ARCHIMEDIS

OPERA NON NVLLA

A FEDERICO COMMANDINO
VRBINATE

NVPER IN LATINVM CONVERSA,
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATA.

Quorum nomina in ſequenti pagina leguntur.

AL DVS

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.

VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

ARCHIMEDIS OPERA,

QVAE HOC LIBRO CONTINENTVR.

RAINVTIO FARNESIO, CARDINALI AMPLISSIMO, *ET OPTIMO.*

QVANQVAM ſcientiæ omnes AMPLISSIME CARDINALIS, quibus intercedentibus ad Deos immortales quamproxime accedimus, ueritatem propoſitam habent, quam, ut ſubiectam materiam tractant, & in cuius inquiſitione, atque inueſtigatione uerſantur: tamen mathematicæ diſciplinæ, meo quidem iudicio, id munus præclare tueri uidentur; quæ non ſolum per ſeipſas, id, quod ſpectant, aſſequuntur; uerum etiam reliquis ſcientiis clariſsimam lucem afferentes, ut earum multo faciliorem cognitionem capiamus, efficiunt. Si enim in naturæ obſcuritatem (ut ab ea potiſsimum ordiamur) intuebimur: ne minimam quidem partem reperiemus, non ſexcentis obſtructam difficultatibus; in qua quid uerisimillimum ſit, inuenire, non mediocris ingenii, & ſummæ felicitatis eſſe iudicandũ eſt. Mundus ipſe utrum nunquam non fuerit, an aliquando genitus ſit, inter non minorum gentium philoſophos, ſed philoſophiæ ipſius parentes Platonem, & Ariſtotelem ſumma fuit diſſenſio. De principiis autem rerum, è quibus omnia oriuntur, quando tres, aut ad ſummum quatuor philoſophi, qui eadem ſentirent, inuenti ſunt? Nam de motu, de inani, de tempore, de elementis ipſis, & eorum natura, uariæ, atque inter ſe diſsidentes philoſophorum ſententiæ facile oſtẽdunt, phyſiologiam quibuſdam potius coniecturis, quam firmiſsimis argumentationibus niti; optimeq; nobiſcum agi, ſi, quid in ea maxime probabile ſit, intelligamus. quamobrem diuinus Plato non immerito eiuſmodi ſcientiam ἰκοτολογίαν appellandã eſſe cenſuit. Quid dicam de prima philoſophia? quæ Deum quidem optimum maximum, diuinasq; illas mentes ſibi examinandas, explicandasq; proponit: uerum neque id, quod pollicetur, præſtare poteſt: & ex iis, quæ ſub oculos noſtros cadunt, nos ad diuinæ bonitatis, ac potentiæ contemplationem perducit. exactas autem, & exquiſitas illas rationes, quibus mathematici iure gloriari poſſunt, tantum abeſt, ut attingat, ut cum Socrate aperte fateatur, ueram ipſius Dei notionem, per inficiationem tantum haberi poſſe, animorumq; noſtrorum quaſi luminibus, tantarum rerum altitudinem officere. Vt enim ueſpertiliones lumẽ ſolis ferre non poſſunt, ita diuinarum rationum ſplendor, ac dignitas ingenii noſtri aciem perſtringit. Cum igitur è tribus ſcientiis, quæ uere ſcientiæ appellantur, & phyſiologia, & prima philoſophia in probabilitate uerſentur, reſtant mathematicæ diſciplinæ, quæ non tam ſubiecta materia, quàm certarum argumẽtationum, quas in mediũ afferunt, dignitate, reliquis ſcientiis iure optimo antecellunt. nã ſi quid mathematici, uel in geometria, uel in aſtrologia, uel arithmeticis ratione confirmant, id ex oraculo Pythii Apollinis nobis editũ exiſtimari poteſt. Quàm uero late pateant hæ diſciplinæ; quantas utilitates, & domeſticis, & forenſibus rebus importent, ex earum diuiſione apertiſsime cognoſcemus. Siquidem primum uel circa ea uerſantur, quæ quamuis à materia re ipſa ſeparari non poſſunt: tamen cogitatione, atque intellectione, ut ſeparabilia comprehenduntur: quod genus ſunt geometria, & Arithmetice. uel in eorum, quæ ſenſibus percipiuntur, contemplatione occupantur: quo in numero mechanice, aſtrologia, optice, metiendi ratio, muſica, ratiocinatrix à ueteribus reponuntur. Deinde harum unaquæque partium in uaria tanquam membra diſpertitur. quæ omnia tantum habent momentum, cum ad rerum priuatarum, & publicarum adminiſtrationem, tum ad animi noſtri perfectionem, ut uere dicere poſsimus, ex omnibus ſcientiis, & artibus, quæ à clariſsimis uiris inuentæ ſunt, & auctæ, nihil mathematicis diſciplinis honeſtius, nihil utilius, nihil humano generi magis neceſſarium excogitari potuiſſe. Omitto, quòd Pythagorei numeris mundum, & omnia, quæ in eo eſſent, accepta referebant; quòd Plato ab Academia ſua rudes in geometria reiiciendos eſſe iudicabat. Quid Ariſtoteles? quem noſtræ memoriæ philoſophi nunquam nõ in manibus habent. num quæ uir ille ſummus, uel in diſſerendi ratione, uel in naturæ obſcuritate ſcripſit, hoſpes in mathematicis diſciplinis attingere audebit? quare mea ſententia nemo uere philoſophari poterit, niſi idem prius in his nobiliſsimis artibus plurimum ſtudii, plurimumq; operæ poſuerit. nec aliter ſenſiſſe uideo Galenum medicorum principem in eo libello, qui Philoſophus inſcribitur. Venio nunc ad id uitæ genus, quod, omiſſo ueritatis indagandæ ſtudio, totum ſe ad actionem conuertit. huic ſi recte conſideremus, maximo uſui eſſe mathematicas diſciplinas inueniemus. Nam ſiue priuatis, & domeſticis negociis diſtringimur, & uel rei ruſticæ, uel mercaturis faciendis operam damus; nunquam ſine aſtrologia, & metiendi, ratiocinandiq; ratione recte munus noſtrum exequemur: ſiue ad gubernacula rerum publicarum ſedentes, pro earum dignitate, atque incolumitate uigilamus, cum de Solonis ſen-

tentia

tentia præmium, & pœna sint ea fundamenta, quibus res omnes publicæ nituntur: non uideo qua ratione fieri posit, ut studiosis ciuibus, qui de patria beni meriti sint, præmia pro dignitate decernamus; seditiosis autem, & improbis hominibus debitas pœnas infligamus, nisi ex geometria, & arithmeticis utrasque proportiones optime didicerimus; quemadmodum à principe philosophorum Aristotele in quinto de uita, & moribus non tam eleganter, quàm copiose disputatum est. Quòd si bellum mari, aut terra gerere oporteat, & uel hostes à mœnibus nostris repellendi, uel nos iniuriis affecti ad eorum urbes oppugnandas cum exercitu proficisci necesse habeamus: incredibile est, quàm magnum nobis adiumentum afferat, non solum geometria, & arithmetice, uerum etiam ea pars mathematicarum disciplinarũ, quàm μηχανικὴν græci uocant; & eius administra ὀργανοποιητικὴ ab iisdem appellata. immo, si uerum fateri uolumus, sine his artibus res militaris manca quodam modo, & imperfecta est habenda. Nam præter alia multa, quæ in summo imperatore inesse oportet, quis nescit illa tria non in postremis habenda esse? rectam castrametandi rationem, qua in re Pyrrhum Epirotarum regem suæ, ac superioris memoriæ imperatoribus præstitisse accepimus: instruendi acierum prudentiam, quam quidem in Alexandro Magno, & post eũ in Romanis imperatoribus eximiam fuisse, omnes ferè historici & græci, & latini literarum monumentis prodiderunt: solertiam in excogitandis machinis, ac tormentis militaribus, quæ uel ad propugnationem, uel oppugnationem urbium attinent: cuius artificii gloriam Romani ceteris nationibus facile præripuerunt. Num hæc omnia sine his disciplinis, quas paulo superius commemoraui, rei militari tantopere necessariis, ulla ratione administrari possunt? Hanc esse caussam existimo, cur OCTAVIVS frater tuus, Parmensium, & Placentinorũ Dux, multos abhinc annos in mathematicas disciplinas sibi toto animo incumbendum putauit. cum enim se ad gloriam, & amplitudinem natum esse intelligeret; nihil prætermittere uoluit, quod eum omnis memoriæ ducibus parem, atque adeo superiorem efficere posset. Vides igitur, AMPLISSIME CARDINALIS, homines, qui uere homines sunt, non aqua, non igni (ut in prouerbio est) pluribus locis uti, quàm mathematicis disciplinis. In his complures quidem summi, & admirabiles uiri extiterunt. sed Archimedes Syracusanus omnes omnium temporum mathematicos longe, multumq; superauit. nam & in astrologia quamplurima, quæ superiores ignorauerant, adinuenit. quod facilius intelligeremus, si sphæram illam uitream

tream

tream ab eo admirabili quodam artificio constructam haberemus, in qua septem errantium stellarum cursus, multum inter se, aut altitudine, aut humilitate distantes oculis cerneremus. & in arithmeticis quantum excelluerit, illo aureo libello, quem de arenæ numero conscripsit, apertissime ostendit. In musicis autem, quamuis nihil ab eo memoriæ, ac literis proditum in manus nostras peruenerit: tamen credibile est, egregium illum uirum huius etiam disciplinæ uim, & materiam scientia, & cognitione cōprehendisse: potiusq; aliquid, ac potius multa addidisse, & attulisse de suo, quàm non omnia, quæ uoluerit, consecutum esse. Nam quòd ad geometriam attinet, Deum aliquem in ea fuisse Archimedem nemo sanæ mētis inficiari poterit. siquidem is nō solum in geometricis rationibus se ipsum exercuit, ut faciliorem sibi aditum ad rerum cælestium contemplationem præpararet: uerum etiam, ut eas ad communes hominum utilitates, tum in belloq; tum in pace transferret, magnopere elaborauit. quod licet ante eum Architas, & Eudoxus contra diuini Platonis sententiam factitauerint: tamen si cum Archimede comparentur, uix quintæ classis (ut ita dicam) mathematici uidebuntur. machinationes enim illas, quæ in gratiam Hieronis regis ab Archimede excogitatæ sunt, nullæ unquam literæ conticuerunt. Nauis illa oneraria, quam unius machinæ adiumento, solus nullo negocio deduxit, adhuc sermone omnium celebratur. huius artificii uim Marcellus imperator in Syracusanæ urbis oppugnatione sensit, cum non sine multarum nauium iactura, & quamplurimorum militum cæde urbem expugnasset. quamobrem cum in ipsa militum, qui superfuerant, in urbem irruptione, quantum in ipso fuit, Archimedis saluti, & incolumitati consuluisset: magnopere doluit, posteaquam eum contra suum imperium à gregario milite interfectum esse intellexit: eumq; honorem mortuo habuit, qui præstantissimis uiris post obitum haberi solet. cuius sepulchrum M. Cicero à se, cum in Sicilia quæstorem ageret, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Multa alia prætereo, quæ cum uerissima sint, tamen apud posteros plus admirationis, quā fidei habuerunt. Archimedis pauca quidem extant scripta, sed obscurissima, & quæ maximo negocio uix intelligi possint. quorum cum nonnulla iam ab Eutocio Ascalonita doctissime, planissimeq; explicata essent, superioribus temporibus Ioannes Regiomontanus, quem honoris caussa nomino, reliqua interpretāda suscepit. uerum, nescio quo fato, lucubrationes illæ à studiosis adhuc desiderantur. Nostra uero memoria Franciscus Maurolicus Messanensis in hoc genere

nere

nere literarum à primis temporibus ætatis suæ uersatus, ad eandem interpretationem aggressus est. qua in re (ut mea fert opinio) & officio suo, & expectationi hominum cumulate satisfecisset, nisi postremo, scientiis mathematicis multa salute dicta, sacrarum literarũ in studia sese penitus abdidisset. Ego uero, cum ut eorum, qui hisce disciplinis delectantur, studia incitarem, tum ut mihi ipsi satisfacerem, eandem interpretandi Archimedis prouinciam suscepi. quam iis, qui nondum in his studiis magnos progressus fecerunt, arbitror fore non inutilem. non enim me Persio, uel Scipioni, aut Rutilio scripsisse profiteor, quorum iudicium à Lucilio reformidabatur, sed iis, qui mathematicas disciplinas primoribus labris attigerunt. fortasse posthac alii, quibus ego in hoc scientiæ genere facile concedo, meo exemplo admoniti, multo & meliora, & uberiora conscribent, atque Archimedis sensa latinis literis tum doctius, tum elegantius illustrabunt. Hos autem meos labores, qualescunque sint, cur tibi præcipue dicarem, multæ quidem me caussæ impulerunt. sed illa una, ut id præcipue facerem, hortata est, quòd ex amplissimis patribus, quibus ecclesiæ sanctæ procuratio commissa est, neminem habemus, qui tanto studio harum disciplinarum teneatur; quas tibi tanquam gradus quosdam fecisti ad diuinam sapientiam, quæ uere sapientia est, assequendam. Nam de mea erga te perpetua obseruantia, tuaq; singulari erga me humanitate in præsentia mihi tacendum esse iudico, ne, quod cogitatione uix possum, uidear oratione uoluisse complecti. unum illud dicam, si hos meos commentariolos tibi nõ ingratos esse cognouero, nihil mihi gratius, nihil optatius accidere potuisse. tuum enim in omnibus scientiis acerrimum iudicium, ea, qua polles, auctoritate coniunctum, me clientem tuum ab omnibus maleuolorum obtrectationibus facile uindicabit.

Federicus Commandinus.

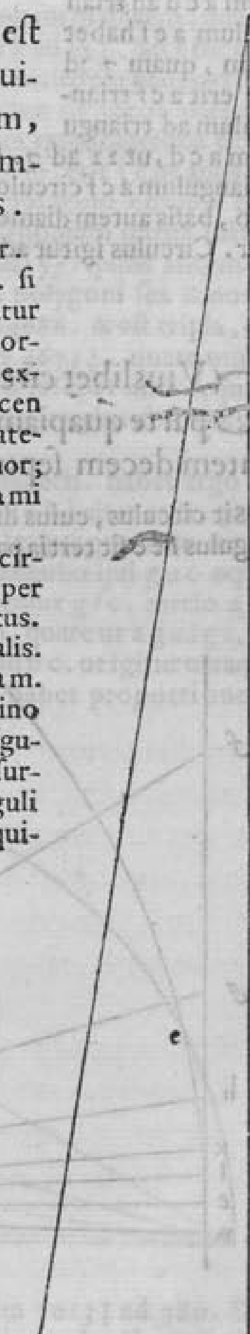
ARCHIMEDIS
CIRCVLI DIMENSIO.

PROPOSITIO I.

QVILIBET circulus æqualis est triangulo rectangulo: cuius quidem semidiameter uni laterum, quæ circa rectũ angulũ sunt, ambitus uero basi eius est æqualis.

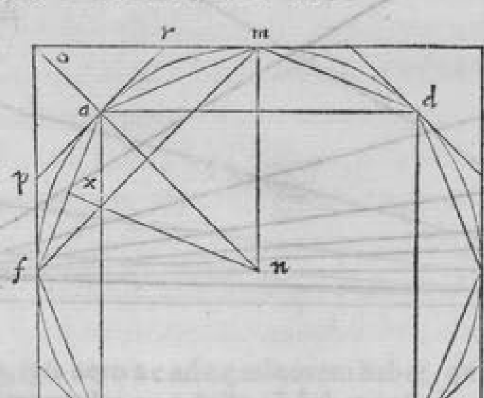
SIT a b c d circulus, ut ponitur. Dico eum æqualem esse triangulo e. si enim fieri potest, sit primum maior circulus: & ipsi inscribatur quadratum a c: secenturq; circunferentiæ bifariam: & sint portiones iam minores excessu, quo circulus ipsum triangulum excedit. erit figura rectilinea adhuc triangulo maior. Sumatur centrum n; & perpendicularis n x. minor est igitur n x trianguli latere. est autem & ambitus rectilineæ figuræ reliquo latere minor; quoniam & minor est circuli ambitu. quare figura rectilinea minor est triangulo e: quod est absurdum.

Sit deinde, si fieri potest, circulus minor triangulo e: & circumscribatur quadratum: circũferentiisq; bifariam sectis, per ea puncta contingentes lineæ ducãtur. erit angulus o a r rectus. & idcirco linea o r maior, quàm r m; quòd r m ipsi r a sit æqualis. triangulum igitur r o p maius est, quàm dimidium figuræ o f a m. itaque sumantur portiones, ipsi p f a similes; quæ quidem minores sint eo, quo triangulum e excedit circulum a b c d. erit figura circumscripta adhuc triangulo e minor: quod item est absurdum, cum sit maior: nam ipsa quidem n a æqualis est trianguli catheto: ambitus uero maior est basi eiusdem. ex quibus sequitur circulum triangulo e æqualem esse.

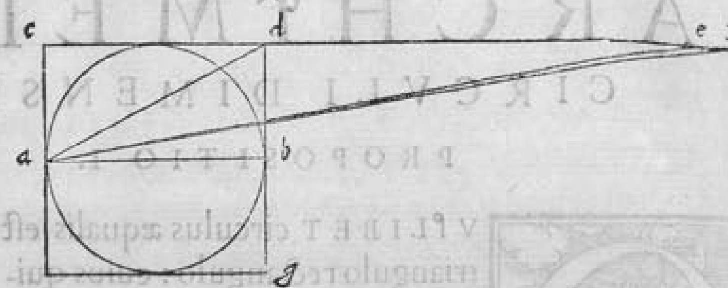


PROPOSITIO II.

Circulus ad quadratũ diametri eam proportionẽ habet, quam XI ad XIIII.



SIT circulus, cuius diameter a b: & circumscribatur quadratũ c g: & ipsius c d dupla sit d e: sit autem e f, septima eiusdẽ c d. Quo-



niam igitur a c e triangulũ ad triangulum a c d eam proportionẽ habet, quam 21 ad 7: triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7. sed ipsius a c d trianguli quadruplum est c g quadratum: & triangulum a c f circulo a b est æquale, quoniam cathetus a c æqualis est semidiametro, basis autem diametri tripla, & propè septima parte excedens, ut monstrabitur. Circulus igitur ad quadratum c g eandem proportionem habet, quam 11 ad 14.

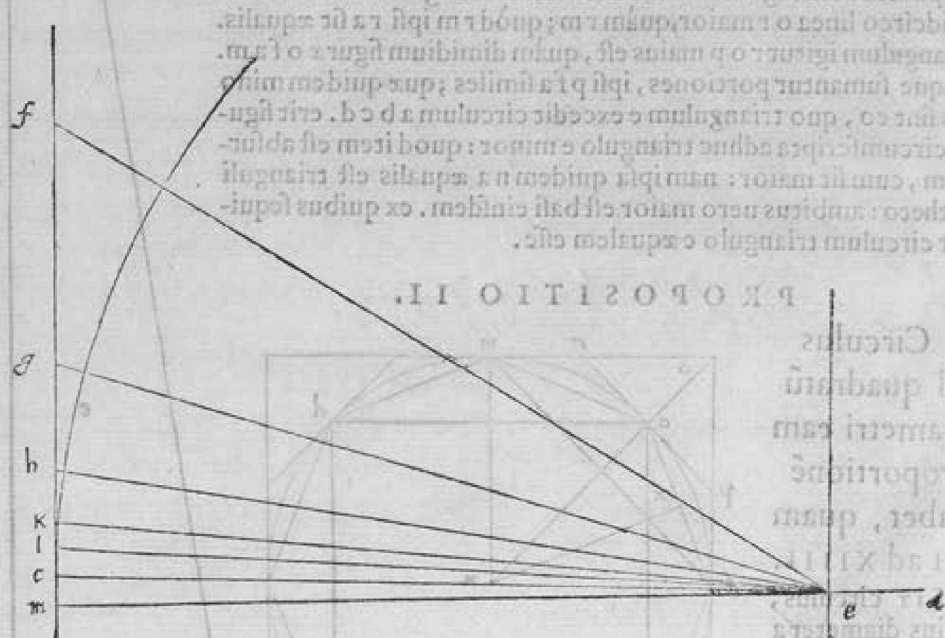
PROPOSITIO III.

CViuslibet circuli ambitus diametri est triplus, & adhuc superat parte quapiam, quæ quidem minor est septima diametri, maior autem decem septuagesimis primis.

a. b Sit circulus, cuius diameter a c, centrum e: & c l f linea circulum contingat: & angulus f e c sit tertia pars recti. ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam

b

c



c 306 ad 153. ipsa uero e c ad c f [proportionem habet eam, quam] 265 ad 153. secetur angulus f e c bifariam

d ducta e g linea. ut igitur f e ad e c, ita est f g ad g c: & permutando, componendoq;, ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. maiorem ergo

[maiorem proportionem habet, quam]

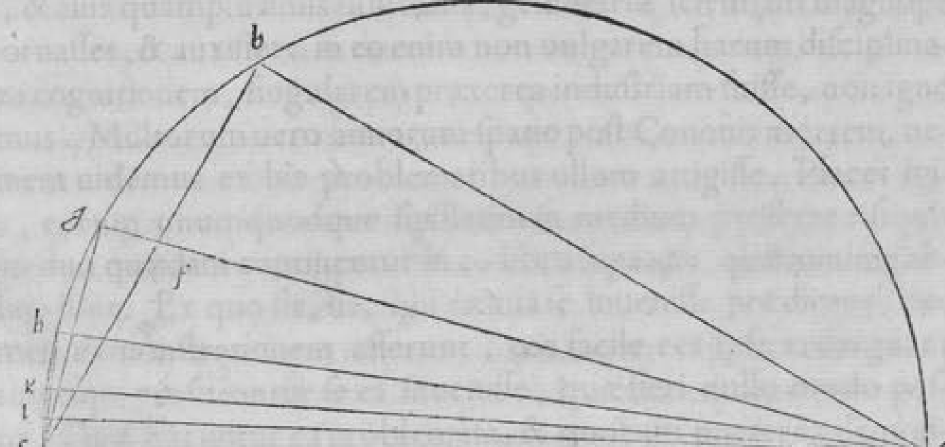
ergo proportionem habet c e ad c g, quàm 571 ad 153. [quare e g ad g c eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409; longitudine uero eam, quam 591 $\frac{1}{2}$ ad 153.] Rursus angulus g e c bifariam secetur ipsa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem proportionem habet, quàm 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. quare h e ad h c maiorem habet, quàm 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm 2339 $\frac{1}{4}$ ad 153. Secetur demum angulus k e c bifariam ipsa l e. habet igitur e c ad l c maiorem proportionem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam angulus f e c, cum sit tertia pars recti, quater bifariam sectus est: ipse l e c angulus erit recti pars quadragesima octaua. ponatur iam angulo l e c æqualis angulus ad e, qui sit c e m. erit l e m angulus recti pars uigesima quarta. quare l m recta linea latus erit polygoni circulo circumscripti, quod sex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur ostensa est e c ad c l maiorem habere proportionẽ, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 153: ipsius autem e c dupla est a c: & ipsius c l dupla l m: habebit a c ad ambitum polygoni sex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm 4673 $\frac{1}{2}$ ad 14688. & est tripla, exceditq; 667 $\frac{1}{2}$, quæ quidem minora sunt, quàm septima pars 4673 $\frac{1}{2}$. quare ambitus polygoni circulo circũscripti ipsius diametri est triplus, & insuper minor, quàm sesquiseptimus. circuli igitur ambitus multo minor est, quàm triplus sesquiseptimus suæ diametri.

[quare e g ad g c potestate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorẽ, quàm 591 $\frac{1}{8}$ ad 153]

e f g h i K

Sit circulus, cuius diameter a c: & angulus b a c tertia pars recti. habet ergo a b ad b c minorem proportionem, quàm 1351 ad 780. sed a c ad c b habet eam, quam 1560 ad 780. secetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. Itaque quoniam æqualis est angulus b a g angulo g c b; sed & ipsi g a c: erit & g c b angulus ipsi g a c æqualis. et angulus communis a g c est rectus. ergo & tertius angulus g f c, tertio a g c æqualis erit: & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. sed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque b a, a c ad b c, ita a g ad g c: & propterea a g ad g c minorem habet proportionem,

l m n o



quàm 2911 ad 780, ipsa uero a c ad c g minorem habet, quàm 3013 $\frac{3}{4}$ ad 780. Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h c minorem proportionem, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780, uel quàm 1823 ad 240. utraque enim utriusque est $\frac{4}{11}$, quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. secetur item bifariam angulus h a c ducta k a. ergo & ipsa k a ad k c minorem habet

p q r

 propor-

proportionem, quam 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 66: nam utraque utriusque est $\frac{11}{40}$. quare a c ad k c minorem habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. secetur postremo k a c angulus bifariam ipsa l a. habet l a ad a c minorem proportionẽ, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. ipsa uero a c ad c l minorẽ habet, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. è contrario igitur polygoni ambitus ad diametrũ maiorẽ proportionem habet, quàm 6336 ad 2017 $\frac{1}{4}$; quæ quidem 6336 ipsorum 2017 $\frac{1}{4}$ maiora sunt, quàm tripla superdecies partientia septuagesimas primas. quare & ambitus polygoni sex & nonaginta laterum circulo inscripti, ipsius diametri maior est, quàm triplus superdecies partiens septuagesimas primas. circuli igitur ambitus multo maior est, quàm triplus superdecies partiens septuagesimas primas. Ex quibus constat circuli ambitum suæ diametri triplum esse, & adhuc minorem, quàm sesquiseptimum; maiorem uero, quàm superdecies partientem septuagesimas primas.

ARCHIMEDIS
LIBER DE LINEIS SPIRALIBVS

ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

DEMONSTRATIONES theorematum, quæ ad Cononem miſſa ſunt; quas ut conſcriberem, aſſidue efflagitabas; plurimas in iis quidem libris, quos Heraclides attulit, explicatas habes: nonnullas uero hoc etiam uolumine cõplexus ad te mitto. Verum ne mireris, ſi longi temporis interuallo has demonſtrationes edimus: hoc enim ea de cauſſa factum eſt, quòd prius cum iis cõmunicare ſtatueramus, qui in artium ſtudiis, & diſciplinis uerſati ſunt: & in his inueſtigandis omnem ſuam operam poſuerunt. Quædam enim in geometria theoremata principio uidentur uia, ac ratione tradi facile non poſſe; quæ deinde procedente tempore illuſtrantur, & tanquam excoluntur. At uero Conon, cum illi non ſatis diuturnum ad hæc indaganda tempus datum eſſet, re nondum abſoluta uitam cum morte commutauit, eaq; obſcura reddidit; cum tamen, his omnibus inuentis, & aliis quamplurimis illuſtratis, geometriæ ſcientiam magnopere ornaſſet, & auxiſſet. in eo enim non uulgarem harum diſciplinarum cognitionem, ſingularem præterea induſtriam fuiſſe, non ignoramus. Multorum uero annorum ſpatio poſt Cononis mortem, neminem uidemus ex his problematibus ullum attigiſſe. Placet igitur, eorum unumquodque ſigillatim in medium proferre: ſiquidem duo quædam continentur in eo libro ſeparata, quæ minime abſoluta ſunt. Ex quo fit, ut, qui omnia ſe inueniſſe prædicant, nec tamen demonſtrationem afferunt, eos facile res ipſa redarguat: quippe qui profiteantur ſe ea inueniſſe, quæ fieri nullo modo poſſunt. Quæ ſint igitur ea problemata, & quorum præterea demonſtrationes habes, quæ ue ſint, quæ in hoc libro continentur; tibi iam
explicandum cenſeo. Primum problema erat, ſphæra data ſpa- a
tium planum inuenire, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. quod quidem primum à nobis explicatum eſt in libro, quem de ſphæra edidimus. cum enim demonſtratum ſit, uniuſcuiuſque ſphæ

ræ

ræ superficiem quadruplam esse maximi circuli, eorum, qui in ipsa
describuntur: constat fieri posse, ut spatium planum inueniatur
b sphæræ superficiei æquale. Secundum problema erat, Dato cono,
uel cylindro sphæram inuenire ipsi cono, uel cylindro æqualem.
c Tertium, Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius inter
d se datam habeant proportionem. Quartum, Datam sphæram pla-
no ita secare, ut portiones superficiei eius datam habeant proportio
e nem. Quintum, Datam sphæræ portionem, portioni sphæræ datæ
f similem facere. Sextum, Datis duabus siue eiusdem, siue non eius-
dem sphæræ portionibus, inuenire portionem sphæræ, quæ alteri
quidem earum sit similis, superficiem uero alterius superficiei æqua
g lem habeat. Septimum, A data sphæra portionem plano ita abscin-
dere, ut portio ad conum, cuius basis sit eadem portioni, & altitudo
æqualis, datam proportionem habeat; quæ quidem maior sit ea,
quam habent tria ad duo.

Horum igitur quæ dicta sunt, omnium, Heraclides demonstratio-
nes attulit. Quod autem post hæc erat separatum, falsum est. Si sphæ
ra uidelicet plano secetur in partes inæquales; maior portio ad mi-
norem duplam proportionem habet eius, quam superficies maior
habet ad minorem. Hoc uero falsum esse apparet ex iis, quæ prius
ad te missa sunt, Erat enim & illud in ipsis separatum, si sphæra sece
tur in partes inæquales plano ad rectos angulos ducto super aliquã
diametrum earum, quæ sunt in sphæra: maior portio ad minorem
eandem habebit proportionem, quam portio diametri maior ad mi-
h norem. sphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem qui-
dem proportionem habet, quàm sit dupla illius, quæ est maioris su
perficiei ad minorem, maiorem uero, quàm sit eiusdem sesquialtera.
Erat præterea & extremum problema separatũ, falsum. si sphæræ ali-
cuius diameter secetur ita, ut quadratum maioris partis, quadrati mi
noris sit triplum, & per punctum sectionis planũ ad rectos angulos su
per diametrũ ducatur, quod ipsam sphæram secet: erit talis figura,
qualis est maior sphæræ portio, aliarum portionũ maxima, quæ super
ficiem habeant æqualem. Id autem falsum esse constat ex theorema
i tibus, quæ ad te missa sunt. demonstratum enim est, dimidiam sphæ
ram maximam esse omnium sphæræ portionum, quæ æquali superfi-
cie contineantur. Deinde de cono hæc proposita erant. Si rectangu
li coni sectio manente diametro circumferatur: ita ut ipsa diameter
K sit axis: figura à sectione coni rectanguli descripta conoides uocetur.
Et si conoides planum contingat: ipsi autem contingenti plano æqui

distans

diſtans alterum planum ducatur, quod abſcindat portionem conoi-
dis: abſciſſæ portionis baſis uocetur planum abſcindens; uertex au-
tem punctum, in quo alterum planum conoides contingit. Quòd ſi
dicta figura ſecetur plano ad rectos angulos ſuper axem ducto: ſectio
nem eius circulum eſſe, manifeſtum eſt. portionem uero abſciſſam
ſeſquialteram eſſe coni baſim habentis portioni eandem, & æqualem
altitudinem, hoc demonſtrare oportet. Et ſi conoidis duæ portio-
nes abſcindantur planis quomodocunque ductis: ſectiones quidem
eſſe conorum acuti angulorum ſectiones, perſpicuum eſt, dummo-
do ne plana abſcindentia ſint ad rectos angulos ſuper axem ducta. ſed
portiones habere inter ſe proportionem eandem, quam habent po-
teſtate lineæ ab earum uerticibus uſque ad abſcindentia plana æquidi
ſtantes axi ductæ, illud quoque demonſtrare oportet. Horum autem
demonſtrationes nondum ad te mittuntur. Poſtremo de linea ſpira-
li hæc propoſita erãt. eſt enim hoc tanquam aliud problematum ge-
nus, nihil cum prædictis commune habens; de quibus in hoc libro
tibi demonſtrationes conſcripſimus. Si recta linea in plano, manen
te altero termino æqueuelociter circunducta, rurſus reſtituatur in
eum locum; à quo primum cœpit moueri: & unà cum linea circun-
ducta punctum feratur æqueuelociter ipſum ſibi ipſi in eadem linea,
incipiens à termino manente: eiuſmodi punctum ſpiralem lineam in
plano deſcribet. Dico iam ſpatium contentum linea ſpirali, & recta p
in priſtinum locum reſtituta, tertiam partem eſſe circuli deſcripti,
centro quidem puncto manente, interuallo autem, ea lineæ rectæ
parte, quæ à puncto fuerit in una circulatione permeata. Si lineam q
ſpiralem recta linea contigerit in ultimo ipſius ſpiralis termino; alia
autem recta à puncto manente ducatur perpendicularis ſuper lineam
circunductam, reſtitutamq; in priorem locum: ita ut cum contingen
te coeat: Dico hanc lineam circumferentiæ circuli eſſe æqualem. Si r
linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus
circumferantur; & rurſus in locum, à quo moueri cœperant, reſti-
tuantur: Dico ſpatii linea ſpirali in ſecunda circulatione contenti,
duplum quidem eſſe, quod in tertia circulatione continetur; quod
uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ita ſemper
ſpatia in poſterioribus contenta circulationibus, ſecundum nume-
ros conſequentes, multiplicia erunt ſpatii contenti in ſecũda circula
tione. et quod in prima circulatione continetur ſpatiũ, ſexta pars erit
ſpatii in ſecunda circulatione contenti. Si in linea ſpirali in una circu ſ
latione deſcripta duo puncta ſumantur; & ab eis ducantur rectæ li-

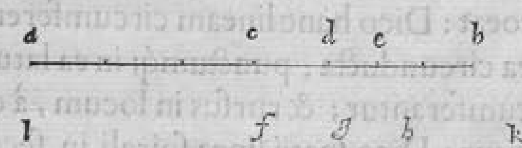
neæ

neæ ad manentem lineæ circunductæ terminum: deſcribãturq; duo circuli, centro quidem puncto manente, interuallis uero rectis lineis ad manentem lineæ terminum ductis: & earum linearum minor producatur. Dico ſpatium contentum circumferentia illa maioris circuli, quæ in eadem parte eſt, in qua linea ſpiralis, mediaq; inter lineas habetur; & contentum linea ſpirali, & recta producta; ad ſpatiũ contentum circumferentia minoris circuli, eademq; linea ſpirali, & recta terminos earum iungente, eandem proportionem habere, quam habet ſemidiameter minoris circuli cum duabus tertiis exceſſus, quo ſemidiameter maioris circuli excedit ſemidiametrum minoris; ad ſemidiametrum minoris unà cum tertia dicti exceſſus parte. Horum igitur, & aliorum circa ſpiralem lineam demonſtrationes à me in hoc libro ſunt conſcriptæ. præmittuntur uero, ſicut in aliis geometricis, quædam ad eorum demonſtrationem neceſſaria. & ſumo inſuper ipſis quoque ea, quæ in aliis libris ſumpta ſunt, Videlicet linearum inæqualium, & ſpatiorum inæqualium, id, quo maius excedit minus ſibi ipſi coaceruatum, fieri poſſe, ut quamlibet propoſitam quantitatem excedat earum, quæ ad ſeſe indicem referuntur.

PROPOSITIO I.

SI in quapiam linea punctum feratur æqueuelociter ipſum ſibi ipſi: & in ea ſumantur duæ lineæ: habebunt illæ eandem inter ſe proportionem, quam habent tempora, in quibus punctũ lineas pertranſiuit.

Feratvr enim aliquod punctum in linea a b æqueuelociter: & in ipſa ſumantur duæ lineæ c d, d e: ſitq; tempus f g, in quo punctum lineam c d pertranſiuit; in quo autem pertranſiuit d e, ſit g h. Oſtendendum eſt, lineam c d ad d e eandem habere proportionem, quam tempus f g ad ipſum g h. componantur enim ex lineis c d, d e ipſæ a d, d b lineæ ſecundum quamlibet compoſitionem: ita ut a d ipſam d b excedat. & quoties quidem ſumitur linea c d in a d, toties ſumatur tẽpus f g in tempore l g. quoties autem ſumitur d e in d b, toties tempus g h ſumatur in g k tempore. Quoniam ergo ponitur punctum in linea a b æqueuelociter ferri: conſtat in quanto



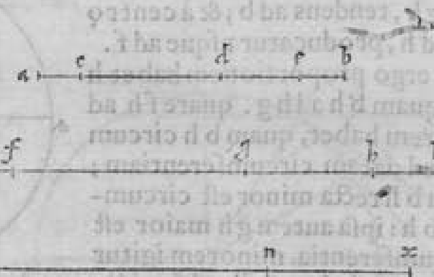
tempore lineam c d pertranſiuit, in tanto & quamlibet pertranſiſſe earum, quæ ſunt æquales ipſi c d. Quare & compoſitam lineam a d in tanto tempore pertranſiuit, quantum eſt l g tempus: cum toties ſumatur c d linea in ipſa a d, quoties f g tempus in tempore l g. Eadem quoque ratione & lineam d b pertranſiuit in tanto tempore, quantum eſt g k tempus. Et quoniam maior eſt a d linea ipſa b d: manifeſtũ eſt in maiori tempore punctum lineam a d pertranſire, quàm ipſam b d. quare tempus l g maius eſt tempore g k. ſimiliter autem oſtendetur, et ſi ex tẽporibus f g, g h, componantur

ponantur tempora ſecundum quamlibet compoſitionem, ut alterum excedat alterum, & compoſitis ex c d, d e lineis ſecundum eandem compoſitionem, alteram excedere alteram, eodem ordine ſumptas ipſis temporibus. patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipſam d e, quam tempus f g ad tempus, g h.

PROPOSITIO II.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodque ſibi ipſi æqueuelociter: ſumantur autẽ in utraque ipſarum duæ lineæ primæ, quæ ſcilicet in temporibus æqualibus à punctis fuerunt permeatæ: & item ſecundæ: habebunt ſumptæ lineæ eandem inter ſe proportionem.

FERATVR in linea a b aliquod punctum æqueuelociter ipſum ſibi ipſi; & alterũ feratur in linea k l. ſumantur autem in ipſa a b duæ lineæ c d, d e: & in linea k l itẽ duæ f g, g h: & in tanto tempore punctum in linea a b latũ pertranſeat ipſam c d, in quanto alterum latum in k l pertranſit lineam f g, ſimiliter & lineam d e in tanto tempore punctum pertranſeat, in quanto alterum ipſam g h. oſtendendum eſt, eandem habere proportionem c d ad d e, quam f g, ad g h. Sit enim tempus m n, in quo punctum lineam c d pertranſiuit. in hoc autem & alterum punctum pertranſit ipſam f g. rurſus in quo lineam d e punctum pertranſiuit, ſit tempus n x, in eodemq; alterum punctum pertranſit g h. Eandem ergo proportionem habebit linea c d ad lineam d e, quam tempus m n ad tempus n x. et linea f g ad lineam g h habebit eandem, quam tempus m n ad ipſum n x. manifeſtum eſt igitur eãdem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h. A



PROPOSITIO III.

CIrculis quotcunque datis fieri poteſt, ut recta linea ſumatur, quæ circulorum circumferentiis maior exiſtat.

CIRCVMSCRIPTA enim circa unumquenque circulorum figura multiangula, perſpicuum eſt, lineam ex omnibus earum lateribus compoſitam, omnibus circulorum circumferentiis maiorem eſſe. A

PROPOSITIO IIII.

DVabus datis lineis inæqualibus, recta uidelicet, & circuli circumferentia, ſumi poteſt recta linea, maiore quidem datarum linearum minor, minore uero maior.

DIVISA etenim recta linea in tot partes æquales, quoties exceſſus, quo maior ſuperat minorem, ſibi ipſi coaceruatus excedat eandem rectum; erit pars una A

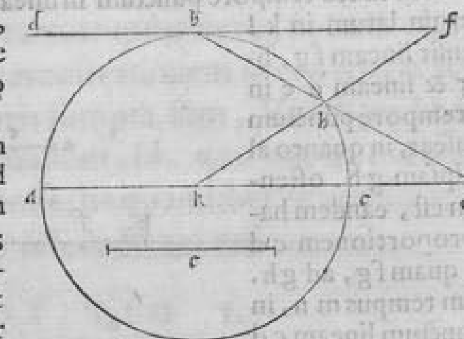
B ipſius

ipsius excessu minor: si autem circumferentia sit maior recta linea; una parte ipsi rectæ adiecta, manifestum est, eam minore datarum linearum maiorem esse, maiore uero minorem; nam quæ adiicitur pars, minor est ipso excessu.

PROPOSITIO V.

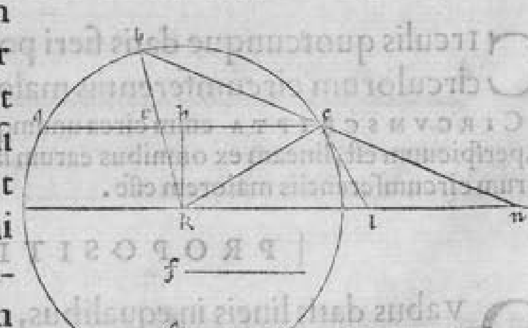
Circulo dato, & linea recta circulum contingente, potest à centro circuli duci recta linea ad contingentem: ita ut eius pars, quæ media interiicitur inter contingentem, & circuli circumferentiam, ad semidiametrum minorem habeat proportionem, quàm circumferentia circuli inter tactum, & lineam ductam interiecta ad datam quamlibet circuli circumferentiam.

Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & d f linea tangat circulum in b puncto: sit data etiam quælibet circuli circumferentia. Itaque sumi potest recta linea
A maior data circumferentia, quæ sit e. ducatur autem per centrum linea a g, æquidistans lineæ d f: ponaturq; ipsi e æqualis g h, tendens ad b; & à centro k ducta ad h, producatur usque ad f.
B Eandem ergo proportionem habet h
C f ad h k, quam b h ad h g. quare f h ad h k minorem habet, quam b h circumferentia ad datam circumferentiam; quoniam b h recta minor est circumferentia b h: ipsa autem g h maior est data circumferentia. minorem igitur proportionem habet & f h ad semidiametrum, quàm b h circumferentia ad datam circumferentiam.



PROPOSITIO VI.

Circulo dato, & in eo data linea, quæ sit minor diametro, potest à centro circuli ad circumferentiam ipsius recta linea duci,
A secans lineam in circulo datam: ita ut eius pars inter circumferentiam, & datam lineam interiecta, ad lineam, quæ iungit lineæ ductæ terminum ad circumferentiam, & terminum lineæ in circulo datæ, habeat quamlibet
A propositam proportionem; si modo proportio illa minor sit proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam perpendiculariter sit educta.



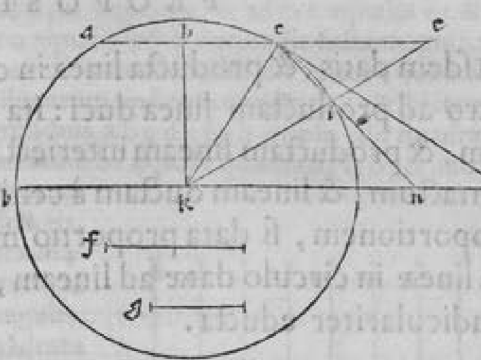
Sit circulus a b c datus, cuius centrum k: & in ipso data recta linea c a minor diametro: & proportio, quam habet f,
A ad g minor sit ea, quam c h habet ad k h, perpendiculari existente ipsa k h. ducatur

autem

autem à centro linea kn æquidistans lineæ a c : & ad angulos rectos ipsi k c ducatur c
l. erunt triangula c h k, c k l similia: & idcirco ut c h ad h k, ita k c ad c l. minorem A
igitur proportionem habet f ad g, quàm k c ad c l. quam uero proportionem habet B
f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l, hoc est ad b n: & ponatur b n inter circumfe C
rentiam, & rectam lineam, ut transeat per c: ita enim secari poterit, & cadet extra,
cum ipsa sit maior, quàm c l. Quoniam igitur k b ad b n eandem habet proportio D
nem, quam f ad g: & ipsa e b ad b c habebit eandem, quam f ad g.

PROPOSITIO VII.

Iisdem, quæ supra datis, & producta recta linea in circulo data, potest à circuli centro ad productam linea duci: ita ut pars eius, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad lineam iungentem terminos interiectæ, & productæ lineæ, habeat quamlibet datam proportionem; dummodo data proportio sit maior ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.



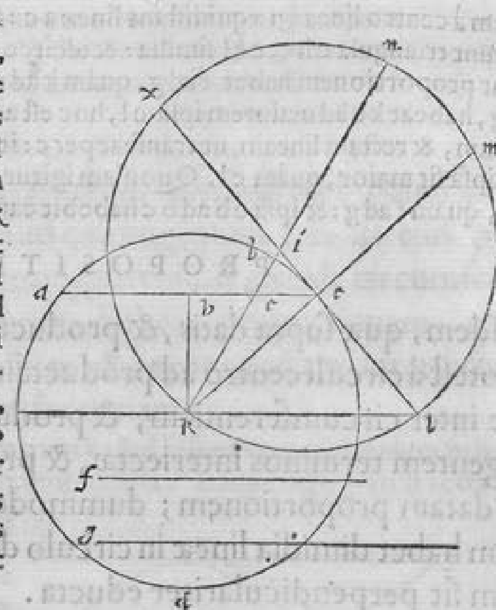
Sint data eadem, quæ superius: & recta linea, quæ in circulo data est, producatur. data autem proportio sit, quam habet f ad g, maior propor tione c h ad hk. maior igitur erit & A ea, quam habet k c ad c l. B quam uero proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat C ad i n, quæ tendat ad c: D potest enim ita secari, & cadet intra lineam c l, quòd minor sit, quàm ipsa c l. Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g, habebit & ipsa c i ad i c eandem, quam f ad g.

PROPOSITIO VIII.

Circulo dato, & in circulo linea, quæ sit diametro minor, data itē altera linea circulum contingente in termino lineæ datæ, potest à circuli centro linea duci ad rectam lineam: ita ut pars ipsius, quæ est inter circumferentiam, & lineam in circulo datam, ad partem illam lineæ contingentis, quæ linea ipsa à centro ducta, & puncto con tactus continetur, habeat quamlibet datam proportionem; si modo data proportio minor sit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipsam sit perpendiculariter educta.

Sit datus circulus, a b c d: & in circulo data linea c a diametro minor: tangatq; x l circulum in c: & proportio f ad g sit minor ea, quam habet c h ad h k. erit & minor ea, quam habet c k ad c l, si kl ducta sit æquidistans ipsi h c. Itaque habeat k c ad c x eandem proportionem, quam f ad g. maior ergo est linea x c ipsa c l. describa A tur circuli circumferentia per puncta k l x. Et quoniam maior est x c ipsa, c l: & li- B

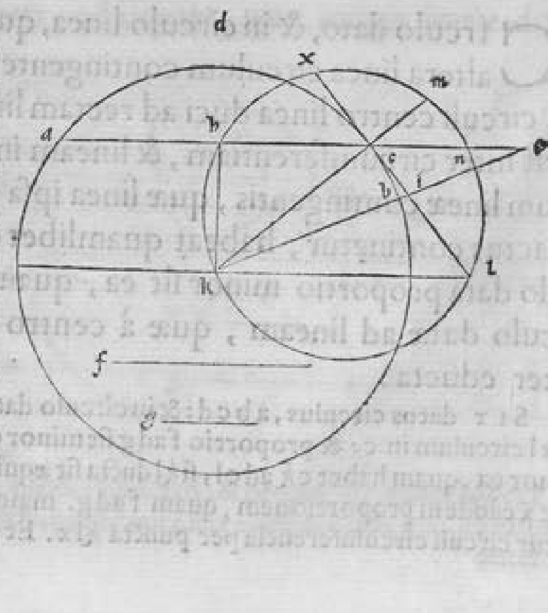
C neæ kc, x l, fecant fefe ad angulos re-
ctos: fieri poteft, ut ducatur linea i n,
æqualis ipfi m c, quæ tendat ad k. Re
ctangulum igitur contentum lineis
D x i, i l ad id, quod continetur ke, i l
eandem habet proportionem, quam
E x i ad k e; & quod continetur lineis k
i, i n ad contentum ipfis ki, c l habet
eandem, quam i n ad c l. quare & i n ad
F c l eft, ut x i ad ke: & propterea c m ad
c l, & x c ad kc, & ad kb eft, ut x i
ad ke: & reliqua i c ad b e eandem ha-
bet proportionem, quam x c ad kc,
& quam g ad f. incidit igitur kn, in cō
tingentem; & eius pars, quæ eft inter
circunferentiam, & lineam rectam;
uidelicet b e ad partem contingentis
inter K n, & contactum, eam habet
proportionem, quam f ad g.



PROPOSITIO IX.

Iifdem datis, & producta linea in circulo data, poteft à circuli centro ad productam linea duci: ita ut pars eius inter circumferentiam, & productam lineam interiecta, ad partem contingentis inter contactum, & lineam ductam à centro, habeat quamlibet datam proportionem, fi data proportio maior fit ea, quam habet dimidia lineæ in circulo datæ ad lineam, quæ à centro ad ipfam fit perpendiculariter educta.

SIT datus circulus. a b c d: & in circulo data recta linea c a, minor diametro producatur: linea autem x c tangat circulum in c: & proportio, quam habet f ad g maior fit ea, quam habet c h ad h k. erit ergo & ea maior, quam habet k c ad c l. Itaque habeat k c ad c x eandem proportionem, quam f ad g. minor erit x ipfa c l. Rurfus defcribatur circulus per puncta x k l. Quoniam igi
A tur x c minor eft c l: & ipfæ k m, x c fecant fefe ad angulos rectos: poterit duci linea i n æqualis lineæ c m; quæ tendat ad k. Et quoniam rectangulum, quod lineis x i, i l continetur, ad rectangulum contentum ipfis l i, k e eft, ut x i ad k e: contento autem lineis x i, i l æquale eft con-
B tentum ki, i n: & contento l i, ke æquale contentum ki, c l; propterea quòd eft, ut ke ad l c, ita ki ad
C l i: erit & ut x i, ad ke, ita rectangulum lineis ki, i n contentum, ad contentum ipfis ki, c l: hoc eft, ut n i ad

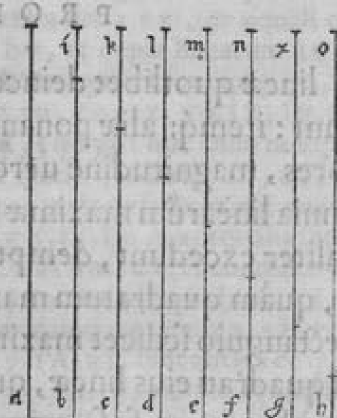


cl: hoc est cm ad cl. est autem & ut cm ad cl, ita xc ad ck, hoc est ad kb. Vt ergo xi ad ke, ita xc ad kb; & reliqua ic ad reliquam be, est ut xc ad ck. Quam uero proportionem habet xc ad ck, eam habet g ad f. inciditq; ke in productam lineam, & be inter ipsam, & circumferentiam interiecta ad partem contingentis ci, inter contactum, & ipsam ke, eandem habet proportionem, quam f ad g.

PROPOSITIO X.

SI lineæ quotlibet, quæ se se æqualiter excedant, deinceps ponantur: sitq; excessus minimæ earum æqualis: & aliæ item ponantur lineæ, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata illarum omnium, quæ maximæ æquales sunt unà cum quadrato maximæ, & rectangulo minima linea, & linea æquali omnibus se se æqualiter excedentibus contento, tripla erunt quadratorum linearum se se æqualiter excedētium.

SINT lineæ quotlibet deinceps positæ, quæ se se æqualiter excedant abcdefg
h: & sit h æqualis excessui. adiiciatur uero ad b linea i æqualis ipsi h: & ad c adiicia-
tur k æqualis g: & ad d ipsa l æqualis f: & ad e, m æqualis e: & ad f, n æqualis d: & ad
g, x æqualis c: & denique ad h adiiciatur o æqualis ipsi b. erunt sic factæ magnitudi-
nes, inter se æquales; & item æquales maximæ. ostendendum est igitur, quadrata,
omnium, uidelicet ipsius a, & factarum linearum unà cum quadrato a, & rectangu-
lo contento linea h, & linea æquali his omnibus abcdefgh tripla esse quadrato-
rum omnium abcdefgh. est enim quadratum bi æquale quadratis i, b; & duobus A
quæ b, i continentur rectangulis. quadratum
uero kc est æquale quadratis k, c; & duobus iis,
quæ k, c continētur. Similiter & quadrata alia-
rum, quæ sunt æquales ipsi a, æqualia erunt qua
dratis suarum partium, & duobus rectangulis,
quæ eisdem partibus continentur. Quadrata B
igitur abcdefgh, & quadrata iklmnxo, unà
cum quadrato a, dupla sunt quadratorum abc
defgh. Quod autem reliquum est, ostende- C
mus, uidelicet dupla eorum, quæ partibus u-
niuscuiusque lineæ æqualis ipsi a continentur,
unà cum eo, quod continetur h linea, & linea
æquali omnibus abcdefgh, æqualia esse qua-
dratis abcdefgh. Quoniam enim duo, quæ
lineis b, i continentur, æqualia sunt duobus D
contentis b, h: & duo, quæ continentur k, c E
æqualia sunt contento h, & quadrupla ipsius c,
quòd k dupla est ipsius h: duo autem contenta
d, l sunt æqualia contento h, & sexcupla d, quòd l eiusdem h est tripla: similiter et a-
lia dupla eorum, quæ partibus continentur, æqualia sunt contento h, & multiplici
semper secundum numeros deinceps pares sequentis lineæ: erunt omnia rectangula F
unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus abcdefgh, æqualia
contento linea h, & linea æquali his omnibus, uidelicet ipsi a, & triplæ b, & quin-
tuplæ c, & semper impari secundum numeros deinceps impares, multiplices lineæ
sequentis. Sunt autem & quadrata ipsarum abcdefgh æqualia contento iisdem li
neis: nam quadratum a est æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus, ui- G
delicet ipsi a & reliquis, quarum unaquæque est æqualis ipsi a; æqualiter enim h me-
titur



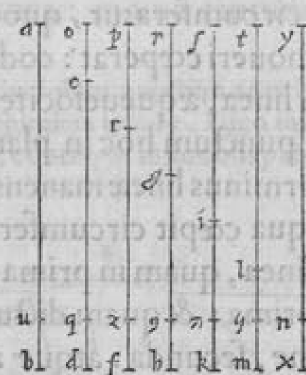
titur ipsam a, atque a metitur omnes sibi æquales. quare quadratum a est æquale cõtento linea h, et linea æquali ipsi a, et duplæ linearum b c d e f g h: quoniam quæ sunt æquales ipsi a omnes excepta a duplæ sunt linearum b c d e f g h. similiter et quadratum b æquale est contento linea h, et linea æquali ipsi b, et duplæ linearum c d e f g h. et rursus quadratum c est æquale contento linea h et æquali ipsi c, et duplæ ipsarum d e f g h. Eadem ratione et aliarum quadrata omnium æqualia sunt contentis linea h, et linea ipsi æquali, et duplæ reliquarum. manifestum est igitur, quadrata omnium æqualia esse ei, quod continetur linea h, et linea æquali his omnibus, uidelicet ipsi a, et triplæ b, et quintuplæ c, et secundum numeros deinceps impares, multiplici sequentis lineæ.

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maximæ, quadratorum quidem linearum se se æqualiter excedentium, minora esse, quàm tripla; quoniam assumptis quibusdã tripla sunt: I reliquorum autem, dempto maximæ quadrato maiora, quàm tripla; quoniam assumpta minora sunt, quàm tripla quadrati maximæ. K Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus; & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt; & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: quæ ab iis describuntur, quæ sunt æquales maximæ, earum quidem, quæ ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, minores erunt, quàm triplæ; reliquarum uero, dempta ea, quæ à maxima describitur, maiores, quàm triplæ: similes nanque figuræ eandem inter se se, quam quadrata proportionem habent.

PROPOSITIO XI.

SI lineæ quotlibet deinceps ponantur, quæ se se æqualiter excedant: itemq; aliæ ponantur lineæ, numero quidem prædictis una minores, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ: quadrata omnia linearũm maximæ æqualium ad quadrata earum, quæ se se æqualiter excedunt, dempta minima, minorem habent proportionem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utrisque his est æquale; rectangulo scilicet maxima, minimaq; linea contento, & tertiæ parti quadrati eius lineæ, qua maxima minimam excedit; ad quadrata uero linearum se se æqualiter excedentium dempto eo, quod à maxima fit, maiorem proportionem habent, quam sit eadem illa proportio.

SINT enim lineæ quotlibet deinceps positæ, quæ se se æqualiter excedant. a b quidem excedens c d: c d uero excedens e f: et e f, g h: et g h, i k: et i k, l m: et l m, n x. adiiciatur quoque ad ipsam c d, linea c o, æqualis uni excessui: et ad ipsam e f adiiciatur e p duobus excessibus æqualis: et ad g h æqualis tribus g r: & ad alias eodem modo. erunt igitur lineæ, quæ fiunt, inter se se æquales, & item æquales maximæ. Itaque; ostendendum est, quadrata omnia factarum linearum, ad quadrata earum, quæ se se æqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habere proportionem, quàm quadratum a b ad i d, quod est æquale utrisque; et rectangulo contento to lineis a b, n x; & tertiæ parti quadrati ipsius n y; ad quadrata uero earundem linearum, dempto quadrato a b, maiorem proportionem habere, quàm sit dicta proportio. dematur ex unaquaque earum, quæ se se æqualiter excedunt, linea excessui æqualis. Ergo quam proportionem habet quadratum a b ad hæc utraque; ad rectangulum contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati a u, eandem habet o d quadratum ad contentum ipsis o d, d q; & tertiam partem quadrati q o: & quadrati p f ad contentum p f, z f; & tertiam partem quadrati z p: & quadrata aliarum ad spatia similiter sumpta. Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x, ad omnia contenta linea n x, & æquali omnibus dictis lineis; & ad tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, eandem habebunt proportionem, quam a b quadratum ad utraque; ad contentum lineis a b, u b; & ad tertiam partem quadrati u a. Si igitur ostendatur, contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, & tertias partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; quadratis quidem a b, c d, e f, g h, i k, l m, minora esse; quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x, maiora: quod proponebatur, iam ostensum erit. Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x, et tertiæ partes quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; hæc (inquam) omnia, æqualia sunt quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; contentoq; linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n; et tertiæ parti quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n. quadrata uero, a b, c d, e f, g h, i k, l m, æqualia sunt quadratis b u, q d, z f, ϑ h, λ k, μ m; & quadratis a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; et contento linea b u, et dupla ipsarum a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ. communia igitur utrisque sunt quadrata linearum æqualium ipsi n x. contentum autem linea n x, et æquali omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, minus est contento b u, et dupla linearum a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ: propterea quod lineæ proximæ dictæ æquales sunt ipsis c o, e p, g r, i μ, l t, y n: reliquis uero maiores. et quadrata a u, c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora sunt tertia parte quadratorum o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n: hoc enim in superioribus fuit ostensum. minora igitur sunt prædicta spatia quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m. Quod autem reliquum est, ostendemus: maiora scilicet esse quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Rursus quadrata c d, e f, g h, i k, l m, n x, æqualia sunt quadratis c q, e z, g ϑ, i λ, l μ; & quadratis q d, z f, ϑ h, λ k, μ m, n x; et contento n x, & dupla linearum omnium c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, suntq; communia quadrata q d, z f, ϑ h, λ k, m μ, n x: & cõtentum linea n x, & æquali his omnibus o q, p z, r ϑ, s λ, t μ, y n, maius est contento n x, et dupla ipsarum c q, e z, g ϑ, i λ, μ l. sunt autem et quadrata q o, z p, ϑ r, λ s, μ t, y n, quadratorum c q, e z, g ϑ, i λ, l μ, maiora, quàm tripla, ut ostensum est. maiora igitur sunt dicta spatia quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x; quod fuerat ostendendum.



