinata, finita, e diversa da zero, non è altro che una quantità infinitesima uguale al prodotto $hf'(x)$ della derivata della funzione moltiplicata per l'accrescimento infinitesimo h che si dà alla variabile; ed è perciò che, nel caso sempre della esistenza di una derivata determinata, il differenziale stesso viene ad essere uguale alla parte che, quando $f'(x)$ non è zero, si presenta come infinitesimo di prim'ordine nell'accrescimento della funzione quando l'accrescimento della variabile vien preso come infinitesimo principale, per modo che esso può riguardarsi come uguale all'accrescimento della funzione all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo, e ordinariamente può anche all'accrescimento stesso venire effettivamente sostituito in quozienti o somme di cui si abbia da cercare il limite.

100. — Aggiungiamo che, quando con un processo qualunque sia stato determinato l'accrescimento (completo) $\Delta f(x)$ di una funzione per un dato punto x, e questo sia risultato decomposto in una parte di prim'ordine rispetto all'accrescimento h della variabile e in una parte di ordine superiore, e per modo anche che, per h positivo e negativo se x è interno all'intervallo che si considera, e per h soltanto positivo o soltanto negativo se x è un estremo dello stesso intervallo, si abbia $\Delta f(x) = \mathrm{P}\,h + \omega$, dove P è una quantità fissa indipendente da h, ed ω è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto ad h, o è assolutamente zero, allora si avrà $\mathrm{P} = \lim \frac{\Delta f(x)}{h}$, cioè P sarà la derivata ordinaria nel punto x, e $\mathrm{P}h$ sarà

la quantità che abbiamo chiamata differenziale; e se per un punto x la prima parte sarà zero, cioè se l'accrescimento $\Delta f(x)$ di $f(x)$ sarà di ordine superiore al primo, saranno zero tanto la derivata che il differenziale pel punto corrispondente x.

Conseguentemente, quando con un processo qualunque si trovi l'indicato sviluppo di $\Delta f(x)$ per un punto x, la derivata e il differenziale di $f(x)$ nello stesso punto x esisteranno e saranno trovati ambedue, l'una essendo P e l'altro $\mathrm{P}h$, e lo stesso accadrà se in $\Delta f(x)$ la parte $\mathrm{P}\,h$ sarà assolutamente nulla, ecc.; talchè indipendentemente anche dalla nozione di derivata si potrebbe prendere per definizione del differenziale la particolarità che noi davamo sopra come sua proprietà speciale, dicendo cioè che il differenziale di una funzione $f(x)$ in un punto x è la parte $\mathrm{P}\,h$ che è nulla o è infinitesima del prim'ordine rispetto ad h nello sviluppo dell'accrescimento $f(x+h)-f(x)$ sotto la forma $\mathrm{P}h+\omega$, dove P ed ω hanno le particolarità sopra indicate, e P può anche essere zero in qualche punto; e ciò naturalmente nell'ipotesi che un tale sviluppo sia possibile.

101. — Secondo la definizione dunque il differenziale di una funzione esiste soltanto quando la derivata prima ha un valore determinato e finito; e siccome l'oggetto del calcolo differenziale è più specialmente quello della ricerca e dello studio dei differenziali delle funzioni, s'intende subito come questo calcolo richieda assolutamente che la derivata *ordinaria* sia determinata e finita.

In alcune questioni però invece dei differenziali intesi nel senso indicato si potrebbero considerare dei differenziali presi soltanto a destra dei singoli punti o dei differenziali a sinistra definendoli in modo analogo per mezzo delle derivate a destra o a sinistra, e allora si richiederebbe soltanto l'esistenza della derivata a destra o di quella a sinistra; ma come per le derivate, così anche pei differenziali, noi in ciò che segue parleremo sempre dei differenziali intesi nel senso ordinario; facendo eccezione soltanto pel caso che il punto cui essi si riferiscono sia un estremo dell'intervallo nel quale la funzione viene considerata, nel qual caso i differenziali come le derivate non potranno essere che differenziali o derivate prese a destra o a sinistra del punto corrispondente.

102. — Ciò premesso, osserviamo che, avendosi $df(x) = f'(x)\,h$, se si suppone $f(x) = x$, si troverà $dx = h$; e questo mostra che il differenziale della variabile indipendente non è mai zero ma tende a zero, ed è uguale in modo preciso all'accrescimento h di questa variabile, e si ha quindi la formola $df(x) = f'(x)\,dx$, in forza della quale la derivata $f'(x)$ venendo ad essere il coefficiente del differenziale dx, è anche detta talvolta il *coefficiente differenziale* di $f(x)$.

Di qui poi si ha $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, e quindi la derivata $f'(x)$, che noi definimmo come *il limite* del quoziente dell'accrescimento della funzione allo accrescimento della variabile, e che già per questo e per la definizione data pei differenziali potrebbe riguardarsi § 7 [pag. 8] come il limite del quoziente dei differenziali della funzione e della variabile indipendente, *viene ora ad essere uguale in modo assoluto a questo quoziente di differenziali.*

103. — In seguito a ciò, per una funzione $z = f(x)$ l'espressione $\frac{df(x)}{dx}$ o $\frac{dz}{dx}$, considerata come quoziente di differenziali, è dunque uguale alla derivata.

Indipendentemente da questo però, e indipendentemente anche da ogni concetto di differenziale, considerando l'espressione $\frac{df(x)}{dx}$ o $\frac{dz}{dx}$ non come quoziente, ma soltanto come un simbolo, si usa anche sotto questo aspetto la notazione $\frac{dz}{dx}$ per rappresentare la derivata di qualsiasi funzione z (nella ipotesi, s'intende, che questa derivata esista) e così per ogni funzione z di una sola variabile x, l'espressione $\frac{dz}{dx}$, tanto considerata come simbolo convenzionale indipendentemente da ogni concetto di differenziale, tanto considerata come quoziente di differenziali, rappresenterà sempre, anche per noi, la derivata di z, e in ambedue i significati si avrà $dz = \frac{dz}{dx} dx$.

104. — Il differenziale dx *della variabile indipendente* pei valori di x che si considerano è una quantità infinitesima; e quindi, dovendo impiccolire continuamente, è di sua natura variabile.

Però quando i differenziali di x devono considerarsi per più valori di x insieme, o anche per ogni punto di un dato intervallo, nulla impedisce di stabilire che il differenziale di x, pure essendo sempre variabile nei differenti suoi stati di grandezza, sia continuamente lo stesso in tutti i punti, per modo cioè che, pure variando continuamente, passi nello stesso tempo per uno stesso valore dx in ciascun punto, o in altri termini sia indipendente da x.

Allora però non avverrà altrettanto generalmente del differenziale della funzione z che si considera, perchè mentre il dx, che non è altro che l'accrescimento h che si dà alla variabile, lo prendiamo noi, il dz invece è quello che viene, dipendentemente dalla natura della funzione z e dai valori di x e di dx, per mezzo della formola $dz = z'(x)\, dx$ nella quale $z'(x)$ dipenderà generalmente da x; e così mentre dx non sarà mai zero, dz lo sarà in tutti quei punti nei quali è zero $z'(x)$.

E così, convenendo, come testè dicemmo, di considerare sempre d'ora innanzi come costante rispetto ad x (cioè indipendente da x) il differenziale della variabile *indipendente* x quando questa variabile deve prendere tutti i valori corrispondenti ai singoli punti di un dato intervallo, è chiaro che questo differenziale si distinguerà allora dal differenziale delle funzioni z (che negli stessi punti ammettono un differenziale) per la circostanza che (a differenza del primo) quest'ultimo ordinariamente non sarà costante, per quanto le notazioni dei differenziali di z e di x saranno ancora perfettamente le stesse.

E si può notare che quando, essendo x la variabile indipendente, dx è costante, le sole funzioni z, che ammettono un differenziale in tutti i punti di un dato intervallo, e per le quali questo differenziale è esso pure costante, sono le funzioni di primo grado; giacchè, onde accada questo, bisogna e basta che la funzione z abbia la sua derivata z' uguale a una costante μ, e allora (§ 42 1.° [pag. 50 e 51]) sarà $z = \mu x + \nu$, essendo ν un'altra costante.

105. — Le regole per la differenziazione delle somme, dei prodotti dei quozienti si vede subito che sono le stesse di quelle che si dettero per la derivazione, e noi non staremo perciò ad occuparcene, e passeremo invece a trattare della differenziazione delle funzioni di funzioni.

Per queste funzioni osserveremo che i loro differenziali, a differenza delle derivate, possono scriversi precisamente come se si trattasse di funzioni di una variabile indipendente, giacchè se si ha p. es. $z = z(u)$ con $u = u(x)$, e sono soddisfatte le condizioni necessarie per l'applicazione della derivazione delle funzioni di funzioni, insieme alla formola $z'_x = z'_u u'_x$, si hanno le altre $dz = z'_x dx$, $du = u'_x dx$, e perciò si avrà $dz = z'_u du$ come se u fosse la variabile indipendente.

Lo stesso successivamente si trova pel caso che z sia funzione di funzione per mezzo di un numero qualunque n di funzioni, cioè avendosi $z = z(u_1)$, con $u_1 = u_1(u_2)$, $u_2 = u_2(u_3), \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}(u_n)$, $u_n = u_n(x)$, si trova subito che $dz = z'_{u_1} du_1 = z'_{u_2} du_2 = z'_{u_3} du_3 = \ldots = z'_{u_n} du_n = z'_x dx$; talchè si può affermare che quando z dipende da una quantità u che è la variabile indipendente, o è una funzione che dipende direttamente o per mezzo di una o più altre funzioni dalla variabile indipendente, allora (nell'ipotesi sempre che le regole di derivazione delle funzioni di funzioni siano applicabili) la forma del differenziale dz sarà sempre quella stessa che si avrebbe se u fosse la variabile indipendente; e soltanto, secondochè saremo nell'un caso o nell'altro, nel valore effettivo $z'_u du$ del differenziale di z vi sarà differenza nel significato di du, perchè nel primo caso du sarà differenziale di variabile indipendente, e nel secondo sarà differenziale di funzione.

In ogni caso poi il quoziente $\frac{dz}{du}$ dei differenziali di z e di u darà sempre la derivata di z presa rispetto ad u tanto che u sia la vera variabile indipendente, tanto che essa debba esser considerata come tale soltanto nella derivazione, purchè in quest'ultimo caso du non sia zero, il che, come dicemmo sopra, potrà allora benissimo avvenire perchè u non sarà la variabile indipendente.

Queste osservazioni poi conducono immediatamente al teorema sulla derivazione delle funzioni inverse, giacchè se $x(z)$ è la funzione inversa di $z=z(x)$, e se almeno nell'intorno del punto x o z che si considera sono soddisfatte le condizioni del § 39 [pag. 45], e nello stesso punto la derivata $D_x z$ è finita e diversa da zero, dall'essere $D_z x = \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}}$, si deduce subito che $D_z x = \frac{1}{D_x z}$, ecc.

106. — Come si hanno le derivate degli ordini superiori al primo, così pure si hanno i differenziali degli stessi ordini, che, al pari delle derivate, si deducono ciascuno da quello dell'ordine immediatamente precedente come il primo si deduce dalla funzione, e considerandovi il differenziale della variabile indipendente come costante.

Si supponga che $z=z(x)$ sia una funzione di una variabile indipendente x che in un punto x oltre ad ammettere la derivata prima $z'(x)$, o $\frac{dz}{dx}$, ammette anche la derivata seconda, la terza, ecc.

In questo caso avendosi $dz = \frac{dz}{dx}dx = z'(x)dx$, si considera anche il differenziale di dz, che chiamasi *differenziale secondo* e si indica con $d(dz)$, o d^2z; poi si considera il differenziale di d^2z che si chiama *differenziale terzo* e s'indica con $d^3z \ldots$; e così riguardando dx come costante, per questi differenziali si ha evidentemente,

$$d^2z = d[z'(x)]\,dx = z''(x)\,dx^2\ ,\quad d^3z = d[z''(x)]\,dx^2 = z'''(x)\,dx^3 \ldots;$$

ed è in conseguenza di questi resultati che le derivate seconde, terze, ..., $z''(x)$, $z'''(x) \ldots$ di z s'indicano con $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}, \ldots$ tanto considerando questi simboli come quozienti *nell'ipotesi sempre che x sia variabile indipendente* quanto considerandoli semplicemente come simboli rappresentativi delle varie derivate (*).

(*) Così d'ora innanzi avremo tre specie di simboli per rappresentare le derivate dei varî ordini di una funzione z di una variabile x, cioè il simbolo di *Cauchy* Dz, D^2z, D^3z, ..., quello di *Lagrange* z', z'', z''', ..., e quello di *Leibnitz* $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, ..., mettendo in evidenza o no, secondo i casi, anche nei primi due simboli la variabile dalla quale dipende la funzione z.

I simboli più comunemente usati sono quello di *Lagrange*, e quello di *Leibnitz*.

107. — A complemento però di quanto abbiamo detto sopra pel caso delle funzioni di funzioni, conviene ora osservare che quando z non dipende direttamente dalla variabile indipendente, e si ha per es. $z=z(u)$ con $u=u(x)$, allora, mentre il differenziale primo di z ha sempre, come abbiamo detto, la forma $z'(u)du$, come se u fosse ancora la variabile indipendente, non avviene più lo stesso pei differenziali di ordine superiore, a meno che la funzione $u(x)$ nel punto x che si considera non abbia i differenziali successivi uguali a zero.

In questo caso infatti dall'essere $dz = z'(u)du$ non si deduce più $d^2z = z''(u)du^2$, perchè du, almeno generalmente, non è costante, e si ha quindi invece l'altra formola $d^2z = z''(u)du^2 + z'(u)d^2u$, come similmente si ha $d^3z = z'''(u)du^3 + 3z''(u)du\,d^2u + z'(u)d^3u$, e così di seguito; talchè ordinariamente la forma dei differenziali secondo, terzo, ... di z non è più quella che si avrebbe se u fosse la vera variabile indipendente, e i simboli $\frac{d^2z}{du^2}$, $\frac{d^3z}{du^3}, \ldots$ che pure ancora si usano per rappresentare le derivate seconde, terze, ... di z prese rispetto ad u come se u fosse la variabile indipendente, non possono più riguardarsi come quozienti di differenziali, ma devono riguardarsi semplicemente come simboli rappresentativi di queste derivate, ecc.

Se però nel punto x che si considera i differenziali secondo, terzo, ... di u saranno zero, e in particolare se u sarà una funzione di primo grado, allora per tutti i punti x pei quali può applicarsi la differenziazione si avranno ancora le formole del paragrafo precedente $d^2z = z''(u)du^2$, $d^3z = z'''(u)du^3, \ldots$

108. — Merita ora di esser fatta la osservazione seguente.

Quando $f(x)$ è una funzione cui la formola di Taylor è applicabile per un dato punto x e per tutti i valori di h numericamente inferiori ad un certo limite, per modo che per gli stessi valori di x e di h si abbia

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1\,.\,2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots,$$

allora, supponendo che h impiccolisca oltre ogni limite e divenga il differenziale di x, e ritenendo che x sia la vera variabile indipendente, si potrà scrivere

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{1}{2}d^2f(x) + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}d^3f(x) + \ldots,$$

essendo $\Delta f(x)$ l'accrescimento totale di $f(x)$; talchè si può evidentemente affermare che la formola di Taylor ci dà l'accrescimento totale di $f(x)$ decomposto nei singoli accrescimenti parziali dei successivi ordini; dei quali l'accrescimento di prim'ordine (quando vi è) è il differenziale primo di $f(x)$, quello di second'ordine (quando vi è) è il differenziale secondo all'infuori del fattore $\frac{1}{1\,.\,2}$, quello del terz'ordine è il differenziale terzo all'infuori del fattore $\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}$, ...; e quindi, ricordando la formola che dà lo sviluppo in serie della esponenziale e^z, si vede che si può scrivere simbolicamente $\Delta f = e^{df} - 1$, intendendo cioè che nello sviluppo di e^{df} i simboli $d^n f$ anzichè potenze indichino differenziali.

109. — Aggiungiamo che si chiama *differenza prima* di $f(x)$ e s'indica con $\Delta f(x)$, l'accrescimento totale $f(x+h) - f(x)$ di $f(x)$; si chiama *differenza seconda*, e s'indica con $\Delta^2 f(x)$, l'accrescimento che prende $\Delta f(x)$ quando si fa variare ancora x di h, cioè $f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$; similmente si chiama *differenza terza* di $f(x)$, e s'indica con $\Delta^3 f(x)$, l'accrescimento di $\Delta^2 f(x)$ calcolato al modo stesso, che verrà perciò ad essere $f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$; e in generale si chiama *differenza* n^{ma} di $f(x)$, e s'indica con $\Delta^n f(x)$ la quantità

$$f(x+nh) - n_{n-1} f[x+(n-1)h] + n_{n-2} f[x+(n-2)h] - \ldots\ldots \pm n_1 f(x+h) \mp f(x);$$

e ciò per la ragione che, coll'ammettere che sia

$$(1) \quad \Delta^n f(x) = n_n f(x+nh) - n_{n-1} f[x+(n-1)h] + \ldots\ldots \pm n_1 f(x+h) \mp n_0 f(x)$$

si trova che il successivo accrescimento $\Delta[\Delta^n f(x)]$ di $\Delta^n f(x)$, o $\Delta^{n+1} f(x)$, calcolato col metodo suindicato, viene appunto ad esser dato dalla formola

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f(x) &= n_n f[x+(n+1)h] - (n_n + n_{n-1}) f(x+nh) + (n_{n-1} + n_{n-2}) f[x+(n-1)h] \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots \mp (n_1 + n_0) f(x+h) \pm n_0 f(x) = \\ &= f[x+(n+1)h] - (n+1)_n f(x+nh) + (n+1)_{n-1} f[x+(n-1)h] - \ldots \mp \\ &\quad \mp (n+1)_1 f(x+h) \pm f(x).\end{aligned}$$

110. — (*) I rapporti $\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}$ di queste differenze n^{me} alle potenze n^{me} dell'accrescimento h della variabile, tanto per h finito quanto per h tendente a zero, conservano le proprietà principali dei rapporti incrementali.

(*) I risultati di questi paragrafi 110, 111, 112, 113, 114 e 115 non si trovano esposti nelle lezioni autografate del 1877.

Noi li diremo perciò *rapporti incrementali d'ordine* n, e daremo qui le dette loro proprietà principali.

Supponiamo perciò dapprima che la nostra funzione $f(x)$ ammetta anche le derivate di ordine n determinate (finite cioè o infinite e determinate di segno) almeno in un intorno del punto x_0, salvo tutt'al più in questo punto x_0, essendo questo intorno di ampiezza uguale o superiore al valore assoluto di nh, e situato tutto a destra o tutto a sinistra dello stesso punto x_0 secondochè h sarà positivo o negativo.

Tenendo conto dei risultati ottenuti nella nota delle pag. 81 e 82, nei quali intenderemo che sia cambiato n in $n+2$, e che per le $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_{n+2}(x)$ siano prese le funzioni $f(x), 1, (x-a_1), (x-a_1)(x-a_2), \ldots, (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ con $a_1 = x_0, a_2 = x_0+h, a_3 = x_0+2h, \ldots, a_{n+1} = x_0+nh$, e sia indicato ancora con k un numero conveniente situato fra x_0 e x_0+nh e diverso da questi estremi, avremo la formola

$$\begin{vmatrix} f^{(n)}(k) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \pi(n) \\ f(x_0) & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f(x_0+h) & 1 & \pi(1)\,h & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f(x_0+2h) & 1 & 2h & \pi(2)\,h^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdots & \cdot\,\cdot & \cdot \\ f(x_0+(n-1)h) & 1 & (n-1)h, & (n-1)(n-2)h^2 & \ldots & \pi(n-1)h^{n-1} & 0 \\ f(x_0+nh) & 1 & nh & n(n-1)h^2 & \ldots & n(n-1)\ldots 2\,h^{n-1} & \pi(n)h^n \end{vmatrix} = 0,$$

e questa ci darà subito l'altra

$$D_n(x_0) = (-1)^n \pi(1)\pi(2), \ldots, \pi(n-1)\,h^n f^{(n)}(k),$$

quando si ponga

$$(2) \quad D_n(x_0) = \begin{vmatrix} f(x_0) & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f(x_0+h) & 1 & \pi(1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f(x_0+2h) & 1 & 2 & \pi(2) & 0 & \ldots & 0 \\ f(x_0+3h) & 1 & 3 & 3\,.\,2 & \pi(3) & \ldots & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ f(x_0+(n-1)h) & 1 & n-1 & (n-1)(n-2) & (n-1)(n-2)(n-3) & \ldots & \pi(n-1) \\ f(x_0+nh) & 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \ldots & n(n-1)(n-2)\ldots 2 \end{vmatrix},$$

Ora sottraendo in questo determinante ogni linea dalla seguente a incominciare dalla seconda si trova

$$\frac{D_n(x_0)}{\pi(n-1)}=-\begin{vmatrix} f(x_0+h)\;-f(x_0) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f(x_0+2h)-f(x_0+h) & 1 & \pi(1) & 0 & \dots & 0 \\ f(x_0+3h)-f(x_0+2h) & 1 & 2 & \pi(2) & \dots & 0 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ f(x_0+(n-1)h)-f(x_0+(n-2)h) & 1 & n-2 & (n-2)(n-3) & \dots & \pi(n-2) \\ f(x_0+nh)\;-f(x_0+(n-1)h) & 1 & n-1 & (n-1)(n-2) & \dots & (n-1)(n-2)\dots 2 \end{vmatrix},$$

e di qui evidentemente si ricava subito

$$D_n(x)=-\pi(n-1)\{D_{n-1}(x_0+h)-D_{n-1}(x_0)\};$$

e ora osservando che $D_1(x)=-\Delta f(x)$, e quindi

$$D_2(x_0)=\quad \pi(1)\{\Delta f(x_0+h)-\Delta f(x_0)\}=\pi(1)\Delta^2 f(x_0),$$
$$D_3(x_0)=-\pi(1)\pi(2)\{\Delta^2 f(x_0+h)-\Delta^2 f(x_0)\}=-\pi(1)\pi(2)\Delta^3 f(x_0),$$
$$D_4(x_0)=\quad \pi(1)\pi(2)\pi(3)\{\Delta^3 f(x_0+h)-\Delta^3 f(x_0)\}=\pi(1)\pi(2)\pi(3)\Delta^4 f(x_0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_n(x_0)=(-1)^n\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-1)\{\Delta^{n-1}f(x_0+h)-\Delta^{n-1}f(x_0)\}=(-1)^n\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n-1)\Delta^n f(x_0),$$

si conclude che

$$(3)\qquad \Delta^n f(x_0)=h^n f^{(n)}(k)=h^n f^{(n)}(x_0+\theta_n nh),\quad\text{o}\quad \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}=f^{(n)}(x_0+\theta_n nh),$$

con θ_n numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.) che dipenderà da x_0, da n, da h e dalla natura di $f(x)$; e così resta evidentemente estesa alle differenze e ai rapporti incrementali d'ordine qualunque n la formola degli accrescimenti finiti, nel tempo che abbiamo altresì dimostrato che la differenza n^{ma} di $f(x)$, che già avevamo posta sotto la forma (1), può sempre porsi anche sotto la forma del determinante (2) all'infuori del fattore costante $\frac{(-1)^n}{\pi(1)\,\pi(2)\dots\pi(n-1)}$; cioè *si ha sempre*

$$\Delta^n f(x_0)=\frac{(-1)^n}{\pi(1)\,\pi(2)\dots\pi(n-1)}\,D_n(x_0),$$

essendo $D_n(x_0)$ *il determinante* (2).

111. — Notiamo che se nella formola precedente (3) il punto x_0 che è preso come punto di partenza in $\Delta^n f(x_0)$ si cambia nel punto x_0-i, dove i è un numero del segno di h e non superiore in valore assoluto a nh, allora pel rapporto incrementale corrispondente avremo la formola

$$\frac{\Delta_n f(x_0-i)}{h^n}=f^{(n)}(x_0-i+\theta_n nh)=f^{(n)}(x_0+\eta_n nh),$$

essendo al solito θ_n un numero compreso fra 0 e 1, e η_n un numero compreso fra -1 e 1 (gli estremi sempre esclusi); e di qui in particolare se $i=ph$, dove p è uno dei numeri interi $0,1,2,3\dots n$, si hanno differenze e rapporti incrementali speciali particolarmente notevoli, che potremo intenderli riferiti ancora a un punto determinato x_0 indicandoli con $\Delta_p^n f(x_0)$; e questi corrisponderanno a differenze e rapporti incrementali d'ordine superiore destri e sinistri, o in parte a destra e in parte a sinistra, rispetto al punto x_0.

In particolare pel caso di $n=2$ con $p=1$ avremo la differenza $\Delta_1^2 f(x_0)$, e il rapporto incrementale del second'ordine corrispondente $\frac{\Delta_1^2 f(x_0)}{h^2}$, che spesso si considerano negli studii superiori; e questo rapporto viene ad essere $\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$, ed è precisamente il rapporto ad h della differenza dei due rapporti incrementali del prim'ordine (destro e sinistro) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e $\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$.

112. — Questi risultati generali sono relativi, come abbiamo detto, al caso in cui almeno in tutto l'intervallo da x_0-ph a $x_0-ph+nh$, tranne tutt'al più negli estremi, le derivate n^{me} di $f(x)$ esistono sempre, potendo però essere anche infinite ma determinate di segno.

Essi poi conducono anche ad un'altra formola che vale pel caso in cui la derivata n^{ma} di $f(x)$ presa nel punto x_0, a destra o a sinistra secondochè h è positivo o negativo, esiste ed è determinata e finita, qualunque cosa poi accada della stessa derivata nei punti fuori di x_0.

Questa formola è la seguente

$$(4)\qquad \lim\frac{\Delta_p^n f(x_0)}{h^n}=f^{(n)}(x_0),\quad\text{o}\quad \Delta_p^n f(x_0)=h^n\{f^{(n)}(x_0)+\varepsilon_n\},$$

dove ε_n è una quantità che tende a zero con h; ed essa può sostituire la precedente (3) come la (α) della nota alla pag. 87 può sostituire la formola di Taylor abbreviata che si ha nel caso che si abbiano le prime ipotesi rispetto a $f^{(n)}(x)$.

Per trovare questa formola, osserviamo per prima cosa che, quando si ha un polinomio Q di grado n, basta applicarvi la formola già dimostrata (3) per vedere subito che i suoi rapporti incrementali $\frac{\Delta_p^m Q(x)}{h^m}$ di un ordine m qualsiasi saranno tutti uguali alle derivate dell'ordine corrispondente in punti intermedii fra $x-ph$, e $x-ph+mh$, e in particolare i rapporti incrementali di ordine n saranno uguali ad una costante che sarà (come la derivata) il coefficiente del primo termine moltiplicato per $\pi(n)$, e i rapporti incrementali seguenti saranno tutti nulli.

Segue da ciò che se si considera la funzione $\psi(x)=f(x)-\frac{f^{(n)}(x_0)}{\pi(n)}(x-x_0)^n$, questa funzione avrà la derivata n^{ma} zero nel punto x_0, e il suo rapporto incrementale sarà $\frac{\Delta_p^n f(x_0)}{h^n}-f^{(n)}(x_0)$; mentre, esistendo evidentemente le derivate $(n-1)^{me}$ di $f(x)$ nei punti x di un certo intorno di x_0, la formola (3) ci mostra che per le differenze $(n-1)^{me}$ di $\psi(x)$ quando h sia sufficientemente piccolo, avremo

$$\Delta_p^{n-1}\psi(x)=h^{n-1}\psi^{(n-1)}(x+\eta_{n-1}(n-1)h);$$

e quindi, poichè si ha $\Delta_p^n\psi(x_0)=\Delta_p^{n-1}\psi(x_0+h)-\Delta_p^{n-1}\psi(x_0)$, avremo evidentemente

$$\frac{\Delta_p^n f(x_0)}{h^n}-f^{(n)}(x_0)=\frac{\psi^{(n-1)}(x_0+h+\eta'_{n-1}(n-1)h)-\psi^{(n-1)}(x_0+\eta_{n-1}(n-1)h)}{h},$$

essendo η'_{n-1} e η_{n-1} quantità comprese fra -1 e 1 (questi estremi esclusi) che dipendono da n, da x_0 e da h, e dalla funzione $f(x)$.

Ma evidentemente per quei valori di h pei quali i numeri $1+\eta'_{n-1}(n-1)$, e $\eta_{n-1}(n-1)$ non sono zero, il rapporto che figura nel secondo membro di questa formola può porsi sotto la forma

$$(5)\quad \frac{\psi^{(n-1)}(x_0+h+\eta'_{n-1}(n-1)h)-\psi^{(n-1)}(x_0)}{h+\eta'_{n-1}(n-1)h}(1+\eta'_{n-1}(n-1))-\frac{\psi^{(n-1)}(x_0+\eta_{n-1}(n-1)h)-\psi^{(n-1)}(x_0)}{\eta_{n-1}(n-1)h}\eta_{n-1}(n-1);$$

mentre per quei valori di h pei quali uno solo degli stessi numeri $1+\eta'_{n-1}(n-1)$ e $\eta_{n-1}(n-1)$ sarà zero si avrà ancora questa espressione del secondo membro della formola precedente nella quale però mancherà il rapporto corrispondente; e questi rapporti nella stessa espressione mancheranno tutti e due, e il secondo membro della formola stessa sarà assolutamente zero, per quei valori di h pei quali gli stessi numeri $1+\eta'_{n-1}(n-1)$ e $\eta_{n-1}(n-1)$ saranno ambedue zero; dunque, osservando ora che ciascuno dei due rapporti che figurano nella espressione (5), considerati pei valori di h pei quali possono considerarsi, tendono ambedue a zero perchè tendono alla derivata n^{ma} di $\psi(x)$ nel punto x_0 che è zero, si conclude subito ora che al tendere di h a zero *passando h per qualsiasi valore,* il limite di $\frac{\Delta_p^n f(x_0)}{h^n}-f^{(n)}(x_0)$ è zero, e restano così pienamente dimostrate, come volevamo, le formole (4).

Sotto certe condizioni poi la prima di queste formole potrebbe dimostrarsi anche nel caso che $f^{(n)}(x_0)$ fosse infinita (v. ad es. i §§ 174 e 175 [pag. 225 e seg.]) dei miei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* nei quali è trattato il caso particolare di $n=2$, con $p=1$ e $p=0$).

113. — Secondo il teorema dimostrato, quando esiste la derivata n^{ma} di una funzione $f(x)$ in un punto x_0, e questa derivata è determinata e finita, il rapporto incrementale $\frac{\Delta_p^n f(x_0)}{h^n}$ al tendere di h a zero ha appunto per limite $f^{(n)}(x_0)$, e quindi in questo caso il limite dello stesso rapporto incrementale può sempre sostituirsi alla derivata n^{ma}.

Inversamente però, trattandosi di rapporti incrementali di ordine superiore al primo, non può sempre dirsi che quando un rapporto incrementale $\frac{\Delta_p^{(n)} f(x_0)}{h^n}$ ha un limite determinato l per $h=0$ a destra o a sinistra, la funzione data $f(x)$ abbia pure una derivata n^{ma} determinata a destra o a sinistra, che allora, per ciò che precede, sarebbe appunto l; e il processo stesso che abbiamo tenuto per la dimostrazione del teorema precedente mette in evidenza questa particolarità, perchè quand'anche si ammetta di sapere che esistono le derivate $(n-1)^{me}$ in un certo intorno di x_0 (il che sarebbe già una restrizione imposta a $f(x)$), si vede subito che se nelle formole del paragrafo precedente al posto di $f^{(n)}(x_0)$ si sostituisce l non se ne deduce affatto che gli ordinarii rapporti incrementali (cioè quelli di prim'ordine) di $\psi^{(n-1)}(x)$ o di $f^{(n-1)}(x)$ relativi al punto x_0 abbiano limiti determinati (che dovrebbero essere respettivamente zero o l) *quando h tende a zero in un modo qualsiasi.*

E d'altra parte, anche indipendentemente da queste considerazioni generali, basta avere riguardo alla espressione $\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$ del rapporto incrementale del second'ordine $\frac{\Delta_1^2 f(x_0)}{h^2}$, che è uguale alla differenza dei soliti rapporti incrementali del prim'ordine (destro e sinistro) divisa per h, per dedurne subito che possono esservi dei casi (come effettivamente ci sono, e anche assai semplici) nei quali il detto rapporto incrementale del second'ordine $\frac{\Delta_1^2 f(x_0)}{h^2}$ ha un limite determinato e finito per $h=0$, mentre gli indicati rapporti incrementali del prim'ordine, considerati separatamente, non hanno un limite determinato e finito, e solo la loro differenza ha per limite zero, ciò che non esclude neppure che la funzione $f(x)$ nel punto x_0 abbia una discontinuità di seconda specie dalle due parti, in modo però che la media dei suoi valori a destra e a sinistra $\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}$ abbia il limite determinato $f(x_0)$ per $h=0$.

114. — Ne segue che i limiti dei rapporti incrementali di ordine superiore al primo, quando esistono, hanno un significato più esteso di quello delle derivate degli ordini corrispondenti, e potrebbero quindi essere presi in considerazione invece di queste derivate quando volessero farsi degli studii per funzioni più generali di quelle che ammettono le solite derivate almeno fino a un certo ordine.

Noi però non possiamo ora minimamente fermarci a fare questi studii generali, pei quali solo faremo notare che, per farli, il più spesso gioverà di considerare insieme alla funzione data $f(x)$ la funzione che se ne deduce togliendovi un polinomio di grado uguale all'ordine del rapporto incrementale che si vorrà considerare (*).

115. — Solo, limitandoci al caso dei rapporti incrementali del second'ordine, che è il più notevole, dimostreremo che: *Quando per questi rapporti incrementali* $\frac{\Delta_1^2 f(x)}{h^2}$ *esisterà un limite per* $h=0$, *non soltanto per punti speciali isolati* x_0, *ma per tutti i punti* x *di un certo intervallo* $(a\,,b)$ *(gli estremi al più esclusi) nel quale la funzione data* $f(x)$ *è sempre finita e continua per tutto e anche negli estremi, allora se i valori del detto limite di* $\frac{\Delta_1^2 f(x)}{h^2}$ *pei varî punti* x *fra* a *e* b *(*a *e* b *al più escl.) costituiranno una funzione* $F(x)$ *finita e continua, la funzione data* $f(x)$ *avrà una derivata seconda determinata e finita in tutto* $(a\,,b)$, *tranne tutt'al più negli estremi* a *o* b, *che sarà appunto* $F(x)$; *e ogni altra funzione che dia luogo alle stesse particolarità rispetto ai rapporti incrementali del second'ordine non potrà differire da* $f(x)$ *altro che per una funzione del primo grado* $Ax+B$.

Per dimostrare questo teorema si supponga dapprima che in tutto l'intervallo $(a\,,b)$ la funzione $F(x)$ sia sempre zero, cioè il rapporto incrementale del second'ordine $\frac{\Delta_1^2 f(x)}{h^2}$ della funzione data $f(x)$ abbia sempre per limite zero per $h=0$ per ogni valore di x fra a e b, tranne tutt'al più negli estremi; e prendiamo a considerare la funzione

(*) Questi studii generali potrebbero farsi anche per quelle funzioni, più generali dei rapporti incrementali qui considerati, che sono conosciute sotto il nome di *funzioni interpolari*.

$$\varphi(x)=\pm\left\{f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right\}-\frac{\lambda}{2}(x-a)(b-x), \tag{6}$$

dove λ è una costante.

Questa funzione $\varphi(x)$ in tutto l'intervallo $(a\,,b)$ (inclusi gli estremi dove essa è zero) sarà finita e continua; e per essa in ogni punto x di $(a\,,b)$ tranne tutt'al più negli estremi, avremo $\lim\limits_{h=0}\frac{\Delta_1^2\varphi(x)}{h^2}=\lambda$, qualunque sia il segno che prenderà il primo termine nella stessa funzione $\varphi(x)$.

D'altra parte, poichè nei punti a e b la funzione $\varphi(x)$ si annulla, è certo che se essa non sarà sempre zero fra a e b, per un valore x' *interno* all'intervallo $(a\,,b)$ essa avrà un massimo se almeno alcuni dei suoi valori saranno positivi, e avrà un minimo se alcuni dei suoi valori saranno negativi; per modo che, secondochè saremo nell'uno o nell'altro di questi due casi, avremo le due diseguaglianze

$$\varphi(x'+\delta)-\varphi(x')\leq 0\ ,\quad \text{e}\quad \varphi(x'-\delta)-\varphi(x')\leq 0\ ,$$

o le due

$$\varphi(x'+\delta)-\varphi(x')\geq 0\ ,\quad \text{e}\quad \varphi(x'-\delta)-\varphi(x')\geq 0\ ,$$

colle quali si viene a comprendere anche il caso, che avevamo poc'anzi escluso, in cui $\varphi(x)$ fosse sempre zero fra a e b; e così nel punto x' avremo nell'un caso o nell'altro

$$\frac{\varphi(x'+\delta)-2\varphi(x')+\varphi(x'-\delta)}{\delta^2}\leq 0\ ,\quad \text{o}\quad \frac{\varphi(x'+\delta)-2\varphi(x')+\varphi(x'-\delta)}{\delta^2}\geq 0\ ,$$

e quindi anche $\lim\limits_{\delta=0}\frac{\Delta_1^2\varphi(x')}{\delta^2}\leq 0$ nel primo caso, e $\lim\limits_{\delta=0}\frac{\Delta_1^2\varphi(x')}{\delta^2}\geq 0$ nel secondo caso; e se, come possiamo sempre supporre di avere fatto, per λ sarà stato preso un numero per es. positivo, non potremo trovarci altro che nel secondo di questi casi, perchè si ha $\lim\limits_{h=0}\frac{\Delta_1^2\varphi(x)}{h^2}=\lambda$, qualunque sia x fra a e b.

Ma evidentemente, essendovi nel primo termine di $\varphi(x)$ il doppio segno, se questo termine non fosse sempre zero per ogni valore di x fra a e b, basterebbe prendere opportunamente il detto segno per fare sì che, con λ positivo e abbastanza piccolo, $\varphi(x)$ in alcuni punti x fra a e b prendesse valori positivi, e allora esisterebbe certamente un punto x' nel quale si avrebbe $\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_1^2 \varphi(x')}{\delta^2} \leq 0$; dunque bisogna di necessità ammettere che fra a e b il termine stesso sia sempre zero; e questo porta senz'altro a dire che dovrà essere $f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ per tutti i valori di x fra a e b (a e b incl.), per modo che si può intanto affermare con *Schwarz* che: *Se $f(x)$ è una funzione finita e continua in ogni punto x fra a e b (gli estremi incl.), e negli stessi punti tranne tutt'al più negli estremi il suo rapporto incrementale del second'ordine $\frac{\Delta_1^2 f(x)}{h^2}$ ha sempre per limite zero per $h=0$, la funzione stessa $f(x)$ sarà necessariamente una funzione di primo grado.*

Ammesso ora invece che per i valori di x fra a e b (gli estremi al più escl.) lo stesso rapporto incrementale $\frac{\Delta_1^2 f(x)}{h^2}$ per $h=0$ abbia per limite una funzione finita e continua $F(x)$, allora siccome esiste sempre, come vedremo nel calcolo integrale, una funzione pure finita e continua $\psi(x)$, pienamente determinata all'infuori di una funzione di primo grado, che per gli stessi valori di x ha per derivata seconda $F(x)$, è certo che la differenza $f(x) - \psi(x)$ sarà una funzione per la quale il solito rapporto incrementale del second'ordine avrà per limite zero per $h=0$ in tutto l'intervallo da a a b, tranne tutt'al più negli estremi; e quindi, pel teorema precedente, questa differenza non potrà essere che una funzione di primo grado $Ax+B$ in tutto lo stesso intervallo (a, b), e si avrà perciò $f(x) = \psi(x) + Ax + B$; con chè il teorema enunciato sopra resta ora dimostrato completamente.

Questo teorema, sotto certe condizioni, può generalizzarsi restando ancora nel caso dei rapporti incrementali del second'ordine, e può anche estendersi al caso dei rapporti incrementali di ordine superiore al secondo; ma, come già abbiamo detto, noi non possiamo fermarci più oltre su questi studî.

IX.

Generalità sulle funzioni di due o più variabili

116. — Siano x e y due variabili reali indipendenti che per semplicità considereremo come coordinate cartesiane dei punti di un piano, e ammettiamo che esse possano prendere tutti i sistemi di valori corrispondenti ai punti racchiusi in un dato campo C, cioè tutti i valori corrispondenti ai punti di uno spazio finito o infinito C che sia l'intero piano o sia soltanto una porzione finita o infinita del piano limitato da una o più linee che ne formano il contorno, come per es. lo spazio racchiuso da una circonferenza o da una linea poligonale a lati rettilinei o curvilinei, o da due circonferenze concentriche, o lo spazio compreso fra i due rami di un'iperbola, o quello esterno ad un'ellisse, ecc.

Limitandoci sempre alle funzioni a un sol valore e reali, e estendendo anche al caso di più variabili il concetto di funzione che si ha, secondo Dirichlet, pel caso di una sola variabile, diremo che u è una funzione di x e di y in un campo C quando per ciascuno dei sistemi di valori che x e y possono prendere entro C, o per ogni punto di C, essa ha un valore unico e determinato, finito o infinito, senza curarci della natura della legge o delle leggi che serviranno a determinarlo; e considereremo soltanto quelle funzioni che, esclusi tutt'al più, mediante piccoli spazi superficiali, un numero finito di punti di C o un numero finito di linee, nelle rimanenti porzioni di C hanno sempre valori numericamente inferiori a un numero finito.

Chiamando poi *intorno* di un punto $m(a, b)$ di C ogni piccola porzione di C nella quale si trovi il punto stesso m come punto *interno* o come punto del contorno secondochè esso è interno a C o è soltanto un punto del contorno di C, diremo che una funzione u, il cui valore $u(a, b)$ in un punto $m(a, b)$ di C è finito, *è continua* in questo punto m quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si può trovare un intorno di m tale che la differenza fra i valori $u(x, y)$ di u in ogni punto (x, y) dello stesso intorno e il valore $u(a, b)$ di u nel punto m sia numericamente inferiore a σ.

In altri termini diremo che la funzione *u è continua* nel punto $m(a, b)$, dove ha il valore finito $u(a, b)$, quando per ogni numero comunque piccolo e positivo σ esistono due numeri differenti da zero e positivi h_0 e k_0 tali che per tutti i punti $(a+h, b+k)$ che cadono entro C e pei quali h e k non superano in valore assoluto h_0 e k_0 (per modo cioè che sia $h^2 \leq h_0^2$, $k^2 \leq k_0^2$) la differenza $u(a+h, b+k) - u(a, b)$ fra i valori di u nei punti $(a+h, b+k)$ e quello nel punto (a, b) sia numericamente inferiore a σ; e più generalmente infine, senza escludere cioè neppure il caso che nel punto $m(a, b)$ la funzione u abbia un valore *infinito*, si potrà dire anche che una funzione u è continua in un punto (a, b) di C quando il limite per $h=0$ e $k=0$ dei valori $u(a+h, b+k)$ di u nei punti $(a+h, b+k)$ è il valore *finito o infinito* $u(a, b)$ di u nel punto (a, b); e ciò qualunque sia il modo di convergere a zero delle quantità h e k.

117. — In ogni altro caso poi diremo che la funzione $u(x, y)$ è *discontinua* nel punto (a, b); e, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, distingueremo in particolare le discontinuità che possono togliersi mutando soltanto il valore della funzione nel punto corrispondente, ecc.; e osserveremo che una funzione $u(x, y)$ data in un campo C potrà esser discontinua soltanto in punti separati del campo stesso, o esserlo in tutti i punti di alcune linee, o anche infine essere totalmente discontinua in una o più porzioni separate di C o anche in tutto C.

Così, per es., si vede subito che la funzione che nel punto $x=0, y=0$ (origine delle coordinate) è zero, e per gli altri punti (x, y) del piano è definita dalla espressione $\operatorname{sen} 2\left(\operatorname{arc tg} \frac{y}{x}\right)$, è discontinua nel punto $x=0, y=0$, giacchè, indicando con φ l'angolo polare del punto (x, y) in coordinate polari, questa funzione è eguale a $\operatorname{sen} 2\varphi$, e quindi in ogni piccolo cerchio descritto intorno all'origine (cioè in ogni intorno dell'origine) prende tutti i valori da -1 ad 1.

Invece la funzione che pei punti della retta $y=0$ a destra dell'origine (asse positivo delle x) è sempre zero, e per gli altri punti del piano è uguale al valore della espressione $x^2 \operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$, nella quale s'intenda che l'$\operatorname{arc tg} \frac{y}{x}$ deve considerarsi come l'angolo polare (minore di 2π) del punto (x, y), è una funzione continua nel punto $x=0$, $y=0$, ma è discontinua in tutti gli altri punti della retta $y=0$ che corrispondono a $x>0$ (parte positiva

dell'asse delle x), perchè avvicinandosi indefinitamente a questi punti dalla parte dove $y>0$ si tende sempre verso zero, mentre avvicinandosi dalla parte dove $y<0$ si tende verso $2\pi x^2$.

118. — Notiamo ora esplicitamente che avendo in un campo C una funzione di due variabili $u(x, y)$, e considerandola in un punto (a, b) di questo campo, può darsi che se si suppone dapprima $x=a$, e si considera poi u come una funzione $u(a, y)$ della sola y, si trovi che essa è continua per $y=b$; e viceversa, se si suppone dapprima $y=b$ e si considera poi la u come una funzione $u(x, b)$ della sola x, può darsi che si trovi anche che essa è continua per $x=a$; però (stando alla definizione data sopra per la continuità delle funzioni di due variabili) potrà accadere che, nonostante le indicate continuità per ciascuna delle due funzioni $u(x, b)$, $u(a, y)$ (cioè rispetto a ciascuna delle due variabili x e y separatamente), la $u(x, y)$, considerata come funzione ad un tempo delle due variabili x ed y, non possa riguardarsi come continua nel punto (a, b).

E che ciò possa effettivamente avvenire s'intende subito riflettendo alla definizione generale che noi abbiamo data per le funzioni di due variabili, perocchè l'indicata continuità rispetto alle variabili x e y separatamente porta soltanto che i valori della funzione lungo le due rette parallele agli assi x e y condotte pel punto (a, b) tendano verso il valore della funzione in questo punto, ma non stabilisce nulla pei valori della funzione stessa negli altri punti degli intorni di (a, b); e del resto poi, considerando p. es. la funzione che per $x=0$, $y=0$ è uguale a zero, e per gli altri sistemi di valori di x ed y è uguale a $x+y+\operatorname{sen} 2\left(\operatorname{arc tg} \frac{y}{x}\right)$, si vede subito che per $x=0$, $y=0$ essa presenta appunto la indicata singolarità; giacchè supponendo dapprima $x=0$ si trova che essa è sempre uguale a y, e quindi è allora una funzione sempre continua di y, e supponendo invece dapprima $y=0$ si trova che essa è sempre uguale ad x, e quindi è allora una funzione sempre continua di x; mentre però, in ordine alla definizione data sopra, la funzione data, considerata come funzione di x e y ad un tempo non è continua nel punto $(x=0, y=0)$, per la ragione che nel punto $(x=0, y=0)$ essa è zero, e fuori di questo punto, indicando con ρ e φ le solite coordinate polari del punto corrispondente (x, y), si trova che essa è uguale sempre a $\rho\cos\varphi + \rho\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} 2\varphi$; e avvicinandosi al punto $x=0$, $y=0$ indefinitamente tende verso valori differenti a seconda della direzione secondo la quale si andrà verso il punto stesso.

119. — Geometricamente parlando adunque, noi possiamo dire che per assicurarsi che una funzione di due variabili $u(x, y)$ è continua in un punto

(a, b) non basta affatto di assicurarsi soltanto che essa si mantiene continua in quel punto andandovi secondo due direzioni determinate, o anche evidentemente secondo un numero finito di tali direzioni.