A

B

C

D

E

F

Et si similes figuræ describantur ab omnibus, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: figuræ omnes, quæ ab iis, quæ maximæ sunt æquales ad figuras, quæ à se se æqualiter excedentibus describuntur, dempta ea, quæ à minima, proportionem habebunt minorem, quàm quadratum maximæ ad id, quod utrisque est æquale; rectangulo maxima, minimaq; contento; & tertiæ parti quadrati excessus, quo maxima minimam excedit; ad figuras

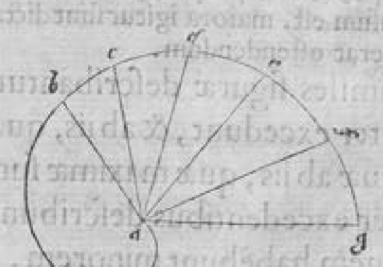
figuras uero easdem, dempta ea, quæ à maxima, proportionem habebunt dicta proportione maiorem: similes enim figuræ eandem, quam quadrata, proportionem habent.

Si recta linea in plano ducta, manente altero eius termino æqueuelociter circumferatur, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœperat: eodemq; tempore aliquod punctum feratur in dicta linea, æqueuelociter ipsum sibi ipsi, incipiens à termino manente, punctum hoc in plano spiralem lineam describet. Vocceturq; terminus lineæ manens, principium lineæ spiralis. Positio lineæ, à qua cœpit circumferri, principium circulationis dicatur. Recta linea, quam in prima circulatione punctum pertransiuit, uocetur prima: & quam dictum punctum pertransiuit in secunda circulatione, secunda: atque aliæ similiter eodem nomine uocentur, quo & ipsæ circulationes. Spatium contentum spirali linea in prima circulatione descripta, & linea recta, quæ prima est, primum dicatur. contentum uero linea spirali in secunda circulatione, & secunda linea, secundum: & alia eodem modo. Si à puncto, quod est principium lineæ spiralis, ducatur aliqua linea recta: huius ipsius lineæ, quæ sunt ad partes, in quibus circulatio fit, præcedentia dicantur: quæ uero ad alteras, sequentia. Circulus descriptus, centro quidem puncto, quod est principium lineæ spiralis; interuallo autem recta linea prima, primus uocetur: & descriptus eodem centro, & linea dupla primæ, secundus: & alii deinceps eodem modo.

PROPOSITIO XII.

Si ad spiralem lineam in una circulatione descriptam, à principio ipsius quotlibet rectæ lineæ ducantur, quæ æquales angulos ad inuicem efficiant: ipsæ sese æqualiter excedunt.

Sit spiralis linea, in qua a b, a c, a d, a e, a f, lineæ rectæ, quæ æquales angulos efficiant ad inuicem: Ostendendum est, lineam a c æqualiter excedere a b: atque a d ipsam a c: & aliæ similiter. In quo nanque tẽpore linea circũlata ex a b peruenit ad a c; in hoc punctum in linea recta latum, excessum pertransit, quo linea c a excedit a b. & in quo tempore ex a c ad a d; in eodem pertransit excessum, quo a d excedit a c. In æquali autem tempore linea circũlata ex a b peruenit ad a c. & ex a c ad a d: propterea, quòd anguli sunt æquales. ergo in æquali tempore punctum in linea recta latum pertransit excessum,



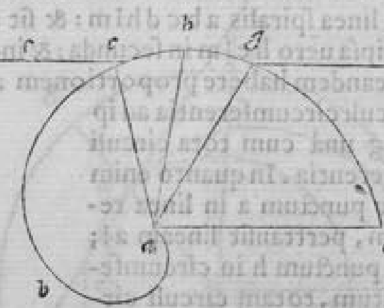
quo

quo linea a c ipsam a b excedit; & excessum, quo a d excedit a c. Quare æqualiter a c excedit ipsam a b, atque a d ipsam a c: & similiter reliquæ.

PROPOSITIO XIII.

SI lineam spiralem contingat recta linea: in uno tantum puncto contingit.

Sit linea spiralis, in qua a b c d: sitq; eius principium punctum a: principium circulationis recta linea a d: & contingat lineam spiralem ipsa f e. Dico in uno tantum puncto eam contingere. Si enim fieri posit, contingat in duobus punctis c g: iunganturq; a c, a g: & angulus lineis a g, a c cōtentus bifariam diuidatur: in quo autem puncto linea bifariam diuidens angulum, occurrit spirali lineæ, sit h. Aequaliter igitur a g excedit a h, atque a h ipsam a c: quoniam æquales inter sese angulos continent: & idcirco a g, a c sunt ipsius a h duplæ. Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipsæ a g, a c maiores sunt, quàm duplæ. constat ergo punctum, in quo recta linea a h occurrit lineæ c g, cadere inter puncta a h. Quare ipsa e f secat lineam spiralem; cum aliquod punctum eorum, quæ sunt in linea c g intra spiralem contineatur. positum autem fuerat eam contingere. In uno igitur tantum puncto ipsa e f spiralem lineam contingit.

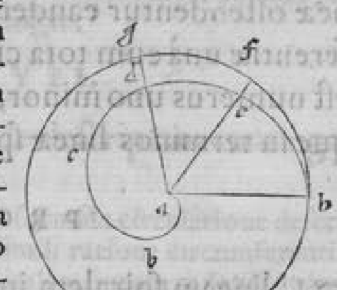


A
B

PROPOSITIO XIIII.

SI in lineam spiralem in prima circulatione descriptam, incidant duæ rectæ lineæ à puncto, quod est ipsius principium ductæ: & producantur ad primi circuli circumferentiam: eandem inter se proportionem habebunt lineæ in spiralem lineam incidentes, quam circumferentiæ circuli inter terminum lineæ spiralis, & terminos linearum ad circumferentiam productarum, interiectæ: circumferentias à termino lineæ spiralis uersus præcedentia sumendo.

Sit linea spiralis a b c d e h in prima circulatione descripta, cuius principium sit punctum a: principium circulationis linea recta a h: & h k g sit circulus primus. Incidant autem ab a puncto ad lineam spiralem rectæ lineæ a e, a d: & producantur ad f g puncta circumferentiæ circuli. ostendendum est eandem habere proportionem lineam a e ad ipsam a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam. circumducta enim linea a h, constat punctum quidem h æquali uelocitate pertransisse circumferentiam circuli h k g; punctum autem a in linea recta latum pertransisse ipsam a h. itemq; punctum h pertransisse h k f circumferentiā: & punctum a rectam lineam a e. & rursus punctum a lineam a d: & h circumferentiam

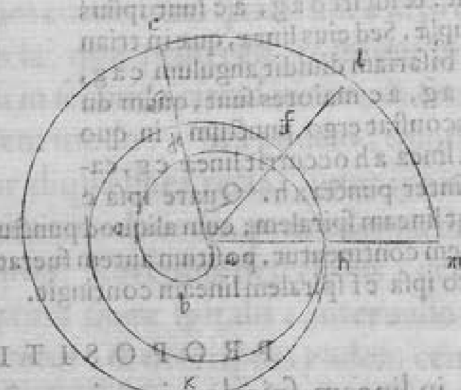


tiam h k g, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare eundem habebit proportionem a e ad a d, quam circumferentia h k f ad h k g circumferentiam: hoc enim in superioribus est demonstratum. similiter quoque demonstrabitur idem contingere, et si alia incidentium linearum in terminum lineæ spiralis inciderit.

PROPOSITIO XV.

Si in lineam spiralem in secunda circulatione descriptam, incidant rectæ lineæ à principio ipsius spiralis ductæ: eandem inter se se habebunt rectæ lineæ proportionem, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia.

Sit linea spiralis a b c d h l m: & sit a b c d h quidem in prima circulatione descripta; ipsa uero h e l m in secunda: & incidant in eam rectæ lineæ a e, a l. ostendendum est eandem habere proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cũ tota circuli circumferentia ad ipsam h k g unà cum tota circuli circumferentia. In quanto enim tempore punctum a in linea recta latum, pertransit lineam a l; in tanto punctum h in circumferentia latum, totam circuli circumferentiam pertransit, & insuper circumferentiam h k l. & rursus a punctum pertransit lineam a e; & h totam circuli circumferentiam unà cum circumferentia h k g, utrunque æqueuelociter ipsum sibi ipsi latum. Quare constat eandem habere proportionem a l ad a e, quam circumferentia h k f unà cum tota circuli circumferentia, ad circumferentiam h k g unà cum tota circuli circumferentia.

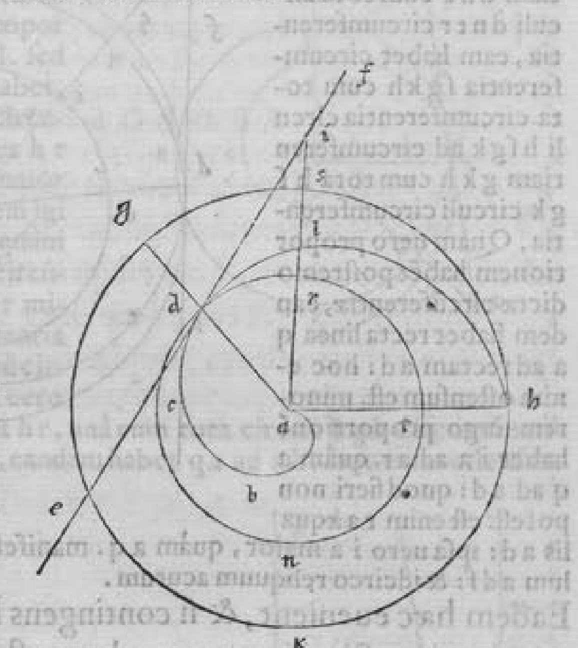


Eodem modo ostendetur, & si in lineam spiralem in tertia circulatione descriptam, rectæ lineæ inciderint, eandem habere proportionem inter se se, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia bis sumpta. Similiter autem & in alias spirales incidentes lineæ ostendentur eandem proportionem habere, quam dictæ circumferentiæ unà cum tota circuli circumferentia toties sumpta, quantus est numerus uno minor, quam sint ipsæ circulationes; etiam si utraque in terminos lineæ spiralis inciderit.

PROPOSITIO XVI.

Si lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat: & à contactu iungatur recta ad punctum, quod est principium lineæ spiralis: anguli, quos facit linea contingens, cum ea, quæ iuncta est, inæquales erunt; & is quidem qui ad præcedentia constituitur, est obtusus; qui uero ad sequentia, acutus.

Sit linea spiralis a b c d h in prima circulatione descripta: & punctum a sit ipsius principium: recta linea a h principium circulationis: & h k g circulus primus: contingat uero linea recta e d f spiralem lineam in d: & ab ipso d iungatur d a. Ostendendum est, d f cum d a obtusum facere angulum. Describatur enim circulus d t
n, centro quidem a, interuallo autem a d. necessarium igitur est, circuli huius cir A
cumferentiam, quæ ad præcedentia habetur, intra lineam spiralem cadere: quæ uero ad sequentia, extra: quoniam rectarum linearum ab a puncto ad spiralem lineam ductarum, quæ ad præcedentia fuerint, maiores sunt ipsa
d a; & quæ ad sequentia, minores. B
Angulum uero a d f non esse acutum constat: quia maior est angulo semicirculi. Sed non esse rectum, sic monstrabitur. Sit enim, si fieri potest, rectus. ergo e d f linea circulum d t n
contingit. quare ab a puncto ad cō C
tingentem potest recta linea duci, ita, ut eius pars, quæ inter contingentem, & circuli circumferentiam interiicitur, ad semidiametrum circuli minorem habeat proportioné, quàm circumferentia inter contactum, & lineam ductam interiecta ad datam circumferentiam. Itaque ducatur a i secans lineã quidem spiralem in l, circumferentiam autem circuli d n t in r: & recta linea r i ad ipsam a r minorem habeat proportionem, quàm circumferentia d r

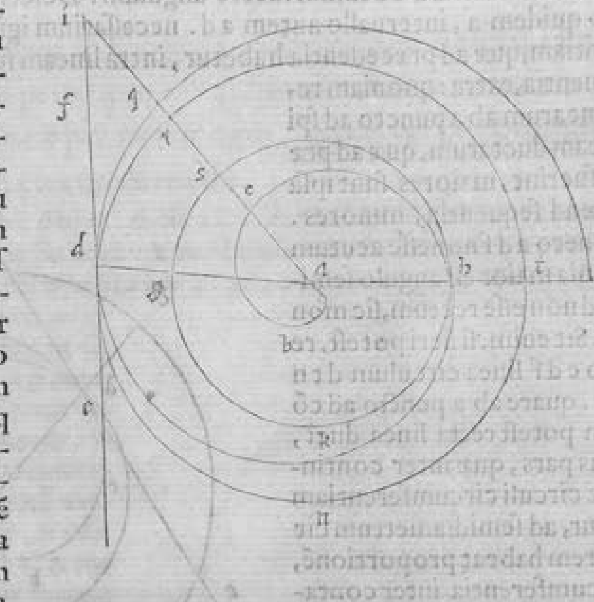


ad d n t circumferentiam. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, D
quàm circumferentia r d n t, ad d n t circumferentiam, hoc est, quàm f g k h cir- E
cumferentia ad circũferentiam g k h. Quam uero proportionem habet f g k h circumferentia ad circumferentiam g k h, eandem habet recta linea a l ad rectam a d,
ut ostensum est. minorem igitur proportionem habet recta linea a i ad a r, quàm l F
a ad a d: quod fieri minime potest, cum sit r a æqualis a d, & i a maior, quàm a l. G
quare angulus a d f non est rectus. sed neque acutus, ut ostensum est. sequitur ergo obtusum esse, & reliquum acutum. Similiter quoque ostendetur idem euenire, & si contingens spiralem lineam, in termino ipsius contingat.

PROPOSITIO XVII.

Si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea: illud idem eueniet.

Contingat enim e f recta spiralem lineam in secunda circulatione descriptam in d puncto: & alia eadem superioribus fiant. Simili ratione circumferentiæ circuli r n d partes, quæ sunt ad præcedentia intra spiralem lineam cadent; quæ aũtem ad sequentia, extra. quare angulus a d f non est rectus, sed obtusus. Sit enim, si fieri potest, rectus. continget ergo linea e f circulum r n d in d puncto. ducatur rursus linea a i ad contingentem, quæ secet spiralem lineam in q, & circumferentiam circuli r n d in r. habeat autem r i ad r a proportionem minorem, quàm d r circumferentia ad totam circumferentiam circuli d r n, & ad ipsam d n t circumferentiam: hoc enim fieri posse iam ostensum est. et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam d n t unà cum tota circuli circũferentia. Sed quam proportionem habet circũferentia r n d t cum tota d n t r circuli circumferentia ad circumferentiam d n t cum tota circuli d n t r circumferentia, eam habet circumferentia ſ g k h cum tota circumferentia circuli h ſ g k ad circumferentiam g k h cum tota h ſ g k circuli circumferentia. Quam uero proportionem habẽt postremo dictæ circũferentiæ, eandem habet recta linea q a ad rectam a d: hoc enim ostensum est. minorem ergo proportioné habet i a ad a r, quàm a q ad a d: quod fieri non potest. est enim r a æqualis a d: ipsa uero i a maior, quàm a q. manifestum est igitur obtusum esse angulum a d f: & idcirco reliquum acutum.



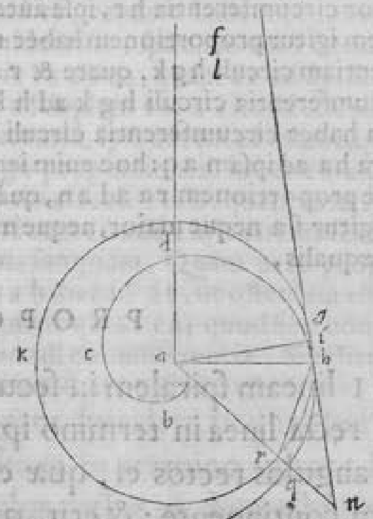
Eadem hæc euenient, & si contingens linea in termino lineæ spiralis contigerit. Similiter autem demonstrabitur, & si lineam spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat recta linea, etiam in termino ipsius, inæquales facere angulos, cum ea, quæ à contactu ad principium lineæ spiralis iuncta est: atque illum quidem, qui ad præcedentia fit, esse obtusum; qui uero ad sequentia acutum.

PROPOSITIO XVIII.

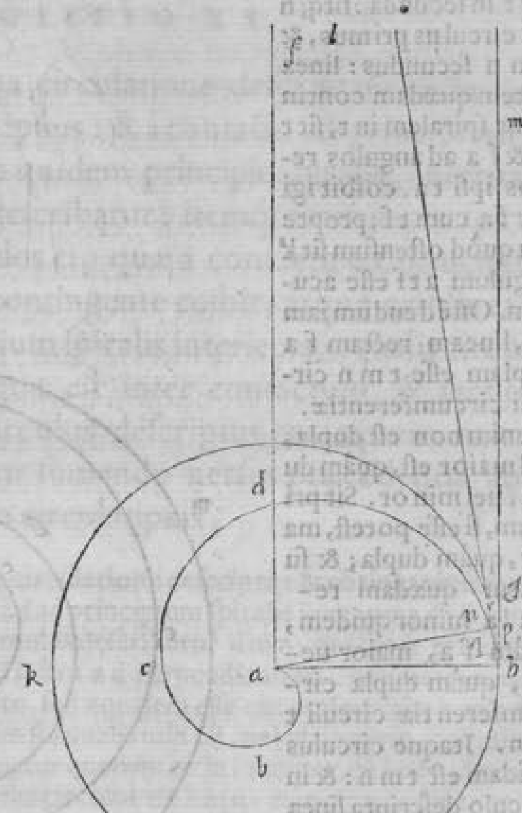
Si lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat in termino ipsius: à puncto autem, quod est principium lineæ spiralis, ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ est principium circulationis: ducta coibit cum contingente: & pars eius, quæ est inter contingentem, & principium lineæ spiralis, æqualis erit primi circuli circumferentiæ.

Sit linea spiralis a b c d, cuius principium punctum a: principium circulationis recta linea h a: & h g k circulus primus: contingat autem h f lineam spiralem in h: & ab a puncto ducatur ad rectos angulos ipsi h a linea a f. coibit ergo ipsa cum h f: quoniam lineæ f h, h a continent angulum acutum. coeat in f. Demonstrandum est, lineam f a circuli h k g circumferentiæ æqualem esse. si enim non est
A æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, si esse potest: et sumatur recta linea l a minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.

h k g. Itaque circulus quidam est h g k: et in circulo linea h g diametro minor:
proportioq;, quem habet h a ad a l maior est ea, quam habet dimidia g h ad lineã B
ab a puncto ad ipsam g h perpendiculari-
ter ductam: quoniã & maior est ea, quam
habet h a ad a f. potest igitur à puncto a C
duci ad productã linea a n: ita ut n r, quæ
interiicitur inter circumferentiam, & li-
neam h n productam, eam proportionem
habeat ad rectam h r, quam habet h a ad
a l. quare n r ad r a eam habebit propor D
tionem, quam h r recta ad ipsam a l. sed
h r ad a l minorem proportionem habet,
quàm h r circumferentia ad h g k circu-
li circumferentiam: recta enim linea h r
minor est h r circumferentia: & a l maior
circumferentia circuli h g k. minorem igi
tur proportionẽ habebit n r ad r a, quàm
h r circumferentia ad h g k circuli circũ-
ferentiam: et idcirco tota n a ad a r mi- E
norem habebit, quàm h r circumferentia
unà cum tota circuli circũferentia ad cir-
cumferentiam circuli h g k. Quam uero F



proportionem habet circumferentia h r, unà cum tota circuli h g k circumferen-
tia ad circumferentiam circuli h g k, eandem habet q a ad a h: hoc enim ostensum
est. minorem ergo proportionem
habet n a ad a r, quàm q a ad a h:
quod fieri non potest, cum n a ma-
ior sit a q, & a r æqualis ipsi h a. nõ
igitur f a maior est h g k circuli cir
cumferentia. Sed sit, si fieri potest,
f a minor circumferentia circuli h
g k: et rursus sumatur linea recta a l
maior quidem, quàm a f; minor ue
ro, quàm h g k circuli circumferen
tia: et à puncto h ducatur linea h m
æquidistans ipsi a f. Rursus h g k cir
culus est: & in circulo linea h g dia-
metro minor: itemq; alia circulum
tangens in h: & proportio, quam G
habet a h ad a l minor est ea, quam
dimidia g h habet ad lineam a b a
puncto ad ipsam g h perpendicula-
riter ductam: quoniã & minor est
ea, quam habet h a ad a f. potest H
igitur ab a puncto duci linea a p ad
contingentem: ita ut r n, quæ inter
rectam lineam in circulo datam, &
circumferentiam interiicitur, ad li
neam h p, partem scilicet contin-
gentis inter ductam, & contactum,
eandem proportionem habeat, quã
h a ad a l. secet autem a p circulum
in puncto r, & lineam spiralem in q.
habebit & permutando eandẽ pro-



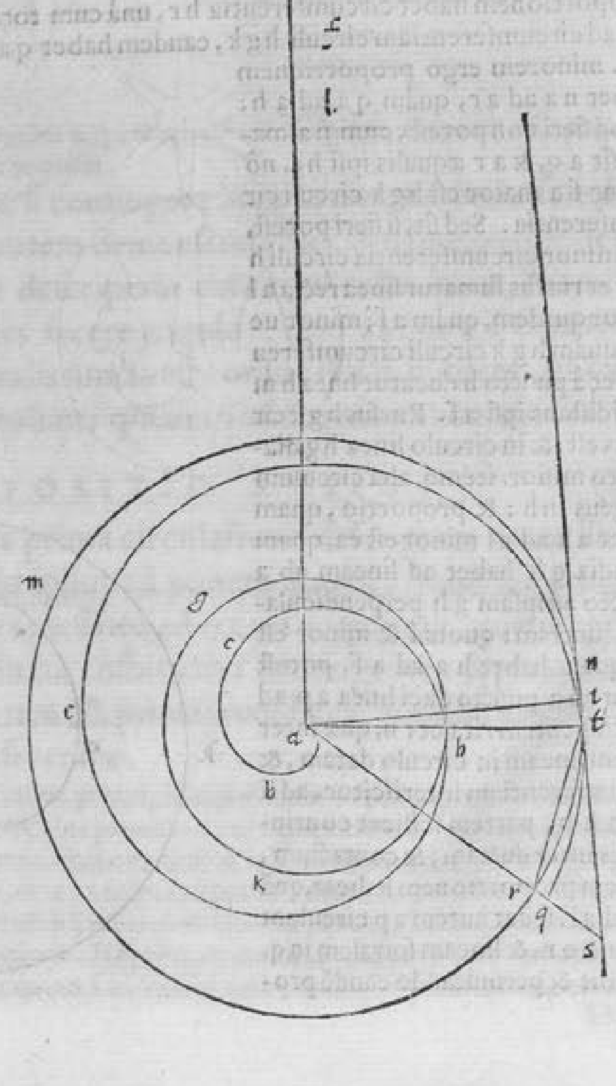
portionem

portionem n r ad r a, quam h p ad a l. sed h p ad a l maiorem proportionem ha-
I bet, quàm h r circumferentia ad h g k circuli circumferentiam, cum sit h p recta
maior circumferentia h r, ipsa autem a l minor h g k circuli circumferentia. ma-
iorem igitur proportionem habet n r ad a r, quàm h r circumferentia ad circum-
K ferentiam circuli h g k. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm
circumferentia circuli h g k ad h k r circumferentiam. Quam uero proportio-
nem habet circumferentia circuli h g k ad circumferentiam h k r, eandem habet
recta h a ad ipsam a q: hoc enim iam ostensum est. ex quibus sequitur maiorem ha-
bere proportionem r a ad a n, quàm h a ad a q: quod quidem fieri non potest. nõ
est igitur f a neque maior, neque minor circuli h g k circumferentia. quare eidem
est æqualis.

PROPOSITIO XIX.

Si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coibit ipsa cum contingente; & erit, quæ inter contingentem, & principium spiralis interiicitur linea, dupla circumferentiæ secundi circuli.

Sit enim linea spiralis a b c h in prima circulatione descripta, & h e t in secunda: sitq; h g k circulus primus, & t m n secundus: linea autem quædam contingens spiralem in t, sit t f: & f a ad angulos rectos ipsi t a. coibit igitur f a cum t f; propterea quòd ostensum sit K angulum a t f esse acutum. Ostẽdendum iam est, lineam rectam f a duplam esse t m n circuli circumferentiæ. Si enim non est dupla, uel maior est, quàm dupla, uel minor. Sit primum, si esse potest, maior, quàm dupla; & sumatur quædam recta l a minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Itaque circulus quidam est t m n: & in circulo descripta linea
A t n diametro minor: & proportio, quam habet t a ad a l maior est



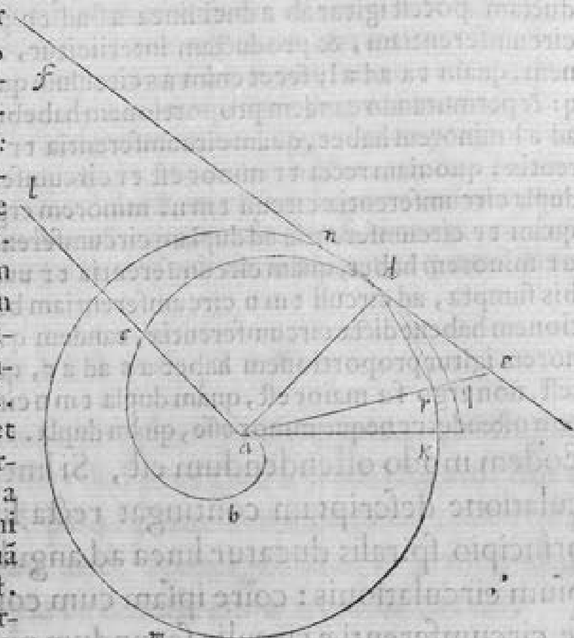
ea, quam dimidia t n habet ad lineam ab a puncto ad ipsam t n perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea a s ad t n productam: ita, ut r s, quæ inter circumferentiam, & productam interiicitur, ad t r, eandem habeat proportionem, quam t a ad a l; secet enim a s circulum quidem in r, spiralem uero lineam in q: & permutando eandem proportionem habebit r s ad t a, quam t r ad a l. sed t r ad a l minorem habet, quàm circumferentia t r ad duplum t m n circuli circumferentiæ; quoniam recta t r minor est t r circumferentia, ipsa autem a l maior, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. minorem ergo proportionem habet r s ad a r, quàm t r circumferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. quare tota s a ad a r minorem habet, quàm circumferentia t r unà cum circuli t m n circumferentia bis sumpta, ad circuli t m n circumferentiam bis sumptam. Quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem q a habet ad a t, ut ostensum est. minorem igitur proportionem habet a s ad a r, quàm q a ad t a; quod fieri non potest. non ergo f a maior est, quàm dupla t m n circuli circumferentiæ. Similiter autem ostendetur neque minor esse, quàm dupla. ex quibus constat duplam esse. B

Eodem modo ostendendum est, Si lineam spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat recta linea in termino ipsius: & à principio spiralis ducatur linea ad angulos rectos ei, quæ est principium circulationis: coire ipsam cum contingente, & multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodem met numero. C

PROPOSITIO XX.

Si lineam spiralem in prima circulatione descriptam recta linea contingat, non in termino ipsius: & à contactu ad principium spiralis linea iungatur: & centro quidem principio spiralis, interuallo autem linea iuncta, circulus describatur: itemq; à principio spiralis ducatur linea ad rectos angulos ei, quæ à contactu ad principium spiralis iuncta est: ipsa cum contingente coibit; atque erit linea inter contingentem, & principium spiralis interiecta, æqualis circumferentiæ descripti circuli, quæ est inter contactum, & sectionis punctum; In quo puncto circulus descriptus principium circulationis secat. circumferentiam sumendo uersus præcedentia ab eo puncto, quod est in principio circulationis.

Sit linea spiralis a b c d in prima circulatione descripta: & cõtingat ipsam quædam recta linea e d f in d puncto: & à d ad principium spiralis iungatur a d: & centro quidem a, interuallo autem a d, circulus describatur d m n, qui secet principium circulationis in k: & ducatur f a, ad ipsam a d perpendicularis. perspicuum quidẽ est, ipsam f a coire cum contingente. sed æqualem esse circumferentiæ k m n d, illud uero demonstrare oportet. Nam si æqualis non est, uel maior erit, uel minor. Sit primũ si esse potest, maior: & sumatur quædam recta l a minor, quàm f a, & maior, quàm circumferentia k m n d. Rursus circulus est k m n: & in circulo linea minor diametro d n: proportioq; quam habet d a ad a l maior est ea, quam dimidia d n habet ad lineam ab a puncto ad ipsam d n perpendiculariter ductam. potest igitur ab a duci linea a e ad n d productam: ita ut e r ad d r eandem habeat proportionem,



nem, quam d a ad a l. quod ostensum est fieri posse. quare e r ad a r eandem habebit proportionem, quam d r ad a l. Sed d r ad a l minorem habet, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d: quoniam recta d r minor est d r circumferentia, & a l maior circumferentia k m d. minorem igitur proportionem habet e r ad a r, quàm d r circumferentia ad circumferentiam k m d. quare & a e ad a r minorem habet, quam circumferentia k m r ad k m d circumferentiã. Quam uero proportionem habet circumferentia k m r ad k m d circumferentiam, eandem habet q a ad a d. unde sequitur, ea ad a r minorem proportionem habere, quã a q ad d a: quod fieri non potest. non ergo recta f a maior est circumferentia k m d. Similiter autem superioribus ostendetur, neque minor esse. æqualis igitur erit.

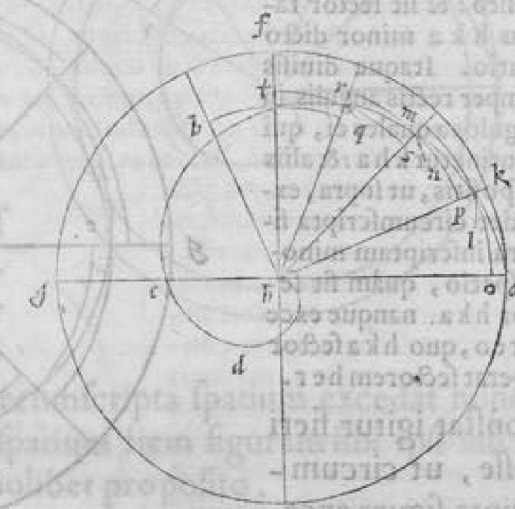
Eodem quoque modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam contingat recta linea, non in termino ipsius: & alia eadem construantur: lineam rectam, quæ inter contingentem, & principium spiralis interiicitur, æqualem esse toti circumferentiæ circuli descripti, & insuper circumferentiæ, quæ inter dicta puncta interiicitur, cricumferentia ipsa similiter sumpta. Et si linea recta spiralem in qualibet circulatione descriptam contingat, non in termino ipsius: & alia eadem construantur: rectam lineam inter dicta puncta interiectam, multiplicem esse circumferentiæ circuli descripti, secundum numerum uno minorem, quàm sit numerus circulationum, & insuper æqualem circumferentiæ inter dicta puncta interiectæ, & similiter sumptæ.

PROPOSITIO XXI.

SVmpto spatio linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis contento, potest figura quædam plana crcumscribi, & altera inscribi ex similibus sectoribus constans: ita ut circumscripta inscriptam excedat spatio minori quocunque proposito spatio.

SIT linea spiralis a b c d in prima circulatione descripta, cuius principium sit punctum h: principium circulationis linea h a: circulus primus f g i a: & lineæ a g, f i diametri ipsius, quæ secent se se ad angulos rectos. diuiso igitur semper angulo recto bifariam, & sectore angulum rectum continente, erit tandem, quod relinquetur

tur ex sectore minus spatio proposito. & sit sector factus a h k minor dicto spatio. Diuidantur præterea anguli quatuor recti in angulos æquales illi, qui continetur a h, h k: & lineæ rectæ facientes angulos ad spiralem lineam ducantur: sitq; punctum l, in quo recta h k spiralem lineam secat: et centro quidem h, interuallo autem h l circulus describatur. cadet igitur circumferentia ipsius, quæ in præcedentia fertur intra lineam spiralem; quæ uero in sequentia, extra. itaque describatur circumferentia o m, ita ut incidat in h a, in puncto o: & in eam, quæ post h k ad spiralem lineam ducta est, in m. Rursus & in quo puncto h m secat spiralem, sit n: et centro h, interualloq; h n circulus describatur, ut incidat in h k, & in eam, quæ post h m ducta est ad spiralem lineam: & similiter per alia puncta, in quibus lineæ æquales angulus facientes secat spiralem lineam, circuli describantur ex h centro, ita ut uniuscuiusquẽ circumferentia, & in præcedentem, & in sequentem lineam incidat. erit iam circa sumptum spatium circumscripta figura ex similibus sectoribus cõstans, & alia eidem inscripta. Circumscriptam uero excedere inscriptam spatio minori, quocunque proposito, ostendetur ad hunc modum. est enim h l o sector æqualis sectori h m l: & h n p sector æqualis ipsi h n r: & h q s ipsi h q t: & aliorum sectorum unusquisque, qui in figura inscripta continentur, æqualis est sectori in figura circumscripta contento, qui commune latus habuerit. Ex quibus sequitur omnes sectores omnibus sectoribus æquales esse. figura igitur spatio inscripta æqualis est figuræ circumscriptæ, dempto h a k sectore: solus enim hic ex omnibus, qui in figura circumscripta continentur, relictus est. Vnde sequitur, circumscriptam figuram excedere inscriptam sectore a k h; qui quidem minor est proposito spatio.



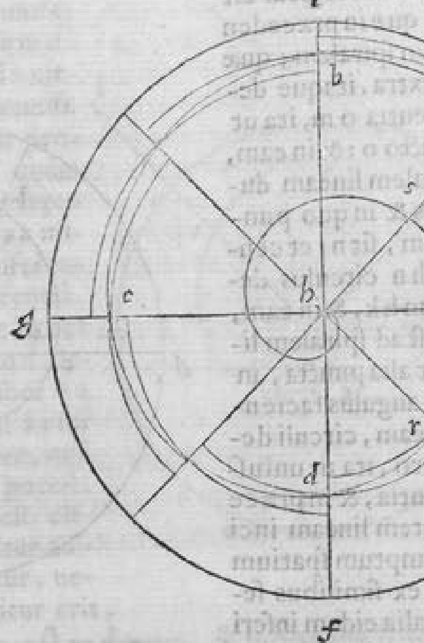
Ex his constat est circa dictum spatium posse circumscribi figuram, qualis dicta est, & rursus alteram eidem inscribi: ita ut circumscripta dictum spatium excedat spatio minori quocunque proposito, & ipsum spatium figuram inscriptam excedat similiter minori quocunque proposito spatio.

PROPOSITIO XXII.

SVmpto spatio linea spirali in secunda circulatione descripta, & recta linea secunda in principio circulationis, contento, potest figura plana circumscribi, & altera inscribi ex similibus sectoribus constans: ita ut circumscripta inscriptam excedat spatio minori quocunque proposito.

SIT linea spiralis a b c d e in secunda circulatione descripta, cuius principium punctum h: principium circulationis recta linea a n: & ipsa ea secunda in principio circulationis. secundus autem circulus sit a f g i: & lineæ a g, f i diametri ipsius secantes se se ad angulos rectos. Rursus diuiso semper angulo recto bifariam, & secto re angulum rectum continente, erit tandem residuũ minus spatio proposito: & sit sector factus h k a minor dicto

A spatio. Itaque diuisis semper rectis angulis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis dispositis, ut supra, excedet circumscripta figura inscriptam minori spatio, quàm sit sector h k a. nanque excedet eo, quo h k a sector superat sectorem h e r.



B Constat igitur fieri posse, ut circumscripta figura excedat sumptum spatium spatio minori quocunque proposito, & rursus spatium excedat figuram sibi ipsi inscriptam minori quocunque proposito spatio. Eodem autem modo constat, sumpto spatio linea spirali in quacunque circulatione descripta, & recta linea in principio circulationis

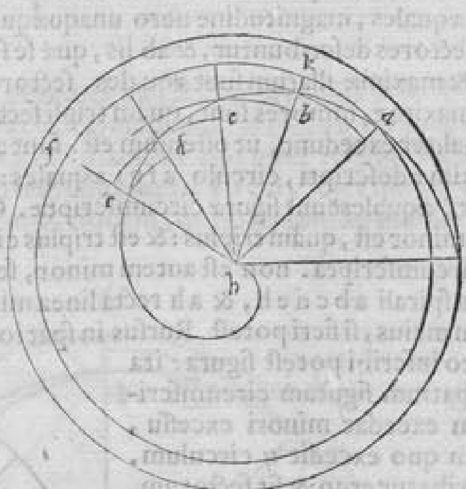
C secundum ipsius numerum nominata, contento, posse circumscribi figuram planam; qualis dicta est, & rursus alteram inscribi: ita ut circumscripta sumptum spatium excedat spatio minori quocunque proposito, & dictum spatium figuram inscriptam excedat minori quocunque proposito spatio.

PROPOSITIO XXIII.

SVmpto spatio contento linea spirali, quæ minor sit ea, quæ in una circulatione describitur, quæq; non habeat terminum principium lineæ spiralis, & contento rectis lineis à principio spiralis ductis, potest figura plana circumscribi, ex similibus sectoribus constans, & altera inscribi: ita ut circumscripta inscriptam excedat spatio minori, quàm sit quodlibet propositum spatium.

SIT linea spiralis a b c d e, cuius termini a e puncta, principium punctum h. & iunctis a h, h e, centro quidem h, interuallo autem h a circulus describatur, qui occurrat lineæ h e in f. Itaque angulo, qui ad h, & sectore a h f, semper bifariam diuiso, erit quod relinquetur, minus spatio proposito. Sit sector a h k minor dicto spatio. similiter autem iis, quæ superius tradita sunt, describantur circuli per puncta,

cta, in quibus lineæ rectæ æquales angulos facientes ad h secant spiralem lineam: ita ut uniuscuiusque circumferentia, & in præcedentem, & in sequentem lineam incidat. erit iam circa spatium linea spirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e, contentum, circumscripta quædam figura plana ex sectoribus similibus constans, & altera eidem inscripta. Circumscripta autem inscriptam excedet spatio minori proposito spatio. est enim sector h a k dicto spatio minor.



Ex hoc manifestum est fieri posse, ut circa dictum spatium figura plana, qualis dicta est, circumscribatur: & rursus altera eidem inscribatur: ita ut circumscripta spatium excedat minori quolibet proposito spatio, & spatium item figuram sibi ipsi inscriptam excedat spatio minori quolibet proposito.

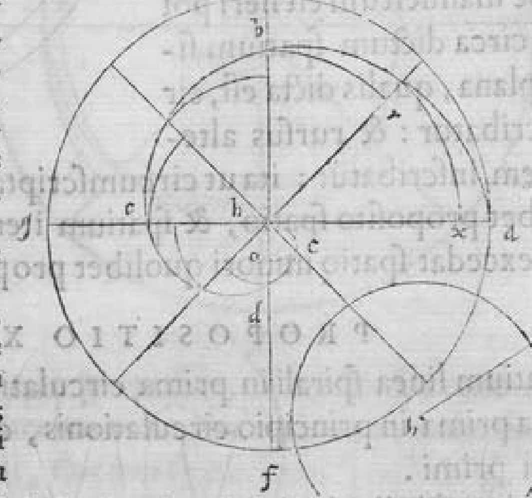
PROPOSITIO XXIIII.

SPatium linea spirali in prima circulatione descripta, & recta linea prima in principio circulationis, contentum, tertia pars est circuli primi.

SIT linea spiralis a b c d e h in prima circulatione descripta, cuius principium punctum h: recta linea h a prima in principia circulationis: & a f g i circulus primus, cuius tertia pars sit circulus in quo y. Ostendendum est, dictum spatium æquale esse circulo y. Si enim non est æquale, uel eo maius erit, uel minus. Sit primum minus, si fieri potest. circa spatium autem linea spirali a b c d e h, & recta a h contentum, circumscribi potest figura plana ex similibus sectoribus constans: ita ut excedat spatium minori excessu, quam quo circulus y dictum spatium excedit. Itaque circumscribatur: & sit sectorum, ex quibus ipsa constat, maximus h a k, & h e o minimus. patet igitur circumscriptam figuram circulo y minorem esse. producantur rectæ lineæ facientes ad h angulos

æquales quousque incidant in circuli circumferentiam. Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam spiralem ductæ, quæ se se æqualiter excedunt; quarum maxima quidem h a, minima uero h e, & minima excessui est æqualis: sunt præterea aliæ

lineæ ab eodem puncto h ductæ ad circuli circumferentiam, numero quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. et ab omnibus similes sectores describuntur, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, & ab iis, quæ inter se, & maximæ illarum sunt æquales. sectores igitur descripti ab iis, quæ sunt æquales maximæ, minores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur ab iis, quæ se se
B æqualiter excedunt, ut ostensum est. sunt autem sectores ab iis, quæ sunt æquales maximæ descripti, circulo a f g i æquales: et qui ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, æquales sunt figuræ circumscriptæ. Quare circulus a f g i figuræ circumscriptæ minor est, quàm triplus: & est triplus circuli ψ. minor est igitur ψ circulus figura circumscripta. non est autem minor, sed maior. non ergo spatium contentum linea spirali a b c d e h, & a h recta linea minus est ψ circulo. Sed neque maius. Sit enim maius, si fieri potest. Rursus in spatio linea spirali a b c d e h, & recta a h contento inscribi potest figura: ita ut spatium figuram circumscriptam excedat minori excessu, quàm quo excedit ψ circulum. Inscribatur ergo: & sit sectorum, ex quibus inscripta figura constat, h r x maximus, & minimus o h e. manifestum est inscriptam figuram ψ circulo maiorem esse. Itaque producantur rectæ lineæ facientes ad h angulos æquales usque ad circuli circumferentiã.



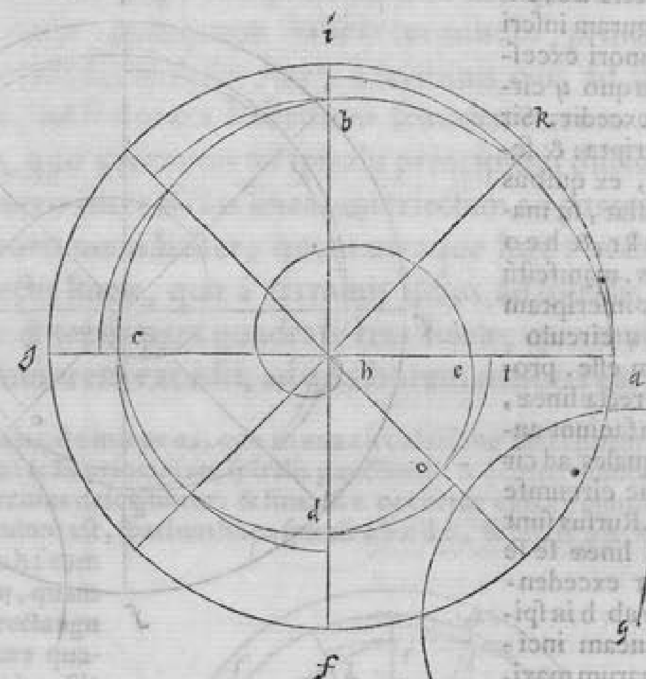
C Rursus sunt quædam rectæ lineæ se se æqualiter excedentes à puncto h ad lineam spiralem ductæ; quarum maxima est h a, & h e minima, & minima excessui est æqualis. Sunt autem & aliæ lineæ ab h ductæ ad a f g i circuli circumferentiam, numero quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæque æqualis maximæ. & ab omnibus similes sectores describũtur, tũ ab iis, quæ inter se, & maximæ sunt æquales, tum ab iis, quæ se se æqualiter excedunt. sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti, maiores sunt, quàm tripli sectorum, qui describuntur à lineis se
D se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima describitur: hoc enim demonstratum iam fuit. Sed sectores descripti à lineis æqualibus maximæ, circulo a f g i sunt æquales: descripti uero à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, æquales sunt figuræ inscriptæ. Circulus igitur a f g i maior est, quàm triplus inscriptæ figuræ. atque idem triplus est circuli ψ. Quare circulus ψ inscripta figura maior est. non est autem, sed minor. non ergo spatium linea spirali a b c d e h, & a h recta contentum, maius est circulo ψ. necesse est igitur eidem æquale esse.

PROPOSITIO XXV.

SPatium linea spirali in secunda circulatione descripta, & recta linea secunda in principio circulationis, contentum, eam proportionem habet ad circulum secundum, quam septem ad duodecim;
A quæ eadem est ei, quam habent hæc utraque: rectangulum contentum semidiametro circuli secundi, & semidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter secundi circuli excedit

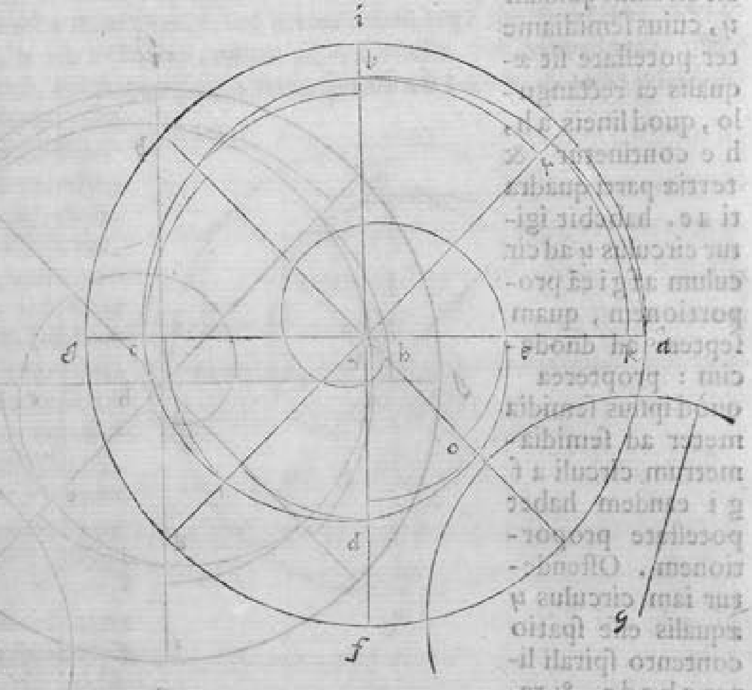
cedit semidiametrum primi, ad quadratum semidiametri secundi circuli.

SIT linea spiralis a b c d e in secunda circulatione descripta, cuius principium punctum h: recta linea h e in principio circulationis prima: & ipsa a e secunda: circulus autem a f g i sit secundus: & lineæ a g, i f diametri eius inter se se ad angulos rectos constitutæ. Ostendendum est, spatium contentum a b c d e linea spirali, & recta a e, ad circulum a f g i eam habere proportionem, quam septem ad duodecim. B



Sit circulus quidam y, cuius semidiameter potestate sit æqualis ei rectangulo, quod lineis a h, h e continetur, & tertiæ parti quadrati a e. habebit igitur circulus y ad circulum a f g i eã proportionem, quam septem ad duodecim: propterea quòd ipsius semidiameter ad semidiametrum circuli a f g i eandem habet potestate proportionem. Ostendetur iam circulus y æqualis esse spatio contento spirali linea a b c d e, & recta a e. Nam si non sit æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, si esse potest. circa spatium igitur potest figura plana circumscribi ex similibus sectoribus constans: ita ut figura circumscripta spatium excedat minori excessu, quàm quo circulus y excedit dictum spatium. Circumscribatur: & sit h a k sector maximus eorum, ex quibus cõstat circumscripta figura, & minimus h o l. manifestum ergo est circumscriptam figuram circulo y minorem esse. producantur lineæ rectæ facientes ad h angulos æquales usque ad circumferentiam circuli secundi. Itaque sunt quædam lineæ se se æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h ductæ in spiralem lineam incidunt; quarum h a maxima est, minima h e. sunt autem & aliæ lineæ à puncto h ad circuli a f g i circumferentiam ductæ, numero quidem illis una minores, magnitudine uero inter se se, & maximæ illarum æquales. & descripti sunt sectores similes à lineis maximæ æqualibus, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt, præterquam ab ea, quæ minima est. sectores igitur à lineis æqualibus maximæ descripti ad sectores descriptos à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraque hæc, ad rectangulum lineis a h, h e contentum, & ad tertiam partem quadrati a e: hoc enim ostensum est. Sed circulus a f g i æqualis est sectoribus, qui fiunt à lineis inter se, & maximæ illarum æqualibus: sectoribus autem, qui à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima fit, æqualis est figura circumscripta. minorem igitur proportionem habet a f g i circulus ad circumscriptam figuram, quam quadratum lineæ a h ad hæc utraque: ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. Quam uero proportionem

portionem habet quadratum a h ad rectangulum a h e; & ad tertiam partem quadrati a e, eandem habet circulus a f g i ad ų circulum. minorem ergo proportionem habet circulus a f g i ad circumscriptam figuram, quàm ad ų circulum. ex quibus sequitur circulum ų minorem esse figura circumscripta. non est autem minor, sed maior. non igitur circulus ų maior est spatio linea spirali a b c d e, & a e recta linea contento. Sed neque minor. sit nanque minor, si esse potest. rursus in spatio linea spirali; & recta a e contento, inscribi potest figura plana ex sectoribus similibus: ita ut spatium contentum a b c d linea spirali, & recta a e, excedat figuram inscriptam minori excessu, quàm quo ų circulum excedit. Sit iam inscripta: & sectorum, ex quibus ipsa constat, sit maximus h k r, & h e o minimus. manifestũ est igitur inscriptam figuram ų circulo maiorem esse. producãtur rectæ lineæ, quæ ad h faciunt angulos æquales ad circuli usque circumferentiam. Rursus sunt quædam lineæ se se æqualiter excedentes, quæ ab h in spiralem lineam incidunt, quarum maxima h a, & h e minima, Sunt etiam aliæ lineæ ab h in circumferentiam circuli incidentes, numero quidem una minores, magnitudine uero, & inter se, & maximæ æquales: descripti quoque sunt sectores similes à lineis æqualiter sese excedentibus, & à lineis æqualibus maximæ. sectores igitur ab æqualibus maximæ descripti ad sectores à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc, ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati ea. est autem figura in spatio inscripta æqualis sectoribus, qui à lineis se se æqualiter excedentibus fiunt, dempto, eo qui à maxima: & cæteris sectoribus æqualis est circulus. maiorem igitur proportionem habet a f g i circulus ad inscriptam figuram, quàm quadratum h a ad rectangulum a h e, & ad tertiam partem quadrati a e. hoc est circulus a f g i ad ų circulum. quare maior est ų circulus figura inscripta: quod fieri non potest: erat enim minor. non ergo neque minor est ų circulus spatio linea spirali a b c d e, & a e recta contento. æqualis est igitur, ut proponebatur.



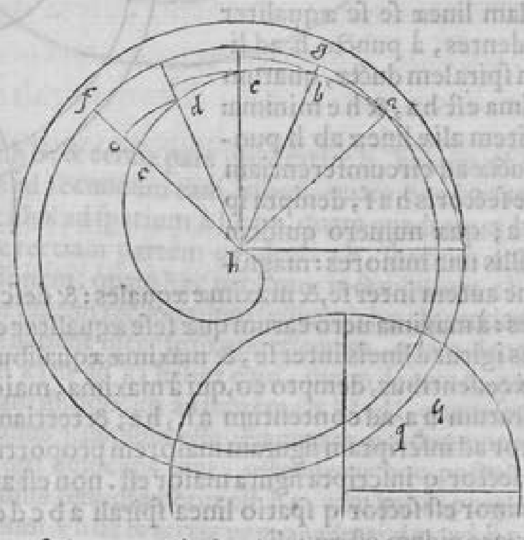
Eodem modo ostendetur, & spatium contentum linea spirali in qualibet circulatione descripta, & recta linea, quæ secundum numerum circulationis dicatur, ad circulum eodem met numero denominatum, eam proportionem habere, quam utraque hæc: rectangulum contentum semidiametro circuli à numero circulationis dicti,

cti, & semidiametro circuli dicti à numero, qui sit uno minor nume ro circulationis: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua semidiameter circuli maioris excedit semidiametrum minoris; ad quadratum semidiametri maioris circuli. G

PROPOSITIO XXVI.

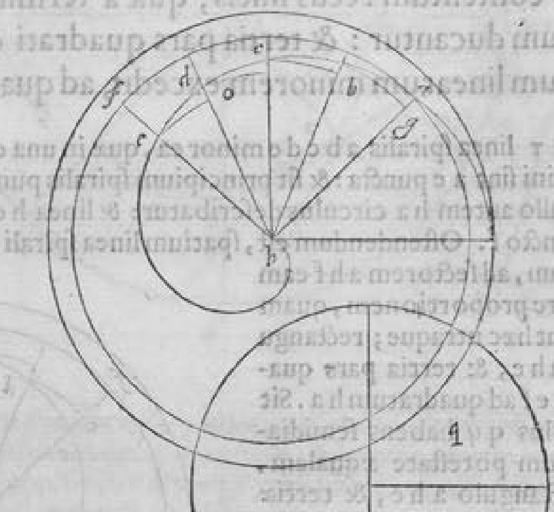
SPatium contentum linea spirali, quæ sit minor ea, quæ in una circulatione describitur; quæq; non habeat terminum, principium lineæ spiralis, & contentum rectis lineis à terminis eius ad spiralis principium ductis, ad sectorem habentem semidiametrum æqualem maiori earum, quæ à terminis ad spiralis principium ductæ sunt, circumferentiam uero inter dictas lineas interiectam ad partes lineæ spiralis, eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum contentum rectis lineis, quæ à terminis ipsius ad spiralis principium ducantur: & tertia pars quadrati eius lineæ, qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earundē.

SIT linea spiralis a b c d e minor ea, quæ in una circulatione describitur; cuius termini sint a e puncta: & sit principium spiralis punctum h: & centro quidem h, interuallo autem h a circulus describatur: & linea h e occurrat eius circumferentiæ in puncto f. Ostendendum est, spatium linea spirali a b c d e, & rectis a h, h e contentum, ad sectorem a h f eam habere proportionem, quam habent hæc utraque; rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f ad quadratum h a. Sit circulus q y habens semidiametrum potestate æqualem, & rectangulo a h e, & tertiæ parti quadrati e f. ad centrum autem ipsius sit angulus æqualis angulo ad h, constituto. sector igitur q y ad h a f sectorem eandem proportionem habet, quam rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f habent ad quadratum h a: horum enim semidiametri inter se se eandem habent potestate proportionem. Ostendetur iam q y sector æqualis spatio linea spirali a b c d e, & rectis lineis a h, h e contento. Nam si non est æqualis: uel maior erit, uel minor. Sit primum, si esse potest, maior. circa spatium igitur potest figura plana circumscribi ex sectoribus similibus constans: ita ut excedat ipsum minori excessu, quàm quo q y sector dictum spatium excedit. Sit iam circumscripta; & sectorum, ex quibus ipsa constat, maior quidem sit h a g; minor uero h o d. manifestum est, circumscriptam figuram sectore q y minorem esse. producantur rectæ lineæ, quæ faciunt ad h angulos æquales, usque ad circumferentiam sectoris h a f. Itaque lineæ quædam sunt



æqualiter

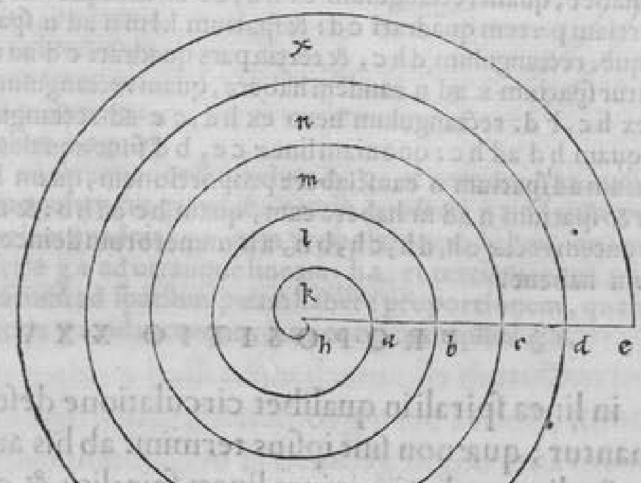
æqualiter se se excedentes, à puncto h ad spiralem lineam ductæ, quarum maxima h a, & h e minima. sunt autem & aliæ lineæ numero quidem una minores illis, magnitudine uero inter se, & maximæ æquales; quæ ab h ductæ in sectoris a h f circumferentiam incidunt, dempta linea h f. descriptiq; sunt similes sectores ab omnibus, & ab iis, quæ inter se, & maximæ illarum sunt æquales, & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt: ab ipsa uero h e nihil est descriptum. sectores igitur à lineis inter se, & maximæ æqualibus descripti ad sectores à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à minima, minorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad utraque hæc: ad rectangulum a h e; & tertiam partem quadrati e f. Sed sectoribus quidem, qui à lineis inter se, & maximæ æqualibus describuntur, æqualis est h a f sector; illis uero, qui à lineis se se æqualiter excedentibus, circumscripta figura est æqualis. minorem ergo proportionem habet h a f sector ad circumscriptam figuram, quàm quadratum h a ad hæc utraque: ad rectangulum a h e; & ad tertiam partem quadrati e f. Quam uero proportionem habet quadratum h a ad dicta spatia, eandem sector h a f habet ad sectorem q y. quare sector q y minor est figura circumscripta. atqui minor non est, sed maior. non igitur sector q y maior erit spatio linea spirali, a b c d e, & h a, h e rectis lineis contento, Sed neque erit minor, Sit enim minor, si esse potest, & alia eadem fiant. Rursus in spatio potest figura plana inscribi ex similibus sectoribus: ita ut dictum spatium figuram inscriptam excedat minori excessu, quàm quo q sectorem excedit. Inscribatur: & sit sectorem, ex quibus ipsa constat, maior quidem h b g; minor uero o h e. manifestum est igitur inscriptam figuram maiorem esse q sectore. Rursus sunt quædam lineæ se se æqualiter excedentes, à puncto h ad lineam spiralem ductæ, quarum maxima est h a, & h e minima: sunt item aliæ lineæ ab h puncto ductæ ad circumferentiam usque sectoris h a f, dempta ipsa h a; quæ numero quidem sunt illis una minores: magnitudine autem inter se, & maximæ æquales: & descripti sunt ab unaquaque similes sectores: à maxima uero earum quæ sese æqualiter excedunt, nihil est descriptum. sectores igitur à lineis inter se, & maximæ æqualibus, ad sectores à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a ad contentum a h, h e; & tertiam partem quadrati e f. quare & h a f sector ad inscriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm ad q sectorem, ergo sector q inscripta figura maior est. non est autem maior, sed minor. neque igitur minor est sector q spatio linea spirali a b c d e, & a h, h e rectis lineis contento. quare eidem est æqualis.



PROPOSITIO XXVII.

Spaciorum lineis spiralibus, & rectis, quæ in circulationibus sunt, contentorum, tertium quidem secundi duplum est; quartum triplum; quintum quadruplum; & semper sequens secundum numerus, numeros, qui deinceps sunt, secundi est multiplex. primum uero spatium sexta pars est secundi.