E più di questo ancora merita di esser notato che per la continuità di una tale funzione di due variabili in un punto (a, b) neppure basta assicurarsi che si ha continuità in quel punto andandovi in qualunque direzione determinata, per es. secondo le varie direzioni rettilinee; e ciò perchè la continuità nel punto (a, b) su ogni retta separatamente che esca da questo punto porta che scelto un numero arbitrariamente piccolo σ esista sempre *sulla retta* un certo intorno del punto (a, b) nel quale i valori della funzione sono vicini a quello che si ha nel punto (a, b) più di σ, ma il limite inferiore delle ampiezze degli intorni relativi alle varie direzioni può essere lo zero.

120. — Aggiungiamo ora che anche rispetto alle funzioni di due variabili si potrebbero dimostrare sui limiti inferiori e superiori dei loro valori quei teoremi stessi che si hanno pel caso delle funzioni di una sola variabile; e si potrebbe pure mostrare che se una funzione $u(x, y)$ è finita e continua in un dato campo *finito* C (il contorno inclus.), essa è sempre continua uniformemente, cioè per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ esistono sempre due numeri differenti da zero e positivi h_0 e k_0 tali che per tutti i punti (x, y) di C (i punti del contorno inclus.) e per tutti i sistemi di valori di h e di k numericamente inferiori a h_0 e k_0 pei quali il punto $(x+h, y+k)$ appartiene a C, si ha in valore assoluto $u(x+h, y+k) - u(x, y) < \sigma$; come si potrebbe mostrare ancora che le funzioni continue di due variabili in un dato campo C prendono in esso effettivamente il loro valore massimo e il loro valore minimo, e anche qualunque valore compreso fra il massimo e il minimo, ecc.; ma noi, per non dilungarci di troppo, non dimostreremo ora nessuna di queste proprietà, che d'altronde si dimostrano con tutta facilità come nel caso di una sola variabile; e quando ci occorrerà di richiamarle, le riterremo sempre come dimostrate (*).

121. — Oltre poi alle funzioni di due variabili, occorre bene spesso considerare funzioni di tre e anche di un numero maggiore di variabili.

Ora, nel caso di tre variabili reali x, y, z, noi per semplicità considereremo ordinariamente queste variabili come coordinate cartesiane dei punti dello spazio, e ammetteremo sempre che esse possano prendere tutti i sistemi di valori corrispondenti ai punti di uno spazio finito o infinito C che sia

(*) Queste dimostrazioni si fanno quasi tutte coi soliti processi delle successive divisioni in $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n \ldots$ parti rispetto a ciascuna variabile separatamente, come si fà pel caso di una variabile sola.

l'intero spazio ordinario a tre dimensioni, o sia una porzione finita o infinita di questo spazio limitata da una o più superficie limiti, come ad esempio lo spazio interno o quello esterno a una superficie sferica o a un dato poliedro, o lo spazio compreso fra due sfere, ecc....

E limitandoci sempre alle funzioni ad un sol valore e reali, diremo che u è una funzione di x, y, z in un dato campo C, quando per ciascuno dei sistemi di valori che x, y, z possono prendere nello spazio C, o per ogni punto di C, essa ha un valore determinato finito o infinito senza preoccuparci della natura delle leggi che serviranno a determinarlo.

E chiamando ancora *intorno* di un punto $m(a, b, c)$ di C ogni piccola porzione di C nella quale si trovi il punto stesso m, come punto interno o come punto della superficie limite secondochè esso è interno a C o è soltanto un punto della superficie limite di C, diremo che una funzione u, il cui valore $u(a, b, c)$ nel punto $m(a, b, c)$ è finito, *è continua* in questo punto, quando per ogni numero positivo e comunque piccolo σ si può trovare un intorno di m tale che la differenza fra i valori $u(x, y, z)$ di u in ogni punto (x, y, z) dello stesso intorno e il valore $u(a, b, c)$ che essa ha nel punto m sia numericamente inferiore a σ.

In altri termini diremo che la funzione u è continua nel punto $m(a, b, c)$, dove essa ha il valore finito $u(a, b, c)$, quando per ogni numero positivo e comunque piccolo σ si possono trovare tre numeri differenti da zero e positivi h_0, k_0, l_0 tali che per tutti i punti $(a+h, b+k, c+l)$ che cadono entro C e che non superano in valore assoluto h_0, k_0, l_0 (per modo cioè che sia $h^2 \leq h_0^2, k^2 \leq k_0^2, l^2 \leq l_0^2$) la differenza $u(a+h, b+k, c+l) - u(a, b, c)$ sia numericamente inferiore a σ; e più generalmente ancora, senza escludere cioè neppure il caso in cui nel punto (a, b, c) la funzione u ha un valore *infinito*, si potrà dire anche che una funzione u è continua in un punto (a, b, c) di C quando il limite per $h=0$, $k=0$, $l=0$ dei valori $u(a+h, b+k, c+l)$ che essa ha nei punti $(a+h, b+k, c+l)$ è il valore *finito* o *infinito* $u(a, b, c)$ che essa ha nel punto (a, b, c), e ciò qualunque sia il modo di convergere a zero delle quantità h, k, l.

E con queste definizioni, anche per le funzioni a tre variabili potrebbero farsi osservazioni simili a quelle che facemmo nei precedenti § 117 e seg. per le funzioni di due variabili soltanto.

122. — Venendo ora al caso generale di un numero qualunque n di variabili, diciamo prima che quando si hanno n variabili $x_1, x_2 \ldots, x_n$ che possono prendere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, riportando allora a questo sistema di variabili le definizioni e i concetti geometrici, si usa, come è noto, di chiamare *spazio a n dimensioni* l'insieme n volte infinito dei si-

stemi di valori che queste quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ possono prendere, e si dice anche che ogni sistema $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di questi valori determina *un punto* dello stesso spazio.

Più specialmente poi si dice campo o porzione di spazio a n dimensioni l'insieme dei punti che si ottengono limitando la variabilità di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con date leggi, per modo però che fra certi limiti esse restino del tutto indipendenti; e in particolare si dice campo finito ogni campo nel quale i varî sistemi di valori di $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ corrispondenti ai singoli punti di esso sono sempre finiti.

La limitazione da apportarsi alla variabilità di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde formare i varî campi finiti o infiniti di n dimensioni, s'intende che comporterà un'arbitrarietà grandissima; però noi, per non entrare in troppi dettagli, e per essere più semplici, finchè si resterà nel caso di un numero qualunque n di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ammetteremo che non sia posta alcuna limitazione alla loro variabilità, per modo cioè che ciascuna di esse possa prendere tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, e che in conseguenza i varî sistemi di valori delle stesse variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ possano corrispondere a qualunque punto dello spazio infinito a n dimensioni; o tutt'al più, se una qualche limitazione verrà posta alla indicata variabilità di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noi, a meno che non si avverta espressamente il contrario, intenderemo che essa venga posta collo stabilire che x_1 debba variare soltanto fra due numeri dati α_1 e β_1 (α_1 e β_1 inclusi o no) passando però per tutti i valori compresi fra questi numeri; x_2 debba variare al modo stesso fra α_2 e β_2; x_3 debba variare fra α_3 e β_3; ....; e x_n debba variare fra α_n e β_n; per modo cioè che pei punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del campo che si considera, i valori di $x_1, x_2 \ldots, x_n$ siano sistemi di valori compresi respettivamente fra α_1 e β_1, fra α_2 e $\beta_2, \ldots,$ fra α_n e β_n; e allora i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pei quali almeno una delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, per es. x_r, è uguale ad uno dei valori limiti ad esso corrispondenti α_r o β_r, si dirà un *punto limite* del campo C, e l'insieme dei punti-limiti si dirà il *campo-limite* di C.

Si dirà poi che un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ percorre nello spazio infinito a n dimensioni, o in un campo speciale C pure di n dimensioni, un campo C' di $n-m$ dimensioni quando i valori che le variabili possono prendere successivamente in modo da soddisfare a certe condizioni speciali non sono del tutto indipendenti, ma soltanto $n-m$ fra essi possono riguardarsi come tali; al modo stesso che, per es., nell'ordinario spazio a tre dimensioni il punto (x, y, z) percorre la superficie di una sfera, cioè uno spazio a due dimensioni soltanto, quando x, y, z, invece di restare del tutto indipendenti, devono soddisfare alla equazione $x^2+y^2+z^2=1$; e in particolare per brevità di linguaggio si dirà *linea* o *superficie* di uno spazio C a n dimensioni lo spazio di una o due dimensioni respettivamente tutto contenuto in C, e nel quale una soltanto o due delle variabili possono essere riguardate come indipendenti.

E estendendo ancora i concetti precedenti, limitatamente però ai casi più semplici e più comuni, si dirà *intorno* di un punto $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ in uno spazio C a n dimensioni l'insieme dei punti $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ che appartengono a C e pei quali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono compresi respettivamente fra $a_1-h'_1$ e $a_1+h'_1$, fra $a_2-h'_2$ e $a_2+h'_2, \ldots.$ e fra $a_n-h'_n$ e $a_n+h'_n$, essendo $h'_1, h'_2 \ldots . h'_n$ quantità tutte differenti da zero e positive e comunque piccole.

123. — Con queste denominazioni poi, limitandoci ancora alle funzioni a un sol valore, diremo funzione di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in un dato campo C a n dimensioni ogni quantità u che per ogni punto di questo campo ha un valore determinato finito o infinito; e diremo poi che una funzione u, che in un dato punto $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ha un valore finito $u(a_1, a_2, \ldots a_n)$, è *continua* in questo punto quando per ogni numero positivo ed arbitrariamente piccolo σ si può trovare un intorno di $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ tale che la differenza fra i valori $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di u in ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dello stesso intorno e il valore $u(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sia numericamente inferiore a σ.

In altri termini, diremo che la funzione u è continua nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dove ha un valore finito $u(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, quando per ogni numero positivo e arbitrariamente piccolo σ si possono trovare dei numeri differenti da zero e positivi $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ tali che per tutti i punti $(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n)$ che cadono entro C e pei quali $h_1, h_2, \ldots, h_n$ non superano in valore assoluto $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ (per modo cioè che sia $h_1^2 \leq h_1'^2$, $h_2^2 \leq h_2'^2, \ldots, h_n^2 \leq h_n'^2$) la differenza $u(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - u(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sia sempre numericamente inferiore a σ; e più generalmente ancora, senza escludere cioè neppure il caso in cui la funzione u nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sia *infinita,* si potrà dire anche che una funzione u è continua in un punto $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ di C quando il limite per $h_1=0$, $h_2=0, \ldots, h_n=0$ dei valori $u(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n)$ di u nei punti $(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n)$ è il valore *finito o infinito* di $u(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di u nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; e ciò qualunque sia il modo di convergere a zero delle quantità $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

E si può notare che anche per le funzioni a n variabili potrebbero farsi osservazioni simili a quelle che si fecero ai § 117 e seg. per le funzioni di due variabili soltanto; come si può notare infine che il caso delle funzioni complesse di un numero qualunque di variabili reali si può ridurre sempre a quello delle funzioni reali delle stesse variabili considerando separatamente nelle funzioni date la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, ecc.

X.

Derivate parziali dei varii ordini

124. — Premesse le nozioni generali che precedono intorno alle funzioni di più variabili, prendiamo a considerare una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali x e y, per le quali, a meno che non si avverta espressamente il contrario, ammetteremo sempre, come già si disse, che corrispondano alle coordinate cartesiane dei punti di un'area piana finita o infinita C.

Dando a una delle variabili, per es. y, uno qualunque dei valori speciali y_0 che essa può prendere nel campo C, la nostra funzione $f(x, y)$ diverrà una funzione $f(x, y_0)$ della sola variabile x, i cui valori saranno quelli della funzione data nei punti della porzione di retta $y = y_0$ che cade nel campo C; e allora, come funzione della sola x, questa funzione $f(x, y_0)$ per $x = x_0$ potrà ammettere una derivata che sarà il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x_0 + \varepsilon, y_0) - f(x_0, y_0)}{\varepsilon}$ per $\varepsilon = \pm 0$; e agli estremi di C sulla retta $y = y_0$ questa derivata sarà soltanto una derivata a destra o a sinistra.

Similmente dando alla variabile x un valore speciale x_0, la $f(x, y)$ si ridurrà ad una funzione $f(x_0, y)$ della sola variabile y, i cui valori saranno quelli della funzione data stessa sulle porzioni della retta $x = x_0$ che cadono nel campo C, e come funzione della sola y per $y = y_0$ potrà ammettere una derivata che sarà il limite di $\frac{f(x_0, y_0 + \varepsilon') - f(x_0, y_0)}{\varepsilon'}$ per $\varepsilon' = \pm 0$, talchè si può dire che nel punto (x_0, y_0) la funzione data $f(x, y)$ potrà avere ad un tempo le due derivate $\left[\frac{df(x, y_0)}{dx}\right]_{x_0}$, $\left[\frac{df(x_0, y)}{dy}\right]_{y_0}$.

Queste derivate sono quelle che si chiamano *derivate parziali del prim'ordine* di $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0); per modo che per una funzione di due

variabili $f(x, y)$ le derivate parziali rapporto a x e y in un punto (x_0, y_0), quando esistono, corrispondono a derivate ordinarie che si ottengono attribuendo prima ad una delle variabili y o x il valore speciale y_0 o x_0 che essa deve avere, e poi derivando rispetto all'altra variabile x o y, pel valore corrispondente x_0 o y_0, senza minimamente occuparsi in questa derivazione dell'altra variabile y o x alla quale deve già essere stato attribuito un valore particolare y_0 o x_0.

Queste derivate parziali s'indicano ora comunemente coi soliti simboli di derivazione $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, tenendo mente però ai valori particolari x_0 e y_0 che devono avere x e y nella derivazione, e avendo cura di usare per queste derivazioni la lettera ∂ invece dell'altra d che si usa soltanto per le derivate ordinarie delle funzioni di una sola variabile per distinguerle da queste, per quanto talvolta avvenga che le derivate parziali si riducano a derivate ordinarie; e ben s'intende che quando $f(x, y)$ sia finita e continua entro C, o almeno sia tale rispetto a x e a y separatamente sulle varie rette $y = \text{cost.}$, o $x = \text{cost.}$, le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ potranno esistere per ogni punto di C e costituire due nuove funzioni di x e di y nello stesso campo C che potremo indicare con $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$.

In questo caso poi, o almeno nel caso in cui queste derivate esistono pei punti di un intorno di (x_0, y_0) (il punto (x_0, y_0) incluso), esse potranno dare luogo a nuove derivate parziali pel punto stesso (x_0, y_0), le quali si diranno perciò *derivate parziali del second'ordine* e potranno essere tutte le quattro seguenti $\left[\frac{df_1(x, y_0)}{dx}\right]_{x_0}$, $\left[\frac{df_1(x_0, y)}{dy}\right]_{y_0}$, $\left[\frac{df_2(x, y_0)}{dx}\right]_{x_0}$, $\left[\frac{df_2(x_0, y)}{dy}\right]_{y_0}$; e queste s'indicano ora comunemente colle notazioni $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, tenendo però conto dei valori particolari x_0 e y_0 che devono avere x ed y nelle derivazioni; e da noi, in ciò che segue, saranno indicate talvolta anche con le notazioni $f_{1.1}(x_0, y_0)$, $f_{1.2}(x_0, y_0)$, $f_{2.1}(x_0, y_0)$, $f_{2.2}(x_0, y_0)$.

Alla lor volta poi queste derivate parziali di second'ordine potranno esistere in ogni punto di C, o almeno nei punti di un intorno di (x_0, y_0), e potranno dar luogo a *derivate parziali del terz'ordine* che si otterranno al modo stesso, e s'indicheranno con $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \ldots$; e queste derivate del terz'ordine potranno poi dar luogo ad altre derivate parziali del quart'ordine, e così di seguito, per modo da avere in certi casi anche derivate parziali di ordini grandissimi.

125. — Similmente, se invece di una funzione $f(x,y)$ di due variabili, si ha una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di n variabili, allora, in ogni punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ del campo nel quale questa funzione viene considerata, si potranno avere n derivate parziali del prim'ordine che s'indicheranno con $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e che si otterranno; la prima $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ attribuendo a $x_2, x_3, \ldots, x_n$ i valori speciali $a_2, a_3, \ldots, a_n$ e poi derivando rispetto ad x_1, per $x_1 = a_1$, la funzione della sola variabile x_1 cui allora verrà a ridursi la funzione data; la seconda $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ si otterrà attribuendo a $x_1, x_3, \ldots, x_n$ i valori $a_1, a_3, \ldots, a_n$ e poi derivando rispetto a x_2, per $x_2 = a_2$, la nuova funzione della sola variabile $x_2, \ldots$; non occupandoci così volta per volta, nelle derivazioni, altro che della variabile rapporto a cui si deve derivare, e le altre dovendo aver già ricevuto i valori particolari corrispondenti al punto che si considera.

Ciascuna poi di queste derivate parziali potrà alla sua volta dar luogo a n derivate parziali del second'ordine, ciascuna delle quali poi potrà essa pure dar luogo a n derivate parziali del terz'ordine, ecc.....

126. — Per semplicità limitiamo ora le nostre considerazioni alle derivate parziali delle funzioni di due variabili, avvertendo però che ciò che si dice per queste funzioni può dirsi ancora per quelle di un numero maggiore di variabili.

E pel calcolo delle derivate parziali delle funzioni $f(x,y)$ facciamo esplicitamente notare che, quando si cerca per es. la derivata parziale rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) o $f_1(x_0, y_0)$, si deve propriamente, secondo la definizione, attribuire prima ad y il valore speciale y_0 e derivare poi rispetto a x nel punto x_0 la funzione ottenuta $f(x, y_0)$; nè, pel calcolo della stessa derivata, può dirsi che sia sempre permesso di eseguire invece la derivazione di $f(x,y)$ rapporto a x per $x = x_0$ lasciando indeterminata la y e considerandola solamente come una costante nella derivazione per farla poi uguale a y_0 dopo eseguiti i calcoli; come neppure può dirsi che sia sempre permesso di lasciare dapprima indeterminate tutte e due le variabili x e y, per farle poi uguali a x_0 e y_0 soltanto dopo avere effettuata la derivazione parziale rispetto ad x.

Si potrà invero evidentemente affermare che i resultati che si otterranno col fare nel primo dei detti casi $y = y_0$, e nel secondo $x = x_0$ e $y = y_0$ soltanto dopo eseguiti i calcoli, saranno gli stessi di quelli che si otterrebbero applicando rigorosamente la definizione data sopra, quando i ragionamenti che in tal modo si faranno per giungere alla determinazione della derivata saranno applicabili a qualunque punto (x_0, y) o (x, y) del campo C che si

considera, e in particolare anche al punto (x_0, y_0) senza veruna differenza o modificazione di sorta; ma non si potrà già esser sicuri che i detti resultati siano gli stessi quando gli indicati ragionamenti per applicarsi al punto (x_0, y_0) debbano subire alcune modificazioni, o quando, essendo incerti su ciò che avviene per questo punto, si sappia soltanto che essi sussistono per punti vicini quanto si vuole a questo, senza sapere al tempo stesso che la derivata nel punto $(x_0\, y_0)$ può considerarsi come il limite dei valori che essa ha nei punti circostanti, ecc.

E difatti, per quanto il caso che più comunemente si presenta nelle applicazioni sia quello appunto in cui le derivate parziali della funzione data $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0) si ottengono lasciando x e y indeterminate, e facendo poi $x = x_0$ e $y = y_0$ nella derivata generale trovata, ecc.... esistono però effettivamente anche dei casi in cui questo processo non è affatto applicabile pel calcolo delle derivate di certe funzioni in alcuni punti del campo in cui si considerano, ma conviene per questi punti applicare il metodo che risulta dalla definizione e non altro; talchè l'osservazione che qui abbiamo fatta non può dirsi fuor di luogo, e ad essa converrà sempre tener mente onde esser sicuri di non commettere errori.

Un esempio del resto di funzioni per le quali il calcolo delle derivate parziali in un dato punto non può farsi determinando prima il valore delle derivate generali, e poi particolarizzando in queste le variabili x e y, si ha dalla funzione che per $x = 0$, $y = 0$ è zero, e per gli altri valori di x e y è data dalla formola $f(x,y) = x - 2y \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$.

Per questa funzione infatti, per tutti i sistemi di valori di x e y pei quali y non è zero, e anche per quelli pei quali y è zero ma x è diverso da zero, la derivata rapporto ad x è data sempre dall'espressione $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, e pel punto $x = 0$, $y = 0$ questa derivata, calcolata secondo la definizione, è 1; mentre quando si volesse dedurre questa derivata nel punto $x = 0$ $y = 0$ dall'espressione generale $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ col farvi nel medesimo tempo $x = 0$, $y = 0$, si troverebbe un'espressione senza alcun significato $\frac{0}{0}$; e quando si volesse calcolare questa derivata stessa determinandola dapprima nel punto $(0, y)$, cioè lasciando dapprima la y indeterminata, e poi dopo la derivazione facendo $y = 0$, si troverebbe -1 invece di 1 pel valore della stessa derivata nel punto $x = 0$, $y = 0$.

127 (*). — Ciò premesso, passiamo a dimostrare il teorema conosciuto sotto il nome di *teorema della inversione delle derivazioni*, quello cioè pel quale, sotto certe condizioni, che sono però pochissimo restrittive, si può affermare che le due derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sono uguali fra loro.

Riducendo al minor numero, e in una delle loro forme più semplici, le condizioni sotto le quali si può essere certi della sua validità *per un punto dato* (x_0, y_0), questo teorema può essere enunciato nel modo seguente, cioè:

Se per una funzione $f(x, y)$ sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.° che nei punti (x, y) di un intorno c del punto dato (x_0, y_0) le derivate parziali del prim' ordine $\frac{\partial f}{\partial x}$, e $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano sempre determinate e finite;

2.° che nei punti dello stesso intorno c esista almeno una delle due derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, per es. la prima $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, e nei punti fuori di (x_0, y_0) questa derivata sia sempre determinata e finita, mentre nel punto (x_0, y_0) può anche essere infinita, essendo però continua in questo punto, per modo cioè che in esso il valore (finito o infinito) della stessa derivata sia il limite dei valori che essa ha negli altri punti (**);

(*) Il testo in questo paragrafo diversifica *per la forma* da quello delle lezioni autografate del 1877.

Ciò è stato fatto per rendere più chiara la esposizione.

(**) Invece di questa condizione rispetto alla derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nel punto (x_0, y_0) e negli altri punti dell' intorno c, basterebbe porre l' altra che essa esistesse nei punti (x, y) fuori del punto (x_0, y_0) e avesse un limite determinato (finito o infinito e determinato di segno) avvicinandosi indefinitamente a questo punto; ma questa condizione porta l' altra della esistenza e della continuità della stessa derivata nel punto (x_0, y_0), e ad essa equivale completamente.

Si può notare infatti in modo generale che il teorema del § 44 [pag. 55 e seg.] per le derivate delle funzioni di una sola variabile si estende anche alle derivate parziali delle funzioni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di più variabili giacchè se, essendo incerti pel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si sa per es. che con h_1 diverso da zero, ma comunque piccolo in valore assoluto, nei punti $(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ pei quali x_1 è compreso fra a_1 e $a_1 + h_1$ (a_1 escl.) la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ha una derivata parziale rispetto a x_1 determinata e finita $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ o $f_1(x_1, a_2, a_3 \ldots, a_n)$, e questa derivata per $x_1 = a_1$, a destra o a sinistra secondo che h_1 è positivo o negativo, ha un limite determinato finito o infinito, allora si può sempre asserire che la derivata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ rispetto ad x_1 a destra o a sinistra esisterà anche pel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, e il suo valore sarà uguale al detto limite, giacchè evidentemente la funzione

3.° che la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ nei punti pei quali $y = y_0$ sia continua almeno come funzione della variabile y;

allora anche l' altra derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ esisterà nel punto (x_0, y_0), e il suo valore sarà appunto quello di $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nello stesso punto, cioè si avrà

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Si suppone naturalmente che, se il punto (x_0, y_0) fosse un punto del contorno del campo C nel quale la funzione data $f(x, y)$ viene considerata, si possano condurre per quel punto due rette parallele agli assi x e y che, almeno in piccolissime parti nelle vicinanze del punto stesso (x_0, y_0) si trovino tutte contenute in C, onde in questo punto sia possibile di fare il calcolo di tutte e due le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ almeno da una parte.

La dimostrazione di questo teorema importantissimo, salvo leggiere modificazioni, è stata data da *Schwarz* nel modo seguente.

Indichiamo per abbreviare con $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_{1.2}(x, y)$, e $f_{2.1}(x, y)$ respettivamente le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pei punti (x, y) pei quali esse esistono; e formiamo l' intorno c del punto dato (x_0, y_0), supponendolo, per semplicità, di forma rettangolare e coi lati paralleli agli assi x e y, e talmente piccolo che in esso siano verificate le condizioni poste sopra per le tre derivate $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ e $f_{1.2}(x, y)$.

$f(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ può considerarsi come una funzione della sola variabile x_1 fra a_1 e $a_1 + h_1$; e questa derivata sarà continua nello stesso punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ almeno rispetto alla variabile x_1 a destra o a sinistra, ecc.

E così, in particolare se per un punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nel quale l'esistenza della derivata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ è incerta si può formare un suo intorno al quale appartengono i punti $(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ quando x_1 è compreso fra a_1 e $a_1 + h_1$, per modo cioè che non sia fuori di luogo il cercare se esista la derivata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ anche nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; e se si troverà che nei punti dello stesso intorno *diversi dal punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ questa derivata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ è determinata, e per $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, …, $x_n = a_n$ ha un limite determinato (finito o infinito), si potrà dire che questa derivata esiste anche nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a destra o a sinistra o come derivata ordinaria secondochè x_1 va verso a_1 a destra o a sinistra o dalle due parti, e il valore di questa derivata è appunto uguale a questo limite, per modo che la derivata stessa è anche continua nel punto considerato $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Introducendo poi una quantità *ausiliaria* k diversa da zero, e arbitrariamente piccola in valore assoluto, prendiamo a considerare la differenza $f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$ pei valori di x presi nelle vicinanze di x_0 e per modo che i punti (x, y_0) e (x, y_0+k) vengano a cadere nell'intorno c.

Questa differenza sarà una funzione $\varphi(x)$ di x, e sarà precisamente l'accrescimento che riceve la funzione data $f(x, y)$ quando dal punto (x, y_0) della retta orizzontale che passa pel punto dato (x_0, y_0), muovendosi sulla verticale, si va ad un altro punto (x, y_0+k); e noi considereremo ora l'accrescimento $\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$ di questi accrescimenti quando si passa dalla verticale condotta pel punto dato (x_0, y_0) a quella condotta pel punto (x_0+h, y_0) sempre entro l'intorno c; cioè considereremo la espressione

$$(1) \quad \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)\}-\{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)\};$$

e tenendo conto delle condizioni poste per la nostra funzione $f(x, y)$ e per le sue derivate pei punti dell'intorno c, faremo due trasformazioni diverse di questa espressione le quali condurranno a stabilire una relazione che darà subito luogo al teorema enunciato.

Incominciamo perciò dall'osservare che, essendo $\varphi(x)$ la differenza $f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$, a causa della condizione che abbiamo posta per $\frac{\partial f}{\partial x}$ entro c, questa funzione $\varphi(x)$ pei punti x fra x_0 e x_0+h avrà una derivata rispetto ad x determinata e finita, e quindi pel teorema degli accrescimenti finiti (§ 42 2.° [pag. 51]) si avrà $\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0+\theta h)$, con θ compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), ciò che permette intanto di dire che con una prima trasformazione la espressione precedente (1) può porsi sotto la forma $h\{f_1(x_0+\theta h, y_0+k) - f_1(x_0+\theta h, y_0)\}$.

D'altra parte, osservando che per ogni valore *speciale* $\bar{x}$ di x che si consideri fra x_0 e x_0+h la differenza $f(\bar{x}, y_0+k) - f(\bar{x}, y_0)$ è l'accrescimento che riceve la funzione $f(\bar{x}, y)$ di y quando y passa da y_0 a y_0+k, basterà tenere conto della prima condizione posta per $\frac{\partial f}{\partial y}$ e del solito teorema degli accrescimenti finiti per concludere subito che la differenza stessa può scriversi sotto la forma $kf_2(\bar{x}, y_0+\bar{\theta}k)$, dove $\bar{\theta}$ è un altro numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); e quindi tutta la espressione precedente (1) potrà porsi sotto la forma $k\{f_2(x_0+h, y_0+\theta_h k) - f_2(x_0, y_0+\theta_0 k)\}$, o anche sotto l'altra $k\{f_2(x_0+h, y_0) - f_2(x_0, y_0)\} + k\varepsilon_h - k\varepsilon_0$, essendo θ_h e θ_0 due nuovi numeri compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e essendo infine ε_h e ε_0 le differenze $f_2(x_0+h, y_0+\theta_h k) - f_2(x_0+h, y_0)$, e $f_2(x_0, y_0+\theta_0 k) - f_2(x_0, y_0)$ respettivamente.

Trovate così queste due forme diverse della espressione (1), basta uguagliarle fra loro per potere scrivere subito la relazione

$$(2) \quad \frac{f_2(x_0+h, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{h} + \frac{\varepsilon_h}{h} - \frac{\varepsilon_0}{h} = \frac{f_1(x_0+\theta h, y_0+k) - f_1(x_0+\theta h, y_0)}{k},$$

nella quale il primo termine del primo membro è appunto il rapporto incrementale che bisogna studiare per giungere alle nostre conclusioni intorno alla esistenza e al valore della derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ o $f_{2,1}(x_0, y_0)$ nel punto (x_0, y_0); e ora noi giungeremo subito a queste conclusioni valendoci di questa relazione, e tenendo conto anche delle condizioni seconda e terza poste nell'enunciato del teorema.

Si osservi perciò infatti che il secondo membro di questa relazione (2) può considerarsi come il rapporto incrementale relativo ad y della funzione $f_1(x, y)$ pel punto y_0 quando in essa ad x s'intende attribuito il valore speciale $x_0+\theta h$, riducendola così ad una funzione della sola y; e quindi per la seconda delle condizioni poste nell'enunciato intorno alla esistenza della derivata $f_{1,2}(x, y)$ nei punti di c e pel solito teorema degli accrescimenti finiti, lo stesso secondo membro sarà uguale a $f_{12}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 k)$, essendo θ_1 un altro numero compreso fra 0 e 1; dunque evidentemente, tenendo conto ora anche della circostanza che $f_{12}(x, y)$ si suppone continua nel punto (x_0, y_0), si può intanto affermare che per h e k numericamente inferiori a quantità sufficientemente piccole h_0 e k_0 il secondo membro della relazione (2) sarà sempre prossimo quanto si vuole a $f_{12}(x_0, y_0)$ quando $f_{12}(x_0, y_0)$ è finito, e sarà sempre del segno di questa derivata e numericamente maggiore di qualunque quantità data se questa derivata $f_{12}(x_0, y_0)$ sarà infinita.

D'altra parte, a causa della terza delle condizioni poste nell'enunciato, è certo che *per ogni valore* di h diverso da zero e numericamente inferiore ad h_0 che si consideri, per quanto piccolo esso sia, si potrà sempre trovare un valore diverso da zero e numericamente inferiore a k_0 della quantità ausiliaria k tale che ambedue le quantità ε_h e ε_0 che figurano nel primo membro della nostra relazione (2) siano arbitrariamente piccole in confronto al valore stesso di h, per modo che ambedue i rapporti $\frac{\varepsilon_h}{h}$ e $\frac{\varepsilon_0}{h}$ siano numericamente inferiori a qualunque quantità data; e per ogni valore di h che si consideri si potrà prendere per k il valore corrispondente così determinato, che varierà con h; quindi evidentemente pei valori di h numericamente inferiori ad h_0 il rapporto incrementale che figura nel primo membro della stessa relazione (2) sarà sempre vicino quanto si vuole al valore di $f_{12}(x_0, y_0)$ quando questo valore è finito, e sarà sempre numericamente superiore a qualunque numero dato e del segno di $f_{12}(x_0, y_0)$ quando $f_{12}(x_0, y_0)$ è infinito; e così il teorema resta completamente dimostrato (*).

(*) Si può osservare che se per fare la seconda trasformazione della espressione (1), anzichè valersi della formola degli accrescimenti finiti per l'intervallo $(y_0, y_0 + k)$ relativo alla variabile y, ci fossimo valsi dell'altra formola corrispondente (cioè di quella ricordata nella nota a pag. 51 [form. (β)]) relativa al caso in cui della derivata prima rispetto ad y di $f(x, y)$ si ammette l'esistenza solo pel valore iniziale y_0 di y, e quando x è preso nelle vicinanze di x_0, cioè pei punti dell'intorno di c che giacciono sulla retta orizzontale condotta pel punto (x_0, y_0), allora saremmo giunti ancora alla formola (2), e in questa le ε_h e ε_0, pure cambiando di significato, avrebbero conservato ancora la particolarità di potersi sempre (col prendere k sufficientemente piccolo per ogni valore di h) ridurre arbitrariamente piccole in confronto ad ogni valore di h numericamente inferiore ad h_0 che venisse considerato; talchè il teorema sarebbe rimasto dimostrato ugualmente.

Segue da ciò che le condizioni poste nell'enunciato del teorema possono rendersi anche assai meno restrittive, poichè *per la derivata* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *invece di richiederne l'esistenza in tutto l'intorno c basta richiederla pei punti di un piccolo tratto della retta orizzontale condotta pel punto* (x_0, y_0), *cioè pei punti* (x, y_0) *che cadono entro c; e non vi è affatto bisogno di porre la terza condizione,* e così il teorema si presenta sotto una forma più semplice e più generale.

D'altra parte, come si osserva anche nel testo al principio del nuovo paragrafo, non si potrebbe mai fare a meno di richiedere, come qui si fa, la esistenza della derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ nei detti punti (x, y_0), dovendo questa servire al calcolo della derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nel punto (x_0, y_0), per modo che questa può dirsi una condizione necessaria di per sè, e indipendente dalla validità del teorema d'inversione delle derivazioni.

E per questo, e perchè, come pure si osserva nel testo sempre al principio del nuovo paragrafo, l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$ nei punti dell'intorno c è resa necessaria dalla ipotesi che si fa della esistenza di $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nei punti di questo intorno, si può ora evidentemente affermare che *per la validità del teorema d'inversione delle derivazioni,* oltre alle condizioni che devono naturalmente essere soddisfatte di per sè per la esistenza di $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nei punti dell'intorno c di (x_0, y_0) e per non escludere la possibilità della esistenza di $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in questo punto (x_0, y_0), *basta porre la condizione della continuità di* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *nello stesso punto* (x_0, y_0), venendo quindi ad essere questa la sola condizione veramente inerente alla validità del teorema, il quale si presenta così sotto una semplicità e generalità grandissime.

Tutte queste considerazioni poi si potranno anche applicare al caso in cui le derivate rispetto ad x o ad y nel punto dato (x_0, y_0) si intendano prese soltanto da una parte, come dovremmo fare necessariamente quando fra le linee che limitano l'intorno c vi fossero piccoli tratti delle rette orizzontali o verticali condotte pel punto stesso (x_0, y_0).

È poi altresì degno di nota, sempre anche pel caso in cui per $\frac{\partial f}{\partial y}$ si pongano soltanto le condizioni meno restrittive ora indicate, che la formola (2) con considerazioni simili a quelle fatte sopra permette anche di dire che se in qualche modo si conosce l'esistenza *sì dell'una che dell'altra* delle due derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nel punto (x_0, y_0), e si sa inoltre che una di queste derivate, per es. la prima $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, esiste anche negli altri punti dell'intorno c, ma non si può assicurare nulla intorno alla continuità di questa derivata nello stesso punto (x_0, y_0), allora non potremo concludere che nel punto medesimo (x_0, y_0) le due derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ delle quali ora si ammette nota la esistenza debbano essere uguali fra loro, ma potremo però sempre affermare che esisteranno infiniti punti nell'intorno c del punto dato (x_0, y_0) nei quali la derivata stessa $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ avrà valori tali che abbiano un limite per $x = x_0$ e $y = y_0$, e questo limite sia ancora il valore di $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nel punto dato (x_0, y_0).

128. A proposito delle condizioni poste nell'enunciato del teorema precedente si può notare che in sostanza *per la dimostrazione data* basterebbe porre soltanto la seconda e la terza condizione, perchè onde possa esistere la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in tutto l'intorno c bisogna necessariamente che esista sempre nello stesso intorno la derivata prima $\frac{\partial f}{\partial x}$; e onde non resti esclusa la possibilità della esistenza dell'altra derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nel punto (x_0, y_0) bisogna che esistano le derivate $\frac{\partial f}{\partial y}$ almeno nei punti (x, y_0) di un piccolo tratto della retta orizzontale che passa pel punto (x_0, y_0), mentre perchè sia soddisfatta la terza condizione dell'enunciato occorre di necessità che queste derivate $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistano anche in piccoli intorni di ciascuna delle verticali che possono condursi nell'intorno c; talchè enunciando soltanto la seconda e la terza condizione si ha quanto basta per potere fare la dimostrazione del teorema.

E quanto poi alla condizione della continuità di $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nel punto (x_0, y_0) si può osservare che quando questa condizione manchi, o ad essa non siano sostituite altre condizioni speciali, il teorema può effettivamente risultare in difetto.

Si ha di ciò un esempio nella funzione $f(x, y)$ che per $x = 0, y = 0$

è zero, e per gli altri sistemi di valori di x e y è data dalla formola $f(x\,,y) = y^2 \text{arc tang} \frac{x}{y} - x^2 \text{arc tang} \frac{y}{x}$, nella quale s'intende che gli archi tangenti siano sempre presi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Per questa funzione infatti si trova che per ogni punto $(x\,,y)$ a distanza finita le due derivate prime sono date dalle formole $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x \text{arc tang} \frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y \text{arc tang} \frac{x}{y}$ nelle quali s'intende che per $x=0\,,\,y=0$ i secondi termini dei secondi membri siano zero; quindi pei punti $(x\,,y)$ a distanza finita queste derivate sono finite e continue, e in ognuno di questi punti che non sia l'origine $x=0\,,\,y=0$ ci danno $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$, mentre per l'origine $x=0\,,\,y=0$ ci danno invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$, talchè si vede che in questo punto $x=0\,,\,y=0$ non sarà $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; e questo dipende appunto dalla circostanza che nello stesso punto $x=0\,,\,y=0$ manca la continuità nelle due derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, inquantochè evidentemente non può dirsi che il valore comune $\frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ che si ha per queste derivate nei punti $(x\,,y)$ diversi dall'origine, abbia un limite determinato per $x=0\,,\,y=0$ (*).

129. — Quando per una funzione $f(x\,,y)$ data in un campo C si considerano anche le derivate parziali di un certo ordine, il caso che più comunemente si presenta nelle applicazioni ordinarie è quello in cui le derivate medesime, oltre ad essere determinate, sono anche finite e continue in ogni punto del campo C, o almeno sono finite e continue per tutto, fuorchè in un numero finito di punti staccati, o nei punti di un numero finito di linee.

Questi ultimi casi però, per le funzioni che si presentano nelle applicazioni, si riducono ordinariamente al primo, perchè pel solito si possono escludere con piccoli spazî superficiali questi punti o queste linee, e il campo C si riduce allora a un numero finito di campi C′ nei quali le derivate suindicate sono sempre finite e continue; talchè il più spesso basterà occuparsi del primo caso soltanto.

(*) Avuto riguardo però a quanto si disse in fine della nota precedente il valore -1 di $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nel punto $x=0$ $y=0$ deve essere il limite di infiniti dei valori che si hanno per $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ fuori dello stesso punto $x=0\,,\,y=0$; e difatti esso è per es. il limite dei valori che si hanno sull'asse della x o sulla curva parabolica $x^2 = 2py$ con p costante, ecc.

Riferendoci dunque, ora e in seguito, almeno finchè non si avverta espressamente il contrario, alle funzioni $f(x\,,y)$ per le quali le derivate dei vari ordini che si considerano sono finite e continue nel campo dato, pel teorema della inversione delle derivazioni noi possiamo ora affermare che, quando per una tal funzione $f(x\,,y)$ si considerino le derivate parziali di prim'ordine e quelle del second'ordine, l'inversione delle derivate sarà sempre possibile, e quindi non si avranno altro che due derivate parziali del primo ordine $\frac{\partial f}{\partial x}\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}$, e tre derivate (distinte) del secondo ordine $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,,\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ invece di quattro come si sarebbe potuto credere dapprima.

Similmente, osservando che anche le derivate di ordine superiore al secondo non sono altro che derivate di second'ordine di funzioni che sono esse pure derivate di quelle date, si intende subito che (nel caso sempre in cui le derivate che si considerano sono finite e continue) per la solita funzione $f(x\,,y)$ si avranno soltanto quattro derivate distinte del terz'ordine, che si potranno indicare con $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,,\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,,\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\,,\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$, e in generale si avranno soltanto $m+1$ derivate distinte dell'ordine m che si potranno indicare con $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\,,\,\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}\,,\,\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2} \partial y^2}\,,\ldots,\,\frac{\partial^m f}{\partial y^m}$.

130. — Venendo poi al caso generale delle funzioni $f(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$ di n variabili in un campo C, si osserverà che quando si abbia da eseguire per es. una prima derivazione rispetto ad x_1 ed una seconda rispetto ad x_2 in un punto $(a_1\,,a_2\,,\ldots,a_n)$, basterà considerare la funzione data come una funzione speciale $f(x_1\,,x_2\,,a_3 \ldots a_n)$ delle due variabili $x_1\,,x_2$ (che si ottiene dalla primitiva attribuendo alle variabili $x_3\,,\ldots,x_n$ i valori costanti $a_3\,,\ldots,a_n$ e lasciando variabili x_1, e x_2), e poi applicare a questa funzione a due variabili $x_1\,,x_2$ le derivazioni rispetto a x_1, e a x_2 respettivamente; e così s'intenderà subito che anche per le funzioni $f(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$ sarà sempre applicabile la inversione della derivazione quando siano soddisfatte certe condizioni analoghe a quelle del § 127 [pag. 164 e seg.], e in particolare quando le derivate che si considerano siano sempre finite e continue nel campo stesso.

E dietro ciò, riferendoci ancora al caso in cui le varie derivate che si considerano sono finite e continue nel campo dato, noi possiamo evidentemente affermare che quando per una funzione $f(x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$ di n variabili si considerino le derivate parziali di prim'ordine e quelle del secondo, allora insieme alle n derivate parziali di prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ avremo soltanto un numero $\frac{n(n+1)}{2}$ di derivate parziali di second'ordine $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}, \ldots \frac{\partial^2 f}{\partial x_s^2} \ldots$ che sarà uguale a quello delle combinazioni con ripetizione di n cose due a due; se si considereranno anche le derivate del terz'ordine avremo soltanto un numero $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ di queste derivate $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^3 f}{\partial x_r^2 \partial x_s}, \ldots, \frac{\partial^3 f}{\partial x_s^3}, \ldots, \frac{\partial^3 f}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t}, \ldots$ che sarà uguale a quello delle combinazioni con ripetizione di n cose tre a tre, ... e in generale considerando anche le derivate dell'ordine m, avremo soltanto un numero $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$ di queste derivate $\frac{\partial^m f}{\partial x_1^m}, \ldots, \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$ (con $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n = m$), ..., che sarà uguale a quello delle combinazioni con ripetizione di n cose prese m a m.

XI.

Derivazione delle funzioni composte

131. — Nelle lezioni precedenti noi abbiamo dato vari teoremi coll'applicazione dei quali, in moltissimi casi, si possono determinare facilmente le derivate delle funzioni di una sola variabile indipendente quando queste derivate esistono.

Ora però che abbiamo acquistata la nozione delle derivate parziali delle funzioni di più variabili, possiamo dare anche un altro teorema che comprende come casi particolari molti di quelli che già abbiamo dato, e mediante il quale si può dimostrare la esistenza, e al tempo stesso trovare la derivata di quelle funzioni z di una sola variabile indipendente che diconsi *composte* per mezzo di altre funzioni per la ragione che esse si determinano per mezzo di due o più funzioni $u, v, w, \ldots$ della variabile indipendente x, e figurano come funzioni $f(u, v, \ldots)$ di due o più variabili $u, v, w, \ldots$ le quali sono alla lor volta funzioni dirette della sola variabile indipendente x, o funzioni di funzioni di questa variabile.

Volendo esporre ora anche questo teorema sulle funzioni composte, incominceremo dal considerare il caso in cui la funzione composta data z dipende da due sole funzioni, come sarebbe, per es., quando si avesse $z = u^v$ con $u = 1 + \operatorname{sen} x$, $v = e^x$, ecc.

Indichiamo perciò con $z = z(u, v)$ la funzione data che noi riteniamo composta con le due quantità u e v, le quali alla lor volta sono funzioni della variabile indipendente x in tutto un intervallo (α, β) nel quale si trova il punto $x = a$; e supponiamo che u e v in questo punto a abbiano valori finiti e determinati u_a e v_a, e ammettano una derivata determinata e finita.

Inoltre supponiamo che considerando u e v come due variabili indipendenti, la funzione z pei valori di u e v in un intorno anche piccolissimo c

del punto (u_a, v_a) possa riguardarsi come una funzione finita di u e v, e che nel punto (u_a, v_a), oltre essere continua, ha anche le due derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial u} = z_1(u_a, v_a)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = z_2(u_a, v_a)$ determinate e finite, e supponiamo infine, per semplicità, sebbene non sarebbe assolutamente necessario, che anche negli altri punti dell'intorno c una almeno delle due derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ o $z_1(u, v)$, $z_2(u, v)$, per es. la prima, sia sempre determinata, e nel punto (u_a, v_a) sia anche continua.

Con queste condizioni sarà facile vedere che pel punto $x=a$ la funzione z ammette una derivata determinata e finita anche rispetto ad x e questa derivata è data dalla formola

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} = z_1(u_a, v_a)\frac{du}{dx} + z_2(u_a, v_a)\frac{dv}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

che è quella appunto che costituisce il teorema sulla *derivazione delle funzioni composte per mezzo di due funzioni* u e v.

La dimostrazione di questa formola si fa nel modo seguente.

Diamo un accrescimento piccolissimo Δx alla variabile x per $x=a$, e indichiamo con $\Delta u, \Delta v, \Delta z$ gli accrescimenti corrispondenti di u, v, z; avremo

$$(2) \qquad \Delta z = z(u_a + \Delta u, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a),$$

e, a causa della continuità di u e v per $x=a$, potremo sempre supporre Δx talmente piccolo in valore assoluto che per lo stesso valore di Δx e al suo ulteriore impiccolirsi i valori corrispondenti di Δu e Δv restino sempre inferiori a quel numero che più ci piace, in modo da far sì che i punti $(u_a + \Delta u, v_a + \Delta v)$, $(u_a, v_a + \Delta v)$ vengano sempre a cadere nell'intorno c che abbiamo indicato sopra.

Ora, ammesso dapprima che, almeno a partire da un certo punto, coll'impiccolire ognor più di Δx ($\Delta x = 0$ escl.) le quantità Δu e Δv, pur tendendo a zero, non divengano mai zero, potremo scrivere intanto

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{z(u_a + \Delta u, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a + \Delta v)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{z(u_a, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

e siccome nei vari punti dell'intorno c di (u_a, v_a) la funzione z ammette sempre la derivata parziale rispetto ad u, considerando la funzione $z(u, v_a + \Delta v)$

come una funzione della sola u per tutti i valori di u fra u_a e $u_a + \Delta u$, pel teorema degli accrescimenti finiti avremo anche

$$\frac{z(u_a + \Delta u, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a + \Delta v)}{\Delta u} = z_1(u_a + \theta \Delta u, v_a + \Delta v) = z_1(u_a, v_a) + \sigma,$$

dove θ è un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e σ, per le ipotesi fatte sopra intorno alla continuità di $z_1(u, v)$ nel punto (u_a, v_a), può rendersi piccolo quanto si vuole; talchè, sostituendo ora nel valore di $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, coll'osservare anche che $\frac{z(u_a, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a)}{\Delta v}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ possono supporsi già vicini quanto si vuole ai loro limiti respettivi $z_2(u_a, v_a)$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, troveremo subito che

$$(3) \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x} = z_1(u_a, v_a)\frac{du}{dx} + z_2(u_a, v_a)\frac{dv}{dx} + \sigma_1,$$

con σ_1 arbitrariamente piccolo in valore assoluto; e perciò al limite si avrà appunto la formola (1), la quale resta così dimostrata pel caso che col tendere di Δx a zero, nessuna delle due quantità Δu e Δv passi continuamente per zero.

Supponendo ora invece che col tendere di Δx a zero la quantità Δu passi continuamente per zero senza che lo stesso avvenga di Δv; si osserverà prima che in tale caso anche il rapporto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ passerà continuamente per zero, e in conseguenza il suo limite $\frac{du}{dx}$ (che per ipotesi dev'essere determinato) dovrà necessariamente essere uguale a zero, per modo che per dimostrare che la (1) sussiste ancora basterà dimostrare che si ha $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx}$.

Considerando ora separatamente i valori di Δx pei quali Δu non è zero, e quelli pei quali $\Delta u = 0$, si osserverà che pei primi di questi valori sussistono ancora i ragionamenti fatti pel caso precedente, e in particolare sussiste la formola $\frac{\Delta z}{\Delta x} = z_2(u_a, v_a)\frac{dv}{dx} + \sigma_1$, che si ottiene dalla (3) facendovi $\frac{du}{dx} = 0$; e così si vedrà subito intanto che, quando Δx tende a zero passando soltanto pei valori pei quali Δu non è zero si avrà $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = z_2(u_a, v_a)\frac{dv}{dx}$.

Facendo poi passare il Δx soltanto pei valori pei quali $\Delta u = 0$, si osserverà che allora la formola (2) si viene a ridurre all'altra

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{z(u_a, v_a + \Delta v) - z(u_a, v_a)}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta x} = z_2(u_a, v_a) \frac{dv}{dx} + \sigma_2,$$

con σ_2 arbitrariamente piccolo, e si trarrà di qui che anche per questi valori di Δx si ha $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = z_2(u_a, v_a) \frac{dv}{dx}$; e con ciò si può ora evidentemente affermare che anche nel caso attuale la derivata rispetto ad x della funzione z per $x = a$ è determinata e finita e il suo valore è appunto $z_2(u_a, v_a) \frac{dv}{dx}$, o $\frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$; talchè può ancora considerarsi come data dalla formola (1).

Con ragionamenti del tutto simili si trova che la formola (1) sussiste anche nel caso in cui Δv (invece che Δu), o Δu e Δv insieme passano continuamente per zero col tendere a zero di Δx; talchè la formola della derivazione delle funzioni di una variabile che sono composte per mezzo di due altre funzioni, può ora considerarsi come dimostrata in generale per tutti i punti a pei quali si trovano soddisfatte le condizioni che abbiamo posto in principio.

132. — Merita poi di essere notato che quando non si sapesse nulla intorno alla esistenza di un valore determinato e finito per $z_2(u_a, v_a)$ o per $\frac{\partial z}{\partial v}$ nel punto (u_a, v_a), ferme stanti però tutte le altre ipotesi, e si sapesse invece che $\frac{dz}{dx}$ nel punto $x = a$, che ora si supporrà interno all'intervallo dato, è determinata e finita, e $\frac{dv}{dx}$, oltre esser determinata e finita, fosse anche differente da zero, allora i ragionamenti precedenti completati coll'osservare che col tendere di Δx a zero per valori positivi e negativi il Δv prenderà qualunque valore fra $-\varepsilon$ e ε, essendo ε un numero piccolissimo, porterebbero a concludere che anche $z_2(u_a, v_a)$ è determinata e finita, e la formola (1) continuerebbe a sussistere, e potremmo anche valercene per la determinazione di $z_2(u_a, v_a)$.

Similmente se non si sapesse nulla intorno alla esistenza e alla natura della derivata di una delle due funzioni u e v, per es. di v, per $x = a$, ferme stanti però tutte le altre ipotesi, e si sapesse invece che $\frac{dz}{dx}$ per $x = a$ è determinata e finita, e $z_2(u_a, v_a)$ è differente da zero, allora i ragionamenti precedenti porterebbero a concludere che anche $\frac{dv}{dx}$ è determinata e finita per $x = a$ e il suo valore potrebbe aversi dalla formola (1) stessa.

Queste osservazioni estendono quelle che facemmo al § 37 [pag. 42 e seg.] pel caso delle funzioni di funzioni, e ci torneranno utili fra poco.

133. — Ciò che abbiamo detto pel caso in cui z è una funzione di x composta con le due funzioni u e v si estende facilmente al caso in cui il numero delle funzioni che compongono z è maggiore di due.

Supponiamo infatti che sia per es. $z = z(u, v, w)$, essendo u, v, w funzioni della variabile x in tutto un intervallo nel quale si trova il punto $x = a$ dove si vuole calcolare la derivata di z, e ammettiamo che in questo punto le u, v, w, oltre avere valori finiti u_a, v_a, w_a, ammettano ciascuna anche una derivata determinata e finita.

Inoltre ammettiamo che, considerando u, v, w come se fossero tre variabili indipendenti, in un piccolo intorno c di (u_a, v_a, w_a) la z possa riguardarsi come una funzione di u, v, w che nel punto (u_a, v_a, w_a) ha le tre derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial u} = z_1(u_a, v_a, w_a)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = z_2(u_a, v_a, w_a)$, $\frac{\partial z}{\partial w} = z_3(u_a, v_a, w_a)$ determinate e finite; e, per quanto potesse anche bastare di porre condizioni meno restrittive, ammettiamo senz'altro, per semplicità, che anche negli altri punti dell'intorno c due almeno delle tre derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$, o $z_1(u, v, w)$, $z_2(u, v, w)$, $z_3(u, v, w)$, per es. le due prime, siano sempre determinate e finite, e nel punto (u_a, v_a, w_a) siano anche continue.

Sarà facile vedere che, sotto queste ipotesi, per $x = a$ anche la funzione z ammetterà una derivata rispetto ad x determinata e finita, e questa derivata sarà data dalla formola

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}, \tag{4}$$

che è analoga alla formola (1), e si dimostra nello stesso modo di questa.

Diamo infatti alla variabile z per $x = a$ un accrescimento piccolissimo Δx, e indichiamo con Δu, Δv, Δw, Δz gli accrescimenti corrispondenti di u, v, w, z; avremo

$$\Delta z = z(u_a + \Delta u,\ v_a + \Delta v,\ w_a + \Delta w) - z(u_a, v_a, w_a),$$

e quindi, supponendo (come può sempre farsi) che col successivo impiccolire di Δx in valore assoluto i valori corrispondenti di $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ finiscano per essere sempre talmente piccoli che i punti $(u_a + \Delta u, v_a + \Delta v, w_a + \Delta w)$, $(u_a, v_a + \Delta v, w_a + \Delta w)$ e $(u_a, v_a, w_a + \Delta w)$ vengano a cadere in quell'intorno c di (u_a, v_a, w_a) che noi abbiamo indicato sopra, e supponendo inoltre dapprima che le quantità $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, pur tendendo a zero, coll'impiccolire ognor più di Δx finiscano per restare sempre diverse da zero, si potrà anche scrivere

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{z(u_a+\Delta u, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w)}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{z(u_a, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a, w_a+\Delta w)}{\Delta v}\,\frac{\Delta v}{\Delta x} +$$
$$+ \frac{z(u_a, v_a, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a, w_a)}{\Delta w}\,\frac{\Delta w}{\Delta x}\,.$$

Ma, per le ipotesi che abbiamo poste sopra, si ha

$$\frac{z(u_a+\Delta u, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w)}{\Delta u} =$$
$$= z_1(u_a+\theta\Delta u, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w) = z_1(u_a, v_a, w_a) + \sigma_1\,,$$
$$\frac{z(u_a, v_a+\Delta v, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a, w_a+\Delta w)}{\Delta v} =$$
$$= z_2(u_a, v_a+\theta_1\Delta v, w_a+\Delta w) = z_2(u_a, v_a, w_a) + \sigma_2\,,$$
$$\frac{z(u_a, v_a, w_a+\Delta w) - z(u_a, v_a, w_a)}{\Delta w} = z_3(u_a, v_a, w_a) + \sigma_3\,,$$

con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ quantità arbitrariamente piccole, e θ e θ_1 quantità comprese fra 0 e 1 (0 e 1 escl.); quindi sostituendo nella formola precedente, coll'osservare anche che $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta w}{\Delta x}$ possono supporsi vicine quanto si vuole ai loro limiti respettivi $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}$, si avrà

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = z_1(u_a, v_a, w_a)\frac{du}{dx} + z_2(u_a, v_a, w_a)\frac{dv}{dx} + z_3(u_a, v_a, w_a)\frac{dw}{dx} + \sigma\,,$$

essendo σ una nuova quantità pure arbitrariamente piccola; e ora passando al limite per $\Delta x = 0$ si troverà subito la formola (4), che resterà così dimostrata pel caso in cui $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ col tendere di Δx a zero non passino continuamente per lo zero.

Il caso poi in cui col tendere di Δx a zero, una o più delle quantità $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ passino continuamente per zero, si tratta con ragionamenti del tutto simili a quelli che facemmo pel caso che z fosse composta con due sole funzioni u e v; talchè la formola (4) può ora senz'altro ritenersi come dimostrata in tutti i casi in cui sono soddisfatte le condizioni poste sopra.

In modo simile si troverebbe che, se n è finito, e $z = z(u_1, u_2, \dots, u_n)$, essendo $u_1, u_2, \dots, u_n$ funzioni della x, per ogni valore a di x pel quale siano soddisfatte condizioni del tutto analoghe a quelle che abbiamo poste pel caso di due o di tre funzioni u, v, w si ha sempre

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dx}\,. \tag{5}$$

E s'intende che non si esclude mai che, delle funzioni u, v, w, o $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ che compongono z, tutte o alcune possano anche essere eguali fra loro, per modo per es. da avere $z = (u_1 + u_2)^{u_3} + (u_1 - u_2)^{u_4}$, con $u_1 = x$, $u_2 = \operatorname{sen} x$, $u_3 = u_4 = x^2$.

134. — I resultati precedenti danno alcune condizioni generali che devono però riguardarsi soltanto come condizioni sufficienti perchè *per un punto speciale* $x = a$ esista la derivata delle funzioni composte, e sia applicabile la formola di derivazione corrispondente.

Nei casi ordinari poi, supposto ad es. che x possa prendere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, o quelli compresi in un dato intervallo (α, β), le funzioni che si considerano $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono finite e continue insieme alle loro derivate per tutti i valori di x, tranne tutt'al più per alcuni valori isolati il cui numero è sempre finito in ogni intervallo finito; e al tempo stesso la funzione $z(u_1, u_2, \dots, u_n)$, considerata come una funzione di n variabili $u_1, u_2, \dots, u_n$ in un dato campo nel quale vengono a cadere i valori di $u_1, u_2, \dots, u_n$ corrispondenti ai valori di x che si considerano, è anche essa finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in tutti i punti di questo campo, tranne tutt'al più in alcuni punti isolati, ecc.; talchè nei casi che ordinariamente si presentano nelle applicazioni, la derivata delle funzioni composte esiste, e la formola di derivazione corrispondente è applicabile per tutti i valori di x che si considerano, tranne tutt'al più per alcuni valori isolati.

E quando poi avvenga effettivamente che per alcuni valori speciali isolati $a_1, a_2, \dots$ di x la formola di derivazione delle funzioni composte non sia applicabile, o almeno si sia incerti, mentre però si sappia che essa è ancora applicabile pei valori di x vicini quanto si vuole a quei valori speciali, allora se si troverà che i valori che colla stessa formola si hanno per $\frac{dz}{dx}$ nei punti x diversi da $a_1, a_2, \dots$, col tendere di x ad $a_1, a_2, \dots$ a destra o a sinistra, hanno limiti determinati (finiti o infiniti), potremo prendere questi limiti come valori della derivata di z a destra o a sinistra dei punti $a_1, a_2, \dots$;

giacchè è certo (§ 44 [pag. 55 e seg.]) che quando la derivata di una funzione $f(x)$ di una variabile x col tendere di x ad a, per es. a destra, ha un limite determinato, questo limite è precisamente il valore della derivata di $f(x)$ nel punto a a destra.

Queste stesse osservazioni poi possono applicarsi anche nel caso in cui, secondo quanto si disse per le funzioni $z=z(u,v)$ nel § 132 e che può pure riportarsi alle funzioni attuali $z=z(u_1, u_2, \dots, u_n)$, ci si voglia servire della formola di derivazione delle funzioni composte $z(u_1, u_2, \dots, u_n)$ per determinare i valori delle derivate di una delle funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ in uno o più punti di un dato intervallo, pei quali le condizioni poste nello stesso § 132 non risultino tutte soddisfatte, ecc.

135. — Diamo ora qualche applicazione della formola di derivazione delle funzioni composte, servendocene per trovare la derivata di alcune funzioni che siano già date come funzioni composte, o che possano ridursi tali con convenienti trasformazioni.

1.° Avendo una somma algebrica $u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n$, o il prodotto $u_1 u_2 \dots u_n$ di un numero finito di funzioni, e considerando questa somma o questo prodotto come una funzione composta per mezzo di $u_1, u_2, \dots u_n$, si ritrovano subito evidentemente per mezzo della formola (5) i teoremi che già conosciamo sulle derivate delle somme algebriche e dei prodotti.

Similmente si ritrovano subito i teoremi generali sulla derivazione dei quozienti, delle potenze, ecc...., quando però si ammetta di saper già trovare le derivate rispetto ad x delle funzioni semplici $\frac{1}{x}$, x^m, ...

2.° Avendo poi, per esempio, la funzione $z=(u+u^2)^v$, ove $u=\cos x$, $v=\operatorname{sen}^2 x$, allora si trova subito che finchè x è compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (gli estremi esclusi) la derivata di z esiste, e si ha

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=-\ v(u+u^2)^{v-1}(1+2u)\operatorname{sen}x+2(u+u^2)^v\log(u+u^2)\operatorname{sen}x\cos x.$$

Per vedere poi se esistono le derivate di z anche nei puuti $x=-\frac{\pi}{2}$, e $x=\frac{\pi}{2}$, a destra e a sinistra rispettivamente, ricordando quanto si disse nel paragrafo precedente, potrà bastare di cercare i limiti dei due termini dell'ultimo membro di questa formola.

Ora, se si osserva che il fattore $(u+u^2)^{v-1}$ può porsi sotto la forma $(u+u^2)^{-u^2}$ che per $u=0$ si presenta sotto la forma 0^0, si vede subito (per mezzo dei processi che già conosciamo) che il limite del primo termine del-

l'ultimo membro della formola precedente per $x=\frac{\pi}{2}$ è -1 e per $x=-\frac{\pi}{2}$ è $+1$; quindi, osservando anche che l'ultimo termine della stessa formola per $x=\pm\frac{\pi}{2}$ o $u=0$ ha per limite zero giacchè esso può porsi sotto la forma $2(u+u^2)^v u\,\{\log u+\log(1+u)\}\operatorname{sen}x$, si conclude subito ora che la funzione data per $x=\frac{\pi}{2}$ a sinistra ha per derivata -1, e per $=-\frac{\pi}{2}$ a destra ha per derivata $+1$.

3.° Avendo la funzione $z=u^{\log v}$, con $u=1+x$, $v=2+x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, si vede subito che per tutti i valori finiti di x superiori a -1 si potrà scrivere $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$; e quindi, osservando che per x diverso da zero la derivata di v è $2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, mentre per $x=0$ è zero, si troverà subito che per x diverso da zero e finito e superiore a -1 si ha

$$\frac{dz}{dx}=\log v\, u^{\log v-1}+u^{\log v}\log u\left(2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),$$

mentre per $x=0$ si ha invece $\frac{dz}{dx}=\log v\,.\,u^{\log v-1}=\log 2$.

Per $x=-1$ poi, valendosi ancora della osservazione fatta in fine del paragrafo precedente, si trova che la derivata di z a destra è $+\infty$.

4.° Quando si abbia da calcolare la derivata di una funzione già espressa per x ma in modo assai complicato, giova spesso di spezzare, per così dire, la difficoltà in altre più semplici, col riportare la funzione al caso delle funzioni composte; ponendo cioè uguali a $u, v, w, \dots$ alcune delle espressioni in x che in essa figurano, e poi applicando la formola di derivazione delle funzioni composte.

Così per es. quando si abbia la funzione $z=x^x$, potremo ridurla alla funzione composta $z=u^v$ col porre $u=x$, $v=x$, dopo di che, applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, per x diverso da zero e positivo troveremo subito

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}+u^v\log u=x\,x^{x-1}+x^x\log x=x^x(1+\log x).$$

E se, onde avere la continuità nella nostra funzione $z=x^x$ anche nel punto $x=0$ a destra, intendiamo che il suo valore in questo punto sia il limite di x^x per $x=+0$, cioè l'unità positiva, allora osservando che il limite del valore precedente di $\frac{dz}{dx}$ per $x=+0$ è $-\infty$, si concluderà anche che la derivata a destra nel punto $x=0$ per la funzione stessa x^x è l'infinito negativo.

Similmente per $z=x^{x^x}$ potremmo ridurre z funzione composta scrivendola sotto la forma $z=u^{v^w}$, con $u=x$, $v=x$, $w=x$, e poi applicare la formola di derivazione composta corrispondente; però sarà più semplice di porre invece $z=u^v$ con $u=x$, $v=x^x$, perchè allora per x diverso da zero e positivo si troverà subito

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=v\,u^{v-1}+u^v\log u\,\frac{dx^x}{dx}=u^v\left\{\frac{v}{u}+\log u\,x^x(1+\log x)\right\}=$$

$$=x^{x^x}\left\{\frac{x^x}{x}+x^x(1+\log x)\log x\right\}.$$

E volendo per esempio la derivata di $z=(x^2+\cos^2 x)^{(1+x)^2}$, potremo porre $u=x$, $v=\cos x$, $(1+x)^2=w$, con che si avrà $z=(u^2+v^2)^w$; e si troverà quindi per ogni valore finito di x

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}=2w(u^2+v^2)^{w-1}u-2w(u^2+v^2)^{w-1}v\,\mathrm{sen}\,x+$$

$$+2(u^2+v^2)^w\log(u^2+v^2)(1+x),$$

ovvero

$$\frac{dz}{dx}=2(u^2+v^2)^w\left\{\frac{w(u-v\,\mathrm{sen}\,x)}{u^2+v^2}+(1+x)\log(u^2+v^2)\right\}=$$

$$=2(1+x)(x^2+\cos^2 x)^{(1+x)^2}\left\{\frac{(1+x)(x-\mathrm{sen}\,x\cos x)}{x^2+\cos^2 x}+\log(x^2+\cos^2 x)\right\}.$$

XII.

Differenziali dei varii ordini delle funzioni di più variabili

136. — Sia $z=z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ una funzione di n variabili indipendenti data in un campo C; e in un punto $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ di questo campo le sue n derivate parziali del prim'ordine $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}$ siano determinate e finite.

La definizione che abbiamo data di queste derivate parziali porta che esse si determinino in ogni punto (dove esistono) riducendo z funzione della sola variabile corrispondente coll'attribuire alle altre variabili i valori particolari che esse devono avere nel punto che si considera, e poi eseguendo la derivazione relativa per quel valore speciale della variabile che essa deve avere nello stesso punto; ma se, come ordinariamente accade nelle applicazioni, non si tratta di un punto $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ pel quale debbono farsi considerazioni speciali (dipendenti dalle particolarità della funzione nel punto stesso e nei suoi intorni), per modo cioè che il calcolo delle derivate possa farsi senza che vi sia bisogno di specializzare avanti il punto $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ cui esse si riferiscono, allora (§ 126 pag. 162) noi potremo anche determinare queste derivate occupandoci della sola variabile rapporto a cui sono prese, e riguardando le altre come quantità costanti alle quali, come a quella rapporto a cui si deriva, potranno poi, dopo la derivazione, essere attribuiti quei valori speciali che corrispondono al punto che si considera.

Indicando ora con $dx_1, dx_2,\dots,dx_n$ i differenziali delle singole variabili (i quali saranno del tutto indipendenti fra loro al pari delle variabili stesse $x_1,x_2,\dots,x_n$), i prodotti $\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1, \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2,\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$ rappresenteranno quei differenziali speciali $d_{x_1}z, d_{x_2}z,\dots,d_{x_n}z$ relativi al punto $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ che si ottengono considerando z respettivamente come funzione della sola variabile x_1, della sola variabile $x_2, \ldots$, della sola variabile x_n; ed è perciò che questi differenziali vengono detti *differenziali parziali rapporto alle variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *respettivamente.*

Le somme poi $\frac{\partial z}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial z}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial z}{\partial x_t} dx_t + \ldots$ di alcuni di questi differenziali parziali, *ma non di tutti,* costituiranno altrettanti differenziali *parziali* presi in uno stesso tempo rispetto alle variabili $x_r, x_s, x_t, \ldots$; mentre la somma $\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$ di *tutti* i differenziali parziali di z, nei quali s'intenda che $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ siano quantità infinitesime tutte differenti da zero e non legate fra loro da alcuna relazione, costituisce il *differenziale totale* di z che s'indica con dz, per modo che si ha

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n .$$

Questa formola poi usandola, come si fa, anche quando alcune delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non mutano, oltre al differenziale totale di z, comprenderà anche i differenziali parziali di z, e potrà servire a rappresentarli, poichè, per ottenerli tutti, basterà farvi uguali a zero alcune delle quantità $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Si può poi aggiungere che con queste definizioni le derivate parziali di z rispetto ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vengono ad essere uguali anche ai quozienti che si ottengono dividendo pei differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ delle variabili corrispondenti i differenziali parziali $d_{x_1} z, d_{x_2} z, \ldots, d_{x_n} z$ della funzione presi rapporto a queste variabili; come giova altresì notare esplicitamente che i simboli $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ adottati per rappresentare queste derivate, oltre a potersi riguardare semplicemente come simboli, possono anche riguardarsi come quozienti di differenziali, ma soltanto nel senso che ora abbiamo indicato, e non possono già (fuorchè in casi specialissimi) riguardarsi come quozienti che si ottengono dividendo pel differenziale della variabile corrispondente la quantità conosciuta sotto il nome di differenziale totale della funzione z, ecc....

137. — Le considerazioni che conducono ad introdurre nel Calcolo i differenziali delle funzioni di più variabili indipendenti sono quelle stesse che condussero già ad introdurre il differenziale delle funzioni di una sola variabile; giacchè anche nel caso delle funzioni $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di più variabili, ogni differenziale parziale o totale dz di z, esprime sempre, all'infuori di quantità infinitesime di ordine superiore al primo rispetto agli accresci-

menti delle variabili, l'accrescimento Δz che riceve z quando si danno alle variabili gli accrescimenti particolari che figurano nel valore di dz; e ciò tutte le volte che nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le varie derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ sono determinate e finite, e almeno $n-1$ di queste derivate, per es. le prime, esistono anche nei punti di un certo intorno comunque piccolo di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e in questo punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono anche continue.

Indichiamo infatti con $h_1, h_2, \ldots, h_n$ gli n accrescimenti da darsi alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$; e ammettendo, per fissare le idee, che il punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che si considera sia interno al campo C nel quale è data la funzione, supponiamo $h_1, h_2, \ldots, h_n$ talmente piccoli in valore assoluto che pei valori che essi hanno e al loro successivo impiccolirsi, fino a divenire zero tutti o alcuni di essi, il punto corrispondente $(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ venga sempre a cadere nell'intorno c di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nel quale si verificano le condizioni poste sopra rispetto alle derivate parziali di z.

L'accrescimento totale Δz di z corrispondente agli accrescimenti $h_1, h_2, \ldots, h_n$ di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ potrà porsi sotto la forma

$$\begin{aligned} \Delta z = {} & z(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) - z(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) + \\ & + z(x_1, x_2+h_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) - z(x_1, x_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) + \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n+h_n) - z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n); \end{aligned}$$

e, per le ipotesi fatte su $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ e su $h_1, h_2, \ldots, h_n$, si avrà

$$\begin{aligned} & z(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - z(x_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) = \\ & \qquad = h_1 z_1(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) = h_1 \{ z_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha_1 \}, \\ & z(x_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - z(x_1, x_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) = \\ & \qquad = h_2 z_2(x_1, x_2+\theta_2 h_2, x_3+h_3, \ldots, x_n+h_n) = h_2 \{ z_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha_2 \}, \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & z(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n+h_n) - z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_n \{ z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha_n \}, \end{aligned}$$

dove le quantità $\theta_1, \theta_2, \ldots$, sono numeri compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), $z_1, z_2, \ldots, z_n$ indicano le derivate $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, e delle quantità $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ le prime $n-1$ tendono a zero colle $h_1, h_2 \ldots h_n$ per la ipotesi fatta intorno ai valori e alla continuità di $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e l'ultima tende anch'essa a zero con h_n semplicemente per la ipotesi che abbiamo fatta della esistenza di un valore determinato e finito per $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ nel punto $(x_1, x_2, \dots . x_n)$; e queste varranno evidentemente anche quando uno o più degli accrescimenti $h_1, h_2, \dots, h_n$ siano zero.

Sostituendo dunque nel valore precedente di Δz, e invece delle notazioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ valendosi delle altre solite $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ relative al punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si troverà

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} h_n + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n ;$$

talchè se si osserva che le $h_1, h_2, \dots, h_n$ quando tendono a zero vengono ad essere precisamente i differenziali delle funzioni particolari $z = x_1$, $z = x_2$, $\dots$, $z = x_n$, cioè delle stesse variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, e possono quindi indicarsi con $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, quand'anche per generalità si ammetta che alcune di queste quantità, ma non tutte, possano essere zero in modo assoluto, si troverà sempre $\Delta z = dz + \Omega$, con $\Omega = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \dots + \alpha_n dx_n$, e perciò sarà $\Delta z = dz$, all'infuori di infinitesimi di ordine superiore al primo, come appunto volevamo dimostrare.

E si può notare che da un leggero esame della dimostrazione che abbiamo fatta apparisce anche che con questa dimostrazione la proprietà ora esposta dei differenziali non esige propriamente la continuità assoluta di $n-1$ derivate parziali nel punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ma basterebbe per es. che $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ fosse continua quando si considera come funzione di tutte le n variabili, $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ fosse continua quando si considera soltanto come funzione delle $n-1$ variabili $x_2, x_3, \dots, x_n$, $\frac{\partial z}{\partial x_3}$ fosse continua quando si considera come funzione delle $n-2$ variabili $x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, e $\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}$ fosse continua quando si considera come funzione delle due variabili x_{n-1}, x_n.

Del resto poi queste condizioni potrebbero rendersi anche meno restrittive; ma pei casi ordinari bastano sempre quelle che abbiamo poste.

138. — Qui pure faremo osservare che quando, indipendentemente dalle considerazioni precedenti, con un processo qualunque si giunge a trovare che,

per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ numericamente inferiori a dati limiti, l'accrescimento totale Δz corrispondente a questi accrescimenti $h_1, h_2, \dots, h_n$ di $x_1, x_2, \dots, x_n$ si sviluppa sotto la forma

$$(1) \quad \Delta z = z(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - z(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n + \\ + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n ,$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_n$ sono quantità finite indipendenti da $h_1, h_2, \dots, h_n$, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono quantità che hanno per limite zero per $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $\dots, h_n = 0$, allora si può sempre asserire che si avrà $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, $p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}$, $p_3 = \frac{\partial z}{\partial x_3}$, $\dots$, $p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$, e che in conseguenza la parte $p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n$ di Δz diverrà il differenziale dz di z quando si facciano $h_1 = dx_1, h_2 = dx_2, \dots, h_n = dx_n$, e ciò perchè evidentemente dalla formola precedente si hanno in particolare le altre

$$\frac{z(x_1 + h_1, x_2, \dots, x_n) - z(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_1} = p_1 + \bar{\alpha}_1 ,$$

$$\frac{z(x_1, x_2 + h_2, x_3, \dots, x_n) - z(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_2} = p_2 + \bar{\alpha}_2 ,$$

. . . .

$$\frac{z(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - z(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_n} = p_n + \bar{\alpha}_n ,$$

dove le $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n$ indicano le quantità alle quali si riducono le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ quando si fanno zero tutte le $h_1, h_2, \dots, h_n$ all'infuori respettivamente di h_1, di $h_2, \dots$, e di h_n; e queste passando al limite per $h_1 = 0$, $h_2 = 0, \dots, h_n = 0$, ci danno appunto $\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \dots\dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$.

E dietro questa osservazione si potrebbe anche evidentemente cambiare la definizione dei differenziali di z nel caso, s'intende, che Δz si possa sviluppare sotto la forma (1) per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ inferiori a dati limiti; inquantochè si potrebbe dire, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, che il differenziale dz è la parte di primo ordine rispetto agli accrescimenti $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ nell'indicato sviluppo dell'accrescimento $z(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \dots, x_n+dx_n) - z(x_1, x_2, \dots x_n)$ corrispondente agli accrescimenti stessi $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, ecc...

139. — Premesse queste nozioni sui differenziali del prim'ordine, aggiungiamo ora che se z è una funzione $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di n variabili (che sup-

porremo ancora del tutto *indipendenti*) in un dato campo, e se in un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ anche le sue derivate parziali del second'ordine $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$ sono determinate e finite, allora, oltre al suo differenziale del prim'ordine

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial z}{\partial x_3} dx_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

si considera anche il differenziale di dz che si ottiene dalla espressione precedente di dz colle regole ordinarie, considerando come costanti $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, ecc..., e questo nuovo differenziale si chiama *differenziale secondo* o *di second'ordine* di z e s'indica con d^2z; e quando sono determinate e finite anche le derivate parziali del terz'ordine, da d^2z si deduce colle stesse regole un nuovo differenziale che si chiama *differenziale terzo* o *del terz'ordine* di z e s'indica con d^3z, e così successivamente.

140. — Questi differenziali degli ordini superiori si calcolano successivamente, come già abbiamo detto; ma è facile vedere che si ha anche una regola pratica generale che serve per determinare uno qualunque di essi, senza bisogno di passare pei precedenti, nell'ipotesi però che le derivate parziali di ordine eguale a quello del differenziale che si vuole determinare, oltre essere determinate e finite, siano tali che ad esse siano applicabili tutte le possibili inversioni di derivazione; il che, per quanto dicemmo al § 129 [pag. 170 e seg.], avverrà sempre in particolare quando le varie derivate che si considerano sono finite e continue, come accade ordinariamente nelle applicazioni.

Per trovare questa regola, osserviamo prima che, sotto le fatte ipotesi, mentre pel differenziale primo si ha

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

per quello di second'ordine si ha invece

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} dx_n^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \ldots + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n + \ldots,$$

donde si riscontra intanto che praticamente il differenziale secondo di z può ottenersi riguardando nella espressione $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^2$

i simboli $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ come veri quozienti ed eseguendo il quadrato della espressione stessa colle regole ordinarie, e dopo avendo cura di scrivere come indici di derivazione gli esponenti che verrebbero ai numeratori ∂z; per modo cioè che, quando si tenga questa convenzione, come si può scrivere

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^1,$$

si potrà anche scrivere simbolicamente

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^2.$$

Ora è facile vedere che la legge che noi troviamo così per la formazione dei differenziali dz e d^2z può considerarsi come generale, cioè si può sempre scrivere simbolicamente

$$(2) \qquad d^mz = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^m.$$

Supponiamo infatti che questa formola simbolica, che già abbiamo riscontrata vera fino ai differenziali del second'ordine, sia stata riscontrata vera anche fino ai differenziali dell'ordine $m-1$ inclusive, per modo che si sappia già che si ha simbolicamente

$$d^{m-1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^{m-1},$$

e cerchiamo di far vedere che allora essa sussiste anche pei differenziali dell'ordine m, con che evidentemente essa resterà dimostrata in generale.

Supponiamo perciò che

$$(3) \qquad A \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n},$$

dove A è un coefficiente numerico, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = m - 1$, e alcuni dei numeri $p_1, p_2, \ldots, p_n$ possono anch'essere zero, sia uno qualunque dei termini del differenziale $d^{m-1}z$ che, per quanto supponiamo, provengono anche dallo sviluppo di $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^{m-1}$ nel modo ora indicato.

Nella nuova differenziazione questo termine (3) darà luogo agli n termini che compongono la somma seguente

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\ \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{p_1+1}\,\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}\, dx_1^{p_1+1}\, dx_2^{p_2}\, dx_3^{p_3}\ldots dx_n^{p_n} +\\
&+\mathrm{A}\ \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2+1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\, dx_1^{p_1}\, dx_2^{p_2+1}\, dx_3^{p_3}\ldots dx_n^{p_n} +\\
&+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+\mathrm{A}\ \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_{n-1}^{p_{n-1}}\,\partial x_n^{p_n+1}}\, dx_1^{p_1}\, dx_2^{p_2}\ldots dx_{n-1}^{p_{n-1}}\, dx_n^{p_n+1}
\end{aligned}
$$

che sono gli stessi n termini che si ottengono dal termine corrispondente $\mathrm{A}\ \dfrac{\partial z^{p_1+p_2+,\ldots,+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}}\, dx_1^{p_1}\, dx_2^{p_2}\ldots\ldots dx_n^{p_n}$ dello sviluppo della potenza $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\, dx_1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots . + \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\, d\, x_n\right)^{m-1}$ quando si moltiplica pel polinomio $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\, dx_1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\, dx_n$, e poi si applica la regola data di ridurre ad indice di derivazione l'esponente $p_1+p_2+\ldots . + p_n+1$ o m di ∂z; dunque, poichè ciò che abbiamo detto pel termine (3) vale per qualunque termine di $d^{m-1}z$, s'intende subito che se si ha $d^{m-1}z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\, dx_1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots . + \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\, dx_n\right)^{m-1}$, sarà anche $d^m z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\, dx_1 + \dfrac{\partial z}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots . \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\, dx_n\right)^{m}$, talchè, per quanto abbiamo detto sopra, la formola (2) può riguardarsi ora come dimostrata in generale.

E si può quindi notare che i termini della espressione di $d^m z$ sono tutti della forma $\mathrm{M}\, dx_1^{q_1}\, dx_2^{q_2}\ldots dx_n^{q_n}$, dove $q_1+q_2+\ldots+q_n = m$, e il fattore che moltiplica $dx_1^{q_1}\, dx_2^{q_2}\ldots dx_n^{q_n}$, all'infuori del coefficiente polinomiale corrispondente, è sempre $\dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^{q_1}\,\partial x_2^{q_2}\ldots\partial x_n^{q_n}}$, per modo cioè che si può sempre scrivere

$$d^m z = \Sigma\, \mathrm{A}_{q_1, q_2, \ldots, q_n}\, \frac{\partial^m z}{\partial x_1^{q_1}\,\partial x_2^{q_2}\ldots\partial x_n^{q_n}}\, dx_1^{q_1}\, dx_2^{q_2}\ldots dx_n^{q_n}\ ;$$

ove $\mathrm{A}_{q_1, q_2, \ldots, q_n}$ è il coefficiente polinomiale nello sviluppo simbolico corrispondente.

141. — Da quanto ora abbiamo dimostrato segue dunque in particolare che nel caso delle funzioni $z = z\,(x\,, y)$ di due variabili indipendenti x ed

y si avrà simbolicamente

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\,,\ d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)^2, \ldots, d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)^m ,$$

e quindi sviluppando colla formola del binomio si può scrivere subito ora

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\,,\\
d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2\,,\\
d^3 z &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\, dx^3 + 3\, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\, dx^2\, dy + 3\, \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\, dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\, dy^3,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

nell'ipotesi, s' intende, che le varie derivate che figurano nei differenziali che si considerano siano determinate e finite e siano possibili le varie inversioni di derivazione, ecc.

142. — E sempre pel caso delle funzioni $z(x\,, y)$ di due variabili indipendenti aggiungiamo che *Monge* introdusse le notazioni $p\,, q\,, r\,, s\,, t$ per rappresentare le derivate parziali $\dfrac{\partial z}{\partial x}\,, \dfrac{\partial z}{\partial y}\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ rispettivamente, e queste notazioni trovansi ora comunemente adottate.

Con queste notazioni poi avendosi $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p\,, \dfrac{\partial z}{\partial y} = q\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s\,,$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = s\,, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t\,,$ si può scrivere

$$dz = p\,dx + q\,dy\,,\quad \text{e}\quad d^2 z = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2\ ;$$

e siccome si ha anche $\dfrac{\partial p}{\partial x} = r\,, \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x} = s\,, \dfrac{\partial q}{\partial y} = t\,,$ e $dp = r\,dx + s\,dy\,,$ $dq = s\,dx + t\,dy\,,$ $d^2 z = (r\,dx + s\,dy)dx + (s\,dx + t\,dy)dy$, così insieme a $dz = p\,dx + q\,dy$, sarà anche $d^2 z = dp\,dx + dq\,dy$, come si ottiene subito anche immediatamente differenziando l'espressione $p\,dx + q\,dy$ di dz.

E ciò sempre, ben inteso, nel caso che le derivate prime e seconde di z siano determinate e finite, e oltre a questo si abbia $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, ecc.

143. — Tutto questo pel caso delle funzioni di più quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che sono esse stesse le variabili indipendenti.

Prima però di lasciare questo soggetto dei differenziali, vogliamo dimostrare anche una proprietà importantissima dei differenziali primi delle funzioni *composte con funzioni* di una o più variabili indipendenti.

Ammettiamo perciò dapprima che, essendo ancora $z = z(x_1, x_2, \dots x_n)$, le n quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$, invece di esser variabili indipendenti, siano tutte funzioni di una sola variabile indipendente x, per modo che z sia una funzione di x composta con più funzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ di questa variabile; e ammettiamo inoltre che pel valore a di x che si considera siano soddisfatte le condizioni generali che si dettero perchè a z sia applicabile per $x = a$ la formola di derivazione delle funzioni composte [§ 133 pag. 177 e seg.].

Allora si avrà, come sappiamo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx},$$

e quindi, moltiplicando per dx, e osservando che $\frac{dz}{dx}dx, \frac{dx_1}{dx}dx, \frac{dx_2}{dx}dx, .., \frac{dx_n}{dx}dx$ sono ora i differenziali di $z, x_1, x_2, \dots, x_n$ respettivamente perchè queste quantità sono funzioni della sola x, si troverà

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$

precisamente come se z, invece di essere una funzione composta di x per mezzo delle funzioni $x_1, x_2, \dots x_n$, fosse una funzione di n variabili indipendenti, e dz fosse il suo differenziale totale preso in quest'ultima ipotesi.

Più generalmente poi se, essendo $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, le $x_1, x_2, \dots, x_n$ non sono tutte variabili indipendenti, e tutte o alcune di esse sono funzioni di altre variabili che sono le vere variabili indipendenti, per modo però che siano soddisfatte le condizioni che si dettero perchè rispetto a ciascuna delle vere variabili indipendenti sia applicabile la formola di derivazione delle funzioni composte, allora è facile vedere che il differenziale totale di z esisterà, e sarà ancora dato dalla formola

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \dots\dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,$$

precisamente come se $x_1, x_2, x_3, .., x_n$ fossero tutte variabili indipendenti.

Siano infatti $\xi_1, \xi_2, .., \xi_m$ le vere variabili indipendenti, delle quali alcune, o anche tutte se $m < n$, possono anche non differire da altrettante delle $x_1, x_2, \dots, x_n$; e siano

(4) $x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, $\dots$, $x_n = x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$

le relazioni che legano le $x_1, x_2, \dots, x_n$ alle variabili $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, rispetto alle quali relazioni si deve osservare che (potendo darsi il caso che alcune o tutte le $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ siano altrettante delle $x_1, x_2, \dots x_n$) una o più delle funzioni che compariscono nei secondi membri potranno talvolta ridursi uguali ad una sola variabile, per modo da avere per es. $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, ecc.

Ciò posto, osserviamo che a causa delle formole (4) z verrà ad essere una funzione composta anche rispetto a ciascuna variabile $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ separatamente; e poichè, per le ipotesi fatte, a questa funzione z sarà applicabile il metodo di derivazione delle funzioni composte rispetto a ciascuna variabile $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$, avremo le formole

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_1},\\
\frac{\partial z}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial z}{\partial \xi_m} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_m},
\end{aligned}$$

le quali, oltre a servirci a determinare il valore delle varie derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial \xi_1}, \frac{\partial z}{\partial \xi_2}, \dots \frac{\partial z}{\partial \xi_m}$, ci determinano anche il differenziale totale dz di z, inquantochè, esistendo queste derivate parziali, può dirsi che altrettanto accade del differenziale totale dz, e si ha quindi

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial z}{\partial \xi_2}d\xi + \dots + \frac{\partial z}{\partial \xi_m}d\xi_m.$$

Ora, sostituendo effettivamente in questa espressione di dz i valori precedenti di $\frac{\partial z}{\partial \xi_1}, \frac{\partial z}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial \xi_m}$, e raccogliendo i termini che moltiplicano $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ (ciò che equivale a sommare per colonne le uguaglianze precedenti dopo di averle moltiplicate respettivamente per $d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_m$) si trova

$$\begin{aligned}
dz = {} & \frac{\partial z}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m}d\xi_m\right) +\\
& + \frac{\partial z}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m}d\xi_m\right) +\\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +\\
& + \frac{\partial z}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial \xi_m}d\xi_m\right);
\end{aligned}$$

quindi, osservando anche che per le ipotesi fatte le funzioni dei secondi membri delle (4), come ammettono le derivate parziali rispetto a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, ammettono anche i differenziali, e questi differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sono appunto le quantità fra parentesi nella formola precedente, si conclude che si avrà ancora

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

come avremmo avuto se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fossero tutte variabili indipendenti; talchè resta ora dimostrato quanto abbiamo enunciato sopra.

144. — I risultati ora ottenuti sono evidentemente la generalizzazione di quanto si disse al § 105 [pag. 141] sui differenziali delle funzioni di funzioni.

S'intende poi che essi sono della massima importanza, inquantochè per essi, quando si debba scrivere il differenziale primo di una funzione $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sarà inutile di occuparci della natura speciale delle quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$, distinguendo cioè il caso in cui esse sono tutte variabili indipendenti da quello in cui non lo sono, perchè, per quanto abbiamo detto, nell'un caso e nell'altro la forma del differenziale sarà sempre la stessa, e si avrà sempre

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

colla sola restrizione che quando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non siano effettivamente le variabili indipendenti, devono essere soddisfatte le condizioni che si richiedono perchè a z, considerata come funzione composta delle vere variabili indipendenti, sia applicabile la formola di derivazione delle funzioni composte rispetto a ciascuna variabile.

Però non si deve tralasciare di notare che, per quanto in tutti i casi (sotto le condizioni ora indicate) la forma del differenziale primo della funzione $z(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ sia sempre la stessa, nel suo valore effettivo vi è però una differenza notevole, secondochè $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono o no tutte variabili indipendenti; giacchè nel primo caso $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, essendo differenziali di variabili indipendenti, sono del tutto arbitrarî, e possono supporsi costanti rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, come appunto si usa sempre di fare; e nel secondo caso invece, alcuni di questi differenziali, se non tutti, essendo differenziali di funzioni, dipendono ordinariamente dai valori che hanno le variabili indipendenti nel punto che si considera, e quindi, almeno ordinariamente, non possono riguardarsi come costanti.

145. — L'ultima osservazione fa intendere immediatamente che, come già trovammo pel caso delle funzioni di funzioni, anche nel caso attuale delle funzioni composte con funzioni di una o più variabili indipendenti, i risultati precedenti sussistono soltanto pei differenziali di prim'ordine, e, tranne casi speciali, cessano affatto di sussistere quando si passa ai differenziali di ordini superiori.

È chiaro infatti che, mentre pei differenziali di prim'ordine della funzione $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sotto le restrizioni indicate, si ha sempre

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

pei differenziali di second'ordine, nel caso che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano variabili indipendenti, si ha simbolicamente (§ 140 [pag. 188 e seg.)].

$$d^2 z = \sum A_{r,s} \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} dx_r \, dx_s = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^2,$$

mentre nel caso che tutte o alcune delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano funzioni di variabili indipendenti, per la circostanza che allora nel differenziare dz conviene tener conto anche dei termini che si ottengono differenziando $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, si avrà invece

$$d^2 z = \sum A_{r,s} \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} dx_r \, dx_s + \frac{\partial z}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} d^2 x_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} d^2 x_n =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n\right)^2 + \sum_1^n \frac{\partial z}{\partial x_r} d^2 x_r;$$

e così in particolare quando sia $z = z(x, y)$, mentre, con le notazioni di Monge, se x ed y sono variabili indipendenti si ha

$$dz = p dx + q dy \quad , \quad d^2 z = r dx^2 + 2 s \, dx \, dy + t \, dy^2,$$

quando x ed y non sono variabili indipendenti si ha invece

$$dz = p dx + q dy \quad , \quad d^2 z = r \, dx^2 + 2 s \, dx \, dy + t \, dy^2 + p d^2 x + q d^2 y.$$

Differenze analoghe si hanno nei differenziali di terz'ordine, e in particolare, nel caso sempre di $z = z(x, y)$ con x ed y funzioni di una o di due variabili indipendenti, si ha

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3 +$$

$$+ 2\,r\,dx\,d^2x + 2\,s\,(d^2x\,dy + dx\,d^2y) + 2\,t\,dy\,d^2y + p\,d^3x + q\,d^3y + dp\,d^2x + dq\,d^2y =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^3 + 3\,r\,dx\,d^2x + 3\,s\,(d^2x\,dy + dx\,d^2y) + 3\,t\,dy\,d^2y + p\,d^3x + q\,d^3y\,,$$

invece di avere semplicemente $d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^3$, come si ha nel caso di x ed y variabili indipendenti.

XIII.

Funzioni implicite di una o più variabili indipendenti

146. — Accade di sovente che una funzione y di una variabile reale x, anzichè essere data effettivamente, secondo la ordinaria definizione, per ogni valore di x in un certo intervallo, è definita invece col dire che per ogni valore speciale di x nello stesso intervallo essa ha un valore che, pel valore che si considera di x, annulla una certa funzione $f(x, y)$ delle due variabili x ed y; per modo cioè che i valori corrispondenti di x ed y (conosciuti i quali si potrà poi definire la funzione y anche colle regole ordinarie) possono considerarsi come sistemi di valori di x ed y pei quali si ha $f(x, y) = 0$.

Aggiungiamo che, estendendo il campo della variabilità delle due quantità x e y anche *ai valori complessi* i cui indici respettivi vengono a cadere in due porzioni date dei piani rappresentativi di questi valori, si hanno bene spesso funzioni $f(x, y)$ che hanno un valore determinato pei valori reali e complessi di x e y i cui indici cadono in questi campi, come avviene per es. per la funzione analitica $xy + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(xy^2) + e^y$ che può considerarsi come data per tutti i valori reali o complessi di x e y.

In questo caso generale, per ogni valore reale o complesso x_0 che si attribuisca ad x nel campo corrispondente, la funzione data $f(x, y)$ si ridurrà a una funzione $f(x_0, y)$ della sola variabile y la quale potrà avere un significato per tutti i valori reali o complessi di y i cui indici cadono in un certo campo; ma questa funzione $f(x_0, y)$, almeno nei casi più comuni, sarà zero soltanto per alcuni valori speciali di y, o non lo sarà mai, per modo da dover dire che non vi sono tutt'al più che uno o più valori speciali, reali o complessi, di y che pel valore x_0 attribuito ad x soddisfino alla equazione $f(x, y) = 0$, cioè siano tali che si abbia $f(x_0, y) = 0$.

Riferendoci dunque ai singoli valori reali o complessi che x può avere nel campo dato o in una porzione soltanto di esso, se avverrà che per ognuno di questi valori di x si abbiano uno o più valori corrispondenti di y che annullino $f(x, y)$, per modo cioè che riesca soddisfatta la equazione $f(x, y)=0$, allora prendendo per ogni valore speciale di x uno di questi valori di y (e ciò dopo aver stabilito qualche legge pel valore da scegliersi per y nel caso che questi valori di y siano più di uno) si verranno ad avere varie serie di valori y corrispondenti ai valori di x nel campo che si considera, e che insieme ai valori corrispondenti di x soddisfaranno sempre alla equazione $f(x, y)=0$; e queste serie di valori di y potranno riguardarsi come costituenti altrettante funzioni di x pei valori reali o complessi di x che cadono nel campo che si considera.