Sit proposita linea spiralis, & in prima circulatione descripta, & in secunda, & in cæteris quotlibet: Sitq; eius principium punctum h: & h e recta linea, principium circulationis: spatiorum autem primum sit k; secundum l; tertium m; quartum n; & quintum x. Ostendendum est, spatium k sextam partem esse eius, qui sequitur: & m spatium duplum esse ipsius l: & n triplum eiusdem: & eorum, qui deinceps sunt, semper id, quod sequitur, multiplex esse spatii l secundum numeros sequentes. At uero k sextam partem esse ipsius l sic ostendetur. Quoniam spatium



kl ad secundum circulum, ostensum est eam habere proportionem, quam septem ad duodecim: secūdus autem circulus ad primum est, sicut duodecim ad tria; quod manifeste patet: & circulus primus ad spatium k, sicut tria ad unū: erit spatiū k sexta pars ipsius l. A Rursus spatium klm ad tertium circulū eam habere proportioné ostensum est, quam utraque hæc: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, habent ad quadratum c h: tertius autem circulus ad secundum eam habet, quam quadratum c h ad h b quadratum: & secundus circulus ad spatium k l eam, quam quadratum b h ad hæc utraque: rectangulum b h a; & tertiam partem quadrati a b. spatium ergo k l m ad ipsum k l eam habet proportionem, quam hæc utraque: rectangulum c h b; & tertia pars quadrati c b, ad utraque illa: ad rectangulum scilicet b h a; & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter se proportionem, quam decem & nouem ad septem. quare & spatium k l m ad k l habet eam, quam decem & nouem ad septem. ergo m ad k l eam, quam duodecim ad septem: & k l ad l, quam septem ad sex. unde sequitur m spatium ipsius l duplum esse. Ea autem quæ sequuntur habere proportionem numerorum, qui deinceps sunt, ostendetur hoc pacto. Spatium enim k l m n x ad circulum, cuius semidiameter est h e, eam habet proportionem, quam utraque hæc: rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad h e quadratum. circulus autem, cuius semidiameter est h e, ad circulum, cuius semidiameter h d habet eam, quam quadratum h e ad quadratum h d: & circulus, cuius semidiameter h d ad spatium k l m n eam, quam quadratum h d ad utraque: ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c. & spatium igitur k l m n x ad spatium k l m n eam habet proportionem, quam rectangulum e h d; & tertia pars quadrati d e, ad rectangulum d h c; & tertiam partem quadrati d c; & diuidendo x spatium ad k l m n eam habet, quam excessus, quo rectangulum e h d unà cum tertia parte quadrati d e, excedit rectangulum d h c unà cum tertia parte quadrati d c, ad rectangu

C lum dhc; & tertiam partem quadrati dc. Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum ehd excedit rectangulum dhc: hoc est eo, quod dh, ce lineis continetur. spatium igitur x ad klmn spatium eam habet proportionem, quam rectangulum contentum hd, ce, ad rectangulum dhc; & tertiam partem quadrati cd. Per hæc eadem ostendetur, & n spatium ad klm eam proportionem habere, quam rectangulum ex hc, bd, ad utraque: ad rectangulum chb; & tertiã

D partem quadrati cb. quare spatium n ad klmn eam habet, quam rectangulum ex hc, bd, ad rectangulum chb, & ad tertiam partem quadrati cb unà cum rectan-

E gulo ex hc, bd. & conuertendo. Hæc autem æqualia sunt rectangulo dhc; & tertiæ parti quadrati cd. Quoniam igitur x spatium ad spatium klmn eam proportionem habet, quam rectangulum ex hd, ce ad utraque hæc; ad rectangulum dhc; & ad tertiam partem quadrati cd: & spatium klmn ad n spatium habet eam, quam utraque: rectangulum dhc, & tertia pars quadrati cd ad rectangulum ex hc, bd: sequitur spatium x ad n eandem habere, quam rectangulum ex hd, ce ad rectangu

F lum ex hc, bd. rectangulum uero ex hd, ce ad rectangulum ex hc, db eam habet, quam hd ad hc: quoniam lineæ ce, bd sunt æquales. manifestum est igitur

A x spatium ad spatium n eam habere proportionem, quam hd ad hc. similiter ostẽdetur & spatium n ad m habere eam, quam hc ad hb: & m ad l, quam bh ad ah. lineæ autem rectæ eh, dh, ch, bh, ah numerorum deinceps sumptorum proportionem habent.

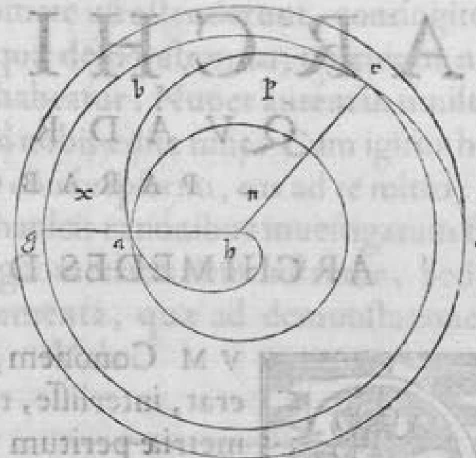
PROPOSITIO XXVIII.

Si in linea spirali in qualibet circulatione descripta duo puncta sumantur; quæ non sint ipsius termini: ab his autem punctis iungantur rectæ lineæ ad principium lineæ spiralis: & centro quidem lineæ spiralis principio, interuallo autem dictis lineis circuli describantur: spatium contentum circumferentia maioris circuli, quæ inter rectas lineas interiicitur; & linea spirali interiecta inter easdem; & recta linea producta, eam habebit proportionem ad spatium contentum minoris circuli circumferentia, & eadem linea spirali, & recta terminos ipsarum iungente, quàm semidiameter minoris circuli unà cum duabus tertiis excessus, quo semidiameter circuli maioris excedit semidiametrum minoris, habet ad semidiametrum minoris unà cum tertia eiusdem excessus.

Sit linea spiralis abcd in una circulatione descripta: & in ipsa sumantur duo puncta ac: sitq; h principium spiralis: & à punctis ac iungantur rectæ lineæ ad h: & centro quidem h, interuallis autem ah, hc circuli describantur. Ostendendum est, x spatium ad spatium p eandem habere proportionem, quam utraque linea: ha, & duæ tertiæ ga ad utranque lineam: ha & tertiam ipsius ga. spatium enim n p ad sectorem gch ostensum est eam proportionem habere, quam habet rectangu

A lum gha, & tertia quadrati ag, ad quadratum gh. Quare x spatium ad np eam habet, quam rectangulum hag cum duabus tertiis quadrati ga ad utraque hæc: & ad rectangulum ahg; & ad tertiam partem quadrati ga. et quoniam spatium np ad npx sectorem eam proportionem habet, quam utraque hæc: rectangulum ahg; & tertia quadrati ga, ad quadratum hg: sector autem npx ad sectorem n eam habet, quam hg quadratum ad quadratum ha: habebit & spatium np ad sectorem n eandem, quam utraque: rectangulum ahg; & tertia quadrati ga ad quadratum ha.

spatium



ſpatium igitur n p ad ipſum p eam habet proportionem, quam utraque: & rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Itaque quoniam x ſpatium ad ſpatium n p eam proportionem habet, quam utraque: rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g h a, et tertiam quadrati g a. ipſum autem n p ad p habet eam, quam utraque: rectangulum g h a; et tertia quadrati g a ad utraque: ad rectangulum g a h, et tertiam quadrati g a. habebit et x ſpatium ad p eandem, quam utraque: rectangulum h a g; et duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque: rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a. Vtraque uero hæc: rectangulum h a g; et duæ tertiæ quadrati g a ad utraque: ad rectangulum h a g; et tertiam quadrati g a, eam proportionem habet, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque lineam: h a; et tertiam ipſius g a. manifeſtum eſt igitur, x ſpatium ad ſpatium p eam habere proportionem, quam utraque linea: h a; et duæ tertiæ g a ad utranque, h a, et tertiam ipſius g a.

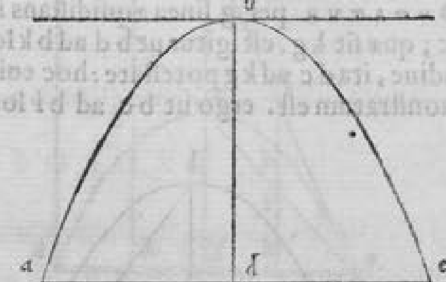
ARCHIMEDIS
QVADRATVRA PARABOLES.

ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

CVM Cononem, qui solus ex amicis mihi superrat, interiisse, teq; eo familiariter usum, & geometriæ peritum esse audissem: mortem quidem Cononis grauiter, molesteq; tuli, ut & hominis amici; & artium, ac disciplinarum cognitione plane admirabilis: ad te uero, ut ad Cononem antea constitueram, unum ex geometricis theorematibus mittere decreui. quod cum nemo ante hac attigerit, nunc à nobis pertractatum est: mechanicis illud quidem primum rationibus inuentum, postea uero geometricis etiam demonstratum. Nonnulli quidem ante nos in geometria uersati tentarunt ostendere, quomodo spatium rectilineum inueniri posset, quod aut dato circulo, aut circuli portioni datæ esset æquale. Deinde & spatium totius coni sectione, & recta linea contentum quadrare conati sunt: sumentes ad hæc lemmata, quæ non facile concedantur. Quæ quidem tanquam à compluribus non inuenta, plane refutata, ac reiecta sunt. Portionem uero rectanguli coni sectione, & recta linea contentam, nemo ex antiquis, quòd sciam, quadrare aggressus est; quod nunc à nobis est inuentum. siquidem demonstrauimus, omnem portionem, quæ recta linea, & rectanguli coni sectione continetur, sesquitertiam esse trianguli basim habentis portioni eandem, & æqualem altitudinem; sumpto ad demonstrationem huiusmodi lemmate, Inæqualium spatiorum excessus, quo maius superat minus; fieri posse, ut sibi ipsi coaceruatus quodlibet propositum, definitumq; spatium excedat. Hoc ipso autem lemmate & priores geometræ usi sunt, cum scilicet demonstrarunt, circulos inter se se proportionem habere duplam eius, quæ est suarum diametrorum: itemq; sphæras habere triplam eius, quæ est axium proportionem: omnem præterea pyramidem tertiam partem esse prismatis, quod eandem basim habeat pyramidi, & æqualem altitudinem: & omnem insuper conum tertiam partem esse cylindri eandem ipsi basim habentis, & altitudinem æqualem,

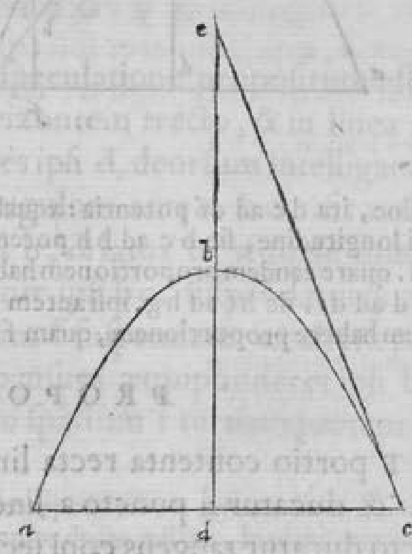
æqualem, similiter proposito lemmate usi ostenderunt. contingitq; ut prædictorum theorematum, quæ demonstrantur, unicuique non minor, quàm ipsi lemmati fides habeatur. Nuper autem in similem huius fidem adduximus ea, quæ à nobis edita sunt. Cum igitur huius theorematis demonstrationes conscripserim, eas ad te mitto: ac primum quidem, quomodo mechanicis rationibus inuestigatum fuerit: postea uero quomodo etiam geometricis demonstretur. Sed & præmittuntur conica quidem elementa, quæ ad demonstationem hanc maxima necessaria sunt. Vale.

PROPOSITIO I.



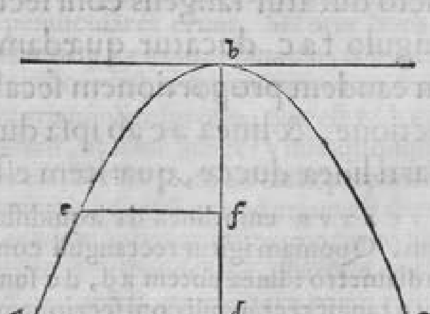
Si sit rectanguli coni sectio a b c: & linea b d sit æquidistans diametro, uel ipsa diameter: linea autem a d c æquidistans lineæ coni sectionem tangenti in puncto b: erunt ipsæ lineæ a d, d c inter se æquales. Quòd si a d, d c sint æquales: linea a d c æquidistans erit lineæ in b puncto coni sectionem tangenti.

PROPOSITIO II.



Si sit rectanguli coni sectio a b c: sit autem linea b d æquidistans diametro, uel ipsa diameter: & a d c æquidistans lineæ in puncto b coni sectionem tangenti: tangat quoque c e linea coni sectionem in puncto c: erunt lineæ d b, b e inter se æquales.

PROPOSITIO III.



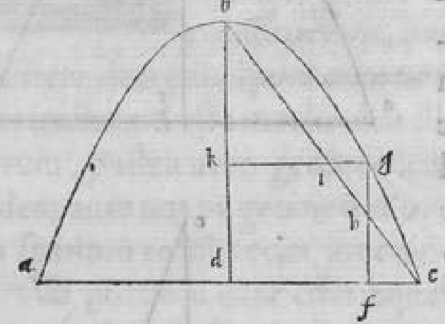
Si sit rectanguli coni sectio a b c: sitq; b d, uel æquidistans diametro, uel ipsa diameter: & ducantur quæpiam lineæ a d, e f æquidistantes lineæ tangenti coni sectionem in puncto b: erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad e f potestate.

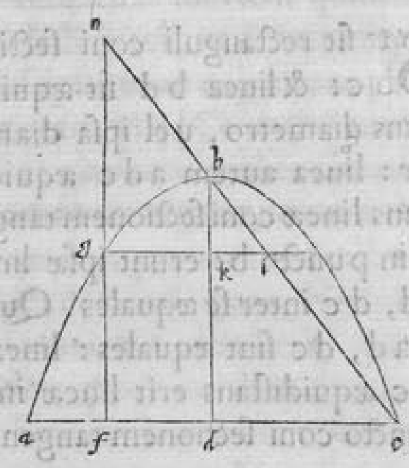
DEMONSTRATA autem sunt hæc in elementis conicis.

PROPOSITIO IIII.

SIT portio contenta linea recta, & rectanguli coni sectione a b c: ipsa autem b d à medio lineæ a c educatur diametro æquidistans,
A aut ipsa diameter: & b c iuncta producatur. Itaque si alia quæpiam linea f h ducatur æquidistans ipsi b d, & secans utrasque a c, c b: habebit f h ad h g eandem proportionem, quam d a ad d f.

B DVCATVR per g linea æquidistans ipsi a c; quæ sit k g. est igitur ut b d ad b k lon
A gitudine, ita d c ad k g potestate: hoc enim
C demonstratum est. ergo ut b c ad b i lon-





gitudine, ita d c ad d f potentia: æquales nanque sunt d f, k g. et idcirco sicut b c ad b i longitudine, sic b c ad b h potentia, proportionales igitur sunt lineæ b c, b h, b i. quare eandem proportionem habet b c ad b h, quam c h ad h i. est igitur sicut c d ad d f, sic h f ad h g. ipsi autem d c æqualis est d a, constat ergo d a ad d f eandem habere proportionem, quam f h ad h g.

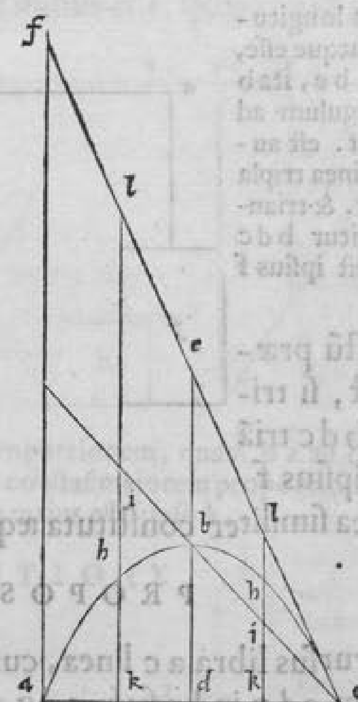
PROPOSITIO V.

SIT portio contenta recta linea, & rectanguli coni sectione a b c: & ducatur à puncto a linea a f æquidistans diametro; & à c puncto ducatur tangens coni sectionem in c, quæ sit c f. si igitur in triangulo f a c ducatur quædam linea æquidistans ipsi a f: secundum eandem proportionem secabitur linea ducta à coni rectanguli sectione, & linea a c ab ipsa ducta; pars uero lineæ a c, quæ est ad a, parti lineæ ductæ, quæ item est ad a proportione respondebit.

A DVCATVR enim linea d e æquidistans ipsi a f: et secet primum lineam a c bifariam. Quoniam igitur rectanguli coni sectio est a b c: et ducta est b d æquidistans diametro: lineæ autem a d, d c sunt æquales inter se se: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni sectionem ipsi a c æquidistans. Rursus quoniam d e

æquidistans

æquidistans est diametro: & a puncto
c ducta est c e tangens sectionem co
ni in c: ipsa autem d c æquidistat lineæ
tangenti in b: æqualis erit e b ipsi b
d. quare eandem habet proportionē
a d ad d c, quam d b ad b e. Si qui-
dem igitur bifariam secat ducta linea
ipsam a c: ostensum est propositum.
sin minus, ducatur alia quædam linea
k l æquidistans ipsi a f. ostendendum
est eandem habere proportionem a
k ad k c, quam k h ad h l. Quoniam C
enim æqualis est b e ipsi b d: æqualis
est & i l ipsi k i: eandem igitur pro-
portionem habet i l ad k i, quam d
c ad d a: habet autem & k i ad h k D
eandem, quam d a ad a k: hoc enim
in antecedente est demonstratum.
quare eandem habet proportionem E
k h ad h l, quam a k ad k c: quod de-
monstrandum proponebatur.

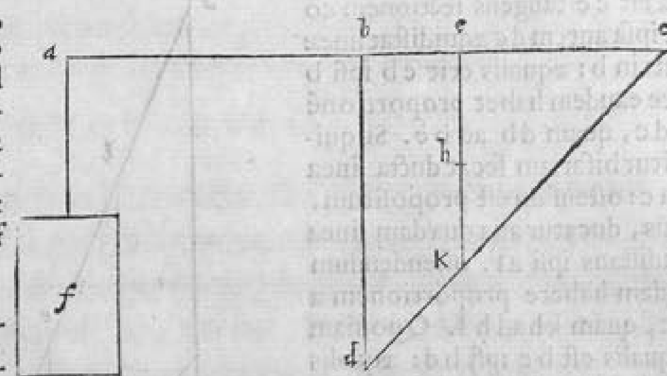


PROPOSITIO VI.

INtelligatur autem hoc, quod in speculatione propositum est: & A
sit conspectum in plano super horizontem erecto, & in linea a b:
deinde ea, quæ sunt ad easdem partes ipsi d, deorsum intelligantur;
& quæ ad contrarias, sursum. triangulum autem b d c sit rectan-
gulum, rectum habens angulum ad b, & latus b c æquale dimidio
libræ; linea scilicet a b æquali existente ipsi b c. suspendaturq; trian
gulum ex punctis b c: & aliud spatium f suspendatur ex altera parte
libræ in puncto a: ita ut f in a suspensum æquiponderet ipsi b d c
triangulo, ut nunc constituto. Dico spatium f tertiam partem esse
trianguli b d c.

QVONIAM enim positum est, libram æquiponderare: erit a c linea ipsi hori- A
zonti æquidistans. lineæ autem ad rectos angulos ductæ ipsi a c, in plano erecto su-
per horizontem, & ipsæ ad horizontem perpendiculares erunt. Secetur linea b c
in puncto e: ita ut c e ipsius e b sit dupla: ducaturq; k e æquidistans d b, & bifariam
secetur in h. erit trianguli b d c centrum grauitatis ipsum h punctum: nam demon B
stratum est hoc in mechanicis. Si igitur b d c trianguli suspensio, quæ est ad b c sol- C
uatur, & suspendatur ad e: manebit triangulum, ut nunc habet: Vnumquodque e-
nim suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cum in linea perpendicu-
lari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi: quod etiam est demon
stratum. Itaque quoniam triangulum b c d eandem habet constitutionem ad librā:
æquiponderabit similiter f spatium. & quoniam æquiponderant, spatium quidem D
f suspensum ad a; triangulum autem b d c ad e: constat, ea ex altera parte respon-
dere

dere ipsis longitudinibus, atque esse, ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad spatium f. est autem a b linea tripla ipsius b e. & triangulum igitur b d c triplum est ipsius f spatii.

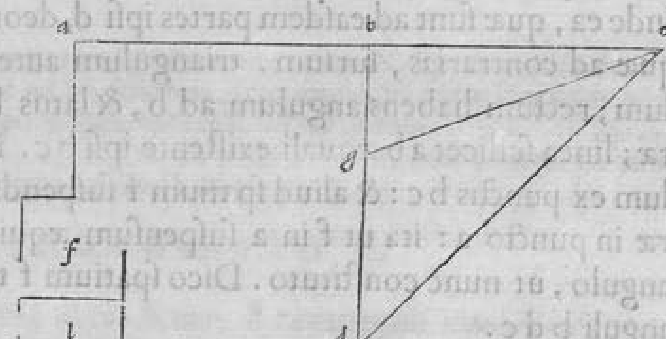


Manifestũ præterea est, si triplũ. sit b d c triãgulum ipsius f spatii: ea similiter constituta æquiponderare.

PROPOSITIO VII.

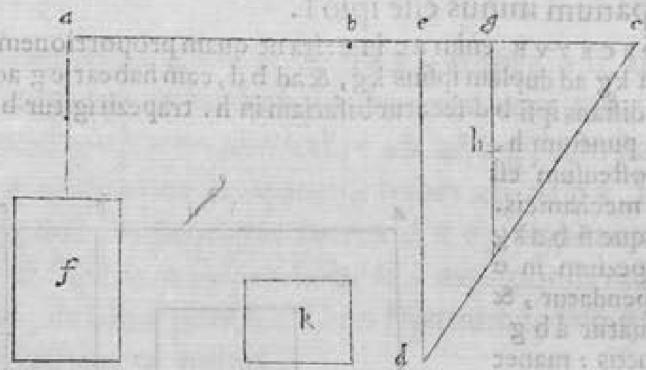
SIT rursus libra a c linea, cuius medium b: & suspendatur triangulum c d g in b: sitq; c d g triangulum obtusiangulum, basim habens lineam d g, & altitudinem æqualem dimidiæ libræ: & suspendatur triangulum d c g ex punctis libræ b c: spatium autem f suspensum ex a, æquiponderet ipsi triangulo c d g: ita ut nunc, posito. Similiter ostendetur spatium f tertiam partem esse c d g trianguli.

SVSPENDATVR enim & aliud spatium l ex a, quod quidem sit tertia pars trianguli b c g. æquiponderabit igitur b d c triangulum spatio f l. Et quoniam triangulum b c g æquiponderat spatio l: triangulum autem b c d ipsi f l: & tertia pars est f l trianguli b c d: constat & triangulum c d g spatii f triplum esse.



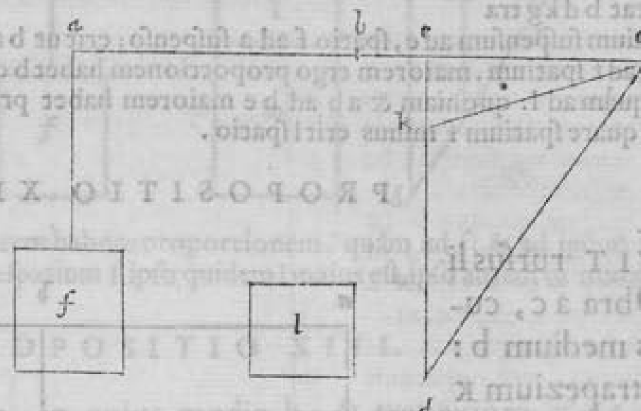
PROPOSITIO VIII.

SIT libra a c, cuius medium b: & suspendatur in b triangulum rectangulum c d e, rectum angulum habens ad e, & suspendatur ex c e punctis libræ: spatium autem f suspendatur ex a, & æquiponderet triangulo c d e: ita ut nunc, constituto: & quam proportionem habet a b ad b e, habeat triangulum c d e ad spatium K. Dico co f ſpatium triangulo quidem c d e minus eſſe, ſpatio autẽ K maius.



Svmatvr enim trianguli d e c centrũ grauitatis, quod ſit h: & ducatur h g æquidiſtans ipſi d e. Quoniam igitur æquiponderat c d e triangulum ſpatio f: eandem habet proportionem c d e ad f, quam linea a b ad ipſam b g. quare minus eſt f ſpatiũ triangulo c d e. & quoniam c d e triangulum ad f quidem eam habet proportionem, quam b a ad b g; ad ipſum autem k habet eam, quam b a ad b e: conſtat maiorem proportionem habere c d e triangulum ad k, quam ad f. quare maius eſt f ipſo k.

PROPOSITIO IX



SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & triangulum c d K obtuſiangulum, baſim habens d K, & altitudinem e c: & ſuſpendatur ex punctis libræ e c: ſpatium uero f ſuſpenſum ex a æquiponderet triangulo d c K ita habenti, ut nunc habet: & quam proportionem habet a b ad b e, eam triangulum c d K habeat ad ſpatium l. Dico f ſpatium ipſo quidem l maius eſſe, triangulo autem d c K minus.

Demonstrabitvr hoc ſimiliter antecedenti.

PROPOSITIO XI.

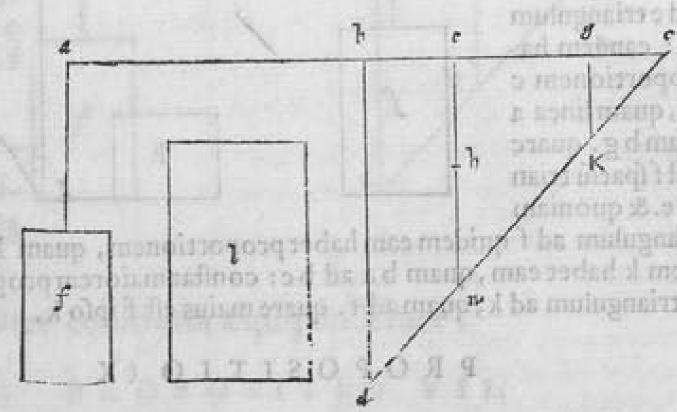
SIT rurſus a b c libra, cuius medium b; & trapezium b d K g, quod ad puncta quidem b g angulos rectos habeat, latus uero d e in ipſum c tendens: & quam proportionem habet b a ad b g, eam habeat trapezium b d K g ad ſpatium l: ſuſpendaturq; trapezium ex libra in punctis b g: & f ſpatium ſuſpendatur in a, quod æqui-

F ponderet

ponderet ipſi trapezio b d K g ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f ſpatium minus eſſe ipſo l.

SECETVR enim a c in e: ita ut quam proportionem habet dupla ipſius d b, & ipſa k g ad duplam ipſius k g, & ad b d, eam habeat e g ad b e: & per e ducta e n æquidiſtans ipſi b d ſecetur bifariam in h. trapezii igitur b d k g centrum grauitatis

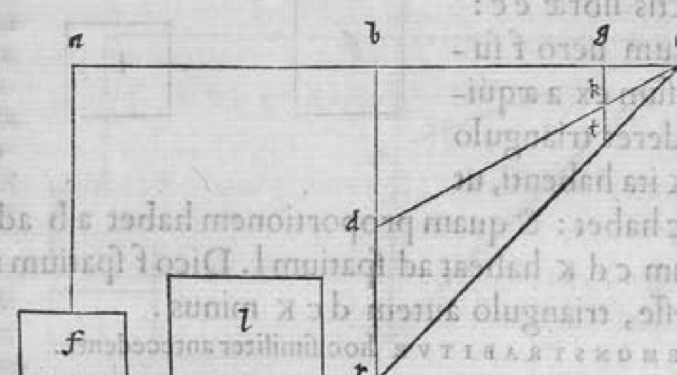
A eſt punctum h, ut oſtenſum eſt in mechanicis. Itaque ſi b d k g trapezium in e ſuſpendatur, & ſoluatur à b g punctis: manet eandem habens cõſtitutionem; ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt: & æquiponderabit ſpatio f. Quoniam igitur æquiponderat b d k g trapezium ſuſpenſum ad e, ſpatio f ad a ſuſpenſo: erit ut b a ad b e, ita trapezium b d k g ad f ſpatium. maiorem ergo proportionem habet b d k g trapezium ad ſpatium f, quàm ad l: quoniam & a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm ad b



9.quinti g. quare ſpatium f minus erit l ſpatio.

PROPOSITIO XI.

SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & trapezium K d t r latera quidem K d, t r habens in c tendẽtia, ipſa autem d r K t perpendicularia ad b c: cadatq; d r in b, & K t in g: Quam uero proportionem habet a b ad b g, habeat trapezium d K t r ad ſpatium l: & ſuſpendatur trapezium ex libra in punctis b g, & f ſpatium in a: & æquiponderet ſpatium f trapezio d K t r, ſic habenti, ut nunc habet. ſimiliter iis, quæ dicta ſunt, oſtendetur ſpatium f minus eſſe ſpatio l.

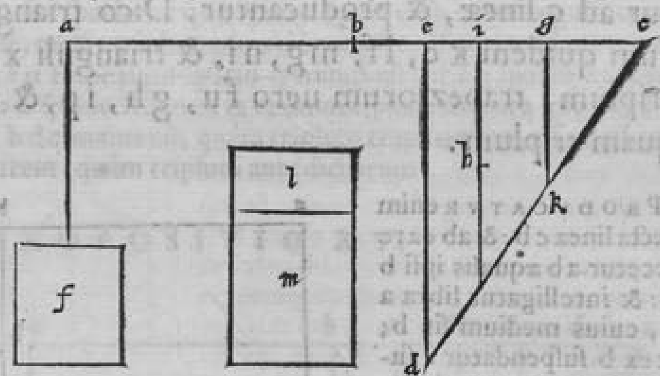


PROPOSITIO

PROPOSITIO XII.

SIT rurſus libra a c, cuius medium b: & d e K g trapezium, angulos quidem ad puncta e g rectos habens, latera autem K d, e g tendentia ad c; & quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat trapezium d K e g ad ſpatium m: quamq; habet a b ad b e, habeat trapezium d K e g ad l. ſuſpendatur autem d K e g trapezium ex libra in punctis e g: & f ſpatium ſuſpendatur in a æquiponderans ipſi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur. Dico f ſpatium ſpatio quidem l maius eſſe, ipſo autem m minus.

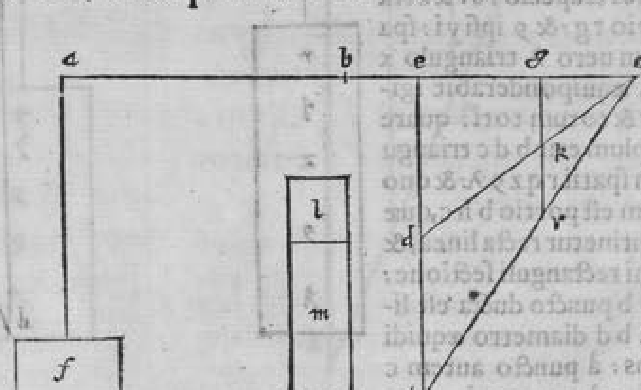
SVMATVR enim trapezii d k e g centrum grauitatis, quod ſit h. (ſumetur autem ſicuti prius): & ducatur h i ipſi d e æquidiſtans. Si igitur trapezium ſuſpendatur ex libra ad i punctum: & ab ipſis e g punctis ſoluatur: manet eandem habens conſtitutionem, & æquiponderabit f ſpatio: ex iis quæ ſuperius dicta ſunt. Itaque quoniam trapezium ſuſpenſum ad i æquiponderat ſpatio f ad a ſuſpenſo: eandem habebit proportionem trapezium ad f, quam a b ad b i. manifeſtum ergo eſt



trapezium d k e g ad l maiorem habere proportionem, quàm ad f; & ad ipſum m minorem, quàm ad f. quare ſpatium f ipſo quidem l maius eſt, ipſo autem m minus.

PROPOSITIO XIII.

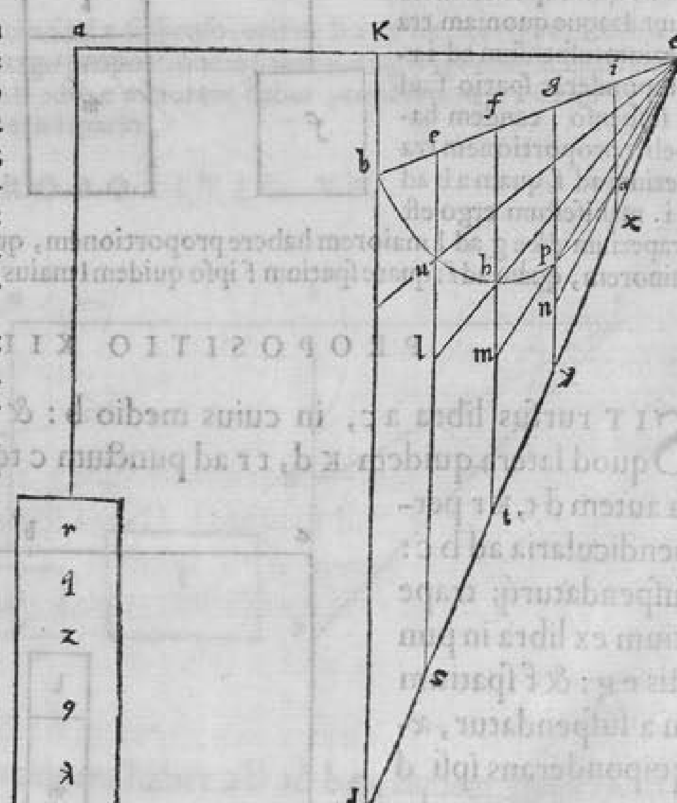
SIT rurſus libra a c, in cuius medio b: & trapezium K d t r, quod latera quidem K d, t r ad punctum c tendentia habeat, ipſa autem d t, K r perpendicularia ad b c: ſuſpendaturq; trapezium ex libra in punctis e g: & f ſpatium in a ſuſpendatur, æquiponderans ipſi d K t r trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: & quam proportionem habet a b ad



b e, eam trapezium d K t r habeat ad l ſpatium. quam uero habet a b ad b g, eandem habeat idem trapezium ad ſpatium m. ſimiliter antedictis, oſtendetur f ſpatium, ſpatio l maius, & ipſo m minus.

PROPOSITIO XIIII.

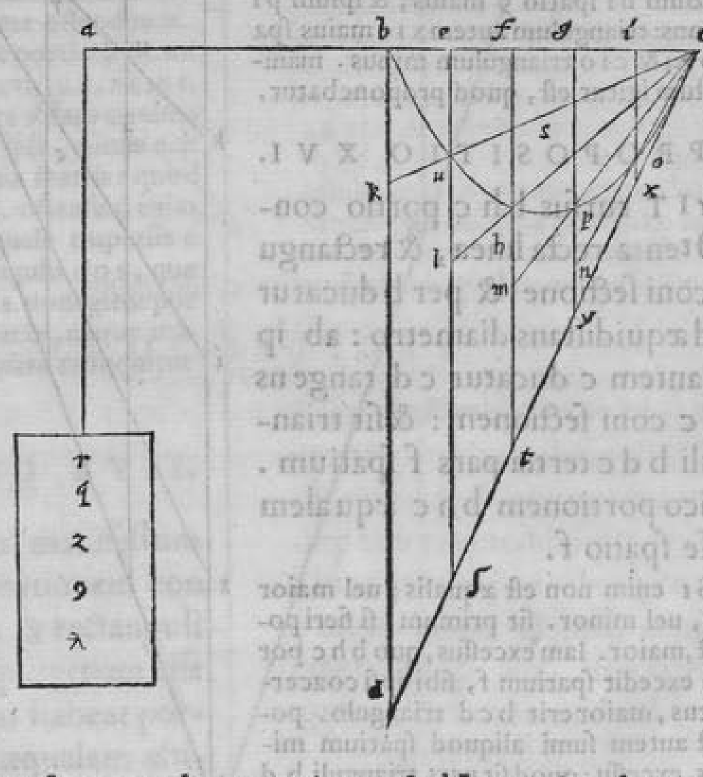
SIT portio b h c contenta recta linea, & rectanguli coni ſectione: ſit autem prius linea b c ad angulos rectos ipſi diametro: & ducatur à puncto quidem b linea b d diametro æquidiſtans; à puncto autem c ipſa c d, tangens coni ſectionem in c. erit igitur triangulum b c d rectangulum. ſecetur etiam b c in partes quotcunque b e, e f, f g, g i, i c: & à ſectione ducantur diametro æquidiſtantes e s, f t, g y, i x; a punctis autem, in quibus hæ ſecant coni ſectionem ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico triangulum b d c trapeziorum quidem K e, l f, m g, n i, & trianguli x i c minus eſſe, quàm triplum; trapeziorum uero f u, g h, i p, & i o c trianguli maius, quàm triplum.



PRODVCATVR enim recta linea c b: & ab ea reſecetur a b æqualis ipſi b c: & intelligatur libra a c, cuius medium ſit b; & ex b ſuſpendatur: ſuſpendatur quoque b d c triangulum ex libra ad puncta b c: & ex altera parte ad a ſuſpendantur ſpatia r q z 9 λ: & æquiponderet r ſpatium trapezio d e, ita habenti: & ſpatium q æquiponderet trapezio f s: & z trapezio t g: & 9 ipſi y i: ſpatium uero λ triangulo x i c. æquiponderabit igitur & totum toti. quare triplum erit b d c triangulum ſpatii r q z 9 λ: & quoniam eſt portio b h c, quæ continetur recta linea, & coni rectanguli ſectione: & à b puncto ducta eſt linea b d diametro æquidiſtans: à puncto autem c ipſa c d tangens in c rectanguli coni ſectionem: ducta eſt præterea, & alia

quædam linea s e æquidiſtans diametro: eandem habet proportionem b c ad b e, B
quam s e ad e u. quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipſum C
k e. ſimiliter oſtendetur b a ad b f eandem habere proportionem, quam trapezium s f ad l f; & ad b g eandem, quam t g ad m g; ad b i uero eandem quam y i ad n i. Quoniam igitur trapezium d e angulos quidem ad puncta b e, rectos habet; latera autem ad c punctum tendentia: & æquiponderat ſpatium r ſuſpenſum ex libra in pũcto a ipſi trapezio ita habenti, ut nunc ponitur: eſtq; ut b a ad b e, ita d e trapezium ad k e: maius erit k e ſpatium ſpatio r; hoc enim oſtenſum eſt. Rurſus & tra- D
pezium f s ad puncta f e angulos rectos habet, & latus s t tendens ad c: ipſi autem ita habenti, ut nunc habet, æquiponderat q ſpatium ex libra ſuſpenſum in a: & eſt E
ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u; & ut a b ad b f, ita f s trapezium ad ipſum l f. ſpatium igitur q trapezio quidem l f minus eſt, trapezio autem f u ma- F
ius; nanque & hoc eſt oſtenſum. Eadem ratione & z ſpatium minus eſt trapezio m g, & trapezio h g maius: & ſpatium 9 trapezio y i minus, & maius ipſo p i: ſimili- G
ter etiam λ ſpatium triangulo x i c minus eſt, & triangulo c i o maius. Itaque quoniam trapezium k e maius eſt r ſpatio: & l f trapezium maius ſpatio q: & m g ſpatio z: et n i ipſo 9: triangulum autem x i c ſpatio λ: manifeſtum eſt et omnia dicta ſpatia ſpatio r q z 9 λ eſſe maiora. ſed ſpatium r q z 9 λ tertia pars eſt b c d trianguli. trian- 6.huius
gulum igitur b c d minus eſt, quàm triplum trapeziorum k e, l f, m g, n i, et trianguli x i c. Rurſus quoniam f u trapezium ſpatio q minus eſt: et h g ſpatio z: et p i ipſo 9: triangulum uero i o c ſpatio λ: conſtat et omnia ſpatia minora eſſe λ 9 z q ſpatio. Quare triangulum b d c maius eſt, quàm triplum trapeziorum u f, h g, i p, et i c o trianguli: minus autem, quàm triplum antedictorum.

PROPOSITIO XV.

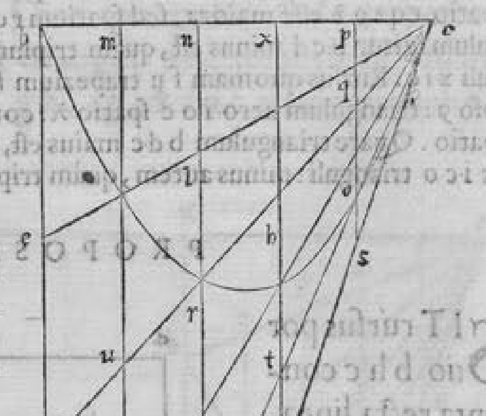


SIT rurſus portio b h c contenta recta linea, & coni rectanguli ſectione: & non ſit linea b c ad angulos rectos ipſi diametro. neceſſarium eſt, uel lineam à puncto b æquidiſtantem diametro ductã ad eaſdem partes ſectioni, uel ductam à puncto c, obtuſum angulum continere cũ ipſa b c. Sit autem ad b, quæ obtuſum angulum continet: & à b puncto ducatur

linea

linea b d diametro æquidistans: & ab ipsa c ducatur c d tangens coni sectionem in c: seceturq; b c in partes æquales quotcunque, b e, e f, f g, g i, i c: & à punctis e f g i ducantur æquidistantes diametro e s, f t, g y, i x, à punctis uero, in quibus secant coni sectionem, ducantur ad c lineæ, & producantur. Dico & nunc quoque triangulum b d c trapeziorum quidem b u, l f, m g, n i, & trianguli c i x minus esse, quàm triplum; ipsorum autem f u, g h, i p, & c o i trianguli maius, quàm triplum.

PRODVCATVR d b in alteram partem: atque ad ipsam à puncto c ducatur perpendicularis c k: & sumatur lineæ c k æqualis a k. Intelligatur autem rursus libra a c, cuius medium sit k: & suspendatur ex k: suspendaturq; triangulum c k d ex dimidia libra in c k punctis: ita ut nunc ponitur: & ex altera parte suspendantur in a puncto spatia r q z 9 λ: & æquiponderet spatium r trapezio d e, sic habenti, ut nunc positum est: & q æquiponderet f s trapezio: & z trapezio t g: & 9 ipsi y i: & λ, c i x, triangulo; æquiponderabit
A autem & totum toti. quare d b c trian
B gulum triplum erit spatii r q z 9 λ. similiter, ut prius, ostendetur b u trape-
C zium spatio r maius: & trapezium h e maius spatio q: trapezium autem f u minus eodem: & trapezium m g maius spatio z, & ipsum g h minus: & insuper trapezium n i spatio 9 maius, & ipsum p i minus: triangulum autem x i c maius spatio λ; & c i o triangulum minus. manifestum igitur est, quod proponebatur.

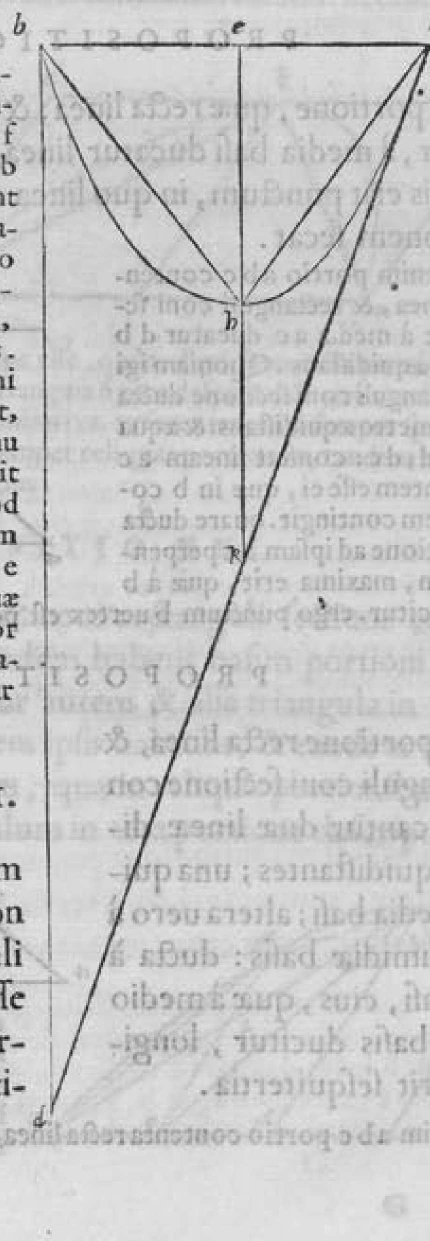


PROPOSITIO XVI.

SIT rursus b h c portio contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: & per b ducatur b d æquidistans diametro: ab ipso autem c ducatur c d tangens in c coni sectionem: & sit trianguli b d c tertia pars f spatium. Dico portionem b h c æqualem esse spatio f.

SI enim non est æqualis; uel maior est, uel minor. sit primum, si fieri potest, maior. Iam excessus, quo b h c portio excedit spatium f, sibi ipsi coacer-
A uatus, maior erit b c d triangulo. potest autem sumi aliquod spatium minus excessu; quod sit pars trianguli b d c. sitq; b c e triangulum, & minus dicto

excessu, & pars trianguli b d c. erit & b e pars eadem ipsius b d. Itaque diuidatur B
b d in totidem partes, & diuisionum puncta sint g i k: & ab ipsis g i k ad c lineæ iun
gantur. secabunt hæ coni sectionem, cum c d ipsam tangat in c. per puncta autem
sectionum ducantur lineæ æquidistantes diametro m u, n r, x h, quæ & æquidistantes
erunt ipsi b d. Quoniam igitur triangulum b c e minus est excessu, quo b h c por-
tio excedit f spatium: patet utraque hæc, spatium f, & triangulum b c e minora es
se ipsa portione. triangulo autem b c e æqualia sunt trapezia, per quæ coni sectio
permeat, uidelicet m e, u l, h r, h o, & triangulum c o s: nam trapezium m e com
mune est: & trapezium m l æquale trapezio u l: & trapezium l x æquale trapezio h
r: & q x ipsi o h: & triangulum c q p triangulo c o s. spatium ergo f minus est tra C
peziis m l, x r, p h, & triangulo p o c. Sed triangulum b d c triplum est spatii f. qua
re b d c triangulum minus est, quàm triplum trapeziorum m l, x r, p h, & p o c trian
guli: quod fieri minime potest: ostensum est enim maius, quàm triplum. non igitur D
portio b h c maior est f spatio. Dico etiam neque esse minorem. nam si fieri potest,
sit minor. Rursus excessus, quo spatium f excedit b h c portionem, ipse sibi ipsi
coaceruatus maior est triangulo b d c. Itaque potest sumi spatium minus dicto ex-
cessu, quod sit pars b d c trianguli: sitq; triangulum b c e minus excessu; & pars trianguli b c d: & alia eadem construantur. Quoniam igitur b c e triangulum minus est excessu, quo spatium f excedit b h c portionem: triangulum b e c, & portio b h c, utraque minora sunt spatio f. est autem spatium f minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s: nam triangulum b d c ipsius f triplum est; & dictorum spatiorum minus, quàm triplum, ut proxime ostendimus. triangulum ergo b c e, & portio b h c minora sunt quadrilateris e m, u n, z x, p t, & c p s triangulo. quare ablato communi, uidelicet portione ipsa, minus erit triangulum c b e residuis spatiis: quod quidem fieri non potest. ostensum enim est b e c triangulum æquale trapeziis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s, quæ sunt maiora dictis spatiis. non igitur portio b h c minor est f spatio, neque maior, ut ostensum est. quare relinquitur eidem esse æqualem.



PROPOSITIO XVII.

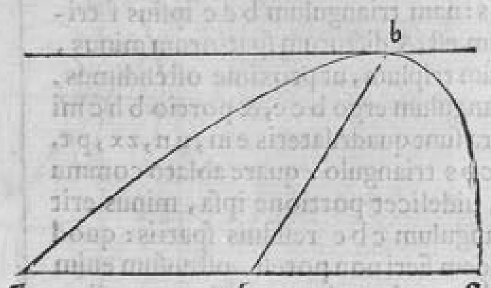
HOC ostenso manifestum est, omnem portionem contentam recta linea, & rectanguli coni sectione, sesquitertiam esse trianguli, qui basim habeat portioni eandem, & æqualem altitudinem.

SIT enim portio contenta recta linea & rectanguli coni sectione, cuius uertex h punctum: & in ipsa inscribatur triangulum b h c eandem basim habens portioni, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h uertex est portionis: recta li
A nea ab h ducta æquidistans diametro bifariam secat ipsam b c; & b c æquidistans est lineæ sectionem tangenti in h. ducatur autem e h linea æquidistans diametro: & à pũ cto b ducatur b d eidem æquidistans: & à c ipsa c d tangens coni sectionem in c. Itaque quoniam k h æquidistat diametro: ipsa autem c d tangit sectionem in c: &
B e c æquidistat lineæ sectionem tangenti in h: triangulum b d c quadruplum est triangu li b h c. & quoniam triangulum b d c ipsius b h c portionis est triplum: patet b h c portionem sesquitertiam esse trianguli b h c.

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur, basim uoco ipsam rectam; altitudinem uero, maximam perpendicularem à curua linea ad basim usque portionis ductam; & uerticem, punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

PROPOSITIO XVIII.

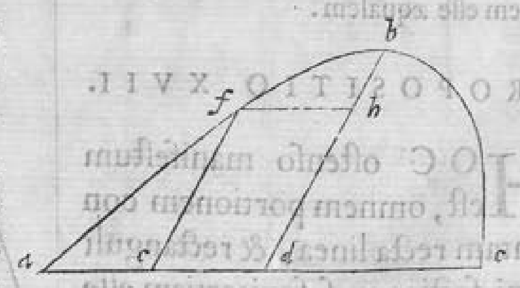
SI in portione, quæ recta linea, & rectanguli coni sectione continetur, à media basi ducatur linea diametro æquidistans: uertex portionis erit punctum, in quo linea diametro æquidistans ducta coni sectionem secat.



SIT enim portio a b c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: & à media a c ducatur d b diametro æquidistans. Quoniam igitur in rectanguli coni sectione ducta est d b diametro æquidistans: & æqua
A les sunt a d, d c: constat lineam a c æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit. quare ductarum a sectione ad ipsam a c perpendicularium, maxima erit, quæ à b puncto ducitur. ergo punctum b uertex est portionis.

PROPOSITIO XIX.

SI in portione recta linea, & rectanguli coni sectione contenta ducantur duæ lineæ dimetro æquidistantes; una quidem à media basi; altera uero à medio dimidiæ basis: ducta à media basi, eius, quæ à medio dimidiæ basis ducitur, longitudine erit sesquitertia.



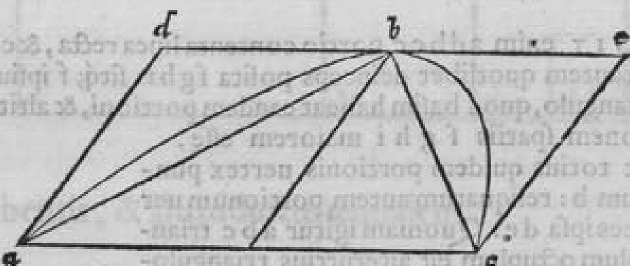
SIT enim a b c portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: & ducan tur

tur æquidistantes diametro, linea quidem b d à media a c, ipsa autem e f à media a d: ducatur quoque f h æquidistans ipsi a c. Quoniam igitur in coni rectanguli sectione linea b d diametro æquidistans ducta est: ipsæ autem a d, f h æquidistantes sunt lineæ contingenti in b: manifestum est eandem habere proportionem b d ad b A h longitudine, quam a d ad f h potestate. quadrupla igitur est & b d ipsius b h longitudine. ex quo patet, sexquitertiam esse longitudine b d ipsius e f.

PROPOSITIO XX.

Si in portione recta linea, et coni rectanguli sectione contenta triangulum describatur, eandem portioni basim habens, & altitudinem eandem: maius erit descriptũ triangulũ dimidio portionis.

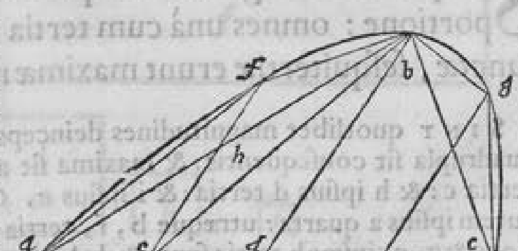
Sit enim portio a b c, qualis dicta est: & in ipsa describatur triangulum a b c eandem, quam tota portio basim habens, & æqualem altitudinem. quoniam igitur triangulum basim habet eandem portioni, & altitudinem eandem: necesse est b pun A ctum uerticem esse portionis. æquidistans est igitur linea a c lineæ in b pũcto sectionem tangenti. Ducatur d e per b, æqui distaus ipsi a c: & à punctis a c æquidistantes diametro ducantur a d, c e. cadent igitur ipsæ extra sectionem. & quoniam a B b c triangulum dimidium est parallelogrammi a d e c: patet maius esse, quàm dimidium dictæ portionis. qua C re fieri potest, ut in hac portione multiangula figura describatur: ita ut reliquæ portiones quolibet proposito spatio sint minores. auferentes enim semper spatium maius dimidio: & propterea minuentes semper reliquas portiones, tandem eas quolibet spatio proposito minores reddemus.



PROPOSITIO XXI.

Si in portione recta linea, & coni rectanguli sectione contentã triangulum describatur, eandem habens basim portioni, & altitudinem eandem: describantur autem & alia triangula in reliquis portionibus, quæ basim eandem ipsis habeant, & eandem altitudinem: alterutrius triangulorum, quæ in reliquis portionibus describuntur, octuplum erit triangulum in tota portione descriptum.

Sit a b c portio, qualis dicta est: & secetur a c bifariam in d: ducatur autem b d æquidistans diametro. ergo punctum b uertex est portionis: & A propterea a b c triangulum eandem habet portioni basim, & altitudinem eandem. Rursus secetur bifariam a d in puncto e: & ducatur e f diametro æqui distans: secetur præterea a b in h. pun B ctum igitur f uertex est portionis a f

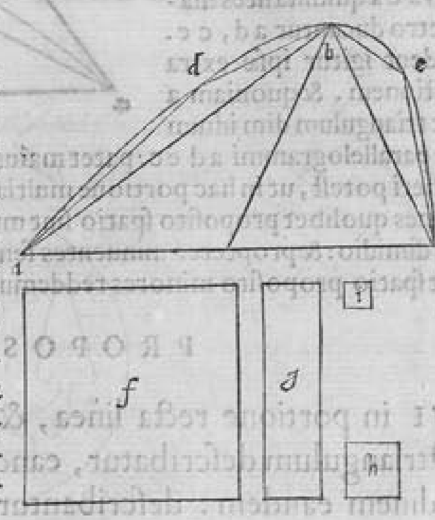


b. & triangulum a f b eandem basim habet a f b portioni, & eandem altitudinem.
C Ostendendum est, triangulum a b c octuplum esse trianguli a f b. est enim b d ipsius quidem e f sesquitertia: ipsius autem e h dupla. dupla est igitur e h ipsius h f. quare & a e b triangulum duplum est trianguli f b a, nam triangulum a e h trianguli a h f est duplum: & h b e item duplum ipsius f h b. triangulum ergo a b c trianguli a f b octuplum est. Similiter quoque ostendetur octuplum esse trianguli in portione b g c descripti.

PROPOSITIO XXII.

Si sit portio contenta recta linea, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet in quadrupla proportione deinceps ponantur: & sit maximum eorum æquale triangulo, quod basim habeat portioni eandem, & eandem altitudinem: omnia dicta spatia minora erunt ipsa portione.

Sit enim a d b e c portio contenta linea recta, & coni rectanguli sectione: spatia autem quotlibet deinceps posita f g h i: sitq; f ipsius g quadruplum, & æquale triangulo, quod basim habeat eandem portioni, & altitudinem eandem. Dico portionem spatiis f g h i maiorem esse.



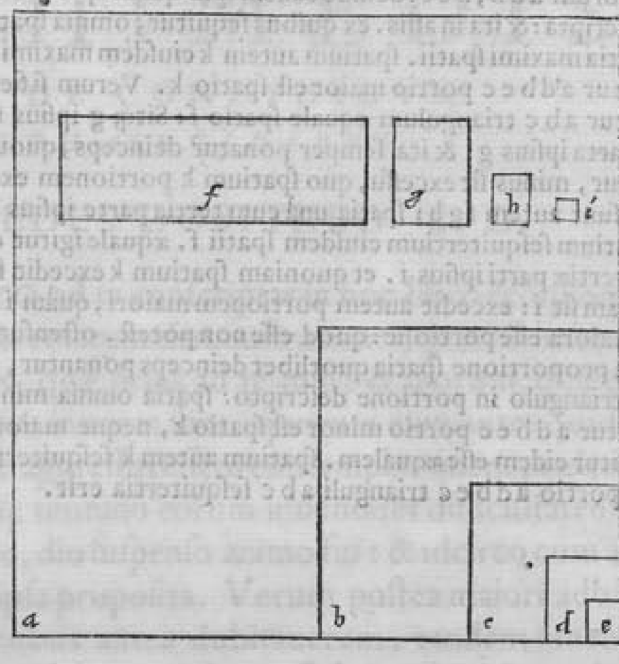
Sit totius quidem portionis uertex punctum b: reliquarum autem portionum uertices ipsa d e. Quoniam igitur a b c triangulum octuplum est alterutrius triangulorum a d b, b e c: constat quadruplum esse utrorumque. & quoniam a b c triangulum æquale est spatio f: erunt & triangula a d b, b e c spatio g æqualia. Similiter autem ostendetur, & triangula in reliquis portionibus descripta, eandemq; basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse: & demum triangula descripta in posterioribus portionibus æqualia esse spatio i. Omnia igitur proposita spatia æqualia erunt figuræ cuipiam multiangulæ in portione descriptæ. quare manifestum est ea esse minora ipsa portione.

PROPOSITIO XXIII.

Si quotlibet magnitudines ponantur deinceps in quadrupla proportione: omnes unà cum tertia parte minimæ illarum inter se iunctæ, sesquitertiæ erunt maximæ magnitudinis.

Sint quotlibet magnitudines deinceps positæ a b c d e, quarum unaquæque quadrupla sit consequentis: & maxima sit a: sit autem f tertia pars ipsius b: & g tertia c: & h ipsius d tertia: & i ipsius e. Quoniam igitur f ipsius b tertia est: b autem ipsius a quarta: utræque b, f, tertia pars sunt ipsius a. Eadem quoque ratione & g, c, ipsius b tertia sunt: & h d ipsius c: & i e ipsius d. Quare omnes magnitudines

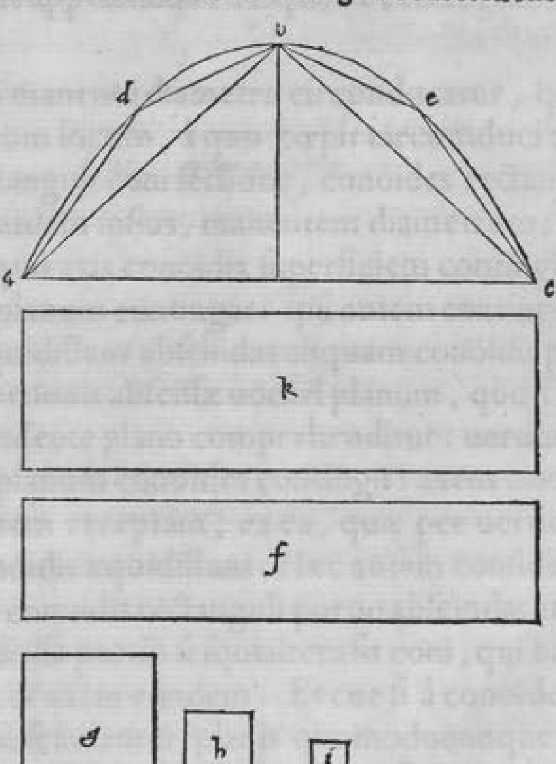
gnitudines b c d e f g h i tertia pars sunt magnitudinum omnium a b c d. sunt autem & f g h tertia ipsarum b c d. & reliquæ igitur b c d e i magnitudinis reliquæ uidelicet ipsius a tertia sunt. 19.quinti ex quo patet, omnes magnitudines a b c d e & i, hoc est tertiam ipsius e, sesquitertias esse ipsius a magnitudinis.



PROPOSITIO XXIIII.