Le funzioni y così definite da una equazione data $f(x, y)=0$ si dicono *funzioni implicite di* x; e la legge che, quando è possibile (com'è appunto nei casi ordinari), si stabilisce sempre per determinare la successione dei valori da scegliersi per y, nel caso che per ogni valore che si dà ad x si abbiano più valori y che soddisfano alla equazione $f(x, y)=0$, è quella che porta la continuità nei valori di y, per modo cioè che la funzione y che verrà così a formarsi possa riguardarsi come una funzione continua di x; e ciò intendendo esteso il concetto di continuità ordinario anche alle funzioni di una variabile complessa x, dicendo cioè al solito che una funzione y di x sarà continua nel punto indice di x_0, quando il limite dei valori che si hanno per y nei punti x di un intorno x_0, e mentre x tende con una legge qualunque a x_0, è il valore che la funzione stessa y prende nel punto x_0.

147. — Aggiungiamo ora che nei casi ordinari la funzione $f(x, y)$ è, o almeno viene poi ad essere, una funzione analitica di x ed y; e le funzioni implicite y definite dalla equazione $f(x, y)=0$ vengono ad esser costituite dai valori y che si otterrebbero quando, con convenienti trasformazioni e opportuni artifizi, o con osservazioni speciali, si giungesse a trovare le soluzioni rispetto ad y della equazione stessa *(radici di questa equazione).*

Oltre a ciò poi aggiungiamo che come si hanno funzioni implicite y definite da una sola equazione $f(x, y)=0$, si hanno anche funzioni y definite per mezzo di due equazioni $f(x, y, z)=0$, $\varphi(x, y, z)=0$ nelle quali figura però un'altra quantità z che è essa pure una funzione implicita od una quantità ausiliaria.

In questo caso infatti, dovendo i sistemi di valori corrispondenti di x, y, z soddisfare al tempo stesso a queste due equazioni, s'intende subito come potrà avvenire che *per ogni valore speciale che si attribuisca ad x in un certo campo* si giunga sempre a trovare uno o più sistemi di valori per y e z che soddisfino alle due equazioni date; o anche potrà darsi che si giunga in qualche modo (come si fa per es. nei casi più comuni colla eliminazione) ad una stessa equazione $\psi(x, y)=0$ cui devono sempre soddisfare y ed x, con che allora saremo ridotti al caso precedente, e, volendo, si potrà poi giungere anche ad un'altra relazione fra x e z che definisca z in funzione di x indipendentemente da y; e nell'un caso e nell'altro si potranno costruire una o più funzioni implicite y di x, e volendo anche le corrispondenti funzioni z di x.

In generale poi, finchè si debba avere soltanto una variabile reale o complessa x, s'intende che potranno aversi anche funzioni implicite y definite da un numero maggiore m di equazioni, ciascuna della forma $f(x, y, y_1, y_2, ..., y_{m-1})=0$, e nelle quali oltre alla variabile indipendente x ed oltre ad y, figurino altre $m-1$ quantità ausiliarie, o funzioni implicite anch'esse, $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, per modo cioè da avere sempre un numero di equazioni inferiore di una unità a quello delle quantità variabili $x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ che in esse figurano.

Similmente poi si avranno funzioni implicite y di più variabili indipendenti $x_1, x_2, ..., x_n$ definite da una sola equazione della forma $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)=0$, nella quale pure può intendersi che $x_1, x_2, \dots, x_n$ possano anche avere valori complessi; e si avranno anche funzioni implicite y definite da m equazioni, ciascuna della forma $f(x_1, x_2 \dots, x_n, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1})=0$ e nelle quali, oltre a $x_1, x_2, ..., x_n$ e y figurino, come funzioni implicite anch'esse, o come quantità ausiliarie, altre $m-1$ quantità $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$, per modo sempre che, quando n è il numero delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che si vogliono lasciare indipendenti, il numero delle equazioni sia inferiore di n unità a quello delle quantità variabili $x_1, x_2, \dots, x_n, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ che in esse figurano.

148. — Dato così un cenno generale delle funzioni implicite, noi passeremo a trattare delle loro derivate e dei loro differenziali dei vari ordini, limitandoci però sempre d'ora innanzi al caso delle funzioni implicite reali di variabili reali, onde non entrare in uno studio che esigerebbe considerazioni speciali e ci porterebbe molto in lungo.

Incominciamo perciò dal considerare il caso delle funzioni implicite y che devono risultare definite da una equazione a due variabili $f(x, y)=0$ per tutti i valori reali di x che cadono in un certo intervallo (a, b), e osserviamo che, data una tale equazione $f(x, y)=0$, la prima cosa da farsi sarà quella di assicurarsi in qualche modo che, per ogni valore di x nello stesso intervallo, esistono effettivamente uno o più valori reali di y che soddisfano alla stessa equazione; e oltre a ciò poi, tanto nel caso che per ogni valore di x esista un solo di questi valori y, tanto in quello in cui ne esista più di uno, volendo parlare di derivate e di differenziali della funzione y, sarà necessario assicurarsi che la equazione data $f(x, y) = 0$ è tale che si possano formare una o più successioni di valori y che costituiscano una o più funzioni y che fra a e b sono finite e continue almeno generalmente, e ammettono una derivata determinata.

Riscontrato poi che è possibile di soddisfare a queste condizioni, s'intende che la funzione implicita $y = \varphi(x)$ di cui dovrebbero trovarsi le derivate o i differenziali, non potrebbe essere se non che una delle funzioni che si formerebbero nel modo ora indicato. E quando si fosse effettivamente ottenuta, le sue derivate o i suoi differenziali, quando esistono, si potrebbero trovare coll'applicazione delle regole di derivazione o di differenziazione date nelle lezioni precedenti; e con ciò la questione rimarrebbe completamente risoluta.

In tal guisa però, poichè, oltre a fare le verificazioni suindicate, occorrerebbe sempre cercare effettivamente la funzione y, noi saremmo il più spesso arrestati dalle difficoltà di calcolo; talchè conviene andare in traccia di un metodo differente che conduca più facilmente ai resultati che si cercano.

Questo metodo è tutto fondato sulla formola di derivazione delle funzioni composte, e non esige affatto la conoscenza effettiva della funzione $y = \varphi(x)$ definita dalla equazione data $f(x, y) = 0$, almeno finchè ci si contenta di esprimere la derivata o il differenziale di y per le variabili x ed y ad un tempo; però, per esporre questo metodo in modo rigoroso e completo, conviene prima mostrare che, quando per la funzione data $f(x, y)$ sono soddisfatte certe condizioni speciali, che nelle applicazioni riescono appunto ordinariamente soddisfatte, allora, in intervalli relativi ad x sufficientemente ristretti, la equazione $f(x, y) = 0$ definisce sempre una o più funzioni implicite reali y che, oltre essere finite e continue, ammettono anche una derivata determinata e finita in ogni punto degli stessi intervalli; dopo di che si troverà facilmente che questa derivata si esprime in modo semplice per x e pei valori corrispondenti y della funzione.

149. — Incominciamo perciò dal supporre che la funzione $f(x, y)$ sia una funzione reale delle due variabili x, y in un dato campo C; e ammettiamo che in qualche modo si sappia che per un valore x_0 di x esiste almeno un valore y_0 per y che insieme con x_0 soddisfa alla equazione $f(x, y) = 0$, per modo cioè che si abbia $f(x_0, y_0) = 0$; cioè supponiamo che si conosca un sistema iniziale di valori x_0, y_0 di x e y che soddisfano alla equazione data $f(x, y) = 0$.

Ammettiamo inoltre che il punto così determinato (x_0, y_0) dal quale partiremo non sia un punto del contorno del campo C nel quale è data $f(x, y)$, ma sia *interno* a C, e nei punti (x, y) di un certo intorno c di questo punto (x_0, y_0), che potrà anche essere molto grande, la funzione $f(x, y)$, oltre essere

sempre finita e continua, abbia anche la sua derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ determinata e finita, e oltre a ciò nel punto (x_0, y_0) abbia l'altra derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$ finita e *differente da zero;* si tratterà ora per prima cosa di mostrare che, quando queste condizioni siano soddisfatte, per ogni valore $x_0 + h$ di x sufficientemente vicino a x_0 esiste sempre almeno un valore y_h di y pel quale si ha $f(x_0 + h, y_h) = 0$.

Indichiamo perciò con h_0 e k_0 due numeri differenti da zero e positivi che intanto supporremo scelti in modo che, pei valori di h e k numericamente inferiori ad h_0 e k_0, il punto $(x_0 + h, y_0 + k)$ venga sempre a cadere nell'intorno c di (x_0, y_0) nel quale sono soddisfatte le condizioni poste sopra, e prendiamo a studiare $f(x_0 + h, y_0 + k)$.

Osservando che $f(x_0, y_0) = 0$, si vede subito che per questi valori di h e k si potrà scrivere

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0),$$

e indicando al solito con f_1 e f_2 le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, per le ipotesi fatte si avrà anche

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - h f_1(x_0+\theta h, y_0+k),\ f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) - k\{f_2(x_0, y_0) + \alpha\}$$

dove θ è un numero positivo compreso fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e α è una quantità che, con k_0 diverso da zero ma sufficientemente piccolo, per tutti i valori di k numericamente inferiori o uguali a k_0 è minore in valore assoluto di quel numero che più ci piace; talchè sostituendo si troverà anche

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = h f_1(x_0 + \theta h, y_0 + k) + k\{f_2(x_0, y_0) + \alpha\}.$$

Si osservi ora che, siccome $f_2(x_0, y_0)$ è diverso da zero, si può anche supporre di aver preso il k_0 talmente piccolo, che per k numericamente inferiore o uguale a k_0 la quantità α sia piccolissima, o almeno tale che l'altra $f_2(x_0, y_0) + \alpha$ sia sempre dello stesso segno di $f_2(x_0, y_0)$ e sia discosta da zero più di una quantità determinata d; e allora nella formola precedente il termine $k\{f_2(x_0, y_0) + \alpha\}$ col passare di k da $-k_0$ a k_0 ($-k_0$ e k_0 incl.) prenderà anche valori positivi e negativi numericamente superiori a $k_0 d$.

Se poi s'indica con λ il limite superiore dei valori assoluti di $f_1(x, y)$ nei punti (x, y) dell'intorno c che si considera, si vede anche che in valore assoluto il primo termine della formola precedente non può mai superare la quantità $h_0 \lambda$; talchè, osservando che quando non sia già $h_0 \lambda < k_0 d$ si potrà sempre scegliere un altro valore minore per h_0 che sia ancora differente da zero e pel quale questa condizione sia soddisfatta, s'intenderà subito ora che, per ogni valore speciale che si attribuisca ad h non superiore al valore h_0 così determinato, la funzione $f(x_0+h, y_0+k)$ col variare di k da $-k_0$ a k_0 passerà dal positivo al negativo o viceversa, talchè, essendo continua, dovrà anche annullarsi per uno o più valori di k compresi fra $-k_0$ e k_0.

Segue intanto da ciò che per ogni valore di h compreso fra $-h_0$ e h_0, essendo h_0 il numero diverso da zero e positivo che sarà stato determinato nel modo indicato, e che, a seconda dei casi, potrà anche essere molto grande, esisterà almeno un valore di k pel quale si avrà $f(x_0+h, y_0+k)=0$, per modo che anche colle sole condizioni che abbiamo poste si può asserire già che pei valori di x fra x_0-h_0 e x_0+h_0 esisteranno una o più funzioni y che soddisfaranno alla equazione data $f(x, y)=0$ e che per $x=x_0$ saranno uguali a y_0; e ora quando si aggiunga la condizione che $\frac{\partial f}{\partial y}$ esista anche nei punti di un intorno di (x_0, y_0) e sia continua in questo punto (x_0, y_0), sarà facile anche di vedere che, salvo a prendere h_0 e k_0 più piccoli ma sempre diversi da zero, per ogni valore di k fra $-h_0$ e h_0 non vi ha che un sol valore di k che soddisfi alle condizioni ora indicate, e quindi fra x_0-h_0 e x_0+h_0 non vi ha che una sola funzione y che per $x=x_0$ sia eguale a y_0 e che soddisfi alla equazione $f(x, y)=0$, e non sia mai troppo discosta da y_0.

Risulta infatti da quanto abbiamo detto che prendendo h_0 e k_0 sufficientemente piccoli, si può fare in modo che i punti (x_0+h, y_0+k) vengano a cadere in un intorno di (x_0, y_0) nel quale la funzione $\frac{\partial f}{\partial y}$ o $f_2(x, y)$ sarà sempre discosta da zero, perchè ora abbiamo ammesso che essa sia continua nel punto (x_0, y_0); e se avvenisse che per un valore h_1 di h fra $-h_0$ e h_0 esistessero due valori k_1 e k_2 di k inferiori a k_0 pei quali si avesse $f(x_0+h_1, y_0+k_1)=0$, e $f(x_0+h_1, y_0+k_2)=0$, allora per un teorema noto, indicando con k' un numero compreso fra k_1 e k_2, si dovrebbe avere anche $f_2(x_0+h_1, y_0+k')=0$, e questo ci porterebbe in contradizione; dunque si può ora intanto evidentemente asserire che, almeno finchè h_0 non supera un dato limite e finchè si ammette che y non debba scostarsi troppo da y_0, per ogni punto x compreso fra x_0-h_0 e x_0+h_0 esisterà sempre un valore unico e determinato k dotato della proprietà che y_0+k può riguardarsi come il valore di y che pel valore corrispondente di x soddisfa alla equazione $f(x, y)=0$; o, in altri termini, nell'intervallo (x_0-h_0, x_0+h_0) esisterà una funzione ben determinata, reale e a un sol valore $y=y_0+k$ che potrà riguardarsi come una funzione implicita definita dalla equazione data $f(x, y)=0$.

Osservando poi che, per quanto abbiamo detto sopra, quando si voglia che k non superi in valore assoluto un dato numero σ (che può esser preso per k_0) basterà supporre h numericamente inferiore a un numero positivo e sufficientemente piccolo h_0 pel quale si abbia colle notazioni poste sopra $h_0<\frac{d\sigma}{\lambda}$, si concluderà subito anche che la funzione y, di cui ora abbiamo dimostrato l'esistenza, può riguardarsi come continua nel punto x_0; dunque, osservando ora che, quando si ammetta anche che $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia continua in ogni punto di un intorno di (x_0, y_0), ogni punto x dell'intervallo (x_0-h_0, x_0+h_0) determinato sopra può prendersi come punto iniziale x_0, giacchè in esso (quando h_0 è sufficientemente piccolo) saranno sempre soddisfatte tutte le condizioni che abbiamo poste sopra per $x=x_0$, si potrà anche evidentemente concludere che in ogni punto x dell'intervallo (x_0-h_0, x_0+h_0) la funzione y che noi abbiamo determinato sopra sarà anche continua.

Si aggiunge poi che se $y=\varphi(x)$ è la funzione così determinata pei varii valori di x fra x_0-h_0 e x_0+h_0, la funzione data $f(x, y)$ per questi valori di x e per $y=\varphi(x)$ può riguardarsi come una funzione composta di x il cui valore fra x_0-h_0 e x_0+h_0 è sempre zero, e la cui derivata in conseguenza è pure eguale a zero; dunque, facendo ora anche l'ipotesi che $\frac{\partial f}{\partial x}$ sia continua nei punti di un intorno di (x_0, y_0), e osservando che pei valori di x che abbiamo detto di considerare, anche $\varphi(x)$ è finita e continua, basterà ricordare quanto si disse in fine del § 132 [pag. 176], per potere asserire che la funzione trovata y pei valori di x compresi fra x_0-h_0 e x_0+h_0 ha una derivata determinata e finita $\frac{dy}{dx}$, e questa derivata si potrà dedurre dalla equazione che si ottiene eguagliando a zero la derivata di $f(x, y)$ riguardata come una funzione composta di x; cioè si dedurrà dalla formola $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$, e sarà quindi $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$; talchè, riassumendo, si può ora evidentemente concludere che: *Se per un valore x_0 di x la equazione $f(x,y)=0$ è soddisfatta da un valore y_0 di y, e il punto (x_0, y_0) viene ad essere un punto interno al campo C nel quale è data $f(x, y)$; e se al tempo stesso esiste un intorno (che potrà essere anche assai grande) di (x_0, y_0) nei punti del quale la funzione $f(x, y)$ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, e la seconda di queste derivate nel punto (x_0, y_0) è anche* *diversa da zero, allora esisterà sempre un intervallo relativo alla variabile x $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ cui appartiene il punto x_0 e pei punti del quale la equazione $f(x, y) = 0$ definisce completamente una funzione y di x, che oltre esser sempre finita e continua, ha anche la sua derivata prima determinata e finita, e nel punto iniziale x_0 è uguale a y_0* (*).

E in questa ipotesi *la derivata $\frac{dy}{dx}$ di questa funzione y si ottiene dalla formola $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$* che proviene da $f(x, y)$ eguagliando a zero la derivata di $f(x, y)$ calcolata colla regola di derivazione delle funzioni composte, per modo che *questa derivata $\frac{dy}{dx}$ della funzione y può anche riguardarsi come data dalla formola $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$* nel secondo membro della quale, come

(*) Si può osservare che alle condizioni poste nell'enunciato del teorema potrebbero sostituirsene altre molto più generali quando per la funzione implicita y di x che deve essere definita dalla equazione $f(x, y) = 0$ in un certo intervallo ci si limitasse a richiedere che *essa esistesse e fosse finita e continua, senza richiedere nulla rispetto alla esistenza o alla natura della sua derivata.*

Ammesso ancora infatti di avere trovato un sistema iniziale di valori x_0 e y_0 per x e y pei quali si avesse $f(x_0, y_0) = 0$, e supposto ancora che in un certo intorno c del punto (x_0, y_0), che potrebbe essere anche assai grande, la $f(x, y)$ fosse sempre finita e continua, allora *senza richiedere nulla intorno alla esistenza e alla natura delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ nei punti (x, y) che cadono entro c, basterebbe assicurarsi che negli stessi punti il rapporto incrementale $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ è sempre numericamente inferiore a un numero finito λ, e l'altro $\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$, tanto per k positivo che per k negativo, si mantiene sempre dello stesso segno e sempre numericamente superiore a un numero diverso da zero e positivo d.*

E per vedere questo basterebbe ripetere con leggerissime modificazioni (che appariranno subito ad ognuno) la dimostrazione fatta sopra, dopo di avere osservato che si può fare una estensione del teorema di Rolle alle funzioni $f(x)$ *che prendono lo stesso valore in due punti a e b, e che, pure essendo sempre finite e continue nell'intervallo da a a b (questi estremi incl.), almeno in qualche punto mancano di derivata;* poichè, considerando la funzione $\varphi(x) = f(x) - f(a)$ che sarà zero per $x = a$ e $x = b$, e sarà finita e continua essa pure da a a b, si vede subito che se non sarà sempre zero fra a e b avrà almeno o un punto di massimo, o un punto di minimo *nell'interno* dello stesso intervallo; e quindi *per la nostra funzione $f(x)$ esisterà fra i punti a e b almeno un punto* interno x' *nel quale i rapporti incrementali destro e sinistro $\frac{f(x'+h) - f(x')}{h}$ e $\frac{f(x'-h_1) - f(x')}{-h_1}$, per h e h_1 sufficientemente piccoli, dove non sono zero, considerati ciascuno separatamente hanno lo stesso segno, ma il segno dell'uno è sempre differente da quello dell'altro.*

nella formola precedente, si intende che per ogni valore di x nell'intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ nel quale x si considera, l'altra variabile y abbia il valore corrispondente della funzione y definita dalla equazione data $f(x, y) = 0$.

150. — Si intende poi che nei casi ordinari l'intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ nel quale la equazione data definisce completamente una funzione y può anche esser grandissimo, perchè può darsi che le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ si mantengano inferiori a un numero finito in un campo molto esteso, e talvolta anche per tutti i valori finiti di x e y, e al tempo stesso $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia sempre differente da zero, ecc.; e s'intende anche come potrà talvolta avvenire che la equazione data in uno stesso intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ definisca più funzioni y, perchè, potrà darsi per es. che, oltre al valore y_0, si abbia anche un altro valore y_1 che soddisfi alla equazione $f(x_0, y) = 0$ e alle altre condizioni che si erano poste sopra per y_0, e allora anche partendo da y_1 si formerà una nuova funzione y analoga a quella formata partendo da y_0, ecc. (*).

151. — In forza dunque dei risultati precedenti, quando sia data un'equazione $f(x, y) = 0$, e pei valori di x che dovranno considerarsi quelli corrispondenti y della funzione implicita definita da questa equazione risultino tali che negli intorni dei punti (x, y) che così si avranno siano soddisfatte le solite condizioni relative all'essere finite e continue $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e all'essere $\frac{\partial f}{\partial y}$

(*) Si può osservare che mantenendo ferme tutte le condizioni poste nel testo, e considerando per es. due funzioni y e $\overline{y}$ che vengano determinate partendo pel punto x_0 da valori iniziali y_0 e y_1 diversi fra loro, queste due funzioni, corrispondentemente agli stessi valori di x negli intervalli nei quali verranno considerate, non potranno divenire uguali fra loro altro che quando, essendo α il valore di x pel quale questa circostanza si presenta, e y_α il valore comune di y e $\overline{y}$ corrispondente a questo valore α di x, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia zero nel punto (α, y_α) dove le due funzioni *(o rami di funzione)* y e $\overline{y}$ si uniscono.

Supposto infatti ad es. che il valore ora indicato α di x sia a destra di x_0, e che fra x_0 ed α siano sempre soddisfatte le condizioni per le quali y e $\overline{y}$ non presentano singolarità, è certo che prendendo $x = \alpha - h$, con h positivo e piccolo quanto si vuole, i valori $y_{\alpha-h}$ e $\overline{y}_{\alpha-h}$ di y e $\overline{y}$ corrispondenti a questo valore $\alpha - h$ di x saranno ambedue vicini quanto si vuole a y_α; e avendosi contemporaneamente $f(\alpha-h, y_{\alpha-h}) = 0$ e $f(\alpha-h, \overline{y}_{\alpha-h}) = 0$, pel teorema di Rolle, esisterà un valore $\overline{\overline{y}}_{\alpha-h}$ fra $y_{\alpha-h}$ e $\overline{y}_{\alpha-h}$ pel quale nel punto $(\alpha-h, \overline{\overline{y}}_{\alpha-h})$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ sarà zero; e poichè questo punto $(\alpha-h, \overline{\overline{y}}_{\alpha-h})$ sarà vicino quanto si vuole al punto (α, y_α), a causa della continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ anche in quest'ultimo punto, è certo che dovrà essere $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ nel punto stesso.

diversa da zero, si può sempre assicurare che pei valori che così si considerano di x la derivata della funzione implicita y sarà data dalla formola

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0\ , \tag{1}$$

ovvero dall'altra

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\ ; \tag{2}$$

talchè per gli stessi valori di x il differenziale dy della medesima funzione y sarà

$$dy=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}dx\ , \tag{3}$$

e quindi potrà anche riguardarsi come definito dalla equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0\ , \tag{4}$$

il cui primo membro esprime semplicemente il differenziale df della funzione data $f(x,y)$; e in tutte queste formole il valore di y che vi figura insieme ad x dovrà sempre intendersi che sia quello (noto o ignoto) che avrà la funzione implicita pel valore stesso x.

A proposito poi di questa equazione differenziale si può notare che quando pei valori di x che si considerano, si fosse conosciuta avanti l'esistenza di una derivata determinata e finita per la funzione y definita dalla equazione $f(x,y)=0$, e fossero state ancora soddisfatte le condizioni poste sopra per $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, allora indipendentemente dalle considerazioni precedenti noi avremmo potuto eguagliare senz'altro a zero il differenziale totale df oppure $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ della funzione $f(x,y)$, dando luogo subito in tal modo alla equazione (4) che avrebbe servito a determinare i valori di y e $\frac{dy}{dx}$.

In tal caso infatti, avremmo potuto subito avvertire che quando si cambia x in $x+dx$ e y continua sempre a soddisfare alla equazione $f(x,y)=0$, l'accrescimento corrispondente di $f(x,y)$ deve essere zero, e deve al tempo stesso (§. 137 [pag. 184 e seg.]) avere la solita forma $df+\varepsilon$, dove ε è un infinitesimo

di ordine superiore al primo; e quindi per teoremi noti sugl'infinitesimi avremmo potuto immediatamente concludere che, pei valori di x e di y che qui si considerano, si doveva appunto avere $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$.

152. — Aggiungiamo ora che, se y è una funzione implicita definita dall'equazione $f(x,y)=0$ pei valori di x compresi in un dato intervallo nel quale sono ancora soddisfatte le condizioni poste sopra rispetto a $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, e se avverrà che in ogni punto di alcuni intorni dei punti (x,y) corrispondenti ai vari sistemi di valori di x e y che qui si considerano, la funzione $f(x,y)$ abbia finite e continue le sue derivate parziali del primo ordine e quelle del secondo ordine, allora la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ che costituisce il primo membro dell'equazione (1) (o la derivata totale di $f(x,y)$) potrà, al pari di $f(x,y)$, riguardarsi come una funzione composta di x per mezzo di x, e y $\frac{dy}{dx}$; talchè, osservando che questa funzione pei valori di x che si considerano è sempre eguale a zero e altrettanto in conseguenza accade della sua derivata, per quanto si disse in fine del ricordato § 132 [pag. 176] si potrà anche concludere che la funzione stessa y, oltre ad avere determinata e finita la sua derivata prima $\frac{dy}{dx}$, ha determinata e finita anche la sua derivata seconda $\frac{d^2y}{dx^2}$; e questa derivata seconda si dedurrà dall'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{5}$$

che si ottiene uguagliando a zero la derivata prima del primo membro $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ della equazione (1) o la derivata totale seconda di $f(x,y)$, calcolata questa derivata colla regola di derivazione delle funzioni composte; e perciò si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=-\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{6}$$

dove, per ogni valore di x che si considera, y deve avere il valore corrispondente della funzione implicita determinata dalla nostra equazione.

Indipendentemente poi da questo processo, dopo di avere trovato che $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ bastava osservare che il secondo membro si presentava sotto la forma di una funzione composta per mezzo di x e y, nella quale deve intendersi che y fosse la funzione implicita considerata, per poter dire che a questa espressione di $\frac{dy}{dx}$ poteva sempre applicarsi la derivazione composta rispetto ad x quando, oltre alle prime condizioni, si fosse posta l'altra che le derivate parziali del second'ordine di $f(x, y)$ esistessero, e fossero finite e continue.

E allora colla indicata derivazione composta avremmo trovato anche $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)\frac{dy}{dx}$; e eseguendo le derivazioni parziali colla regola dei quozienti, e ponendo per $\frac{dy}{dx}$ il valore (2) avremmo ritrovato subito la formola (6).

Si può poi osservare che anche in questo caso invece della equazione (5) fra le derivate si potrà formare quella fra i differenziali che servirà a determinare tanto il differenziale secondo di y che la derivata seconda; e questa equazione fra i differenziali si otterrà ancora evidentemente uguagliando a zero il differenziale del primo membro $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ della equazione (4), cioè sarà la seguente

$$(7)\quad d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y = 0,$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2$ è la solita notazione simbolica.

In modo simile si tratta il caso delle derivate e dei differenziali di y degli ordini superiori; e così, riassumendo, si può dire che quando pei varii sistemi di valori di x e y che si considerano esistono tutte quelle derivate parziali di $f(x,y)$ che occorre successivamente di considerare, e sono finite e continue, allora anche le derivate corrispondenti $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$ della funzione y definita dalla equazione $f(x,y) = 0$ esisteranno esse pure, e si potranno determinare mediante le equazioni

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \\[2ex] \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \\[2ex] \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

che si ottengono uguagliando a zero le varie derivate totali $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots$ del primo membro $f(x, y)$ della equazione data, calcolate successivamente queste derivate colle regole di derivazione delle funzioni composte; mentre i differenziali della stessa funzione y si potranno determinare mediante le equazioni

$$(9)\quad \begin{cases} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \\[2ex] d^2f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y = 0, \\[2ex] d^3f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^3 + 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)d^2y + \frac{\partial f}{\partial y}d^3y = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

che si ottengono eguagliando a zero i vari differenziali totali successivi di $f(x, y)$.

E aggiungiamo che con queste formole le derivate dei varii ordini di y come i suoi differenziali vengono tutti espressi per x e per la funzione stessa implicita y che sarà il più spesso ignota; però s'intende bene che potranno essere sempre utilissime, e in certi casi anche, tenendo conto della equazione data $f(x, y) = 0$ e facendo opportune trasformazioni, potremo giungere a esprimere le stesse derivate o i differenziali per la sola variabile indipendente x indipendentemente dalla conoscenza del valore della funzione implicita y.

E del resto poi, siccome nel punto iniziale x_0 il valore della funzione implicita è conosciuto ed è y_0, queste formole ci porteranno sempre a conoscere anche il valore delle derivate e dei differenziali di y nel punto stesso iniziale x_0 fino a quell'ordine pel quale si hanno le formole stesse (*).

153. — Non si deve poi lasciare di osservare che, quando per $x = x_0$ e $y = y_0$ si ha ad un tempo $f(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e inoltre considerando la funzione y definita dalla equazione $f(x, y) = 0$ pei valori di x prossimi a x_0, per es. a destra, si trova che per $x = x_0 + 0$ essa ha per limite y_0, allora, riguardando questa funzione y come data anche per $x = x_0$ e eguale (in questo punto x_0) a y_0, si potrà affermare, (§. 44 [pag. 55 e seg.]) che se la quantità $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ (dove s'intenda che per x diverso da x_0 la y sia la funzione implicita considerata) ha un limite determinato finito o infinito per $x = x_0 + 0$, questo limite sarà la derivata di y nel punto x_0 a destra; e in questo caso onde

(*) Osserviamo che quando, come nel caso nostro, per una funzione y di una variabile x esistono e sono conosciute le derivate $y'_0, y''_0, y'''_0, \ldots$ in un punto x_0 almeno fino a quelle di un certo ordine k, ed è pure conosciuto il valore y_0 della funzione nello stesso punto, si possono costruire i termini della serie di Taylor corrispondente almeno fino a quello che contiene le derivate dell'ultimo ordine che si conoscono; e quindi, per quanto si disse ai §§ 73 e seg. [pag. 99 e seg.], la stessa formola di Taylor abbreviata

$$y_0 + \frac{y'_0}{1}(x - x_0) + \frac{y''_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots\ldots + \frac{y_0^{(m)}}{\pi(m)}(x - x_0)^m$$

arrestata a quel termine che più ci piacerà pel quale sia $m \leq k$ ci darà i valori di y per tutti i valori di x che non si discostano troppo da x_0 con quel grado di approssimazione che si vorrà.

Pel caso delle funzioni implicite dunque i processi esposti ci permettono anche di determinare effettivamente la funzione implicita stessa y anche per tutti i valori di x in intervalli sufficientemente piccoli che comprendono il punto iniziale x_0 (intorni di questo punto) con quel grado di approssimazione che più ci piacerà di avere; e ciò con calcoli che spesso saranno anche molto semplici. Andando poi di tratto in tratto successivamente, potremo spesso arrivare a conoscere effettivamente la funzione implicita stessa anche in punti x assai discosti dal punto iniziale x_0.

E come si avranno così i valori approssimati della funzione implicita y, si avranno anche quelli delle sue derivate, almeno fino a quelle dell'ordine $m-1$, in intorni del punto x_0 che potranno però impiccolire successivamente nel passare da una derivata alla seguente; e ciò perchè le formole di Taylor ad esse corrispondenti saranno quelle che vengono colla derivazione della formola precedente relativa ad y, e quindi saranno esse pure conosciute, ecc....

questa derivata sia finita, quando $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua nel punto (x_0, y_0), dovrà essere anche $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, ecc.

E se senza conoscere il valore preciso del limite dello stesso rapporto $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ si saprà che esso esiste ed è finito, e si saprà altresì che lo stesso accade dei limiti dei valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ per $x = x_0 + 0$, o almeno del valore della derivata $\frac{d^2y}{dx^2}$ presa nel punto x_0 a destra, mentre nel punto (x_0, y_0) saranno ancora continue le derivate parziali di primo e second'ordine di $f(x, y)$, allora, sussistendo ancora la formola (1) e quindi anche la (5), si potrà evidentemente affermare che il valore ignoto della derivata $\frac{dy}{dx}$ nel punto x_0 a destra sarà uno dei due valori che si hanno per $\frac{dy}{dx}$ risolvendo la equazione (5) dopo di avervi fatto $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, ecc....

154. — Diamo ora qualche applicazione di ciò che precede, cercando le derivate di alcune funzioni implicite.

1.° Si abbia l'equazione $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ che a seconda del segno che si prende pel termine $\frac{y^2}{b^2}$ è quella di un'ellisse o di un'iperbola, per modo che, per ogni valore di x diverso da a e da $-a$, e compreso fra $-a$ e a nel caso del segno superiore e fuori dell'intervallo da a a $-a$ nel caso del segno inferiore, si hanno due valori y che corrispondono a due funzioni implicite che divengono uguali fra loro per $x = \pm a$.

Senza bisogno di determinare effettivamente queste funzioni implicite, indicando per semplicità con $y', y'', \ldots$ le varie derivate, si potrà scrivere l'equazione

(10) $$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2} y' = 0,$$

o l'altra fra i differenziali $\frac{x\,dx}{a^2} \pm \frac{y\,dy}{b^2} = 0$, e quindi si avrà subito $y' = \mp \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$ per tutti i valori di x che corrispondono ad ascisse di punti della curva e che non danno $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ o $y = 0$, cioè per x diverso da $\pm a$; per modo che per $x = \pm a$ si ha $y' = +\infty$ o $y' = -\infty$, e la formola può ancora riguardarsi come giusta.

Volendo poi la derivata seconda, si scriverà la equazione derivata della (10), la quale sarà $\frac{1}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \pm \frac{y}{b^2} y'' = 0$, talchè sostituendo per y' il valore trovato, e tenendo conto della equazione data, si troverà subito $1 + \frac{a^2 y^3 y''}{b^4} = 0$, e quindi $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$ finchè y è diverso da zero, e senza che vi sia differenza fra il caso dell'ellisse e quello dell'iperbola.

Aggiungiamo poi che per $x = \pm a$ e $y = 0$ questa formola può ancora riguardarsi come giusta, poichè essendo allora infinita la y', anche la y'' non può riguardarsi che come infinita.

Gli stessi resultati si sarebbero potuti ottenere risolvendo rispetto ad y la equazione data, e poi applicando la derivazione.

2.° Avendo l'equazione $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ che rappresenta la curva detta *lemniscata di Bernoulli*, si osserverà che si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^2 + y^2)x - 4a^2 x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4(x^2 + y^2)y + 4a^2 y$, e quindi escludendo i punti pei quali $y = 0$, che corrispondono evidentemente a $x = \pm a\sqrt{2}$ e $x = 0$, per tutti gli altri punti della curva si troverà

$$y' = -\frac{x(x^2 + y^2) - a^2 x}{y(x^2 + y^2) + a^2 y} = -\frac{x}{y}\,\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + y^2 + a^2},$$

come si troverebbe anche risolvendo l'equazione data (che è una biquadratica), ma in modo più complicato.

3.° Avendo l'equazione $f(x, y) = \text{sen}(x + y^2) + \log y + x^3 + y^3 = 0$, che non può risolversi sotto forma finita, si osserverà che, secondo quanto si disse in generale, essa rappresenta almeno una funzione implicita finita e continua y in un intervallo che comprende il punto $x = 0$, perchè, avendosi $f(0, 0) = -\infty$, $f(0, 1) > 0$, per $x = 0$ esiste certamente un valore di y fra 0 e 1 che annulla $f(x, y)$, cioè $\text{sen}\, y^2 + \log y + y^3$, mentre $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono sempre finite finchè x e y sono finiti e y è diverso da zero, e oltre a ciò la seconda di queste due derivate $\frac{\partial f}{\partial y}$ per $x = 0$, che può aversi da $\text{sen}\, y^2 + \log y + y^3$, ed è quindi $2y\cos y^2 + \frac{1}{y} + 3y^2$, non è mai zero per y compreso fra 0 e 1; e ora osservando anche che $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y^2) + 3x^2$, e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x + y^2) + \frac{1}{y} + 3y^2$,

pei risultati generali dei paragrafi precedenti si potrà affermare che si ha $y' = -\frac{\cos(x + y^2) + 3x^2}{2y\cos(x + y^2) + \frac{1}{y} + 3y^2}$ per tutti i valori di x che uniti al corrispondente valore di y non annullano il denominatore, e ciò senza bisogno di conoscere il valore effettivo di y.

Di qui poi con successive derivazioni potremo dedurre anche y'', y''', ...

155. — Passiamo ora a considerare il caso delle funzioni z di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$ definite da una equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, nella ipotesi che tutte le quantità che qui compariscono debbano avere valori reali, come nel caso delle funzioni y di una sola variabile definita dalla equazione $f(x, y) = 0$; e incominciamo dal mostrare che, quando sono soddisfatte certe condizioni speciali, ogni equazione reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ definisce effettivamente per tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di un certo campo a n dimensioni una funzione reale di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che, oltre essere finita e continua, ammette anche le sue derivate parziali, almeno fino a quelle di un certo ordine.

Supponiamo perciò che $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ siano un sistema di valori reali e finiti delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ che soddisfano alla equazione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$; e, considerando $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ come funzione di $n+1$ variabili in un campo a $n+1$ dimensioni cui appartiene come punto *interno* il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$, ammettiamo intanto che nei punti di un intorno c (che potrà essere anche assai grande) di $(a_1, a_2, \dots, a_n, z)$ la funzione stessa $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, oltre ad esser finita e continua, abbia determinate e finite anche le sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ mentre nel punto stesso $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ l'altra derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial z}$ è essa pure determinata e finita, ed è differente da zero.

Indichiamo con $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0, k^0$ numeri diversi da zero e positivi e talmente piccoli che, per $h_1, h_2, \dots h_n$ e k numericamente inferiori a $h_1^0, h_2^0, \dots h_n^0, k^0$ respettivamente, i punti $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k)$ vengano a cadere nell'intorno c indicato sopra; si intenderà subito che insieme a $f(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0) = 0$ avremo anche

$$\begin{aligned} f(a_1+h, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k) &- f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots a_n+h_n, z_0+k) - f(a_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k) + \\ &+ f(a_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k) - f(a_1, a_2, a_3+h_3 \dots, a_n+h_n, z_0+k) + \\ &+ \dots + f(a_1, a_2, \dots a_n, z_0+k) - f(a_1, a_2, \dots a_n, z_0) = \\ &= h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + h_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + h_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha\right), \end{aligned}$$

dove con $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$, ..., $\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ abbiamo indicato le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, prese ciascuna respettivamente nei punti $(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k)$, $(a_1, a_2+\theta_2 h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k)$, ..., $(a_1, a_2, \dots, a_n+\theta_n h_n, z_0+k)$, $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ essendo al solito $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ numeri positivi compresi fra 0 e 1 (0 e 1 escl.), e essendo α una quantita che dipende soltanto da k e che prendendo k^0 sufficientemente piccolo sarà inferiore a quel numero che più ci piace, per modo da far sì che per tutti i valori di k compresi fra $-k^0$ e k^0 la quantità $\frac{\partial f}{\partial z}+\alpha$ sia sempre del segno di $\frac{\partial f}{\partial z}$, e sia discosta da zero più di una quantità determinata d; ciò che porterà che l'ultimo termine $k\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\alpha\right)$ della formola precedente col variare di k da $-k^0$ a k^0 ($-k^0$ e k^0 incl.) passi dal positivo al negativo, prendendo anche valori di segno opposto numericamente non inferiori a $k^0 d$ quando k sarà molto prossimo o uguale a $\pm k^0$.

Ora, poichè supponiamo che nell'intorno c di $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ siano tutte inferiori a un numero finito, è certo che, quando $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ siano presi sufficientemente piccoli, i coefficienti di $h_1, h_2, \dots, h_n$ nella formola precedente si manterranno rispettivamente inferiori a certi numeri finiti e positivi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e quindi anche al massimo fra essi λ, e il valore assoluto della somma $A = h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + h_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \dots + h_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ sarà inferiore a $(h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_n^0)\lambda$; e quindi col valore scelto di k^0 sarà sempre possibile di determinare per $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ dei valori diversi da zero e positivi e tali da far sì che la somma A, per ogni sistema di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ numericamente inferiori a $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ e per ogni valore di k fra $-k^0$ e k^0, sia sempre inferiore a $k^0 d$ in valore assoluto.

Segue da ciò evidentemente che, per ogni sistema di valori che si attribuiscono a $h_1, h_2, \dots, h_n$ inferiori a $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ per modo che il punto $(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)$ venga a cadere in un campo c a n dimensioni che comprende il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, la quantità $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k)$ col passare di k da $-k^0$ a k^0 dovrà cangiare di segno, e quindi, potendo riguardarsi come una funzione continua di k, essa dovrà annullarsi almeno per un valore di k fra $-k^0$ e k^0; talchè è chiaro intanto che per tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del campo c ora determinato (nel quale $x_1, x_2, \dots, x_n$ variano respettivamente fra $a_1 - h_1^0$ e $a_1+h_1^0$, fra $a_2 - h_2^0$ e $a_2+h_2^0$, ..., fra $a_n - h_n^0$ e $a_n+h_n^0$)

i valori corrispondenti che si troveranno per z_0+k, presi come valori di z, potranno riguardarsi come costituenti una o più funzioni che per gli stessi valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfano alla equazione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$.

Ma, ponendo ora la condizione che $\frac{\partial f}{\partial z}$ esista anche nei punti dell'intorno c considerato sopra di $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$, e nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ sia anche continua, è facile altresì di vedere che per ogni sistema di valori speciali inferiori a $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ che si attribuiscano a $h_1, h_2, \dots, h_n$ quando k^0 è sufficientemente piccolo, non esiste che un sol valore k che soddisfi alla equazione $f(a_1+h_1, a+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k) = 0$; giacchè, quando ne esistessero due, la funzione $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z)$ si annullerebbe per due valori di z compresi fra $z_0 - k^0$ e z_0+k^0 e quindi la derivata $\frac{\partial f}{\partial z}$ si annullerebbe almeno per un valore intermedio $z_1 = z_0 \pm \theta_1 k^0$ con $0<\theta_1<1$; e questo, quando $h_1^0, h_2^0, \dots h_n^0$ e k^0 sono sufficientemente piccoli, non può ora ammettersi perchè $\frac{\partial f}{\partial z}$ nel punto $(a_1, a_2, \dots a_n, z_0)$ oltre esser diversa da zero, è anche continua, e quindi in un intorno sufficientemente piccolo di questo punto essa resterà ancora diversa da zero; dunque quando $\frac{\partial f}{\partial z}$ è continua nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ è certo che di funzioni z di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ siano uguali a z_0 e che nel campo c che si considera soddisfino alla equazione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ restando sempre comprese fra $z_0 - k^0$ e $z_0 + k^0$ non ne esiste che una.

Aggiungeremo poi che il numero k^0 può anche supporsi arbitrariamente piccolo, e per ogni valore σ che gli si attribuisca, si ha un sistema di valori per le solite quantità $h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0$ dotati della proprietà che i valori di k che soddisfano alla equazione $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n, z_0+k) = 0$ per tutti i sistemi di valori di $h_1, h_2, \dots, h_n$ non superiori in valore assoluto a $h_1^0, h_2^0, \dots h_n^0$ sono numericamente inferiori a σ; e questo porta evidentemente a dire che la funzione z di cui abbiamo dimostrato la esistenza è anche continua nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; dunque, riassumendo, noi possiamo ora affermare che: *Quando, in un campo c_{n+1} a $n+1$ dimensioni relativo alle variabili $x_1, x_2 \dots x_n, z$, che ha nel suo interno il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ pel quale la equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ è soddisfatta, la funzione $f(x_1, x_2, \dots x_n, z)$, oltre esser finita e continua, ha le derivate parziali del prim' ordine $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ determinate e finite, e l'ultima di queste derivate nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n, z_0)$ è anche continua e differente da zero, allora* *la equazione* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ *in un certo campo* c_n *a* n *dimensioni relativo alle variabili* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *che racchiude il punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *definisce completamente una funzione ben determinata e a un sol valore* z *delle variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *che nel punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *è anche continua e ha il valore* z_0*; talchè se* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *è continua in tutti i punti di un intorno* c_{n+1} *(che può essere anche molto grande) del punto* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, z_0)$*, la funzione così definita* z *sarà continua in tutti i punti di un campo* c_n *a* n *dimensioni che racchiude il punto* $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

156. — Ammesso poi che almeno fino a un certo ordine le derivate parziali di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ esistano e siano finite e continue in alcuni dei punti da considerarsi $(x_1, x_2 \ldots x_n, z)$ si può vedere che: *La nostra funzione* z *nei punti* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *del campo* c_n *ha anche le sue derivate parziali determinate, finite e continue almeno fino a quell'ordine* m *pel quale si riscontra che in intorni dei punti* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ *(dove* z *è ora il valore corrispondente della funzione) le varie derivate parziali di* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *dello stesso ordine* m *siano finite e continue.*

Si osservi infatti che, colle nostre ipotesi, pei valori $x_1, x_2, \ldots x_n, z$ che si considerano, la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ è continua insieme alle sue derivate prime $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial z}$ anche rispetto ai sistemi di variabili (x_1, z), $(x_2, z), \ldots (x_n, z)$, e z è continua anche rispetto a ciascuna variabile separatamente, e oltre a ciò poi la funzione $f(x_1, x_2, \ldots x_n, z)$, pei valori $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ della funzione implicita z la cui esistenza è stata dimostrata sopra, può riguardarsi come una funzione composta delle singole variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per mezzo di queste variabili stesse e di z; talchè, osservando anche che questa funzione composta è dotata della proprietà che le sue derivate rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono sempre zero, e ricordando quanto si disse in fine del § 132 [pag. 176], si potrà concludere intanto che le derivate parziali del primo ordine di z esistono tutte e sono finite e continue, e si potranno ottenere dalle equazioni che risultano eguagliando a zero le derivate rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ calcolate colla regola delle funzioni composte.

Queste equazioni sono evidentemente le seguenti

$$(11) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

le quali, per essere $\frac{\partial f}{\partial z}$ diversa da zero, ci danno immediatamente

$$(12) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

per le n derivate del prim'ordine di z (*); e ora da queste (riguardando i secondi membri come funzioni composte di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per mezzo delle stesse variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ e di z) si potranno ricavare anche le varie derivate parziali del secondo ordine, e poi quelle del terzo ecc. le quali resulteranno ancora finite e continue; e ciò tutte le volte che le derivate seconde, terze,... di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ nei punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ nei quali si considerano siano finite e continue, ecc.

Queste derivate poi potranno ottenersi anche formando altre equazioni analoghe alle precedenti (11).

Osservando infatti che i primi membri di queste ultime equazioni si possono riguardare come funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, composte per mezzo delle stesse variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, di z, e delle derivate respettive $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, e dotate della proprietà di essere sempre zero, si vede subito che quando sono soddisfatte le condizioni testè indicate rispetto alle derivate seconde di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ si avranno le equazioni

$$(13) \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

(*) Se non fossero continue tutte le n derivate del prim'ordine $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ della funzione data relative alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ma soltanto alcune fra esse $\frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial x_s}, \ldots$, allora evidentemente, dovendo valerci della formola della derivazione composta, non si avrebbero tutte le n equazioni (11), ma soltanto la r^a, la s^a, ..., cioè quelle corrispondenti alle derivate finite e continue $\frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial x_s}, \ldots$, e si avrebbero quindi soltanto $\frac{\partial z}{\partial x_r}, \frac{\partial z}{\partial x_s}, \ldots$.

Una osservazione analoga può farsi per le derivate seconde, terze, ... di z.

le quali, quando siano già state calcolate le derivate parziali del prim'ordine colle formole precedenti, determineranno appunto le derivate parziali di second'ordine, perchè le stesse formole sono in numero eguale a queste derivate, e nei punti che si considerano il $\frac{\partial f}{\partial z}$ è differente da zero.