Qvælibet portio recta linea, & rectanguli coni sectione contenta sesquitertia est trianguli eandem ipsi basim habentis, & altitudinem æqualem.

Sit enim portio a d b e c contenta recta linea, & rectanguli coni sectione: Sitq; triangulum a b c, quod habeat eandem basim portioni, & æqualem altitudinem: ipsius autem trianguli a b c sesquitertium sit k spatium. Ostendendum est k æquale esse portioni a d b e c. si enim non est æquale, uel maius est, uel minus. Sit primum, si esse potest a d b e c portio maior spatio k: describantur autem a d b, b e c triangula, ut dictum est: & rursus in reliquis portionibus alia triangula describantur, eandem ipsis basim habentia, & altitudinem eandem: & semper in iis, quæ postremo fiunt, portionibus describantur duo triangula basim habentia eandem ipsis, & eandem altitudinem: erunt tandem portiones reliquæ minores excessu, quo portio a d b e c excedit k spatium. Quare descripta multiangula figura maior erit k spatio; quod esse non potest. sunt enim posita deinceps spatia in quadrupla proportione: & primum quidem a b c triangulum quadruplum est trian



 gulorum

gulorum a d b, b e c: deinde eadem ipsa quadrupla eorum, quæ in sequentibus sunt descripta: & ita in aliis. ex quibus sequitur, omnia spatia minora esse, quàm sesquitertia maximi spatii. spatium autem k eiusdem maximi spatii est sesquitertium. non
A igitur a d b e c portio maior est spatio k. Verum si fieri potest, sit minor: & ponatur a b c triangulum æquale spatio f: Sitq; g ipsius f pars quarta: & similiter h quarta ipsius g: & ita semper ponatur deinceps, quousque quod ultimo loco ponitur, minus sit excessu, quo spatium k portionem excedit. et sit minus spatium i. sunt autem f g h i spatia unà cum tertia parte ipsius i, spatii f sesquitertia: & k spatium sesquitertium eiusdem spatii f. æquale igitur est k spatium ipsis f g h i,
B & tertiæ parti ipsius i. et quoniam spatium k excedit f g h i spatia minori excessu,
C quàm sit i: excedit autem portionem maiori, quàm i: manifestum est spatia f g h i maiora esse portione: quod esse non potest. ostensum nanque est, Si in quadrupla proportione spatia quotlibet deinceps ponantur, quorum maximum sit æquale triangulo in portione descripto: spatia omnia minora esse ipsa portione. non igitur a d b e c portio minor est spatio k, neque maior, ut ostensum est. quare sequitur eidem esse æqualem. spatium autem k sesquitertium est trianguli a b c. ergo & portio a d b e c trianguli a b c sesquitertia erit.

ARCHIMEDIS
LIBER DE CONOIDIBVS,
ET SPHÆROIDIBVS.

ARCHIMEDES DOSITHEO S. D.

MITTO ad te conſcriptas in hoc libro reliquorum theorematum demonſtrationes, quas nõ habebas in iis, quæ prius ad te miſi; & aliorum, quæ poſterius inuenta ſunt. quorum cum antea quidem ſæpe aggreſſus eſſem contemplationem, uiderenturq; omnino eorum inuẽtiones difficultatem habere, diu ſuſpenſo animo fui: & idcirco, cum aliis edita non fuerunt hæc ipſa propoſita. Verum poſtea maiori adhibita diligentia, ea, de quibus antea dubitaueram, tandem inueni. Quæ autem ex prioribus theorematibus reſtabant, de rectangulo conoide propoſita erant. at quæ nunc inuenta ſunt, ad conoides obtuſiangulum, & ſphæroidas figuras attinent: quarum aliquas quidẽ oblongas, aliquas uero latas appellamus. Itaque de rectangulo conoide hæc poſita fuerant.

SI rectanguli coni ſectio manente diametro circunducatur, quo- A
uſque rurſus redeat in eum locum, à quo cœpit circumduci: fi-
guram comprehenſam rectanguli coni ſectione, conoides rectangu- B
lum appellari: & axem quidem ipſius, manentem diametrum; uerticem uero punctum, in quo axis conoidis ſuperficiem contingit. Si rectangulum conoides planum contingat: ipſi autem contingenti plano alterum planum æquidiſtans abſcindat aliquam conoidis portionem: baſim quidem portionis abſciſſæ uocari planum, quod ipſa
conoidis ſectione in abſcindente plano comprehenditur: uerticem, C
punctum, in quo alterum planum conoides contingit: axem uero rectam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem portionis ducta ſit axi conoidis æquidiſtans. Hæc autem conſideranda
proponebantur. Cur ſi conoidis rectanguli portio abſcindatur pla 23. huius
no erecto ſuper axem: abſciſſa portio ſeſquialtera ſit coni, qui baſim
habeat portioni eandem, & axem eundem. Et cur ſi à conoide re- 26. huius
ctangulo duæ portiones abſcindantur planis quomodocunque ductis: abſciſſæ portiones inter ſe duplam eius, quæ eſt axium, pro-

portionem

D portionem habeant. At de obtusiangulo conoide hæc ponimus.
Si in eodem plano sint obtusi anguli coni sectio, eiusq; diameter, &
lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni: manente autem
diametro circumducatur planum, in quo sunt dictæ lineæ quousque
rursus in eundem locum, à quo cœpit moueri, restituatur: rectas li
neas, quæ coni obtusianguli sectioni proximæ sunt, manifeste conum
comprehendere æquicrurem; cuius uertex erit punctum, in quo
lineæ proximæ conueniunt, & axis diameter manens. figuram uero
obtusianguli coni sectione comprehensam, conoides obtusiangu lum
uocari; cuius axis erit diameter manens, & uertex punctum illud,
in quo axis conoidis superficiem contingit. At conum comprehen-
sum lineis sectioni coni obtusianguli proximis, continentem conoi-
des appellari. lineam autem rectam, quæ interiicitur inter conoidis
uerticem, & uerticem coni continentis conoides, ad axem adiectam
E dici. Et si obtusiangulum conoides planum contingat: ipsi autem
contingenti plano alterum planum æquidistanter ductum abscindat
conoidis portionem: basim quidem abscissæ portionis uocari pla-
num, quod ipsa conoidis sectione in abscindente plano comprehen-
ditur: & uerticem, punctum illud, in quo planum conoides contin
git: axem uero lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ du-
cta sit per uerticem portionis, & uerticem coni continentis conoides:
A & quæ inter dictos uertices interiicitur rectam lineam ad axem adie
F ctam appellari, Omnia conoidea rectangula sunt similia. obtusian-
g gulorum uero conoideon similia dicuntur ea, quorum & coni conti
27.huius nentes similes sunt. Proponuntur autem hæc consideranda. Cur si
conoidis obtusianguli portio abscindatur plano erecto super axem:
abscissa portio ad conum basim eandem habentem ipsi, & axem eun
dem, eam habeat proportionem, quam utraque linea: & quæ æ-
qualis est axi portionis; & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet
ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla est li
28.huius neæ ad axem adiectæ. Et cur si conoidis obtusianguli portio abscin
datur plano non erecto super axem: abscissa portio ad figuram ba-
sim eandem habentem ipsi, & eundem axem (quæ quidem figura
sit coni portio) eam proportionem habeat, quam utraque linea: &
quæ æqualis est axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ,
ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & duplæ lineæ ad a-
xem adiectæ. De sphæroidibus uero figuris hæc ponimus. Si acu-
ti anguli coni sectio manente eius maiore diametro circumducta, re-
stituatur rursus in eum locum, à quo moueri cœpit: figuram de-
scriptam

ſcriptam à ſectione coni acuti anguli, ſphæroides oblongum appella
ri. Quòd ſi minore diametro manente, circumducta coni acuti an-
guli ſectio rurſus in eum locum reſtituatur, à quo moueri cœpit: fi-
guram deſcriptam à coni acutianguli ſectione, ſphæroides latum uo
cari. Vtriuſque autem ſphæroidis axem quidem dici, manentem
diametrum: uerticem, punctum, in quo axis ſphæroidis ſuperfi-
ciem contingit: centrum, axis medium: diametrum uero, lineam,
quæ per centrum ducitur ad rectos angulos ipſi axi. Et ſi ſphæroi- G
dum figurarum quamlibet plana æquidiſtantia contingãt, quæ ipſas
non ſecent: aliud autem planum contingentibus planis æquidiſtans H
ducatur, ſecansq; ipſum ſphæroides: portionum factarum baſim
quidem uocari planum, quod ipſa ſphæroidis ſectione in ſecante pla
no comprehenditur: uertices, puncta in quibus plana æquidiſtantia
ſphæroides contingunt: axes uero, rectas lineas in portionibus re-
ceptas ex ea, quæ uertices ipſarum coniungit. Verum enimuero 17.huius
plana ſphæroides contingentia in uno tantum puncto ipſius ſuperfi- 18.huius
ciem contingere; & rectam lineam contactus cõiungentem per cen
trum ſphæroidis tranſire; inferius demonſtrabitur. Sphæroidum
figurarum ſimiles illas dici, quarum axes ad diametros eandem pro
portionem habent. Portiones autem ſphæroidum, & conoidum fi-
gurarum ſimiles, quæ à ſimilibus figuris abſciſſæ, baſes ſimiles ha-
bent; quarumq; axes ſiue erecti ſuper baſium ſuperficies, ſiue cum
diametris baſium conſimilibus æquales angulos continentes, ad con
ſimiles diametros, eandem habent proportionem. At uero de ſphæ
roidibus figuris hæc proponuntur conſideranda. Cur ſi aliqua ſphæ 29. huius
roidum figurarum ſecetur plano per centrum ducto, & erecto ſu-
per axem: earum, quæ fiunt, portionum, utraque dupla ſit coni 33.huius
baſim habentis eandem ipſi, & axem eundem. Si autem ſecetur pla
no ſuper axem erecto, ſed non ducto per centrum: portionum facta
rum, maior quidem ad conum baſim habentem eandem ipſi, & a-
xem eundem, eam habeat proportionem, quam linea his utriſque
æqualis: & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi minoris portionis ad axẽ
minoris portionis; minor uero portio ad conum eandem ipſi baſim 31.huius
habentem, & eundem axem, eam proportionem habeat, quam li-
nea utriſque æqualis; & dimidiæ axis ſphæroidis, & axi maioris por-
tionis ad axem maioris portionis. Et cur ſi ſphæroidum figurarum 30.huius
aliqua ſecetur plano per centrum ducto, & non erecto ſuper axem:
portionum, quæ fiunt, utraque dupla ſit figuræ baſim habentis ean
dem portioni, & axem eundem, ſit autem figura, coni portio. Quòd 34.huius

ſi

ſi ſphæroides ſecetur plano neque per centrum ducto, neque erecto ſuper axem: portionum factarum maior quidem ad figuram baſim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices portionum coniungit, & axi minoris portionis ad axem minoris

32.huius portionis, minor autem portio ad figuram eandem baſim habentem ipſi, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam linea utriſque æqualis: & dimidiæ eius, quæ uertices coniungit portionum, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autem & in his

H figura, coni portio. Itaque demonſtratis dictis theorematibus, per ea ipſa inueniuntur theoremata multa, & problemata, quale eſt hoc. Sphæroidea ſimilia inter ſe, & portiones ſphæroideon ſimiles, & item conoideon, triplam eius, quæ eſt axium proportionem habent. Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte reſpondent ipſis axibus: ſphæroidea æqualia ſunt. Problema autem eiuſmodi. A dato ſphæroide, uel conoide portionem abſcindere plano, quod ſit alteri dato plano æquidiſtans: ita ut portio abſciſſa æqualis ſit dato cono, aut cylindro, aut ſphæræ datæ. Præmittentes igitur & theoremata, & problemata, quæ ad illorum demonſtrationes ſunt neceſſaria, poſtea tibi ea, quæ propoſita ſunt, conſcribemus. Vale.

I SI conus plano ſecetur cum omnibus eius lateribus coeunti: ſectio uel erit circulus, uel coni acutianguli ſectio. & ſi quidem ſectio circulus ſit: manifeſtum eſt, portionem à cono abſciſſam ad partes uerticis, conum eſſe. ſi autem ſit coni acutianguli ſectio: abſciſſa ab eo figura ad partes uerticis, portio coni uocetur. cuius portionis baſis quidem dicatur planum coni acutianguli ſectione comprehenſum; uertex, punctum, quod & coni uertex eſt; axis uero linea recta à uertice coni ad centrum ſectionis coni acutianguli perducta.

K Et ſi cylindrus duobus planis æquidiſtantibus ſecetur, quæ cum omnibus ipſius lateribus coeant: ſectiones uel erunt circuli, uel conorum acutiangulorum ſectiones æquales, & ſimiles inter ſe ſe. Quòd ſi ſectiones circuli ſint: conſtat abſciſſam à cylindro figuram inter plana æquidiſtantia interiectam, cylindrum eſſe. ſi uero ſint conorum acutiangulorum ſectiones: figura ab eo abſciſſa inter plana æquidiſtantia, portio cylindri uocetur. cuius portionis baſis quidem dicantur plana conorum acuti angulorum ſectionibus comprehenſa;

axis autem recta linea, quæ sectionum conorum acutiangulorum centra cõiungit; atque erit hæc in eadem recta linea ipsi axi cylindri.

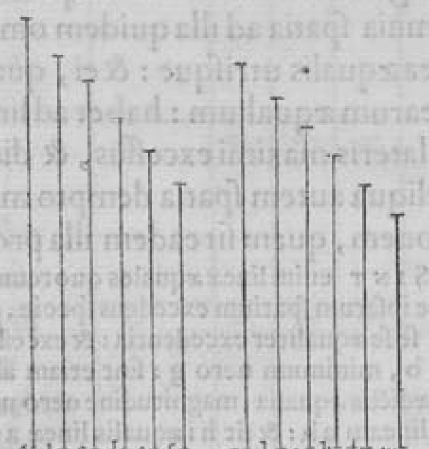
PROPOSITIO I.

SI sint magnitudines quotcunque sese æqualiter excedentes, quarum excessus sit æqualis minimæ: sint autem & aliæ totidem magnitudines maximæ illarum æquales: Erunt magnitudines omnes maximæ illarum æquales, magnitudinum omnium se se æqualiter excedentium minores, quàm duplæ, reliquarum autem dempta maxima, maiores, quàm duplæ.

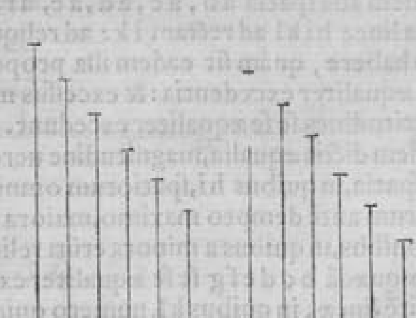
HVIVS uero demonstratio manifesta est.

PROPOSITIO II.

SI magnitudines quotcunque, totidem aliis magnitudinibus secundum quasque duas eandem habeant proportionem, similiter ordinatæ: referantur autem primæ magnitudines ad quasdam alias, quibuscunque proportionibus, uel omnes, uel earum aliquæ: posteriores quoque magnitudines referantur ad totidem alias sibi ipsis respondentes iisdem proportionibus: habebunt omnes primæ magnitudines ad eas omnes, ad quas referuntur, eandem proportionem, quam omnes posteriores magnitudines habent ad illas, ad quas itidem referuntur.



SINT quædam magnitudines a b c d e f, quæ totidem aliis magnitudinibus g h i k l m secundum quasque duas eandem habeãt proportionem: & habeat ipsa quidem a ad b eandem proportionem, quam g ad h: ipsa uero b ad c eandem, quam h ad i: & aliæ eodem modo. referantur autem a b c d e f ad alias magnitudines n x o p r s quibuscunque proportionibus: & ipsæ g h i k l m ad alias t u y q z 9 sibi respondentes iisdem proportionibus referantur: ita ut quã proportionem habet a ad n, eam habeat g ad t, & quam b ad x, habeat h ad u: & similiter in aliis. Ostendendum est, magnitudi-



nes omnes a b c d e f ad omnes n x o p r s eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Quoniam enim n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipsa uero a ad b eandem habet, quam g ad h: & b ad
22. v. x, quam h ad u: habebit n ad x eandem proportionem, quam t ad u: & simili ratione x ad o eandem, quam u ad y: & alia similiter.

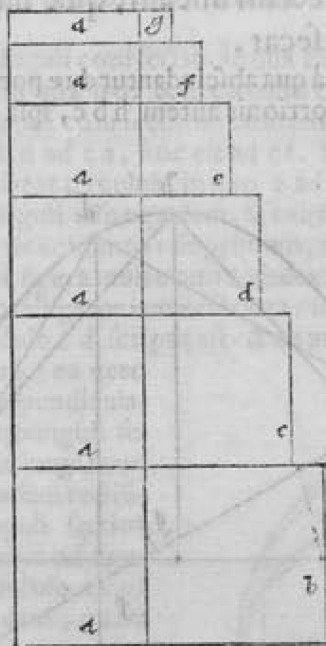
A Habent autem omnes a b c d e f ad a, eandem proportionem, quam omnes g h
B i k l m ad g: & a ad n, quam g ad t. Verum n ad omnes n x o p n s habet ean-
22. v. dem, quam t ad omnes t u y q z 9. Omnes igitur a b c d e f ad omnes n x o p r s ean
C dem proportionem habent, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z 9. Manifestum præterea est, & si magnitudinum a b c d e f ipsæ a b c d e referantur ad n x o p r: ipsa uero f ad nullam referatur: & magnitudinum g h i k l m ipsæ g h i k l referantur ad t u y q z sibi respondentes, m uero ad nullam referatur. similiter omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habere proportionem, quam omnes g h i k l m ad omnes t u y q z.

PROPOSITIO III.

SI lineæ quotcunque inter se se sint æquales: & ad unamquanque ipsarum accedat spatium excedens specie, quadrato: sint autem & excessuum latera se se æqualiter excedentia; & excessus æqualis minimo: sint item alia spatia, numero quidem prædictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo: habebunt hæc omnia spatia ad illa quidem omnia minorem proportionem, quàm linea æqualis utrisque: & ei, quæ est latus maximi excessus, & uni linearum æqualium: habet ad lineam utrisque æqualem; & tertiæ parti lateris maximi excessus, & dimidiæ unius linearum æqualium: ad reliqua autem spatia dempto maximo, maiorem habebunt proportionem, quàm sit eadem illa proportio.

SINT enim lineæ æquales quotcunque, in quibus a: & accedat ad unamquanque ipsarum spatium excedens specie, quadrato: sint autem excessuum latera b c d e f g se se æqualiter excedentia: & excessus sit æqualis minimo: & maximum quidem sit b, minimum uero g: sint etiam alia spatia, in quibus h i k l, numero quidem prædictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo, quod adiacet ad lineam a b: & sit h i æqualis lineæ a: & k l æqualis lineæ b: sitq; h i dupla ipsius i: & k l tripla ipsius k. Ostendendum est, spatia omnia in quibus h i k l ad omnia quidem alia spatia a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem habere proportionem, quàm recta linea h i k l ad rectam i k: ad reliqua autem spatia dempto maximo a b, maio-
A rem habere, quàm sit eadem illa proportio. Sunt enim aliqua spatia, in quibus a sese æqualiter excedentia: & excessus minimo est æqualis; quoniam & accesiones, & latitudines se se æqualiter excedunt. Sunt item alia spatia, in quibus h i, numero
2.huius quidem dictis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo. Omnia igitur spatia, in quibus h i, spatiorum omnium, in quibus a, minora sunt, quã dupla: reli
B quorum autẽ dempto maximo, maiora quã dupla. & idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a minora erũt: reliquis aũt dẽpto maximo, maiora. Rursus sunt lineæ quædã b c d e f g se se æqualiter excedentes: & excessus est æqualis minimæ: & aliæ itẽ lineæ, in quibus k l, numero quidẽ dictis æquales, magnitudine uero unaquæ-
C que æqualis maximæ. Quadrata igitur linearum omniũ æqualiũ maximæ quadratorũ omnium linearũ se se æqualiter excedentium, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem dempto maximo, maiora, quàm tripla: hoc enim ostensum est in iis, quæ de lineis spiralibus edita sunt. & idcirco spatia, in quibus k, spatiis omnibus, in quibus

bus b c d e f g, sunt minora: spatiis uero, in quibus c d e f g maiora. Quare & omnia spatia, in quibus i k spatiis omnibus, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minora sunt; spatiis uero, in quibus a c, a d, a e, a f, a g, maiora. Manifestum est igitur, spatia omnia, in quibus h i k l, ad spatia quidem, in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, minorem proportionem habere, quã linea h l ad lineam i k; ad reliqua autẽ dempto eo, in quo a b, maiorem habere, quàm sit eadem illa proportio.



S I quamlibet coni sectionem rectæ lineæ contingant ab eodem puncto ductæ: sint autem, & aliæ lineæ in coni sectione, quæ lineis contingentibus æquidistent; & se se inuicem secent: rectangula dictarum linearum partibus contenta, ad quadrata contingentium eandem habent proportionem: rectangulum autem, quod alterius lineæ partibus continetur, respondebit quadrato contingentis illius, quæ dictæ lineæ æquidistet.

H o c autem ostensum est in conicis.

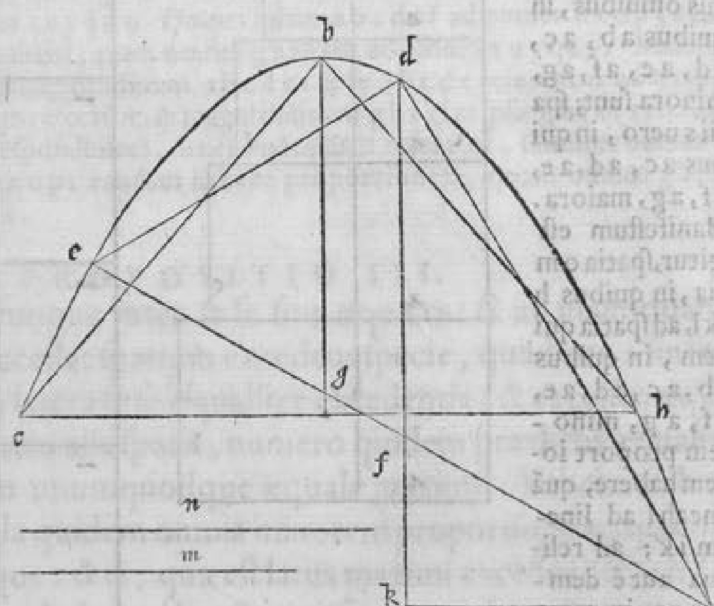
PROPOSITIO IIII.

S I ab eadem rectanguli coni sectione duæ portiones quomodocunque abscindantur, quæ diametros æquales habeant: & ipsæ portiones æquales erunt; & triangula in ipsis descripta, basim eandem

 habentia

habentia portionibus, & altitudinem eandem. Diametrum autem uoco cuiuscunque portionis rectam lineam, quæ lineas omnes basi ipsius æquidistantes bifariam secat.

Sit rectanguli coni sectio a b c, à qua abscindantur duæ portiones a d e, h b c: sitq; a d e portionis diameter d f: portionis autem h b c, ipsa b g: & sint d f, b g æquales inter se.



Ostendendum est, & portiones a d e, b h c æquales esse: & triãgula eo, quo dictum est, modo in ipsis descripta, æqualia. Sit primum, quæ abscindit alteram portionem h c ad rectos angulos ipsi diametro coni rectãguli se

A ctionis: & sumatur ea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur; dupla illius, quæ est usque ad axem: sitq; in qua m: & à puncto a ducatur a k perpendicularis ad d f. Quoniam igi

B tur d f diameter est portionis: & a e bifariam secatur in f; & d f æquidistans est diametro sectionis coni rectanguli: sic enim bifariam secat omnes ipsi a e æquidistantes. Itaque quam proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eam habeat n ad m. ergo quæ à sectione ducuntur ad d f æquidistantes ipsi a e, possunt spatia adiacentia quidem ad lineam æqualem ipsi n, latitudinem uero habentia lineas illas, quas ipsæ a linea d f ad terminum d abscin

C dunt: ostensum nanque est hoc in conicis. potest igitur linea a f spatium æquale ei,

D quod continetur linea n & ipsa d f: & potest h g æquale ei, quod continetur li

E neam & b g; quoniam h g perpendicularis est ad diametrum. quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n ad m; quòd d f, b g positæ sint æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam n ad m. æquales igitur erunt h g, a k. sed & æquales sunt b g, d f.

F quare quod continetur lineis h g, b g æquale est contento ipsis a k, d f. ergo trian

G gulum h b g triangulo d a f est æquale; & eorum dupla æqualia. trianguli autem a

H d e sesquitertia est portio a d e: & trianguli h b c sesquitertia ipsa h b c portio. ex quibus sequitur, portiones æquales esse: & item triangula in ipsis descripta, æqualia. Si uero neutra earum, quæ portiones abscindunt, fuerit ad angulos rectos ipsi diametro rectanguli coni sectionis: assumpta ex diametro sectionis coni rectanguli linea, quæ sit æqualis diametro unius portionis. & ab eius extremo ducta ad angulos rectos ipsi diametro altera linea: portio abscissa utrique prædictarum æqualis

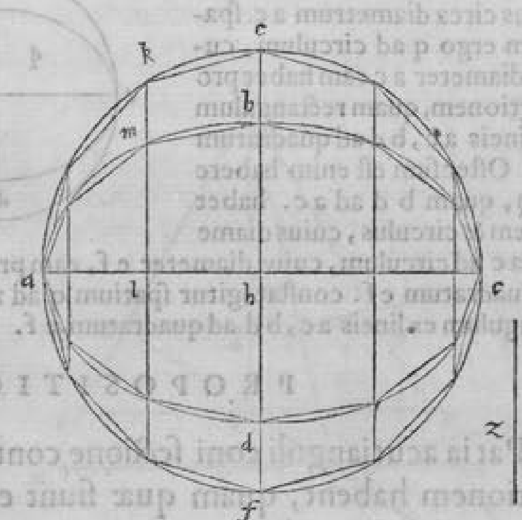
I erit. patet igitur, quod fuerat propositum.

PROPOSITIO V.

Qvodlibet spatium acutianguli coni sectione contentum ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro acu tianguli

tianguli coni sectionis, eandem habet proportionem, quam minor ipsius diameter ad maiorem; hoc est ad circuli diametrum.

Sit enim acutianguli coni sectio, in qua a b c d: diameter autem ipsius maior, in qua a c, minor, in qua b d: & sit circulus circa diametrum a c. Ostendendum est, spatium acutianguli coni sectione contentum ad circulum eandem habere proportionem, quam b d ad c a, hoc est ad e f. Itaque quam proportionem habet b d ad e f, eandem habeat circulus, in quo z ad a e c f circulum. Dico circulum z sectioni coni acutianguli esse æqualem. Si enim non est æqualis circulus z spatio coni acutianguli sectione contento: sit primum, si fieri potest, maior. potest autem in z circulo describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit spatio a b c d. Intelligatur iam descripta: sitq; in circulo, a e c f figura rectilinea similis ei, quæ in circulo z descripta est: & ab angulis ipsius perpendiculares ducantur ad a c diametrum: ea uero puncta, in quibus perpendiculares secant coni acutianguli sectionem, rectis lineis iungantur. erit igitur figura quædam rectilinea in coni acutianguli sectione descripta: & habebit ad figuram descriptam in circulo a e c f proportionem eandem, quam habet b d ad e f. Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem secantur ad puncta m b: constat trapezium l e ad ipsum h m eandem habere proportionem, quam h e ad b h: & similiter unumquodque trapeziorum, quæ sunt in circulo ad unumquodque eorum, quæ sunt in coni acutianguli sectione, eandem habebit, quam e h ad b h. habent autem & triangula ad puncta a c, quæ sunt in circulo ad ea triangula, quæ sunt in coni acutianguli sectione, hanc eandem proportionem. Quare & tota figura rectilinea in a e c f circulo descripta ad totam figuram descriptam in coni acutianguli sectione, habebit eandem proportionem, quam e f ad b d. sed & eadem figura rectilinea ad figuram, quæ in z circulo est descripta eandem habet proportionem, quoniam & circuli eandem inter se habebant. figura igitur rectilinea in z circulo descripta æqualis est figuræ descriptæ in coni acutianguli sectione: quod fieri non potest; maior enim erat toto spatio sectione coni acutianguli contento. Sed sit, si fieri potest, minor. Rursus in coni acutianguli sectione potest describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit circulo z. describatur ergo: & ab angulis ipsius ad a c perpendiculares ductæ producantur ad circuli usque circumferentiam. Rursus erit figura quædam rectilinea in a e c f circulo descripta, quæ habebit ad figuram descriptam in coni acutianguli sectione proportionem eandem, quam e f ad b d. Itaque descripta & in z circulo simili figura, ostendetur, eam ipsam æqualem esse figuræ in coni acutianguli sectione descriptæ; quod quidem fieri non potest. non est igitur neque minor z circulus spatio coni acutianguli sectione contento. Quare constat dictum spatium ad a e c f circulum eandem habere proportionem, quam habet b d ad e f.



A B C D 1.& 2.XII E

PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

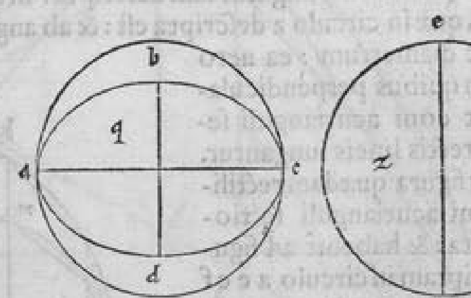
SPatium quodlibet acutianguli coni ſectione contentum, ad quemlibet circulum eam habet proportionem, quam rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli factum, ad quadratum diametri circuli.

Sit enim ſpatium acutianguli coni ſectione contentum, in quo q: & ipſius ſectionis diametri ſint a c, b d; quarum maior a c: circulus autem ſit, in quo z: & eius diameter e f. Oſtendendum eſt, ſpatium q ad z circulum eam proporti onem habere, quam rectangulum, quod fit ex lineis a c, b d habet ad quadratum e f. Circũſcribatur circulus circa diametrum a c. ſpatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c eam habet proportionem, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum a c. Oſtenſum eſt enim habere eam, quam b d ad a c. habet autem & circulus, cuius diameter a c ad circulum, cuius diameter e f, eam proportionem, quam a c quadratum ad quadratum e f. conſtat igitur ſpatium q ad z circulum habere eam, quam rectangulum ex lineis a c, b d ad quadratum e f.

A (beside "dratum e f. Circũſcribatur cir")

.xii. (beside "a c. Oſtenſum eſt enim habere")

B (beside "ad quadratum e f. conſtat igitur")

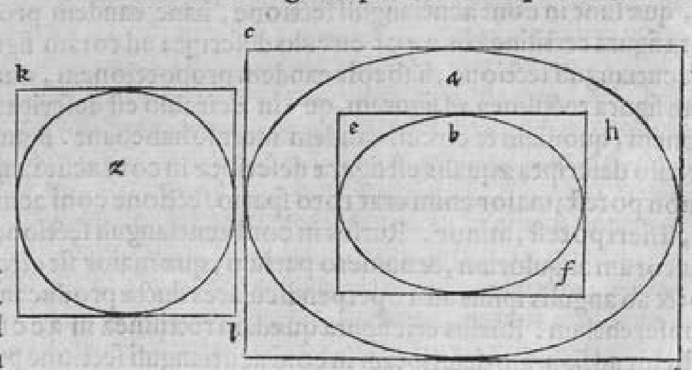


PROPOSITIO VII.

SPatia acutianguli coni ſectione contenta eam inter ſe ſe proportionem habent, quam quæ fiunt ex coni acutianguli ſectionum diametris rectangula.

Sint ſpatia acutianguli coni ſectione contenta, in quibus a b: ſit autem & c d rectangulum ex diametris ſectionis coni acutianguli, quæ continet ſpatium a: & e f rectangulum ex diametris alterius ſectionis. Oſtendendum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f. Sumatur circulus quidam, in quo z. & diametri eius quadratũ ſit k l. Habet autem ſpatium a ad z circulum eã proportionẽ quã c d ad k l: & z circulus ad ſpatiũ b eam, quam k l ad e f. Quare manifeſtum eſt, ſpatium a ad b eam habere proportionem, quam c d ad e f.

22.v. (beside "b eam, quam k l ad e f.")

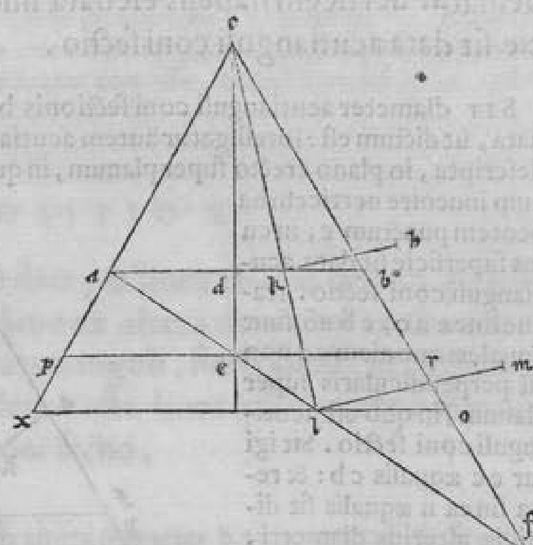


A Ex hoc apparet, ſpatia ſimilibus acutianguli coni ſectionibus contenta, eam inter ſe proportionem habere, quam ſectionum diametri, quæ eiuſdem ſint rationis, potentia inter ſe habent.

PROPOSITIO VIII.

ACutianguli coni ſectione data, & recta linea ab eius centro ere
cta ſuper planum, in quo eſt ipſa ſectio, fieri poteſt, ut conus
inueniatur uerticem habens erectæ lineæ terminum, in cuius ſuper-
ficie ſit data acutianguli coni ſectio.

DETVR aliqua acutianguli coni ſectio: & à centro eius recta linea erigatur ſu-
per planum, in quo ſectio eſt: per lineam uero erectam, & per minorem diametrum
planum educatur: ſitq; in ipſo minor diameter a b: centrum ſectionis acutianguli
coni d: linea à centro erecta c d, cuius terminus c: & intelligatur acutianguli co-
ni ſectio circa diametrum a b de-
ſcripta, in plano erecto ſuper c d.
Oportet iam conum inuenire uerti
cem habentem punctum c, in cuius
ſuperficie ſit acutiãguli coni ſectio.
Ducantur à puncto c ad a b puncta
rectæ lineæ; & producantur: & ab a
ducatur a f: ita ut rectangulum a e
f ad quadratum e c eam habeat pro
portionem, quam quadratum dimi
diæ maioris diametri habet ad d c
quadratum: quod quidem fieri po- A
teſt, quoniam proportio mai or eſt
ea, quam habet rectangulum a d b
ad quadratum d c. Ab ipſa autem a
f planum attollatur perpendiculari
ter ſuper planum, in quo ſunt lineæ
c a, a f: & in hoc item plano circu-
lus deſcribatur circa diame trum a
f: à quo circulo conus ſit uerticem
habens punctum c. Itaque in coni
huius ſuperficie demonſtrabitur eſ-
ſe acutianguli coni ſectio. Si enim



non ſit in ſuperficie coni, neceſſario ſequitur eſſe aliquod punctum in acutianguli co
ni ſectione, quod non ſit in ſuperficie coni. Intelligatur autem punctum h in ſectio-
ne acutianguli coni ſumptum, quod non ſit in ſuperficie coni: & ab h ducatur h k
perpendicularis ad ipſam a b. erit ergo hæc erecta ſuper planum, in quo ſunt lineæ
c a, a f. à puncto autem c ad k ducta linea producatur, quæ cum a f coeat in l: & ab
l ducatur l m ad angulos rectos ipſi f a, in circulo circa a f deſcripto: intelligatur
quoque punctum m ſublime in circumferentia ipſius: & ducatur per l quidem pun-
ctum, lineæ a b æquidiſtans ipſa x o: per punctum uero e ipſa p r. Quoniam igitur
rectangulum a e f ad quadratum e c eam habet proportionem, quam quadratum
dimidiæ maioris diametri ad d c quadratum: & quadratum e c ad rectangulum p e B
r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b: habebit rectangulum a e f 22.v.
ad rectangulum p e r eandem proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris dia
metri ad rectangulum a d b. eſt autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita C
rectangulum a l f ad ipſum x l o: & ut quadratũ dimidiæ maioris diametri ad rectan- D
gulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b. Eandem igitur proportio-
nem habet rectangulum a l f ad rectangulum x l o, quam quadratum h k ad rectan-
gulum a k b. ſed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangu- E
lum

22.v. gulum a k b ad quadratum c k. Quare a l f rectangulum ad quadratum c l eandem habet proportionem, quam h k quadratum ad quadratum k c. rectangulo autem a l f æquale est quadratum l m: quoniam in semicirculo circa a f perpendicularis ducta est l m. Quadratum ergo l m ad quadratum l c eandem proportionem habet, quam h k quadratum, ad quadratum k c: & idcirco in recta linea sunt puncta c h m.

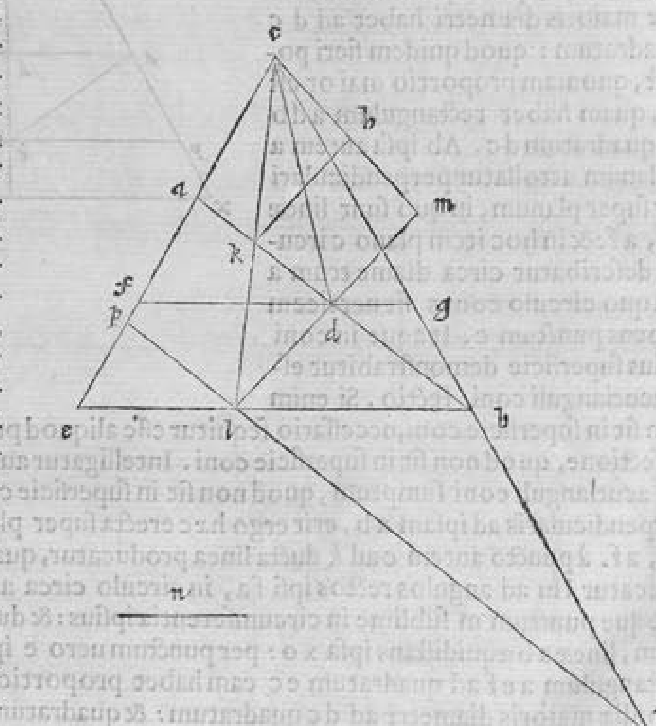
F sed linea c m est in superficie coni. constat igitur & h punctum in coni esse superficie: positum autem fuerat non esse. nullum igitur punctum est in sectione coni acutianguli, quod non sit in dicti coni superficie. Quare tota acutianguli coni sectio est in superficie eiusdem coni.

PROPOSITIO IX.

Acutianguli coni sectione data, & linea ab eius centro eleuata, non perpendiculari in plano ex diametro altera erecto super planum, in quo est sectio coni acutianguli, fieri potest, ut conus inueniatur uerticem habens eleuatæ lineæ terminum, in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio.

Sit diameter acutianguli coni sectionis b a; centrum d: & d c linea à centro eleuata, ut dictum est: Intelligatur autem acutianguli coni sectio circa diametrum a b descripta, in plano erecto super planum, in quo sunt lineæ a b, c d. Oportet iam conum inuenire uerticem habentem punctum c; in cu-

A ius superficie sit data acutianguli coni sectio. Itaque lineæ a c, c b nō sunt æquales: quoniam c d non est perpendicularis super planum, in quo est acutianguli coni sectio. Sit igitur e c æqualis c b: & recta linea n æqualis sit dimidiæ alterius diametri, quæ est coniuncta ipsi a b: & per d ducatur f g æquidistans lineæ e b: ab ipsa autem e b planum attollatur perpendiculariter super planum, in quo sunt lineæ a c, c b: & in hoc eodem plano circa diametrum e b describatur cir-



A culus, uel ellipsis. Si enim quadratum n æquale est

B rectangulo f d g: describatur circulus. sin minus, acutianguli coni sectio eiusmodi, ut quadratū alterius diametri ad e b quadratum eam proportionem habeat, quam quadratum n ad rectangulum f d g. sumatur conus uerticem habens c punctum; in cuius superficie sit circulus, uel acutianguli coni sectio circa diametrum e b: id uero fieri potest, quoniam à puncto c ad me-

diam

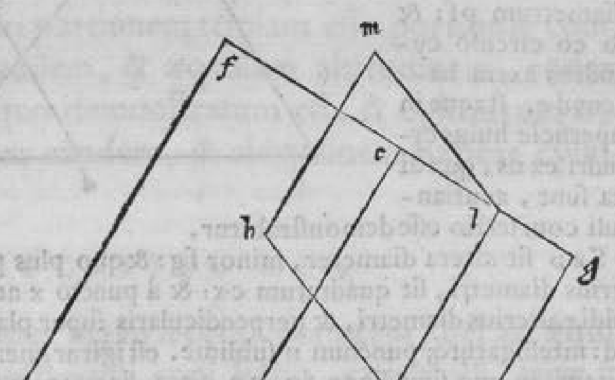
diam e b ducta perpendicularis est super planum, quod est secundum ipsam e b. in hac ergo superficie est & acutianguli coni sectio circa diametrum a b. Si enim non est, sumetur aliquod punctũ in acutianguli coni sectione, quod non erit in superficie coni. Intelligatur punctum h sumptum, quod non sit in superficie coni: & ab h ducatur h k perpendicularis ad a b: ductaq; c k producatur, ut coeat cum e b in puncto l: & per l ducatur quædam linea l m in plano secundum e b erecto; quæ sit perpendicularis ad ipsam e b: punctum uero m intelligatur sublime in superficie coni: & per l item ducatur linea p r æquidistans a b. est igitur ut quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b. ut autem rectangulum f d g ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r. Quare erit ut quadratum n ad rectangulum a d b, ita quadratum l m ad rectangulum p l r. Sed ut quadratum n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: quoniam in eadem acutianguli coni sectione perpendiculares ductæ sunt ad diametrum a b. Eandem igitur proportionem habet quadratum l m ad rectangulum p l r, quam h k quadratum ad rectangulum a k b. habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c. ergo l m quadratum ad quadratum l c eandem habet, quam quadratum h k ad ipsum k c. quare in recta linea sunt puncta c h m. sed linea c m est in superficie coni. ergo & h punctum in coni superficie erit. positum autem fuerat non esse. manifestum est igitur, quod demonstrare oportebat.

C D 22. v. E F

PROPOSITIO X.

ACutianguli coni sectione data, & linea ab eius centro eleuata non perpendiculari in plano ex altera diametro erecto super planum, in quo est sectio coni acutianguli, fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in eadem recta linea ipsi eleuatæ; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio.

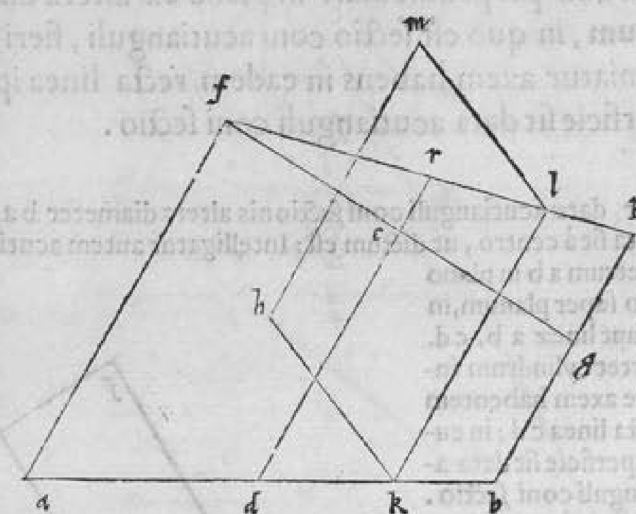
Sit datæ acutianguli coni sectionis altera diameter b a; centrum d: & linea c d eleuata sit à centro, ut dictum est: Intelligatur autem acutianguli coni sectio circa diametrum a b in plano erecto super planum, in quo sunt lineæ a b, c d. Oportet cylindrum inuenire axem habentem in recta linea c d; in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Ducantur à punctis a b lineæ a f, b g æquidistantes ipsi c d: erit altera diameter sectionis coni acutianguli, uel æqualis ipsi interuallo inter a f, b g lineas interiecto, uel maior, uel minor. Sit primum æqualis lineæ f g: & sit



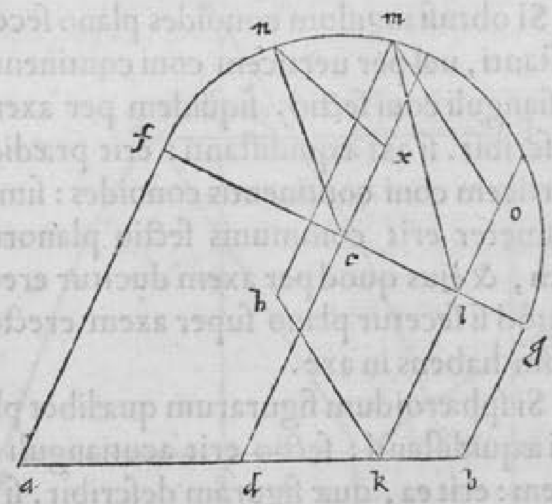
fg ad rectos angulos ipsi c d: à linea uero f g eleuetur planum perpendiculariter ad c d. in quo quidē plano circulus sit circa diametrum f g: & ab hoc circulo cylindrus axem habens ipsam c d. Itaque in superficie huius cylindri est acutianguli coni sectio. nisi enim ita sit, erit aliquod punctum in acutianguli coni sectione, quod nō erit in superficie cylindri: sitq; illud h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipsam b a. erit igitur ea super planum erecta, in quo sunt lineæ a b, c d. à puncto autem k ducatur k l æquidistans lineæ c d: & ab l eleuetur l m ad rectos angulos ipsi f g, in circulo circa f g descripto. Intelligatur quoque m sublime in circumferentia semicirculi circa diametrum f g. eandem ergo proportionem habet quadratum
A lineæ perpendicularis h k ad rectangulum a k b: & quadratum f c ad rectangulum a d
B b: quoniam æqualis est f g alteri diametro. habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d ellipsis.
C quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k. sed & ipsi quadrato l m est æ-
17. VI. quale. æquales igitur sunt perpendiculares h k, m l: & idcirco lineæ l k, m h æqui-
33. primi distantes. unde & ipsæ d e, m h æquidistantes erunt. ex quibus sequitur h m esse in
9. XI. superficie cylindri: quoniam à puncto m, quod est in superficie cylindri, ducta est m h axi æquidistans. manifestum ergo est & h punctum esse in superficie ipsius. positum autem fuerat non esse. Quare constat, quod oportebat demonstrare.

Perspicuum est igitur, cylindrum ellipsim comprehendentem rectum esse, si altera diameter æqualis sit interuallo linearum ductarum ab extremitatibus alterius diametri, ipsi lineæ ex centro eleuatæ æquidistantium.

SIT rursus altera diameter, maior ipsa f g: & æqualis sit p f alteri diametro: ab ipsa uero p f planum attollatur erectum super planum, in quo sunt lineæ a b; c d: & in hoc plano circulus sit circa diametrum p f: & ab eo circulo cylindrus axem habens d e. Itaque in superficie huius cylindri ex iis, quæ dicta sunt, acutianguli coni sectio esse demonstrabitur.



SED sit altera diameter, minor f g: & quo plus potest f c, quàm dimidium alterius diametri, sit quadratum c x: & à puncto x attollatur linea x n æqualis dimidiæ alterius diametri, & perpendicularis super planum, in quo sunt lineæ a b,
D c d: intelligaturq; punctum n sublime. est igitur linea c n æqualis ipsi c f. in plano autem, in quo sunt lineæ f g, c n circa diametrum f g circulus describatur; qui transibit per n: & ab hoc circulo cylindrus sit axem habens c d. in superficie ergo cylindri huius est acutianguli coni sectio. Quòd si non ita sit, sumetur aliquod punctum in ipsa, quod non erit in superficie cylindri. sumatur: & sit h: ducaturq; h k perpēdicularis



laris ad a b: & à puncto k æqui distans ducatur ipsi c d, quæ sit k l: & ab l attollatur l m perpendicularis ad f g, in semicirculo circa f g diametrum descripto. Intelligatur autem punctum m in circumferentia ipsius; à quo perpendicularis ducatur m o ad lineam k l productam. erit hæc erecta super planum, in quo sunt a b, c d: quoniam k l perpendicularis est ad f g. ergo ut quadra- E
tum m o ad quadratum m l, ita est quadratum x n ad qua- F
dratum n c. ut autem quadratum m l ad rectangulum a k b, ita c n quadratum ad ipsum a d: nam quadratum quidem m l æquale est rectangulo f l g: quadratum uero c n est æquale ipsi c f. Quare ut quadratum m o ad rectangulum a k b, ita quadratum n x ad quadratum a d. atque est 21. primi
k h quadratum ad rectangulum a k b, ut quadratum x n ad ipsum a d: quòd x n li- Con.Ap.
nea æqualis sit dimidiæ alterius diametri. perspicuum est igitur, perpendiculares m G
o, h k æquales esse: ideoq; æquales sunt k o, h m. Quoniam autem m h axi cylindri æquidistat: & m punctum est in superficie ipsius: necesse est & m h in cylindri esse superficie. quare & punctum h in eadem superficie erit. non erat autem. sequitur ergo acutianguli coni sectionem necessario esse in superficie cylindri.

PROPOSITIO XI.

Omnis coni ad conum proportionem compositam esse ex pro- A
portione basium, & proportione altitudinum, demonstratum est ab iis, qui ante nos fuerunt. eadem autem est demonstratio, & cur omnis portio coni ad coni portionem compositam proportionem habeat ex proportione basium, & proportione altitudinum. omnem præterea cylindri portionem triplam esse portionis coni, B
quæ basim habeat ipsi eandem, & æqualem altitudinem, eodem modo demonstrabitur, quo demonstratum est, & cylindrum triplum esse coni, qui basim eandem, & altitudinem habeat cylindro æqualem.

PROPOSITIO XII.

Si rectangulum conoides plano secetur per axem, uel axi æquidistanti: sectio erit rectanguli coni sectio, eadem illi, quæ figuram describit; cuius diameter erit communis sectio planorum, & eius, quod secat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans. Si autem secetur plano super axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si obtuſiangulum conoides plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti, uel per uerticem coni continentis conoides: ſectio erit obtuſianguli coni ſectio. ſiquidem per axem: eadem illi, quæ figuram deſcribit. ſi axi æquidiſtanti: erit prædictæ ſimilis. ſi autem & per uerticem coni continentis conoides: ſimilis non erit. ſectionis uero diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans. Quòd ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si ſphæroidum figurarum quælibet plano ſecetur per axem, uel axi æquidiſtanti: ſectio erit acutianguli coni ſectio. ſi quidem per axem: erit ea, quæ figuram deſcribit. ſi uero axi æquidiſtanti: erit illi ſimilis; cuius diameter erit communis ſectio planorum, ſecantis ſcilicet figuram, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans. At uero ſi ſecetur plano ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Si dictarum figurarum quælibet plano ſecetur per axem: lineæ ductæ à punctis, quæ ſunt in ſuperficie figuræ, non in ſectione ipſa, perpendiculares ad planum ſecans, intra figuræ ſectionem cadent.

A Horum autem omnium manifeſtæ ſunt demonſtrationes.

PROPOSITIO XIIII.

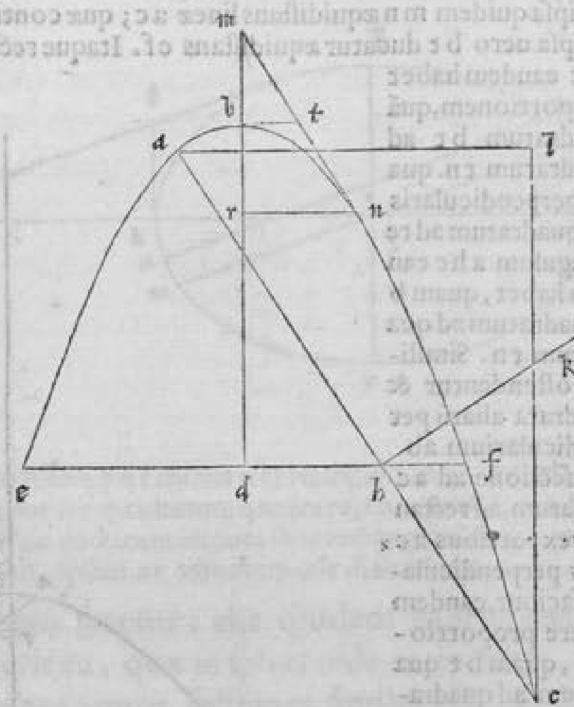
SI rectangulum conoides plano ſecetur, neque per axem, neque axi æquidiſtanti, neque ſuper axem erecto: ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius quidem maior diameter erit linea in conoide recepta à ſectione facta planorum; eius ſcilicet, quod figuram ſecat, & eius, quod per axem ducitur, erectum ſuper planum ſecans: minor uero diameter æqualis erit interuallo linearum, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ fuerint axi æquidiſtantes.

SECETVR enim rectangulum conoides plano, uti dictum eſt: ſectoq; ipſo altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans, ſit conoidis ſectio a b c: plani ſecantis figuram ſit c a recta linea; axis uero conoidis, & diameter ſectionis b d. oſtendendum eſt, ſectionem conoidis, quæ fit à plano ſecundum a c eſſe acutianguli coni ſectionem; & maiorem eius diametrum lineam a c, minorem uero æqualem eſſe ipſi l a: cum ſit c l æquidiſtans lineæ b d, & a l perpendicularis ad c l. Intelligatur aliquod punctum in ſectione ſumptum k: & ab ipſo k ad c a perpendicularis ducatur k h. erit k h perpendicularis ad planum in quo eſt a c b rectanguli coni ſectio: quoniam & planum ſecans erectum eſt ſuper idem planum. per h autem ducatur e f ad rectos angulos ipſi b d: & per lineas e f, k h planum ducatur. erit igitur hoc erectum ſuper b d: & ſecabitur conoides plano ſuper axem erecto. quare ſectio circulus erit, cuius centrum d. ergo k h poterit æquale ei, quod fit ex e h,

h f:

h f: semicirculus enim est super e f: & k h perpendicularis existens, media fit proportionalis. & potest æquale ei, quod fit ex e h, h f. Ducatur item contingens coni sectionem linea m n, æquidistans ipsi a c, quæ contingat in n puncto: & ducatur b t æquidistans ipsi e f. Itaque rectangulum a h c ad rectangulum e h f eandem habet proportionem, quam n t quadratum ad quadratum b t; id enim demonstratum est. ipsi uero n t æqualis est linea t m: quoniam & b r ipsi b m. habet igitur & rectangulum a h c ad quadratum k h proportionem eandem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & perpendicularis h k quadratum ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t m. Quoniam igitur similia sunt c a l, t m b triangula: quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. Similiter ostendentur & quadrata aliarum perpendicularium, quæ à sectione ad ipsam a c ducuntur, ad rectangula partibus a c contenta, eandem habere proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c. patet igitur sectionem esse acutianguli coni sectionem: & eius maiorem diametrum esse a c, minorem uero æqualem ipsi a l.

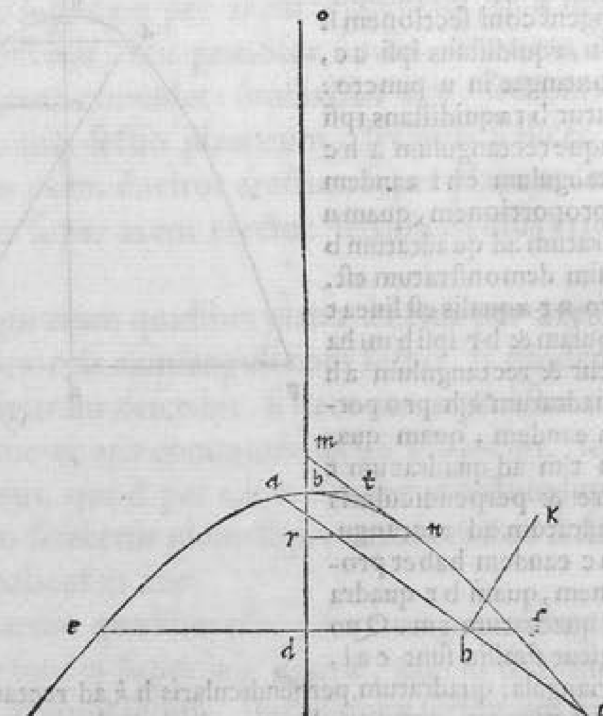
A B C D E F



PROPOSITIO XIIII.

Si conoides obtusiangulum secetur plano coeunti cum omnibus lateribus coni continentis conoides, non autem erecto super axem: sectio erit acutianguli coni sectio, cuius maior diameter erit linea in conoide recepta à facta sectione planorum, eius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

Secetur enim obtusiangulum conoides plano, uti dictum est: secto᷑; ipso altero plano per axem, erecto super planum secans, sit conoidis quidem sectio a b c, obtusianguli coni sectio: plani figuram secantis sit a c recta linea: axis autem conoidis, & diameter sectionis b d: intelligatur quoque in sectione punctum aliquod k: & ab ipso k ad a c perpendicularis ducatur k h. erit ipsa erecta super planum, in quo est a b c coni sectio. ducatur autem per h linea e f ad rectos angulos ipsi b d: & per e f, k h rectas lineas planum ducatur secans conoides. secabitur igitur plano erecto super axem, & sectio circulus erit, cuius centrum d. quare perpendipendicularis k h poterit æquale ei, quod lineis e h, h f continetur. Ducatur rursus ipsa quidem m n æquidistans lineæ a c; quæ contingat coni sectionem in puncto n: ipsa uero b t ducatur æquidistans e f. Itaque rectangulum e h f ad rectangulum a h c eandem habet proportionem, quã quadratum b t ad quadratum t n. quare perpendicularis k h quadratum ad rectangulum a h c eandem habet, quam b t quadratum ad quadratum t n. Similiter ostendentur & quadrata aliarũ perpendicularium ab ipsa sectione ad a c ductarum, ad rectangula ex partibus a c quas perpendiculares faciunt, eandem habere proportionem, quam b t quadratum ad quadratum t n. A est autem linea b t minor ipsa t n: propterea, quòd & m t minor est ipsa t n; cum m b minor sit b r: hoc enim in acutianguli coni sectionibus contingit. perspicuum est igitur, sectionem B esse acutianguli coni sectionem; & maiorem eius diametrum esse a c. similiter perpendiculari existente n r in obtusianguli coni sectione, diameter ipsius maior erit c l.

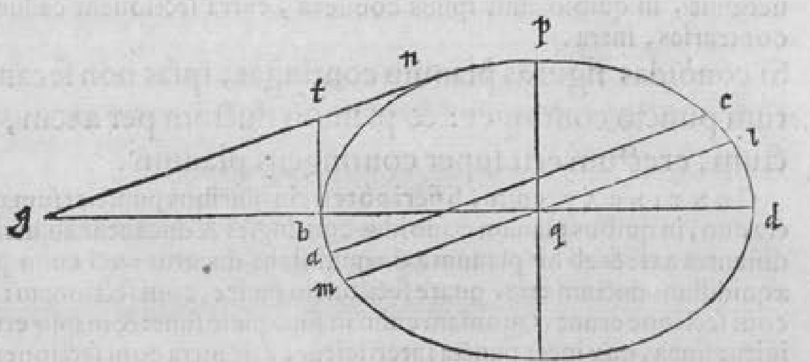


PROPOSITIO XV.