Similmente poi, quando siano soddisfatte le solite condizioni intorno alle derivate terze di $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, si troveranno con nuove derivazioni altre equazioni che potranno servire alla determinazione delle derivate terze di z, e così successivamente; talchè noi possiamo ora affermare di aver dimostrato quanto dicemmo in principio di questo paragrafo intorno alla esistenza di funzioni z delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che in dati campi soddisfano alla equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, e che, oltre esser finite e continue, ammettono anche le loro derivate parziali almeno fino a quelle di un certo ordine, e ciò tutte le volte che sono soddisfatte certe condizioni speciali che si verificano quasi sempre nei casi ordinari; e oltre a questo poi abbiamo dato il modo di determinare le derivate di queste funzioni, sia per mezzo delle equazioni (11), (13), ..., sia con successive derivazioni parziali partendo dalle formole (12); e ciò senza bisogno di determinare la funzione stessa z.

Queste derivate vengono espresse ordinariamente per mezzo delle variabili indipendenti e per la funzione (ignota) z; però si intende come possono tornare utilissime, e come in certi casi, facendo opportune trasformazioni su queste derivate, col tener conto della equazione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, si potrà anche giungere talvolta ad esprimere le derivate stesse per le sole variabili indipendenti; e ciò ancora senza bisogno di conoscere l'espressione analitica di z per mezzo di $x_1, x_2 \dots x_n$, ecc.

Del resto poi nel punto iniziale $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, conoscendosi il valore iniziale z_0 di z, si conosceranno anche le varie derivate parziali, e così i differenziali di z, fino a quell'ordine pel quale esistono e sono finite e continue nel punto $(a_1, a_2 \dots, a_n, z_0)$ le derivate di $f(x_1, x_2 \dots x_n, z)$, perchè le indicate derivate parziali di z dipendono soltanto dai valori iniziali $a_1, a_2, \dots, a_n, z_0$ di $x_1, x_2, \dots x_n, z$, ecc.

157. — Tenendo conto ora dei resultati ottenuti, e supponendo di avere una equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ che rispetto alle $n+1$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ soddisfa alle condizioni sotto le quali si è sicuri che in certi campi a n dimensioni essa definisce completamente una funzione z delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ finita e continua insieme ad alcune delle sue derivate parziali, noi possiamo dunque affermare che, quando pei valori $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ che si considerano, la funzione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ è finita e continua insieme

a quelle delle sue derivate parziali dei vari ordini che occorre successivamente di considerare, la equazione stessa $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ dà sempre luogo alle n equazioni (11) fra le n derivate parziali del prim'ordine di z; alle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni (13) fra le $\frac{n(n+1)}{2}$ derivate parziali del second'ordine di z, e in generale a $\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1.2.3\dots m}$ equazioni fra le derivate dell'ordine m di z.

E tutte queste equazioni (che si ottengono dalla equazione data $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ con successive derivazioni considerandovi z come funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$) servono alla completa determinazione successiva delle varie derivate parziali di z fino a quelle dell'ordine m inclusive, perchè il loro numero è successivamente eguale a quello di queste derivate, e (essendo $\frac{\partial f}{\partial z}$ diverso da zero) non si ha evidentemente alcuna impossibilità per la loro risoluzione successiva.

158. — Osserviamo poi che, essendo $p_1 + p_2 + \dots + p_n = m$, e indicando in generale col simbolo $\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}\right)$ la derivata di $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ presa col riguardare la z come funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$, si vede subito che le equazioni fra le derivate parziali di z di cui ora parlammo hanno precisamente la forma $\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}\right) = 0$; e poichè, d'altra parte, il differenziale m^0 di f calcolato nelle stessa ipotesi di z funzione di $x_1, x_2 \dots, x_n$ con $x_1, x_2 \dots, x_n$ variabili indipendenti, è dato dalla formola § 140 [pag. 188 e seg.] (*),

$$d^m f = \sum a_{p_1, p_2, \dots, p_n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}\right) dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \dots dx_n^{p_n},$$

(*) È quasi superfluo l'osservare che qualunque processo si tenga per calcolare il differenziale m^0 $d^m \varphi$ di una funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di n variabili indipendenti per la quale sono soddisfatte le solite condizioni rispetto alle varie sue derivate, e rispetto alla possibilità della inversione delle derivazioni, si giungerà sempre alla forma data nel § 140 [pag. 188 e seg.], perchè, quando per qualunque sistema di valori degli accrescimenti $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ dati a $x_1, x_2, \dots, x_n$ si avessero due forme distinte di $d^m \varphi$ per modo che fosse, per es. $d^m \varphi = \Sigma A_{p_1, p_2, \dots, p_n} dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \dots dx_n^{p_n}$, e $d^m \varphi = \Sigma B_{p_1, p_2, \dots, p_n} dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \dots dx_n^{p_n}$, se ne dedurrebbe subito anche l'eguaglianza dei coefficienti corrispondenti $A_{p_1, p_2, \dots, p_n}$, e $B_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ e non si avrebbe quindi che una forma unica per $d^m \varphi$, la quale in conseguenza sarebbe quella data al detto § 140.

dove $a_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$, per essere un coefficiente polinomiale, è diverso da zero, si può anche evidentemente affermare che volendo scrivere le equazioni precedenti fra le derivate parziali di z, all'infuori di certi coefficienti numerici che possono sempre sopprimersi, basta eguagliare a zero i coefficienti dei vari prodotti della forma $dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}$ nel differenziale m^0 di f, e nei differenziali degli ordini precedenti, quando questi differenziali siano calcolati riguardando z come funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

159. — Questo porta a dire che, quando $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ soddisfa alle solite condizioni, e z è la funzione implicita di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definita dalla equazione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, i varii differenziali che possono considerarsi di f, presi appunto nell'ipotesi che z sia la funzione ora indicata di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sono tutti rigorosamente eguali a zero.

E che così debba essere si intende subito anche con altri ragionamenti perchè, nella ipotesi appunto che z soddisfi alla equazione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, dando ad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ accrescimenti arbitrarî $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, l'accrescimento che ne resulterà per f sarà rigorosamente nullo, e dovrà avere ancora la solita forma $df + \varepsilon$, essendo ε un infinitesimo di ordine superiore al primo, e

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n\,;$$

talchè dovendo essere $df + \varepsilon = 0$ per un noto teorema sugl'infinitesimi, si concluderà subito che $df = 0$.

Questo poi dandoci $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0$ perchè $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sono tutti arbitrarî, ci porterà al modo stesso a concludere che $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 0$, $d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 0, \ldots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0$, e da ciò si trarrà che anche $d^2 f = 0$, e similmente poi si troverà che $d^3 f = 0$, $d^4 f = 0, \ldots$ come abbiamo trovato sopra.

E si può anzi aggiungere del resto che, quando non avessimo già trovato le equazioni fra le derivate parziali di z di cui abbiamo parlato sopra, avremmo potuto dedurle dall'osservare che dovendo essere zero rigorosamente i differenziali di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ presi nella solita ipotesi di z funzione di x_1, $x_2, \ldots, x_n$ e ciò qualunque fossero $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, si sarebbero dovuti annullare i coefficienti dei prodotti $dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}$, i quali, come abbiamo veduto, all'infuori di coefficienti numerici sono i primi membri delle equazioni (11), (13) ecc., e quindi saremmo giunti appunto a queste equazioni.

160. — In forza poi della osservazione che ora abbiamo fatto, si può anche aggiungere che le varie equazioni fra le derivate parziali del primo

ordine di z cui dà luogo la equazione data $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, possono riguardarsi come incluse tutte nell'unica forma $df = 0$; quelle fra le derivate del second'ordine di z possono riguardarsi come incluse nell'unica $d^2 f = 0$, e in generale quelle fra le derivate dell'ordine m di z possono riguardarsi come incluse nell'unica $d^m f = 0$; e ciò quando si intende al solito che i differenziali di f siano calcolati riguardando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come variabili indipendenti, e z come funzione di queste variabili.

E si può anche osservare in particolare che per mezzo di queste equazioni $df = 0$, $d^2 f = 0, \ldots$, si potranno calcolare successivamente con tutta facilità i valori dei differenziali $dz, d^2 z, d^3 z, \ldots$, nel punto iniziale $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, perchè in questo punto è conosciuto il valore iniziale z_0 di z; e conosciuti questi differenziali si avranno subito le derivate parziali dei varî ordini di z nello stesso punto, perchè ad es. la derivata parziale $\dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}, \ldots, \partial x_n^{p_n}}$ dove $p_1 + p_2 +, \ldots, + p_n = m$, non sarà altro che il coefficiente di $dx_1^{p_1} dx_2^{p_2} \ldots dx_n^{p_n}$ nel valore che si troverà per $d^m z$ diviso pel coefficiente polinomiale corrispondente.

161. — Analogamente poi a quanto si disse pel caso di una sola variabile indipendente, osserviamo anche che se, col tendere delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a valori speciali $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, la funzione z definita dalla equazione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ ha per limite z^0 e nel punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, z^0)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, mentre in ogni punto vicino sono soddisfatte le solite condizioni e i rapporti $-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, - \ldots\ldots -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ hanno limiti determinati per $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, allora potremo prendere questi limiti come valori di $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ nel punto $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ecc.

162. — In fine notiamo in particolare che, avendosi una equazione a tre variabili $f(x, y, z) = 0$ per la quale siano soddisfatte le condizioni sotto le quali siamo sicuri che in un certo campo relativo a x o y essa definisce una funzione z di x e y finita e continua insieme alle sue derivate parziali, almeno fino a quelle di un certo ordine, si può affermare che questa equazione $f(x, y, z) = 0$ dà luogo alle due equazioni fra le derivate parziali del prim'ordine p e q di z

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0\,,$$

alle tre equazioni fra le derivate parziali r, s, t del second' ordine di z

$$(15)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2 + \frac{\partial f}{\partial z} r = 0\,, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p\, q + \frac{\partial f}{\partial z} s = 0\,, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2 + \frac{\partial f}{\partial z} t = 0\,, \end{cases}$$

ecc.... e queste possono riguardarsi come contenute respettivamente nelle equazioni $df = 0$, $d^2 f = 0, \ldots$

163. — Diamo ora anche un esempio di derivate parziali di funzioni implicite di più variabili indipendenti calcolate coi metodi che ora abbiamo esposto.

Supponiamo perciò di avere l'equazione

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

che rappresenta una superficie a centro del second'ordine, e che in conseguenza pei valori di x e y che cadono in un certo campo definisce due funzioni implicite finite e continue $f(z)$ di x e y.

Osservando che l'equazione differenziale del prim'ordine $df = 0$, è la seguente $ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0$, ovvero $(ax + czp)\,dx + (by + czq)\,dy = 0$, si trova subito che le equazioni fra le derivate parziali del prim'ordine p e q sono le due

$$(16)\qquad ax + czp = 0\,, \quad by + czq = 0\,;$$

e quindi si ha subito

$$(17)\qquad p = -\frac{ax}{cz}\,, \quad q = -\frac{by}{cz}\,.$$

quando non sia $z = 0$.

Osservando poi che l'equazione differenziale del second' ordine $d^2 f = 0$ è la seguente

$$adx^2 + bdy^2 + c(pdx + qdy)^2 + cz\,(rdx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2) = 0\,,$$

o anche

$$(a + cp^2 + czr)\,dx^2 + 2\,c\,(pq + sz)\,dx\,dy + (b + cq^2 + czt)\,dy^2 = 0\,,$$

si trova che le equazioni fra le derivate parziali del second'ordine r, s, t sono le tre

$$a + cp^2 + czr = 0\,, \quad pq + sz = 0\,, \quad b + cq^2 + czt = 0\,,$$

come avremmo trovato anche applicando le formole (15), o derivando parzialmente le formole (16).

Da queste poi si ha

$$r = -\frac{acz^2 + a^2 x^2}{c^2 z^3}\,, \quad s = -\frac{abxy}{c^2 z^3}\,, \quad t = -\frac{bcz^2 + b^2 y^2}{c^2 z^3}$$

per le tre derivate parziali del second'ordine di z, che avremmo potuto ottenere anche derivando i valori (17) di p e q colle regole delle funzioni composte; e tanto per queste derivate quanto, come già notammo, per le due p e q bisogna escludere i punti (x, y) pei quali x e y uniti al valore di z che soddisfa alla equazione data $f(x, y, z) = 0$ annullano $\frac{\partial f}{\partial z}$; cioè bisogna escludere i punti pei quali si ha $z = 0$, $ax^2 + by^2 + d = 0$ che sono tutti quelli delle sezioni fatte dal piano xy nella superficie data $f(x, y, z) = 0$ e pei quali converrebbe fare un esame speciale, non potendo dirsi ora applicabili le osservazioni fatte nel paragrafo precedente, poichè non si tratta qui di punti isolati.

164. — Passiamo ora a considerare il caso dei sistemi di funzioni implicite di una o più variabili indipendenti, e per essere più chiari supponiamo dapprima che si tratti di due funzioni y e z di una sola variabile indipendente x.

Essendo allora

$$(18)\qquad f(x, y, z) = 0\,, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

le equazioni date, incominciamo dall'ammettere che si conosca un sistema iniziale di valori x_0, y_0, z_0 che le soddisfano, e supponiamo che il punto (x_0, y_0, z_0) figuri come punto interno del campo a tre dimensioni nel quale sono date le funzioni $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$; e nei punti (x, y, z) di un intorno di (x_0, y_0, z_0) queste funzioni abbiano le loro derivate parziali del prim'ordine finite e continue.

Allora, supponendo anche che $f(x, y, z)$ dipenda effettivamente da z e che nel punto (x_0, y_0, z_0) la sua derivata $\frac{\partial f}{\partial z}$ sia diversa da zero, per quanto si disse nel caso precedente si potrà asserire che in un campo c sufficientemente piccolo a due dimensioni relativo a x e y e di cui il punto (x_0, y_0) figura come punto interno, la equazione $f(x, y, z) = 0$ definisce completamente una funzione ben determinata $z(x, y)$ delle due variabili x e y che è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ e nel punto (x_0, y_0) è uguale a z_0 e soddisfa sempre all'equazione $f(x, y, z) = 0$; e finchè il campo c che si considera è abbastanza piccolo, essa non ne definisce che una; talchè qualunque sia il valore che si troverà poi per y, finchè y resterà assai prossimo a y_0, la z dovrà necessariamente risultare dalla formola $z = z(x, y)$ attribuendovi ad y i valori che essa dovrà poi avere.

Ora, supponendo dapprima che $\varphi(x, y\, z)$ dipenda anch'essa da z, e osservando che deve essere soddisfatta anche la seconda equazione $\varphi(x, y, z) = 0$, si intende subito che in questa equazione, almeno finchè x, y, z devono essere abbastanza prossimi a x_0, y_0, z_0, la z dovrà essere data da $z = z(x, y)$, essendo $z(x, y)$ la funzione poc'anzi indicata; dunque considerando ora in $\varphi(x, y, z)$ la z come una funzione di x e y, ci rimarrà da soddisfare alla equazione $\varphi(x, y, z(x, y)) = 0$, il cui primo membro può essere riguardato come una funzione composta $F(x, y)$ di x e y.

Ora, per le ipotesi che abbiamo fatto sopra, questa funzione $F(x, y)$ soddisfa intanto alla condizione di essere finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ nell'intorno di (x_0, y_0) perchè si ha $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$; e essendo $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, con $\frac{\partial f}{\partial z}$ diverso da zero, si può anche scrivere

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\};$$

dunque se nel punto (x_0, y_0, z_0) oltre a $\frac{\partial f}{\partial z}$, anche il determinante $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sarà diverso da zero, la equazione $\varphi(x, y, z(x, y)) = 0$ definirà effettivamente una funzione $y(x)$ di x finita e continua insieme alle sue derivate prime in un intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$, e col prendere h_0 abbastanza piccolo i suoi valori saranno abbastanza vicini a y_0 in modo che i valori corrispondenti x e y presi insieme apparterranno a punti (x, y) che cadono nel campo c considerato sopra, nel quale per ogni sistema di valori di x e y si ha $z = z(x, y)$, e perciò le equazioni date (16) saranno soddisfatte da questi valori $y(x)$ e $z(x, y(x))$ di y e di z.

Se poi $\varphi(x, y, z)$ non dipende da z si giunge ancora subito agli stessi resultati, perchè allora la funzione $F(x, y)$ viene ad essere appunto la funzione data φ; e se avvenisse che nel punto iniziale (x_0, y_0, z_0) fosse zero $\frac{\partial f}{\partial z}$, senza però esserlo il determinante $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, allora sarebbe certamente diverso da zero il $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ e quindi partendo dalla equazione $\varphi(x, y, z) = 0$ invece che dall'altra $f(x, y, z) = 0$ si giungerebbe ancora a dimostrare l'esistenza delle funzioni y e z; dunque, tenendo conto di tutti questi risultati, si può ora evidentemente affermare che, quando siano soddisfatte le condizioni poste sopra rispetto alla esistenza di valori finiti e continui per le derivate parziali di prim'ordine di $f(x, y, z)$ e di $\varphi(x, y, z)$ in un intorno di (x_0, y_0, z_0), e rispetto all'esser differente da zero il determinante $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ nel punto (x_0, y_0, z_0), esisterà effettivamente un sistema di funzioni $y = y(x)$, $z = z(x, y) = z(x, y(x)) = z(x)$ che in un intervallo abbastanza piccolo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ saranno finite e continue insieme alle loro derivate e soddisfaranno alle equazioni date (18) e per $x = x_0$ si ridurranno a y_0 e z_0; e questo sistema di funzioni sarà unico.

165. — Il processo stesso che abbiamo tenuto per dimostrare l'esistenza di queste funzioni y e z mostra anche che sotto le stesse condizioni esse avranno anche le derivate almeno fino a quell'ordine pel quale esistono le varie derivate parziali di $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$ nell'intorno del punto (x_0, y_0, z_0).

Del resto, avendo dimostrata la esistenza di queste funzioni y e z di x che, quando sono soddisfatte le condizioni indicate sopra, verificano le equazioni date (18) per tutti i valori di x che cadono in un certo intervallo $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$, s'intende subito che le loro derivate del prim'ordine possono ottenersi sia uguagliando a zero le derivate di $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$ considerate come funzioni composte di x, sia eguagliando a zero i loro differenziali come si disse anche nei casi precedenti.

Seguendo quest'ultimo processo si giunge alle equazioni differenziali seguenti

$$(19)\qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0, \end{cases}$$

le quali ci danno subito

$$(20)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

essendo per ipotesi il primo denominatore diverso da zero, e intendendo che quando il secondo o terzo siano zero debbano esserlo anche i numeratori corrispondenti dy o dz; talchè sarà

$$dy = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dx, \qquad dz = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}} dx,$$

e da queste si avranno subito anche i valori di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

Differenziando poi questi valori di dy e dz, o le equazioni (19), noi potremmo ottenere anche i valori dei differenziali e delle derivate seconde di y e z, tutte le volte che nei punti (x, y, z) che si vengono a considerare le derivate prime e seconde delle funzioni $f(x, y, z)$ e $\varphi(x, y, z)$ sono finite e continue, ecc.

E si può notare che se, invece di prendere x come variabile indipendente, noi prendessimo y o z, giungeremmo ancora alle stesse equazioni differenziali del prim' ordine (19) e alle equazioni (20), ma avremmo alcune differenze nelle equazioni fra i differenziali del second' ordine.

In questi casi poi dovremmo supporre diverso da zero il determinante che nella (20) trovasi al denominatore del differenziale dy o dz della variabile che fosse presa come variabile indipendente.

166. — Per dare un esempio prendiamo a considerare le due equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

nelle quali $r, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quantità costanti, e che, come sappiamo, rappresentano la linea d'intersezione di una sfera con un piano, cioè un cerchio nello spazio.

Le funzioni finite y e z definite da quest'equazioni esisteranno certamente, e si avranno le equazioni differenziali

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \qquad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

le quali ci daranno subito le altre $\frac{dx}{\gamma y - \beta z} = \frac{dy}{\alpha z - \gamma x} = \frac{dz}{\beta x - \alpha y}$, che servono a determinare anche i valori di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ quando $\gamma y - \beta z$ non sia zero, ecc.

167. — Con eguale facilità può trattarsi anche il caso dei sistemi di funzioni implicite $y_1, y_2, \ldots, y_m$ di più variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$

definite da un sistema di m equazioni della forma

$$(21) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Indichiamo infatti con $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ un sistema di $n+m$ valori finiti delle $n+m$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ che soddisfino alle equazioni date (21); e ammettiamo che in un campo c a $n+m$ dimensioni relativo a queste variabili (nel quale si suppongono date le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$) il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ figuri come un punto interno, e in un intorno di questo punto le funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_m$ siano finite e continue insieme alle loro varie derivate parziali di prim' ordine rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Supponendo allora che nel medesimo punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ la derivata $\frac{\partial f_1}{\partial y_m}$ non sia zero (ciò che porta anche che f contenga effettivamente y_m), la prima equazione $f_1 = 0$ per quanto dicemmo sopra al § 155 [pag. 213 e seg.] definirà una funzione $y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in un certo campo c_{n+m-1} a $n+m-1$ dimensioni relativo alle $n+m-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ e a cui apparterrà il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ come punto interno; e questa funzione, che nel punto ora indicato dev'essere uguale a y_m^0, sarà unica, e le sue varie $n+m-1$ derivate parziali di prim'ordine, nell'attuale ipotesi di $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ tutte indipendenti fra loro, resulteranno determinate dalle equazioni

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} = 0.$$

Si consideri ora la seconda delle equazioni (21), per la quale noi riterremo che, quand'anche f_2 non dipenda già da y_{m-1}, venga però sempre a dipenderne effettivamente quando s'intende che in essa la y_m sia la funzione $y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1})$ di cui ora abbiamo dimostrato la esistenza.

Questa equazione $f_2 = 0$, quando s'intenda che in essa y_m (se vi comparisce) sia la funzione ora indicata, prenderà la forma $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}) = 0$, dove la funzione φ_2 in un intorno del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-1}^0)$

sarà finita e continua insieme alle sue varie derivate parziali, perchè, pel modo con cui è stata ottenuta da f_2, qualunque siano gli indici r e s avremo

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} = \frac{\partial f_2}{\partial x_r} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_r} \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_s} = \frac{\partial f_2}{\partial y_s} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_s} \; ;$$

quindi, osservando che la nuova equazione $\varphi_2 = 0$ è soddisfatta dai valori $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-1}^0$ di $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, si può ora asserire che, se $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}}$ nel punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-1}^0)$ non è zero, la equazione stessa $\varphi_2 = 0$ definisce una funzione $y_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-2})$ delle $m+n-2$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-2}$ in un certo campo c_{n+m-2} a $n+m-2$ dimensioni relativo a queste variabili, e questa funzione ha la proprietà di essere eguale a y_{m-1}^0 nel punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-2}^0)$, e di essere sempre finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in tutti i punti del campo c_{n+m-2}.

E quando il campo c_{n+m-2} si prenda abbastanza piccolo, pur restando sempre diverso da zero, e col punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-2}^0)$ nel suo interno, è certo che i valori che in esso prenderà la funzione y_{m-1} ora determinata, uniti ai valori corrispondenti di $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-2}$, verranno ad appartenere a punti del campo c_{n+m-1} a $n+m-1$ dimensioni considerato sopra, talchè le funzioni ora determinate y_m, y_{m-1} soddisfano già alle due equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ in tutti i punti di c_{n+m-2}, e saranno uniche.

Continuando, noi prenderemo a considerare la equazione $f_3 = 0$ per la quale supporremo che, quand'anche f_3 non dipenda da y_{m-2}, essa venga però a dipenderne effettivamente quando per y_m e y_{m-1} s'intendono prese le funzioni di cui ora abbiamo dimostrato l'esistenza; e osserveremo, come nel caso precedente, che essa darà luogo ad un'altra equazione della forma $\varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-2}) = 0$, dove φ_3 è una funzione finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine in un intorno del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_{m-2}^0)$, e in questo punto è eguale a zero.

Conseguentemente se nel medesimo punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-2}^0)$ la derivata $\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_{m-2}}$ non è zero, la nuova equazione $\varphi_3 = 0$ definirà anch'essa una funzione ben determinata $y_{m-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3})$ che nel punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{m-3}^0)$ sarà uguale a y_{m-2}^0, e in un campo c_{n+m-3} a $n+m-3$ dimensioni relativo alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}$ e di cui questo punto è un punto interno, la funzione ora indicata y_{m-2} sarà finita e continua insieme alle sue varie derivate parziali del prim'ordine; e i suoi valori saranno tali che uniti ai valori corrispondenti delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}$ verranno ad appartenere a punti del campo c_{n+m-2} a $n+m-2$ dimensioni considerato sopra; talchè le tre funzioni ora determinate y_m, y_{m-1}, y_{m-2} soddisfaranno alle tre equazioni $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ in tutti i punti $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3})$ del campo c_{n+m-3} e in questo campo saranno uniche.

Così continuando, coll'ammettere che pei valori $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ di $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ le varie derivate $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_{m-2}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}$ delle funzioni $f_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ che si considerano successivamente siano differenti da zero, si giungerà infine a concludere che la equazione finale $\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) = 0$ definirà anch'essa una funzione ben determinata $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ delle vere variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che nel punto $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sarà eguale a y_1^0; e in un campo c_n a n dimensioni relativo alle stesse variabili, e in cui il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ figura come punto interno, la funzione ora indicata y_1 sarà una funzione finita e continua insieme alle sue varie derivate parziali del prim'ordine, e i suoi valori y_1 saranno tali che uniti ai valori corrispondenti delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verranno ad appartenere al campo c_{n+1} ad $n+1$ dimensioni che si sarà considerato precedentemente nel determinare y_2 in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1$, ecc.; talchè le funzioni

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} y_m &= y_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}, y_{m-2}, y_{m-1}) \; , \\ y_{m-1} &= y_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}, y_{m-2}) \; , \\ y_{m-2} &= y_{m-2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{m-3}) \; , \\ & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1) \; , \\ y_1 &= y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; , \end{aligned} \right.$$

che noi abbiamo successivamente determinato nei respettivi campi c_{n+m-1}, $c_{n+m-2}, \ldots, c_{n+1}, c_n$, quando si considerino successivamente, ma in senso inverso, pei varii valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$ nel campo c_n, costituiranno un sistema di quantità che potranno riguardarsi come un sistema di funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in questo campo c_n, che godranno della proprietà di soddisfare alle equazioni date (21), di essere finite e continue insieme alle loro varie derivate parziali del prim'ordine rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di prendere i valori $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ nel punto $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, e questo sistema di funzioni sarà unico; talchè può anche affermarsi che, sotto le condizioni che successivamente abbiamo poste, anche le equazioni (21) definiscono nel campo c_n un sistema ben determinato di funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$ quale è quello che ora abbiamo indicato.

E il metodo che abbiamo tenuto per dimostrare l'esistenza delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ è anche un metodo per trovarle, poichè in sostanza non è che un processo di eliminazione. Nelle applicazioni poi si potrà spesso fare uso anche di metodi speciali di eliminazione più semplici.

168. — Per essere dunque sicuri della esistenza di questi sistemi di funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ almeno in un campo non troppo esteso che comprende come punto interno il punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ dove esse hanno i valori $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$, oltre a richiedersi che le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ siano finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine rispetto a tutte le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ in un intorno del punto iniziale $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$, si richiede altresì che siano differenti da zero le successive derivate $\frac{\partial f_1}{\partial y_m}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_{m-2}}, \dots, \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_2}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}$ prese respettivamente nei punti iniziali $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m-2}^0, y_{m-1}^0, y_m^0)$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m-2}^0, y_{m-1}^0)$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{m-2}^0), \dots$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0)$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0)$ dei campi $c_{n+m-1}, c_{n+m-2}, \dots, c_{n+2}, c_{n+1}$, che abbiamo considerato.

È facile però di vedere che queste ultime condizioni si riducono ad una sola che consiste nell'essere $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ valori tali che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots\dots\dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nel punto iniziale $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ sia differente da zero.

Osserviamo infatti che quando nel processo precedente saremo giunti, per es., a valerci delle prime h equazioni (21), le funzioni allora già trovate $y_m, y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m-h+1}$ soddisfaranno identicamente alle equazioni stesse $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots f_h = 0$; cioè le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_h$ saranno rese identicamente nulle quando s'intenda che in esse $y_m, y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m-h+1}$ abbiano i valori successivamente trovati.

Riguardando allora queste funzioni $y_m, y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m-h+1}$ come espresse tutte per le variabili rimanenti $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{m-h}$ e indicando con $\left(\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-h}}\right), \left(\frac{\partial y_{m-1}}{\partial y_{m-h}}\right), \dots, \left(\frac{\partial y_{m-h+1}}{\partial y_{m-h}}\right)$ le loro derivate rispetto a y_{m-h} prese in quest'ultima ipotesi, è chiaro che le derivate rispetto a y_{m-h} di $f_1, f_2, \dots, f_h$, calcolate in questa stessa ipotesi con la regola delle funzioni composte, saranno nulle esse pure come le funzioni stesse $f_1, f_2, \dots, f_h$, e la derivata di f_{h+1} calcolata al modo stesso sarà uguale alla derivata $\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial y_{m-h}}$ che figura nelle considerazioni fatte sopra; talchè avremo le equazioni seguenti

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-h}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-h+1}}\left(\frac{\partial y_{m-h+1}}{\partial y_{m-h}}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-h+2}}\left(\frac{\partial y_{m-h+2}}{\partial y_{m-h}}\right) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\left(\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-h}}\right), \\ 0 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-h}} + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-h+1}}\left(\frac{\partial y_{m-h+1}}{\partial y_{m-h}}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-h+2}}\left(\frac{\partial y_{m-h+2}}{\partial y_{m-h}}\right) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\left(\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-h}}\right), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 &= \frac{\partial f_h}{\partial y_{m-h}} + \frac{\partial f_h}{\partial y_{m-h+1}}\left(\frac{\partial y_{m-h+1}}{\partial y_{m-h}}\right) + \frac{\partial f_h}{\partial y_{m-h+2}}\left(\frac{\partial y_{m-h+2}}{\partial y_{m-h}}\right) + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial y_m}\left(\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-h}}\right), \\ \frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial y_{m-h}} &= \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h}} + \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h+1}}\left(\frac{\partial y_{m-h+1}}{\partial y_{m-h}}\right) + \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h+2}}\left(\frac{\partial y_{m-h+2}}{\partial y_{m-h}}\right) + \dots + \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_m}\left(\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-h}}\right). \end{aligned}$$

Ora, se si forma il determinante

$$D_{h+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-h}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-h+1}} & \dots\dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-h}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-h+1}} & \dots\dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h}} & \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h+1}} & \dots\dots & \frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

che non è altro che un determinante minore del determinante D, moltiplicando le equazioni precedenti pei respettivi elementi reciproci dei termini della prima colonna di questo determinante D_{h+1}, si vede subito che D_{h+1} viene ad essere il prodotto di $\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial y_{m-h}}$ per l'elemento reciproco di $\frac{\partial f_{h+1}}{\partial y_{m-h}}$, il quale elemento reciproco, salvo tutt'al più il segno, è evidentemente il determinante D_h relativo al caso in cui, col processo che abbiamo dato, si fosse giunti a valersi soltanto delle equazioni $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots f_{h-1} = 0$, e non anche della equazione $f_h=0$; quindi, poichè quando sieno soddisfatte le condizioni poste sopra, le D_h vengono ad essere successivamente diverse da zero, si può scrivere evidentemente $\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial y_{m-h}} = \pm \frac{D_{h+1}}{D_h}$, e perciò si avrà, salvo pei segni

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{D_2}{\frac{\partial f_1}{\partial y_m}}\,,\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_{m-2}} = \frac{D_3}{D_2}\,,\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_{m-3}} = \frac{D_4}{D_3}\,, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = \frac{D_m}{D_{m-1}} = \frac{D}{D_{m-1}}\,,$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}}\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-2}} \cdots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} = \pm D\,;$$

talchè si può concludere intanto che, se le condizioni precedentemente trovate sono soddisfatte, il determinante D sarà diverso da zero nel punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_2^0, \dots, y_m^0)$, e quindi (a causa della continuità) anche in un certo campo di $n+m$ dimensioni che ha questo punto nel suo interno.

Ora, quando si trovi inversamente che il determinante D in un punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ è diverso da zero, per una nota proprietà dei determinanti potremo sempre porre le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ in un ordine tale che i determinanti minori successivi $D_1, D_2, \dots, D_{h+1}, \dots, D_{m-1}$ di D nello stesso punto siano tutti diversi da zero, talchè noi possiamo ora, come appunto volevamo, affermare che, per esser sicuri dell'esistenza del sistema di funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ di cui parlammo nel paragrafo precedente, oltre all'assicurarsi che le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono finite e continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine in un piccolo campo che racchiude il punto iniziale $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ nel quale si sa che $f_1, f_2, \dots, f_m$ sono zero, basta assicurarsi che nello stesso punto il determinante

$$(23)\qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

è differente da zero, senza che vi sia affatto bisogno di esaminare le quan-

tità $\frac{\partial f_1}{\partial y_m}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{m-1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1}$ le quali, quando le $f_1, f_2, \dots, f_m$ siano poste in un ordine conveniente, dovranno necessariamente essere anch'esse differenti da zero.

S'intende dunque in particolare che deve sempre escludersi il caso in cui il determinante D è zero in qualunque punto del campo ad $n+m$ dimensioni nel quale sono date le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$; e del resto si potrebbe vedere che in questo caso alcune delle equazioni date (21) rientrano l'una nell'altra.

Il determinante D si chiama il *determinante funzionale,* o anche l'*Iacobiano* delle funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$.

169. — Trovate così le condizioni sotto le quali siamo sicuri che in un dato campo le equazioni

$$(24)\qquad f_1 = 0\ ,\ f_2 = 0\ ,\ \dots\dots\ ,\ f_m = 0\,,$$

dove in generale $f_r = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$, definiscono un sistema di funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$ delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ che sono finite e continue insieme alle loro derivate del prim'ordine, s'intende che, supponendo trovate queste funzioni e considerando le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ come funzioni composte di $x_1, x_2, \dots, x_n$ per mezzo di queste variabili stesse e delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$, si potranno trovare le derivate di $y_1, y_2, \dots, y_m$ rispetto a ciascuna delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ derivando rispetto a queste variabili le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_m$ colla regola delle funzioni composte, e poi uguagliando le derivate a zero.

Si troveranno così n sistemi di equazioni che avranno tutti la forma seguente

$$(25)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_r} + \dots\dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_r} = 0\,, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_r} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_r} + \dots\dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_r} = 0\,, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_r} + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_r} + \frac{\partial f_m}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_r} + \dots\dots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_r} = 0\,, \end{array} \right.$$

dove $r = 1, 2, 3, \dots, n$; e poichè queste equazioni sono di primo grado rapporto a $\frac{\partial y_1}{\partial x_r}, \frac{\partial y_2}{\partial x_r}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_r}$, e pei valori di $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ che si considerano il determinante dei coefficienti è sempre diverso da zero, si avranno subito di qui i valori richiesti delle derivate parziali di prim'ordine delle funzioni $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Formando poi nuovi sistemi di equazioni col derivare parzialmente i sistemi ottenuti (25), o anche derivando parzialmente le derivate di prim'ordine ottenute, si potranno avere le derivate parziali di secondo ordine delle $y_1, y_2, \dots, y_m$ tutte le volte che pei soliti valori di $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ che si considerano anche le derivate parziali di second'ordine delle funzioni $f_1, f_2, \dots f_m$ sono finite e continue.

S'intende poi che se le vere variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ si riducono ad una sola, per es. x_1, i sistemi di equazioni (25) si ridurranno ad un solo, e lo stesso accadrà dei sistemi seguenti, e allora le derivate di $y_1, y_2, \dots, y_m$ diverranno semplici derivate ordinarie rispetto ad x_1, ecc.

170. — Invece dei sistemi di equazioni (25) e di quelli successivi fra le derivate parziali di primo e secondo ordine ecc. di $y_1, y_2, \dots, y_m$, s'intende che si potranno scrivere le equazioni differenziali che si ottengono uguagliando a zero i vari differenziali totali di $f_1, f_2, \dots, f_m$, giacchè anche in questo caso si trova subito che questi differenziali devono essere zero; e quando si siano scritte queste equazioni differenziali, volendo ritrovare le equazioni (25) e le successive, basterà porvi per i differenziali di $y_1, y_2, \dots y_m$ i loro valori espressi per $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, e poi uguagliare a zero i coefficienti delle varie potenze di $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Queste equazioni differenziali pel caso dei differenziali di prim'ordine saranno le seguenti

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}dy_m=0\,, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_m}dy_m=0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}dx_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_2}dy_2+\dots\dots+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}dy_m=0\,, \end{array}\right.$$

e s'intende appunto che quando si sostituiscano in queste per $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ i loro valori pei quali si ha in generale

$$(27)\qquad dy_h=\frac{\partial y_h}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y_h}{\partial x_2}dx_2+\dots\dots+\frac{\partial y_h}{\partial x_n}dx_n\,,$$

uguagliando poi a zero i coefficienti di $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, si ritroveranno le equazioni (25).

Differenziando poi le equazioni precedenti, si otterranno altre n equazioni ciascuna delle quali avrà la forma simbolica seguente

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_r}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f_r}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f_r}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial f_r}{\partial y_m}dy_m\right)^2+\frac{\partial f_r}{\partial y_1}d^2y_1+\frac{\partial f_r}{\partial y_2}d^2y_2+\dots+\frac{\partial f_r}{\partial y_m}d^2y_m=0,$$

e queste quando per $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ vi si pongano i valori che si hanno dalla (27) col farvi $h=1, h=2, \dots, h=m$, e per $d^2y_1, d^2y_2, \dots, d^2y_m$ i valori che si deducono dalla formola simbolica

$$d^2y_h=\left(\frac{\partial y_h}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y_h}{\partial x_2}dx_2+\dots\dots+\frac{\partial y_h}{\partial x_n}dx_n\right)^2,$$

si trasformeranno in equazioni i cui termini saranno tutti della forma $A_{r,s}dx_r dx_s$, e uguagliando a zero i coefficienti $A_{r,s}$ di questi termini si otterranno le equazioni stesse che si sarebbero dedotte dalle (25) colle derivazioni parziali, ecc.

171. — In particolare poi quando in $f_1, f_2, \dots, f_m$ o in $y_1, y_2, \dots, y_m$ non deve aversi che una sola variabile indipendente, p. es. x_1, le equazioni (26) si ridurranno alle seguenti

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1+\dots\dots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}dy_m=0\,, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1+\dots\dots+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_m}dy_m=0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}dy_1+\dots\dots+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}dy_m=0\,, \end{array}\right.$$

le quali, com'è noto dall'algebra, danno subito le altre

$$(29)\qquad \frac{dx_1}{A_{x_1}}=\frac{dy_1}{A_{y_1}}=\frac{dy_2}{A_{y_2}}=\dots\dots=\frac{dy_m}{A_{y_m}}\,,$$

dove $A_{x_1}, A_{y_1}, A_{y_2}, \dots, A_{y_m}$ sono i determinanti che vengono dalla matrice

$$\left\|\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right\|$$

sopprimendo respettivamente la prima, la seconda, la terza, ... e la $(m+1)^a$ colonna, e prendendoli alternativamente col segno $+$ e col segno $-$; e da queste equazioni si avranno subito i differenziali $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ e le derivate $\frac{dy_1}{dx_1}, \frac{dy_2}{dx_1}, \ldots, \frac{dy_m}{dx_1}$.

E si può notare che se invece di x_1 si prendesse come variabile indipendente una qualunque delle $y_1, y_2, \ldots$, per es. y_1, allora si avrebbero ancora le equazioni (28) o (29) pel caso che A_{y_1} non fosse zero, ecc.

172. — Nel caso generale poi le equazioni (26) conducono con uguale facilità alle equazioni analoghe alle (29) che determinano i valori dei differenziali $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$, poichè evidentemente ci danno le seguenti

$$(30)\qquad \frac{1}{A} = \frac{dy_1}{A_{y_1}} = \frac{dy_2}{A_{y_2}} = \ldots\ldots = \frac{dy_m}{A_{y_m}},$$

dove le $A, A_{y_1}, A_{y_2}, \ldots, A_{y_m}$ si ottengono al modo stesso dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\|$$

e quando siano trovati $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ espressi per $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, basterà prendere nelle espressioni così ottenute di $dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ i coefficienti di $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ come valori di $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, \ldots$, giacchè si ha sempre come è noto $dy_h = \frac{\partial y_h}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_h}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_h}{\partial x_n} dx_n$ per $h = 1, 2, \ldots, m$.

Similmente si troverebbero equazioni analoghe alle (30) per determinare i valori dei differenziali secondi $d^2y_1, d^2y_2, \ldots, d^2y_m$; e quando si avesse in tal modo per es. $d^2y_h = \sum A_r dx_r^2 + 2\sum A_{r,s} dx_r dx_s$ si potrebbe subito concludere che A_r è la derivata $\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_r^2}$, e $A_{r,s}$ è la derivata mista $\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_r \partial x_s}$, ecc.

Nei casi particolari poi, anche senza ricorrere a questi metodi generali, si potranno trovare con speciali artifizi i differenziali primi, secondi, ... delle funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$, o almeno di quelle fra queste funzioni che occorre di considerare; dopo di che si troveranno subito i valori delle derivate parziali che si cercano (*).

173. — Volendo particolarizzare un poco la questione ed accennare al tempo stesso ad alcuni artifizî speciali che si usano nelle applicazioni, supporremo ora che si abbia da considerare il caso di due variabili indipendenti x e y e di due equazioni della forma

$$(31)\quad z = f(x, y, \alpha), \quad \varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad \text{ovvero} \quad f(x, y, \alpha) - z = 0, \quad \varphi(x, y, \alpha) = 0,$$

nelle quali z è una funzione che può riguardarsi come una funzione implicita, ed è quella che più importa di considerare, ed α è un'altra quantità che può essere anch'essa una funzione implicita o una quantità ausiliaria; e supporremo che siano soddisfatte le condizioni sotto le quali siamo sicuri che in un dato campo relativo a x e y queste equazioni definiscono due funzioni z e α di x e y finite e continue insieme alle loro derivate almeno fino a quell'ordine pel quale abbiamo bisogno di considerarle.

Secondo quanto abbiamo detto, volendo determinare le derivate $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ o p e q di z, si osserverà che devono aversi le due equazioni

$$(32)\qquad \begin{cases} dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha, \\ 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha, \end{cases}$$

e $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ dovrà essere diverso da zero almeno nel campo nel quale si considerano

(*) Riportandoci a quanto dicemmo nella nota alla pag. 210, osserveremo che, anche negli altri casi di funzioni implicite considerati dopo, nel punto iniziale vengono sempre conosciute le derivate di queste funzioni fino a quell'ordine pel quale si possono considerare.

E siccome mostreremo in seguito che le considerazioni che facemmo alla pag. 99 e seg. per lo sviluppo di Taylor nel caso delle funzioni di una sola variabile si estendono anche alle funzioni di più variabili, così le conclusioni della nota suddetta si estendono anche a tutte le funzioni implicite considerate dopo, e si può quindi affermare che anche queste funzioni implicite e le loro derivate possono sempre determinarsi effettivamente in intorni sufficientemente piccoli del punto iniziale con tutto quel grado di approssimazione che si vuole.

x, y, z e α; e poichè da queste coll'eliminazione di $d\alpha$ si ottiene subito

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) dy ,$$

si concluderà immediatamente che si ha

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad , \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} . \tag{33}$$

Per avere poi anche le derivate seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, o r, s e t, si osserverà che differenziando le (32) si ottengono le due equazioni

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha} dy\, d\alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x} d\alpha\, dx + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d^2\alpha ,$$

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha} dy\, d\alpha + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial x} d\alpha\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d^2\alpha ;$$

e ora ricavando il $d\alpha$ dalla seconda delle (32) e poi, dopo di averlo sostituito nella seconda delle ultime, ricavando anche il $d^2\alpha$, potremo coi valori ottenuti di $d\alpha$ e $d^2\alpha$ ridurre il valore trovato per $d^2 z$ alla forma seguente $d^2 z = \mathrm{A}\, dx^2 + 2\mathrm{B}\, dx\, dy + \mathrm{C}\, dy^2$, donde potremo dedurre $r = \mathrm{A}$, $s = \mathrm{B}$, $t = \mathrm{C}$, pei valori cercati di r, s, t; e si può notare che questi stessi valori di r, s, t potranno trovarsi anche derivando le espressioni (33) di p e q col considerarvi α come una funzione il cui differenziale $d\alpha$ viene dato insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ dalla seconda delle (32); e possono anche ottenersi, con semplicità spesso maggiore, applicando ai due sistemi di equazioni

$$(34) \quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} , \\ 0 = \varphi(x, y, \alpha) \quad , \end{cases} \qquad (35) \quad \begin{cases} q = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} , \\ 0 = \varphi(x, y, \alpha) \quad , \end{cases}$$

lo stesso processo che abbiamo seguito per trovare i valori (33) di p e q come se i sistemi (34) e (35) corrispondessero ciascuno separatamente al sistema di equazioni (31), giacchè in tal modo noi verremmo evidentemente a determinare i valori di $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial y}$, cioè appunto r, s, t.

174. — Aggiungiamo poi che, se invece delle equazioni (31) si avessero le altre

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y, \alpha) = 0 \tag{36}$$

e fossero ancora soddisfatte le solite condizioni per la esistenza di un sistema di funzioni z e α che soddisfano a queste equazioni e sono finite e continue insieme ad alcune delle loro derivate, allora invece delle (32) si avrebbero le altre

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha = 0 ,$$

e $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ nel campo dei valori di x, y, z, α sarebbero diverse da zero; talchè eliminando il $d\alpha$, e poi eguagliando a p e q i coefficienti di dx e dy nel valore che ne risulterebbe per dz, si troverebbe subito

$$p = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad , \quad q = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) ;$$

e il calcolo delle derivate seconde, sebbene assai più complicato, potrebbe farsi coi metodi usati nel caso precedente.

175. — Per dare un esempio prendiamo a considerare il caso delle due equazioni che noi ritroveremo in seguito nelle applicazioni geometriche

$$(37) \quad \begin{cases} z = \alpha x + \mathrm{F}(\alpha) y + \mathrm{F}_1(\alpha) = f(x, y, \alpha) , \\ 0 = x \;\; + \mathrm{F}'(\alpha) y + \mathrm{F}'_1(\alpha) = \varphi(x, y, \alpha) , \end{cases}$$

la seconda delle quali è la derivata parziale della prima rispetto al parametro α; e supponiamo che in $\mathrm{F}(\alpha)$ e $\mathrm{F}_1(\alpha)$, e così nelle loro derivate $\mathrm{F}'(\alpha)$ e $\mathrm{F}'_1(\alpha)$, la quantità α possa prendere i valori compresi in un certo intervallo (a, b), e per questi valori di α, oltre alle derivate prime di $\mathrm{F}(\alpha)$ e $\mathrm{F}_1(\alpha)$ esistano almeno anche le loro derivate seconde, e siano finite e continue e non sempre uguali a zero.

Allora, qualunque valore si attribuisca ad α fra a e b che non annulli ad un tempo $\mathrm{F}''(\alpha)$ e $\mathrm{F}''_1(\alpha)$, si potranno poi dare ad y infiniti valori pei quali la derivata di φ rispetto ad α, o $F''(\alpha)y + F''_1(\alpha)$, non si annulli; e dati ad α ed y questi valori α_0, y_0, ne risulteranno subito valori determinati x_0 e z_0 per x e z che soddisfaranno alle equazioni (37), e in un campo che racchiude il punto $(x_0, y_0, z_0, \alpha_0)$ le varie derivate parziali di f e φ saranno finite e continue, ecc., talchè saranno soddisfatte le condizioni sotto le quali in un dato campo c relativo ad x e y esiste un sistema di funzioni α e z che soddisfano alle equazioni (37), e sono finite e continue insieme alle loro derivate, e per $x = x_0$, $y = y_0$ sono eguali a α_0 e z_0.

Ora, tralasciando di occuparci della funzione α, colle formole (33) troveremo subito che nello stesso campo c le derivate parziali p e q di z sono date dalle formole $p = \alpha$, $q = F(\alpha)$; e così, quando dalla seconda delle (36) si abbia modo di ricavare il valore di α in funzione di x e y, noi avremo subito p e q espressi per x e y.