SI oblongum sphæroides plano secetur non erecto super axem: sectio erit acutianguli coni sectio: diameter autem ipsius maior, erit linea in sphæroide recepta à facta sectione planorum, eius uidelicet, quod secat figuram, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

SI quidem igitur secetur plano per axem, aut axi æquidistanti: constat propositum. secetur autem alio plano: & secto ipso per axem, plano erecto super planum secans, sit sphæroidis sectio a b c d acutianguli coni sectio: secantis plani recta linea sit a c: axis sphæroidis, & diameter sectionis coni acutianguli b d: centrum q: & minor diameter sit p r. Ducatur autem linea b t ad rectos angulos lineæ b d: & g n æquidistans ipsi a c, contingensq; acutianguli coni sectionem in puncto n: deinde A ducatur m l per q æquidistans ipsi a c. similiter iis, quæ ante tradita sunt, ostendentur quadrata perpendicularium ab ipsa sectione ad a c ductarum ad rectangula, quæ fiunt ex partibus a c, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Itaque sectionem esse coni acutianguli sectionem, & diametrum

ipsius



ipsius esse a c, constat. Sed maiorem esse diametrum, ostendemus. rectangulum enim p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quã b t quadratũ ad quadratũ t n: quoniam lineæ p r, m l contingentibus æquidistantes sunt. & rectangulum p q r minus est rectangulo m q l: quoniam & q p ipsa g l minor. minus est igitur b t quadratum quadrato t n. quare & quadrata perpendicularium à sectione ad a c ductarum minora sunt rectangulis, quæ sunt ex partibus a c. perspicuum ergo est, ipsam a c minorem esse diametrum.

Si sphæroides latum plano secetur: alia quidem eadem erunt: ex diametris uero minor erit ea, quæ in sphæroide recipitur. B

Ex his apparet in omnibus figuris sectiones similes esse, si planis æquidistantibus secentur. quadrata enim perpendicularium ad rectangula partibus contenta eandem proportionem habebunt.

PROPOSITIO XVI.

IN rectangulo conoide si à quouis puncto eorum, quæ in superficie sunt, ducantur lineæ axi æquidistantes; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus conoidis sunt conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad partes contrarias, intra.

DVCTO nanque plano & per axem, & per punctum, à quo axi æquidistans ducta est, sectio erit rectanguli coni sectio; cuius diameter erit axis conoidis. At in rectanguli coni sectione à quouis puncto eorum, quæ in sectione sunt, ductis lineis diametro æquidistantibus, quæ quidem ad eas partes, in quibus sunt ipsius conuexa, ducuntur, extra sectionem cadunt, quæ uero ad partes alteras, intra. patet igitur, quod fuerat propositum. A

In obtusiangulo conoide à quolibet puncto eorum, quæ in superficie sunt, ductis lineis æquidistantibus cuidam lineæ, quæ in conoide ducta est per uerticem coni continentis conoides; quæ quidem ad eas partes ducuntur, in quibus sunt ipsius conuexa, extra conoides cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

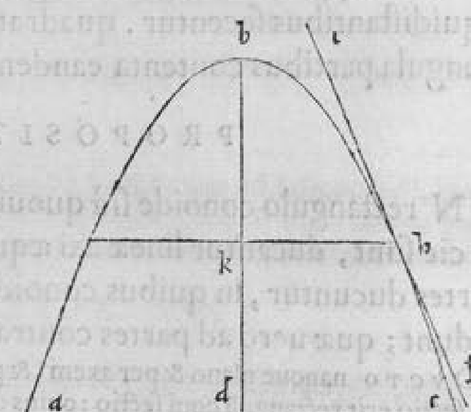
DVCTO enim plano, & per lineam, quæ in conoide ducta est per uerticem coni continentis conoides, & per punctum, à quo æquidistans ducitur, sectio erit obtusianguli coni sectio: eius autem diameter erit linea, quæ à uertice coni in conoide ducta est. Sed in sectione coni obtusianguli, si à quouis puncto in sectione sumpto B C

ducantur

ducantur lineæ æquidistantes cuidam lineæ ductæ, ut dictum est: quæ ad eas partes uergunt, in quibus sunt ipsius conuexa, extra sectionem cadunt; quæ uero ad contrarias, intra.

Si conoidas figuras planum contingat, ipsas non secans: in uno tantum puncto continget: & planum ductum per axem, & per contactum, erectum erit super contingens planum.

CONTINGAT enim, si fieri potest, in pluribus punctis: sumantur autem puncta duo, in quibus planum conoides contingit: & ducantur ab utrisque lineæ æquidistantes axi: & ab his planum axi æquidistans ducatur: uel enim per axem, uel axi
D æquidistans ductum erit. quare sectionem faciet, coni sectionem: & puncta in ipsa coni sectione erunt. Quoniam enim in superficie sunt: & in ipso erunt plano. recta igitur linea, quæ inter puncta interiicitur, erit intra coni sectionem. & idcirco intra conoidis superficiem. est autem recta linea in plano contingente: quoniam & pũcta in eo sunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra conoides: quod fieri nõ potest; positum enim fuerat non secare. In uno igitur tantum puncto continget. Ipsum autem planum per contactum, & per axem ductum, erectum esse super planũ contingens; siquidem in uertice contingat conoides, manifestum est. ductis enim per conoidis axem duobus planis, sectiones erunt conorum sectiones, diametrum habentes ipsum axem: contingentis uero plani lineæ, quæ sectiones conorum contingunt in diametri extremitate, angulos rectos faciunt cum diametro. quare in contingenti plano erunt duæ rectæ lineæ ad rectos angulos ipsi axi: & ob id planum super axem erectum erit. ergo & super planum per axem ductum. Quòd si planum non contingat conoides in uertice: per contactum, & axem planum ducatur: sitq; sectio conoidis a b c coni sectio: & axis, & diameter sectionis b d: contingentis autem plani sectio sit recta linea e h f, quæ coni sectionem contingat in h: & ab h perpendicularis ducatur h k ad ipsam b d: & planum attollatur super axem erectum. faciet hoc sectionem circulum, cuius centrum k: sectio autem huius plani, & plani contingentis erit linea contingens circulum. quare faciet angulos rectos
18. III. cum h k: & propterea erecta erit super planum, in quo sunt lineæ k h, b d. perspicuum ergo est & planum cõ
18. XI. tingens erectum esse super idem planum. quoniam & rectæ lineæ, quæ in ipso sunt.



PROPOSITIO XVII.

SI sphæroidum figurarum quamlibet planum contingat, non secans figuram: in uno tantum puncto continget; & planum, quod per contactum, & axem ducitur, erectum erit super contingens planum.

CONTINGAT enim in pluribus punctis: & sumantur puncta duo, in quibus planum sphæroides contingit: ab utroque autem ipsorum ducantur rectæ lineæ axi æquidistantes; & ducto per illas plano, sectio erit acutianguli coni sectio; & puncta

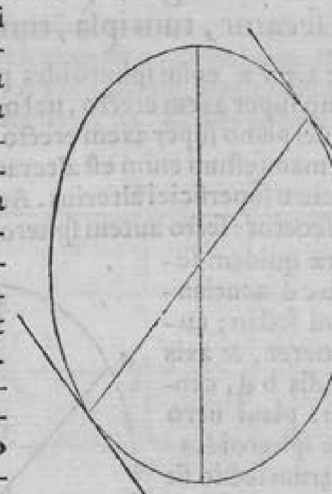
cta in ipsa coni sectione. Quæ igitur inter puncta interiicitur recta linea, intra coni sectionem cadet. quare & intra sphæroides superficiem. est autem recta linea in contingente plano: quoniam & puncta in eo sunt. ergo contingentis plani aliqua pars erit intra sphæroides: quod quidem fieri non potest: positum enim fuerat non secare. perspicuum est igitur in uno tantum puncto contingere. Ipsum uero planum per contactum, & per axem ductum, erectum esse super planum contingens, similiter atque in conoidibus figuris demonstrabimus.

Si sphæroidum figurarum quælibet plano secetur per axem: sectionemq; factam contingat quædam recta linea: & per contingentem planum ducatur erectum super planum secans: continget id figuram in eodemmet puncto, in quo & recta linea coni sectionem contingit.

Non enim in alio puncto continget ipsius superficiem; alioquin ab eo puncto A ducta perpendicularis super planum secans cadet extra coni sectionem: nam super contingentem cadet, cum plana ad inuicem sint erecta: quod quidem fieri non potest, ostensum est enim intra cadere. B

PROPOSITIO XVIII.

Si sphæroidum figurarum aliquam duo plana æquidistantia contingant: quæ contactus iungit recta linea per centrum sphæroidis transibit.

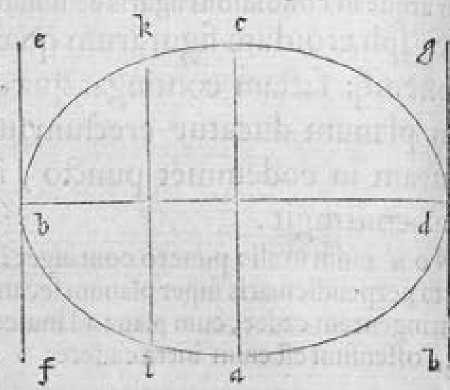


Si igitur plana fuerint ad rectos angulos ipsi axi: manifestum est, quod proponitur. Sin minus, planum ductum per axem, & alterum contactum, erectum erit super contingens planum. quare & super planum ei æquidistans. necesse est igitur idem esse planum ductum per axem, & per utrunque contactum; alioquin erunt duo plana erecta super idem planum, per eandem lineam ducta, quæ non sit erecta super planum: positum enim est, axem non esse erectum super plana æquidistantia. In eodem igitur plano erunt & axis, & contactus ipsi: & sectum erit sphæroides per axẽ. quare sectio erit acutianguli coni sectio: planorum autem contingentium sectiones æquidistantes erunt, quæ contingent acutianguli coni sectionem in contactibus planorum. At si duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes acutianguli coni sectionem contingant: & centrum sectionis coni acutianguli, & contactus ipsi in eadem recta linea erunt. A B

PROPOSITIO XIX.

Si sphæroidum figurarum quamlibet duo plana æquidistantia contingant: ducatur autem per centrum sphæroidis aliquod planum contingentibus planis æquidistans: rectæ lineæ, quæ per factam sectionem ducuntur, æquidistantes lineæ contactus iungenti, extra sphæroides cadent.

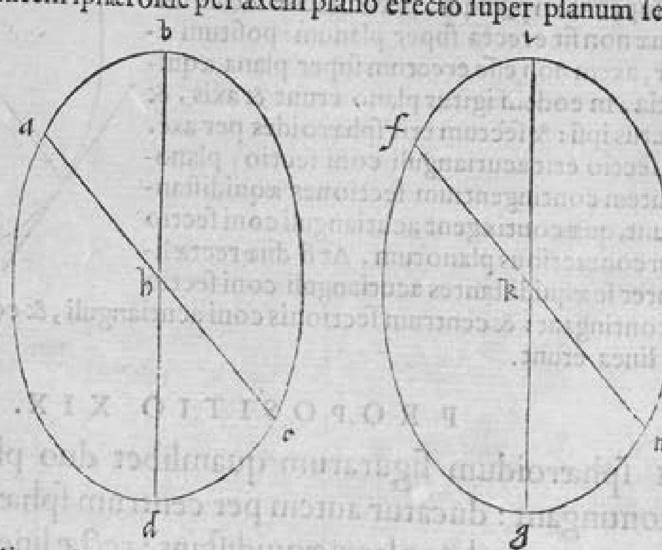
Ponantvr enim, quæ dicta sunt: & sumatur aliquod punctum in facta sectione: & per ipsum, & rectam lineam contactus iungentem planum ducatur. seca
A bit hoc sphæroides, & plana æquidistantia. Sit enim sectio sphæroidis a b c d acutianguli coni sectio: planorum contingentium sectiones sint e f, g h: sumptum pun
B ctum a: & recta linea b d iungens contactus. transibit igitur ea per centrum. plani uero contingentibus planis æquidistantis sectio sit c a, quæ & ipsa per centrum ducta erit, quoniam & planum. Itaque quoniam a b c d; uel circulus est, uel acutianguli coni sectio: & ipsam contingunt duæ rectæ lineæ e f, g h: per centrum autem du
C cta est a c ipsis æquidistans: constat lineas ductas à punctis a c æquidistantes ipsi b d contingere sectionem; & extra sphæroides
D cadere. Quòd si planum æquidistans contingentibus planis non ducatur per centrum, ut k l: perspicuum est, ductis à sectione lineis, quæ quidem ad eas partes uergunt, in quibus est minor portio, extra sphæroides cadere; quæ uero ad partes contrarias, intra.



PROPOSITIO XX.

Qvælibet figura sphæroidis plano per centrum ducto, bifariam secatur, tum ipsa, tum ipsius superficies.

Secetvr enim sphæroides plano per centrum ducto. Itaque uel per axem, uel plano super axem erecto, uel non erecto secabitur. Si quidem igitur secetur per axem, uel plano super axem erecto: constat & ipsum, & ipsius superficiem bifariam secari. manifestum enim est alteram eius partem alteri congruere, & alterius partis superficiem superficiei alterius. At si neque per axem ducto plano, neque super axem erecto secetur: secto autem sphæroide per axem plano erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio; cuius diameter, & axis sphæroidis b d, centrum h: plani uero secantis sphæroides per centrum sectio sit recta linea a c: sumatur præterea alterum sphæroides huic æquale, & simile: sectoq; ipso per axem, sit sectio e f g n acutianguli coni sectio; cuius diameter, & axis sphæroidis e g, & centrum k: ducatur per k linea f n angulum ad k faciens æqualem angulo ad h: & ab ipsa f n planum attollatur erectum super planum, in quo est sectio e f g n. erunt acutiangulorum conorum sectiones ipsæ a b c d, e f g n æquales, & similes inter sese.



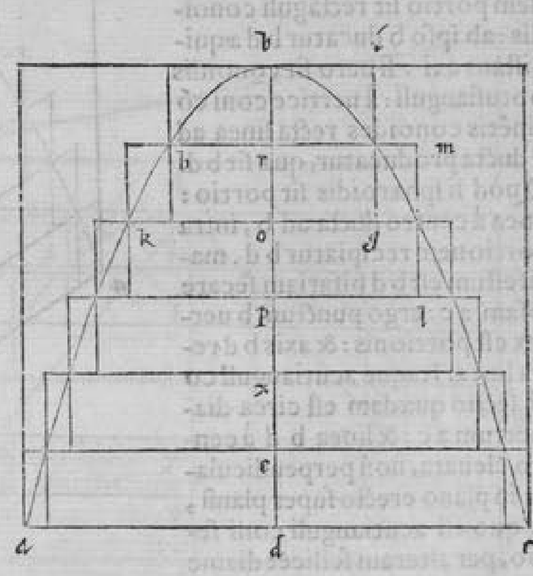
quare

quare congruit altera alteri, posita e g super b d & f n super a c. Sed & planum secundum n f congruit plano secundum a c: quoniam ab eadem recta linea super idem planũ eorum utrunque constituitur. congruit ergo & portio abscissa a sphæroide plano secundũ n f, quæ est in parte, in qua e, portioni abscissæ ab altero sphæroide plano secundum a c in parte, in qua b: & reliqua portio reliquæ, & superficies item portionum superficiebus congruunt. Rursus posita e g super b d: ita ut e sit super d; & g super b: linea uero, quæ interiicitur inter puncta n f, posita super lineam inter a c interiectam, perspicuum est, acutiangulorum conorum sectiones congruere inter sese: & f cadere super c: & n super a. similiter & planum secundum n f plano secundum a c congruit: & portionum abscissarum plano secundum n f, ea quidẽ, quæ est ad partes g congruit portioni altero plano secundum a c abscissæ ad partes b; ea uero, quæ est ad partes e congruit portioni, quæ est ad d. Quoniam igitur eadem portio utrique portionum congruit: sequitur portiones æquales esse: & idcirco earum quoque superficies æquales.

PROPOSITIO XXI.

DAta cuiuslibet conoidis portione abscissa plano super axem erecto, uel data portione cuiuslibet sphærioidis, quæ maior non sit dimidio sphæroide similiter abscissa, fieri potest, ut portio solida inscribatur, et altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam magnitudine, quæ minor sit quacunque solida magnitudine proposita.

Detur enim portio, qualis est a b c: & secta ipsa plano per axem, sit sectio portionis a b c coni sectio: plani autem secantis portionem sit a c recta linea: & portionis axis, & diameter sectionis b d. Quoniam igitur positum est, planum secans erectum esse super axem: sectio circulus erit, cuius diameter a c. ab hoc autem circulo cylindrus sit axem habens b d. cadet eius superficies extra portionem, quia uel conoides est, uel sphæroides non maius dimidio sphæroide. Itaque hoc cylindro cõtinenter secto bifariam plano super axem erecto, erit tandem residuum minus proposita solida magnitudine. sit residuum ab ipso, cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, axem uero e d, minor proposita magnitudine: diuidaturq; b d in partes æquales ipsi e d, in punctis r o p x: & à diuisionibus ducantur rectæ lineæ æquidistantes ipsi a c ad coni usque sectionem: & ab his plana attollantur erecta super b d. erunt igitur sectiones circuli centra habentes in linea b d. ab unoquoque autem circulorum duo cylindri describantur, quorum uterque axem habeat ipsi e d æqualem; unus quidem ad eas cylindri partes, in quibus est d; alter uero ad eas, in quibus b. erit iam in portione figura quædam solida inscripta, ex cylindris constans ad eas partes descriptis, in quibus d: & altera circum-



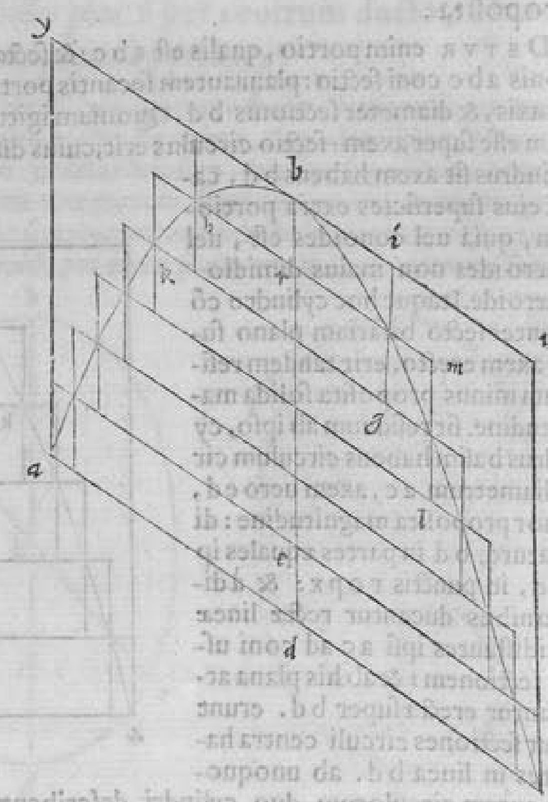
 scripta

ſcripta ex cylindris ad partes b. Reliquum eſt, ut oſtendamus circumſcriptam excedere inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit ſolida magnitudine propoſita: unuſquiſque enim cylindrorum, qui ſunt in figura inſcripta æqualis eſt cylindro, qui ab eodẽ circulo deſcribitur ad partes b, ut cylindrus h g ipſi h i: & k l ipſi k m: & alii ſimiliter: & omnes cylindri omnibus æquales ſunt. conſtat ergo circumſcriptam figuram excedere inſcriptam cylindro, qui baſim habet circulum circa diametrum a c, & axem e d. hic autem eſt minor propoſita ſolida magnitudine.

PROPOSITIO XXII.

DAta cuiuslibet conoidis portione, abſciſſa plano non erecto ſuper axem; uel data portione cuiuslibet ſphæroidis ſimiliter abſciſſa, quæ dimidio ſphæroide maior non ſit; fieri poteſt, ut portio ſolida inſcribatur, & altera circumſcribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus conſtans: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam magnitudine, quæ minor ſit quacunque ſolida magnitudine propoſita.

Detvr portio qualis dicta eſt; ſecta autem figura alio plano per axem, erecto ſuper planum, quod datam portionem abſcidit, figuræ quidem ſectio ſit a b c coni ſe-
A ctio: plani uero portionem abſcindentis recta linea c a. Et quoniam poſitum eſt planum abſcindens portionem non eſſe erectum ſuper axem, ſectio erit acutianguli coni ſectio, cuius diameter a c.



Sit autem u y contingens coni ſectionem in b puncto: & ab ipſa u y attollatur planum æqui-
B diſtans plano ſecundum a c. cõ
C tinget hoc figurã in b. et ſi quidem portio ſit rectãguli conoidis: ab ipſo b ducatur b d æqui-
D diſtans axi. ſi uero ſit conoidis obtuſianguli: à uertice coni cõtinẽtis conoides recta linea ad b ducta producatur, quæ ſit b d.
E Quòd ſi ſphæroidis ſit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifeſtum eſt b d bifariam ſecare ipſam a c: ergo punctum b uertex eſt portionis: & axis b d recta linea. Itaque acutianguli coni ſectio quædam eſt circa diametrum a c: & linea b d à centro eleuata, non perpendicularis in plano erecto ſuper planũ, in quo eſt acutianguli coni ſectio, per alteram ſcilicet diame-
F trum conſtituto plano: fieri igitur poteſt, ut cylindrus inueniatur axem habens b d, in cuius ſuperficie ſit acutianguli coni ſectio circa diametrum a c. cadet autem ſuperficies ipſius extra portionem: quoniam uel eſt conoidis, uel ſphæroidis portio, & non maior

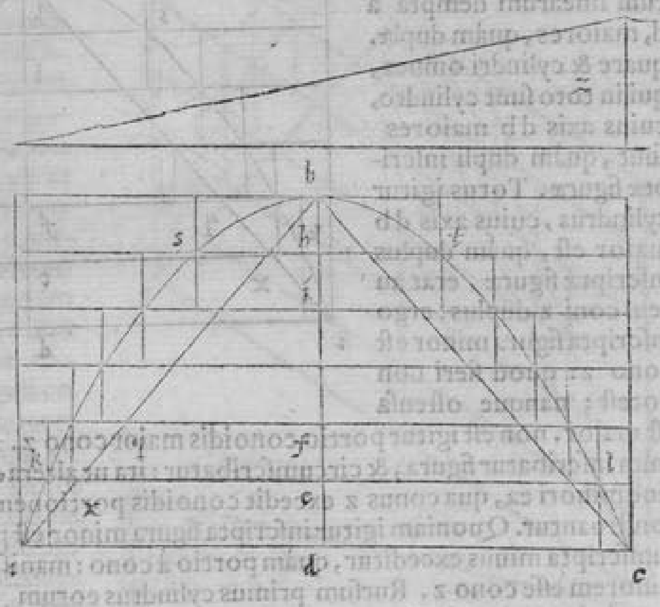
ior dimidio sphæroide: atque erit portio quædam cylindri basim habẽs acutianguli coni sectionẽ circa diametrũ a c, & axem b d. ea uero portione bifariam secta planis æquidistantibus plano secundũ a c, erit quod relinquitur minus proposita solida magnitudine. Sit portio basim habens acutianguli coni sectionẽ circa diametrũ a c, & axẽ e d, quæ minor sit proposita solida magnitudine: diuidaturq; d b in partes æquales ipsi e d: & à diuisionibus ducãtur lineæ ipsi a c æquidistantes usque ad coni sectionẽ; G
à quibus plana attollantur æquidistantia plano secundũ a c ducto. secabunt hæc portionis superficiem: & erunt acutiangulorũ conorũ sectiones similes ei, quæ est circa H
diametrum a c: quoniam plana æquidistãtia sunt. In unaquaque uero acutianguli coni sectione describantur cylindri portiones duæ; una quidem ad partes, in quibus est d; altera uero ad partes b, quæ axem habeant ipsi d e æqualem. erunt igitur quædam figuræ solidæ; altera quidem inscripta in portione; altera uero circumscripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus constantes. Reliquum est, ut ostendamus circumscriptam figuram excedere inscriptam magnitudine, quæ minor sit solida magnitudine proposita. ostendetur autem similiter antecedenti, circumscriptam figuram excedere inscriptam portione, quæ basim habet acutianguli coni sectionem circa diametrum a c, & axem e d: hæc uero minor est proposita solida magnitudine.

Itaque his præmissis demonstrabimus ea, quæ de figuris proposita sunt.

PROPOSITIO XXIII.

Qvælibet portio rectanguli conoidis abscissa plano super axem erecto, sesquialtera est coni basim habentis eandem portioni, & eundem axem.

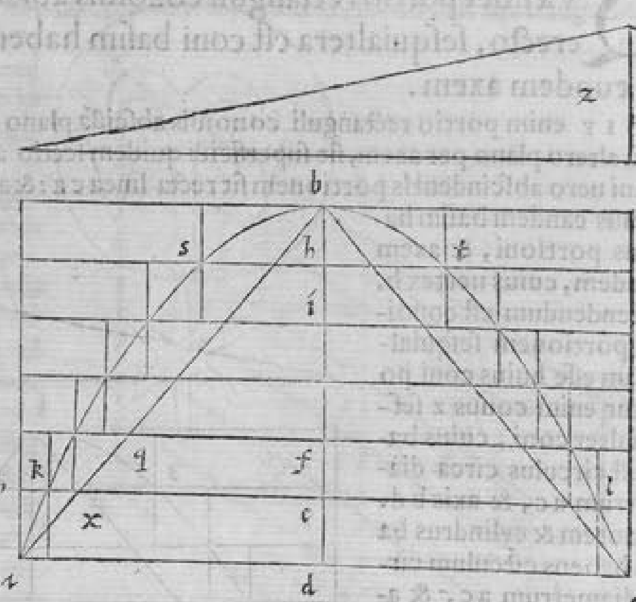
Sit enim portio rectanguli conoidis abscissa plano erecto super axem. & secta ipsa altero plano per axem, sit superficiei quidem sectio a b c rectanguli coni sectio: plani uero abscindentis portionem sit recta linea c a: & axis portionis b d: sit item conus eandem basim habens portioni, & axem eundem, cuius uertex b. Ostendendum est conoidis portionem sesquialteram esse huius coni. ponatur enim conus z sesquialter coni, cuius basis est circulus circa diametrum a c, & axis b d. Sit autem & cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiusdem coni est sesquialter. Dico portionem conoidis æqualem esse z cono. Si enim non est æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum maior, si fieri potest. & inscribatur figura solida in portione: & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans: ita ut circumscripta figura excedat



A

inscriptam

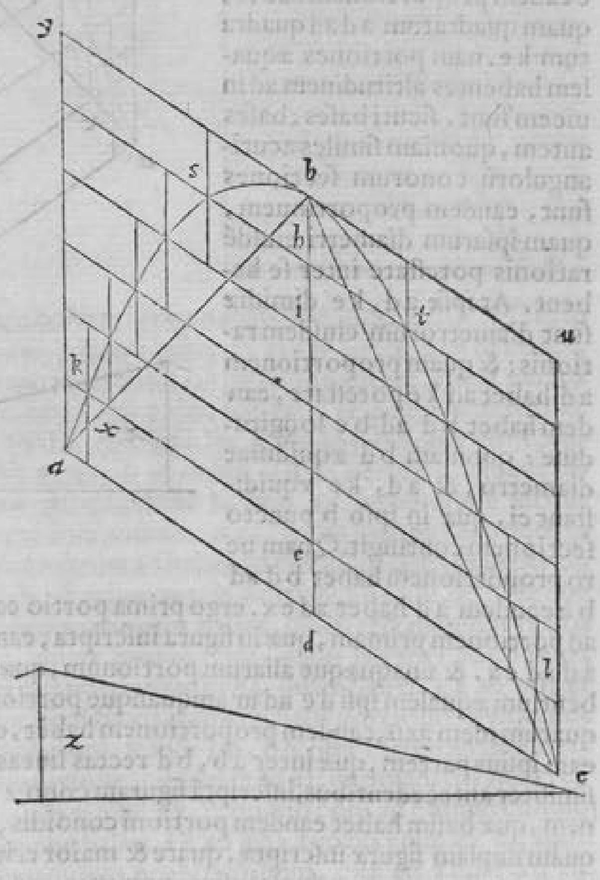
inscriptam magnitudine minori ea, qua portio conoidis excedit conum z: & cylin drorum, quibus constat figura circumscripta maximus quidem sit, qui basim habet circulum circa diametrum a c, & axem e d; minimus uero, qui basim habet circulum circa diametrum s t, & axem b h: cylindrorum autem, quibus figura inscripta constat, maximus sit basim habens circulum circa diametrum k l, & axem d e; & minimus, qui basim habet circulum circa diametrum s t, & axem h i. Itaque producantur plana cylindrorum omnium ad superficiem cylindri basim habentis circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit totus cylindrus diuisus in cylindros numero quidem æquales iis, qui sunt in circumscripta figura, magnitudine uero maxi
B mo ipsorum æquales. Et quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam,
C quàm portio conum: perspicuum est figuram inscriptam cono z maiorem esse. primus autem cylindrus eorum, qui in toto sunt cylindro, axem habens d e ad primũ cylindrum eorum, qui sunt in figura inscripta, cuius axis d e, eandem habet pro-
D portionem, quam d a ad k e potestate. hæc autem eadem est ei, quam b d ha-
E bet ad b e, & ei, quam d a ad e x. similiter ostendetur & secundus cylindrus eorum,
F qui sunt in toto cylindro axem habens e f ad secundum cylindrum eorum, qui in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc est d a ad q f. & aliorum cylindrorum unusquisque, qui in toto sunt cylindro ad cylindrum in figura inscripta, cuius idem sit axis, eam proportionem habebit, quam dimidia diametri ba
G sis habet ad eam ipsius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. & omnes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius basis est circulus circa diametrum a c, & axis d b ad omnes cylindros in figura inscripta contentos eandem habebunt proportionem, quam omnes semidiametri circulorum, qui sunt in basibus dictorum cylindrorum ad omnes rectas lineas inter a b & b d interiectas. Dictæ uero semidiametri sunt dictarum linearum dempta a d, maiores, quàm duplæ.
H quare & cylindri omnes, qui in toto sunt cylindro, cuius axis d b maiores sunt, quàm dupli inscri-
I ptæ figuræ. Totus igitur cylindrus, cuius axis d b maior est, quàm duplus inscriptæ figuræ. erat autem coni z duplus. ergo inscripta figura minor est cono z: quod fieri non potest; nanque ostensa est maior. non est igitur portio conoidis maior cono z. sed neque minor. Rursus enim inscribatur figura, & circumscribatur: ita ut altera alteram excedat magnitudine minori ea, qua conus z excedit conoidis portionem: & alia eadem prioribus
K construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & inscripta à circumscripta minus exceditur, quàm portio à cono: manifestum est circumscriptam minorem esse cono z. Rursum primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e ad primum cylindrum, qui est in figura circumscripta, cuius idem axis d e, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad semetipsum. secundus autem cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro axem habens e f ad secundum cylindrum in figura circumscripta, axem habentem eandem e f, eam habet proportio nem



nem, quam d a ad k e poteſtate. hæc autem eadem eſt ei, quam habet b d ad b e; & quam d a ad e x. & aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui in toto ſunt cylindro axem habentium æqualem ipſi d e ad unumquemque cylindrum eorum, qui ſunt in figura circumſcripta, quorum idem axis eſt, eam habebunt proportionem, quam dimidia baſis, ad eam ipſius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. er L.
go & omnes cylindri, qui in toto cylindro ſunt, cuius axis d b ad omnes cylindros in figura circumſcripta contentos eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes rectas lineas. omnes autem rectæ lineæ ex centris circulorum, qui ſunt cylindrorum baſes, linearum omnium, quæ ab ipſis abſcinduntur unà cum a d, minores ſunt, quàm duplæ. conſtat igitur & cylindros omnes, qui ſunt in toto cylindro, minores eſſe, quàm duplos cylindrorum, qui in circumſcripta figura continentur. Quare cylindrus baſim habens circulum circa diametrum a c, & axim b d minor eſt, quàm duplus circumſcriptæ figuræ. non eſt autem minor, ſed maior, quàm duplus: eſt enim duplus coni z: & figura circumſcripta minor oſtenſa eſt cono z. non eſt igitur conoidis portio cono z minor. ſed neque maior, ut oſtenſum eſt. ſequitur ergo, ut ſeſquialtera ſit coni, qui baſim habet eandem portioni, & axem eundem.

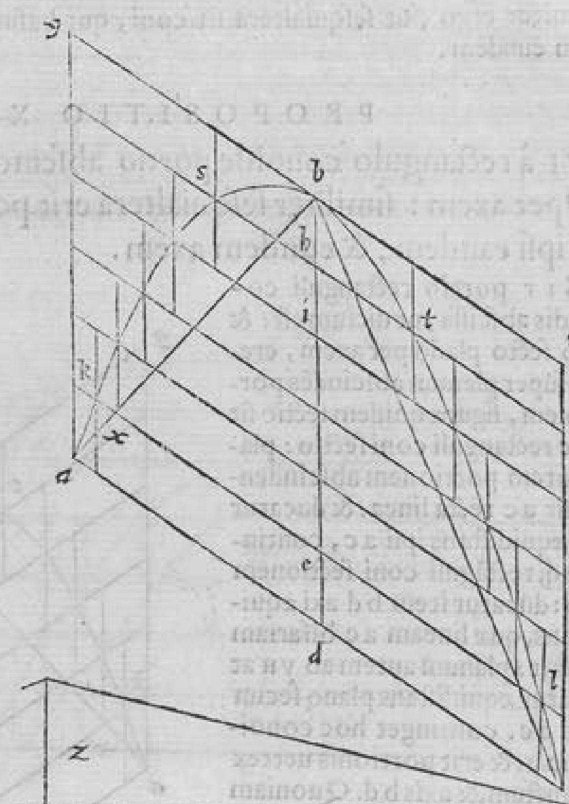
PROPOSITIO XXIIII.

SI à rectangulo conoide portio abſcindatur plano non erecto ſuper axem: ſimiliter ſeſquialtera erit portionis coni, baſim habentis ipſi eandem, & eundem axem.



Sit portio rectanguli co-
noidis abſciſſa, ut dictum eſt: &
ipſo ſecto plano per axem, ere-
cto ſuper planum abſcindẽs por-
tionem, figuræ quidem ſectio ſit
a b c rectanguli coni ſectio: pla-
ni autem portionem abſcinden-
tis ſit a c recta linea: & ducatur
y u æquidiſtans ipſi a c, contin-
gensq; rectãguli coni ſectionem
in b: ducatur item b d axi æqui-
diſtans, quæ lineam a c bifariam
ſecabit: planum autem ab y u at A
tollatur æquidiſtans plano ſecun
dum a c. continget hoc conoi-
des in b: & erit portionis uertex
b punctum, & axis b d. Quoniam
igitur planum ſecundum a c non
erectum ſuper axem ſecuit co-
noides: ſectio eſt acutianguli co
ni ſectio, cuius maior diameter B
a c. Et cum acutianguli coni ſe-
ctio ſit circa diametrum a c: &
recta linea b d à centro ſectionis
coni acutianguli eleuata, nõ per
pendicularis in plano ex diame-
tro erecto ſuper planum, in quo
acutianguli coni ſectio exiſtit:
fieri poteſt, ut cylindrus inuenia
tur axem habens in recta linea b C

d; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio. fieri itidem potest, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum, in cuius superficie sit ipsa acutianguli coni sectio. eritq; portio cylindri quædam basim habens sectionem coni acutianguli circa diametrum a c, axem autem b d: & coni item portio basim habens eandem ipsis, & eundem axem. Ostendendum est conoidis portionem sesquialteram esse portionis huius coni. Sit enim z conus sesquialter dictæ portionis. erit iam cylindri portio basim habens eandem portioni conoidis, & axem eundem, dupla coni z. nanque hic sesquialter est portionis coni, quæ basim habet eandem portioni conoidis, & eũ
11.huius dem axem: portio autem coni dicta tertia pars est portionis cylindri basim habentis eandem portioni, & axem eundem. Itaque necessarium est, conoidis portionem æqualem esse cono z. Si enim non est æqualis, uel maior est, uel minor. Sit primum si fieri potest, maior: inscribaturq; portioni quædam solida figura, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quã quo portio conoidis excedit conũ
E z. & plana portionum pertingent ad superficiem portionis, basim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. Rursus prima portio earũ, quæ sunt in tota portione axem habens d e ad portionem primam in figura inscripta, cuius axis d e eãdem proportionem habet, quam quadratum a d ad quadra
F tum k e. nam portiones æqualem habentes altitudinem ad in
G uicem sunt, sicuti bases: bases autem, quoniam similes acutiangulorũ conorum sectiones sunt, eandem proportiouem, quam ipsarum diametri eiusdẽ rationis potestate inter se habent. At ipsæ a d, k e dimidiæ sunt diametrorum eiusdem rationis: & quam proportionem
H a d habet ad k e potestate, eandem habet b d ad b e longitudine: quoniam b d æquidistat diametro, & a d, k e æquidistant ei, quæ in ipso b puncto sectionem contingit. Quam uero proportionem habet b d ad b e eandem a d habet ad e x. ergo prima portio earum, quæ sunt in tota portione, ad portionem primam, quæ in figura inscripta, eandem proportionem habebit, quã a d ad e x. & unaquæque aliarum portionum, quæ sunt in tota portione, axem habentium æqualem ipsi d e ad unamquanque portionnm, quæ sunt in figura inscripta, quarum idem axis, eandem proportionem habet, quam dimidia diametri basium ad eam ipsius partem, quæ inter a b, b d rectas lineas interiicitur. Ostendetur autem similiter antecedentibus, inscriptã figuram cono z maiorem esse: & cylindri portionem, quæ basim habet eandem portioni conoidis, & axem eundem, maiorem esse, quàm duplam figuræ inscriptæ. quare & maior erit, quàm dupla coni z: quod fieri non potest: erat enim dupla ipsius. non ergo conoidis portio maior est cono z. Eadem

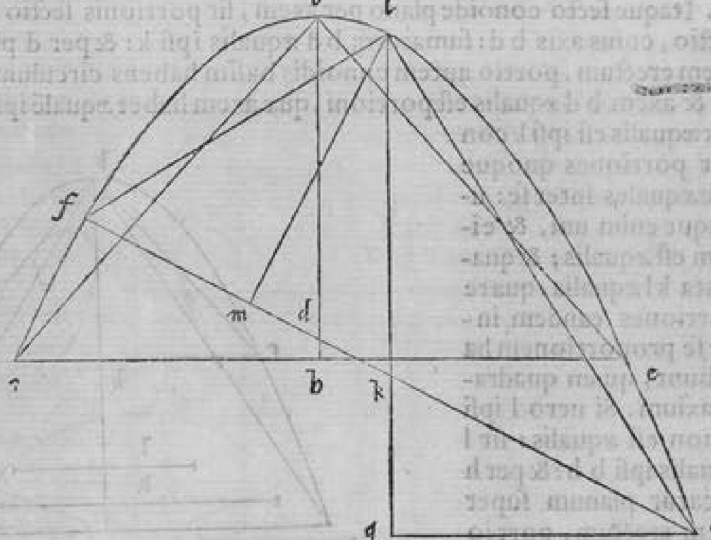


dem ratione neque minor oſtendetur. ex quibus æqualem eſſe conſtat. conoidis igitur portio ſeſquialtera eſt portionis coni baſim habẽtis eadem ipſi, & axem eundẽ.

PROPOSITIO XXV.

SI rectanguli conoidis duæ portiones abſcindantur; altera quidem plano ſuper axem erecto, altera autem non erecto: et ſint portionum axes æquales: ipſæ quoque portiones æquales erunt.

ABSCINDANTUR enim rectanguli conoidis duæ portiones, ut dictum eſt: ſectoq; conoide plano per axem, et altero plano ſuper axem erecto, ſit conoidis ſectio abc rectanguli coni ſectio, cuius diameter, bd: ſectiones autem planorum ſint af, ec rectæ lineæ; plani quidem ſuper axem erecti ipſa ec; non erecti uero af: axes portionum ſint bh, kl, æquales inter ſeſe: et uertices puncta bl. Oſtendendum eſt, portionem conoidis, cuius uertex b portioni eiuſdem, cuius uertex l æqualem eſſe. Quoniã enim ab eadem rectanguli coni ſectione duæ portiones abſcinduntur, uidelicet alf, ebc: et ſunt ipſarum diametri kl, hb æquales: triangulum alk æquale erit triangulo ehb: 4.huius oſtenſum enim eſt alf triangulum triangulo ebc æquale eſſe. ducatur



aq perpendicularis ad ipſam kl productam. et quoniam ſunt æquales bh, kl: et ipſæ eh, aq æquales erunt. Itaque in portione, cuius uertex b, deſcriptus ſit conus, A
baſim habens eandem portioni, & axem eundem: in portione autem, cuius uertex l ſit deſcripta coni portio, quæ eandem ipſi baſim habeat, et eundem axem: et ducatur ab l perpendicularis lm ad df. erit ipſa lm altitudo portionis coni, cuius uertex l. Sed coni portio, cuius uertex l: et conus, cuius uertex b habent in- B
ter ſe proportionem compoſitam ex proportione baſium, et proportione altitudinum. proportionem igitur habent compoſitam ex ea, quam ſpatium acutianguli coni ſectione contentum circa diametrum af habet ad circulum circa diametrum ec: et ex ea, quam habet lm ad bh. ſpatium autem acutianguli coni ſectione con 6.huius
tentum ad eundem circulum eam proportionem habet, quam rectangulum ex diametris ſectionis ad quadratum ec. quare portio coni, cuius uertex l ad conum, C
cuius uertex b compoſitam habet proportionem ex ea, quam habet ka ad eh; et ex ea, quam lm ad bh. etenim ka dimidia eſt diametri baſis portionis coni, cuius uertex l: & eh dimidia diametri baſis coni: & ipſæ lm, bh ſunt earum altitudines. habet autem lm ad bh eandem proportionem, quam & ad kl; quoniam bh ipſi kl eſt æqualis: habetq; lm ad kl eam, quam qa ad ak. & portio coni ad conum compo D
ſitam habet proportionem ex ea, quam habet ak ad aq; æqualis enim eſt aq ipſi eh: & ex ea, quam lm ad bh. Earum autem proportionum, quæ eſt ak ad aq ea- E

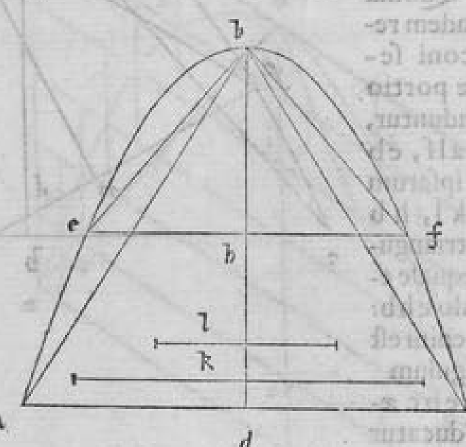
 dem

dem est ei, quæ lk ad lm. Quare portio coni ad conum proportionem habet eam, quam lk ad lm, & quam lm ad bh. & est æqualis bh ipsi kl. perspicuum est igitur portionem coni, cuius uertex l æqualem esse cono, cuius uertex b. unde apparet portiones quoque esse æquales: quoniam altera quidem earum coni sesquialtera est; altera uero sesquialtera portionis coni, illis inter sese æqualibus existentibus.

PROPOSITIO XXVI.

Si rectanguli conoidis duæ portiones abscindãtur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter sese proportionem habebunt, quam ipsarum axium quadrata.

ABSCINDANTVR enim rectanguli conoidis duæ portiones, utcunque contigerit: sitq; k linea æqualis axi unius portionis: & l axi alterius æqualis. Ostendendum est, portiones eandem inter se proportionem habere, quam habent kl quadrata. Itaque secto conoide plano per axem, sit portionis sectio abc rectanguli coni sectio, cuius axis bd: sumaturq; bd æqualis ipsi k: & per d planum ducatur super axem erectum. portio autem conoidis basim habens circulum circa diametrum ac, & axem bd æqualis est portioni, quæ axem habet æqualẽ ipsi k. Si quidem igitur & k æqualis est ipsi l: constat portiones quoque esse æquales inter se: utraque enim uni, & eidem est æqualis; & quadrata kl æqualia. quare portiones eandem inter se proportionem habebunt, quam quadrata axium. Si uero l ipsi k non est æqualis: sit l æqualis ipsi bh: & per h ducatur planum super axem erectum. portio autem basim habens circulum circa diametrum



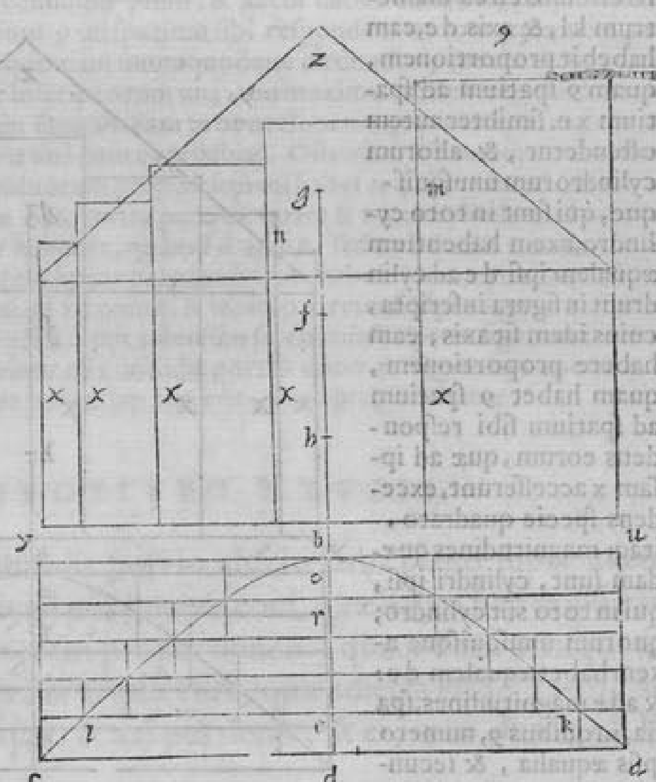
ef, & axem bh æqualis est portioni, quæ axem habet æqualem ipsi l. Describantur duo coni, quorum bases quidem sint circuli circa diametros ac, ef, uertex autem punctum b. Itaque conus, cuius axis bd ad conum, cuius axis bh proportionem habet compositam ex ea, quam habet ad ad he potestate: & ex ea, quam bd habet ad bh longitudine. Quam uero proportionem habet ad ad he potestate, eandem habet longitudine bd ad bh. Conus igitur, cuius axis bd ad conum, cuius axis bh compositam habet proportionem ex ea, quam habet db ad hb: & ex ea, quam db ad hb: hæc autem eadem est ei, quam db quadratum habet ad quadratum hb. At quam proportionem habet conus, cuius axis bd ad conum, cuius axis hb, eandem habet portio conoidis axem habens db ad portionem habentem axem hb; utraque enim sesquialtera est. & portioni quidem axem habenti bd æqualis est portio conoidis axem habens æqualem ipsi k: portioni uero axem habenti hb æqualis est conoidis portio, quæ axem habet æqualem ipsi l: & ipsi quidem bd æqualis est k: ipsi uero hb æqualis l. perspicuum est igitur portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipsi k eandem proportionem habere ad portionem conoidis, quæ axem habet æqualem ipsi l, quam quadratum k ad quadratum l.

PROPO-

PROPOSITIO XXVII.

QVælibet portio obtusianguli conoidis abscissa plano super axem erecto ad conum basim eandem habentem ipsi, & axem eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea: & quæ est æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet A ad lineam utrisque æqualem: & axi portionis, & ei, quæ dupla est lineæ ad axem adiectæ.

Sit portio obtusianguli conoidis abscissa plano super axem erecto: & secto ipso conoide altero plano per axem, sit conoidis quidem sectio a b c obtusianguli coni sectio: plani uero abscindentis portionem, sit c a recta linea: axis portionis b d: linea ad axem adiecta b h: & ipsi b h æqualis sit f h, & f g. Ostendendum est, portionem ad conum; qui basim eandem habet portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam g d ad f d. Itaque sit cylindrus eandem basim habens portioni, & axem eundem, cuius latera u a, c y: & sit item conus aliquis z, qui ad conum basim eandem habentem portioni, & axem b d, eam proportionem habeat, quam g d ad d f. dico portionem conoidis æqualem esse z cono. Si enim non est æqualis, uel maior est, uel minor. Sit primum, si fieri potest, maior: Inscribaturq; in portione figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus constans; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quàm quo



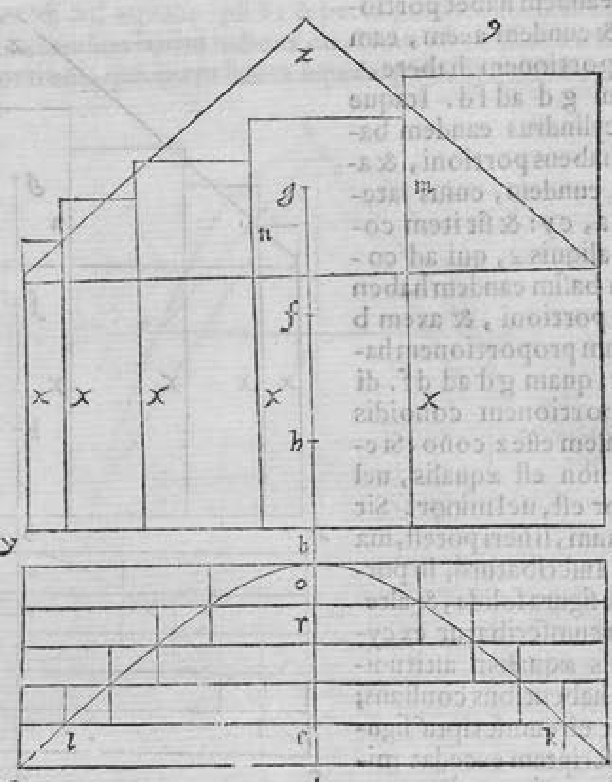
portio conoidis excedit z conum. Educantur plana omnium cylindrorum ad superficiem cylindri eius, qui basim habet circulum circa diametrum a c, & axem b d. erit iam totus cylindrus diuisus in cylindros numero quidem æquales iis, qui sunt in figura circumscripta, magnitudine autem maximo illorum æquales. Et quoniam B circumscripta figura inscriptam minus excedit, quàm portio conum z: & circumscripta figura maior est ipsa portione: sequitur & figuram inscriptam cono z maiorem esse. Sit igitur b r tertia pars ipsius b d. erit g d ipsius h r tripla. Et quoniam C. D cylindrus basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d, ad conum basim habentem eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h r: habet autem & dictus conus ad conum z eam, quam f d ad g d: proportioni- E bus non similiter ordinatis, habebit dictus cylindrus ad z conum proportionem

 eandem,

eandem, quam f d ad h r. sint lineæ positæ, in quibus x, numero quidem æquales partibus, quæ sunt in linea b d, magnitudine uero unaquæque ipsi f b æqualis: & ad unamquanque ipsarum accedat spatium excedens specie, quadrato; quorum maximum sit rectangulo f d b æquale, minimum æquale ipsi f o b: latera autem excessuum æqualiter se se excedunt: nam quæ sunt ipsis æquales in linea b d se se æqualiter excedunt: & sit excessus maximi latus, in quo m æquale b d, minimi uero æquale b o. Sint & alia spatia, in quibus 9, numero quidem ipsis æqualia, magnitudine uero unumquodque æquale maximo, quod lineis f d, d b continetur. Itaque cylin

A drus basim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum habentem basim circulum circa diametrum k l, & axem d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e potestate. hæc autem eadem est ei, quam habet rectangulum f d b ad

F rectangulum f e b. quod in omni obtusianguli coni sectione contingit; nam dupla eius, quæ ad axem adiecta est, hoc est eius, quæ ex centro, transuersum est figuræ latus. & est rectangulo f d b æquale spatium x m: & rectangulo f e b æquale x n; quòd linea x æqualis sit lineæ f b: linea uero n ipsi b e, & m ipsi b d. Cylindrus igitur basim habens circulum circa diametrum a c, & axem d e ad cylindrum, cuius basis circulus circa diametrum k l, & axis d e, eam habebit proportionem, quam 9 spatium ad spatium x n. similiter autem ostendetur, & aliorum cylindrorum unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium æqualem ipsi d e ad cylindrum in figura inscripta, cuius idem sit axis, eam habere proportionem, quam habet 9 spatium ad spatium sibi respondens eorum, quæ ad ipsam x accesserunt, excedens specie quadrato. itaq; magnitudines quædam sunt, cylindri ipsi, qui in toto sũt cylindro; quorum unusquisque axem habet æqualem d e: & aliæ magnitudines, spatia, in quibus 9, numero ipsis æqualia, & secundum quæque duo proportionem eandem habentia; quoniam & cylindri æquales sunt inter se se; & spatia item 9 inter se se æqualia. referunturq; horum cylindrorum aliqui ad alios cylindros, qui sunt in figura in-



B scripta: extremus autem ad nullum refertur. & spatiorum, in quibus 9 aliqua referuntur ad alia spatia, quæ ad x accesserunt, excedentia specie, quadrato, & propor

G tionibus respondentia: extremum uero ad nullum refertur. manifestum ergo est, & omnes cylindros, qui in toto cylindro sunt ad cylindros omnes in figura inscripta cõ

H tentos, eandem habere proportionem, quam omnia spatia 9 ad omnia accedentia

I ad x, dempto maximo. ostensum est autem, omnia spatia 9 ad illa omnia, dempto maximo, maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utrisque æqualem.

lem. & dimidiæ ipsius x; & tertiæ parti m. Quare & totus cylindrus ad inscriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm f d ad h r. quam quidem proportionem cylindrus totus habet ad conum z, ut ostensum est. maiorem ergo proportionem habet cylindrus totus ad figuram inscriptam, quàm ad conum z: & propterea maior est conus z figura inscripta: quod fieri non potest. ostensum est enim figuram inscriptam z cono maiorem esse. non est igitur conoidis portio maior cono z, sed neque minor. Sit enim minor, si fieri potest. Rursus inscribatur in portione solida figura, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo conus portionem excedit: & alia eadem construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & circumscripta minus excedit inscriptam, quàm conus z portionẽ; constat & circumscriptam figuram minorem esse cono z. Rursus cylindrus primus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumscripta figura contentum, cuius axis d e, eam proportionem habet, quam spatium 9 ad ipsum m x: utrunque enim est æquale, & aliorum cylindrorum unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium æqualem d e, ad cylindrum, qui est in circumscripta figura secundum ipsum, & axem habet eundem, eam habebit proportionem, quam spatium 9 ad spatium sibi respondens eorum, quæ ad x accesserunt unà cum excessu: quoniam unumquodque circumscriptorum dempto maximo, æquale est unicuique inscriptorum unà cum maximo. habebit igitur & totus cylindrus ad circumscriptam figuram eam proportionem, quam omnia spatia 9 ad spatia, quæ ad x accesserunt unà cum excessibus. Ostensum est autem rursus omnia spatia 9 ad alia omnia minorem proportionem habere, quàm x m ad lineam æqualem utrisque: & dimidiæ x, & tertiæ parti m. quare & totus cylindrus ad circumscriptam figuram minorem habebit, quàm f d ad h r. sed ut f d ad h r, ita totus cylindrus ad z conum. minorem igitur proportionem habet idem cylindrus ad circumscriptam figuram, quàm ad z conum; & idcirco circumscripta figura maior erit z cono: quod esse non potest, cum ostensum sit circumscriptam figuram z cono maiorem esse. non igitur minor est conoidis portio cono z. Quoniam autem neque maior est, neque minor: ostensum iam erit, quod proponebatur.

H

K

L

PROPOSITIO XXVIII.

SI obtusianguli conoidis portio abscindatur plano super axem non erecto: habebit ad portionem coni, quæ basim habet ipsi eandem, & axem eundem, eam proportionem, quam linea utrisque æqualis: & axi portionis, & triplæ eius, quæ adiecta est ad axem, ad lineam æqualem utrisque; & axi portionis, & ei, quæ dupla est lineæ ad axem adiectæ.

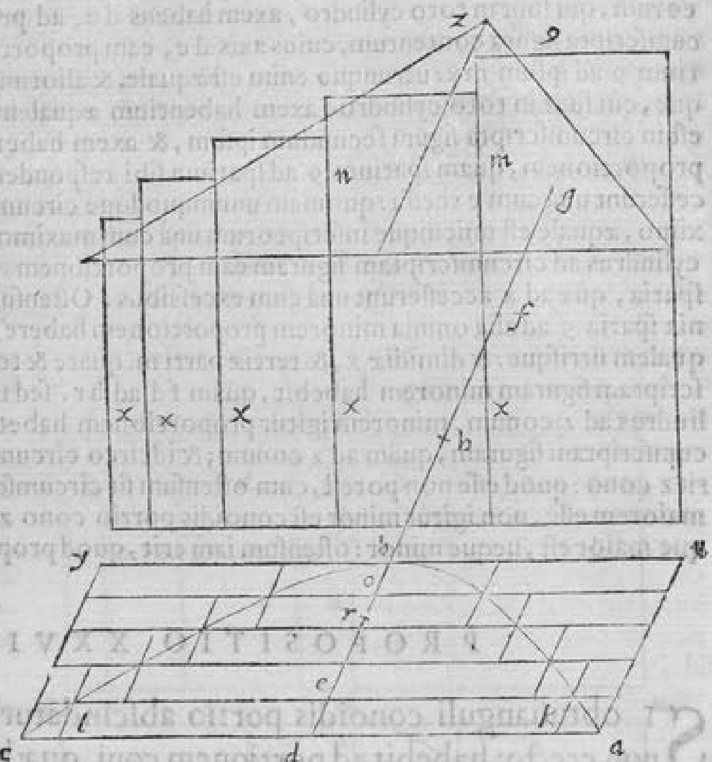
SIT enim portio obtusianguli conoidis abscissa plano, ut dictum est: & secta figura altero plano per axem, erecto super planum portionem abscindens, sit figuræ quidem sectio a b c obtusianguli coni sectio: plani uero abscindentis portionem recta linea c a: & uertex coni continentis conoides sit h punctum. ducaturq; per b linea u y æquidistans lineæ a c: & contingens coni sectionem in b: & ab h ad b linea ducta producatur. secabit eadem ratione bifariam ipsam a c: & erit b punctum portionis uertex: axis b d: & b h linea ad axem adiecta. ipsi autem b h æqualis sit & h f & f g: & ab ipsa u y planum attollatur æquidistans plano secundum a c; quod conoides in b puncto continget. Et quoniã planũ secundum a c, non erectum super axẽ secuit conoides: sectio erit acutiãguli coni sectio, cuius diameter maior c a. Itaq; cũ acutianguli coni sectio sit circa diametrũ a c: & linea b d à cẽtro sit eleuata nõ perpẽdicularis

A

B

C

dicularis in plano, quod est à diametro ipsa erectum super planum, in quo acutianguli coni sectio consistit: cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. hoc igitur inuento, erit aliqua portio cylindri basim habens eandem portioni conoidis, &
E eundem exem; cuius altera basis erit planum secundum u y. Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentem punctum b; in cuius superficie sit acutianguli co
F ni sectio, circa diametrum a c. hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem. Ostendendum est, conoidis portionem ad portionem coni dictam, eandem proportionem habere, quam g d ad d f. Quam ue
G ro proportionem habet g d ad d f, habeat conus z ad portionem coni. Dico portionem conoidis cono z esse æqualem: si enim nõ est æqualis, sit maior si fieri potest. inscribatur autem in conoidis portione figura solida, & altera circumscribatur, ex cylindrorum portionibus eandem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta figura excedat inscriptam minori excessu, quàm quo portio conoidis excedit conum z. Quoniam igitur circumscripta figura, quæ portione maior est, minus excedit inscriptam, quàm portio conum z: sequitur inscriptam figuram cono z maiorem esse. educantur plana portionum omnium in figura inscriptarum. pertingent ea, ad superficiem portionis cylindri basim habentis eandem portioni conoidis, & axem eundem. & sit b r pars tertia ipsius b d: & alia eadem superioribus fiant. Rursus prima portio earum, quæ sunt in tota cylindri portione, habens axem d e ad primam portionem in figura inscripta, axem habentem d e, eam habet proportionem, quam a d quadratum ad quadratum k e. portiones enim, quarum altitudo est æqualis, eam inter se propor
H tionem habent, quam ipsarum bases. bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectiones sint, habent eam, quam eiusdem rationis diametri potestate inter
I se habent. Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, ean
K dem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b; quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniunt: & ipsæ a d, k e æquidistantes sunt ei, quæ in puncto b contingit. est autem rectangulum f d b æquale spacio 9: & rectangulum f e b æquale ipsi x n. quare prima portio earum, quæ sunt in tota portione, axem habens d e ad primam portionem in figura inscripta habentem axem



de,

d e, eandem habet proportionem, quam ſpatium 9 ad x n ſpatium: & unaquæque aliarum portionum, quæ ſunt in tota portione, axem habentium æqualem ipſi d e ad portionem in figura inſcripta, quæ eſt ſecundum ipſam, & axem habet ipſi d e æqualem, eam proportionem habet, quam ſpatium 9 ad ſpatium ſibi reſpondens eorum, quæ ad x acceſſerunt, excedunt q; ſpecie, quadrato. Rurſus ſunt quædam magnitudines, portiones ſcilicet in tota portione contentæ: & aliæ item magnitudines, ſpatia in quibus 9, numero quidem æquales portionibus, & ſecundum quaſque duas eandem ipſis proportionem habent: referuntur q; portiones ad portiones alias, quæ ſunt in figura inſcripta: ſed extrema portio ad nullam refertur. ſpatia uero 9 ad alia ſpatia referuntur, quæ ad x acceſſerunt, excedentia ſpecie quadratis, & portionibus reſpondentia; extremum autem ad nullum refertur. Perſpicuũ eſt igitur & omnes portiones ad alias omnes eandem habere proportionem, quam ſpatia omnia 9 ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo. At uero ſpatia 9 omnia ad omnia, quæ ad x acceſſerunt, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm linea m x ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. Quare tota portio ad inſcriptam figuram maiorem proportionem habet, quàm linea x m ad eam, quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ x; & tertiæ parti m: & propterea maiorem, quam f d ad h r. maiorem igitur proportionem habet tota portio ad inſcriptam figuram, quàm ad z conum: quod fieri non poteſt. oſtenſum nanque eſt figuram inſcriptam cono z maiorem eſſe. non ergo maior eſt conoidis portio cono z: Quòd ſi conoidis portio cono z minor ponatur, inſcripta in portione ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minori exceſſu, quàm quo conus portionem excedit: rurſus ſimiliter oſtendetur, circumſcriptam minorem eſſe cono z; & cylindri portionem, quæ baſim habet portioni eandem, & axem eundem ad figuram circumſcriptam minorem proportionem habere, quam ad z conum; quod item fieri non poteſt. non eſt igitur neque minor conoidis portio cono z. Quare manifeſte conſtat, quod fuerat propoſitum.