Per avere anche r, s e t formeremo i due sistemi di equazioni

$$\begin{cases} p = \alpha, \\ 0 = x + F'(\alpha)y + F'_1(\alpha), \end{cases} \qquad \begin{cases} q = F(\alpha), \\ 0 = x + F'(\alpha)y + F'_1(\alpha), \end{cases}$$

che corrispondono ai sistemi (34) e (35); e ora applicando a questi sistemi le formole (32), come si disse sopra in generale, troveremo subito per determinare r, s e t i due sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = r = -\dfrac{1}{F''(\alpha)y + F''_1(\alpha)}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = s = -\dfrac{F'(\alpha)}{F''(\alpha)y + F''_1(\alpha)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = s = -\dfrac{F'(\alpha)}{F''(\alpha)y + F''_1(\alpha)}, \\ \dfrac{\partial q}{\partial y} = t = -\dfrac{F'(\alpha)^2}{F''(\alpha)y + F''_1(\alpha)} \end{cases}$$

che danno appunto i valori richiesti di r, s e t, e che ci mostrano anche che qualunque siano $F(\alpha)$ e $F_1(\alpha)$, purchè non sia sempre $F''(\alpha) = 0$, $F''_1(\alpha) = 0$ (ciò che da noi è stato appunto escluso), la funzione z definita dalle equazioni (37) è tale che le sue derivate seconde r, s, t soddisfano sempre alla equazione $rt - s^2 = 0$.

Farò notare che il caso che abbiamo escluso che $F''(\alpha)$ e $F''_1(\alpha)$ siano sempre zero pei valori che si considerano di α, lasciava appunto indeterminata la funzione α e toglieva l'indipendenza alle variabili x e y, perchè dovendo essere in questo caso $F'(\alpha) = c$, $F'_1(\alpha) = c_1$, con c e c_1 costanti, ne sarebbe venuto anche che le funzioni $F(\alpha)$ e $F_1(\alpha)$ fossero uguali a $c\alpha + d$ e $c_1\alpha + d_1$ § 42 1.° [pag. 50] con d e d_1 nuove costanti, e quindi le equazioni (37) si sarebbero ridotte alle due

$$z = \alpha(x + cy + c_1) + dy + d_1 \quad , \quad 0 = x + cy + c_1,$$

la seconda delle quali stabilisce una dipendenza fra x e y, e la prima si riduce alla equazione $z = dy + d_1$, senza che resti determinata la α.

176. — Aggiungiamo che i resultati che qui abbiamo ottenuto pel caso di funzioni implicite reali di variabili reali si estendono anche alle funzioni implicite complesse di variabili pure complesse; e una tale estensione può farsi valendosi dei resultati già ottenuti coll'osservare che il caso di un sistema di m equazioni fra m funzioni complesse di n variabili pure complesse si riduce al caso di un sistema di $2m$ equazioni reali fra $2m$ funzioni reali di $2n$ variabili pure reali come quelli considerati precedentemente; con la sola differenza che in questo caso si deve tener conto anche di alcune relazioni che esistono fra le derivate dei primi membri delle equazioni, e di altre che esistono fra le derivate delle varie funzioni. Noi però non possiamo ora prendere a esaminare anche questo caso, e ci limitiamo ad averlo così semplicemente accennato.

XIV.

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali ordinarie.

177. — Si chiama *equazione differenziale* ogni equazione che contiene le derivate o i differenziali di alcuni ordini di una o più funzioni, sia che contenga o no le funzioni stesse e le variabili indipendenti; e l'ordine della più alta derivata o del più alto differenziale che comparisce nella equazione stessa viene detto *ordine* di questa equazione.

Nel caso poi che di variabili indipendenti non ve ne sia che una, le equazioni ora indicate vengono dette più specialmente *equazioni differenziali ordinarie;* e nel caso che le variabili indipendenti siano più di una, le equazioni stesse vengono dette *a derivate parziali* o *ai differenziali totali* secondo che esse contengano o le derivate parziali o i differenziali totali delle quantità che si considerano come funzioni delle variabili indipendenti.

E quando, avendosi più funzioni, si hanno anche più equazioni differenziali, si usa di dire che esse costituiscono un *sistema di equazioni differenziali simultanee;* e allora il loro numero è ordinariamente eguale a quello delle funzioni.

Volendo ora fare un breve studio sulle equazioni differenziali, incominceremo a trattare di quelle ordinarie e pel caso di una sola funzione; e in questo caso, come negli altri che poi tratteremo, ammetteremo sempre che le equazioni che definiscono le funzioni implicite, che saranno da noi considerate, soddisfino alle condizioni sotto le quali, secondo quanto abbiamo detto nel capitolo precedente o in seguito ad altre considerazioni, siamo sicuri che le funzioni stesse sono finite e continue insieme a quelle delle loro derivate che avremo via via bisogno di considerare.

178. — Incominciamo perciò dall'osservare che avendosi una equazione $f(x, y) = 0$ che definisce in un dato intervallo una funzione implicita y della variabile x, le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che, come sappiamo, si deducono dalla equazione data stessa colla derivazione immediata, sono equazioni differenziali di ordine primo, secondo, ecc.; e, secondo la definizione data sopra, ogni equazione che risulti da una combinazione qualsiasi di queste equazioni fra loro e colla primitiva $f(x,y) = 0$ è pure una equazione differenziale, e sussiste evidentemente tutte le volte che sussiste la $f(x, y) = 0$.

Questa circostanza di potere combinare fra loro e colla primitiva le equazioni differenziali che si deducono dalla primitiva stessa $f(x, y) = 0$ colla derivazione immediata, dando origine così a nuove equazioni differenziali cui le funzioni y che soddisfano alla primitiva devono pure soddisfare necessariamente, mentre lascia tanta indeterminazione nelle equazioni differenziali che corrispondono alle funzioni y definite da una equazione data $f(x, y) = 0$, permette altresì bene spesso di costruire equazioni differenziali (relative sempre alla equazione data $f(x, y) = 0$) nelle quali per mezzo di opportune eliminazioni vengano a mancare alcune quantità che comparivano nella primitiva $f(x, y) = 0$; come, per es. vengano a mancare dei radicali, delle esponenziali, dei logaritmi, ecc.... o delle costanti.

Così, per es. se per definire y si ha la equazione $y^2 = \sqrt{x} + x^2 y$, se ne deduce prima $2yy' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2xy + x^2 y'$, e poi colla eliminazione di $\sqrt{x}$ si giunge alla equazione $2yy' = \frac{1}{2(y^2 - x^2 y)} + 2xy + x^2 y'$, e anche all'altra $2yy' = \frac{1}{2(y^2 - x^2 y)} + 2y^3 (y - x^2)^2 + y^4 (y - x^2)^4 y'$ che non contengono più il radicale $\sqrt{x}$; e se si ha invece $y = \cos\alpha x$ o $y = \operatorname{sen}\alpha x$ con α costante, allora, avendosi $y'' = -\alpha^2 \cos\alpha x$, o $y'' = -\alpha^2 \operatorname{sen}\alpha x$, si trova subito in ambedue i casi la equazione differenziale del second'ordine $y'' + \alpha^2 y = 0$, cui i valori primitivi di y soddisfano, e che non contiene più la funzione $\cos\alpha x$ o l'altra $\operatorname{sen}\alpha x$.

E similmente avendosi per es. $y^2 + \alpha x + y = 0$ con α costante, si può osservare che si ha $2yy'+\alpha+y'=0$, e sostituendo in questa il valore di α tratto dalla prima, si passa subito alla equazione differenziale del prim'ordine $2yy'-\frac{y^2+y}{x}+y'=0$ che non contiene più la costante α; come pure avendosi la equazione $ax^2+by^2=1$, con a e b costanti, se ne deducono le altre $ax+byy'=0$, $a+b(y'^2+yy'')=0$ le quali conducono subito alla seguente $x(y'^2+yy'')-yy'=0$, cui pure deve soddisfare la funzione definita dalla equazione data; e questa è una equazione differenziale del second'ordine nella quale non figurano più le costanti a e b che figuravano nella primitiva $ax^2+by^2=1$.

179. — Il caso però che, per la sua generalità e importanza, merita di essere di preferenza studiato, è quello della eliminazione delle costanti cui appunto si riferiscono i due ultimi esempi.

Già sappiamo che se la funzione y è definita da una equazione esplicita $y=f(x)+c$ nella quale figura una costante additiva c, questa costante sparisce di per sè nella derivazione e si viene così a formare la equazione differenziale del prim'ordine $y'-f'(x)=0$ che non contiene più questa costante c, e che è perciò soddisfatta qualunque sia il valore che si attribuisce alla costante stessa.

Più generalmente poi, quando si abbia una equazione $f(x,y,c)=0$ che contiene una costante c e che, per ogni valore speciale che si attribuisce a questa costante da $-\infty$ a $+\infty$ o almeno fra dati limiti, definisce sempre una delle solite funzioni finite e continue, ecc.... y di x in un dato intervallo, allora, se avverrà che la costante c non sparisca da sè nella equazione $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$ che risulta dalla equazione data $f(x,y,c)=0$ colla derivazione immediata, s'intende che, almeno ordinariamente e fatta astrazione dalle difficoltà pratiche, si potrà eliminare la costante c fra le due equazioni

$$f(x,y,c)=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0 \ ,$$

la seconda delle quali sarà della forma $\varphi(x,y,y',c)=0$; e così si giungerà ad una equazione differenziale del prim'ordine che non conterrà più la costante c, per modo che essa sarà soddisfatta per qualunque valore che si attribuisca a questa costante fra i limiti indicati.

Quando poi nella equazione data $f(x,y,c_1,c_2)=0$ compariscano due costanti c_1,c_2, e per qualunque sistema di valori che si attribuiscano a queste costanti, almeno entro dati limiti, essa definisca una delle solite funzioni y di x finite, continue, ecc...., allora, se avverrà che formate le due equazioni differenziali $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0$ le costanti non siano già sparite nelle derivazioni, è chiaro che, fatta astrazione dalle difficoltà pratiche, noi potremo, almeno ordinariamente, eliminare le costanti stesse fra le tre equazioni

$$f(x,y,c_1,c_2)=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0\,,$$

le due ultime delle quali saranno della forma $\varphi_1(x,y,y',c_1,c_2)=0$, e $\varphi_2(x,y,y',y'',c_1,c_2)=0$, e così daremo luogo ad una equazione differenziale $\psi(x,y,y',y'')=0$ che sarà al più del second'ordine, e nella quale non compariranno più le costanti c_1 e c_2, per modo che essa sarà soddisfatta per qualunque sistema di valori che si attribuiscano alle costanti stesse nella equazione primitiva $f(x,y,c_1,c_2)=0$ e pei quali questa equazione continui a definire una delle solite funzioni y di x.

E in generale quando si avrà un'equazione $f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ che contenga n costanti $c_1,c_2,\dots,c_n$ alle quali possano essere attribuiti valori qualunque, almeno entro certi limiti, senza che la equazione stessa cessi mai di definire una delle solite funzioni y di x, allora, se avverrà che queste n costanti non spariscano da per sè formando le prime n equazioni differenziali $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{d^2f}{dx^2}=0,\dots,\frac{d^nf}{dx^n}=0$ (i cui primi membri sono le derivate totali successive di $f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)$ calcolate con la regola delle funzioni composte col riguardare y come funzione di x), s'intende subito che, fatta sempre al solito astrazione dalle difficoltà pratiche, noi potremo, almeno ordinariamente, eliminare le n costanti $c_1,c_2,\dots,c_n$ fra le $n+1$ equazioni

$$f=0\ ,\ \frac{df}{dx}=0\ ,\ \frac{d^2f}{dx^2}=0\ ,\ \dots\ ,\ \frac{d^nf}{dx^n}=0\ ,$$

le quali sono respettivamente delle forme $f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$, $\varphi_1(x,y,y',c_1,c_2,\dots,c_n)=0$, $\varphi_2(x,y,y',y'',c_1,c_2,\dots,c_n)=0,\dots$ $\varphi_n(x,y,y',\dots,y^{(n)},c_1,c_2,\dots,c_n)=0$.

Evidentemente con questa eliminazione giungeremo ad una equazione differenziale $\psi(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ che sarà tutt'al più dell'ordine n e non conterrà più le costanti $c_1,c_2,\dots,c_n$, per modo che sarà soddisfatta per qualunque sistema di valori che si attribuiscano alle costanti stesse nella equazione primitiva $f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$, e pei quali essa continui a definire una delle solite funzioni y di x; talchè in generale noi possiamo ora asserire che, quando una equazione $f(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ contiene n costanti arbitrarie e per ogni sistema di valori attribuiti a queste costanti, almeno entro certi limiti, essa definisce una delle solite funzioni y di x in un dato intervallo, allora (o perchè avvenga che le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ spariscano di per sè nella derivazione formando le n equazioni differenziali $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{d^2f}{dx^2}=0, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}=0$, o perchè, sebbene figurino ancora le costanti in tutte queste equazioni almeno ordinariamente e fatta al solito astrazione delle difficoltà pratiche si potranno sempre eliminare le costanti medesime fra la equazione data e le precedenti equazioni differenziali), la equazione data $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$ darà luogo ordinariamente ad una equazione differenziale della forma $\psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$. E questa equazione sarà tutt'al più di ordine n eguale al numero delle costanti $c_1, c_2, \ldots c_n$, ma non vi compariranno più queste costanti, per modo che essa sarà soddisfatta per qualunque sistema di valori che si attribuiscano alle costanti stesse, fra quelli che queste costanti sono suscettibili di avere senza che la equazione data $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$ cessi di definire una delle solite funzioni y di x finite e continue in un dato intervallo, ecc....

E l'equazione differenziale $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ che così si otterrà esprimerà evidentemente una proprietà che sarà comune a tutte le infinite funzioni y definite dalle equazioni che si deducono dalla equazione primitiva $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$ dando alle costanti valori particolari qualsiansi fra quelli che esse sono suscettibili di avere nel senso ora indicato; e così in particolare quando queste equazioni $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$ si riferiscano a elementi geometrici, meccanici,... l'equazione differenziale suindicata esprimerà una proprietà che sarà comune a tutti gli elementi medesimi.

180. — E poichè in calcolo integrale si dimostra inversamente che, sotto certe condizioni che ordinariamente si verificano, ogni equazione differenziale dell'ordine n $\psi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ può riguardarsi come proveniente dalla eliminazione di n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fra una equazione *in termini finiti* (cioè senza differenziali o derivate) $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0$ e le prime n equazioni che da essa si deducono colla derivazione, così può dirsi che ogni equazione differenziale, almeno nei casi ordinari, anzichè esprimere una proprietà speciale di una particolare funzione y che la soddisfi, o di un dato elemento geometrico, o meccanico,... cui essa si riferisca, esprime una proprietà comune a tutta una classe di funzioni o a tutta una classe di elementi geometrici o meccanici... che, sebbene dotati di una tale proprietà generale comune, possono anche esser differentissimi l'uno dall'altro, e presentare proprietà speciali disparatissime.

E così si può ora evidentemente affermare che, quando partendo da un

problema speciale si giunga ad una equazione differenziale $\Omega=0$ relativa alla funzione y che in essa figura, allora prendendo a trattare questa equazione differenziale $\Omega=0$ si verrà a trattare una questione assai più estesa di quella che si aveva dapprima; poichè una tale equazione $\Omega=0$, oltre a riferirsi al problema speciale posto dapprima e alla equazione nota o ignota in termini finiti che ad esso si riferisce, si riferirà anche ad altri problemi nelle equazioni dei quali (in termini finiti) figureranno alcune costanti arbitrarie, o almeno alcune costanti che abbiano maggiore arbitrarietà di quelle che compariscono nel problema primitivo, e che vengono poi a scomparire nella equazione differenziale finale $\Omega=0$.

Così per esempio quando in un problema si giunge alla equazione $f(x, y, a, b)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$, nella quale pei dati del problema stesso deve essere $b<a$ per modo che essa rappresenti una ellisse di semi-assi a e $\sqrt{a^2-b^2}$, colla derivazione si otterrà la equazione $\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{a^2-b^2}=0$, la quale ci darà $\frac{1}{a^2-b^2}=-\frac{x}{a^2yy'}$ e ci permetterà di eliminare il b dalla equazione primitiva, dando luogo così alla equazione differenziale $\frac{x^2}{a^2}-\frac{xy}{a^2y'}=1$; e questa non contenendo più il b, corrisponderà alla equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$, anche pel caso di $b>a$, vale a dire esprimerà una proprietà comune a tutte le curve che sono rappresentate dalla equazione stessa per ogni valore reale di b diverso da a, cioè una proprietà non solo delle ellissi primitive, ma anche di tutte le iperbole omofocali rappresentate dalla equazione stessa; e la equazione differenziale ottenuta verrà così ad avere in sè una maggior generalità e estensione di quella in termini finiti dalla quale siamo partiti.

181. — Notiamo poi che, invece di giungere col metodo da noi indicato ad equazioni fra le derivate $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ o $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$, potremo sempre quando si voglia giungere ad equazioni fra i differenziali $dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$, e ciò sia valendosi dei simboli $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ per rappresentare le derivate nelle equazioni già ottenute, e considerandoli poi come quozienti (ciò che in questo caso può farsi), sia facendo la eliminazione delle costanti fra le equazioni

$$(1) \qquad f=0\ ,\ df=0\ ,\ d^2f=0\ ,\ \ldots..\ ,\ d^nf=0\ ,$$

che contengono i differenziali, invece che fra le equazioni analoghe che contengono le derivate.

Però conviene osservare che quando si tratterà di equazioni differenziali del primo ordine, per ciò che abbiamo detto più volte, la scelta della variabile indipendente, anche dopo ottenuta la equazione differenziale, rimarrà sempre in nostro arbitrio; ma non sarà così quando avremo da considerare equazioni differenziali di ordini superiori, a meno che, lasciando arbitraria questa variabile e valendosi delle equazioni (1), non si conservino in $d^2f, d^3f, \ldots, d^nf$ i termini che contengono $d^2x, d^3x, \ldots d^nx$ che nella ipotesi di x variabile indipendente verrebbero fatti uguali a zero.

Così per es. se si ha la equazione

$$2y + ax^2 + by^2 = 0\,, \tag{2}$$

le due equazioni differenziali che si hanno da questa colla differenziazione immediata, quando si lascia arbitraria la variabile indipendente, sono le seguenti

$$dy + ax\,dx + by\,dy = 0\,,$$
$$d^2y + ad(x\,dx) + bd(y\,dy) = 0\,,$$

e la equazione differenziale che risulta dalla eliminazione delle costanti a e b fra queste equazioni e la primitiva, finchè si lascia sotto la forma

$$\begin{vmatrix} 2y & x^2 & y^2 \\ dy & x\,dx & y\,dy \\ d^2y & d(x\,dx) & d(y\,dy) \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \begin{vmatrix} 2y & x^2 & y^2 \\ dy & x\,dx & y\,dy \\ d^2y & dx^2 + x\,d^2x & dy^2 + y\,d^2y \end{vmatrix} = 0\,, \tag{3}$$

sussiste qualunque sia la variabile indipendente.

Se poi si stabilisce di prendere x per variabile indipendente, allora, dovendo fare $d^2x = 0$, quest'equazione si riduce all'altra

$$\begin{vmatrix} 2y & x^2 & y^2 \\ dy & x\,dx & y\,dy \\ d^2y & dx^2 & dy^2 + y\,d^2y \end{vmatrix} = 0\,; \tag{4}$$

e questa, dividendo la seconda linea del determinante per dx e la terza per dx^2, diviene

$$\begin{vmatrix} 2y & x^2 & y^2 \\ \dfrac{dy}{dx} & x & y\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} & 1 & \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \begin{vmatrix} 2y & x^2 & y^2 \\ y' & x & yy' \\ y'' & 1 & y'^2 + yy'' \end{vmatrix} = 0\,;$$

e queste ultime equazioni, che sono fra x e y e le derivate $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ o y' e y'', riconducono quando si voglia alla equazione (4) fra i differenziali dx e dy, ma con ciò resterà sempre fissata e uguale ad x la variabile indipendente.

182. — Non tralasceremo di fare ora anche la osservazione seguente.

Indichiamo al solito con

$$f(x\,, y\,, c_1\,, c_2 \ldots, c_n) = 0 \tag{5}$$

la equazione data, e supponiamo che le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vi compariscano in modo che, per ogni sistema di valori che si attribuiscano alle costanti medesime in un certo campo a n dimensioni, essa definisca sempre una funzione y di x finita e continua insieme alle sue prime n derivate in un certo intervallo.

E propriamente ammettiamo senz'altro, per semplicità, che se $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ è uno dei sistemi di valori che possono attribuirsi a $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e y_0 è il valore corrispondente di y per $x = x_0$, la funzione $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ soddisfi a tutte quelle condizioni che si dettero nel capitolo precedente per esser sicuri che in un certo campo C a $n+1$ dimensioni relativo alle quantità $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (riguardate tutte come variabili indipendenti) e a cui appartiene come punto interno il punto $(x_0, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$, la equazione data (5) definisca una funzione y di queste variabili che in ogni punto di C è finita e continua insieme alle sue prime n derivate rispetto ad x, e nel punto $(x_0, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$ prende il valore y_0.

Allora per tutti i valori di $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ corrispondenti ai punti di C e per y sufficientemente prossimo a y_0, la quantità $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sarà sempre diversa da zero; e i valori di $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ corrispondenti ai vari valori di $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ nel campo stesso C (quando è sufficientemente piccolo) saranno determinati dalle solite equazioni

$$f = 0\,, \quad \frac{df}{dx} = 0\,, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 0\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} = 0\,, \quad \frac{d^nf}{dx^n} = 0\,,$$

la prima delle quali è quella data, e le altre si otterranno tutte colla regola di derivazione delle funzioni composte applicata successivamente, o con quelle della differenziazione successiva rispetto ad x, ecc., e saranno tutte comprese nella formola seguente

$$\frac{d^rf}{dx^r} = \mathrm{F}_r(x\,, y\,, y'\,, y''\,, \ldots, y^{(r-1)}, c_1\,, c_2\,, \ldots, c_n) + f_2(x\,, y\,, c_1\,, c_2\,, \ldots, c_n)y^{(r)} = 0\,,$$

con $f_2(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $r = 1, 2, \dots, n$; e questi valori successivi di $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}, y^{(n)}$ corrispondenti ai varii valori di $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ nel campo C saranno tutti finiti e continui anche quando si riguardano come funzioni delle $n+1$ variabili $x, c_1, c_2, \dots, c_n$, e nel punto $(x_0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ dove y ha il valore y_0, anche $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ avranno valori speciali $y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}$ pei quali si avrà in generale successivamente

$$y_0^{(r)} = -\frac{F_r(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(r-1)}, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)}{f_2(x_0, y_0, c_1^0, \dots, c_n^0)},$$

per $r = 1, 2, \dots n$; e a causa della continuità, se il campo C è sufficientemente piccolo, i valori di $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ entro C si scosteranno tanto poco quanto si vuole dai valori $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}$.

Prendiamo ora il sistema

$$(6) \qquad f = 0, \quad \frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{df^{n-1}}{dx^{n-1}} = 0$$

delle prime n delle equazioni precedenti, e considerando in esse come variabili tutte le $2n+1$ quantità $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, c_1, c_2, \dots, c_n$, osserviamo che esse vengono ad essere soddisfatte dal sistema di valori $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ di queste variabili; e, oltre alle ipotesi fatte sopra, facciamo ora anche l'altra che, come ordinariamente avviene nelle applicazioni, in un piccolo campo C_1 a $n+1$ dimensioni relativo alle quantità $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, considerate ora come variabili indipendenti, e nel cui interno trovasi il punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, le equazioni stesse (6) definiscano completamente per le $c_1, c_2, \dots, c_n$ uno e un sol sistema di funzioni finite continue e a un sol valore $\varphi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $\varphi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $\dots, \varphi_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ che poste in luogo di $c_1, c_2, \dots, c_n$ nelle equazioni medesime le soddisfino identicamente, e nel punto $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ siano uguali rispettivamente a $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ (*).

Allora, facendo muovere la variabile x in un certo intervallo sufficientemente ristretto (a, b) che comprende il punto x_0, e attribuendo corrispondentemente a $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ i valori che vengono per esse dalle equazioni (6) quando alle costanti $c_1, c_2, \dots c_n$ sono attribuiti i valori $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$, s'intende che i sistemi di valori che così si avranno per $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, almeno quando l'intervallo (a, b) è sufficientemente piccolo, corrisponderanno a punti del campo C_1; e in questi punti le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ conserveranno sempre i valori $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$, giacchè per i sistemi ora indicati di valori $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ le (6) sono effettivamente soddisfatte dai valori $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$, e come abbiamo detto, per ogni sistema di valori di $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ non esiste che un solo sistema di valori per le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ che poste in luogo di $c_1, c_2, \dots, c_n$ nelle equazioni (6) le rendano soddisfatte.

(*) Per essere certi che la condizione posta ora sia verificata, per quanto si disse nel capitolo precedente, basterà che le derivate $\dfrac{\partial f^{p+q+1}}{\partial x^p \partial y^q \partial c_s}$ con $p+q+1 \leq n$ e $s = 1, 2, \dots, n$ siano finite e continue in un campo a $n+1$ dimensioni relativo alle variabili $x, y, c_1, c_2, \dots, c_n$ e a cui appartiene il punto $x_0, y_0, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ come punto interno, e al tempo stesso pei valori $x_0, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)}, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ di $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, c_1, c_2, \dots, c_n$ il determinante funzionale dei primi membri delle equazioni (6) preso rispetto alla quantità $c_1, c_2, \dots, c_n$ sia differente da zero.

In generale poi se, senza stabilire alcun legame fra le quantità $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, le faremo muovere arbitrariamente nel campo C_1, allora per ogni sistema di valori $x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ che loro attribuiremo, risulterà determinato un sistema di valori per le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ che presi per valori $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ soddisfaranno identicamente alle (6); e poichè C_1 è sufficientemente piccolo, questi valori $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$, uniti al valore x_1 scelto per x apparterranno a un punto del campo sopra indicato con C.

Ora, siccome per ogni sistema di valori di $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ entro C le equazioni (6) determinano un solo sistema di valori per $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ che soddisfino alle equazioni stesse e che si trovino nel campo C_1, è evidente che, quando $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ saranno uguali a $x_1, c'_1, c'_2, \dots, c'_n$, i valori che le equazioni (6) ci daranno per $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ dovranno essere appunto i valori $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ che noi abbiamo preso a piacere. Dunque, poichè ognuno dei sistemi di valori di $c_1, c_2, \dots, c_n$ che qui si considerano corrisponde a un sistema di valori che possono attribuirsi alle costanti nella equazione data (5), e i valori che allora ne risultano per la funzione corrispondente y e per le sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, quando x ha il valore x_1, vengono ad essere il sistema di valori dati arbitrariamente $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$, noi possiamo ora evidentemente asserire che, quando siano soddisfatte le condizioni poste sopra, col far variare $x, c_1, c_2, \dots, c_n$ in modo che il punto $(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ percorra il campo C, i valori $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ uniti a quelli che successivamente si prenderanno per x, percorreranno il campo C_1 in modo da venire in un suo punto qualunque, e viceversa, e ciò con corrispondenza biunivoca; o, in altri termini, alla arbitrarietà delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ in un dato campo, noi possiamo sostituire l'arbitrarietà dei sistemi di valori che per un valore particolare qualsiasi di x in un certo intervallo possono simultaneamente attribuirsi alla funzione y e alle sue derivate $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Ora, per ognuno di questi sistemi di valori $y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ che simultaneamente per un valore particolare qualsiasi x_1 di x possono attribuirsi a $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ nel campo C_1, non resta del pari arbitraria la quantità $y^{(n)}$, ma essa ha il valore che risulta dalla equazione

$$(7) \qquad \frac{d^n f}{dx^n} = F_n(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) + f_2(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) y^{(n)} = 0,$$

quando vi si pongono per x e y i valori x_1 e y_1, e per $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i valori $\varphi_1(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}), \varphi_2(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}), \ldots, \varphi_n(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$ che le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vengono ad avere nel punto $(x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)})$; dunque il valore che deve prendersi per $y^{(n)}$ corrispondente ai varii sistemi di valori che simultaneamente possono attribuirsi a $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ sarà sempre quello che al seguito degli stessi valori viene determinato dalla equazione

$$(8) \qquad \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \pi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + \theta_n(x, y', \ldots, y^{(n-1)}) y^{(n)} = 0,$$

che risulta dalla equazione precedente $\frac{d^n f}{dx^n} = 0$ col porvi per $c_1, c_2, \ldots, c_n$ le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; e noi possiamo quindi evidentemente affermare che quando in conseguenza dell'arbitrarietà delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si lascia a $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ tutta l'arbitrarietà possibile in un dato campo di $n+1$ dimensioni, la derivata $y^{(n)}$ riesce sempre perfettamente determinata per ogni sistema di valori delle stesse quantità $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, e il suo valore è dato dalla formola precedente, per modo che essa può considerarsi come una funzione finita, continua e ad un sol valore di questi sistemi di quantità $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

L'equazione (8) inoltre corrisponde evidentemente ad una equazione differenziale dell'ordine n relativa alla equazione (5) per tutti i sistemi di valori che in essa le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ possono avere; giacchè quando queste costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ hanno valori particolari $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, le $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ che allora si hanno dalle equazioni (6) vengono ad essere funzioni particolari di x che riducono uguali a $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, e quindi esse trasformano di nuovo la equazione (8) nella (7) che è sempre soddisfatta; dunque osservando ora che sotto le ipotesi fatte, alla equazione data non può corrispondere una equazione differenziale $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-p)}) = 0$ *priva di costanti arbitrarie* e di ordine $n-p$ inferiore ad n, perchè, ove ciò fosse, non resterebbero arbitrarii i sistemi di valori che per ogni valore di x possono attribuirsi a $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, si potrà ora concludere evidentemente che nel caso attuale alla equazione data (5) con n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ corrisponde sempre una equazione differenziale priva delle costanti arbitrarie

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ e di un ordine non mai inferiore ad n, ma precisamente eguale ad n; e questa equazione dà per $y^{(n)}$ un valore unico e determinato che può riguardarsi come funzione finita e continua di $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ in un dato campo a $n+1$ dimensioni relativo a queste variabili.

Si aggiunge poi che se con un processo qualunque si riescirà a trarre dalla equazione data (5) una equazione differenziale dell'ordine n

$$(9) \qquad \psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

che sia priva di costanti arbitrarie e che sussista per tutti i sistemi di valori che possono attribuirsi alle costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e che in un dato campo a $n+1$ dimensioni relativo alle $n+1$ quantità $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ (considerate come variabili indipendenti) definisca una funzione $y^{(n)}$ finita e continua e ad un sol valore che nel punto $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ ha il valore $y_0^{(n)}$, allora siccome ogni sistema di valori $x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$ attribuito a $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ corrisponde a un sistema di valori delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ e ad esso corrisponde pur sempre un valore unico e determinato per $y^{(n)}$ che è quello che risulta dalla equazione (7) o (8), si potrà asserire che la funzione $y^{(n)}$ definita dalla equazione (9) dovrà esser la stessa di quella definita dalla equazione (8); o in altri termini, qualunque processo si tenga per giungere ad una equazione differenziale dell'ordine n relativa alla equazione data (5) e priva di costanti arbitrarie, si giungerà sempre alla equazione (8) o ad una equazione che potrà riguardarsi come una conseguenza di questa, nel senso che essa dovrà definire quella stessa funzione $y^{(n)}$ di $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ che è definita dalla (8); e in questo senso dunque, per ogni equazione in termini finiti (5) con n costanti arbitrarie, e per la quale siano soddisfatte le condizioni precedenti, di equazioni differenziali dell'ordine n, prive di costanti arbitrarie e veramente distinte, non potremo averne che una.

Indipendentemente poi da queste considerazioni, si giunge a questa conclusione anche coll'osservare che essendo la (8) una equazione del primo grado in $y^{(n)}$, essa conduce subito al valore di $y^{(n)}$ espresso per $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, e quindi quando in qualsiasi modo si sia ottenuta una equazione differenziale di ordine n come la (9), ponendovi il valore ora indicato di $y^{(n)}$, essa dovrà necessariamente risultare soddisfatta identicamente perchè, per quanto dicemmo sopra, non può esservi una equazione differenziale per la funzione y di ordine inferiore ad n privo di costanti arbitrarie.

183. — Aggiungiamo che se fra le n costanti arbitrarie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che compariscono nella equazione data si considerano soltanto le prime p di esse $c_1, c_2, \ldots, c_p$ senza occuparsi delle altre, e se, come ordinariamente accade, si suppongono soddisfatte anche per queste p costanti le condizioni che ab-

biamo poste sopra pel caso di n costanti, allora la equazione data condurrà sempre ad una sola equazione differenziale (veramente distinta) dell'ordine p e priva delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_p$, la cui forma sarà la seguente $\theta_p(x, y, y', \ldots, y^{(p)}, c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n) = 0$.

Questa equazione inoltre dovrà necessariamente contenere le rimanenti costanti $c_{p+1}, \ldots, c_n$, poichè se mancasse per es. la c_{p+1}, noi potremmo anche dire che tenendo conto delle $p+1$ costanti $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}$ come costanti arbitrarie, si sarebbe dedotta dalla equazione data un'equazione di ordine inferiore a $p+1$ e priva delle stesse costanti, e questo contraddice ai resultati del paragrafo precedente; dunque, riferendoci ora a tutti i gruppi che possono farsi colle costanti, noi possiamo evidentemente affermare che, quando una equazione in termini finiti $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ con n costanti arbitrarie rispetto a tutti i gruppi possibili di queste costanti soddisfa alle condizioni che indicammo sopra pel caso che si considerino tutte le n costanti medesime, allora essa darà sempre luogo:

1.° a n equazioni differenziali del prim'ordine contenenti ciascuna $n-1$ costanti arbitrarie;

2.° a $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni differenziali del second'ordine contenenti ciascuna $n-2$ costanti arbitrarie;

3.° a n equazioni differenziali dell'ordine $n-1$ contenenti ciascuna una costante arbitraria, e a una equazione differenziale dell'ordine n senza costanti arbitrarie;

4.° e in generale darà luogo a $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}$ equazioni differenziali di ordine $p \leq n$ contenenti ciascuna $n-p$ costanti arbitrarie; per modo che può dirsi che il numero delle costanti che si eliminano corrisponde sempre all'ordine della più alta derivata che s'introduce, e in ogni ordine p di equazioni veramente distinte non se ne potranno avere che $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p}$.

Partendo poi da una qualunque di queste equazioni differenziali, per es. da una equazione $\theta_{n-1}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, c_r) = 0$ che sia di ordine $n-1$ e contenga quindi una sola costante arbitraria c_r, s'intende subito che basterà eliminare la costante c_r fra essa e la sua derivata per ottenere la equazione differenziale dell'ordine n priva di costanti arbitrarie; e oltre a ciò s'intende subito anche che partendo da un gruppo di $p+1$ equazioni differenziali dell'ordine p, distinte fra loro (come saranno sempre in particolare quando contengono costanti diverse), e fra le quali si possano eliminare le p derivate $y', y'', \ldots, y^{(p)}$, si giungerà a una equazione $F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ che

sarà la equazione primitiva, o almeno definirà la funzione stessa y definita dalla primitiva, ecc. ...

184. — E così, particolarizzando ancor più, noi possiamo dire che una equazione $f(x, y, a, b) = 0$ con due costanti arbitrarie, e per la quale siano soddisfatte le solite condizioni, dà luogo a due equazioni differenziali del prim'ordine $F_1(x, y, y', a) = 0$, $F_2(x, y, y', b) = 0$ contenenti ciascuna una sola costante arbitraria, e dà luogo ad una equazione del second'ordine e senza costanti arbitrarie; e la eliminazione di y' fra le due equazioni differenziali del prim'ordine riconduce alla equazione data, almeno nel senso ora indicato, ecc. ...

Così, per es. avendo la equazione $ay^2 + bx + x^2 + \operatorname{sen} y = 0$, se ne deducono dapprima le due $2ayy' + b + 2x + \cos y\, y' = 0$, $2a(y'^2 + yy'') + 2 - \operatorname{sen} y\, y'^2 + \cos y\, y'' = 0$ per le quali si possono subito soddisfare le solite condizioni; e ora coll'eliminazione di a o di b fra la prima e la seconda si ottengono le due equazioni differenziali di prim'ordine

$$-2\frac{bx + x^2 + \operatorname{sen} y}{y} y' + b + 2x + \cos y\, y' = 0, \quad ay^2 + x^2 + \operatorname{sen} y - x(2ayy' + 2x + \cos y\, y') = 0$$

che contengono ciascuna una sola costante arbitraria; mentre coll'eliminazione di a e di b fra le tre equazioni scritte sopra si ottiene l'altra di second'ordine

$$\begin{vmatrix} y^2 & x & x^2 + \operatorname{sen} y \\ 2yy' & 1 & 2x + \cos y\, y' \\ 2(y'^2 + yy'') & 0 & 2 - \operatorname{sen} y\, y'^2 + \cos y\, y'' \end{vmatrix} = 0.$$

185. — Accenniamo ora anche al caso generale in cui si ha ancora una sola variabile indipendente x e si hanno n funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ legate ad x da altrettante equazioni $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_n = 0$.

Allora se queste equazioni sono della forma

$$(10) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \end{cases}$$

e contengono n costanti arbitrarie, colla derivazione si avranno da queste le altre

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} y'_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} y'_2 + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} y'_n = 0 \,, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} y'_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} y'_2 + \dots + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} y'_n = 0 \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x} + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} y'_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} y'_2 + \dots + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} y'_n = 0 \,, \end{cases}$$

dove $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ rappresentano le derivate di $y_1, y_2, \dots, y_n$ rapporto ad x.

E quando queste equazioni contengano ancora le n costanti $a_1, a_2, \dots, a_n$, astrazione fatta dalle difficoltà pratiche, si potrà, almeno in generale, eliminarle fra esse e le precedenti (10), e si giungerà così ad un nuovo sistema di n equazioni differenziali simultanee del prim'ordine della forma

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \,, \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0 \,, \end{cases}$$

che non conterranno più le costanti $a_1, a_2, \dots, a_n$; talchè può dirsi che in generale avendo un sistema di n equazioni come le (10) con n funzioni di una sola variabile indipendente, si possono, astrazion fatta dalle difficoltà pratiche, eliminare da esse n costanti arbitrarie, passando a un sistema di equazioni differenziali simultanee del prim'ordine.

Similmente poi se le equazioni (10) conterranno altre n costanti $b_1, b_2, \dots, b_n$, derivando nuovamente le equazioni (11) si passerebbe ad un altro sistema di equazioni fra le derivate del second'ordine di $y_1, y_2, \dots, y_n$; e allora, ove già non fossero sparite tutte le costanti $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots b_n$, si potrebbe eliminarle, almeno in generale, fra le n nuove equazioni ottenute e le $2n$ equazioni (10) e (11), passando così ad altre n equazioni differenziali simultanee del second'ordine, che potrebbero anche ottenersi eliminando le $b_1, b_2, \dots, b_n$ fra le (12) e le loro derivate, ecc.

Al solito poi i sistemi di equazioni differenziali simultanee testè indicati potranno ridursi fra i differenziali anzichè fra le derivate, rappresentando le derivate coi simboli $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \dots, \dfrac{dy_n}{dx}, \dfrac{d^2y_1}{dx^2}, \dfrac{d^2y_2}{dx^2}, \dots, \dfrac{d^2y_n}{dx^2}, \dots$ e considerandole poi come quozienti, colla solita avvertenza che trattandosi di equazioni differenziali di prim'ordine, la variabile indipendente potrà supporsi qualunque, mentre trattandosi di equazioni degli ordini superiori, la variabile indipendente resterà pienamente fissata ed uguale ad x.

Per questo caso poi potremmo fare osservazioni analoghe a quelle dei due paragrafi precedenti; ma su ciò non possiamo trattenerci più oltre.

Equazioni a derivate parziali e ai differenziali totali.

186. — Passiamo ora a considerare il caso in cui, trattandosi di funzioni di più variabili, siamo condotti a equazioni a derivate parziali.

Supponiamo perciò di avere una equazione

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0 \,,$$

per la quale supporremo che o in base a quanto dicemmo nel capitolo precedente, o per altre considerazioni si sappia che essa definisce una funzione z a un sol valore delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un dato campo C nel quale riterremo sempre che la funzione stessa sia finita e continua insieme a quelle sue derivate parziali che successivamente noi avremo bisogno di considerare.

Questa equazione darà subito luogo alle n equazioni a derivate parziali del prim'ordine

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \;,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \,, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \;;$$

e combinando queste equazioni fra loro e colla primitiva in qualsiasi modo si darà luogo ad un'altra equazione che sarà della forma

$$(3)\qquad \psi_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \,,$$

e che sarà pure una equazione a derivate parziali del prim'ordine relativa alla equazione data (1).

Similmente se si formeranno le $\dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni a derivate parziali del second'ordine che si ottengono derivando parzialmente le (2) e che sono tutte della forma

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} = 0 \,,$$

dove x_r e x_s sono due qualunque delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, s'intende subito che, combinando queste equazioni fra loro colla primitiva (1) e colle (2), si formeranno altre equazioni della forma

$$(5)\qquad \psi_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s}, \dots\right)=0,$$

che saranno equazioni a derivate parziali del second'ordine relative alla funzione z definita dalla equazione data (1); e al modo stesso potranno formarsi anche equazioni a derivate parziali degli ordini superiori differenti da quelle che si ottengono continuando a derivare parzialmente e successivamente le varie equazioni simili alle (4).

187. — E come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie (relative cioè alle funzioni di una sola variabile), s'intende che anche adesso facendo le varie combinazioni delle (1), (2), (4), ... potremo fare sparire dalla equazione finale varie quantità che figuravano nella prima equazione (1); e in particolare s'intende che, astrazione fatta ancora dalle difficoltà pratiche, essendo n le variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ e quindi n le equazioni (2) del primo ordine, potremo ordinariamente eliminare n costanti arbitrarie fra la equazione data (1) e le sue prime n equazioni a derivate parziali (2), dando luogo ad una equazione a derivate parziali del prim'ordine della forma (3), priva delle n costanti arbitrarie; e valendosi poi anche delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni di second'ordine (4), potremo eliminare altre $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie, e così in tutto $\frac{n(n+3)}{2}$ costanti, dando luogo allora ad un'equazione a derivate parziali del second'ordine della forma (5) priva delle stesse costanti, e in generale andando fino alle derivate parziali dell'ordine k, potremo eliminare

$$n+\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}+\dots+\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{1.2\dots k}$$

costanti arbitrarie, dando luogo così a una equazione a derivate parziali dell'ordine k priva di queste costanti, ecc....; talchè noi possiamo dire intanto che nel caso delle funzioni z di n variabili indipendenti, le equazioni a derivate parziali del prim'ordine possono provenire dalla eliminazione di n costanti arbitrarie fra la primitiva (1) e le equazioni del prim'ordine (2); quelle a derivate parziali del second'ordine possono provenire dalla eliminazione di $\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(n+3)}{2}$ costanti fra le equazioni (1), (2) e (4), ecc.

188. — In particolare poi, nel caso di due variabili indipendenti x, y,

quando si abbia la equazione

$$(6)\qquad f(x, y, z)=0,$$

formando le due equazioni a derivate parziali

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0,$$

dove p e q, secondo le solite notazioni di Monge, indicano le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, noi potremo fra queste equazioni (7) e la equazione data (6) eliminare due costanti arbitrarie a e b dando luogo così ad una equazione a derivate parziali del prim'ordine della forma $\psi_1(x, y, z, p, q)=0$; valendoci poi anche delle tre equazioni alle derivate parziali del second'ordine r, s, t che si ottengono dalle (7) con nuove derivazioni, potremo eliminare altre tre costanti (e così in tutto cinque costanti) dando luogo allora a una equazione del second'ordine che sarà della forma $\psi_2(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$; e in generale andando fino alle derivate parziali dell'ordine k potremo eliminare $2+3+4+\dots+(k+1)$ o $\frac{k(k+3)}{2}$ costanti arbitrarie.

189. — Fermiamoci dapprima in modo speciale sulle equazioni a derivate parziali (3) del prim'ordine per una funzione z di n variabili; e incominciamo dal mostrare che queste equazioni, oltre a provenire dalla eliminazione di n costanti arbitrarie fra la equazione (1) che definisce z e le sue equazioni a derivate parziali del prim'ordine (2), possono anche provenire dalla eliminazione fra le stesse equazioni di una funzione arbitraria composta con una o più funzioni determinate delle variabili indipendenti $x_1, x, \dots, x_n$ e di z.

Supponiamo infatti di avere una equazione

$$(8)\qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_n)=0$$

che definisce z come funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$ in un dato campo a n dimensioni per tutti i sistemi di valori delle costanti $a_1, a_2, \dots, a_n$ entro dati limiti.

Le equazioni a derivate parziali del prim'ordine che si ottengono derivando parzialmente la (8) saranno in numero di n, e avranno tutte la forma seguente

$$(9)\ \frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}=f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_n)+f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_n)\frac{\partial z}{\partial x_r}=0$$

dove $r=1, 2, \dots, n$, e $f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_1, a_2, \dots a_n)$

rappresentano le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_r}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$; talchè, astrazione fatta dalle difficoltà pratiche, almeno in generale potremo fra esse e la (8) eliminare le n costanti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dando luogo a una equazione della forma

$$\psi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0, \tag{10}$$

che invece delle dette costanti conterrà le derivate parziali del prim'ordine $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$.

Ammettiamo ora che le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cessando di essere costanti diventino quantità variabili; allora invece delle equazioni (9) ne avremo altre che si troveranno tenendo conto anche della variabilità di queste quantità, e che saranno perciò ordinariamente diverse dalle (9) stesse; ma si comprende che, quando le $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pure essendo funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, siano scelte convenientemente, potrà avvenire che l'insieme dei termini in più che verranno in quelle equazioni risulti zero, e le equazioni vengano ad essere ancora le stesse; e allora se con certi processi di eliminazione, quando le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si consideravano come costanti, si giungeva alla equazione precedente (10), applicando gli stessi processi anche quando s'intenda che le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siano le quantità variabili così determinate, si giungerà ancora alla stessa equazione, la quale varrà così tanto per le funzioni z definite dalla equazione (8) nel caso che le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siano tutte costanti, quanto per le funzioni z definite dalla stessa equazione quando le $a_1, a_2, \ldots a_n$ siano quantità variabili scelte nel modo indicato.

Questa considerazione generale fatta da Lagrange dà luogo ad un processo detto della *variazione delle costanti arbitrarie*, che fu da Lagrange applicato anche in altri studii, e che conduce appunto al risultato poc'anzi enunciato.

Osserviamo perciò che se nella equazione data (8) le quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ anzichè esser costanti, sono anch'esse quantità variabili che dipendono da $x_1, x_2, \ldots x_n, z$ in modo da esser funzioni finite e continue di queste quantità insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, allora invece delle equazioni a derivate parziali (9), avremo le altre

$$\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial a_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_r}\right)+\frac{\partial f}{\partial a_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_r}\right)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_r}\right)+\frac{\partial f}{\partial a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_r}\right)=0, \tag{11}$$

dove $r=1, 2, \ldots, n$, e dove, in generale, con $\left(\frac{\partial a_s}{\partial x_r}\right)$ s'intende rappresentata

la somma $\frac{\partial a_s}{\partial x_r}+\frac{\partial a_s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}$, cioè la derivata *completa* di a_s rapporto a x_r, giacchè a_s oltre a contenere x_r esplicitamente può anche contenere z; e se supponiamo in particolare che a_n sia una funzione qualsiasi $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ delle altre quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ finita però e continua insieme alle sue derivate parziali rapporto a queste quantità stesse, allora avendosi

$$\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_r}\right)=\frac{\partial a_n}{\partial a_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_r}\right)+\frac{\partial a_n}{\partial a_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_r}\right)+\ldots+\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_r}\right),$$

la equazione precedente prenderà la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}+\left[\frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1}\right]\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_r}\right)+\left[\frac{\partial f}{\partial a_2}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2}\right]\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_r}\right)+\ldots+$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right]\left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_r}\right)=0;$$

talchè, anche nel nuovo concetto rispetto alle quantità $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le equazioni a derivate parziali della funzione z definita dalla (8) si ridurranno ancora alle (9) quando, per la forma speciale (scelta però arbitrariamente) che si attribuisca alla funzione $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, le $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ siano funzioni finite e continue insieme alle loro derivate $\left(\frac{\partial a_s}{\partial x_r}\right)$ e soddisfino alle $n-1$ equazioni della forma $\frac{\partial f}{\partial a_s}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_s}=0$, per $s=1, 2, \ldots, n-1$, o alle equazioni $\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)=0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)=0$, $\ldots \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\right)=0$, dove s'intende in generale che il simbolo $\left(\frac{\partial f}{\partial a_s}\right)$ rappresenti la derivata completa $\frac{\partial f}{\partial a_s}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_s}$ di f rispetto ad a_s, presa cioè questa derivata col tener conto della circostanza che a_s oltre a comparire esplicitamente in f può anche comparirvi coll'essere contenuta in a_n.

In altri termini dunque noi possiamo dire che se si avrà la equazione

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \varphi)=0, \tag{12}$$

dove φ è una funzione qualsiasi di $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ finita e continua insieme alle sue derivate parziali rispetto a queste quantità, formando il sistema delle n equazioni

$$f=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)=0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\right)=0, \tag{13}$$

si potrà assicurare che, per ogni forma speciale che si attribuisca alla funzione (arbitraria) φ, e per la quale queste equazioni, almeno finchè $x_1, x_2, \dots, x_n$ restano in un certo campo a n dimensioni (che potrà anche dipendere dalla forma della funzione φ), definiscano un sistema di funzioni $z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ finite, continue e a un sol valore insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, la funzione z così definita risulterà tale che per essa si avranno quelle stesse equazioni a derivate parziali

$$(14)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z}{\partial x_2}=0\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$$

che si hanno per la funzione z che è definita dalla equazione stessa (8) nella ipotesi che $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ e φ siano quantità costanti e arbitrarie; talchè, noi possiamo esser certi che per ognuna di tali forme speciali della funzione φ e per ogni punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nel quale le funzioni $z, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ definite dal sistema di equazioni (13) e la funzione φ vengano ad avere i rispettivi valori $z_0, a_1^0, \dots a_{n-1}^0, \varphi_0$, e $\frac{\partial f}{\partial z}$ sia differente da zero, tanto la funzione z così definita per mezzo delle equazioni (13), quanto l'altra funzione z definita dalla equazione (12) nell'ipotesi che $a_1, \dots, a_{n-1}, \varphi$ abbiano i valori costanti $a_1^0, \dots, a_{n-1}^0, \varphi_0$, e colla condizione che nel punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ essa venga ad essere eguale a z_0, avranno le stesse derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ nel punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Se dunque nella primitiva ipotesi di $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi$ quantità costanti sarà stata trovata con un processo qualsiasi una equazione a derivate parziali del prim'ordine

$$(15)\qquad \psi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$$

che è indipendente da $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi$, e a cui la funzione z deve soddisfare identicamente qualunque siano i valori speciali $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ che si attribuiscono a queste costanti nella equazione (12) che la definisce e qualunque sia il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che si considera, resta ora evidente che anche la funzione z definita dal sistema di equazioni (13) sotto le ipotesi sopra indicate, qualunque sia la funzione φ, verrà a soddisfare alla equazione stessa (15) per ognuno dei punti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che si considerano, almeno finchè il valore di $\frac{\partial f}{\partial z}$ si mantiene differente da zero; talchè la equazione stessa (15) potrà riguardarsi come una equazione a derivate parziali del primo ordine tanto per la funzione z che si ha nel primo concetto, quanto per quella che si ha nel secondo; e, come nel primo caso la stessa equazione (15) non contiene traccia delle costanti arbitrarie $a_1, a_2, \dots a_{n-1}, \varphi$, nel secondo non contiene traccia delle funzioni $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, e della funzione arbitraria φ che comparisce nelle equazioni (13) che definiscono la funzione; e se questa equazione (15) sarà stata ottenuta con un particolare processo di eliminazione fra le (12) e (14) delle quantità $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi$ quando esse si consideravano come costanti, essa evidentemente potrà riguardarsi anche come risultante dall'eliminare collo stesso processo e fra le medesime equazioni (12) e (14) le quantità $a_1, \dots, a_{n-1}, \varphi$ riguardate ora come funzioni.

E così, riassumendo, noi possiamo ora affermare che quando una funzione z è definita nel modo indicato sopra insieme ad altre $n-1$ funzioni $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ per mezzo di un sistema di equazioni della forma

$$(16)\qquad \begin{cases} f\big(x_1, x_2, \dots, x_n, z, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})\big)=0\ , \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1}\right)=0\ ,\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_2}\right)=0\ ,\ \dots\dots\ ,\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_n}\right)=0\ , \end{cases}$$

nelle quali figura una funzione arbitraria $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ delle $n-1$ quantità $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ rispetto alle quali essa è finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine, allora la funzione z così definita, per qualsiasi forma della funzione arbitraria φ per la quale le equazioni precedenti (16) siano possibili, darà ordinariamente luogo a una equazione a derivate parziali del prim'ordine $\psi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$ priva della funzione arbitraria, e che si otterrà eliminando la funzione arbitraria φ insieme alle altre funzioni $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ fra la equazione $f=0$ e le equazioni a derivate parziali del prim'ordine che da essa risultano colla derivazione parziale rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$. E, almeno finchè $\frac{\partial f}{\partial z}$ è differente da zero, la equazione stessa sarà precisamente quella che si avrebbe in modo simile per la funzione z definita dalla equazione $f=0$ nella ipotesi di $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi$ costanti arbitrarie; come in generale qualunque equazione a derivate parziali del prim'ordine relativa a quest'ultima funzione z e priva delle costanti $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \varphi$, apparterrà sempre anche alla funzione z definita dal sistema di equazioni (16), qualunque sia il processo col quale essa sarà stata ottenuta e qualunque sia la forma che si attribuisce alla funzione arbitraria φ che comparisce nelle equazioni stesse.

E s'intende che la funzione z definita nel modo indicato sopra dal sistema di equazioni (16) per ogni forma speciale che si attribuisca alla funzione arbitraria φ, potrà anche riguardarsi come definita da una equazione che risulti dalla eliminazione delle quantità $a_1 , a , \dots , a_{n-1}$ fra le stesse equazioni (16), ecc. (*).

(*) Il processo che abbiamo seguito per giungere alla conclusione ottenuta sopra è basato sul fatto che quando nella equazione (8) per a_n si pone una funzione arbitraria φ delle altre quantità $a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1}$, e per ogni forma che si sceglie per questa funzione φ le $a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1}$ sono prese in modo da soddisfare alle equazioni $\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right)=0 , \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right)=0 , \dots , \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\right)=0$, le n espressioni

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial f}{\partial a_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_r}\right)+\frac{\partial f}{\partial a_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_r}\right)+\dots+\frac{\partial f}{\partial a_n}\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_r}\right)$$

che formano l'insieme dei termini dopo il secondo nelle n equazioni che si hanno dalle (11) per $r=1 , 2 , \dots , n$ sono tutte nulle identicamente.

Non è però soltanto in questo modo che si giunge a un tale risultato.

Immaginando infatti di avere scritte tutte le dette n espressioni (α) corrispondenti a $r=1 , 2 , \dots , n$, e facendo astrazione dal caso in cui siano zero tutte le $\left(\frac{\partial a_s}{\partial x_r}\right)$ che ci riporterebbe a quello delle $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ tutte quantità costanti qualsiansi, si vede subito ad esempio che le stesse espressioni saranno tutte identicamente nulle anche quando le $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ sieno scelte in modo da soddisfare alle equazioni $\frac{\partial f}{\partial a_1}=0 , \frac{\partial f}{\partial a_2}=0 , \dots , \frac{\partial f}{\partial a_n}=0$; le quali, essendo appunto in numero di n, quando non siano incompatibili e siano distinte fra loro, determineranno uno o più sistemi di valori speciali per tutte le quantità $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ in funzione di $x_1 , x_2 , \dots , x_n , z$, e condurranno quindi ad un'altra funzione z definita dalla solita equazione (8) e per la quale si avranno ancora le (2) e quindi le (3).

Fuori poi di questo caso, è chiaro che onde le n espressioni che si hanno dalla (α) col farvi $r=1 , 2 , \dots , n$ risultino tutte nulle, bisognerà che il determinante funzionale delle $a_1 , a_2 , \dots , a_n$, cioè

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_n}\right) \\ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_n}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_2}\right) & \dots & \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix}$$

risulti identicamente nullo; e questo, come si riscontra subito, avverrà sempre quando fra le $a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1} , a_n$ siano stabilite una o più relazioni, per es. $n-h$ relazioni con $h \leq n-1$, per modo da dedurne ad esempio

$$(\gamma) \quad a_{h+1}=\varphi_{h+1}(a_1 , a_2 , \dots , a_h) , \ a_{h+2}=\varphi_{h+2}(a_1 , a_2 , \dots , a_h) , \dots , a_n=\varphi_n(a_1 , a_2 , \dots , a_h)$$

con $\varphi_{h+1} , \varphi_{h+2} , \dots , \varphi_n$ funzioni arbitrarie; come inversamente, con ragionamenti simili a quelli che facemmo nel § 168 [pag. 230 e seg.] per studiare i determinanti

190. — Venendo poi al caso che più comunemente si presenta delle funzioni z di due variabili indipendenti x e y, noi possiamo dunque affermare in particolare che, se per una funzione z definita da una equazione $f(x,y,z,a,b)=0$, dove a e b sono costanti arbitrarie, sarà stata trovata una equazione a derivate parziali del prim'ordine $\psi(x , y , z , p , q)=0$ priva delle costanti a e b, questa equazione oltre a riferirsi alla indicata funzione z, si riferirà anche all'altra che viene definita insieme con a, e per ogni forma speciale che possa attribuirsi alla funzione arbitraria φ, dal sistema delle due equazioni

$$f(x , y , z , a , \varphi(a))=0 \ \varphi \ , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)=\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\varphi'(a)=0 \ ;$$

cioè alla funzione z che per ogni forma di φ risulta dalla eliminazione di a fra queste equazioni; e ciò tutte le volte che $\frac{\partial f}{\partial z}$ non è zero, ecc....

E così, per esempio:

1.° Se si ha $z=ax+by$, con a e b costanti arbitrarie, osservando che allora sarà $p=a$, $q=b$, e che colla eliminazione di a e b si giunge alla equazione a derivate parziali del prim'ordine $z=px+qy$, si concluderà subito che questa equazione $z=px+qy$, oltre a riferirsi alla funzione $z=ax+by$, dove a e b sono costanti arbitrarie, si riferisce anche alla funzione z che per ogni forma che sia al solito ammissibile della funzione φ risulta dalla eliminazione di a fra le due equazioni $z=ax+\varphi(a)y$, $0=x+\varphi'(a)y$; cioè precisamente per quelle funzioni φ e per quei punti (x , y) pei quali la eliminazione di a sia possibile, e al tempo stesso questa quantità a, quando si venga

---

allora indicati con $D_1 , D_2 , \dots , D$, si potrebbe dimostrare che necessariamente una o più relazioni fra le $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ devono sempre sussistere perchè il nostro determinante funzionale (β) sia identicamente nullo, quando non risultino nulli anche tutti quelli corrispondenti ora ai detti determinanti $D_1 , D_2 , \dots$; e con ciò la possibilità di altri casi da considerare resta del tutto esclusa.

Ora, quando siano poste le relazioni (γ), basterà poi determinare le $a_1 , a_2 , \dots , a_h$ in funzione di $x_1 , x_2 , \dots , x_n , z$ colle formole

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a_r}\right)=\frac{\partial f}{\partial a_r}+\frac{\partial f}{\partial a_{h+1}}\frac{\partial \varphi_{h+1}}{\partial a_r}+\frac{\partial f}{\partial a_{h+2}}\frac{\partial \varphi_{h+2}}{\partial a_r}+\dots+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial a_r}=0 ,$$

per $r=1 , 2 , \dots , h$, per far sì che si annullino tutte le espressioni (α); quindi il caso che ora consideriamo delle relazioni (γ) può effettivamente aversi, e, quando non siano zero anche tutti i determinanti corrispondenti ai detti $D_1 , D_2 , \dots$, è il caso più generale che conduca alla equazione a derivate parziali (15) considerata sopra.

Per $h=n-1$ si ha appunto il caso trattato sopra nel testo; e quando sia $n=2$ non si ha che questo caso.

effettivamente a determinarla, risulti una funzione di x e y finita e continua insieme alle sue prime derivate; e poichè quando $\varphi'(a)$ non è costante (ciò che ora deve escludersi) la seconda di queste equazioni ci mostra che a è sempre una funzione del rapporto $\frac{y}{x}$ finchè x e y non sono ambedue zero, e questo, per essere $z=\left(a+\varphi(a)\frac{y}{x}\right)x$, porta che z sia della forma $x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$, con F simbolo di una funzione arbitraria finita, continua, ecc., si conclude subito (come del resto potrebbe facilmente verificarsi direttamente) che la equazione a derivate parziali $z=px+qy$ si riferisce anche alle funzioni z che sono della forma $z=x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$, qualunque sia la funzione F purchè finita, continua ecc.

Geometricamente cioè la indicata equazione a derivate parziali $z=px+qy$ oltre a riferirsi a tutti gli infiniti piani $z=ax+by$ passanti per l'origine delle coordinate si riferisce anche a tutti i coni $z=x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ che hanno il vertice all'origine e hanno per direttrice una curva qualunque nello spazio.

2.° Se è data la equazione $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-\mathrm{R}^2=0$, con a e b costanti arbitrarie, siccome se ne deducono subito le due $x-a+zp=0$, $y-b+zq=0$, e colla eliminazione di a e b si ottiene l'altra $z^2=\frac{\mathrm{R}^2}{1+p^2+q^2}$ che è a derivate parziali del prim'ordine; si conclude subito che questa equazione, oltre a riferirsi alla funzione z definita dalla equazione data con a e b costanti arbitrarie, si riferisce anche alla funzione z definita insieme ad a dalle due equazioni

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-\mathrm{R}^2=0\quad,\quad x-a+[y-\varphi(a)]\,\varphi'(a)=0\,,$$

qualunque sia la forma della funzione arbitraria φ purchè finita, continua, ecc.

191. — Da quanto abbiamo dimostrato risulta già chiaramente come possano aversi equazioni a derivate parziali del prim'ordine per le funzioni z di più variabili indipendenti col fare sparire una funzione arbitraria che comparisce nella funzione stessa z, o almeno nelle equazioni che servono a definirla.

Aggiungerò ora un altro caso molto importante di eliminazione di una funzione arbitraria per mezzo di equazioni a derivate parziali del prim'ordine, dimostrando che, se una funzione z di n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ è definita da una equazione della forma $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)=0$ dove ciascuna delle n quantità $u_1, u_2, \dots, u_n$ è una funzione di tutte o alcune delle quan-

tità $x_1, x_2, \dots, x_n, z$, ed è finita e continua insieme alle sue derivate parziali rispetto a queste quantità, e φ è il simbolo di una funzione arbitraria di $u_1, u_2, \dots, u_n$ che dev'esser sempre finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$, allora, qualunque sia questa funzione φ, la funzione z soddisfa sempre a una equazione a derivate parziali del primo ordine che non contiene traccia della funzione φ, ed è lineare rispetto alle derivate parziali di z, essendo cioè della forma

$$\mathrm{P}_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\mathrm{P}_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots\dots+\mathrm{P}_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=\mathrm{R}\,, \tag{17}$$

dove $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \dots, \mathrm{P}_n, \mathrm{R}$ sono funzioni soltanto di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e z.

Se indichiamo infatti in generale con $\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r}\right)$ la derivata di u_s presa rispetto a x_r col tener conto della circostanza che u_s può anche contenere z, si avrà $\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r}\right)=\frac{\partial u_s}{\partial x_r}+\frac{\partial u_s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}$, e la equazione $\varphi(u_1, u_2, \dots u_n)=0$ che definisce la funzione z, che noi supponiamo finita e continua insieme alle sue derivate parziali, darà luogo alle seguenti

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\dots\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)=0\,,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\dots\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)=0\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right)+\dots\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)=0\,,
\end{gathered}$$

le quali, quando $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$ non siano tutte zero (ciò che da noi può essere escluso) conducono subito alla seguente

$$\begin{vmatrix}
\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dots\dots & \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)\\
\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) & \dots\dots & \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right) & \dots\dots & \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)
\end{vmatrix}=0\,, \tag{18}$$

che si riduce subito alla forma (17).

Se si osserva infatti che, a causa della formola $\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r}\right) = \frac{\partial u_s}{\partial x_r} + \frac{\partial u_s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_r}$, gli elementi del determinante (18) vengono ad esser tutti la somma di due quantità, ricordando un noto teorema sui determinanti si vedrà subito che il primo membro della (18) si scompone nella somma di 2^n determinanti, dei quali alcuni, avendo almeno due colonne proporzionali, sono uguali a zero, e gli altri non contengono che in una colonna le varie derivate $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ e quindi sono lineari rispetto a queste derivate; talchè il teorema enunciato sopra può dirsi ora evidentemente dimostrato.

192. — Farò notare che il metodo di dimostrazione precedente somministra anche il modo di costruire la equazione a derivate parziali (17), poichè questa equazione può riguardarsi come risultante dalla equazione (18) dopo di avere soppresso nello sviluppo del determinante i varî termini che si distruggono; e farò notare inoltre che, nel caso delle equazioni della forma $u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, dove φ è ancora il simbolo di una funzione arbitraria, e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ hanno i significati precedenti, si ottengono ancora gli stessi resultati che precedentemente, perchè queste equazioni possono ridursi alla forma $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) - u_n = 0$ che rientra nell'altra considerata sopra $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) = 0$.

Gli stessi risultati poi si hanno anche nel caso delle equazioni della forma $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})) = 0$, dove φ è ancora il simbolo di una funzione arbitraria e ψ è il simbolo di una funzione di forma determinata, giacchè allora, almeno in generale, questa equazione ci darà l'altra $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ dove ψ_1 è ancora una funzione di forma determinata di $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; e questa, ponendo $u_n = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ si ridurrà precisamente alla precedente $u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$.

193. — In particolare poi, nel caso delle funzioni z di due variabili indipendenti x e y, si può dire che quando esse sono definite da equazioni della forma

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \text{o} \quad u = \varphi(v), \quad \text{o} \quad \psi(x, y, z, \varphi(v)) = 0,$$

dove φ è sempre il simbolo di una funzione arbitraria, e u, v, ψ sono funzioni di forma determinata finite e continue insieme alle loro derivate del prim'ordine rispetto alle quantità che in esse figurano, allora, qualunque sia la funzione arbitraria φ, avremo sempre per z la equazione a derivate parziali lineare e del prim'ordine

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$$

dove P, Q e R sono funzioni soltanto di x, y, z, e p e q sono le solite derivate

parziali $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; e si può notare che nel caso per es. di $u = \varphi(v)$, cui si riducono sempre anche gli altri casi, questa equazione si ottiene subito dividendo membro a membro le due

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p = \varphi'(v)\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p\right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q = \varphi'(v)\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q\right\},$$

e poi riducendo a forma intera la equazione ottenuta

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}p}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}q} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z}p}{\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}q},$$

salvo a considerare a parte il caso in cui i due denominatori siano ambedue uguali a zero.

E così per esempio:

1.° Se si ha $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(x+y)$ con φ funzione arbitraria, si troverà subito la equazione a derivate parziali del prim'ordine $zp - zq + x - y = 0$ cui soddisfa z qualunque sia la funzione arbitraria φ, purchè finita e continua, al solito, insieme alle sue derivate, ecc.

2.° Se si ha $z = \varphi(ax + by + cz)$ con a, b, c costanti e φ funzione arbitraria, si avrà subito $bp - aq = 0$ per la equazione a derivate parziali del prim'ordine cui soddisfa z qualunque sia la funzione φ.

3.° Se si ha $\operatorname{sen} z + \cos(x^2 + y^2) = \varphi(x + e^z)$, si avrà subito la equazione $e^z \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, yp - \left(\frac{1}{2}\cos z + e^z \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, x\right) q = -\operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, y$ qualunque sia φ.

194. — Un caso importantissimo di equazioni a derivate parziali del primo ordine che sono anch'esse lineari rapporto a queste derivate, e possono riguardarsi esse pure come risultanti dalla eliminazione di una funzione arbitraria fra la funzione z e le equazioni che si ottengono colla solita derivazione parziale immediata, è quello cui si è condotti dalla considerazione delle funzioni omogenee.

È noto che una funzione z di più quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dicesi *funzione omogenea* di queste quantità, quando moltiplicandole tutte per una stessa indeterminata t, la funzione viene moltiplicata per una potenza di t; e l'esponente di questa potenza, che può anch'essere lo zero, si dice *grado di omogeneità della funzione.*

Ora, se $z = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una funzione omogenea di grado m di

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, prendendo $t=\frac{1}{x_1}$, s'intende subito che si potrà sempre scrivere $\frac{z}{x_1^m}=\mathrm{F}\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, ovvero $z=x_1^m\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$; e viceversa ogni funzione z della forma $x_1^m\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, sarà evidentemente una funzione omogenea del grado m di $x_1, x_2, \ldots, x_n$, poichè cambiando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$ respettivamente, essa verrà tutta moltiplicata per t^m; talchè per scrivere la forma generale delle funzioni z omogenee di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e del grado m, basta scrivere $z=x_1^m\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, con φ funzione arbitraria, la quale evidentemente sarà una funzione omogenea qualsiasi di grado zero.

Così essendo, quando si ponga $\frac{x_2}{x_1}=u_1$, $\frac{x_3}{x_1}=u_2, \ldots, \frac{x_n}{x_1}=u_{n-1}$, e $\frac{x_1^m}{z}=u_n$, per quanto si disse negli ultimi paragrafi s'intende subito che qualunque sia la funzione φ, purchè finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine, la funzione z dovrà soddisfare a una equazione a derivate parziali lineari e del prim'ordine della forma (17), e questa equazione potrebbe trovarsi coi metodi che già conosciamo.

Però, anche senza ricorrere ai metodi generali, se si osserva che si può scrivere $z=x_1^m\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, con $u_1=\frac{x_2}{x_1}, \ldots, u_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}$, si ottengono subito le equazioni seguenti

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=mx_1^{m-1}\varphi+x_1^m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\right)=$$

$$=mx_1^{m-1}\varphi-x_1^{m-2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}x_2+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}x_3+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}x_n\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_3}=x_1^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}=x_1^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}},$$

e queste ci danno subito l'altra $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mx_1^m\varphi$, ovvero

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots.+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz, \tag{19}$$

la quale è appunto la equazione richiesta; e questo mentre ci mostra che tutte le funzioni z omogenee del grado m, purchè finite e continue insieme alle loro derivate parziali del prim'ordine, soddisfano alla equazione del primo ordine (19), ci permette anche di enunciare il teorema che dice che: *per le funzioni omogenee la somma dei prodotti delle derivate parziali della funzione moltiplicate per la variabile rapporto a cui le derivate stesse sono prese, è sempre uguale alla funzione moltiplicata pel suo grado* (*).

195. — Questo teorema, che è di una importanza grandissima, è dovuto a *Eulero*. Per esso si possono scrivere immediatamente le equazioni a derivate parziali di un numero grandissimo di funzioni, poichè basta sapere che esse sono omogenee, e conoscere il loro grado di omogeneità per potere scrivere subito la equazione a derivate parziali corrispondente.

Così per esempio:

1.° Quando si abbia $z=\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}\right)$, siccome allora z è omogenea, e il suo grado di omogeneità è zero, si potrà dire immediatamente che qualunque sia la funzione φ purchè finita e continua insieme alle sue derivate parziali, la funzione z soddisfa sempre alla equazione lineare e del prim'ordine $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$.

(*) La formola dimostrata (19) e altre simili possono anche ottenersi nel modo seguente.

Si osservi che, per la definizione delle funzioni omogenee $z=\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di grado m, si ha qualunque sia t

$$\mathrm{F}(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^m\mathrm{F}(x_1, x, \ldots, x_n);$$

e considerando in questa il t come variabile indipendente, e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come quantità costanti, basterà fare i differenziali successivi dei varii ordini colle note regole, e poi passare dai differenziali alle derivate e fare $t=1$ per ottenere subito le formole seguenti

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz,$$

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2=m(m-1)z,$$

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2=m(m-1)(m-2)z,$$

. . . .

nelle quali i primi membri della seconda, terza, ... sono le solite forme omogenee, potenze simboliche di $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots x_n\frac{\partial z}{z x_n}$; e la prima di queste formole è appunto la (19) del testo.

2.° E se si ha per es. $z = \varphi\left(\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)(x^3+y^3)$; siccome allora z è omogenea e di terzo grado, qualunque sia la solita funzione arbitraria φ, la z soddisfarà alla equazione a derivate parziali del prim'ordine $px+qy=3z$, dove $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ e $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

3.° E similmente se si ha, per es., $z = \varphi\left(e^{\frac{x}{y}}, \cos\frac{x}{y}\right)\frac{x^m}{y^m}$, si avrà $px+qy=0$.

196. — Troviamo ora opportuno di presentare anche la osservazione seguente.

Da quanto abbiamo dimostrato risulta alla evidenza come possano aversi equazioni a derivate parziali del prim'ordine che provengono dalla eliminazione di una funzione arbitraria fra una funzione z di più variabili indipendenti, o almeno fra le equazioni che la definiscono, e le equazioni a derivate parziali del prim'ordine che si ottengono colla derivazione immediata.

Nel calcolo integrale poi, sotto certe condizioni che si verificano sempre nelle applicazioni, si dimostra inversamente che per le funzioni z di più variabili indipendenti, ad ogni equazione a derivate parziali del prim'ordine corrisponde sempre una funzione z delle stesse variabili che contiene una funzione arbitraria, o almeno che è definita insieme ad altre quantità da un sistema di equazioni che contengono una funzione arbitraria; talchè allora resta evidente che ogni equazione a derivate parziali del prim'ordine, anzichè esprimere una speciale proprietà di una funzione particolare, o di un particolare elemento geometrico, meccanico, ecc. esprime invece una proprietà comune a una classe estesissima di quelle funzioni o di quegli elementi. E quindi in particolare, se in un problema cui si riferisca una equazione in termini finiti fra le variabili indipendenti e una funzione z, si passerà da questa equazione a una delle sue equazioni a derivate parziali del primo ordine, questa equazione invece di esprimere una speciale proprietà della sola funzione z che è propria del problema che si studia, esprimerà una proprietà comune a una classe estesissima di quelle funzioni; e trattando la stessa equazione a derivate parziali, si verrà a trattare un problema immensamente più vasto di quello che si studiava o si voleva studiare dapprima.

197. — Volendo ora accennare anche alla eliminazione di funzioni arbitrarie che si fa mediante le equazioni a derivate parziali di second'ordine, darò alcuni casi di equazioni a derivate parziali di second'ordine che possono ottenersi coll'eliminare due funzioni arbitrarie dal valore della funzione a più variabili che si considera, o almeno dalle equazioni che servono a definire questa funzione.

Supponiamo perciò in primo luogo che per definire una funzione z di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ finita e continua insieme alle sue derivate parziali di primo e secondo ordine, si abbia una equazione della forma

$$(20) \quad f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), \psi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})\right) = 0,$$

dove $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ sono funzioni conosciute di $x_1, x_2, \dots, x_n, z$; e sì esse che la funzione f e le due funzioni arbitrarie φ e ψ siano finite e continue insieme alle loro derivate parziali di primo e second'ordine rispetto alle quantità che contengono.

Allora le solite n equazioni a derivate parziali del prim'ordine che risultano dalla equazione (20) con una prima derivazione parziale, oltre alle funzioni φ e ψ, conterranno in generale anche le $2(n-1)$ derivate parziali $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}, \frac{\partial\psi}{\partial v_1}, \frac{\partial\psi}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial v_{n-1}}$; talchè in generale, qualunque combinazione si faccia di queste n equazioni colla primitiva (20), l'equazione che ne risulterà, conterrà ancora alcune di queste $2n$ funzioni indeterminate, e soltanto in casi speciali potrà avvenire che di queste funzioni non ve ne resti che una, in modo cioè da avere allora una equazione del primo ordine che sia per es. della forma

$$(21) \quad f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})\right) = 0,$$

o dell'altra

$$(22) \quad f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial\varphi}{\partial u_s}\right) = 0,$$

con s eguale a uno dei numeri $1, 2, \dots, n-1$.

Ora quando si presenti uno di questi casi speciali, e si abbia per es. la (21), si formeranno le solite n equazioni a derivate parziali del primo ordine

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right) = 0,$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_{n-1}}\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}\right) = 0,$$

dove in generale con $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_r}\right)$, $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_r}\right)$, $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_r}\right)$, ... s'indicano le derivate complete di $f_1, u_1, u_2, \ldots$, prese queste derivate rispetto alla variabile indipendente x_r e coll'osservare che questa variabile, oltre a trovarsi in f_1 e in $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ esplicitamente, vi si troverà anche implicitamente in z e nelle derivate $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; e ora da queste equazioni si elimineranno subito le derivate di φ formando la equazione

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \cdots\cdots \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}\right) \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \cdots\cdots \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\right) \cdots \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}\right) \end{vmatrix} = 0 ,$$

la quale non conterrà che $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ e, unita alla (21), con una opportuna eliminazione ci condurrà, almeno in generale, a una equazione della forma seguente

$$\text{(23)} \quad F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s}, \ldots\right) = 0 ,$$

che conterrà le derivate parziali di second'ordine di z, senz'alcuna traccia delle funzioni arbitrarie, le quali saranno così rimaste eliminate tutte e due nel passare a questa equazione a derivate parziali del second'ordine.

Al modo stesso si tratterebbe il caso della equazione (22), bastando allora per questo di porre la $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$ al posto di φ nelle formole del caso precedente.

Similmente, se supponiamo in secondo luogo che la nostra funzione z delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per ogni forma speciale delle funzioni $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ sia definita insieme a $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ dal sistema di equazioni

$$\text{(24)} \quad \begin{cases} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \psi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\right) = 0 , \\ \left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\right) = 0 , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial a_2}\right) = 0 , \ldots , \left(\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\right) = 0 , \end{cases}$$

dove in generale si ha $\left(\frac{\partial f}{\partial a_r}\right) = \frac{\partial f}{\partial a_r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial a_r}$, allora, osservando che si hanno ancora le solite equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 , \ldots , \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 ,$$

si vede subito che almeno in generale con queste n equazioni e colla prima delle precedenti (24) potremo determinare le $n+1$ quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, φ e ψ in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ per modo da poterle riguardare tutte come quantità conosciute; e anche potremo fra le stesse $n+1$ equazioni eliminare le $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e una delle due funzioni $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ e $\psi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, giungendo così a una equazione della forma

$$f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\right) = 0 ,$$

o a una dell'altra

$$f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \psi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\right) = 0 ,$$

nelle quali ora le $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ potranno intendersi determinate nel modo detto poc'anzi, e riguardarsi quindi come quantità perfettamente conosciute, come lo erano le $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ del caso precedente, salvo che ora le $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ conterranno anche le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$.

Così si viene dunque a ricadere nel caso già considerato, e con nuove derivazioni parziali applicate all'ultima equazione ottenuta potremo eliminare la funzione φ o ψ e le derivate di φ o ψ che compariranno nelle equazioni che si ottengono colla derivazione, precisamente come nel caso della equazione (21); talchè anche in questo caso si giungerà a una equazione a derivate parziali del second'ordine di z che sarà della forma (23), e non conterrà più traccia alcuna delle funzioni φ e ψ e delle quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ che comparivano nelle equazioni che servivano a determinare z insieme alle quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

198. — Giova poi notare esplicitamente che nel caso delle funzioni z di due variabili indipendenti x e y, le quantità $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ che figurano nella (20) si riducono a una sola che possiamo indicare con u, e così le $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ si riducono a una sola che possiamo indicare con v; e quindi in questo caso si può dire che, avendo la equazione $f(x, y, z, \varphi(u), \psi(v)) = 0$,

sarà possibile, almeno in generale, di eliminare da essa le funzioni arbitrarie $\varphi(u)$ e $\psi(v)$ dando luogo a una equazione del second'ordine

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0, \tag{25}$$

dove p, q, r, s, t sono le solite caratteristiche di Monge, tutte le volte che si riescirà a formare una equazione del prim'ordine, come per es. la seguente

$$f_1(x, y, z, p, q, \varphi(u))=0, \quad \text{o l'altra} \quad f_2(x, y, z, p, q, \varphi'(u))=0,$$

che contenga una sola delle funzioni arbitrarie $\varphi(u)$ e $\psi(v)$, o una derivata $\varphi'(u)$ o $\psi'(v)$.

E similmente, nel caso sempre di due sole variabili indipendenti x e y le quantità $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ che figurano nel sistema di equazioni (24) si riducono a una sola che allora possiamo indicare con α; e perciò in questo caso si può dire che per la funzione z definita insieme ad α da un sistema di equazioni della forma

$$f(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha))=0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)=0,$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(\alpha)$, è sempre possibile, almeno in generale, di eliminare le due funzioni arbitrarie $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$ passando ad una equazione del second'ordine della forma (25) alla quale z viene a soddisfare qualunque sia la forma delle funzioni $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$.

199. — Aggiungiamo che altri casi speciali e speciali artifizii conducono spesso a resultati consimili intorno alla eliminazione che può farsi di due funzioni arbitrarie col passare a equazioni a derivate parziali del secondo ordine; e anche nei casi particolari che rientrano in quelli considerati nei due paragrafi precedenti, il più spesso non fa bisogno di applicare i metodi generali che qui abbiamo indicati, ma basta seguire processi speciali più semplici.

Ciò del resto risulterà chiaramente dai seguenti esempi:

1.° Se si ha $z=\varphi(x+ay)+\psi(x-ay)$, con a quantità costante e φ e ψ funzioni arbitrarie purchè finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, si osserverà che allora si ha

$$\left\{\begin{aligned} p&=\varphi'(x+ay)+\psi'(x-ay), & q&=a\varphi'(x+ay)-a\psi'(x-ay),\\ r&=\varphi''(x+ay)+\psi''(x-ay), & t&=a^2\varphi''(x+ay)+a^2\psi''(x-ay),\end{aligned}\right. \tag{26}$$

e si otterrà subito $t-a^2r=0$ per la equazione a derivate parziali del second'ordine

cui soddisfano le funzioni z della forma precedente $z=\varphi(x+ay)+\psi(x-ay)$, qualunque siano le funzioni φ e ψ purchè finite, continue, ecc.

Alla stessa equazione poi saremmo giunti anche coll'applicare i metodi dati nei paragrafi precedenti, osservando cioè che le (26) ci danno subito la equazione $ap+q=2a\varphi'(x+ay)$ che contiene la sola funzione indeterminata φ' e che colla derivazione parziale ci dà le due $ar+s=2a\varphi''(x+ay)$, $as+t=2a^2\varphi''(x+ay)$ dalle quali si ha subito l'altra $t-a^2r=0$ che già abbiamo trovato.

2.° Se si ha $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, con $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ e $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ funzioni arbitrarie, si osserverà che colle solite derivazioni parziali si trova $p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{x}{y}\right)$, $q=\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$; e poichè di qui si deduce l'equazione $p+\frac{y}{x}q=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, che non contiene che una funzione arbitraria, secondo quanto abbiamo detto in generale, potremo eliminare anche questa funzione passando alle derivate parziali del second'ordine.

Di qui infatti con nuove derivazioni avremo le equazioni

$$r+\frac{y}{x}s-\frac{y}{x^2}q=-\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad s+\frac{1}{x}q+\frac{y}{x}t=\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

e queste ci daranno subito l'altra del second'ordine $x^2r+2xys+y^2t=0$ che non contiene più le due funzioni arbitrarie.

3.° Se si ha $z=\dfrac{\varphi(x)+\psi(y)}{x+y}$, ovvero $z(x+y)=\varphi(x)+\psi(y)$, con una semplice derivazione rispetto ad x si giunge subito alla equazione $z+(x+y)p=\varphi'(x)$ che non contiene più altro che una funzione indeterminata $\varphi'(x)$; e questa con una derivazione rispetto ad y conduce subito all'altra del second'ordine $p+q+s(x+y)=0$, ovvero $s=-\dfrac{p+q}{x+y}$ che non ha più traccia di funzioni arbitrarie.

4.° Se z è definita insieme ad α dal sistema delle due equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &(x-\alpha)^2+\{y-\varphi(\alpha)\}^2+\{z-\psi(\alpha)\}^2-a^2=0,\\ &x-\alpha\ +\{y-\varphi(\alpha)\}\varphi'(\alpha)+\{z-\psi(\alpha)\}\psi'(\alpha)=0,\end{aligned}\right. \tag{27}$$

la seconda delle quali, all'infuori del fattore costante $-\frac{1}{2}$, è la derivata rispetto ad α della prima, allora, secondo quanto abbiamo detto nei due paragrafi precedenti e col processo che ivi abbiamo indicato, potremo eliminare le funzioni $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$ insieme ad α passando a una equazione a derivate parziali del second'ordine cui z dovrà sempre soddisfare.

E difatti derivando parzialmente la prima equazione, col tener conto della seconda, si otterranno le due

$$(28)\qquad (z-\alpha)p+\{x-\psi(\alpha)\}=0 \quad , \quad (z-\alpha)q+\{y-\varphi(\alpha)\}=0\,,$$

e ricavando da queste $x-\psi(\alpha)$ e $y-\varphi(\alpha)$ e sostituendole nella prima delle equazioni date (27) si troverà subito l'altra $z-\alpha=\pm\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, ovvero $\alpha=z\mp\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, e così sarà intanto conosciuta la forma di α, dopo di che la prima e la seconda delle precedenti (28) ci daranno respettivamente $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$.

Infatti valendosi della seconda delle (28) si trova subito

$$y-\varphi(\alpha)=\mp\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,,\qquad \text{ovvero}\qquad \varphi(\alpha)=y\pm\frac{aq}{\sqrt{1+q^2+p^2}}\,;$$

e ora, con questo valore di $\varphi(\alpha)$, derivandolo una volta rispetto ad x e una rispetto ad y, si passa immediatamente alla equazione

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(y\pm\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\mp\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0\,,$$

che a causa del valore trovato per α si trasforma nell'altra

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z\mp\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(y\pm\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(z\mp\frac{a}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(y\pm\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0\,;$$

e questa a calcoli eseguiti viene a contenere evidentemente anche le derivate parziali di second'ordine r, s, t di z senza presentare traccia alcuna delle funzioni arbitrarie che comparivano nelle equazioni (27) che definiscono z insieme ad α.

5.° Se si ha $z=2\{\varphi(x)+\psi(y)\}-(x+y)\{\varphi'(x)+\psi'(y)\}$, con φ e ψ funzioni arbitrarie, non si rientra in nessuno dei casi contemplati nei due paragrafi precedenti, però si possono ancora con tutta facilità eliminare le funzioni φ e ψ passando a una equazione a derivate parziali del second'ordine.

Se si osserva infatti che dalla equazione data si hanno subito le altre

$$p=\varphi'(x)-\psi'(y)-(x+y)\varphi''(x)\,,\ q=\psi'(y)-\varphi'(x)-(x+y)\psi''(y)\,,\ s=-\varphi''(x)-\psi''(y),$$

si giunge immediatamente alla equazione $s=\dfrac{p+q}{x+y}$ che è del second'ordine, e non contiene traccia delle funzioni arbitrarie $\varphi(x)$ e $\psi(y)$.

200. — Porrò fine a questo studio sulle equazioni differenziali dando un brevissimo cenno anche delle equazioni *ai differenziali totali*.

Ricordiamo perciò che quando una equazione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$, dove f è finita e continua insieme alle sue derivate parziali del prim'ordine, definisce una funzione z delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per la quale esistono pure e sono finite le varie sue derivate parziali del prim'ordine, si ha sempre la equazione differenziale

$$(29)\qquad df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0\,;$$

e questa, come qualunque altra equazione della forma

$$(30)\qquad X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+\ldots+X_n\,dx_n+Z\,dz=0\,,$$

che risulti da una combinazione della (29) colla primitiva, come ad es. colla eliminazione di una costante, e nella quale $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ dipendano soltanto da $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, si dice una *equazione ai differenziali totali del prim' ordine* per la funzione z.

Similmente quando esistono e sono finite e continue anche le derivate seconde di f e esistono pure e sono finite anche quelle di z, si hanno equazioni ai differenziali totali del second'ordine, come ad es. la seguente

$$d^2f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}d^2z=0\,,$$

o anche qualunque altra equazione che risulti da una combinazione di questa con quelle del prim'ordine e colla primitiva; e così pure si hanno equazioni ai differenziali totali degli ordini superiori, limitandosi però ordinariamente a equazioni che possano dirsi omogenee rispetto ai differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ quando si tenga conto della circostanza che dz, d^2z, $d^3z, \ldots$ sono anch'esse funzioni omogenee delle stesse quantità e dei gradi primo, secondo, terzo,... respettivamente; e ciò per la ragione che quando una equazione razionale intera (come sono sempre quelle che si considerano) fra i differenziali $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ non è omogenea, essa, per un noto teorema sugl'infinitesimi, si scinde sempre in più equazioni omogenee.

Ora, nel caso delle equazioni (30) ai differenziali totali del prim'ordine, *quando provengono effettivamente da una equazione in termini finiti* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$, (per modo cioè che esista una funzione z che le soddisfa), si può osservare che, avendosi $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\dfrac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$ e essendo $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ differenziali di variabili indipendenti (e quindi tutti arbitrarii), la equazione stessa (30) equivarrà sempre alle n equazioni a derivate parziali del prim'ordine

$$X_1 + Z\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad X_2 + Z\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad X_n + Z\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \, ,$$

talchè, volendolo, potremo sempre considerare queste ultime invece della equazione data ai differenziali totali.

Similmente una equazione ai differenziali totali del second'ordine per n variabili indipendenti corrisponderà a $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni a derivate parziali del second'ordine, ecc.

E così in particolare, nel caso delle funzioni z di due variabili indipendenti x, y, una equazione ai differenziali totali del prim'ordine

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0 \, ,$$

dove X, Y, Z sono funzioni di x, y, z, equivarrà alle due a derivate parziali del prim'ordine $X + Zp = 0$, $Y + Zq = 0$; una equazione ai differenziali totali del second'ordine equivarrà a tre equazioni a derivate parziali del second'ordine, ecc....

201. — Merita ora di esser notato che mentre nel calcolo integrale si dimostra, come già dicemmo, che, sotto certe condizioni che ordinariamente si verificano, a una equazione a derivate parziali del prim'ordine corrisponde sempre una equazione in termini finiti, o almeno un sistema di equazioni che definiscono una funzione che la soddisfa, e nelle quali figura una funzione arbitraria, non avviene però sempre lo stesso per le equazioni ai differenziali totali del prim'ordine; e onde a una tale equazione (30) corrisponda una relazione della solita forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$, è necessario che i coefficienti $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$ soddisfino a certe condizioni particolari grandemente restrittive.

Maggiori restrizioni poi si hanno nel caso delle equazioni ai differenziali totali degli ordini superiori, e ciò s'intende bene pensando che una equazione ai differenziali totali equivale sempre a più di una equazione a derivate parziali.

XV.

Cangiamento delle variabili indipendenti

Caso delle funzioni di una sola variabile indipendente.

202. — Bene spesso accade che, dopo aver determinato alcune derivate, o alcuni differenziali di funzioni di una o più variabili, o avere trovato alcune equazioni differenziali considerando come variabili indipendenti date quantità, occorre fare uso di altre variabili indipendenti.

Si dice allora che si fa un cangiamento di variabili indipendenti; e noi ci proponiamo ora di mostrare come questo cangiamento possa farsi valendosi ancora delle formole trovate quando si avevano le primitive variabili, senza che vi sia bisogno di rifare i calcoli dal principio.

Incominciamo perciò dal considerare il caso in cui non si ha che una sola variabile indipendente, ed ammettendo che x sia l'antica variabile e y la funzione, indichiamo con t la nuova variabile, e supponiamo che $x = x(t)$ sia la relazione che lega questa nuova variabile alla prima. Si tratterà di esprimere le derivate antiche $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$ e gli antichi differenziali $dy, d^2y, d^3y, \dots$, che erano stati calcolati nella ipotesi di $dx = \text{cost.}$, o $d^2x = 0$, per le derivate e pei differenziali nuovi di x e y.

Incominciamo perciò dal ricordare che la derivata prima $\frac{dy}{dx}$ o $y'(x)$ può essere considerata come il quoziente dei differenziali dy e dx (§ 105 [pag. 141]) qualunque sia la variabile che si considera come indipendente nel calcolare questi differenziali, con eccezione soltanto pel caso che pel valore della nuova variabile che si considera sia $dx = 0$; talchè astrazione fatta dai valori particolari della nuova variabile che corrispondono a questo caso, noi possiamo dire intanto che qualunque sia la nuova variabile indipendente, la derivata prima si trasformerà colla formola

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

quando si consideri in questa il secondo membro come il quoziente $dy:dx$ dei differenziali di x e di y presi rispetto alla variabile che sarà scelta come variabile indipendente; per modo che quando questa nuova variabile sia fissata e sia t, se sarà $x = x(t)$ la relazione che la lega all'antica variabile, e $y(t)$ la funzione trasformata, si potrà anche scrivere

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{2}$$

per tutti i valori di t pei quali $x'(t)$ non è zero.

In altri termini alla notazione di Lagrange y' o all'altra $\frac{dy}{dx}$, considerata come un simbolo, che si usano per indicare la derivata prima, basterà sostituire sempre quest'ultima notazione $\frac{dy}{dx}$ considerandola come il quoziente dei differenziali di y e di x presi rispetto alla nuova variabile.

Lo stesso non può farsi per le derivate seconde, terze ecc. $y'', y''', \dots$, perchè i simboli $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \dots$ che pure servono a rappresentarle non possono considerarsi come quozienti altro che quando x sia la variabile indipendente (§ 107 [pag. 143]), ciò che ora appunto non si vuole. Però se osserviamo che una derivata di ordine qualunque è sempre la derivata prima di quella di ordine immediatamente inferiore, s'intende che ogni derivata può ancora riguardarsi come quoziente di differenziali primi nel calcolo dei quali la variabile che si considera come indipendente può essere qualunque; e quindi scrivendo $y''(x) = dy'(x) : dx$, $y'''(x) = dy''(x) : dx, \dots$, dal valore già calcolato di $y'(x)$ in funzione di t potremo successivamente dedurre tutte le altre derivate che occorre di determinare tenendo conto sempre della relazione $x = x(t)$ che lega x a t.

203. — Ma fondandosi sempre su questo principio, e conservando sempre in calcolo i differenziali che via via s'introducono senza particolarizzare la variabile indipendente, possono anche trovarsi successivamente alcune formole generali nelle quali neppure sia traccia della relazione che lega la nuova variabile all'antica.

Scriviamo infatti $y''(x) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$, e consideriamo in questa formola il $\frac{dy}{dx}$ e il $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dy}$ come quozienti di differenziali pei quali allora la variabile indipendente può esser qualunque, salvo ad escluder sempre quei valori di questa variabile che rendessero zero il dx.

Osservando che per le regole note si ha $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$, si vedrà subito che

$$y''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \tag{3}$$

e questa ci darà il valore di $y''(x)$ qualunque sia la variabile indipendente; e con questo valore di $y''(x)$, osservando che $y'''(x) = \frac{dy''(x)}{dx}$, si troverà anche

$$y'''(x) = \frac{d\left(\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{dx^3\,d(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d(dx^3)}{dx^7},$$

ovvero

$$y'''(x) = \frac{dx^2\,d^3y - dx\,dy\,d^3x - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5}, \tag{4}$$

e calcolata così $y'''(x)$, potremo calcolare successivamente anche $y^{\text{iv}}(x), y^{\text{v}}(x), \dots$

Da queste formole poi, quando si stabilisca che la variabile indipendente debba esser t, indicando allora per semplicità di scrittura con $x', x'', \dots, y', y'', \dots$ le derivate $x'(t), x''(t), \dots, y'(t), y''(t), \dots$, e osservando che

$$\begin{cases} dx = x'\,dt\,,\ d^2x = x''\,dt^2\,,\ d^3x = x'''\,dt^3, \dots \\ dy = y'\,dt\,,\ d^2y = y''\,dt^2\,,\ d^3y = y'''\,dt^3, \dots \end{cases} \tag{5}$$

si troveranno subito anche le formole

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y'}{x'}\,,\ y''(x) = \frac{x'\,y'' - y'\,x''}{x'^3}, \\ y'''(x) = \frac{x'^2\,y''' - x'\,y'\,x''' - 3\,x'\,x''\,y'' + 3\,y'\,x''^2}{x'^5}, \dots \end{cases} \tag{6}$$

che danno i valori di $y'(x), y''(x), y'''(x), \dots$ espressi per le nuove derivate invece che pei differenziali, e mostrano, come del resto si comprendeva subito anche dalle formole precedenti che a calcoli fatti tutti i differenziali che in esse figurano vengono a sparire.