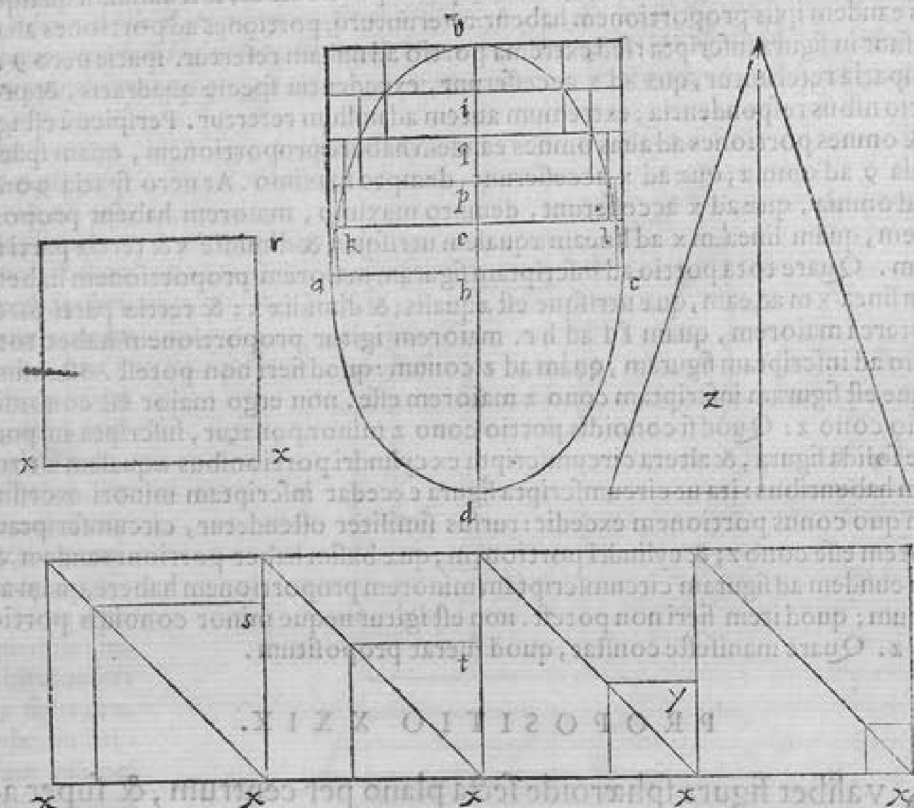
PROPOSITIO XXIX.

Qvalibet figura ſphæroide ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto, dimidium ſphæroidis duplum eſt coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem.

Sit enim ſphæroidis figura ſecta plano per centrum, & ſuper axem erecto: & ipſa ſecta altero plano per axem, ſit figuræ quidem ſectio a b c d acutianguli coni ſectio, cuius diameter, & axis ſphæroidis b d, centrum h. (nihil enim refert, utrum b d ſit maior diameter ſectionis coni acutianguli, an minor) plani uero ſecantis figuram, ſit ſectio recta linea c a. tranſibit ipſa per h: & rectos faciet angulos cum linea b d: quoniam planum ponitur per centrum duci, & erectum eſſe ſuper axem. Oſtendendum eſt dimidiam ſphæroidis portionem, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c & uerticem b, duplam eſſe coni baſim habentis portioni eandem, & axem eundem. Sit enim conus aliquis, in quo z, duplus coni, qui baſim habet eandem portioni, & eundem axem, uidelicet h b. Dico dimidium ſphæroidis æquale eſſe cono z. ſi enim non eſt æquale. Sit primum maius, ſi fieri poteſt, & inſcribatur in dimidia portione ſphæroidis, ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita, ut circumſcripta figura inſcriptam excedat minori exceſſu, quàm quo dimidium ſphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circũſcripta figura maior eſt dimidio ſphæroide: & minus excedit figuram inſcriptam, quàm dimidiũ ſphæroidis conum z: conſtat & inſcriptam in dimidia ſphæroidis portione figuram cono z maiorem eſſe. itaque ſit cylindrus baſim habens circulum circa diametrũ a c, axem uero b d, et quoniã hic cylindrus triplus eſt coni baſim haben-

tis

tis portioni eandem, & axem eundem: & conus z duplus est eiusdem coni: sequitur cylindrum coni z esse sesquialterum. Educantur iam plana cylindrorum omnium, ex quibus constat inscripta figura. pertingent hæc ad cylindri superficiem, qui basim habet eandem portioni, & axem eundem: atque erit totus cylindrus diuisus in cylindros, numero quidem æquales iis, qui sunt in circumscripta figura, magnitudine uero æquales maximo illorum. Sint præterea lineæ positæ in quibus x x, numero



æquales partibus rectæ lineæ b h: & magnitudine ipsi b h æquales. Ab unaquaque autem illarum quadratum describatur. & ab extremo quadrato auferatur gnomon, latitudinem habens æqualem b i. erit hic æqualis rectangulo b i d. At uero à quadrato illi proximo gnomon auferatur, qui latitudinem habeat ipsius b i. duplam: atque erit hic rectangulo d q b æqualis: semperq; à quadrato sequente gnomon auferatur latitudinem habẽs una parte maiorem, quã sit latitudo gnomonis proxime ablati. erit ipsorum unusquisque æqualis rectangulo partibus b d contento; quarum altera pars gnomonis latitudini est æqualis; & à quadrato secundo reliquum erit quadratum latus habens æquale ipsi h e. Cylindrus autem primus eorum, qui sunt in toto cylindro axem habens b e ad primum cylindrum in figura inscripta, cuius idem est axis, eam habet proportionem, quam quadratum a h ad quadratum k e. quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d. ergo cylindrus ad cylindrum eam habet, quam primum quadratum ad gnomonem à secundo quadrato ablatum. Similiter & aliorum cylindrorum unusquisque axem habentium æqualem ipsi h e ad cylindrum in figura inscripta, cuius idem est axis, eam habet proportionem, quam quadratum ipsi respondens ad gnomonem à quadrato proxime sequenti ablatum. Sunt igitur magnitudines quædam, cylindri ipsi, qui in toto sunt cylindro; & aliæ magnitudines, quadrata, quæ fiunt à lineis x x, numero æquales cylindris; & quæque duæ eandem habent proportionem. referuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros scilicet, qui sunt in figura inscripta; at extremus ad nullũ refertur: & quadrata

drata itē referuntur ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, respondentia iisdem proportionibus; extremum autem quadratum ad nullum refertur. Quare omnes cylindri, qui in toto sunt cylindro, ad alios cylindros omnes eandem habebunt proportionem, quam omnia quadrata ad gnomones omnes ab ipsis ablatos. ergo cylindrus basim habens eandem portioni, & axem eundem, ad inscriptam figuram eam proportionem habet, quam quadrata omnia ad omnes gnomones ab ipsis ablatos. Quadrata autem, gnomonum omnium ablatorum ab ipsis maiora sunt, quàm sesquialtera. nam sunt quædam lineæ positæ x r, x s, x t, x y, x u sese æqualiter excedentes, & minima excessui est æqualis; sunt etiam aliæ lineæ, in quibus x x, numero quidem æquales illis, magnitudine uero unaquæque maximæ illarum æqualis. Quadrata igitur linearum omnium, quæ sunt æquales maximæ, quadratorum omnium linearum, quæ se se æqualiter excedunt, minora sunt, quàm tripla: reliquorum autem, dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla. hoc enim in iis, quæ de spiralibus lineis edidimus, demonstratum est. Quoniam autem quadrata omnia minora sunt, quàm tripla aliorum quadratorum, quæ ab ipsis ablata fuerunt: perspicuum est reliquorum spatiorum maiora esse, quàm sesquialtera. gnomonum igitur omnium maiora sunt, quam sesquialtera. quare & cylindrus basim habens eādem portioni, & axem eundem, maior est, quàm sesquialter inscriptæ figuræ; quod fieri nullo modo potest. est enim coni z sesquialter: & inscripta figura maior ostensa est cono z. non ergo dimidium sphæroidis cono z maius erit. sed neque minus. Sit enim minus, si fieri potest. Rursus inscribatur in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris, qui æqualem altitudinem habeant: ita ut circumscripta figura inscriptam minus excedat, quàm conus z dimidium sphæroidis. & alia eadem prioribus construantur. Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: constat & circumscriptam cono z minorem esse. Rursum primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens h e, ad primum cylindrum in figura circumscripta, cuius axis h e, eam habet proportionem, quam primū quadratum ad semetipsum. secundus autem cylindrus, eorum, qui in toto cylindro, habens axem e p ad secundum cylindrum in circumscripta figura, cuius axis e p, eandem habet, quam quadratum secundum ad gnomonem ab ipso ablatum. & aliorum cylindrorum unusquisque, qui in toto cylindro sunt, axem habentium æqualem ipsi h e ad cylindrum in figura inscripta, qui est secundum ipsum, eandem proportionem habet, quam quadratum ei respondens ad gnomonem ab ipso ablatum. circumscripta & omnes igitur cylindri, qui sunt in toto cylindro ad cylindros omnes, qui in figura circumscripta, eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id, quod est æquale primo quadrato, & gnomonibus iis, qui a reliquis quadratis auferuntur. Quadrata autem omnia minora sunt, quàm sesquialtera eius, quod est æquale primo quadrato, & gnomonibus, qui à reliquis sunt ablati; propterea, quòd quadratorum, quæ fiunt à lineis se se æqualiter excedentibus, dempto eo, quòd à maxima, maiora sunt, quàm tripla. Cylindrus igitur basim habens eandem portioni, & eundem axem, minor est, quàm sesquialter circumscriptæ figuræ; quod fieri non potest: est enim coni z sesquialter; & circumscripta figura minor ostensa est z cono. non ergo dimidium sphæroidis cono z minus erit. & quoniam neque maius est, neque minus: necessario erit æquale.

C

PROPOSITIO XXX.

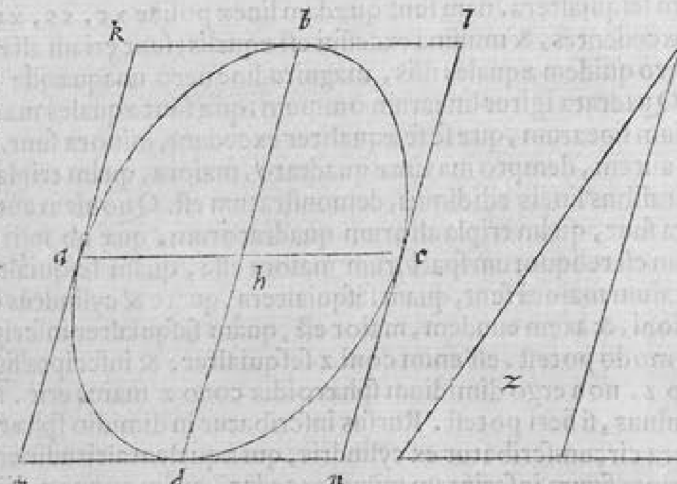
Si sphæroides figura secetur plano per centrum ducto, & non erecto super axem: similiter dimidium sphæroidis duplum erit portionis coni, quæ basim habeat portioni eandem, & eundem axem.

Secetur enim figura sphæroides, ut dictum est: & ipsa secta altero plano per

M axem,

axem, erecto super planum secans, sit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio, cuius centrum h: plani uero secantis figuram sit a c recta linea. transibit igitur ipsa per h; quoniam planum ponitur per centrum transire: atque erit acutianguli coni sectio quædam circa diametrum a c; cum positum sit planum secans non esse erectum super axem. Ducantur quædam lineæ k l, m n æquidistantes ipsi a c, contingentesq; acutianguli coni sectionem in punctis b d: & ab ipsis k l, m n plana attollantur æquidistãtia plano secundum a c. continget hæc sphæroides in b d pũctis: quæque ipsa b d iungit recta linea per h transibit: & erũt portionum uertices b d: axes uero b h, h d. Itaque possumus cylindrum inuenire, axem habentem b h; in cuius superficie sit acutianguli coni sectio circa diametrum a c. Hoc autem inuento, erit quædam portio cylindri, quæ eandem basim habeat dimidio sphæroidi, & axem eundem. Rursus & conum inuenire possumus, uerticem habentem punctum b, in cuius superficie acutianguli coni sectio consistat, circa diametrum a c: atque eo inuento, erit portio coni, quæ eandem portioni basim, & axem habeat eundem. Dico iam sphæroidis dimidium duplum esse huius coni portionis. Sit conus z duplus portionis coni. & si quidem dimidium sphæroidis non est æquale cono z: sit primum maius, si fieri potest: inscribaturq; in dimidio sphæroidis figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus æqualem habentibus altitudinem; ita ut circumscripta figura inscriptam excedat minori excessu, quàm quo dimidium sphæroidis eycedit conum z. Similiter iis, quæ prius dicta sunt, ostendetur inscripta figura maior cono z: & portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem, ipsius quidem z coni sesquialtera; figuræ uero in dimidio sphæroidis inscriptæ, maior, quàm sesquialtera: quod fieri non potest. non est igitur dimidium sphæroidis cono z maius. Quòd si minus ponatur esse: inscribatur in dimidio sphæroide figura solida, & altera circumscribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus; ita ut circumscripta excedat inscriptam minori excessu, quàm quo z conus dimidium sphæroidis excedit. Rursus similiter ostendetur circumscripta figura cono z minor: & portio cylindri, quæ basim habeat portioni eandem, & axem eundem, ipsius quidem coni z sesquialtera; circumscriptæ uero figuræ minor, quàm sesquialtera: quod item fieri non potest. non erit igitur neque minus dimidium sphæroidis cono z. Quoniam autem neque maius est, neque minus: sequitur, ut sit æquale. Vnde constat, quod oportebat demonstrare.

A



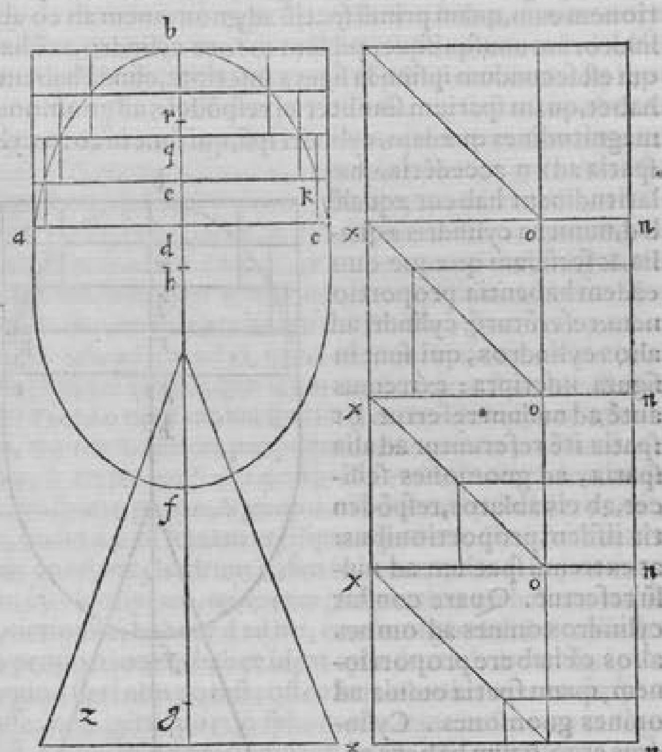
B

PROPOSITIO XXXI.

QVALIBET figura sphæroide secta plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, minor portio ad conum basim habentem

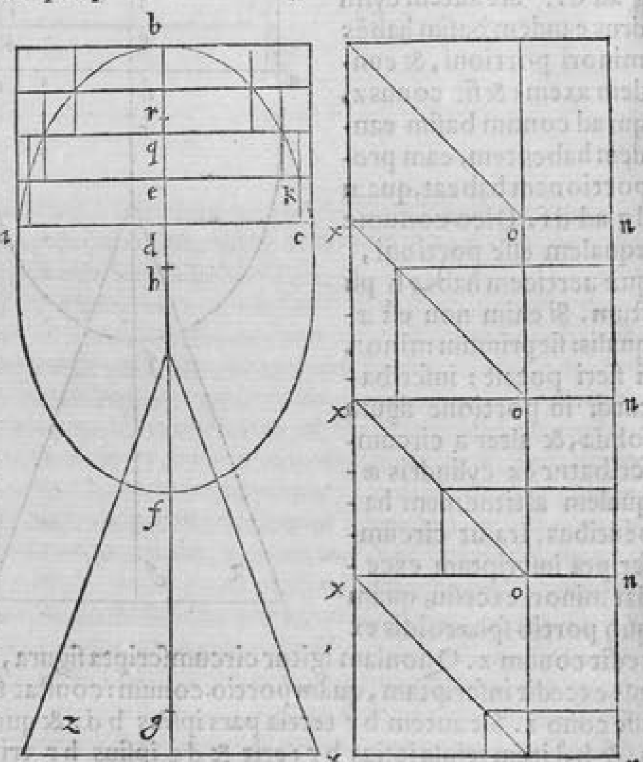
tem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habet, quam utraque linea; & dimidia axis sphæroidis, & axis maioris portionis ad maioris portionis axem.

Sɪᴛ enim portio quædam sphæroidis figuræ, abscissa plano, super axem erecto, non autem per centrum ducto; & ipsa figura secta altero plano secundum axem; sit figuræ quidem sectio a b c acutianguli coni sectio: diameter sectionis, & axis sphæroidis b f; centrum h: planiuero abscindentis portionem sectio sit a c recta linea, quæ rectos angulos faciet cum ipsa b f; quoniam planum super axem erectum esse posuimus. Sitq; portio abscissa cuius uertex b, minor dimidio sphæroidis figuræ: & ipsi b h æqualis sit f g. demonstrandum est, portionem, cuius uertex b ad conum, qui basim habet eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. Sit autem cylindrus eandem basim habẽs minori portioni, & eundem axem: & sit conus z, qui ad conum basim eandem habentem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Dico conum z æqualem esse portioni, quæ uerticem habet b pũctum. Si enim non est æqualis: sit primum minor, si fieri potest: inscribaturq; in portione figura solida, & altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus; ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo portio sphæroidis excedit conum z. Quoniam igitur circumscripta figura, quæ portione maior est, minus excedit inscriptam, quàm portio conum: constat figuram inscriptam maiorem esse cono z. Sit autem b r tertia pars ipsius b d. & quoniam b g tripla est ipsius b h: & b d item tripla ipsius b r: erit & d g ipsius h r tripla. Itaque cylindrus basim habens eandem portioni & axem b d, ad conum habentem basim eandem, & eundem axem, eam proportionem habet, quam d g ad h r. conus autem dictus ad z conum habet eam, quam d f ad d g. Quare proportionibus non similiter ordinatis, cylindrus, cuius basis eadem portioni, & idem axis, ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r. Sint præterea lineæ positæ, in quibus x n, numero quidem æquales partibus lineæ b d, magnitudine uero unaquæque ipsi f d æqualis: & sit ipsarum x o unaquæque æqualis b d. erit ergo unaquæque n o dupla ipsius h d. Accedat ad unamquanque ipsarum, spatium quoddam, cuius latitudo sit æqualis b d: ita ut in unoquoque quadratum sit diametrum habens. auferatur autem à primo spatio gnomon, qui latitudinem habeat æqualem b e: & à secundo item auferatur gnomon, cuius latitudo æqualis b q: & similiter ab unoquoque subsequente spatio,



A B C

gnomon auferatur latitudinem habens una parte minorem, quàm ſit latitudo gnomonis proxime ablati. erit igitur gnomon à primo ſpatio ablatus æqualis rectangulo b e f: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadrato, quod latus exceſſus habet æquale ipſi d e. à ſecundo autem ſpatio gnomon ablatus æqualis erit b q f rectangulo: & reliquum ſpatium accedens ad n o, excedens ſpecie quadrato, & reliqua eodem modo. His ita habentibus, plana cylindrorum omnium quibus conſtat inſcripta in portione figura, pertingent ad cylindri ſuperficiem baſim habentis eandem portioni, & axem eundem: eritq; totus cylindrus diuiſus in cylindros numero quidem æquales iis, qui ſunt in circumſcripta figura, magnitudine uero maximo eorum æquales. Itaque primus cylindrus eorum, qui in toto cylindro ſunt habens axem d e ad primũ cylindrum in figura inſcripta, cuius axis d e, eam propotionem habet, quam d c quadratum ad quadratum k e. hæc autem eadem eſt illi quam habet rectangulum b d f ad rectangulum b e f. habet ergo cylindrus ad cylindrũ proportionem eam, quam primũ ſpatiũ ad gnomonem ab eo ablatũ: & ſimiliter aliorum cylindrorum unuſquiſque, qui ſunt in toto cylindro, axẽ habẽs æqualem d e ad cylindrũ, qui eſt ſecundum ipſum in figura inſcripta, eundẽ habentem axem eam proportionẽ habet, quam ſpatium ſimiliter ei reſpõdens ad gnomonem ab eo ablatũ. ſunt igitur magnitudines quædam, cylindri ipſi, qui ſunt in toto cylindro; & aliæ magnitudines, ſpatia ad x n accedẽtia, quæ latitudinem habent æqualẽ b d, numero cylindris æqualia, & ſecũdum quæque duo eãdem habentia proportionem: referũturq; cylindri ad alios cylindros, qui ſunt in figura inſcripta: extremus autẽ ad nullum refertur. Et ſpatia itẽ referuntur ad alia ſpatia, ad gnomones ſcilicet, ab eis ablatos, reſpõdentia iiſdem proportionibus: at extremũ ſpatium ad nullũ refertur. Quare conſtat cylindros omnes ad omnes alios eã habere proportionem, quam ſpatia omnia ad omnes gnomones. Cylindrus ergo baſim habens eandem portioni, & axem eundem, ad figuram portioni inſcriptam, eam proportionẽ



A haebit, quam ſpatia omnia ad omnes gnomones. Et quoniã ſunt quædã lineæ æquales poſitæ, in quibus n o: & ad unãquãque accedit ſpatiũ excedẽs ſpecie quadrato: latera autẽ exceſſuum ſe ſe æqualiter excedunt: & exceſſus minimæ illarum eſt æqualis: ſunt præterea alia ſpatia accedentia ad n x, quæ latitudinẽ habent æqualem ipſi b d, numero quidem ſpatiis dictis æqualia, magnitudine uero

D unumquodque æquale maximo: manifeſtum eſt omnia ſpatia, quorum unumquodque maximo eſt æquale, ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm c n x n

E ad lineam æqualem utriſque; & dimidiæ n o, & tertiæ parti x o. Quare conſtat ſpatia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineã utriſque æqualem; & dimidiæ n o, & duabus tertiis x o. cylindrus igitur baſim habẽs eandem portioni, & axem eundem ad figuram in portione inſcriptam maiorem proportionem habet, quàm x n ad eam, quæ utriſque eſt æqualis; & dimidiæ n o, & duabus

bus tertiis x o. est autem d f ipsi x n æqualis: dimidiæq; n o æqualis d h: & duabus tertiis x o ipsa d r. Quare totus cylindrus ad figuram inscriptam in portione, maiorem proportionem habet, quàm d f ad h r. sed quam proportionem habet d f ad h r, eã demonstratum est habere eundem cylindrum ad conum z. maiorem igitur proportionem habebit cylindrus ad inscriptam figuram, quam ad conum z: quod fieri non potest; nam demonstratum est, figurã inscriptam in cono z maiorem esse. non ergo sphæroidis portio maior est cono z. Sed si fieri potest, sit minor: Inscribaturq; rursus in portione figura solida; & altera circumscribatur, ex cylindris æqualem altitudinem habentibus: ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo conus z portionem excedit: & alia eadem prioribus fiant. Quoniam igitur inscripta figura portione minor est: & circumscripta inscriptam minus excedit, quàm z conus portionem: patet circumscriptam figuram minorem esse z cono. Rursus primus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in circumscripta figura, cuius idem est axis, eam proportionem habet, quam extremum spatiũ eorum, quæ ad x n accedunt, latitudinem habentium æqualem b d ad semetipsum; utraque enim sunt æqualia. secundus autem cylindrus eorum, qui in toto cylindro, axem habens æqualem d e ad cylindrum, qui secundum ipsum est in circumscripta figura, eãdem habet proportionem, quam secundum spatium eorum, quæ accedunt ad n x, latitudinem habentium æqualem b d, ad gnomonem ab ipso ablatum. & aliorum cylindrorũ unusquisque, qui sunt in toto cylindro, axem habentium ipsi d e æqualem, ad cylindrum, qui secundum ipsum est, in circũscripta figura, eam proportionem habet, quam spatium ipsi respõdens eorum, quæ ad x n accedunt, ad gnomonem ab ipso ablatum ante extremum dictum. & omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros omnes in circũscripta figura eandem habebunt proportionem, quam omnia spatia accedentia ad x n, ad id, quod est æquale extremo spatio, & gnomonibus ab aliis ablatis, propter eadem, quæ superius dicta sunt. Et quoniã ostensum est, spatia omnia accedentia ad n o, ad omnia spatia, quæ excedunt specie, quadrato, dempto maximo eorum, maiorem habere proportionem, quàm x n ad lineã utrisque æqualem; & dimidiæ n o; & tertiæ parti x o: perspicuum est, spatia eadem ad reliqua, quæ æqualia sunt extremo spatio posito, & gnomonibus à reliquis ablatis, minorem proportionem habere, quàm x n ad lineam utrisque æqualem; dimidiæ scilicet n o, & duabus tertiis x o. unde constat cylindrum basim habentem eandem portioni, & axem eundem, ad figuram circũscriptam, minorem proportionem habere, quàm f d ad h r. Quam uero proportionem habet f d ad h r, eandem habet dictus cylindrus ad conum z. minorem ergo proportionem habet idem cylindrus ad circumscriptam figuram, quàm ad conum z: quod fieri non potest; ostensum est enim circumscriptam figuram cono z minorem esse. non igitur portio sphæroidis minor est cono z. Quoniam autem neque maior est, neque minor: relinquitur eidem esse æqualem.

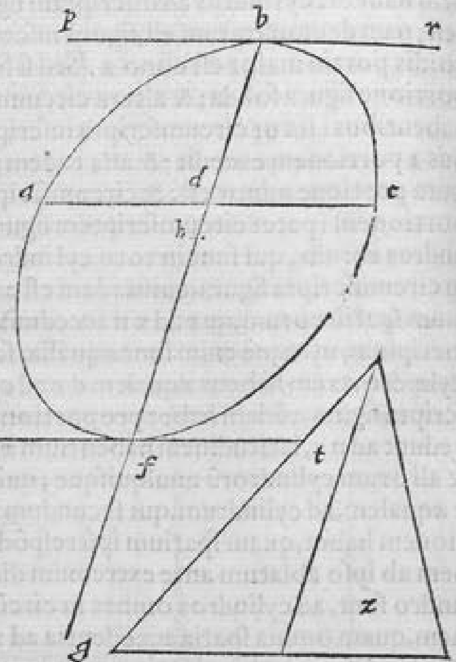
PROPOSITIO XXXII.

SI sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto: minor eius portio ad portionem coni basim habẽtis ipsi eandem, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam linea æqualis utrisque; & dimidiæ eius, quæ uertices portionum factarum coniungit, & axi maioris portionis, ad maioris portionis axem.

SECETUR enim sphæroidis figura quæpiam, ut dictum est: sectaq; ipsa altero plano per axem, erecto super planum secans, fit figuræ quidem sectio a b c d acutianguli coni sectio: plani autem figuram secantis recta linea c a: & ducantur lineæ p r, s t, ipsi a c æquidistantes, quæ contingant coni sectionem in punctis b f: & ab ipsis plana attollantur æquidistantia plano secundum a c. contingent hæc

sphæroides

A sphæroides in b f punctis: & erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f, quæ per centrum transibit. Sit autem centrum sphæroidis, & acutianguli coni sectionis punctum h. Quoniam igitur positum est, secari figuram plano non erecto super axem: sectio est acutianguli coni sectio, cuius diameter c a. Itaque sumatur & cylindrus axem habens in recta linea b d, in cuius superficie acutianguli coni sectio sit circa diametrum a c: & conus uerticem habens punctum b, in cuius superficie sit acutianguli coni sectio, circa diametrum a c. erit iam portio quædam cylindri basim habens portioni eã dem, & axem eundem: & portio coni, quæ eandem portioni basim, & axem eundem habeat. Ostendendum est, sphæroidis portioné, cuius uertex b, ad portionem coni, quæ basim habet ipsi eandem, & eũdem axem, eam proportionem habere, quam d g ad d f. sit autem f g æqualis h f: & sumatur aliquis conus z, qui ad coni portionem basim habentem eandem portioni, & axem eundem, eam proportionem habeat, quam d g ad d f. Si igitur non est æqualis portio sphæroidis z cono: sit primum maior, si fieri posit: Inscribaturq; in portione sphæroidis figura solida; & altera circumscribatur ex cylindri portionibus altitudinem æqualem habentibus: ita ut circumscripta inscriptam excedat minori excessu, quàm quo portio sphæroidis excedit z conum. similiter antecedenti ostendetur, inscriptam figuram cono z maiorem esse: & portionem cylindri, quæ basim habeat portioni eandem, & eundem axem, ad inscriptam figuram maiorem proportionem habere, quàm ad z conum: quod fieri non potest, non erit igitur sphæroidis portio cono z maior. Sed sit minor, si fieri potest. Rursus in portione inscripta sit solida figura: & altera circumscripta ex cylindri portionibus æqualem altitudinẽ habentibus: ita ut circumscripta excedat inscriptam minori excessu, quàm quo z conus portionem excedit. ostendetur eadem ratione circumscriptam figuram minorem esse z cono: & portionem cylindri, quæ basim habet portioni eandem, & axem eundem, ad circumscriptam figuram minorem proportionem habere, quàm ad conum z: quod fieri non potest. non erit igitur sphæroidis portio neque cono z minor, quare constat, quod oportebat demonstrare.

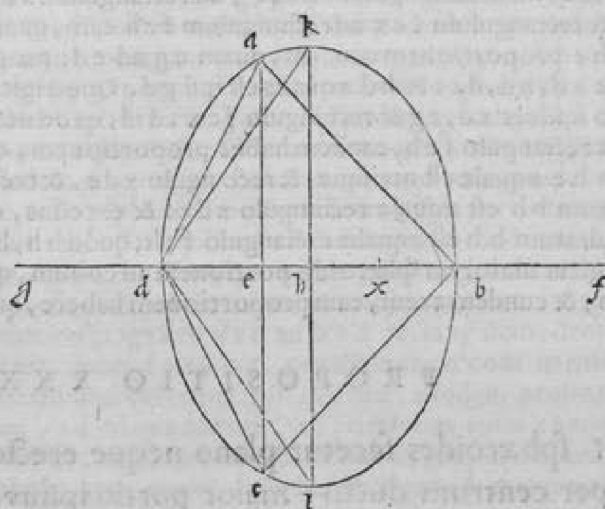


PROPOSITIO XXXIII.

Cuiuslibet figuræ sphæroidis sectæ plano erecto super axem, nõ autem per centrum ducto, maior portio ad conum basim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habet, quam linea utrisque æqualis; & dimidiæ axis sphæroidis; & minoris portionis axi, ad axem minoris portiouis.

Secetur aliquod sphæroides, ut dictum est: sectoq; ipso altero plano per axẽ, erecto

erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c acutianguli coni sectio, cuius diameter, & axis figuræ b d: plani autem secantis recta linea c a. erit igitur c a ad rectos angulos ipsi b d. Sit maior portio, cuius uertex b: & centrum sphæroidis h: apponaturq; d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. ostendendum est portionem sphæroidis, cuius uertex b ad conum basim habentem eandem portioni, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. Itaque secetur sphæroides per centrum plano super axem erecto: & a facto circulo conus sit uerticem habens punctum d. est igitur totum sphæroides duplum portionis, quæ basim habet circulum circa diametrum k l, & uerticem d. dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem & axem eundem; hæc enim iam demonstrata sunt. Quare totum sphæroides dicti coni quadruplum erit. At uero hic conus ad conum habentem pro basi circulum circa diametrum a c, & uerticem d, compositam proportionem habet ex ea, quam h d ad e d; & ex ea, quam quadratum k h ad quadratum e a. proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi, A B C



quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d: & quam proportionem habet h d ad e d, eandem habet x d ad h d. habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e. composita autem proportio ex ea, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b h d; & ex ea, quam rectangulum b h d habet ad rectangulum b e d, eadem est ei, quam habet rectangulum contentum x d, h b ad rectangulum b e d. Conus ergo basim habens circulum circa diametrum k l, & uerticem punctum d ad conum basim habentem circulum circa diametrum a c, & uerticem d, eandem proportionem habet, quam rectangulū cōtentū x d, h b ad rectangulum b e d. At conus basim habens circulum circa diametrum a c, & uerticem d ad portionem sphæroidis habentem basim eandem ipsi, & eundem axem, eam habet proportionem, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. hoc est, quam b e ad e f. minus enim, quam dimidium sphæroidis ad conum basim habentem eādem portioni, & axem eundem, ostensum est eam habere proportionem, quam linea utrisque æqualis, & dimidiæ axis sphæroidis, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. Ea autem est quam habet f e, ad b e. Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide ad portionē sphæroidis dimidio minorem, eam proportionem habet, quam rectangulum contentū x d, b h ad rectangulum f e d. Et quoniam totū sphæroides ad conum, qui est in dimidio sphæroide, eam habet proportionem, quam rectangulum f g, x d ad rectangulū b h, x d. Vtrunque enim quadruplum est, conus autem, qui in dimidio sphæroide ad portionem dimidio minorem, eam habet, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum f e d. habebit & totum sphæroides ad portionem eius minorem, eandem proportionem, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d. Quare & maior portio sphæroidis ad minorem, eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d ad ipsum f e d. rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit rectangulo x d, e g, & rectangulo f e x. Habet ergo maior sphæroidis portio ad minorem, proportionem eam, quam id, quod est æquale utrisque, & rectangulo x d, e g, D E F G H I

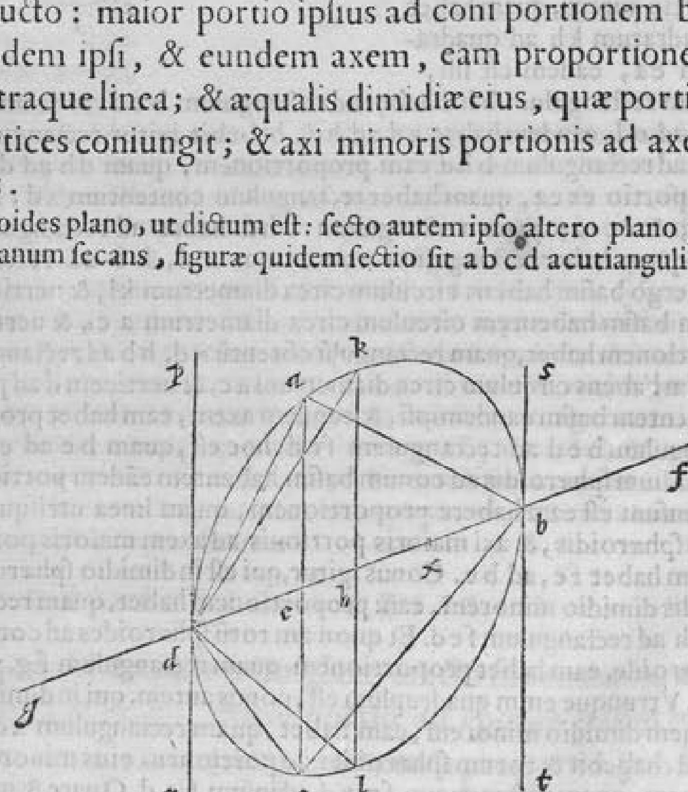
&

& rectangulo f e x ad ipsum f e d rectangulum, minor autem portio sphæroidis ad conum basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, proportionem habet eam,
K quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d. habet enim eam, quam f e ad b e:
L & conus, qui est in minori portione ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi. Quare maior portio sphæroidis ad conum in ipsa descriptũ, eam habet proportionem, quam, quod est æquale utrisque; & rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x, ad quadratum b e. hæc autem eadem est illi, quam habet e g ad
M e d; quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e
N d. & rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d; habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d; propterea quòd proportionales sunt x d, h d, d e: & h d æqualis est ipsi g d. Quod igitur est æquale utrisque; rectangulo scilicet x d, e g & rectangulo f e x ad id, quod utrisque æquale; rectangulo x d e: & rectangulo f e h, eandem habet proportionem, quam e g ad e d. At quadra-
O tum b e æquale est utrisque; & rectangulo x d e, & rectangulo f e h; quoniam qua-
P dratum b h est æquale rectangulo x d e: & excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h est æqualis rectangulo f e h; quòd b h, b f sunt æquales. Manifestum est igitur maiorem sphæroidis portionem ad conum, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d.

PROPOSITIO XXXIIII.

Si sphæroides secetur plano neque erecto super axem, neque per centrum ducto: maior portio ipsius ad coni portionem basim habentem eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habebit, quam utraque linea; & æqualis dimidiæ eius, quæ portionum factarum uertices coniungit; & axi minoris portionis ad axem minoris portionis.

Secetur sphæroides plano, ut dictum est: secto autem ipso altero plano per axem, erecto super planum secans, figuræ quidem sectio sit a b c d acutianguli coni sectio: plani uero secantis figuram sit c a recta linea. Ducantur p r, s t æquidistantes ipsi a c, quæ contingant acutianguli coni sectionem in b d punctis: & attollantur ab ipsis plana æquidistantia plano secundum a c. contingent hæc sphæroides in b d: atque erunt b d uertices portionũ. Itaque ducatur recta linea uertices portionum factarum coniungens b d, quæ per centrum transibit: & sit h centrum: portio autem maior dimidio sphæroide sit, cuius uertex b: & apponatur d g æqualis d h: & b f eidem æqualis. Ostendendum est, portionem sphæroidis



dis maiorem ad coni portionem basim habentis eandem ipsi, & eundem axem, eam proportionem habere, quam e g ad e d. secetur enim sphæroides plano per centrū, æquidistanti plano secundum a c: & describatur in dimidio sphæroidis coni portio, uerticem habens punctum d: & quam proportionem habet d h ad e d, eandem habeat x d ad h d. similiter iis, quæ superius tradita sunt, ostendetur, & portionem coni descriptam in dimidio sphæroidis ad coni portionem in minori sphæroidis portione descriptam, eandem proportionem habere, quam rectangulum x d, b h ad rectangulum b e d; & portionem coni descriptam in minori sphæroidis portione ad portionem, in qua est descripta, eandem habere, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d. Habebit igitur coni portio in dimidio sphæroide descripta ad minorem portionem sphæroidis, eam proportionem, quam rectangulum x d, b h ad ipsum f e d. Quare totum sphæroides ad portionem coni in dimidio sphæroide descriptam, eam proportionem habebit, quam rectangulum f g, x d ad rectangulum b h, x d; utrunque enim utriusque quadruplum est. dicta autem coni portio ad portionem sphæroidis minorem, eandem proportionem habet, quam rectangulum, x d, b h ad rectangulum f e d, ergo totum sphæroides ad minorem ipsius portionem, eandem habebit, quam rectangulum f g, x d ad ipsum f e d rectangulum. Sed maior portio ad minorem habet eandem, quam excessus, quo rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, ad rectangulum f e d: & portio minor ad coni portionem in ipsa descriptam, eandem habet, quam rectangulum f e d ad b e d rectangulum; demonstratum est enim habere eandem, quam f e ad b e. portio autem coni in minori portione descripta ad coni portionem descriptam in maiore, eandem proportionem habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e; portiones enim conorum dictæ, quoniam in eadem sunt basi, eam, quæ est altitudinum, proportionem habent. at uero altitudines habent eam, quam d e ad e b. Quare & maior portio sphæroidis ad coni portionem in ipsam descriptam, eandem proportionem habet, quam excessus, quo rectangulum g f, x d excedit rectangulum f e d, ad quadratum b e. hæc autem similiter demonstrabitur eadem illi, quam habet e g ad e d.

ARCHIMEDIS
LIBER DE ARENÆ NVMERO.

ARBITRANTVR nonnulli rex Gelon, arenæ numerum infinitum eſſe. dico autem non ſolum eius, quæ eſt circa Syracuſas, & reliquam Siciliam, ſed etiam quæ in omni regione habitabili, pariter atque inhabitabili continetur. Sunt præterea alii, qui non illum quidem infinitum putent; ſed nullum dari denominatum numerum poſſe credant, qui illius multitudinem exuperet. Itaque eos, qui ita opinantur, ſi eiuſmodi arenæ aceruum animo comprehenderét, cuiuſmodi eſſet, ſi uniuerſa terra repleto in ea mari, & cauitatibus omnibus, altiſsimorum montium uertices exæquaret; atque huius ipſius rurſus alterum multiplicem excogitarent, minime dubium eſt, exiſtimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multumq; ſuperare. Ego uero id oſtendere conabor demonſtrationibus geometricis, quas tu ipſe aſſequeris: eorum uidelicet numerorum, qui à nobis expreſsi, traditiq; ſunt in iis, quæ ad Zeuxippum ſcripſimus, nonnullos non ſolum arenæ multitudinem ſuperare, quæ terræ undique repletæ, ut diximus, æqualis eſſet: ſed etiam quæ ipſi mundo parem haberet magnitudinem. non enim ignoras mundum à compluribus Aſtrologis appellari ſphæram, cuius centrum quidem eſt terræ centrum, ſemidiameter autem eſt æqualis lineæ inter centrum ſolis, & terræ centrum interiectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Aſtrologis ſcripta ſunt, redarguens Ariſtarchus Samius poſitiones quaſdam edidit, ex quibus ſequitur, Mundum proxime dicti mundi multiplicem eſſe. ponit enim ſtellas inerrantes, atque ſolem immobiles permanere: terram ipſam circumferri circa ſolem, ſecundum circumferentiam circuli, qui eſt in medio curſu conſtitutus: ſphæram autem inerrantium ſtellarum circa idem cẽtrum cum ſole ſitam, tanta eſſe magnitudine, ut circulus, ſecundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad diſtantiam ſtellarum inerrantium, quam centrum ſphæræ habet ad eius ſuperficiem. Id uero manifeſto conſtat fieri non poſſe. Quoniam enim ſphæræ centrum nullam habet magnitudinem: neque

profecto

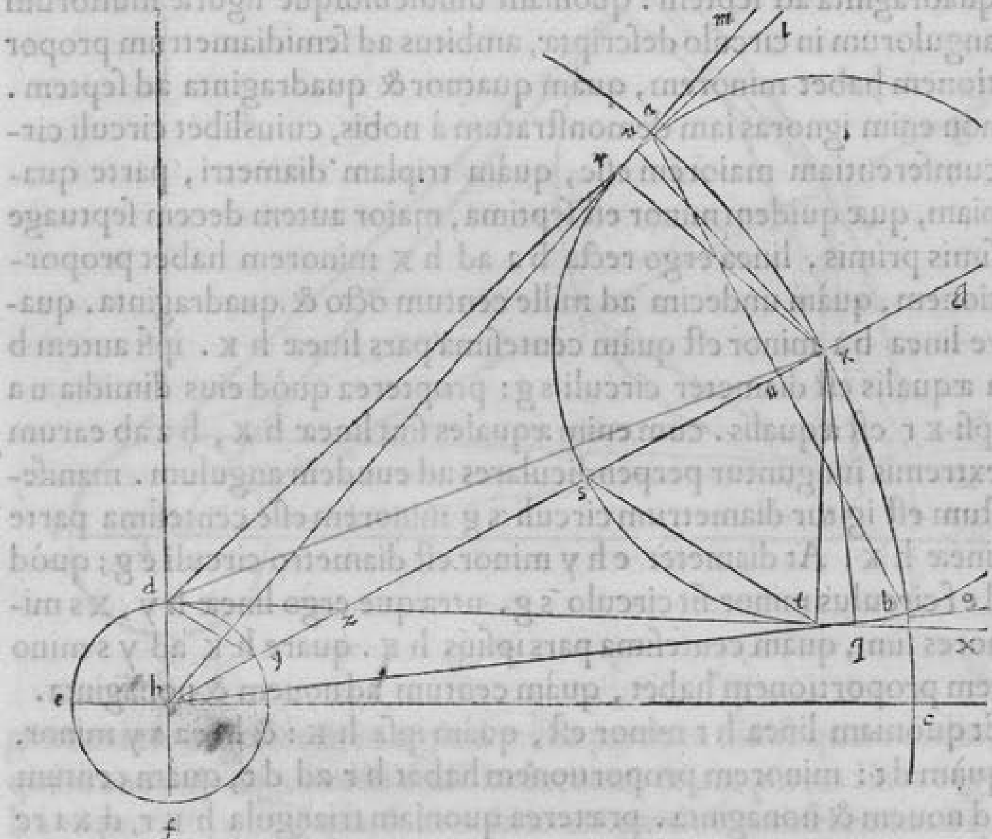
profecto ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est Aristarchum ita intellexisse. Quoniam terram ueluti circa mundi centrum positam opinamur: quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictum, eandem habere sphæram, in qua circulus est, secundum quem terram ponit circumferri, ad sphæram stellarum inerrantium. nam demonstrationes eorum, quæ apparent, tanquam si hoc ita esset positum, accommodat: & maxime uidetur magnitudinem sphæræ, in qua terram moueri facit, ponere ei, qui à nobis dicitur, mundo æqualem. Itaque dicimus, si ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quantam ponit Aristarchus esse stellarum inerrantium: & eo pacto ex iis, quæ in principio ostenduntur, numerorum denominationibus, quasdam inueniri, quæ arenæ illius multitudinem exuperent; his uidelicet positis. Primum quidem terræ ambitum esse ueluti tercentum myriadum stadiorum, & non maiorem. nam cum secundum eos, qui hoc demonstrare aggressi sunt; quibus tu ipse assenties, sit ueluti triginta myriadum stadiorum: ego exuperans pono terræ magnitudinem ueluti decuplam eius, quam superiores opinati sunt: & ambitum eius esse trecentum myriadum stadiorum, & non maiorem. Deinde diametrum terræ maiorem esse diametro lunæ: & diametrum solis maiorem diametro terræ, similiter eadem sumens, quæ complures superiorum astrologorum. Postremo solis diametrum trigintuplam esse diametri lunæ, & non maiorem. cum enim ex superioribus astrologis Eudoxus quidem ueluti nonuplam affirmarit; Phidias Acupatris ueluti duodecuplam; Aristarchus autem conatus sit ostendere diametrum solis maiorem esse, quàm duodeuigintuplam diametri lunæ, & minorem, quàm uigintuplam eiusdem: ego superans & hunc, ut propositum sine controuersia sit demonstratum, pono diametrum solis, ut diximus, trigintuplam diametri lunæ, & non maiorem. Præterea diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum, in maximo mundi circulo descriptæ. hoc autem pono, cũ dicat Aristarchus solem ueluti septingentesimam, ac uigesimam partem circuli signorum apparere. Itaque hoc pacto considerans conatus sum per instrumenta sumere angulum, cui sol accommodatur, uerticem habentem in uisu. similem enim perfecte sumere haud facile est; quòd neque uisus, neque manus, neque instrumenta, per quæ sumitur, satis idonea sunt ad id, quod perfectum, absolutumq; est ostendendum. sed de his uerba facere in præsentia opportunum non est; præsertim cum ea sæpius per se se manifeste pateant. Ego sa tis habeo ad propositi demonstrationem angulum sumere, qui minor sit angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: & rursus alterum sumere, qui non sit minor eodem angulo, uerticem similiter habente in uisu. Posita igitur longa regula super planum erectum in loco, unde sol exoriens conspiciatur, & cylindro paruo, tornatoq; super regulam erecto, statim post solis ortum, deinde ipso ad horizontem accedente, ita ut uideri posit, conuertatur regula ad solem: & uisus in extremo regulæ constituatur: cylindrus autem inter solem, & uisum intermedius solem abscondat: mox separato cylindro à uisu, ubi primum incipiat ex utraque eius parte solis minimum quippiam apparere, statuatur illic cylindrus. siquidem igitur similiter contingeret, uisum ab uno puncto inspicere, rectis lineis ductis ab extremo regulæ, in quo uisus fuerat constitutus, quæ cylindrum tangerent, angulus dictis lineis contentus minor esset angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente in uisu: propterea quòd solis quippiam ex utraque cylindri parte conspiciatur.

A Quoniam autem uisus non ab uno puncto uidet, sed à magnitudine quadam: sumatur magnitudo rotunda non minor uisu: atque ea in extremo regulæ posita, ubi uisus constitutus fuerat, ductisq; lineis rectis magnitudinem contingentibus, & cylindrum, angulus dictis lineis comprehensus minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. Magnitudo autem non minor uisu hoc pacto

B inuenietur. sumantur duo cylindruli tenues, æquali inter se magnitudine; unus albus, alter non albus. & apponantur ad uisum, ita ut albus remotior sit, non albus quàm proximus uisui, ut faciem attingat. Cum igitur sumpti cylindruli uisu subtiliores sint; siquidem multo subtiliores, qui proximus est uisui præteritur, & conspicitur albus totus: sin minus, partes quædam albi uidentur ex utraque parte eius, qui ad uisum admotus fuerit. itaque sumptis huiusmodi cylindris, & ita dispositis, ut alter sua crassitudine alterum uisui abscondat, & non ampliori loco, tanta magnitudo, quanta est crassitudo cylindrorum hoc facientium, plane quodammodo non est minor uisu. Angulus autem non minor eo, cui sol accommodatur, uerticem habente ad uisum, hoc modo sumitur. remoto in regula cylindro à uisu, adeo ut abscondat totum solem, & ductis lineis rectis ab extremo regulæ, in quo uisus constituitur, cylindrum ipsum tangentibus, angulus dictis lineis contentus non minor erit angulo, cui sol accommodatur uerticem habente ad uisum. His igitur angulis ad hunc modum sumptis, dimenso angulo recto; eorum maior quidem

minor

minor erit, quàm una pars anguli recti in centum quatuor & ſexaginta partes diuiſi; minor uero maior, quàm una pars anguli recti diuiſi in partes ducentas. Quare angulus, cui ſol accommodatur uerticem habens ad uiſum minor erit, quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes; & maior, quàm una pars eiuſdem anguli diuiſi in partes ducentas. Ex quibus ſequitur, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo mundi circulo ſit deſcripta. Intelligatur enim planum



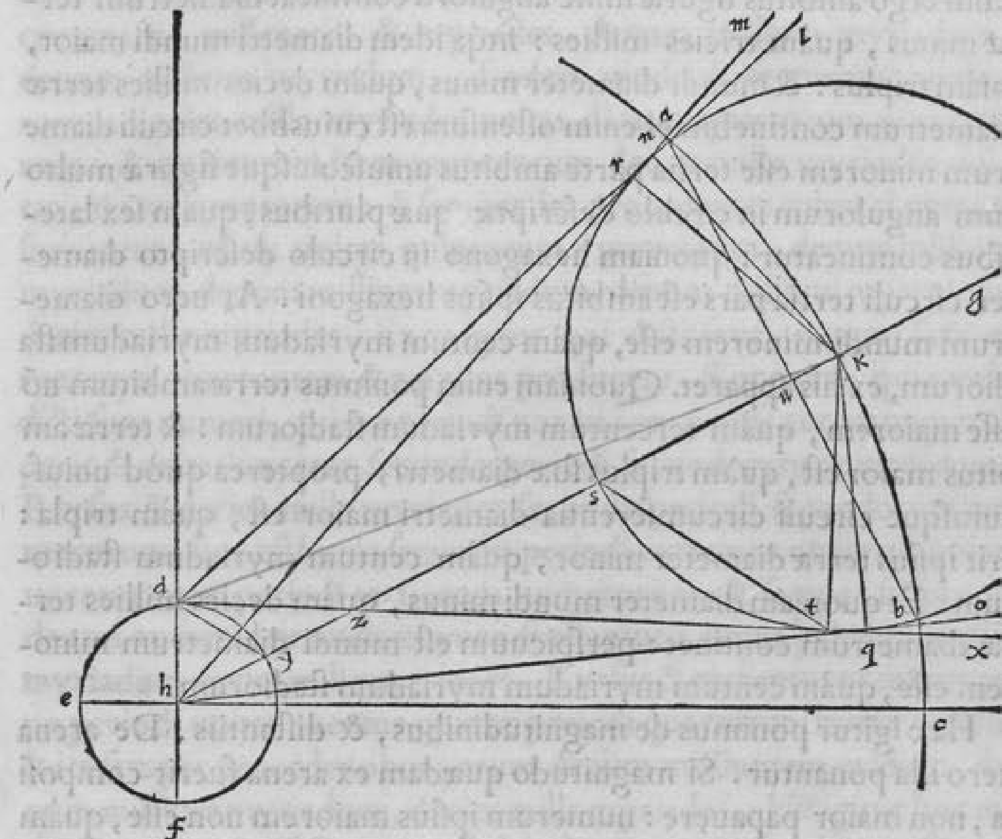
ductum per terræ centrum, & per uiſum, cum paulo ſupra horizontem ſol fuerit conſtitutus, quod ſecet mundum quidem ſecundum circulum a b c; terram uero ſecundum d e f; & ſolem ſecundum ſ g circulum: ſitq́, terræ centrum h: centrum ſolis K: & uiſus d: & ducantur rectæ lineæ, quæ tangant circulum ſ g; à puncto quidem d ipſæ d l, d x, tangentes in n t; à puncto autem h ipſæ h m, h o tangentes in q r: & circulum a b c ſecent lineæ h m, h o in a b. linea C igitur h K maior eſt, quàm d K; quoniam ſol ponitur ſupra horizontem eſſe: & idcirco angulus l d x maior eſt angulo m h o. Sed an- D gulus l d x maior eſt, quàm ducenteſima pars anguli recti; minor uero

uero, quàm una pars eiusdem anguli in centum quatuor & sexaginta partes diuisi; quòd is angulus æqualis sit angulo, cui sol accommo-
* datur uerticem habenti ad uisum: quare angulus m h o minor est, quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor & sexaginta par
E tes. linea uero ab recta minor est ea, quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ circuli a b c, in sexcentas sex & quinquaginta partes diuisæ: & ambitus dictæ figuræ multorum angulorum ad semidiametrum circuli a b c minorem proportionem habet, quàm quatuor & quadraginta ad septem: quoniam uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, ambitus ad semidiametrum proportionem habet minorem, quàm quatuor & quadraginta ad septem.
F non enim ignoras iam demonstratum à nobis, cuiuslibet circuli circumferentiam maiorem esse, quàm triplam diametri, parte quapiam, quæ quidem minor est septima, maior autem decem septuage
G simis primis. linea ergo recta b a ad h K minorem habet propor-
H tionem, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. qua-
I re linea b a minor est quàm centesima pars lineæ h K. ipsi autem b a æqualis est diameter circuli s g: propterea quòd eius dimidia u a ipsi K r est æqualis. cum enim æquales sint lineæ h K, h a ab earum extremis iunguntur perpendiculares ad eundem angulum. manifestum est igitur diametrum circuli s g minorem esse centesima parte
K lineæ h K. At diameter e h y minor est diametro circuli e g; quòd d e f circulus minor sit circulo s g. utræque ergo lineæ h y, K s mi-
L nores sunt, quàm centesima pars ipsius h K. quare h K ad y s minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.
M Et quoniam linea h r minor est, quàm ipsa h K: & linea s y minor,
N quàm d t: minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum ad nouem & nonaginta. præterea quoniam triangula h K r, d K t rectangula sunt: & latera quidem K r, K t æqualia habent; ipsa autem h r, d t inæqualia: & maior angulus t d K ad angulum r h K maiorem proportionem habet, quàm h K ad d K; minorem uero quàm
O h r ad d t. si enim duo triangula rectangula altera duorum laterum, quæ sunt circa angulum rectum æqualia habeant, altera autem inæqualia: maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus continetur, ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm maior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm maior earum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad mino-
P rem. Quare angulus l d x ad angulum m h o minorem proportionem habet, quàm h r ad d t: quæ quidem minorem habet, quam

centum

centum ad nouem & nonaginta. angulus igitur l d x ad m h o angulum minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta. & quoniam angulus l d x maior est, quàm ducentesima Q pars anguli recti: erit angulus m h o maior, quàm nouem & nonaginta

T



ginta partes anguli recti in uiginti millia partium diuisi. quare maior, R quàm una pars anguli recti diuisi in ducentas & tres partes. linea ergo S b a maior est, quàm quæ subtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes octingentas & duodecim. sed ipsi b a solis diameter est æqualis. manifestum est igitur diametrum solis maiorem esse latere figuræ, quæ mille angulis constet. Itaque his positis, ostenduntur & illa: uidelicet diametrum mundi continere minus, V quàm decies millies diametrum terræ: & insuper diametrum mundi minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum. Quoniam enim positum est, diametrum solis non maiorem esse, quàm trigintuplam diametri lunæ: diametrum uero terræ diametro lunæ maiorem: constat diametrum solis minorem esse, quàm trigintuplam diametri terræ. Rursus quoniam ostensum est diametrum solis maiorem esse latere figuræ mille angulorum, quæ in maximo

mundi

mundi circulo sit descripta: patet ambitum dictæ figuræ minus, quàm millies diametrum solis continere. diameter autem solis minor est, quàm trigintupla diametri terræ. Quare ambitus dictæ figuræ mille angulorum minus, quàm tricies millies diametrum terræ continet. Cum ergo ambitus figuræ mille angulorũ contineat diametrum terræ minus, quàm tricies millies: sitq; idem diametri mundi maior, quàm triplus: & mundi diameter minus, quàm decies millies terræ
T diametrum continebit. et enim ostensum est cuiuslibet circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur: quoniam hexagono in circulo descripto diameter circuli tertia pars est ambitus ipsius hexagoni. At uero diametrum mundi minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum, ex his apparet. Quoniam enim ponimus terræ ambitum nõ esse maiorem, quàm tercentum myriadum stadiorum: & terræ ambitus maior est, quàm triplus suæ diametri; propterea quòd uniuscuiusque circuli circumferentia diametri maior est, quàm tripla: erit ipsius terræ diameter minor, quàm centum myriadum stadiorum. Et quoniam diameter mundi minus, quàm decies millies terræ diametrum continet: perspicuum est mundi diametrum minorem esse, quàm centum myriadum myriadum stadiorum.