204. — Moltiplicando poi per dx, dx^2, dx^3, ... i valori trovati per $y'(x)$, $y''(x)$, .. si ottengono subito anche gli antichi differenziali di y, che ora indicheremo con $d_x y$, $d_x^2 y$, $d_x^3 y$, ... espressi pei differenziali nuovi di x e y o per le derivate nuove; e così in particolare valendoci delle formole (1), (2), (3), ... si avranno le altre

$$(7)\qquad \begin{cases} d_x y = dy \;,\; d_x^2 y = \dfrac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx}, \\[2ex] d_x^3 y = \dfrac{dx^2 d^3y - dx\, dy\, d^3x - 3\, dx\, d^2y\, d^2x + 3\, dy\, (d^2x)^2}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dove dx, d^2x, ..., dy, d^2y ... sono differenziali presi rispetto alla nuova variabile indipendente t, la quale però in queste formole non è minimamente fissata e può esser presa a piacere; e colla intelligenza che quando nei secondi membri di queste formole a dx, dy, d^2x, d^2y ... si sostituiscono le espressioni (5) cioè $x'dt$, $y'dt$, $x''dt^2$, $y''dt^2$, ..., i fattori dt che rimarranno a calcoli eseguiti non debbano essere costanti, ma debbano invece essere tali che risulti costante il prodotto $x'(t)dt$ che corrisponde a dx.

E ora trovate tutte queste formole, s'intende subito che quando si abbia una equazione differenziale o una espressione che contenga le derivate o i differenziali antichi di x e y, noi la ridurremo subito relativa a qualsiasi variabile indipendente ponendovi per le derivate e pei differenziali i loro valori dati come quozienti di espressioni differenziali dalle formole (1), (2), (3)...

Fissando poi una variabile indipendente t, le equazioni o espressioni medesime si ridurranno subito a contenere le derivate o i differenziali di x e y rispetto alla nuova variabile, servendosi a tal uopo delle formole (5).

E del resto, volendo, potremo anche far subito uso delle formole (6) che danno le antiche derivate espresse per le nuove, o potremo far uso di quelle particolari che determinano successivamente $y'(x)$, $y''(x)$... in funzione di t, e che si ottengono tenendo conto della relazione particolare che lega x a t. Però vi sarà ordinariamente vantaggio a servirsi delle formole generali (1), (2), ..., e segnatamente delle (2), (3), (4), (7) che danno i valori di $y'(x)$, $y''(x)$... e dei differenziali $d_x y$, $d_x^2 y$, ... espressi per quozienti di espressioni differenziali; e ciò specialmente per la ragione che esse non contengono traccia della nuova variabile indipendente e sono relative a qualsiasi variabile, la quale potrà esser fissata dopo a piacere in quel modo che tornerà più vantaggioso per la semplicità delle formole o per un altro scopo qualsiasi.

S'intende poi che se nelle nostre formole, invece della sola funzione y, ve ne figureranno anche altre, allora per ciascuna di queste funzioni si dovranno applicare le formole precedenti.

205. — Merita ora di esser notato che in sostanza il processo che noi abbiamo dato pel calcolo delle derivate $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, ... si riduce a sostituire alle derivate medesime le respettive espressioni $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$, $\dfrac{d\left(\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}\right)}{dx}$, ... in ciascuna delle quali i simboli che vi figurano devono esser considerati respettivamente come i quozienti successivi delle espressioni differenziali $dy : dx$, $d\,(dy : dx) : dx$, $d\big(d\,(dy : dx) : dx\big) : dx$, ecc. ...; come si può notare altresì che il confronto delle formole (2), (3), (4) colle corrispondenti (6), porta a dire che dalle formole che danno i valori di $y'(x)$, $y''(x)$, ... come quozienti di espressioni differenziali, si passa a quelle che li danno espressi per le nuove derivate sostituendo respettivamente ai differenziali primi, secondi, ... di x e y le derivate prime, seconde, ... delle stesse quantità, ciò che corrisponde a intendere che *in quelle espressioni le lettere d stiano a indicare le derivate;* e si ha anche evidentemente

$$(8)\qquad y'(x) = \frac{y'}{x'}\;,\; y''(x) = \frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\;,\; y'''(x) = \frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x'}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\right)\dots$$

206. — Aggiungiamo inoltre che le formole (6), e così pure queste ultime, possono ottenersi anche colla teoria delle funzioni di funzioni osservando che se $x = x(t)$ è la formola che lega x alla nuova variabile indipendente t, con che verrà ad essere $y = y(t)$, potremo dire che si abbia $y = y(x)$ con $x = x(t)$, e quindi per la indicata teoria si avrà subito $\dfrac{dy}{dt} = y'(t) = y'(x)\,x'(t)$, e $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{y'}{x'}$ come si trovò già; e similmente, dall'essere $\dfrac{y'}{x'} = y'(x)$ con $x = x(t)$, si dedurrà $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{x'}\right) = y''(x)\,x'(t)$, e perciò si avrà $y''(x) = \dfrac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$; e così in modo simile potremmo avere $y'''(x)$, $y^{\text{IV}}(x)$, ...

207. — Infine aggiungiamo che uno dei più notevoli cambiamenti di variabili è quello che si fa quando dopo aver preso per variabile indipendente la x, si vuole invece prendere per variabile indipendente la y; e le formole precedenti servono a fare questo cangiamento speciale di variabile, poichè basta porre in esse $d^2y = d^3y = \ldots = 0$, o $y'(t) = 1$, $y''(t) = y'''(t) = \ldots = 0$, per modo

che allora si hanno immediatamente le formole seguenti

$$(9)\quad y'(x)=\frac{1}{x'(y)}\ ,\ y''(x)=-\frac{x''(y)}{x'^3(y)}\ ,\ y'''(x)=-\frac{x'(y)\,x'''(y)-3x''^2(y)}{x'^5(y)}\ ,\ldots,$$

le quali oltre a servire per l'indicato cangiamento di variabile, possono servire anche pel calcolo delle derivate dei varii ordini delle funzioni inverse.

E non si deve dimenticare che come in generale si escludono i valori di t pei quali $dx=0$, o $x'(t)=0$, così qui si escludono i valori di y pei quali $x'(y)=0$.

208. — Finora abbiamo supposto che non si dovesse cangiare altro che la variabile indipendente.

Talvolta però (come avviene per es. nei problemi geometrici quando si cangiano le coordinate) occorre di cangiare anche le funzioni, sostituendo cioè non solo per la variabile indipendente ma anche per le funzioni una nuova variabile indipendente e nuove funzioni; e anche allora la questione si risolve colle formole generali che noi abbiamo dato poc'anzi.

Si supponga infatti che, avendosi per es. una funzione V di $x, y, z, \ldots, y', y'', y''', \ldots, z', z'', z''', \ldots$, dove $y, z, \ldots$, sono funzioni di x, e $y', y'', y''', \ldots, z', z'', z''', \ldots$, sono le loro derivate prese rispetto ad x, si debbano cangiare la variabile e le funzioni ponendo (come si fa in geometria nei casi di trasformazioni di coordinate)

$$(10)\quad x=x(u_1, u_2, u_3, \ldots)\ ,\ y=y(u_1, u_2, u_3, \ldots)\ ,\ z=z(u_1, u_2, u_3, \ldots)\ldots;$$

e proponiamoci di determinare la forma che prenderà V in conseguenza di questo cangiamento, lasciando dapprima indeterminata quale delle quantità $u_1, u_2, u_3, \ldots$, debba esser presa come variabile indipendente nuova, e anche più in generale ammettendo come possibile che questa variabile indipendente abbia ad essere una quantità di cui $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sono anch'esse funzioni, e che noi lascieremo del tutto indeterminata per fissarla poi nei singoli casi come più sarà creduto opportuno.

Per questo, valendoci delle formole date sopra, noi incominceremo dal ridurre V una funzione di $x, y, z, \ldots$ e dei varii differenziali di queste quantità in modo che la variabile indipendente resti del tutto indeterminata; dopo, venendo allora V a contenere i differenziali $dx, d^2x, \ldots, dy, d^2y, \ldots, dz, d^2z, \ldots$, determineremo questi differenziali colle formole generali

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial x}{\partial u_3}du_3+\ldots,\\
d^2x &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial x}{\partial u_3}du_3+\ldots\right)^2+\frac{\partial x}{\partial u_1}d^2u_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}d^2u_2+\frac{\partial x}{\partial u_2}d^2u_3+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dy &= \frac{\partial y}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial y}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial y}{\partial u_3}du_3+\ldots,\\
d^2y &= \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial y}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial y}{\partial u_3}du_3+\ldots\right)^2+\frac{\partial y}{\partial u_1}d^2u_1+\frac{\partial y}{\partial u_2}d^2u_2+\frac{\partial y}{\partial u_3}d^2u_3+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dz &= \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial z}{\partial u_3}du_3+\ldots,\\
d^2z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}du_2+\frac{dz}{du_3}du_3+\ldots\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u_1}d^2u_1+\frac{\partial z}{\partial u_2}d^2u_2+\frac{\partial z}{\partial u_3}d^2u_3+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

nelle quali la variabile indipendente resta ancora arbitraria; e allora sostituendo nella espressione già trovata di V i valori (10) e (11) di $x, y, z, \ldots dx, d^2x, \ldots$ otterremo un'altra espressione di V in funzione di $u_1, u_2, \ldots$ che sarà relativa a qualunque variabile indipendente.

Se poi la espressione data di V, invece di contenere le derivate di $y, z, \ldots$ contenesse i loro differenziali $d_x y, d_x^2 y, \ldots, d_x z, d_x^2 z, \ldots$, il processo sarebbe evidentemente lo stesso; soltanto, invece di sostituire nella prima operazione, alle derivate di $y, z, \ldots$ le loro espressioni dedotte dalle (2), (3), (4), ... bisognerebbe sostituire ai differenziali le espressioni corrispondenti dedotte dalle formole (7).

Aggiungiamo poi che quando la nuova variabile indipendente venga fissata, allora risulteranno determinati i differenziali $du_1, d^2u_1, \ldots, du_2, d^2u_2, \ldots$ che compariscono nella espressione trasformata di V; e se questa nuova variabile indipendente sarà per es. u_1, allora basterà porre per tutto $d^2u_1=d^3u_1=\ldots=0$.

209. — Per dare un esempio del processo che ora abbiamo indicato, supponiamo che, essendo y una funzione di x, si sia trovato che una certa quantità V (che come vedremo figura nelle applicazioni geometriche del calcolo differenziale) viene data dalla formola

$$(12)\qquad \mathrm{V}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\ ;$$

e ora invece delle variabili x e y si abbia bisogno d'introdurne due altre ρ e ω legate a x e a y dalle equazioni

$$x=\rho\cos\omega\ ,\quad \cancel{x}\,y=\rho\,\mathrm{sen}\,\omega \tag{13}$$

che ora corrispondono alle formole (10), precisamente come occorre di fare quando dalle formole in coordinate cartesiane x e y si vuol passare alle corrispondenti in coordinate polari ρ e ω.

Per fare questa trasformazione si osserverà che, rendendo qualunque in V la variabile indipendente col fare uso delle (2) e (3), si troverà dapprima $V=\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$; e poi, siccome le (13) ci danno

$$\begin{aligned}
dx &= \cos\omega\,d\rho-\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\ ,\quad dy=\mathrm{sen}\,\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\,d\omega\ ,\\
d^2x &= \cos\omega\,d^2\rho-2\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\rho\,d\omega-\rho\cos\omega\,d\omega^2-\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,d^2\omega\ ,\\
d^2y &= \mathrm{sen}\,\omega\,d^2\rho+2\cos\omega\,d\rho\,d\omega-\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega^2+\rho\cos\omega\,d^2\omega\ ,
\end{aligned}$$

e quindi

$$dx^2+dy^2=d\rho^2+\rho^2d\omega^2\ ,\quad dx\,d^2y-dy\,d^2x=\rho(d\rho\,d^2\omega-d\omega\,d^2\rho)+2d\rho^2d\omega+\rho^2d\omega^3\ ,$$

sostituendo si troverà la formola seguente

$$V=\frac{(d\rho^2+\rho^2d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho\,(d\rho\,d^2\omega-d\omega\,d^2\rho)+2\,d\rho^2d\omega+\rho^2d\omega^3}\ . \tag{14}$$

Volendo poi che la variabile indipendente sia per es. ω, bisognerà fare $d^2\omega=0$, e allora si avrà

$$V=\frac{\left\{\rho^2+\left(\dfrac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(\dfrac{d\rho}{d\omega}\right)^2-\rho\,\dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}}\ ; \tag{15}$$

mentre, volendo invece che ρ sia la variabile indipendente, bisognerà fare $d^2\rho=0$, e si avrà quindi

$$V=\frac{\left\{1+\rho^2\left(\dfrac{d\omega}{d\rho}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\rho\,\dfrac{d^2\omega}{d\rho^2}+2\,\dfrac{d\omega}{d\rho}+\rho^2\left(\dfrac{d\omega}{d\rho}\right)^3}\ . \tag{16}$$

Nei casi speciali poi particolari artifizii possono condurre più semplicemente ai risultati finali.

210. — Osserviamo anche che non sempre la variabile indipendente nuova è subito conosciuta per mezzo di una equazione che dia esplicitamente l'antica variabile in funzione della nuova, come abbiamo supposto sempre nei paragrafi precedenti; ma talvolta la nuova variabile indipendente è legata colle quantità che già figuravano nei calcoli per mezzo di equazioni che definiscono l'antica variabile come funzione implicita della nuova, o per mezzo di una equazione differenziale.

Nel primo di questi casi converrà valersi della teoria delle funzioni implicite per esprimere i differenziali dell'antica variabile indipendente per quelli della nuova, o almeno per avere alcune relazioni fra questi differenziali e quelli delle funzioni, avendo cura di fare sempre eguali a zero i differenziali della nuova variabile indipendente che sono di ordine superiore al primo; nel secondo caso poi partendo dalla equazione differenziale che lega la nuova variabile indipendente all'antica e alle funzioni, si cercherà di esprimere che i differenziali di ordine superiore al primo della nuova variabile indipendente sono tutti uguali a zero, e così si troveranno altre relazioni che insieme a quella data serviranno ad esprimere i differenziali dell'antica variabile indipendente e delle funzioni per i differenziali relativi alla nuova variabile.

211. — Così per es. nella espressione che si aveva precedentemente $V=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, o nell'altra che le corrisponde relativa a qualsiasi variabile indipendente $V=\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$, si voglia che la variabile indipendente nuova sia una quantità s per la quale si abbia $dx^2+dy^2=ds^2$.

Per questo basterà osservare che dalla espressione data per V si ha subito l'altra

$$\frac{1}{V}=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\ , \tag{17}$$

giacchè così la espressione di V viene ad essere già trasformata nel modo voluto; e in essa i rapporti $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{d^2x}{ds^2}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{d^2y}{ds^2}$ possono considerarsi come derivate rispetto ad s.

Però possono trovarsi anche espressioni più semplici di V osservando che col differenziare la equazione $dx^2+dy^2=ds^2$ che definisce la nuova variabile s si ha la formola $dx\,d^2x+dy\,d^2y=ds\,d^2s$, che quando s è presa come variabile indipendente, per essere allora $d^2s=0$, ci dà subito l'altra $dx\,d^2x+dy\,d^2y=0$;

e questa ci permette di trasformare ancora la espressione di $\frac{1}{V}$ dandoci

$$\frac{1}{V} = -\frac{dx}{ds}\frac{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}} - \frac{\frac{dy^2}{ds^2}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}\right)}{\frac{dy}{ds}};$$

perlochè, osservando che $\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}=1$, si trova subito anche $\frac{1}{V} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$ per una nuova espressione assai semplice di $\frac{1}{V}$.

Osserviamo poi che, con calcoli simili applicati alla espressione (17) di $\frac{1}{V}$, o anche dalla stessa espressione che ora abbiamo trovato di $\frac{1}{V}$ per mezzo della relazione $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, si trova subito l'altra formola analoga $\frac{1}{V} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dx}{ds}}$. Se ne dedurrà che $\frac{1}{V^2} = \frac{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}{\frac{dy^2}{ds^2}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}{\frac{dx^2}{ds^2}} = \frac{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}{\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}}$, e quindi si avrà anche

$$\frac{1}{V^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \tag{18}$$

per una espressione molto semplice e notevole di $\frac{1}{V^2}$.

Caso delle funzioni di più variabili indipendenti.

212. — Passiamo ora a trattare dei cangiamenti delle variabili indipendenti nel caso che queste variabili siano più di una.

Osserviamo perciò dapprima che quando, cangiando soltanto le variabili indipendenti, saremo giunti ad esprimere le antiche derivate parziali delle funzioni date per le nuove variabili e per le derivate delle funzioni stesse prese rispetto a queste variabili, allora gli antichi differenziali o le antiche espressioni o equazioni fra le derivate parziali si trasformeranno subito con semplici sostituzioni; talchè basta evidentemente occuparci soltanto del calcolo delle antiche derivate parziali in funzione delle nuove derivate e delle nuove variabili.

Per questo si hanno due metodi che si applicano indifferentemente or l'uno or l'altro; e io li esporrò brevemente, limitandomi però al caso di una sola funzione z.

Rispetto a questa funzione z ammettiamo che essa sia data esplicitamente espressa per le n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in un dato campo c, o che risulti come funzione implicita definita da una equazione della forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$, o sia definita da una equazione a derivate parziali, in modo sempre però che si sappia che nel campo c entro cui si considerano le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ essa è finita, continua e a un sol valore, e ammette le derivate parziali fino a quell'ordine al quale occorre di considerarle.

E con queste ipotesi, supponiamo che alle variabili indipendenti primitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se ne vogliano sostituire altre $u_1, u_2, \ldots, u_n$ legate a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da n equazioni della forma

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ x_2 = x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, x_n = x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{1}$$

senza escludere che delle nuove variabili alcune possano essere ancora le antiche, cioè si abbia per es. $x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1$, $x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_2, \ldots$, ciò che porterebbe il cangiamento delle variabili soltanto sulle rimanenti.

E rispetto alle formole (1) che stabiliscono il cangiamento di variabili ammettiamo che i secondi membri siano funzioni finite e continue e a un sol valore di $u_1, u_2, \ldots, u_n$ insieme alle loro derivate in un campo c_1 relativo a queste quantità $u_1, u_2, \ldots, u_n$ considerate come indipendenti; e quando le stesse equazioni si considerino inversamente come atte a definire $u_1, u_2, \ldots u_n$ in funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nel campo c (come se fossero equazioni della forma $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0, \ldots, f_n = 0$, con $f_r = f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n)$) ammettiamo che esse definiscano un sistema di funzioni $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che in tutti i punti di c sono finite, continue e a un sol valore insieme a quelle fra le loro derivate che noi avremo bisogno di considerare; e i valori di queste funzioni vengano tutti a cadere nel campo c_1, in modo da poter dire che a ogni punto di c corrisponde un punto solo di c_1, e viceversa ad ogni punto di c_1 corrisponde un punto solo di c.

Ciò posto, osserviamo che quando s'intendono prese $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come variabili indipendenti, e z s'intende ancora espresso per $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i differenziali (antichi) di z vengono dati dalle formole

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n,\quad d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n\right)^2, \ldots, \tag{2}$$

mentre quando z s'intende espresso per $u_1, u_2, \ldots, u_n$, allora, potendo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ riguardarsi come funzioni di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nel modo ora indicato, gli stessi differenziali (antichi) potranno considerarsi come dati anche dalle formole

$$
(3)\quad \begin{cases}
dz = \dfrac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n} du_n\,, \\[2ex]
d^2 z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n} du_n\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial u_1} d^2u_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2} d^2u_2 + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n} d^2u_n\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

talchè s'intende bene che se noi potremo in qualche modo ricavare dalle (1) i valori dei differenziali di $u_1, u_2, \dots, u_n$ che qui compariscono presi nell'ipotesi di $x_1, x_2, \dots, x_n$ variabili indipendenti, sostituendoli nelle ultime formole si avranno subito le derivate parziali antiche di z espresse per le nuove, giacchè a causa delle (2) i coefficienti delle potenze o prodotti di potenze di $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ saranno i valori delle antiche derivate all'infuori di certi coefficienti numerici.

Ora, gl'indicati valori di $du_1, du_2, \dots, du_n$ si potranno subito ottenere quando si conoscano le funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ definite dalle (1) in modo cioè da avere

$$
(4)\quad u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,\; u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \dots,\; u_n = u_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,
$$

perchè allora si avranno le formole

$$
(5)\quad \begin{cases}
du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n\,, \\[2ex]
d^2u_1 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n\right)^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\
du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n\,, \\[2ex]
d^2u_2 = \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n\right)^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

talchè quando le (4) siano trovate il problema potrà dirsi risoluto, inquantochè, come abbiamo già detto, sostituendo nelle (3) e giungendo in tal guisa a equazioni della forma

$$
\begin{aligned}
dz &= A_1\; dx_1 + A_2\; dx_2 + \dots + A_n\; dx_n\,, \\
d^2z &= A_{1.1} dx_1^2 + A_{2.2} dx_2^2 + \dots + A_{n.n} dx_n^2 + 2\,A_{1.2} dx_1 dx_2 + \dots + 2\,A_{r.s} dx_r dx_s + \dots, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

otterremo subito

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = A_1\,,\; \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = A_2\,, \dots,\; \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = A_n\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = A_{1.1}\,,\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = A_{2.2}\,, \dots,\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = A_{n.n}\,,\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = A_{1.2}\,, \dots,\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s} = A_{r.s}\,, \dots,
\end{cases}
$$

pei valori cercati di $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots$, in funzione delle nuove derivate $\dfrac{\partial z}{\partial u_1}, \dfrac{\partial z}{\partial u_2}, \dots$, e delle nuove variabili $u_1, u_2, \dots, u_n$; potendo sempre alle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ dove compariscono intendere sostituiti i loro valori (1).

E così in particolare sostituendo nella prima delle formole (3) i valori precedenti di $du_1, du_2, \dots, du_n$, e poi uguagliando a $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$ i coefficienti di $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, si trovano le formole

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial z}{\partial x_n} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\,,
\end{cases}
$$

che danno subito le derivate $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$.

213. — Con questo processo però, ove effettivamente fosse indispensabile di conoscere le $u_1, u_2, \dots, u_n$ in funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$ per mezzo delle (4), noi saremmo il più spesso arrestati dalle difficoltà grandissime che ordinariamente s'incontrano per passare dalle formole (1) alle (4), per le quali è necessario potere determinare un sistema di soluzioni delle (1) stesse.

Però, poichè evidentemente, a causa delle (5), non importa propriamente di conoscere le $u_1, u_2, \dots, u_n$, ma basta conoscere le loro derivate rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$ espresse per $u_1, u_2, \dots, u_n$, s'intende subito che per giungere col metodo precedente ai valori cercati di $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots$, basterà determinare i valori di $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \dots$, servendosi delle formole (1) colle regole che si stabilirono trattando delle funzioni implicite, e pel caso sempre che il determinante funzionale delle funzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ che compariscono nelle (1) sia differente da zero; e anzi con questo processo avremo anche il vantaggio che queste derivate verranno senz'altro espresse per le nuove variabili $u_1, u_2, \dots, u_n$ senza bisogno di ulteriori sostituzioni per mezzo delle (1).

Ora con queste regole si formano subito gli n sistemi di equazioni seguenti

$$
(8)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{1.° sistema} & \left\{
\begin{array}{l}
1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}, \\
0 = \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1},
\end{array}\right. \\
\text{2.° sistema} & \left\{
\begin{array}{l}
0 = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}, \\
1 = \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2},
\end{array}\right. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\text{n.° sistema} & \left\{
\begin{array}{l}
0 = \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}, \\
0 = \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
1 = \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots\dots + \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n},
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

ognuno dei quali si compone delle derivate di tutte le equazioni (1) prese rispetto ad una stessa variabile x_r colla regola delle funzioni composte; e ora da questi sistemi di equazioni, che sono di primo grado fra gli n sistemi d'incognite $\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\right), \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}\right) \dots \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \dots \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)$ respettivamente e hanno tutte gli stessi coefficienti per le incognite, si ricaveranno i valori cercati delle derivate di $u_1, u_2, \dots, u_n$ rispetto a $x_1, x_2, \dots, x_n$ espresse per le $u_1, u_2, \dots, u_n$ stesse, tutte le volte che il determinante funzionale delle funzioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ che compariscono nelle (1) sia differente da zero.

Da questi valori poi di $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \dots$, o anche formando colle (8) nuovi sistemi di equazioni di primo grado col derivarle parzialmente, come si disse trattando delle funzioni implicite, verremo a determinare i valori anche delle derivate seconde di $u_1, u_2, \dots, u_n$ rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, e poi, ove occorra, si troveranno anche le loro derivate terze ecc....; dopo di che, sostituendo nelle formole (5) o nelle (6) rimarranno determinati completamente i valori dei differenziali di $u_1, u_2, \dots, u_n$ e quelli delle derivate parziali $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s}, \dots$

S'intende poi che se le equazioni che definiscono la trasformazione, invece di esser date sotto la forma esplicita (1), fossero date sotto la forma

$$
(9)\quad f_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n)=0,\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n)=0,\dots,\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_n)=0,
$$

e colle condizioni stesse che abbiamo posto sopra rispetto alla unicità dei valori da esse definite di $x_1, x_2, \dots x_n$ o di $u_1, u_2, \dots, u_n$, il metodo precedente sarebbe ancora applicabile, sostituendo però allora naturalmente ai sistemi di equazioni (8) quelli analoghi che si dedurrebbero dalle (9) colle solite derivazioni parziali; e salvo a dover fare allora in alcuni casi qualche eliminazione relativa a tutte o ad alcune delle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ che potrebbero continuare a comparire nei valori finali di $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots$

214. — Il metodo che abbiamo dato pel calcolo dei valori richiesti di $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots$ consiste in sostanza nel trovare con due vie differenti i differenziali dei varî ordini di z rispetto alle antiche variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, e poi nelle due espressioni ottenute per dz, per $d^2z, \dots$ uguagliare i coefficienti delle stesse potenze e degli stessi prodotti di potenze dei differenziali $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

L'altro metodo poi, cui alludevamo in principio del § 212 [pag. 290 e seg.] è tutto fondato sulla formola di derivazione delle funzioni composte.

Si osservi perciò che quando nella funzione z, che dapprima viene data o almeno si considera come una funzione $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di $x_1, x_2, \dots, x_n$, si pongono per $x_1, x_2, \dots, x_n$ i valori (1) o quelli definiti dalle formole (9) in funzione di $u_1, u_2, \dots, u_n$, la funzione stessa z si trasformerà in un'altra $z(u_1, u_2, \dots, u_n)$ delle nuove variabili $u_1, u_2, \dots, u_n$; talchè, tenendo conto di questo, e osservando anche che $u_1, u_2, \dots, u_n$ possono alla lor volta (secondo le nostre ipotesi) considerarsi come funzioni di $x_1, x_2, \dots, x_n$ definite dalle (1) o dalle (9), s'intende subito che l'antica funzione z può anche considerarsi come una funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$ composta per mezzo delle funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ definite dalle (1) o dalle (9).

In ordine dunque alla regola di derivazione delle funzioni composte, avremo le formole

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\,, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = \dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}\,, \end{cases}$$

che concordano con le (7) trovate col primo metodo; e in queste, come nelle (7), le derivate $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \dots$ devono intendersi tratte dalle formole che determinano le funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ definite dalle formole di trasformazione (1) o (9), e meglio anche dai sistemi di equazioni (8) o dai sistemi analoghi che si avranno dalle (9); talchè così noi abbiamo già le equazioni che determinano $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$.

Trovati poi questi valori di $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, allora (tanto nel caso che le derivate di $u_1, u_2, \dots, u_n$ che vi compariscono siano già state espresse per $u_1, u_2, \dots, u_n$ quanto nel caso che esse restino funzioni di $x_1, x_2, \dots x_n$, — come avviene quando sono dedotte dalle (4) — o nel caso che non siano state anche effettivamente calcolate, ma siano soltanto indicate) è evidente che considerando i valori trovati $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ come nuove funzioni composte di $x_1, x_2, \dots, x_n$ e valendosi ancora dei valori già trovati per $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots$, si giungerà a determinare i valori delle derivate seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_r \partial x_s}, \dots$ colla ripetizione del processo precedente; e quando in questi valori vi vengano a figurare le derivate seconde di $u_1, u_2, \dots, u_n$ rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, si potranno anch'esse ottenere dai valori di $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots$ considerandoli come funzioni composte, o anche servendosi dei sistemi di equazioni che si avranno dalle (8) con nuove derivazioni parziali, ecc....

215. — Per fare qualche applicazione, daremo le formole mediante le quali, trattandosi di una funzione z delle coordinate cartesiane x e y, si esprimono le derivate di z prese rispetto ad x e y per le derivate della stessa funzione z prese rispetto alle variabili ρ e ω delle coordinate polari.

Osserviamo perciò che in questo caso le formole di trasformazione (1) o (9) vengono ad essere le seguenti

$$(11)\qquad x = \rho\cos\omega \quad , \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,;$$

e quindi per le (7) o (10) avremo

$$(12)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\,,$$

talchè, quando si determinino $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, saranno subito trovati i valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ espressi per $\rho, \omega, \frac{\partial z}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial z}{\partial \omega}$.

Secondo quanto abbiamo detto questi valori di $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ possono ottenersi, sia valendosi delle formole

$$(13)\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \omega = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$$

che vengono dalla risoluzione delle (11), sia colla regola di derivazione delle funzioni composte formando i sistemi di equazioni (8); talchè in due modi possiamo ora determinare questi valori $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$.

Ora valendosi delle (13) si trova

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\omega \;, & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{sen}\,\omega \;, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\omega}{\rho} \;, & \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos\omega}{\rho}\;; \end{cases}$$

e formando invece i sistemi di equazioni (14), si hanno le formole

$$(15)\qquad \begin{cases} 1 = \cos\omega\dfrac{\partial \rho}{\partial x} - \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \;, & 0 = \cos\omega\dfrac{\partial \rho}{\partial y} - \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\,, \\ 0 = \mathrm{sen}\,\omega\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\cos\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \;, & 1 = \mathrm{sen}\,\omega\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\cos\omega\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\;; \end{cases}$$

e queste conducono agli stessi valori di $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$; dunque avremo subito

$$(16)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\omega\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \omega} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\omega\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\omega}{\rho}\frac{\partial z}{\partial w}\,;$$

pei valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ espressi per $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, $\frac{\partial z}{\partial \omega}$, ρ e ω quando ρ è diverso da zero.

Seguendo ora il processo dato nel paragrafo precedente, e considerando questi valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ come nuove funzioni composte di x e y per mezzo di ρ e ω, si trova

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \cos\omega\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) - \frac{\cos\omega}{\rho}\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \omega} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\operatorname{sen}\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \cos\omega\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) - \frac{\cos\omega}{\rho}\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \omega} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho}\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \omega} - \frac{\cos\omega}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \omega} + \frac{\cos\omega}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right),$$

dove $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ devono avere i valori (14); talchè sostituendo si ottiene subito

$$(17)\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos^2\omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{2\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{2\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{\cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\omega}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega} - \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} - \frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\omega}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\omega \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{2\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega} + \frac{\cos^2\omega}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + \frac{\cos^2\omega}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{2\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial \omega}, \end{cases}$$

pei valori di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ espressi per le derivate di z prese rapporto a ρ e a ω e per ρ e ω; e ora con queste e con le (16), quando si abbia una funzione di $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ potremo facilmente esprimerla per ρ e ω e per le derivate di z rapporto a ρ e a ω.

Così per esempio se la espressione da trasformarsi in coordinate polari sarà la somma $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, che si rappresenta ordinariamente con $\Delta^2 z$ e si chiama *parametro differenziale di second'ordine di* z, si avrà la formola seguente che è di continua applicazione nell'Analisi

$$\Delta^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho},$$

al modo stesso che per la quantità $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, che si chiama *parametro differenziale del prim'ordine di* z, e s'indica con Δz, si ha invece la formola $\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2$.

È quasi superfluo l'osservare che se invece di applicare, come noi abbiamo fatto, il secondo metodo pel calcolo delle derivate (antiche) di z, col valerci cioè della regola di derivazione delle funzioni composte, noi avessimo fatto uso del primo, confrontando cioè due espressioni diverse dei varî differenziali, di z ecc...., saremmo giunti naturalmente agli stessi resultati.

Del resto poi, tralasciando di parlare delle derivate prime di z, poichè per esse abbiamo già trovato le stesse formole generali (7) e (10) coi due metodi, si può osservare che volendo calcolare le derivate seconde di z col primo metodo si prenderà la formola

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}d\rho^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho\,\partial \omega}d\rho\,d\omega + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}d\omega^2 + \frac{\partial z}{\partial \rho}d^2\rho + \frac{\partial z}{\partial \omega}d^2\omega,$$

dove i differenziali di ρ e di ω s'intendono dedotti dalle formole (13) considerandovi x e y come variabili indipendenti; e poi, calcolando effettivamente questi differenziali $d\rho, d\omega, d^2\rho$ e $d^2\omega$ e sostituendoli nel valore ora scritto di $d^2 z$, si ritroveranno subito i valori (17) di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ prendendo per essi i coefficienti di dx^2, $2\,dx\,dy$ e dy^2 nella espressione che risulterà per $d^2 z$.

216. — Farò notare esplicitamente, a scanso di equivoci, che quando i cangiamenti di variabile non avvengono per tutte le variabili indipendenti, ma soltanto per alcune di esse, non si può dire che le derivate della funzione rispetto alle variabili che non mutano siano le stesse prima e dopo di aver fatto i cangiamenti delle altre variabili.

Così, per es. se, avendosi dapprima $z = z(x, y)$, la x deve restare sempre variabile indipendente, mentre la y invece si cangia, e la formola colla quale si fa questo cangiamento è la seguente

$$(18) \qquad y = y(x, u),$$

allora, indicando con $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ le derivate parziali rispetto alle variabili x e u dopo di aver fatto l'indicato cangiamento, e con $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ le antiche derivate, avremo le formole

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial y},$$

dove $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ devono essere tratti dalle equazioni $0=\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$, $1=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$; e quindi se la formola trasformatrice (18) contiene x non si avrà mai $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, altro che per valori particolari delle variabili.

217. — Trovo poi utile il fare osservare fin d'ora che il cangiamento di variabili indipendenti serve spessissimo a trasformare date equazioni a derivate parziali in altre più semplici, o che meglio si prestano per esser studiate, o per mettere in evidenza qualche particolarità della funzione cui si riferiscono.

Così, per es. quando rispetto ad una funzione z di x e y finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in un dato campo, si sapesse soltanto che essa soddisfa alla equazione $a^2r-t=0$, o $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, dove a è una costante, basterà fare un adattato cangiamento di variabili per passare ad un'altra equazione a derivate parziali che metta subito in evidenza la natura speciale della funzione z.

E difatti ponendo $x+ay=u$, $x-ay=v$, ovvero $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2a}$, e prendendo u e v come nuove variabili indipendenti, si trova subito che si ha

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial u}-a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}-a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}-a\frac{\partial^2 v}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

e con queste la equazione data si trasforma nell'altra $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, la quale, potendo scriversi sotto la forma $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0$, ci mostra subito che $\frac{\partial z}{\partial u}$ non contiene v, e quindi si ha $\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi_1(u)$; talchè ammettendo che la funzione $\varphi_1(u)$ si possa considerare come la derivata $\varphi'(u)$ di una funzione $\varphi(u)$ di u (della quale possibilità ci occuperemo in calcolo integrale) si potrà scrivere $\frac{\partial z}{\partial u}=\varphi'(u)$; dopo di che, osservando che le due funzioni z e $\varphi(u)$ vengono

ad avere la stessa derivata, e quindi non possono differire che per una quantità che sia costante rispetto alla variabile u, cioè per una funzione $\psi(v)$ di v, si concluderà che $z=\varphi(u)+\psi(v)$, e quindi, riponendo ora per u e v i loro valori $x+ay$ e $x-ay$, si potrà asserire che le funzioni z di x e y che in un dato campo soddisfano alla equazione data $a^2r-t=0$ e sono finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde almeno, vengono ad essere tutte comprese nella formola $z=\varphi(x+ay)+\psi(x-ay)$, per la quale si verifica ora anche inversamente che la funzione così trovata z soddisfa alla equazione data qualunque siano le funzioni arbitrarie φ e ψ, purchè siano finite e continue insieme alle loro derivate di primo e secondo ordine.

Il calcolo integrale poi pone anche maggiormente in evidenza l'importanza dei cangiamenti di variabili; poichè in quello si vede come lasciando dapprima indeterminate le formole di trasformazione (quelle cioè che legano le antiche variabili alle nuove) si può poi in molti casi determinarle in modo che una data equazione a derivate parziali si trasformi in un'altra che possa più facilmente studiarsi, ecc....

218. — Aggiungiamo che anche nel caso di più variabili indipendenti spesso avviene che oltre a queste variabili si cangia anche la funzione; ma noi, per la ristrettezza dei limiti che qui dobbiamo imporci, non possiamo trattenerci a parlare di questi cangiamenti nel caso generale; e ci limiteremo ad accennare brevemente, pel caso delle funzioni a due variabili indipendenti x e y, la trasformazione conosciuta col nome di *trasformazione di Legendre.*

Osserviamo perciò che quando sia $z=z(x,y)$, essendo $z(x,y)$ una funzione di x e y conosciuta o no, ma per la quale si sappia che è finita, continua e a un sol valore per tutti i punti (x,y) di un dato campo C insieme alle sue derivate parziali di primo e second'ordine almeno, le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ o p e q di questa funzione (nota o ignota) saranno anch'esse funzioni di x e y in tutti i punti dello stesso campo C, e saranno finite e continue insieme alle loro derivate di prim'ordine almeno; per modo che si potrà scrivere

$$p=p(x,y)\ ,\quad q=q(x,y)\ , \tag{19}$$

essendo $p(x,y)$ e $q(x,y)$ funzioni, conosciute esse pure o no, di x e y, ma finite continue e a un sol valore insieme alle loro derivate di prim'ordine almeno; le quali derivate evidentemente non saranno altro che le solite quantità r,s,t $\left(\text{cioè } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ e soddisfaranno alla condizione $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$.

Conseguentemente se il determinante funzionale $rt-s^2$ delle funzioni $p(x,y)$, $q(x,y)$ non sarà sempre nullo entro C, le formole precedenti (19) mentre definiscono p e q in funzione di x e y pei punti di C, definiranno anche x e y come funzioni finite, continue e a un sol valore delle quantità p e q considerate come variabili indipendenti in un certo campo c_1, per modo che, come ad ogni sistema di valori di x e y entro un campo c, che sia tutto o porzione di C, corrisponde un sistema unico di valori di p e di q che cadono entro c_1, così viceversa a ogni sistema di valori di p e q entro c_1 corrisponderà un sistema unico di valori di x e y entro c; e nelle formole note o ignote

$$x=x(p,q)\ ,\ y=y(p,q) \tag{20}$$

che determineranno i valori di x e y per mezzo di p e q, le funzioni $x(p,q)$, $y(p,q)$ saranno finite, continue e a un sol valore insieme alle loro derivate prime per tutti i punti p e q del campo c_1.

Di qui apparisce chiaro che, conoscendo o no la funzione $z(x,y)$, se si saprà che essa è finita continua e a un sol valore insieme alle sue derivate parziali di primo e secondo ordine almeno in un certo campo C, e si saprà altresì che in tutto o porzione dello stesso campo il binomio $rt-s^2$ è differente da zero, allora, almeno finchè ci terremo in una porzione c assai ristretta di C, invece di x e y potremo prendere per variabili indipendenti p e q; ed è questo appunto che ha fatto Legendre, prendendo al tempo stesso per funzione invece di z la quantità u definita dalla equazione

$$u=px+qy-z\,. \tag{21}$$

Volendo ora dare le formole che servono per questo cangiamento di variabili e di funzione, indipendentemente dalla conoscenza delle funzioni z, p e q di x e y, salvo però a sapere che esse soddisfano alle condizioni di continuità ecc.... di cui abbiamo parlato sopra, procederemo nel modo seguente.

Osserviamo che, qualunque siano le variabili indipendenti, prendendo il differenziale totale di u si ha $du=pdx+qdy+xdp+ydq-dz$, e siccome $dz=pdx+qdy$ si vede subito che

$$du=xdp+ydq\,, \tag{22}$$

e quindi, quando p e q siano prese per variabili indipendenti, avremo intanto le formole

$$x=\frac{\partial u}{\partial p}\ ,\ y=\frac{\partial u}{\partial q}\,, \tag{23}$$

le quali, quando si conosca u in funzione di p e di q, serviranno a darci con semplici derivazioni parziali i valori delle antiche variabili x e y in funzione delle nuove variabili p e q, e condurranno così alle formole corrispondenti alle (20); come inversamente, quando non sia zero il determinante funzionale $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$ (il che vedremo essere escluso dalla ipotesi che abbiamo fatta che r, s, t siano finite) serviranno a darci anche i valori (19) di p e q in funzione di x e y.

Osserviamo poi che, qualunque siano le variabili indipendenti, insieme alle formole precedenti si hanno, com'è noto, le altre

$$dp=rdx+sdy\ ,\ dq=sdx+tdy\,; \tag{24}$$

e siccome almeno nel campo c nel quale si considerano x e y, o nel campo c_1, nel quale si considerano p e q, il binomio $rt-s^2$ è differente da zero, queste equazioni (24) possono risolversi rispetto a dx e dy, e allora ci danno

$$dx=\frac{t}{rt-s^2}dp+\frac{-s}{rt-s^2}dq\ ,\ dy=\frac{-s}{rt-s^2}dp+\frac{r}{rt-s^2}dq\,,$$

e ciò, com'abbiamo detto, qualunque siano le variabili indipendenti; talchè si può ora concludere subito che, quando queste variabili indipendenti sono p e q, si avrà:

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{t}{rt-s^2}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\partial y}{\partial p}=-\frac{s}{rt-s^2}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial q}=\frac{r}{rt-s^2}\,; \tag{25}$$

e quindi a causa delle formole (23) avremo ora le altre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=\frac{t}{rt-s^2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}=\frac{\partial^2 u}{\partial q\,dp}=-\frac{s}{rt-s^2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=\frac{r}{rt-s^2}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2=\frac{1}{rt-s^2}\,, \tag{26}$$

le quali, oltre a mostrarci, come dicevamo sopra, che, sotto le nostre ipotesi, il binomio $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$ è differente da zero, ci danno subito anche

$$r=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\ ,\ s=-\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\ ,\ t=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\,, \tag{27}$$

pei valori cercati di r, s, t in funzione delle derivate parziali di secondo ordine della nuova funzione u.

Se poi per analogia poniamo $\frac{\partial u}{\partial p}=p_1$, $\frac{\partial u}{\partial q}=q_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}=r_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}=s_1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}=t_1$, possiamo dire che si avrà

$$(28)\quad x=p_1\,,\ y=q_1\,,\ r=\frac{t_1}{r_1 t_1-s_1^2}\,,\ s=-\frac{s_1}{r_1 t_1-s_1^2}\,,\ t=\frac{r_1}{r_1 t_1-s_1^2}\,,\ rt-s^2=\frac{1}{r_1 t_1-s_1^2},$$

come inversamente si ha

$$(29)\qquad r_1=\frac{t}{rt-s^2}\ ,\quad s_1=\frac{-s}{rt-s^2}\ ,\quad t_1=\frac{r}{rt-s^2}\ ,\quad r_1 t_1-s_1^2=\frac{1}{rt-s^2}\ ;$$

e ora quando si abbia una espressione della forma $f(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,,r\,,s\,,t)$ s'intende subito che essa verrà trasformata, e si ridurrà quindi a dipendere dalle nuove variabili p e q, dalla nuova funzione u e dalle sue derivate, sostituendovi per $x\,,y\,,r\,,s\,,t$ i valori (23) e (27) o i valori (28), e per z la espressione $u-p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial q}$ o $u-pp_1-qq_1$ che viene dalle (21) e (23).

S'intende poi che la trasformazione inversa riconduce sempre alle formole primitive.

219. — E s'intende pure che quando ci venga dato o sia trovato il valore di u in funzione di p e q, e sia $u=u(p,q)$, [come avviene, per es. quando partendo da una equazione a derivate parziali di primo o second'ordine in z, $f(x\,,y\,,z\,,p\,,q)=0$, o $f(x\,,y\,,z\,,p\,,q\,,r\,,s\,,t)=0$, si giunga a una equazione trasformata

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial p}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial q}\ ,\ u-p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial q}\ ,\ p\ ,q\right)=0\,,$$

o

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial p}\,,\frac{\partial u}{\partial q}\,,u-p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial q}\,,p\,,q\,,\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\,,\frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\,,\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}\right)=0$$

che, a causa di qualche particolarità che presenti, ci dia facilmente il valore $u(p\,,q)$ che la soddisfa identicamente], allora il valore della funzione primitiva z potrà riguardarsi come definito dal sistema delle tre equazioni $z=u(p,q)-px-qy$, $x=\frac{\partial u}{\partial p}$, $y=\frac{\partial u}{\partial q}$, le due ultime delle quali definiscono p e q per mezzo di x e y e servono quindi a ridurre anche z a dipendere da x e y.

220. — La trasformazione di Legendre è specialmente utile quando si hanno equazioni a derivate parziali del second'ordine in z della forma

$$\mathrm{R}r+\mathrm{S}s+\mathrm{T}t+\mathrm{U}\,(rt-s^2)=0$$

dove R , S , T , U dipendono soltanto da $x\,,y\,,z\,,p\,,q$.

Colla indicata trasformazione infatti le stesse equazioni si trasformano nell'altra

$$\mathrm{R}_1\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\mathrm{S}_1\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}+\mathrm{T}_1\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+\mathrm{U}_1=0\,,$$

dove $\mathrm{R}_1,\mathrm{S}_1,\mathrm{T}_1,\mathrm{U}_1$ sono ciò che divengono R , S , T , U ponendovi per $x\,,y\,,z$ i valori $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial q}$, $u-p\frac{\partial u}{\partial p}-q\frac{\partial u}{\partial q}$; e questa equazione trasformata, mentre ha il vantaggio di esser lineare rispetto alle nuove derivate parziali del second'ordine $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}$, ha anche l'altro di non contenere il binomio $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2$ corrispondente all'antico binomio $rt-s^2$.

221. — Notiamo anche esplicitamente che il caso in cui p e q non potessero esser prese come nuove variabili indipendenti, perchè fra esse sussistesse una relazione della forma $\mathrm{F}(p\,,q)=0$, è escluso dalla condizione stessa che abbiamo posto sopra che il binomio $rt-s^2$ sia differente da zero nel campo che si considera; giacchè, se si avesse $\mathrm{F}(p,q)=0$, ne verrebbero le due $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p}r+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}s=0$, $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p}s+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q}t=0$, le quali darebbero sempre $rt-s^2=0$.

E si può anche aggiungere che, siccome si vedrà in calcolo integrale che quando non siano contemporaneamente zero s e una delle altre due derivate r e t, l'essere $rt-s^2=0$ porta sempre la relazione $\mathrm{F}(p\,,q)=0$ (*), così tanto è dire che si esclude il caso di $rt-s^2=0$, quanto è dire che si esclude quello in cui fra p e q sussiste una relazione della forma $\mathrm{F}(p\,,q)=0$.

(*) Siccome $rt-s^2$ è il determinante funzionale di p e q rispetto ad x e y, si può osservare che la particolarità qui indicata risulta subito anche da quanto dicemmo sui determinanti funzionali in fine della nota delle pag. 264 e 265, senza bisogno di ricorrere al calcolo integrale.