Hæc igitur ponimus de magnitudinibus, & distantiis. De arena uero illa ponantur. Si magnitudo quædam ex arena fuerit composita, non maior papauere: numerum ipsius maiorem non esse, quàm denum millium: & diametrum papaueris non esse maiorem quadragesima parte digiti. hoc autem pono, scrutatus in hunc modum. in regula plana posita fuerunt papauera in eadem recta linea, quæ se se inuicem tangerent: & occuparunt triginta quinque papauera ampliorem locum, quàm sit digiti longitudo. ego uero diametrum papaueris minorem pono, ut sit quadragesima pars digiti; & non minor, uolens etiam ex hoc apertissime, & planissime propositum demonstrare.
V Quæ igitur ponimus hæc sunt. sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi; qui in librum à me ad Zeuxippum scriptũ non inciderunt; propterea quòd de iis ipsis nihil in hoc libro habetur. Contingit autem numeris imposita esse nomina ab ipsis myriadibus, in quibus eos optime nouimus, numerum myriadum ad myriadas ipsas referentes. Itaque qui proxime dicti sunt numeri in decies mille myriadas, primi uocentur: primorum autem numerorum decies mille myriades, unitas

dicatur

dicatur eorum, qui secundi sunt: & secundorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, & centenarii, & millenarii, & myriades, erunt denum millium myriadum. Rursus & decies mille myriades secundorum numerorum unitas uocetur tertiorum numerorum: & tertiorum numerorum unitates, & ex unitatibus denarii, centenarii, millenarii, & myriades, denum millium myriadum, denum millium myriadum. Eodem modo & tertiorum numerorum decies mille myriades unitas dicatur quartorum numerorum: & quartorum item numerorum decies mille myriades unitas dicatur quintorum: & semper ita procedentes numeri nomina sortiantur: eritq; unitas quintorum numerorum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. Ex iis igitur qui dicti sunt, numeri satis erunt noti. licet autem & amplius producere. Sint enim, qui modo dicti sunt numeri, primæ periodi uocati: extremus autem numerus periodi unitas uocetur secundæ periodi secundorum numerorum. Rursus & decies mille myriades secundæ periodi secundorum numerorum, hoc est huius secundæ periodi extremus numerus unitas uocetur tertii periodi tertiorum numerorum: & semper sic procedentes numeri à periodis nomina sortiantur: eruntq; denum milliũ myriadum decies mille myriades. Rursus & extremus numerus tertiæ periodi unitas uocetur quartæ periodi quartorum numerorum: & ita semper procedentibus, erunt denum millium myriadum, denum millium myriadum, decies mille myriades. His igitur hoc modo denominatis, si sint numeri ab unitate proportionales constituti: qui autem iuxta unitatem denarius sit: octo primi una cum unitate, eorum, qui primi dicuntur, numerorum erunt: alii octo sequentes eorum, qui secundi dicuntur: & reliqui eodem modo denominabuntur secundum distantiam à prima numerorum octade. primæ igitur octadis octauus numerus est mille myriades: secundæ octadis primus, quoniam decuplus est eius, qui antecedit, decies mille myriades: hic autem est unitas secundorum numerorum: octauus secundæ octadis numerus est mille myriades secundorum numerorũ. Rursus & tertiæ octadis primus, quoniam eius, qui antecedit decuplus est, decies mille myriades erit secundorum numerorum: & est unitas tertiorum numerorum. constat igitur plures esse octades, ut dictum est. sed & illud nosse oportet. Si numeris ab unitate proportionalibus existentibus, aliqui ex eadem proportionalitate se se inuicem multiplicauerint: factus inde numerus ex eadẽ erit proportio-

 nalitate,

nalitate, tantum distans à maiore multiplicantium, quantum minor ab unitate distat, secundum proportionalitatis ordinem: ab unitate uero distabit uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, secundum quos multiplicantes se se ab unitate distiterint. Sint numeri quotlibet proportionales ab unitate a b c d e f g h i K l: & sit a unitas: & d multiplicans ipsum h producat q: sumatur autem ex eadem proportionalitate l tantum distans ab h, quantum d ab unitate distat. ostendendum est, q æqualem esse ipsi l. Quoniam enim proportionalibus existentibus numeris, d tantum distat ab a, quantum l ab h: eandem proportionem habet d ad a, quàm l ad h. est autem d secundum se ipsum multiplex ipsius a. & l igitur multiplex est ipsius h secundum d. quare æqualis est l ipsi q. patet igitur factum numerum ex eadem proportionalitate esse: atque à maiore multiplicantium tantum distare, quantum minor ab unitate distat. patet etiam, eundem ipsum distare ab unitate uno minus, quàm sit numerus ex utrisque compositus, quibus multiplicantes se se ab unitate distant. nam a b c d e f g h tot sunt, quot h distat ab unitate. sed i K l uno sunt minores, quàm quibus d ab eadem distat: etenim una cum h totidem erunt.

His igitur partim quidem positis, partim uero demonstratis, quod iam propositum est, ostendemus. Quoniam enim ponitur diameter papaueris non minor quadragesima parte digiti: perspicuum est, sphæram, quæ diametrum digito æqualem habeat, non maiorem esse, quàm ut contineat papauerum myriadas sex & quatuor millia. nam sphæræ, quæ diametrum habet quadragesimam partem digiti;
z multiplex est secundum dictum numerum; cum ostensum sit sphæras ad inuicem proportionem habere triplam eius, quæ est suorum diametrorum. Et quoniam positum est, numerum arenæ ad magnitudinem papaueris non esse maiorem decem millibus: constat, si sphæra, quæ diametrum habeat digito æqualem, arena impleatur, non maiorem futurum arenæ numerum, quàm myriades sex, & quatuor millia myriadum; qui numerus est unitates sex secundorum numerorum, & primorum quater mille myriades. minor igitur est, quàm unitates decem secundorum numerorum. Sphæra autem diametrum habens digitorum centum, sphæræ, quæ diametrum digito æqualem habeat multiplex est centum myriadibus; propterea quòd sphæræ inter se triplam eius, quæ est diametrorũ, proportionem habent. Si igitur ex arena fiat sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet centum digitorum: numerus arenæ

minor

minor erit, quàm qui producitur, decem unitatibus ſecundorum numerorum in centum myriades ductis. ſed decem unitates ſecundorũ numerorũ decimus eſt proportionalis numerus ab unitate in decuplis terminis proportionalibus: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate. quare qui producitur numerus erit ab unitate ſextus decimus. oſtenſum eſt enim eum uno minus diſtare ab unitate, quàm ſit numerus compoſitus ex utriſque iis, quibus multiplicantes ſe ſe ab unitate diſtant. Ipſorum autem ſexdecim, octo primi una cum unitate primorum numerorum ſunt: alii octo ſequentes ſecundorum: & eorum ultimus eſt mille myriades ſecundorum numerorum. conſtat igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ centum digitorum diametrum habenti minorem eſſe mille myriadibus ſecundorum numerorum. Rurſus & ſphæra decies mille digitorum diametrum habens, ſphæræ habentis diametrum digitorum centum multiplex eſt centum myriadibus. ergo ſi ex arena fiat ſphæra diametrum habens decies mille digitorum: erit eius numerus minor, quàm qui fit mille myriadibus ſecundorum numerorum in centum myriades ductis. Et quoniam mille myriades ſecundorum numerorum ſextus decimus eſt proportionalis ab unitate: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate: factus numerus erit eiuſdem ordinis uigeſimus ſecundus. Horum autem duo & uiginti numerorum, primi octo una cum unitate primorum numerorum ſunt: octo ſequentis ſecundorum: reliqui tertiorum, quorum extremus eſt decem myriades tertiorum numerorum. ex quo manifeſtum eſt, numerum arenæ, quæ æqualis ſit ſphæræ decies mille digitorum diametrum habenti minorem eſſe, quàm tertiorum numerorum myriades decem. Et quoniam ſphæra, quæ diametrum habet ſtadio æqualem minor eſt ſphæra habente diametrum decies mille digitorum: patet arenæ numerum, cuius magnitudo ſit æqualis ſphæræ diametrum ſtudio æqualem habente, minorem eſſe decem myriadibus tertiorum numerorum. Rurſus ſphæra centum ſtadiorum diametrũ habens ſphæræ habentis diametrum ſtadii unius, multiplex eſt myriadibus centum. Si igitur ex arena fiat ſphæra æqualis ei, quæ diametrum habet centum ſtadiorum: minor erit arenæ numerus, quã qui fit decem myriadibus tertiorum numerorum in centum myriades multiplicatis. quia uero tertiorum numerorum decem myriades uigeſimus ſecundus eſt ab unitate proportionalis: & centum myriades ab unitate ſeptimus eſt ex eodem proportionis ordine: qui fit numerus similiter erit ex eodem uigesimus octauus ab unitate. sed horum octo & uiginti, primi quidem octo cum unitate sunt primorum numerorum: octo, qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: reliqui quatuor quartorum: estque eorum ultimus quartorum numerorum milleunitates. manifestum est igitur numerum arenæ, quæ magnitudinem obtinet æqualem sphæræ centum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille unitatibus quartorum numerorum. Rursus sphæra diametrum habens denum millium stadiorum, sphæræ habentis diametrum centum stadiorum, multiplex est centum myriadibus. Quòd si fiat ex arena sphæra tanta magnitudine, quanta est, quæ diametrum habet denum millium stadiorum: minor erit eius arenæ numerus, quàm qui producitur multiplicatis mille unitatibus quartorum numerorum in centum myriades: & cum mille unitates quartorum numerorum, uigesimus octauus sit numerus ab unitate proportionalis: centum uero myriades eius proportionalitatis septimus: erit is, qui producitur ex eodem ordine trigesimus quartus. Itaque horum quatuor & triginta, octo quidem primi cum unitate primorum numerorum sunt: octo qui sequuntur secundorum: alii octo tertiorum: deinde alii octo quartorum: reliqui uero duo quintorum: & eorum extremus est decem unitates quintorum numerorum. constat igitur numerum arenæ, cuius magnitudo sit æqualis sphæræ denum millium stadiorum diametrum habenti, minorem esse, quàm quintorum numerorum decem unitates. Rursus sphæra diametrum habens centum myriadum stadiorum, sphæræ habentis diametrum stadiorum denum millium, multiplex est centum myriadibus. & idcirco si ex arena fiat sphæra magnitudinem habens æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti: numerus eius minor erit, quàm qui fit decem unitatibus quintorum numerorum in centum myriades multiplicatis. Et cum decem unitates quintorum numerorum ab unitate trigesimus quartus sit proportionalis: & centum myriades sit eiusdem ordinis septimus: factus numerus erit quadragesimus ab unitate. Horum uero quadraginta, primi octo cum unitate sunt primorum numerorum: qui hos sequuntur octo secundorum: alii octo tertiorum: deinde octo alii quartorum: postremo reliqui octo quintorum, quorum ultimus est mille myriades quintorum numerorum. ergo manifestum est arenæ numerum, quæ magnitudinem habeat æqualem sphæræ centum myriadum stadiorum diametrum habenti, minorem esse mille myriadibus

bus quintorum numerorum. ſphæra autem diametrum habens decies mille myriadum ſtadiorum, ſphæræ diametrum centum myriadum ſtadiorum habentis multiplex eſt centum myriadibus. Si igitur ex arena fiat ſphæra,cuius magnitudo ſit æqualis ſphæræ habenti diametrum ſtadiorum decies mille myriadum: minor erit arenæ numerus, quàm qui producitur ex multiplicatione mille myriadum quintorum numerorum in centum myriades. Et quia quintorum numerorum mille myriades, quadrageſimus numerus eſt ab unitate proportionalis: centum uero myriades ſeptimus eſt ex eadem proportionalitate: qui producitur numerus erit ab unitate quadrageſimus ſextus. Horum autem ſex & quadraginta primi quidem octo cum unitate primorum numerorum ſunt: ſecundi octo ſecundorum: tertii tertiorum: quarti quartorum: quinti quintorum: reliqui ſex ſextorum, quorum ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. perſpicuum ergo eſt numerum arenæ magnitudinem habentis ſphæræ æqualem, cuius diameter eſt decies mille myriadum ſtadiorum, minorem eſſe, quàm ſextorum numerorum myriades decem. Rurſus ſphæra diametrum habens centum myriadum myriadum ſtadiorum, ſphæræ habentis diametrum decies mille myriadum ſtadiorum multiplex eſt centum myriadibus. quare ſi fiat ex arena ſphæra æqualis ſphæræ, quæ habeat diametrum centum myriadum myriadum ſtadiorum: eius arenæ numerus minor erit, quàm qui fit ex multiplicatione decem myriadum ſextorum numerorum in myriades centum. Et quoniam ſextorum numerorum decem myriades, numerus proportionalis eſt ab unitate quadrageſimus ſextus: & centum myriades ſeptimus eſt ex eodem proportionis ordine: qui producitur numerus erit ab unitate quinquageſimus ſecundus. Ex his uero quinquaginta duobus, octo & quadraginta una cum unitate ſunt eorum, qui primi, ſecundi, tertii, quarti, quinti, & ſexti dicuntur: reliqui quatuor eorum, qui ſeptimi: & extremus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. unde conſtat numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ centum myriadum myriadum ſtadiorum diametrum habenti, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. Itaque quoniam oſtenſa eſt mundi diameter minor eſſe, quàm centum myriadum myriadum ſtadiorum: erit numerus arenæ magnitudinem habentis mundo æqualem minor mille unitatibus ſeptimorum numerorum: oſtenſum eſt igitur nume

rum

rum arenæ, quæ magnitudine ſit æqualis mundo à quamplurimis aſtrologis appellato, minorem eſſe, quàm ſeptimorum numerorũ mille unitates. At uero arenæ numerum magnitudinem habentis æqualem ſphæræ tantæ, quantam Ariſtarchus ponit ſtellarum inerrantium, minorem eſſe, quàm mille myriades octauorum numerorum, oſtendetur hoc modo. Nam cum poſitum ſit, terram ad mundum à nobis dictum eam habere proportionem, quàm habet dictus mundus ad ſphæram ſtellarum inerrantium ab Ariſtarcho poſitam: & diametri ſphærarum eandem inter ſe proportionem habent. mundi autem diameter, ut mõſtratum eſt, minus quàm decies millies continet terræ diametrũ: & diameter ſtellarum inerrantium minus, quàm decies millies mundi diametrum continet. Et cum ſphæræ ad inuicem proportionem habeant triplam eius, quæ eſt diametrorum: ſtellarum inerrantium ſphæra, quam ponit Ariſtarchus, minus quàm decies millies decies mille myriades mundorum continebit. oſtenſum autem eſt numerum arenæ, quæ magnitudinem habeat æqualem mundo, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. Si igitur ex arena fiat ſphæra tanta magnitudine, quantam Ariſtarchus ponit eſſe ſtellarum inerrantiũ: eius numerus minor erit, quàm qui fit mille unitatibus ſeptimorum numerorum in decies millies decies mille myriades ductis. Et quoniam ſeptimorum numerorum mille unitates quinquageſimus ſecundus eſt proportionalis ab unitate: & decies millies decies mille myriades ab unitate tertius decimus eſt ex eodem ordine: patet factum numerum eſſe ab unitate ſexageſimum quartum. hic autem eſt octauorum octauus; hoc eſt octauorum numerorum mille myriades. manifeſtum eſt igitur arenæ numerum, quæ magnitudinem obtineat æqualem ſphæræ ſtellarum inerrantium ab Ariſtarcho poſitæ, minorem eſſe mille myriadibus octauorum numerorum. Hæc autem rex Gelon quamplurimis quidem, qui mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis uero, qui ea didicerunt: & circa diſtantias, & magnitudines terræ, ſolis, lunæ, & mundi totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimaui.

COMMENTARII
IN OPERA NON NVLLA
ARCHIMEDIS.

VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D L V I I I.

AL DVS

COMMENTARII
IN OPERA NON NVLLA
ARCHIMEDIS.

AL DVS

VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

EVTOCII ASCALONITAE

Commentarius
in librum de circuli dimensione
à Federico Commandino nuper in latinam
linguam conuersus.

Eiusdem Federici Commandini commentarii
in librum
de Circuli dimensione.
Lineis spiralibus.
Quadratura paraboles.
Conoidibus, & sphæroidibus.
Arenæ numero.

OCTAVIO FARNESIO, PARMENSIVM, ET PLACENTINORVM DVCI.

CVM me sæpenumero, DVX PRAESTANTISSIME, hortatus sis, ut in lucem proferrem commentarios quosdam meos in Archimedem, quos mihi ipsi conscripseram: tua impulsus auctoritate, nullum amplius locum hortationibus tuis relinquere decreui; præsertim cum tu mathematicas disciplinas optime calleas. nam, ut peritissimus es regendorum exercituum dux, ita nihil omittis eorum, quæ ad militares artes comprehendendas attinent. Hiero Syracusanorum rex Archimedem maximo in honore semper habuit: eiq; auctor fuit, ut geometriam à reliqua philosophia seiungeret, & cum re militari coniungeret. Marcellus in Romanis imperatoribus princeps, cum uiuentem Archimedem pro dignitate ornare non potuisset, ea officia mortuo præstitit, quæ tanti uiri merita postulabant. Ad te uero, Hieroni regi nobilitate generis, & Christianæ uitæ innocentia facile antecellentem, Marcello autem nulla ratione inferiorem, spectat, hos meos in Archimedem commentarios, qui hortatu tuo æditi sunt, in tuam etiam clientelam recipere, Commandinumq; tuum, Archimedis studiosissimum, in eorum, qui te unice colunt, numero reponere.

Federicus Commandinus.

EVTOCII ASCALONITAE IN ARCHIMEDIS CIRCVLI *DIMENSIONEM* COMMENTARIVS.

CVM in Archimedis scriptis explicandis elaborauerim, quæ & faciliora essent, & minori consideratione indigerent: consequens uidetur esse, & instituto meo consentaneum, ut quæ ex illis maiorem diligentiam, atque operam desiderant, quantum in nobis erit, adiungamus ad ea, quæ prius in libros de sphæra, & cylindro elucubrauimus. Si quidem in ijs, quæ difficiliora sunt, & maiori studio indigent, operam in primis ponere debemus. Sit ergo deinceps propositus nobis libellus, qui inscriptus est, Circuli dimensio, in quo auctoris propositum ex ipsa inscriptione intueri possumus: uult enim ostendere, cui spatio rectilineo circulus sit æqualis; quæstionem scilicet à clarissimis ante ipsum philosophis pertractatam. nam constat hoc esse quæsitum illud, quod Hippocrates chius, & Anthiphon, cum diligenter inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos probè nosse illos arbitror, qui geometricam Eudemi historiam, & Aristotelis libros propriam huiusce generis doctrinam complectentes euoluerint. Veruntamen liber hic, ut inquit Heraclides in Archimedis uita, multas affert ad usum uitæ commoditates: ostendit enim circuli circumferentiam diametri triplam, & insuper minorem, quàm sesquiseptimam, maiorem uero, quàm superdecies partientem septuagesimas primas. Hoc igitur, ut dicit, proximè est demonstratum: nam per quasdam spirales lineas inuenta est ab ipso recta linea datæ circuli circumferentiæ æqualis.

IN PROPOSITIONEM I.

PRIMVM Theorema etiam ijs, qui aliquantulum in Mathematicis sunt exercitati, nihil habere quæstionis uidetur; cum Archimedis uerba manifeste exponantur, & conclusionem ipsam nulla re omissa ad propositionem referant. sed tamen uidetur Archimedes ad demonstrationem perperam usus re quapiam, quæ nondum sit demonstrata: exponens enim triangulum rectangulum, habeat, inquit, unum eorum laterum, quæ circa rectum angulum sunt, æquale semidiametro, alterum uero cicumferentiæ æquale. At qui circumferentiæ circuli quomodo æqualem rectam lineam sumamus, neque ab ipso, neque ab alio quopiam demonstratum est. Verum illud scire oportet, nihil quod non conueniat ab Archimede scribi: nam circuli circumferentiam magnitudinem esse omnibus perspicuum est. atque, ut arbitror, ex earum numero, quæ ad unum duntaxat diuisibiles sunt. est autem & recta linea illius eiusdem speciei. & quanquam nondum appareat fieri posse, ut circumferentiæ circuli æqualem rectam lineam inueniamus: esse tamen natura rectam quandam ipsi æqualem à nullo unquam est dubitatum. Illud ergo, quod ab Archimede proponitur tale est, triangulum rectangulum habens latera, ut dictum est, æquale esse circulo. Quare propositum exponens minime accusandus uidetur; quin potius admirabilis illis ipsis existimari debet, quòd ad magnitudinem quæsitorum manifestam, & facilem inuentionem adiunxerit. Vt autem dictum est, primum theorema nihil habet quæstionis. nam triangulum p o r maius esse, quàm dimidium figuræ a f o m: & simpliciter dato circulo posse figuram rectilineam circumscribi: ita ut portiones, quæ inter circuli circumferentias, & latera circumscriptæ figuræ interijciuntur, minores sint dato spatio; manifeste dictum est è nobis in ijs, quæ in primum librum de sphæra, & cylindro conscripsimus.

IN PROPOSITIONEM III.

IN hoc theoremato continenter iubemur, numeri dati latus quadratum inuenire, sed hoc in numero non quadrato perfecte inueniri non potest. nam numerus in seipsum multiplicatus producit quendam numerum quadratum: numerus autem, & partes si in sese multiplicentur, non faciunt *numerum integrum, sed & partes. Verum quemadmodum oporteat latus proximè producens datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum est & à Pappo, Theone, & compluribus alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem explicarunt. Quare non est, quamobrem in hoc laboremus, cum liceat ijs, qui eiusmodi studio tenentur, ex illis sumere.*

A Et angulus f e c sit tertia pars recti.] *si enim hexagoni circumferentiam bifariam secantes, & eius dimidium sumentes linea à centro ducta, iunxerimus ipsam e f: erit c e f angulus tertia pars recti: nam circumferentia ad c sumpta, cum sit dimidia circumferentiæ hexagoni, erit circuli pars duodecima. Vnde & angulus c e f ad centrum duodecima pars erit quatuor rectorum, & ob id, tertia unius recti.*

B Ergo linea e f ad f c eam proportionem habet, quam 306 ad 153.] *nam dupla est e f ipsius f c; quod ex hoc patet. si enim ipsam f c lineam ad m producentes, æqualemq; ipsi sumentes, iunxerimus à puncto e: constituetur ad m angulus, qui erit duæ tertiæ unius recti. est autem & angulus ad e duæ tertiæ recti: & pariter angulus ad f. æquilateri igitur trianguli dimidium est ipsum c e f. Quòd cum basis trianguli æquilateri, quæ est æqualis ipsi e f, bifariam secetur ad c: dupla erit e f ipsius c f.*

C Ipsa uero e c ad c f proportionem habet, quam 265 ad 153.] *Quoniam enim e f ponitur esse 306: si ipsa in seipsam multiplicetur: fient 93636. est autem c f 153. quadratum igitur ipsius erit 23409. et quoniam quadratum e f æquale est duobus quadratis e c, c f: si ab ipso e f quadrato, quod est 93636 auferamus quadratum c f, hoc est 23409: relinquetur quadratum e c 70227, cuius latus 265, et adhuc pars minima, et insensibilis. deficit enim quadratum 265 ab exquisito quadrato unitatibus duabus. multiplicationes autem subijciuntur.*

e f 306	f c 153	e c 265
306	153	265
1836	459	1325
918	765	1590
93636	153	530
23409	23409	70225
70227 *cuius latus* 265 *proximè*		
70225		
2		

D Secetur angulus f e c bifariam ducta linea e g. ut igitur f e ad e c, ita est f g ad g c.] *per tertium Theorema sexti libri elementorum Euclidis, & componenti, ut utraque f e, e c ad e c, ita f c ad c g: et permutanti ut utraque f e, e c ad f c, ita e c ad c g. utraque autem f e, e c maior est, quàm 571. nanque f e ponitur 306, & e c 265, & adhuc pars quædam. quare maior est, quàm 571. ipsa uero f c est 153. utraque igitur f e, e c ad f c maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. & idcirco e c ad c g maiorem habet, quàm 571 ad 153.*

E Quare e g ad c g eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409.] *hoc autem ita colligetur. quoniam enim ostensum est e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153: si quis ponat ipsam quidem e c esse 571, ipsam uero c g 153: erit quadratum e c 326041, & quadratum c g 23409. Quòd cum utraque sint æqualia quadrato e g: erit ipsum e g quadratum 349450, cuius latus $591\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim quadratum $591\frac{1}{8}$ ab exquisito quadrato unitatibus $21\frac{15}{64}$. ergo e g ad g c potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409, longitudine uero, quam $591\frac{1}{8}$ proximè ad 153. multiplicationes autem subijciuntur.*

e c 571	g c 153	e g $591\frac{1}{8}$
571	153	$591\frac{1}{8}$
571	459	$349428\frac{49}{64}$
3997	765	
2855	153	
326041	23409	
23409		
349450 *cuius latus* $591\frac{1}{8}$ *proximè*		
$349428\frac{49}{64}$		
$21\frac{15}{64}$		

Rursus angulus g e c bifariam secetur ipsa e h linea. eadem ratione e c ad c h maiorem proportionom habet, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153.] *Fit enim propter bipartitionem anguli, ut g e ad e c, ita g h ad h c. & componenti, ut utraque g e, e c ad e c, ita g c ad c h. & permutanti, ut utraque g e, e c ad g c, ita e c ad c h. & est ipsa quidem e c 571, & adhuc pars quædam; ipsa autem e g $591\frac{1}{8}$. & pars quædam. quare maiora sunt, quàm $1162\frac{1}{8}$. & est g c 153. utraque igitur g e, e c ad g c maiorem habet proportionem, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153.*

Quare h e, ad h c maiorem habet, quàm $1172\frac{1}{8}$ ad 153.] *Quoniam enim ostensa est e c ad c h maiorem proportionem habere, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153: si quis ponat ipsas sic habere: erit quadratum e c $1350534\frac{33}{64}$; quadratum autem c h 23409. ergo quadratum e h, cum sit æquale quadratis e c, c h, erit $1373943\frac{33}{64}$; cuius latus $1172\frac{1}{8}$ proximè: deficit enim ab exquisito quadrato ipsius, unitatibus $66\frac{1}{2}$. multiplicationes autem subijciuntur.* G

e c	$1162\frac{1}{8}$	*h c*	153	*e h*	$1172\frac{1}{8}$
	$1162\frac{1}{8}$		153		$1172\frac{1}{8}$
	$1350534\frac{33}{64}$		23409		$1373877\frac{1}{64}$
	23409				$66\frac{1}{2}$
	$1373943\frac{33}{64}$	*cuius latus*	$1172\frac{1}{8}$ *proximè*		$1373943\frac{33}{64}$

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm $2334\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli h e c, est ut h e ad e c, ita h k ad c k: & componenti ut utraque h e, e c ad e c, ita h c ad c k: & permutanti ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Quoniam ergo ostensa est h e $1172\frac{1}{8}$, & adhuc pars quædam: utraque h e, e c maior est, quàm $2334\frac{1}{4}$. ponitur autem h c 153. utraque igitur h e, e c ad h c maiorem proportionem habet, quàm $2334\frac{1}{4}$ ad 153.* H

Ergo e k ad c k maiorem habet, quàm $2339\frac{1}{4}$ ad 153.] *Rursus quoniam ponitur e c $2334\frac{1}{4}$, ipsa autem c k 153: erit quadratum e c $5448723\frac{1}{16}$, & quadratum c k 23409; quibus quadratis æquale est quadratum k e. erit igitur k e quadratum $5472132\frac{1}{16}$; cuius latus $2339\frac{1}{4}$ proximè. deficit enim ab exquisito, unitatibus $41\frac{1}{2}$ multiplicationes autem subijciuntur.* I

e c	$2334\frac{1}{4}$	*c k*	153	*k e*	$2339\frac{1}{4}$
	$2334\frac{1}{4}$		153		$2339\frac{1}{4}$
	$5448723\frac{1}{16}$		23409		$5472090\frac{9}{16}$
	23409				$41\frac{1}{2}$
	$5472132\frac{1}{16}$	*cuius latus*	$2339\frac{1}{4}$ *proximè*		$5472132\frac{1}{16}$

Secetur demum angulus k e c bifariam ipsa l e. habet igitur e c ad c l maiorem proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153.] *Rursus enim propter bipartitionem anguli, est ut k e ad e c, ita k l ad l c: et cõponenti, ut utraque k e, e c ad e c, ita k c ad c l: et permutanti, ut utraque k e, e c ad k c, ita e c ad c l. atque est ipsa quidem k e $2339\frac{1}{4}$, & pars quædam; ipsa uero e c $2334\frac{1}{4}$, & item pars quædam. utraque igitur k e, e c maior est, quàm $4673\frac{1}{2}$. & est k c 153. quare utraque k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Vt autẽ utraque k e, e c ad k c, sic e c ad c l. ergo & e c ad c l maiorem proportionem habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Itaque quoniam f e c angulus, cum sit tertia pars recti, duodecima pars est quatuor rectorum: eius autem dimidium, angulus scilicet g e c eorundem est pars uigesima quarta: & eius dimidium h e c quadragesima octaua: et rursus eius dimidium k e c nonagesima sexta; cuius item dimidium l e c pars centesima nonagesima secunda. Ponatur, inquit, ipsi æqualis angulus c e m: & producatur f c ad m. angulus ergo l e m duplus scilicet anguli l e c, nonagesima sexta pars est quatuor rectorum. quare & l m latus est polygoni circulo circumscripti, quod sex & nonaginta lateribus continetur. Quoniam igitur e c ad c l ostensum est maiorem habere proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153: estq; ipsius e c dupla a c, & ipsius l c dupla l m; habet a c ad l m maiorem proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153; & è contrario l m ad a c minorem habet, quàm 153 ad $4673\frac{1}{2}$. & quia l m latus est polygoni sex & nonaginta laterum, eius ambitus est 14688: nam 96 in 153 multipli-* K *plicata dictum numerum producunt. ambitus ergo polygoni ad diametrum a c minorem proportionem habet, quàm 14688 ad 4673 ½. quare triplus est diametri circuli, & adhuc excedit 667 ½. hæc autem minora sunt, quàm septima pars diametri, unitatis parte septima; etenim ipsorum 667 ½ septupla, quæ sunt 4672 ½, minora sunt, quàm diameter, unitate ipsa. Quoniam igitur ambitus polygoni minor est, quàm triplus sesquiseptimus; circuli uero ambitus minor est ambitu polygoni: multo igitur circuli ambitus minor est, quàm triplus sesquiseptimus ipsius diametri.*

L Sit circulus circa diametrum a c] *deinceps uero reliquam partem theorematis construens, Sit, inquit, circulus circa diametrum a c: et angulus b a c sit tertia pars recti. id autem fiet, si à puncto c sumentes lineam c b æqualem lateri hexagoni: iungamus ipsam a b: angulus enim in circumferentia hexagoni consistens, ad centrum quidem est duæ tertiæ recti, ad circumferentiam uero tertia recti. & quoniam rectus est angulus a b c; & ipse b a c tertia pars recti: erit a c b recti duæ tertiæ. si igitur producentes c b ad punctum b: & æqualem ipsi sumentes iunxerimus ex a puncto; æquilaterum triangulum erit. & cum a b cathetus basim bifariam secet: dupla est a c ipsius c b. Quòd si rursus sumamus a c 1560: erit c b 780: & quadratum a c 2433600: quadratum uero c b 608400. & si auferatur c b quadratum à quadrato a c: reliquum erit quadratum a b 1825200; cuius latus 1351 proximè: excedit enim exquisitum eius quadratum sola unitate. Quam ob caussam dixit, a b ad b c minorem habere proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

a c 1560	*c b* 780	*a b* 1351
1560	780	1351
2433600	608400	1825201
608400		1825200
1825200 *cuius latus proximè* 1351		1

M Secetur bifariam angulus b a c ducta linea a g. itaque quoniam æqualis est angulus b a g, angulo g c b.] *In eadem enim circumferentia consistunt.*

N Sed & ipsi g a c. erit & g c b angulus ipsi g a c æqualis, & angulus communis a g c est rectus. ergo & tertius angulus g f c tertio a g c æqualis erit; & triangulum a g c triangulo c g f æquiangulum. quare ut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f.] *Aequiangulorum enim triangulorum proportionalia sunt latera, & quæ eiusdem sunt rationis æqualibus angulis subtenduntur.*

O Sed ut a c ad c f, ita & utraque c a, a b ad b c. ut igitur utraque b a, a c ad b c, ita a g ad g c.] *Quoniam enim b a c angulus bifariam secatur ducta a f linea, est ut b a ad a c, ita b f ad f c: & componenti ut utraque b a, a c ad a c, ita b c ad c f: & permutanti ut utraque b a, a c ad b c, ita a c ad c f. & est ipsa quidem a b minor, quàm 1351: ipsa autem a c 1560; & b c 780. utraque igitur b a, a c ad b c minorem proportionem habet, quàm 2911 ad 780. quare & a c ad c f minorem habet, quàm 2911 ad 780. ut autem a c ad c f, ita a g ad g c. ergo & a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780: & propterea quadratum a g erit 8473921, & quadratum g c 608400. atque his ipsis æquale est quadratum a c; quod erit 9082321: & eius latus 3013 ¾ proximè; excedit enim exquisitum quadratum unitatibus 368 $\frac{1}{16}$. Quare dixit, a c ad c g minorem proportionem habere, quàm 3013 ¾ ad 780. multiplicationes autem subijciuntur.*

a g 2911	*g c* 780	*a c* 3013 ¾
2911	780	3013 ¾
8473921	608400	9082689 $\frac{1}{16}$
608400		368 $\frac{1}{16}$
9082321 *cuius latus* 3013 ¾ *proximè*		9082321

Q Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h.] *Nam propter bipartitionem anguli similitudinem triangulorum, laterum proportionalitatem, compositamq́; & permutatam rationem, erit ut utraque g a, a c ad c g, ita a h ad h c. & posita est a g minor, quàm 2911;*

& a c

& a c minor, quàm 3013 $\frac{3}{4}$. utraque igitur g a, a c minor est, quàm 5924 $\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. Quare utraque g a, a c ad c g minorem habet proportionem, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780: & idcirco a h ad h c minorem habet, quàm 5924 $\frac{3}{4}$ ad 780. ergo a h ad h c habet minorem proportionem, quàm 455 $\frac{3}{4}$ ad 60: utraque enim utriusque est pars tertia decima; & horum quadrupla a h ad h c minorem habet, quàm 1823 ad 240. Quamobrem dixit, utranque utriusque esse $\frac{4}{13}$. & quoniam a h est 1823: erit quadratum ipsius 3323329. & est h c 240, cuius quadratum 57600. est autem duobus quadratis a h, h c æquale quadratum a c. quadratum igitur a c erit 3380929: & eius latus 1838 $\frac{9}{11}$: nam quadratum 1838 $\frac{9}{11}$ superat exquisitum quadratum unitatibus [321] proxime. quare a c ad c h minorem proportionem habet, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes autem subijciuntur. 323 $\frac{37}{121}$

a h 1823	h c 240	a c 1838 $\frac{9}{11}$
1823	240	1838 $\frac{9}{11}$
3323329	57600	3381252 $\frac{37}{121}$
57600		3380929
3380929, *cuius latus* 1838 $\frac{9}{11}$ *proximè*		323 $\frac{37}{121}$

Secetur item bifariam angulus h a c ducta k a.] *Rursus propter bipartitionem anguli, triangulorum similitudinem, laterum proportionalitatem, & compositam, permutatamq; rationem, est ut utraque h a, a c ad c h, ita a k ad k c. sed utraque h a, a c minor est, quàm 3661 $\frac{9}{11}$: quoniam h a posita est 1823, & a c 1838 $\frac{9}{11}$. est autem & h c 240. utraque igitur h a, a c ad c h minorem proportionem habet, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240. At ipsorum 3661 $\frac{9}{11}$ undecim quadragesimæ sunt 1007: ipsorum autem 240 totidem quadragesimæ 66. ergo a k ad k c minorem habet proportionem, quã 1007 ad 66. atque est quadratum a k 1014049: & quadratum k c 4356. quibus cum sit æquale a c quadratum; erit ipsum 1018405, & ipsius latus 1009 $\frac{1}{6}$ proximè: excedit enim exquisitum quadratum unitatibus 12 $\frac{13}{36}$. quare a c ad c k minorem habet proportionem, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes uero subijciuntur.* R

a k 1007	k c 66	a c 1009 $\frac{1}{6}$
1007	66	1009 $\frac{1}{6}$
1014049	4356	1018417 $\frac{13}{36}$
4356		1018405
1018405, *cuius latus* 1009 $\frac{1}{6}$ *proximè*		12 $\frac{13}{36}$

Secetur postremo k a c angulus l a.] *Propter eadem, quæ sæpius diximus, est ut utraque k a, a c ad k c. ita a l ad l c, atque est ipsa quidem a k minor, quàm 1007: ipsa uero a c minor, quàm 1009 $\frac{1}{6}$: & k c 66. utraque igitur k a, a c ad k c minorem habet proportionem, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. ergo & a l ad l c minorem habet, quàm 2016 $\frac{1}{6}$ ad 66. & quoniam a l posita est 2016 $\frac{1}{6}$: erit quadratum ipsius 4064928 $\frac{1}{36}$. & est l c 66, cuius quadratum 4356; æquale autem ipsis est quadratum a c, erit igitur quadratũ a c 4069284 $\frac{1}{36}$, & eius latus 2017 $\frac{1}{4}$ proximè, excedit enim exquisitum quadratum unitatibus [13 $\frac{6}{23}$] quare a c ad c l minorem proportionem habet, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem subijciuntur.* S 13 $\frac{77}{144}$

a l 2016 $\frac{1}{6}$	l c 66	a c 2017 $\frac{1}{4}$
2016 $\frac{1}{6}$	66	2017 $\frac{1}{4}$
4064928 $\frac{1}{36}$	4356	4069297 $\frac{9}{16}$
4356		4069284 $\frac{1}{36}$
4069284 $\frac{1}{36}$ *cuius latus* 2017 $\frac{1}{4}$		13 $\frac{77}{144}$

Quoniam igitur a c ad c l minorem proportionem habet, quàm 2017 $\frac{1}{4}$ ad 66: è contrario l c ad c a maiorem habet proportionem, quàm 66 ad 2017 $\frac{1}{4}$. & quoniam c b circumferentia sexta pars

pars est ipsius circuli: erit circumferentia g c pars duodecima: h c uigesima quarta: k c quadragesima octaua: & l c nonagesima sexta. quare recta linea l c latus est polygoni, quod sex et nonaginta lateribus continetur. atque est l c 66. polygoni igitur ambitus ad diametrum circuli maiorem propositionem habet, quàm 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. hæc autem sunt tripla, & adhuc superant
$28\frac{117}{284}$ $284\frac{1}{4}$; quæ quidem maiora sunt, quàm decem septuagesimæ primæ: nanque earum una est [$27\frac{7}{10}$]
$284\frac{17}{142}$ proxime: & harum decupla [277]. multo igitur maior est circuli circumferentia, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Numeri igitur ab eo positi, ut fieri potuit, mediocriter explicati sunt. Sciẽdum autem Apollonium Pergæum ἐν τῷ ὠκυτοβόῳ idem per alios numeros demonstrasse, adduxisseq; ad maiorem propinquitatem. Quod quidem exquisitius factum uidetur. sed tamen ad Archimedis propositũ nihil confert: diximus enim ipsum in hoc libello proposuisse id, quod propinquum est, inuenire, propter necessarios uitæ usus. Quare neque Porus Nicænus opportune accusauit Archimedem, quòd non exacte inuenerit, cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. ex quibus ipse in libris super ea re conscriptis dixit, præceptorem suum, Philonem intelligens Gadareum, ad exactiores numeros rem adduxisse, quàm sint ij, qui ab Archimede sunt expositi, uidelicet 7 & 22: omnes enim deinceps uidentur propositum eius ignorasse. utuntur autem multiplicationibus myriadum, & diuisionibus, quas non facile assequetur, nisi qui in Magni rationibus fuerit uersatus. Quòd siquis omnino uoluerit ad minima redigere, utatur ijs, quæ in mathematica compositione à Claudio Ptolemæo tradita sunt, per partes, & minutias, & per rectas lineas in circulo aptatas. atque ego id iam fecissem, nisi, quod sæpius dixi, intellexissem, fieri non posse, ut per ea, quæ hic posita sunt, exquisite inueniatur recta linea circuli circumferentiæ æqualis: quanquam ei, quod proximum est, & ferè idem attentatur. itaque sufficiunt ea, quæ ab Archimede hoc loco dicta sunt.

FEDERICI

FEDERICI COMMANDINI
IN EANDEM CIRCVLI DIMENSIONEM COMMENTARIVS.

IN PROPOSITIONEM I.

SECENTVR'QVE circumferentiæ bifariam, & sint portiones iam minores excessu, quo circulus ipsum triangulum excedit.] *Vel hoc loco non nulla desiderantur, uel ita breui sermone usus est Archimedes, quoniam ex duodecimo elementorum libro, propositione secunda, manifeste patet, quo modo per figuram in circulo descriptam tandem relinquantur quædam portiones, quæ minores sint qualibet proposita magnitudine.* A

Sumatur centrum n & perpendicularis n x.] *Sumatur centrum circuli, quod sit n: & ab ipso ducatur n x perpendicularis ad latus figuræ inscriptæ. erit n x minor circuli semidiametro, hoc est trianguli rectanguli latere.* B

Quare figura rectilinea minor est e triangulo.] *Si enim linea n x æqualis esset trianguli lateri: haberent omnia triangula, ex quibus figura rectilinea constat, ad triangulum e eandem proportionem, quam bases omnes ad ipsius trianguli basim: & idcirco figura eo minor esset. Nunc uero cum etiam linea n x minor sit latere trianguli: figuram ipsam triangulo e multo minorem esse necesse est.* C prima VI.

Triangulum igitur r o p maius est, quàm dimidium figuræ o f a m.] *Nam triangulum r a o maius est, quàm ipsum m a r. quare multo maius, quàm figura contenta rectis lineis a r, r m, & circuli circumferentia a m: quæ quidem pars est trianguli m a r: & eadem ratione triangulum a o p maius est, quàm figura contenta rectis lineis a p, p f, & circumferentia circuli a f. ex quibus sequitur totum triangulum r o p maius esse, quàm sint utræque figuræ a r m, a p f: & idcirco maius, quàm dimidium figuræ o f a m.* D prima VI.

Itaque sumantur portiones ipsi p f a similes; quæ quidem minores sint eo, quo triangulum e excedit a b c d circulum.] *Circumscripto quadrato ipsi circulo, superficies, quæ continentur lateribus quadrati, & circuli circumferentia, uel erunt minores excessu, quo triangulum excedit ipsum circulum, uel maiores, uel æquales. Sint primum minores. ergo quadratum adhuc minus est triangulo: quod est absurdum, cum sit eo maius: est enim n m æqualis catheto trianguli, & ambitus quadrati maior basi eiusdem. si uero sint æquales; sequitur quadratum æquale esse triangulo: quod item est absurdum. At si ponantur esse maiores: arcus bifariam secentur: & per sectionum puncta ducantur lineæ contingentes, ut dictum est. Cum igitur triangulum r o p sit maius, quàm dimidium figuræ o f a m: sublatis quatuor huiusmodi triangulis, erit sublatum plus, quàm dimidium dictarum superficierum. Quare si hoc rursus fiat, & eius, quod fuit reliquũ, sublatum erit plus, quàm dimidium; & si idem continenter fiat: relinquentur ad extremum portiones, quæ minores erunt dicto excessu; & idem absurdum sequetur. ostensum namque est in decimo libro elementorum, propositione prima, Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur plus, quàm dimidium: & ab eo, quod reliquum est, auferatur rursus plus, quàm dimidium: hocq; semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit minore magnitudine exposita.* E

IN PROPOSITIONEM II.

Quoniam igitur a c e triangulum ad triangulum a c d eam proportionem habet, quam 21 ad 7, triangulum autem a c d ad triangulum a e f habet eam, quam 7 ad 1: erit a c f triangulum ad triangulum a c d, ut 22 ad 7.] *Cum enim linea d e dupla sit ipsius c d: erit tota c e ipsius c d tripla. quare & triangulum a c e ad triangulum a c d triplam habet proportionem: hoc est eam, quam 21 ad 7: & cum triangulum a c d ad ipsum a e f eandem habeat, quam 7 ad 1: habebit ex æquali a c e triangulum ad ipsum a e f eam, quam 21 ad 1: & componendo utraque triangula a c e, a e f: hoc est triangulum a c f ad a e f, quam 22 ad 1.* A prima VI. 22. V. 18. V.

est autem

est autem triangulum a e f ad a c d, ut 1 ad 7. quare rursus ex æquali triangulum a c f ad ipsum a c d erit, ut 22 ad 7.

IN PROPOSITIONEM III.

IN hoc tertio theoremate sæpissime necesse habemus, Dato latere, superficiem eius quadratam inuenire. Et contra data superficie quadrata, inuenire eius latus, siue uerum, siue uero propinquũ. nam cum superficies à quadrato numero denominatur, uerum eius latus inuenire licet; cum autem à numero non quadrato, non item; sed uero propinquum uenamur. Et insuper ex datis inter se quantitatibus compositum quod nam sit; Et si data quantitas ab altera item data auferatur, quod reliquũ sit, comperire. Et datarum quantitatum proportionem ad integras partes redigere. Quorum omnium cum operationes omnibus sint in promptu: nos demonstrationes adiungere conabimur, quas nullus hactenus, quod sciam, uniuerse complexus est. Theon quidem in magnam Claudij Ptolemæi compositionem scribens demostrauit, quomodo data superficie quadrata propinquum eius latus inueniatur, per partes, & sexagenarias primas, secundas & quæ deinceps sunt: qui modus astrologis fuit peculiaris. posteriores uero per partes, & earum, ut aiunt, fractiones idem illud efficere conati sunt: idq; duplici uia: uel enim latus, quod uero latere minus, uel quod maius esset, sumpserunt. Quæ quidem nos inferius tractabimus, postquam alia non nulla præmiserimus.

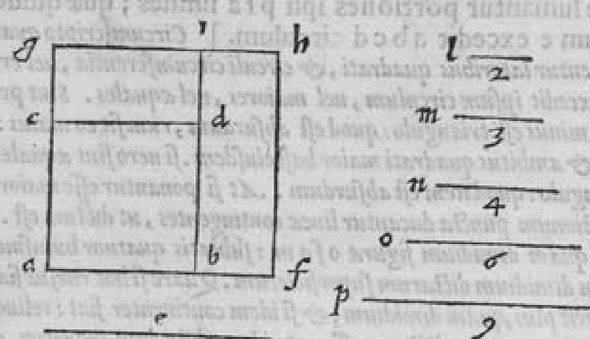
Notam, seu datam quantitatem hoc loco intelligi uolumus non solum eam, quam mensura uulgata, aut quomodocunque ad arbitrium sumpta secundum datum numerum metitur: sed etiam, quæ ad eam mensuram proportionem habet in numeris datam.

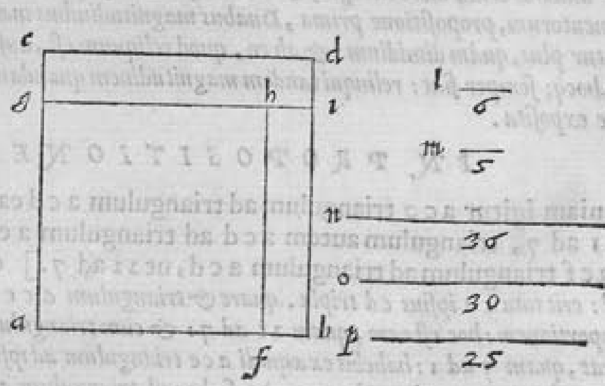
Quantitates inter se datas dicimus, quas una communis mensura metitur, uel quæ ad communem mensuram proportionem habent in numeris datam.

PROPOSITIO I.

Cuiuslibet datæ lineæ & quadratum datum erit.

SI quidem datam lineam metitur uulgata mẽsura: quadratum eius dabitur ex ijs, quæ monstrauit Ioannes Regiomontanus libro primo de triangulis, propositione prima. si uero ea ad uulgatam mẽsuram proportionem habet in numeris datam; uel erit minor uulgata mensura, uel maior. Sit primum minor; & sit ab; cuius quadratum a b c d est id, quod quærimus. linea uero e ponatur uulgata mensura. Itaque a b & a c lineas eousque producemus, quosque æquales sint ipsi e; quæ sint a f, a g: deinde completo quadrato a h, ipsam quoque b d lineam producemus ad g h in pũctum i. Quoniam igitur a b data est; quæ ad uulgatam mensuram proportioné ha-





bet

bet in numeris datam: sint dati numeri eius proportionis minimi l m; quorum l ad m eam proportionem habeat, quam a b ad ipsam e mensuram: ducaturq́; l numerus in seipsum, & productum sit n: postea ducatur in m, & producat o: ipso autem m in se se ducto fiat p. erunt tres numeri n o p proportionales, minimi in ea proportione, quæ est l ad m. 2. VIII. *Dico iam quadratum a d eandem habere proportionem ad quadratum a b uulgatæ mensuræ, quam habet numerus n ad ipsum p. est enim sicut a c ad a g: hoc est, sicut a b data linea ad e mensuram, ita a d quadratum ad rectangulum a i.* prima VI. *sicut autem a b ad e, ita l numerus ad numerum m; hoc est n ad o. quare quadratum a d ad rectangulum a i eandem proportionem habet, quam n ad o. Rursus sicut a b ad e; hoc est ad a f ei æqualem, ita rectanglum a i ad quadratum a b.* prima VI. *ergo rectangulum a i ad quadratum a b est, sicut l ad m: hoc est sicut o ad p. sed erat a d quadratum ad rectangulum a i, sicut n ad o. Quare ex æquali quadratum a d ad quadratum a b eam proportionem habet, quam n ad p.* 22. V. *Quòd si a b data linea maior sit uulgata mensura, descripto quadrato a b c d ex linea a b abscindatur æqualis ipsi e; quæ sit a f: ex linea item a c abscindatur æqualis eidem: sitq́; a g: & perficiatur quadratum a b. Similiter demonstrabitur quadratum a d ad quadratum a b eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum p. atque hoc est, quod demonstrare oportebat. Cum ergo quadratum a b uulgatæ mensuræ datum sit: & ipsum a d quadratum dabitur ex data proportione in numeris n & p.*

OPERATIO.

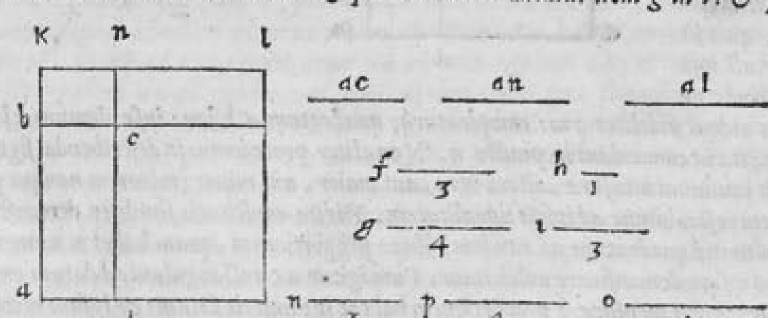
Numerorum datæ proportionis uterque in semetipsum multiplicetur; & quam proportionem habuerit quadratum primi numeri ad quadratum secundi, eandem habebit & quadratum datæ lineæ, quod quærimus, ad quadratum uulgatæ mensuræ.

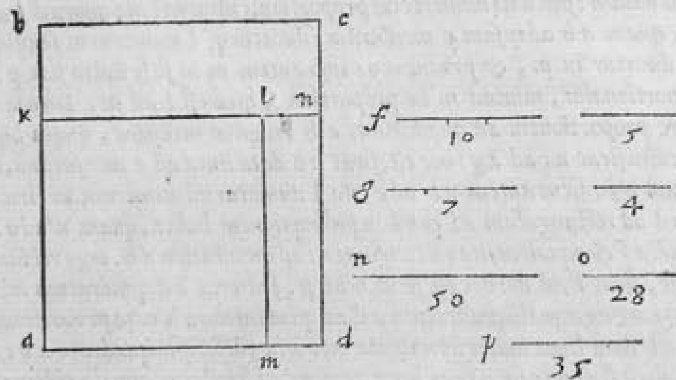
$$\frac{2\text{-}2}{3\text{-}3}\ \frac{4}{9} \qquad\qquad \frac{6\text{-}6}{5\text{-}5}\ \frac{36}{25}$$

PROPOSITIO II.

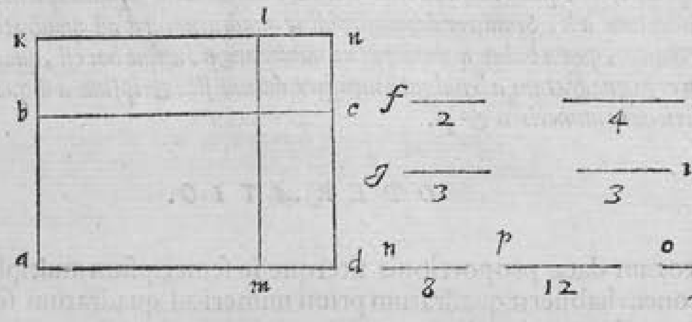
Quod duabus inter se datis lineis continetur rectangulum, & ipsum datum erit.

SIT rectangulum a c duabus inter se datis lineis contentum a b, a d. et siquidem datæ lineæ sint, quas metiatur communis quæpiam mensura: illud ipsum datũ erit, ex demonstratis à Ioanne Regiom. libro primo de triangulis, propositione sextadecima. si uero ipsæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit communis illa mensura e, ad quam linea a b ita sit, ut f numerus ad numerum g: linea uero a d ad eandem sit, ut numerus h ad i numerũ. Vel igitur utræque datæ lineæ ipsa e maiores erunt; uel utræque minores; uel una maior, altera minor; uel altera æqualis, altera maior, aut minor. Sint primo utræque minores: & producantur ad æqualitatem communis mensuræ e: & compleatur quadratum a k l m: ipsa quoque d c producatur ad lineam k l in punctum n. Et cum linea a b ad ipsam e; hoc est ad a k ita sit, ut f numerus ad numerum g: erit rectangulum a c ad rectangulum a n, ut numerus f ad ipsum g. Rursus cum linea a d ad eandem e; hoc est ad a m ita sit, ut numerus h ad ipsum i: erit & rectangulum a n ad quadratum a l, ut h ad i: prima VI. *Ducatur f numerus in numerum h: & producatur n: ducatur item g in i: & productum sit o: deinde ex ipso g in h ducto fiat p. Dico rectãgulum a c ad quadratum a l eam proportionem habere, quam habet n ad o.*

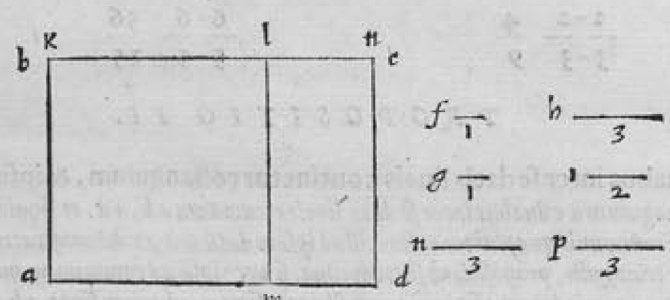




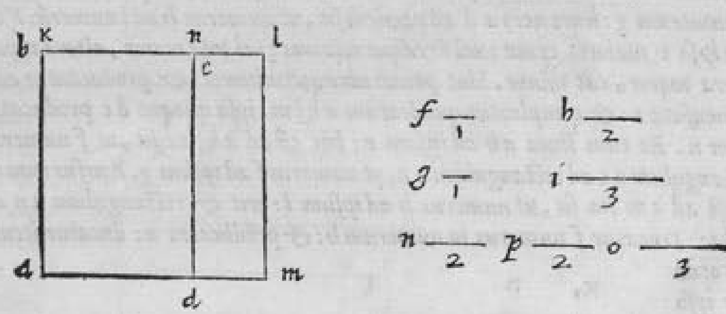
Quoniam enim numerus h duos numeros multiplicat f & g:
17. VII. *facti numeri n & p eandem habent proportionem. quare a c rectãgulum ad ipsum a n erit ut n ad p. & rursus quoniam g duos numeros multiplicat h et i: producti p & o in eadem proportione erunt: & id circo erit a n rectãgulum ad quadratum a l, ut p ad o.*
22. V. *ergo ex æquali a c rectãgulum ad quadratum a l, ut n ad o.*



Si uero utræque datæ lineæ sint communi mensura e maiores: abscindantur ab his a k, a m lineæ ipsi æquales: & perficiatur quadratum a k l m: postea k l producatur ad c d in n.



Quòd si altera maior sit, altera minor: sit a b minor: & producatur ad æqualitatem ipsius e; quæ sit a k; & ab ipsa a d abscindatur æqualis eidem uidelicet a m: compleaturq́; quadratum a k l m: ipsæ demum k l, & d c producantur; ita ut conueniant in puncto n. Non aliter procedemus in describenda figura, si altera sit æqualis communi mensuræ, altera uero, aut maior, aut minor; minorem nanque producemus, & maiorem resecabimus ad ipsius æqualitatem. His ita constitutis similiter demonstrabimus a c rectangulum ad quadratum a l eandem habere proportionem, quam habet n numerus ad numerum o; quod ipsum demonstrare uolebamus. Cum igitur a c rectangulum ad datum quadratum a l (est enim communis mensuræ) proportionem habeat in numeris datam: & ipsum necessario dabitur.



OPERA-

OPERATIO.

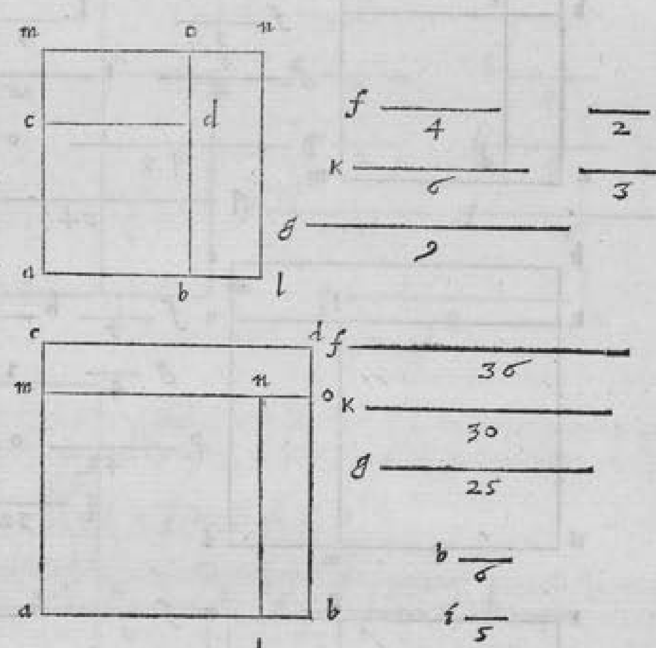
Numeros datarum proportionum multiplicabimus; antecedentem in antecedentem; & conſequentem in conſequentem; & quam proportionem habuerit productum ex antecedentibus ad productum ex conſequentibus, eandem habebit quæſitum rectangulum ad quadratum communis menſuræ.

3—1 3	10—5 50	2—4 8
4—3 12	7—4 28	3—3 9

PROPOSITIO III.

Quadrato noto, latus eius ignotum eſſe non poterit.

De eo quadrato hic ſermo eſt, quod latus habet longitudine rationale: nam de eo, quod potentia tantum rationale habet, inferius dicetur. Sit quadratum eiuſmodi notum a b c d. & ſiquidem menſuratur à quadrato e, uulgatæ menſuræ: latus eius notum fiet ex 2. primi de triangulis. Si uero ad quadratum dictum proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uel erit eo maius, uel minus. Sit primum minus; & ſint numeri datæ proportionis f & g: inueniantur q; eorum latera: & ipſius quidem f latus ſit h; ipſius uero g ſit i. Dico quadrati a b c d latus, uidelicet a b, notum iam eſſe. habebit enim ad ipſam e proportionem eãdem, quam habet numerus h ad i numerum: nanque ex undecima octaui elementorum conſtat, inter f & g cadere numerum quendam proportionalem, qui ſit k: & proportionem f ad g duplam eſſe eius, quæ eſt h ad i. Quare ſicut f ad k, & ſicut k ad g, ita erit h ad i. Et quoniam



quadratum a b c d eſt minus quadrato e: producantur eius latera a b, a c; adeo ut fiant æqualia ipſi e: & compleatur quadratum a l m n: producatur item latus b d uſque ad m n in o. erit ut a c ad a m, hoc eſt, ut a b ad e, ita quadratum a d ad rectangulum a o: & ut a b ad a l, hoc eſt ad e, ita rectangulum a o ad quadratum a n. Quare erunt tres ſuperficies proportionales in eadem proportione, in qua eſt linea a b ad e. Rurſus quoniam poſitum eſt quadratum a d ad quadratum e eſſe ſicut f ad g. erunt tres numeri f k g proportionales in eadem illa proportione, in qua ſunt tres dictæ ſuperficies a d, a o, a n: & propterea linea a b ad e eandem proportionem habebit, quam habet numerus h ad numerum i. Si uero quadratum a b c d ſit maius quadrato e: abſcindantur ab ipſis a b, a c, lineæ ipſi e æquales, quæ ſint a l, a m: & compleatur quadratum a l m n: ipſa autem m n producatur uſque ad d b in o. Eadem ratione monſtrabitur lineam a b ad e, eam habere proportionem, quam habet h ad i: quod monſtrare oportebat. prima VI.

OPERATIO.

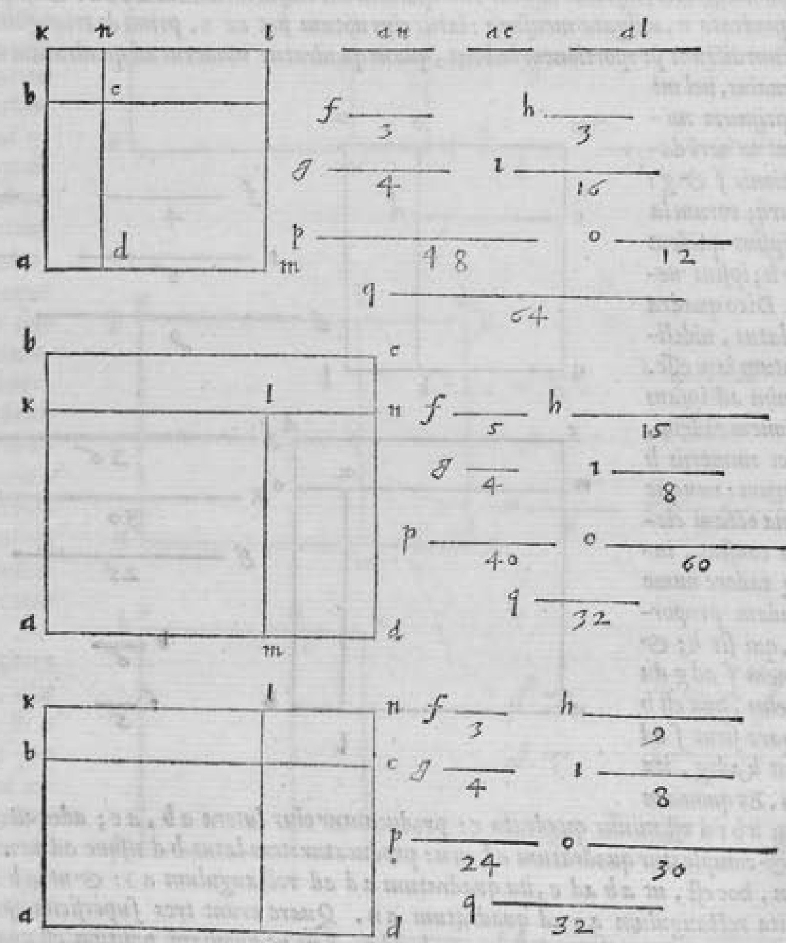
Inueniatur latus quadratum numerorum datæ proportionis, & quam proportionem habuerit latus primi ad latus secundi, eandem habebit latus quæsitum ad uulgatam mensuram.

$$\frac{4}{9}\quad\frac{2}{3}\qquad\qquad\frac{36}{25}\quad\frac{6}{5}$$

PROPOSITIO IIII.

Dato latere quolibet rectanguli cogniti, alterum quoque latus dabitur.

SIT rectangulum cognitum a b c d, cuius latus a b datum sit. erit alterum quoque a d datum. nã si datũ latus, et rectangulum mensurentur à communi quapiam mensura, uidelicet latus à mensura li

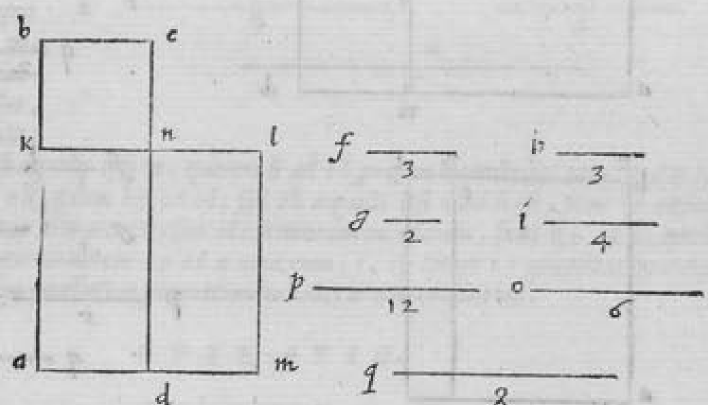


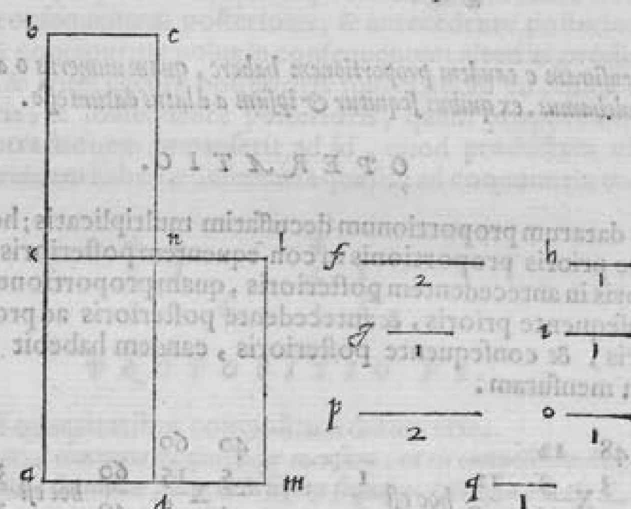
neari, & rectangulum ab eadem quadrata: quod quærimus fiet manifestũ, ex septima decima primi libri de triangulis. Si uero ipsa ad communem mensuram proportionem habuerint in numeris datam: sit communis mensura e, ad quam a b eam proportionem habeat, quam numerus f ad numerum g: & rectangulum a c ad quadratum ipsius e, quam h numerus ad numerum i. Sint autem

primum

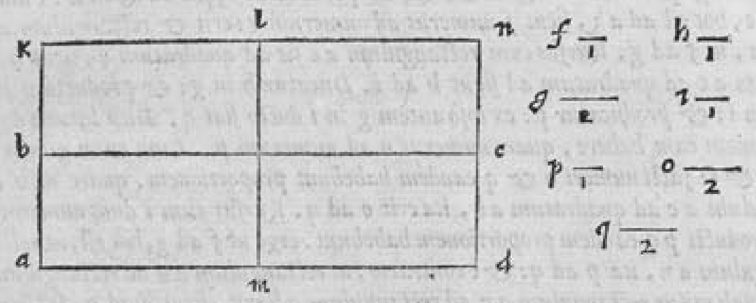
primum utraque communi mensura minora: & producantur latera a b, a d; ita ut sint æqualia ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & item d c producatur usque ad k l in n. Cum ergo latus a b sit ad e, hoc est ad a k, sicut f numerus ad numerum g: erit & rectangulum a c ad re- 1. VI.
ctangulum a n, ut f ad g. Rursus cum rectangulum a c sit ad quadratum e, sicut h ad i: erit & rectangulum a c ad quadratum a l sicut h ad i. Ducatur h in g: & productum sit o. ducatur item f in i; & producatur p: ex ipso autem g in i ducto fiat q. Dico latus a d quæsitum ad e proportionem eam habere, quam numerus o ad numerum p. Cum enim g duos numeros multiplicet h & i: facti numeri o & q eandem habebunt proportionem. quare ut h ad i, hoc 17. VII.
est ut rectangulum a c ad quadratum a l, ita erit o ad q. Rursus cum i duos numeros multiplicet f & g: producti p q eandem proportionem habebunt. ergo ut f ad g, hoc est, ut rectangulum a c ad rectangulum a n, ita p ad q: & è contrario, ut rectangulum a n ad rectangulum a c, ita q ad p. ex æquali igitur rectangulum a n ad rectangulum a l erit, sicut o ad p. sed sicut rectan- 23. VI.
gulum a n ad rectangulum a l, sic linea a d ad a m. quare a d ad a m, hoc est ad e eam propor- 1. VI.
tionem habet, quam o ad p.

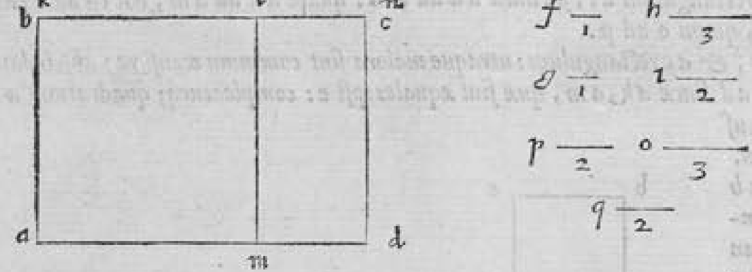
Si latus a b, & a c rectangulum: utraque maiora sint communi mensura: abscindantur à lineis ipsis a b, a d lineæ a k, a m, quæ sint æquales ipsi e: compleaturq; quadratum a k l m: & k l producatur usque ad c d in n. Si uero latus a b sit minus e mensura; & rectangulum a c maius quadrato eiusdem: producemus a b, ut fiat æquale ipsi e, quod sit a k: & ab ipso a d abscindemus eidem æqualem a m: & perficiemus quadratum a k l m: itemq; k l & d c producemus; adeo ut conueniant in puncto n. Quòd si latus a b sit maius ipsa e; & rectangulum quadrato e minus: ab ipso a b abscindemus a k: & a d producemus ad æqualitatem mensuræ e: complebimusq; quadratum a k l m: in quo uero puncto linea k l secat ipsam c d, sit n.

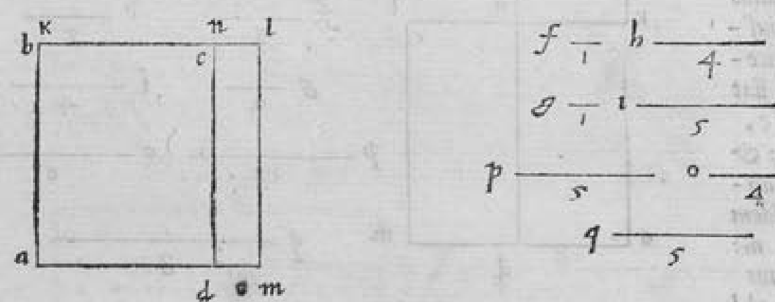




Si denique latus a b æquale sit ipsi e; & rectangulum a b c d maius, aut minus quadrato eiusdem, uel contra rectangulum dicto quadrato æquale; & latus a b ipsa e, aut maius, aut minus: figuras describemus sicuti superius factum est; quæ maiora sunt communi mensura resecando; quæ uero minora producendo ad eius æqualitatem. similiterq; in omnibus demonstrabimus







mus a d ad mensuram e eandem proportionem habere, quam numerus o ad numerum p; quod demonstrare uolebamus. ex quibus sequitur & ipsum a d latus datum esse.

OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decussatim multiplicatis; hoc est multiplicato antecedente prioris proportionis in consequentem posterioris, & contra consequente prioris in antecedentem posterioris, quam proportionem habuerit productum ex consequente prioris, & antecedente posterioris ad productum ex antecedente prioris, & consequente posterioris, eandem habebit latus quæsitum ad communem mensuram.

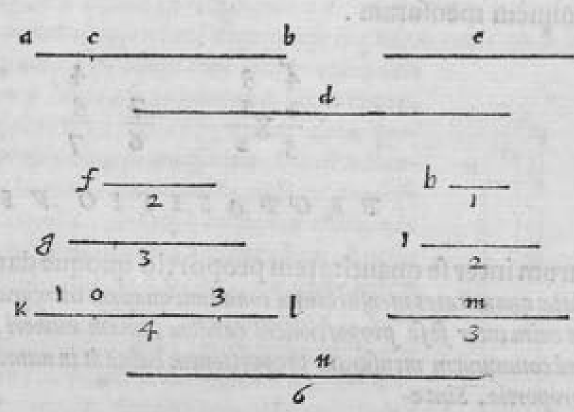
$$\overset{48\quad 12}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{16}}\quad \frac{12}{48}\ \textit{hoc est}\ \frac{1}{4}\qquad\qquad \overset{40\quad 60}{\frac{5}{4}\times\frac{15}{8}}\quad \frac{60}{40}\ \textit{hoc est}\ \frac{3}{2}\ \textit{hoc est}\ 1\frac{1}{2}$$

PROPOSITIO V.

Datarum inter se quantitatum inæqualium, & differentia data erit.

SINT quantitates inter se datæ, a b quidem maior, c uero minor; quarum differentia sit a e. dico hanc quoque datam esse. si enim à communi mensura mensurentur datæ quantitates: nota fiet earum

earum differentia ex quarta primi de triangulis. Sin autem hæ ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: sit illa mensura d; ad quam a b proportionem habeat, quam f numerus ad numerum g: & ad eandem d ipsa c proportionem habeat, quam numerus h ad i numerũ. ducatur i in f & g; & qui producuntur numeri, sint k l, & n: ducatur item g in h, & productam sit m: postea uero m ab ipso k l dempto, reliquum si k o. habebit differentia a e, quam quærimus, ad communem mensuram d, eam proportionem, quam habet k o ad n. Quoniam enim i duos numeros multiplicat f & g: erunt producti k l & n in eademmet proportione. quare & a b ad d, erit, ut k l ad n. Rursus quoniam g duos numeros multiplicat h & i: producti m & n proportionem eandem habebunt; atque erit c ad d, ut m ad n: & è contrario d ad c, ut n ad m. ergo ex æquali a b ad c, ut k l ad m. est autem e b ipsi c æqualis, cum a d sit excessus, quo a b ipsum c excedit; & eadem ratione o l est æqualis ipsi m. quare a b ad e b proportionem habet eam, quàm k l ad o l: & diuidendo a e ad e b, quam k o ad o l. sed e b æqualis ipsi c ad d est, sicut o l æqualis ipsi m ad n. ex æquali igitur erit a e excessus ad communem mensuram, sicut k o ad n: quod monstrare uolebamus. proportio autem k o ad n nota cum sit, & ipsam a c quantitatem notam efficiet; quæ ad communem mensuram proportionem habet in numeris datam.



OPERATIO.

Numeris datarum proportionum multiplicatis, antecedente scilicet prioris proportionis in consequentem posterioris, & antecedente posterioris in consequentem prioris, & consequente unius in consequentem alterius, productoq; ex consequente prioris, & antecedente posterioris subtracto ab eo, quod factum est ex antecedente prioris, & consequente posterioris, quam proportionem habuerit id, quod post subtractionem remanserit ad id, quod productum est ex duobus consequentibus, eandem habebit differentia quæsita ad communem mensuram.

$$\overset{4\ \ 3}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}\ \ 6 \qquad \overset{4}{\frac{3}{1}}\ \frac{1}{6}$$

PROPOSITIO VI.

Ex datis inter se quantitatibus compositum datum erit.

SI datæ quantitates à communi mensurentur mensura: ex eis compositum datum erit, per tertiam primi de triangulis. sin minus, sint, ut in figura superius descripta a b & c, quæ ad communem mensuram d proportionem habeant secundum eos numeros datam. Dico compositum ex ipsis datum esse. nam numeris itidem multiplicatis, atque ijs, qui ab eis producuntur dispositis, compositum ipsum ad communem mensuram, eandem habebit proportionem, quam compositum ex k l & m ad n. Quoniam enim a b ad c est sicut k l ad m: erit coniungendo compositum ex a b & c ad c, sicut compositum ex k l & m ad m. est autem & c ad d, sicut m ad n. quare ex æquali compositum ex a b & c ad d erit sicut compositum ex k l & m ad ipsum n: & propterea datum erit, cum ad communem mensuram proportionem habeat in numeris datam.

OPERATIO.

OPERATIO.

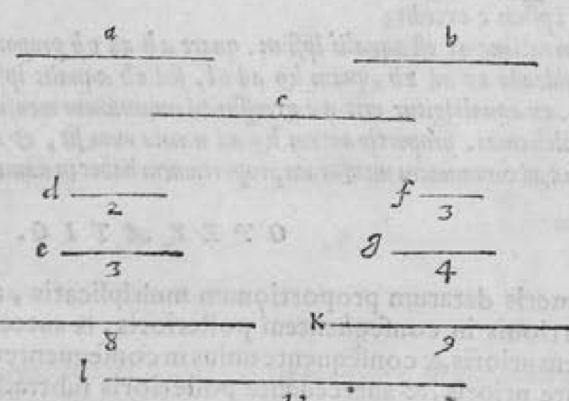
Numeris datarum proportionum modo superius dicto multiplicatis, & productis ex antecedentibus unius, & consequentibus alterius simul iunctis, quam proportionem habuerit compositum ipsum ad id, quod factum est ex ductu consequentium inter sese, eam habere dicemus compositum ex a b & c, quod quærimus, ad d communem mensuram.

$$\overset{4\quad 3}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}\qquad \frac{7}{6}\quad \overset{4}{\frac{3}{7}}$$

PROPOSITIO VII.

Datarum inter se quantitatem proportio quoque data erit.

SI datæ quantitates mensurétur à communi quadam mensura: earum proportio iam data erit; habebunt enim inter sese proportionem eandem, quam numeri, secundum quos mensuranur. Quòd si ad communem mensuram proportionem habeant in numeris datam: dabitur tunc quoque earum proportio. Sint enim quantitates sic datæ a b: & sit c communis mensura: habeat autem a ad c proportionem eam, quam numerus d ad numerum e: & b ad eandem c habeat eam, quam numerus f ad ipsum g. Ducatur d in g: & productum sit h. ducatur deinde e in f: & producatur k. postremo e ipso in g ducto, fiat l. Et quoniam g duos numeros multiplicat d & e producti h & l eandem habebunt proportionem. quare a ad c erit, ut h ad l. Rursus quoniam e duos numeros multiplicat f et g: erunt facti inde numeri k et l in eadé proportione: atque erit b ad c, ut k ad l: & è contrrio c ad b, ut l ad k. sed erat a ad c, ut h ad l. ergo ex æquali a ad b erit, ut h ad k. proportio autem h ad k data est, quòd terminos habeat notos. data igitur erit & proportio a ad b, ut oportebat.



OPERATIO.

Numeris datarum proportionum decussatim multiplicatis, quam proportionum habuerit productum ex antecedente prioris, & consequente posterioris, ad productum ex consequente prioris, & antecedente posterioris, eandem habere inuenietur quantitas a ad quantitatem b.

$$\overset{8\quad 9}{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}\qquad \frac{8}{9}$$

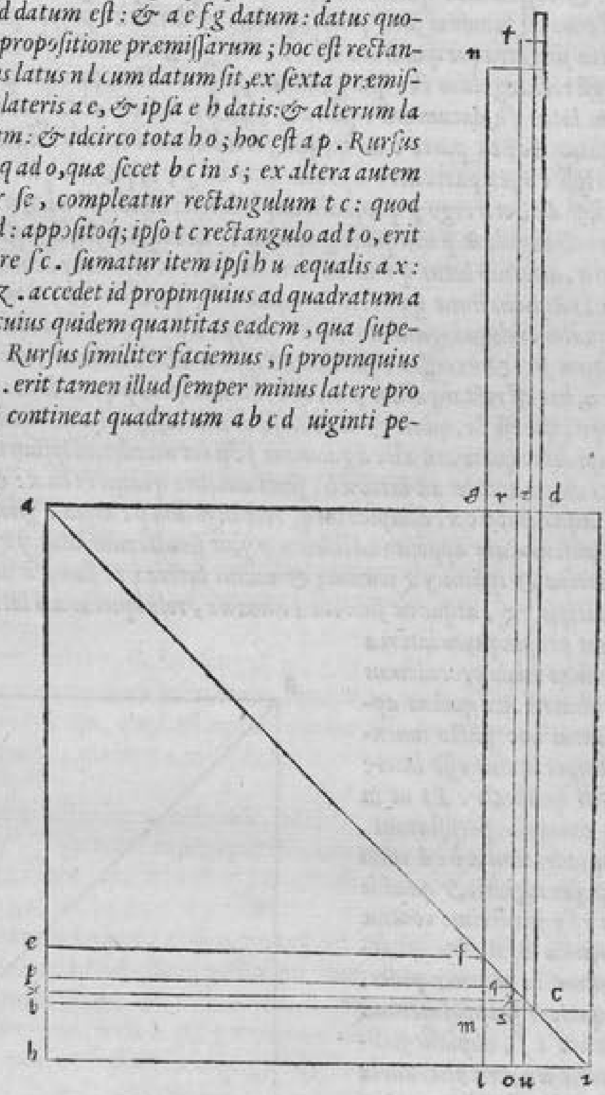
PROPOSITIO VIII.

Quadrati noti latus potentia tantum rationale habẽtis propinquũ latus inuenire.

SIT

SIT quadratum eiusmodi a b c d; cuius oporteat latus propinquum inuenire. sumatur primo quadratum proxime minus, habens latus rationale longitudine, quod sit a e f g: & item sumatur quadratum proximè maius a h i k: producaturq; f g; ex parte quidem f usque ad lineam h i in l, secans b c in m; ex parte uero g usque ad n; ita ut sit g n æqualis ipsi g f: & compleatur rectangulum n c. erit ipsum n d rectangulum æquale rectangulo d f, hoc est ipsi f b. quare totum n c æquale erit gnomoni b f d. Si igitur rectangulo n c ad lineam n l apposito, sit latus alterum l o: erit illud minus ipso m c. nam quia n c rectangulum æquale est rectangulo n o: habebit latus n m ad n l eam proportionem, quã l o ad m c. sed m n minus est ipso n l. et l o igitur ipso m c minus erit. Deinde sumpta a p æquali ipsi h o, describatur quadratum a p q r. quod cum satis propinquum sit quadrato a b c d: & eius latus a p lateri a b propinquum comperietur. Quoniam enim quadratum a b c d datum est: & a e f g datum: datus quoque erit gnomon b f d, ex quinta propositione præmissarum; hoc est rectangulum n c; hoc est ipsum n o. cuius latus n l cum datum sit, ex sexta præmissarum; constat nanque ex duplo lateris a e, & ipsa e h datis: & alterum latus l o dabitur, ex quarta earundem: & idcirco tota h o; hoc est a p. Rursus producta r q; ex parte quidem q ad o, quæ secet b c in s; ex altera autem ad t ut sint q r, r t æquales inter se, compleatur rectangulum t c: quod similiter erit æquale gnomoni b q d: appositoq; ipso t c rectangulo ad t o, erit & latus alterum o u, minus latere s c. sumatur item ipsi h u æqualis a x: & describatur quadratum a x y z. accedet id propinquius ad quadratum a b c d: & latus a x ad latus a b; cuius quidem quantitas eadem, qua superius usi sumus ratione, nota fiet. Rursus similiter faciemus, si propinquius adhuc latus inuenire uoluerimus. erit tamen illud semper minus latere propositi quadrati. Exempli gratia, contineat quadratum a b c d uiginti pedes. continebit proxime minus quadratum a e f g pedes sexdecim: & proxime maius uiginti quinque, hoc est a h i k: eritq; latus a e pedum quatuor: & a h quinque. itaque demptis sexdecim ex uiginti, reliquentur quatuor: & totidem pedum erit gnomon b f d, hoc est rectangulum n c. quod quidem si apponatur ad n l, quæ est pedum nouem: prodibit l o quatuor partium ex nouem unius pedis. quare tota h o, hoc est a p habebit pedes quatuor, & quatuor nonas. Quadratum ergo a p q r continebit pedes $19\frac{61}{81}$: & gnomon b q d, hoc est rectangulum t c $\frac{20}{81}$. quod si rursus appositum fuerit ad lineam t o, quæ habet pedes $9\frac{4}{9}$: erit o u $\frac{4}{153}$: & h u tota, hoc est a x $4\frac{8}{17}$.

1. sexti
43 primi.
14. sexti.



OPERATIO.

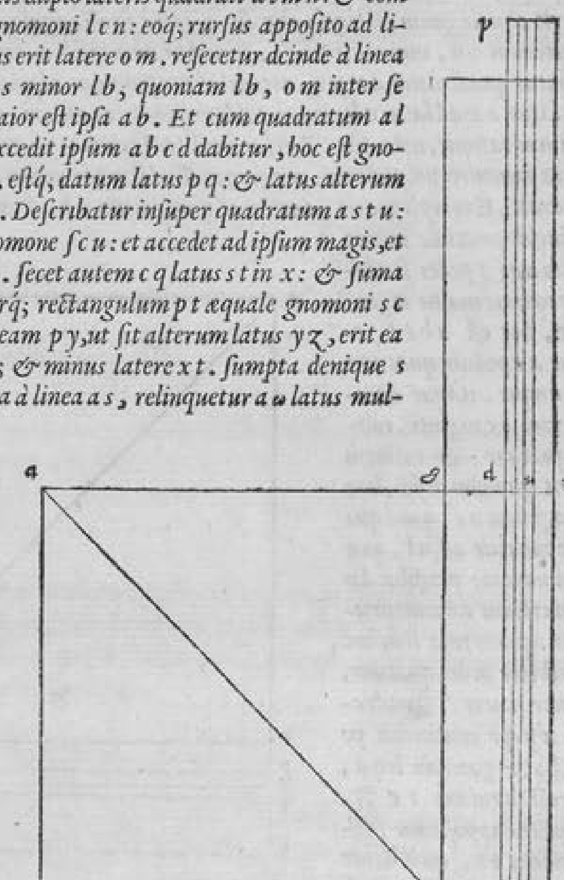
Ad latus quadrati proxime minoris addemus, quod producitur ex diuisione excessus, quo propositum quadratum, quadratum proxime minus excedit, per duplum ipsius lateris unà cum eo, quo latus proxime maioris quadrati dictum latus excedit: habebimusq; satis propinquum latus propositi quadrati. Quòd si ad hoc rursum

ſum addemus , quod fit ex diuiſione eius, quo propoſitum quadratum excedit quadratum illius propinqui lateris, per duplum eiuſdem, unà cum eo, quo proxime maioris quadrati latus idem ipſum excedit; erit latus illud multo magis propinquum; & ita ſi placuerit, ulterius procedendum erit, cuius exemplum patet ex ante dictis.

ALITER. Sumatur ſimiliter quadratum proxime minus, ut in ſuperiori figura a e f g: & producatur f g; ex parte quidem f ad lineam b c in h; ex parte autem g ad i: ita ut g i ſit æqualis ipſi g f: & compleatur rectangulum i c. erit i c æquale gnomoni b f d. Quare ſi illud ipſum appoſuerimus ad lineam i f, ut ſit rectangulum i k: erit alterum latus f k, maius latere b c, ut ſuperius eſt demonſtratum: & idcirco e k maior ipſa b c: hoc eſt ipſa a b. ſumatur a l, ipſi e k æqualis: & deſcribatur quadratum a l m n. quod quanquam ſuperat quadratum a b c d, gnomone l c n: eſt tamen ei ſatis propinquum: & latus a l propinquum lateri a b notum fiet. Nam cum data ſint utraque quadrata a b c d, a e f g: & eorum differentia dabitur, hoc eſt gnomon b f d, hoc eſt rectangulum i c. quo quidem appoſito ad lineam datam i f, duplam ſcilicet ipſius a e, & alterum latus f k datum erit. quare & tota e k hoc eſt a l: atque ipſius quadratum a l m n. Rurſus producatur d c; ex parte c ad q, quæ ſecet lineam l m in o: ita ut ſit o q æqualis ipſi c o; ex parte uero d producatur ad p; uſque adeo ut d p æqualis fiat ipſi d c. erit ergo p q æqualis duplo lateris quadrati a l m n: & completum rectangulum p m æquale gnomoni l c n: eoq; rurſus appoſito ad lineam p q, alterum latus q r minus erit latere o m. reſecetur deinde à linea a l ipſa l s æqualis lineæ q r: erit l s minor l b, quoniam l b, o m inter ſe ſunt æquales. reliqua igitur a s maior eſt ipſa a b. Et cum quadratum a l m n datum ſit: & exceſſus, quo excedit ipſum a b c d dabitur, hoc eſt gnomon l c n, hoc eſt rectangulum p m. eſtq; datum latus p q: & latus alterum datur q r, hoc eſt l s. quare & a s. Deſcribatur inſuper quadratum a s t u: quod ſuperabit quadratũ a b c d gnomone s c u: et accedet ad ipſum magis, et latus a s magis accedet ad latus a b. ſecet autem c q latus s t in x: & ſumatur x y æqualis ipſi c x: compleaturq; rectangulum p t æquale gnomoni s c u. quo poſt modum appoſito ad lineam p y, ut ſit alterum latus y z, erit eadem ratione & ipſum y z notum; & minus latere x t. ſumpta denique s u æquali ipſi y z, atque ea ſublata à linea a s, relinquetur a u latus multo magis propinquum lateri a b. & eodem modo procedemus quoad libuerit. ex quibus apparet latus hoc pacto inuentum ſemper maius eſſe latere propoſiti quadrati. Et ut in eodem exemplo perſiſtamus, Cum quadratum a b c d contineat pedes uiginti, & quadratum a e f g ſexdecim: continebit gnomon b f d, hoc eſt rectangulum i c quatuor pedes. quod quidem ſi appoſuerimus ad lineam i f, duplam ſcilicet lateris a e; erit alterum latus f k pedis dimidium, & a l quatuor pedes & ſemis; cuius quadratum a l m n pedes uiginti & quarta unius pedis. gnomon igitur l c n, hoc eſt rectangulum p m erit pedis quarta: atque eo appoſito ad lineam p q, quæ continet pedes nouem, erit alterum latus q r $\frac{1}{36}$, & a s $4\frac{17}{36}$. quare quadratum a s t u $20\frac{1}{1296}$: & gnomon

5. præmiſſarum.

quarta.
ſexta.
prima.



s c u,

$s\,c\,u$, *hoc est rectangulum* $p\,t\,\frac{1}{1296}$. *quòd si rursus apponatur ad* $p\,x$, *duplum ipsius* $a\,s$, *hoc est ad* $8\frac{17}{36}$: *erit* $y\,z\,\frac{1}{11192}$: *&* $a\,\omega$. $4\frac{32838}{695512}$.

OPERATIO.

Ad latus quadrati proxime minoris addemus id, quod prouenit ex diuisione excessus, quo dictum quadratum à quadrato proposito exceditur, per duplum eiusdem lateris: eritq; latus illud propinquum primo inuentum. A quo si abstulerimus, quod prouenit ex diuisione eius, quo nuper inuenti lateris quadratum, quadratum propositum excedit, per duplum eius lateris: relinquetur latus magis propinquum. Quòd si ab eo rursus abstulerimus, quod prouenit ex diuisione excessus, quo quadratum lateris postremo inuenti, excedit propositum quadratum, per duplum lateris ipsius: relinquetur latus adhuc magis propinquum: & ita deinceps in cæteris, exemplum colligitur ex iis, quæ proxime dicta sunt.

Ipsa uero e c ad c f proportionem habet eam, quam 265 ad 153.] Ipsa uero e c ad c f maiorem proportionẽ habet, quàm 265 ad 153. *Ita legendum est, & corrigendus græcus codex hoc modo.* ἡ δὲ ε γ πρὸς γ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν σ ξ ε πρὸς ρ ν γ. *nam cum quadratum e c sit 70227: erit ipsa e c maior, quàm 265. quare ad c f proportionem maiorem habebit, quàm 265 ad 153. Adde quòd non sequeretur conclusio ea, quæ inferius ponitur. Videlicet e c ad c g maiorem habere proportionem, quàm 571 ad 153.* C

Quare e g ad g c eam potestate proportionem habet, quam 349450 ad 23409: longitudine uero eam, quam 591 1/8 ad 153.] *Et hoc loco, ut opinor, corrigendus est græcus codex, & ita uertendum.* E

Quare e g ad g c potestate maiorem habet proportionem, quàm 349450 ad 23409; longitudine uero maiorem, quàm 591 1/8 ad 153. *Cum enim e c ad c g maiorem proportionem habeat, quàm 571 ad 153; quod iam demonstratum est: sitq; ipsa c g 153: erit e c maior, quàm 571: & idcirco quadratum eius maius, quàm 326041. quadratum autem c g est 23409. quare c g quadratum, quod est æquale duobus quadratis e c, c g maius erit, quàm 349450: & ipsius latus maius, quàm 591 1/8. Ex quibus sequitur e g ad g c potestate maiorem habere proportionem, quàm 349450 ad 23409, longitudine uero maiorem, quàm 591 1/8 ad 153.* penul. 1.

Quare h e ad h c maiorem habet, quàm 1172 1/8 ad 153.] *Est enim e c maior, quàm 1162 1/8, ut monstratum est. quare quadratum ipsius maius, quàm 1350534 1/64. & cum quadratum h c sit 23409: erit h e quadratum, quod est æquale duobus illis quadratis, maius, quàm 1373943 1/64: & eius latus h e maius, quàm 1172 1/8. habet ergo h e ad h c proportionem maiorem, quàm 1172 1/8 ad 153.* G

Secetur item h e c angulus bifariam ducta e k. Habet e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 1/4 153.] *Quoniam ut utraque h e, e c ad h c, ita e c ad c k: est autem h e maior, quàm 1172 1/8: & e c maior, quàm 1162 1/8, ut ostensum est: habebit e c ad c k proportionem maiorem, quàm 2334 1/4 ad 153.* H

Ipsa uero a c ad c g minorem habet, quàm 3013 3/4 ad 780.] *Cum a g ad g c minorem proportionem habeat, quàm 2911 ad 780, posita g c 780: erit a g minor, quàm 2911. quare quadratum eius minus, quàm 8473921. est autem quadratum g c 608400. quadratum igitur a c, quod est æquale duobus quadratis a g, g c minus erit, quàm 9082321: & ipsa a c minor, quàm 3013 3/4. ex quibus constat a c ad c g minorem habere proportionem, quàm 3013 3/4 ad 780.* P

Rursus secetur bifariam angulus c a g ducta a h. habet eadem ratione a h ad h c minorem proportionem, quàm 5924 1/4 ad 780, uel quàm 1823 ad 240.] *Nam ex septima præmissarum* 5924 1/4 ad 780 eandem proportionem habent, quam 23699 ad 3120, hoc est eandem, quam 1823 ad 240; utraque enim utriusque est pars tertia decima. Quòd si h c ponatur 240: erit a h minor, quàm 1823; & quadratum eius minus, quàm 3323329. est autem h c quadratum 57600. utraque igitur quadrata a h, h c minora sunt, quàm 3380929: & propterea quadratum a c, quod illis ipsis est æquale, minus quàm 3380929. sed huius latus minus est, quàm 1838 9/11. ergo & ipsa a c, multo minor erit, quàm 1838 9/11: & ad c h mino-* Q *rem habebit proportionem, quàm 1838 $\frac{9}{11}$ ad 240.*

R Secetur item bifariam angulus h a c, ducta k a. ergo & ipsa k a ad k c minorem habet proportionem, quàm 3661 $\frac{9}{11}$ ad 240, uel quàm 1007 ad 663.] *Quam enim proportionem 3661 $\frac{9}{11}$ habent ad 240, eandem habent, ex septima iam dicta, 40280 ad 2640; hoc est 1007 ad 66: utraque enim utriusque est pars quadragesima. posita igitur k c 66, erit ipsa k a minor, quàm 1007: & eius quadratum minus, quàm 1014049, est autem k c quadratum 4356. quare quadratum a c, quod est æquale duobus quadratis a k, k c minus est, quàm 1018405. At uero latus quadrati 1018405 minus est, quàm 1009 $\frac{1}{6}$. Ipsa igitur a c multo minor est, quàm 1009 $\frac{1}{6}$: & idcirco ad c k minorem proportionem habet, quàm 1009 $\frac{1}{6}$ ad 66.*

FEDERICI COMMANDINI
IN LIBRVM DE LINEIS SPIRALIBVS.
COMMENTARIVS.

A PRIMVM problema erat. Sphæra data spatium planum inuenire, quod superficiei sphæræ esset æquale. quod quidem primum à nobis explicatum est in libro, quem de sphæra edidimus, cum enim demonstratum sit, unius cuiusque sphæræ superficiem quadruplam esse maximi circuli &c.] *Demonstratum est hoc in lib. primo de sphæra, et cylindro, propositione trigesima prima.*

B Dato cono, uel cylindro sphæram inuenire ipsi cono, uel cylindro æqualem.] *Resoluitur, componiturq; huiusmodi problema libro secundo de sphæra & cylindro, propositione prima.*

C Datam sphæram plano ita secare, ut portiones eius inter se datam habeant proportionem.] *Libro secundo, propositione quarta.*

D Datam sphæram plano ita secare, ut portiones superficiei eius datam habeant proportionem.] *Propositione tertia eiusdem secundi libri.*

E Datam sphæræ portionem, portioni sphæræ datæ similem facere.] *Propositione quinta eiusdem.*

F Datis duabus siue eiusdem, siue non eiusdem sphæræ portionibus, inuenire portionem sphæræ &c.] *Propositione sexta.*

G A data sphæra portionem plano ita abscindere, ut portio ad conum, cuius basis sit eadem portioni, & altitudo æqualis, datam proportionem habeat, quæ quidem maior sit ea, quam habent tria ad duo.] *Propositione septima. ubi autem in græco codice habetur μὴ μείζονα, expungendum est illud μὴ.*

H Sphæræ nanque maior portio ad minorem, minorem quidem proportionem habet, quàm sit dupla illius &c.] *Propositione octaua.*

I Demonstratum enim est, dimidiam sphæram, maximam esse omnium sphæræ portionum, quæ æquali superficie contineantur.] *Propositione nona, & ultima.*

K Figura à sectione coni rectanguli descripta conoides uocetur.] *In libro de conoidibus, & sphæroidibus figuram descriptam à coni rectanguli sectione, conoides rectangulum appellat Archimedes: conoides uero obtusiangulum eam, quæ describitur à sectione conoidis obtusianguli. hoc tamen loco quia de rectanguli coni sectione tantum sermo est: conoides simpliciter appellauit.*

L Quòd si dicta figura secetur plano ad rectos angulos super axem ducto: sectionem eius circulum esse manifestum est.] *Hoc nos uniuerse demonstrabimus contingere in omni conoide, & sphæroide, ex iis, quæ scribemus in duodecimam libri de conoidibus, & sphæroidibus.*

M Portionem uero abscissam sesquialteram esse coni basim habentis eandem portioni, & æqualem altitudinem, hoc demonstrare oportet.] *Demonstrauit in libro de conoidibus, & sphæroidibus, propositione uigesimatertia.*

N Et si conoidis duæ portiones abscindantur planis quomodocunque ductis, sectiones quidem esse conorum acutiangulorum sectiones perspicuum est.] *Colligitur* *id ex decima tertia libri de conoidibus, & sphæroidibus.*

Sed portiones habere inter se proportionem eandem, quam habent potestate lineæ ab earum uerticibus usque ad abscindentia plana æquidistantes axi ductæ &c.] *Demonstrauit autem uigesima sexta propositione eiusdem.* O

Dico iam spatium contentum linea spirali, & recta in pristinum locum restituta, &c. *Huius demonstratio habetur uigesima quarta propositione huius.* P

Si lineam spiralem recta linea contigerit in ultimo ipsius spiralis termino.] *In decimaoctaua huius.* Q

Si linea circunducta, punctumq; in ea latum pluribus circulationibus circumferantur, &c.] *In uigesima septima.* R

Si in linea spirali in una circulatione descripta duo puncta sumantur, &c.] *In uigesima octaua, & ultima.* S

Et sumo in his quoque ea, quæ in aliis libris sumpta fuere, &c.] *In libris scilicet de sphæra, & cylindro, & in libro de quadratura paraboles.* T

IN PROPOSITIONEM I.

Patet igitur eandem habere proportionem c d ad ipsam d e, quam tempus f g ad tempus g h.] *Ex diffinitione sexta quinti libri elementorum.* A

IN PROPOSITIONEM II.

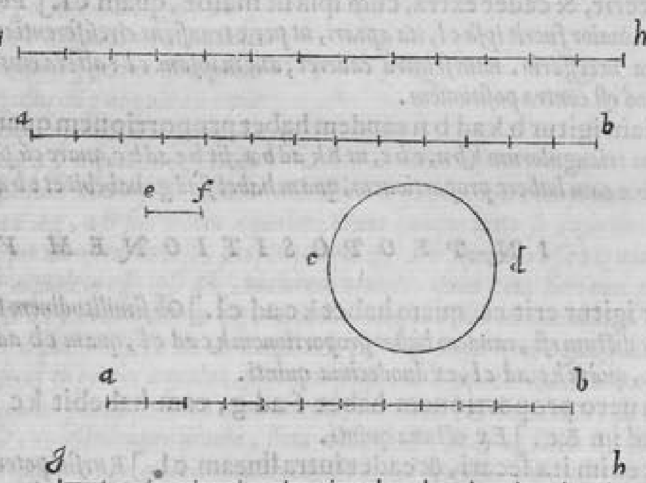
Manifestum est igitur eandem habere proportionem c d ad d e, quam habet f g ad g h.] *Ex undecima propositione quinti elementorum.* A

IN PROPOSITIONEM III.

Circumscripta enim circa unumquemque circulorum figura multiangula, perspicuum est lineam ex omnibus earum lateribus compositam, &c.] *Ex ijs, quæ in principio libri de sphæra & cylindro traduntur.* A

IN PROPOSITIONEM IIII.

Diuisa etenim recta linea in tot partes &c.] *Sit recta linea a b, quæ excedat circumferentiam c d: & sit excessus linea e f. coaceruetur autem e f ipsa sibi ipsi eousque, quo usque fiat linea excedens ipsam a b, quæ sit g h: diuidatur itẽ a b in totidem partes æquales, quot sunt in linea g h, æquales ipsi excessui: manifestum est, ut a b ad g h, ita esse partem lineæ a b ad partem ipsius g h. quare pars lineæ a b minor est parte g h; cum a b sit posita minor ipsa g h. sublata autem una ipsius parte à linea a b, relinquetur linea minor quidem, quàm a b, maior uero, quàm circumferentia c d; quoniam sublata linea minor est excessu e f. Quòd si circumferentia c d excedat lineam rectam a b, excessu e f: rursus eadem omnia fiant, sicuti* A 15. v.



cuti prius: erunt partes lineæ a b, partibus g h minores. quare si adiecerimus lineæ a b unam ipsius partem: fiet linea maior quidem, quàm a b; minor uero, quàm circumferentia c d; cum id, quod adiectum est minus sit, quàm excessus e f.

IN PROPOSITIONEM V.

A Itaque sumi potest recta linea maior data circumferentia] *Si enim circa datam circumferentiam multorũ angulorum figura circumscribatur: erit eius ambitus circumferentia maior: quod etiam constat ex ijs, quæ in principio libri de sphæra, & cylindro habentur.*

B Eandem ergo proportionem habet h f ad h k, quam b h ad h g.] *Nam triangula b h f,*
15. primi. *k h g similia sunt; cum anguli ad h uerticem sint æquales: angulus autem ad f æqualis angulo ad k,*
29. primi. *& qui ad b e i, qui ad g. quare f h ad h b eandem habet proportionem, quam k h ad h g: & permu-*
4. sexti. 16. quinti. *tando f h ad h k eandem, quam b h ad h g.*

C Quare f h ad h k minorem habet, quàm b h circumferentia ad datam circumferen
8. quinti. tiam.] *Nam recta linea b h, cum sit minor, quàm b h circumferentia, habet ad h g minorem proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam, quæ posita est etiam minor ipsa h g. erat autem f h ad h k, hoc est ad semidiametrum, ut b h ad h g. quare sequitur per secundam partem duodecimæ quinti ex traditione Campani, f h semidiametrum minorem habere proportionem, quàm circumferentia b h ad datam circumferentiam.*

IN PROPOSITIONEM VI.

A Erunt triangula c h k, c k l, similia.] *Angulus enim c h k unius est æqualis angulo k c l alte*
18. tertii. *rius, utrisq; rectis existentibus: angulus uero h c k angulo c k l est æqualis. reliquus igitur angulus*
29. primi. *reliquo angulo est æqualis: & triangulum triangulo simile. Quam ergo proportionem habet c h ad*
4. sexti. *h k, eam habet k c ad c l. sed ex positione f ad g minorem proportionem habet, quàm c h ad h k: quare per duodecimam quinti ex traditione Campani, f ad g minorem habet proportionem, quàm k c ad c l.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, habeat k c ad maiorem ipsa c l.] *Cum f ad g minorem habeat proportionem, quàm k c ad c l: si fiat ut f ad g, ita k c ad aliam lineam, quæ sit b n:*
8. quinti. *erit b n maior ipsa c l.*

C Et ponatur b n inter circumferentiam, & rectam lineam, ut trãseat per c: ita enim secari poterit, & cadet extra, cum ipsa sit maior, quàm c l.] *Poterit enim linea b n quantulocumque maior fuerit ipsa c l, ita aptari, ut per c transiens circũferentiam secet in b puncto. cadet autem extra necessario. nam si intra caderet; aut in ipsam c l: altera eius extremitas circulum non secaret: quod est contra positionem.*

D Quoniam igitur b k ad b n eandem habet proportionem quam f ad g.] *Est enim ob similitudinem triangulorum k b n, e b c, ut b k ad b n, sic b e ad b c, quare cũ posuerimus k c, uel ei æqua*
11. quinti *lem k b ad b n eam habere proportionem, quam habet f ad g: habebit et e b ad b c eãdem, quam f ad g.*

IN PROPOSITIONEM VII.

A Maior igitur erit ea, quam habet k c ad c l.] *Ob similitudinem triangulorum c h k, k c l, ut superius dictum est, eandem habet proportionem k c ad c l, quam c h ad h k. quare f ad g minorem habet, quàm k c ad c l, ex duodecima quinti.*

B Quam uero proportionem habet f ad g, eam habebit k c ad minorem ipsa c l. habeat ad i n &c.] *Ex octaua quinti.*

C Potest enim ita secari, & cadet intra lineam c l.] *Rursus poterit linea i n quantulocunque minor ipsa c l ita constitui, ut tendat ad punctum c: sitq; totius lineæ c n pars c i intra circulum, pars uero i n extra. cadet autem intra lineam c l: alioqui circulum ipsum non secaret, ut ponitur,*

D Quoniam igitur eandem habet proportionem k c ad i n, quam f ad g.] *Concluditur hoc ex quarti sexti, & undecima quinti, ut superius apparuit, similibus hoc loco existentibus triangulis k i n, c i e.*

IN

IN PROPOSITIONEM VIII.

Maior ergo est linea x c ipsa c l. *Ex octaua quinti.* A
Describatur circuli circumferentia circa puncta k l x. *Docet id quinta quarti.* B
Et quoniam maior est x c ipsa c l: & lineæ k c, x l secant se se ad angulos rectos C
fieri potest, ut ducatur linea i n, æqualis ipsi m c, quæ tendat ad k.] *Hoc ideo dixit Archimedes, quoniam si linea k m secaret x l in partes æquales, non posset id præstari, quod uolumus: cum alioqui possit, linea x l in partes inæquales dissecta, ut mox ostendemus. sed prius nonnulla præmittere necessarium est.*

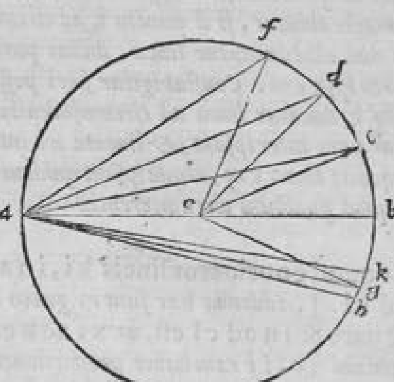
Si in circumferentia circuli aliquod sumatur punctum: ab eoq; in circulum ducantur rectæ lineæ; quæ per centrum transit omnium erit maxima: aliarum uero, quæ transeunti per centrum propinquiores sunt, remotioribus erunt maiores: duæ autem tantum æquales sunt ad utrasque partes maximæ.

Hæc omnia satis patere possent ex ijs, quæ afferuntur ad demonstrationem septimæ, & octauæ tertij elementorum, sed tamen nequid desideretur, nos breuiter monstrare curabimus.

SIT circulus a b c d, cuius centrum e: & in circumferentia ipsius sumpto aliquo puncto a, ab eo in circulum ducantur rectæ lineæ a b, a c, a d, a f: sitq; a b per centrum ducta. dico ipsam esse omnium maximam: a c uero maiorem esse, quàm a d: & a d maiorem, quàm a f. connectantur e c, e d, e f. erunt trianguli a e c duo latera a e, e c maiora reliquo a c: sed dicta duo latera inter se iuncta, sunt æqualia lineæ a b. ergo linea a b est maior linea a c. & eadem ratione maior quibuslibet alijs in circulum ductis. Rursus trianguli a e c duo latera a e, e c sunt æqualia duobus lateribus a e, e d trianguli a e d: & angulus a e c maior est angulo a e d. basis igitur a c basi a d maior erit. Non alia ratione monstrabimus lineam a d esse maiorem ipsa a f: & a f ipsa subsequente: & ita deinceps in ceteris. Dico præterea cuilibet ipsarum a c, a d, a f unam tantum dari æqualem ex altera parte ipsius a b. Itaque ad datam lineam a b, datumq; in ea punctum a, constituatur angulus b a g æqualis angulo b a c: & ducta linea e g, quæ est æqualis ipsi e a: erit angulus e g a æqualis angulo e a g: & pariter in triangulo a e c angulus e c a æqualis angulo e a c. angulus autem e a g factus est æqualis angulo e a c. quare & angulus ad g angulo ad c erit æqualis: & reliquus reliquo. basis igitur a g basi a c æqualis erit. Solam autem a g æqualem esse ipsi a c, sic patet. Si enim possit dari alia æqualis, uel ea erit ultra a g, uel citra. sit primum ultra, & sit a h. ergo cum duæ lineæ a g, a h sint eidem æquales: erunt quoque inter se æquales: quod fieri non potest; superius nanque monstratum est, propinquiores ipsi a b maiores esse. Quòd si sit citra a g, ut a k: sequetur a g æqualem esse ipsi a k, maiorem minori: quod item fieri non potest. non ergo datur alia æqualis ipsi a c, præter unam a g. Eodem quoque modo monstrabimus, & ipsis a d, a f unam tantum dari æqualem.

20. primi.

24. primi.



23. primi.

5. primi.

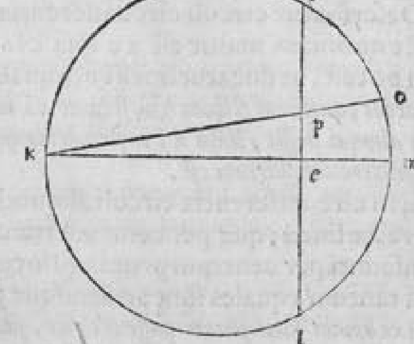
His ita demonstratis, dico si linea k m ad angulos rectos occurrens lineæ x l, ipsam secet in partes æquales, fieri non posse, ut a puncto k ad circumferentiam x m l alia linea ducatur, cuius pars interiecta inter circumferentiam, & lineam x l sit æqualis ipsi c m. si enim fieri possit, constituantur omnia, sicut dictum est: sitq; ea linea k o secans x l in p. erit igitur p o æqualis ipsi c m. & quoniam in triangulo k c p angulus ad c est rectus: linea k p maior erit linea k c. ergo per communem conceptionem, & linea k p o maior erit linea k c m: quod est absurdum. nam linea k c m, quæ per centrum transit, monstrata est omnium esse maxima. non igitur eo pacto duci poterit linea alia, quæ sit æqualis ipsi c m. Rursus dico, si k m secet lineam x l in partes inæquales: idem illud, quod proponebatur, recte præstari posse. Fiant omnia, ut dictum est, iam monstrabimus à puncto k ad circumferentiam ductis lineis, constitui posse minorem ipsa c m: & item maiorem. quare & ei æqualem constituere, nihil erit, quod prohibeat.

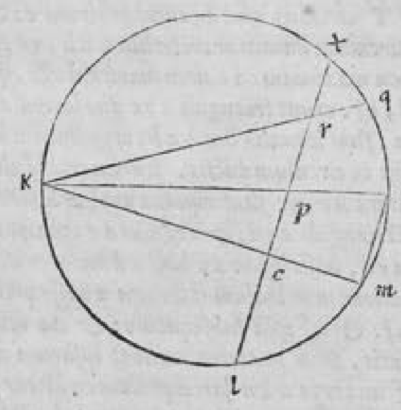
19. primi.

1. tertii.

constat

constat autem ipsam nunc km per centrum non transire: alioqui cum secet x l ad angulos rectos;
3. tertii. *secaret qnoque & in partes æquales, quod non po suimus. Itaque ab eodem puncto k per centrum alia linea ducatur k o occurrens x l in p: & ad datam lineam k o, datumq; in ea punctum k fiat angulus æqualis angulo m k o; qui sit o k q: secet autem linea k q linea m x l in puncto r: erit iam linea r q minor ipsa c m: & p o maior eadem: patet enim ex proxime demonstratis, lineam k q æqualem esse lineæ k m. sed cum in triangulo k c r, angulus ad c sit rectus: erit linea k r maior ipsa k c. quare relinquitur r q esse minorem ipsa c m. Eadem ratione monstrabimus si à puncto k ducantur aliæ lineæ ad circumferentiam x q: earum partes inter circumferentiam, atque lineam x l comprehensas multo minores esse ipsa c m. Iungantur*
31. tertii. *deinde m o. erit angulus k m o in semicirculo rectus.*
28. primi. *quòd cum etiam rectus sit k c p: linea m o æqui-*
2. sexti. *distans erit lineæ c p. quare ut k p ad p o, sic k c ad c m. est autem k p maior, quàm k c; cum an*
14. quinti. *gulus ad c sit rectus. ergo & p o maior erit, quàm c m: quod monstrare oportebat. similiter quoque monstrabimus, si à puncto k ad circumferentiam o m aliæ ducantur lineæ, dictas partes esse maiores ipsa c m. Constat igitur fieri posse, ut à puncto k ducatur linea ad circumferentiam x m l cuius pars inter ipsam, & lineam x l interiecta sit æqualis lineæ c m, atque ipsam quidem cadere in aliquod punctum circumferentiæ o q.*





D Et quod continetur lineis k i, i n ad contentum ipsis k i c l eandem habet, quam i n ad c l.] *Addenda hæc sunt in græco codice*, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ι ν πρὸς γ λ.

E Quare & i n ad c l est, ut x i ad k e.] *Quoniam enim rectangulum contentũ lineis x i, i l ad*
1. sexti. *contentum k e, i l eam habet proportionem, quam linea x i ad lineam k e: & contentum lineis*
35. tertii. *k i, i n ad contentum k i, c l habet eam, quam linea i n ad lineam c l: contentum autem x i, i l æquale est contento k i, i n; & contentum k e, i l æquale contento k i, c l, ut monstrabitur: erit linea i n, uel c m, ipsi æqualis ad c l, ut x i ad k e. Sunt enim triangula k i l, e i c æquiangula, ut patet; nam angulus ad i communis utrisque est, linea autem k l æquidistat lineæ e c.*
19. quinti. *quare ut k i ad i l, sic e i ad i c, & reliqua k e ad reliquam c l erit, ut k i ad i l. rectangu*
16. sexti. *gulum igitur contentum lineis k e, i l æquale erit contento lineis k i, c l.*

F Et propterea c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b est, ut x i ad k e: & reliqua i c ad b e, & c.] *Contentum enim lineis m c, c k rectangulum æquale est contento ipsis l c, c x:*
16. sexti. *& propterea c m ad c l est, ut x c ad k c, uel ad k b æqualem ipsi k c. erat autem c m ad c l,*
11. quinti. *ut x i ad k e. ergo x c ad k b erit, ut x i ad k e: & reliqua i c ad b e reliquam, ut x c ad k*
19. quinti. *b, uel ad k c. sed x c ad c k eandem habet proportionem, quam g ad f, ut posuimus. & i c ad b e eandem habebit, quam g ad f: & conuertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.*

IN PROPOSITIONEM IX.

A Quoniam igitur x c minor est c l: & ipsæ k m, x c secant sese ad angulos rectos: poterit duci linea i n æqualis lineæ c m, quæ tendat ad k.] *Hoc patet fieri posse ex ijs, quæ superius demonstrata sunt.*

B Et contento l i, k e æquale contentum k i, c l. propterea quòd est, ut k e ad l c, ita c, ita k i ad l i.] *Hæc ita legenda sunt, & græcus codex corrigendus. Nam cum triangula k i l, e i c sint æquiangula: erit k i ad i l, ut e i ad i c: & permutando k i ad i e, ut l i ad i c: & componendo k e ad i e, ut l c ad i c; & rursus permutando k e ad l c, ut i e ad i c. quare & reliqua k i ad reliquam l i, ut k e ad l c. rectangulum igitur contentum lineis k i, l c æquale est ei, quod continetur lineis l i k e.* 19. quinti. 16. sexti.

Erit & ut x i ad k e, ita rectangulum lineis k i, i n contentum, ad contentum ipsis k i, c l. &c.] *Cum enim (ut iam dictum est) rectangulum contentum lineis x i, i l ad contentum ipsis l i, k e eam habeat proportionem, quam linea x i ad k e: contentum autem k i, i n ad contentum k i, c l eandem habeat, quam contentum x i, i l ad contentum l i, k e: nanque est primum rectangulum æquale tertio, & secundum quarto, ut monstrauimus: sequitur, ut quam proportionem habet linea x i ad k e, eam habeat contentum k i, i n ad contentum k i, c l. contentum autem k i, i n ad contentum k i, c l eam habet, quam linea n i ad c l. quare ut x i ad k e, ita n i, uel ei æqualis c m ad c l. sed ut c m ad c l, ita x c ad k c, uel ad k b ipsi k c æqualem: quoniam rectangulum k c m, est æquale rectangulo l c x. ut igitur x i ad k e, ita x c ad k b: & reliqua i c ad reliquam b e, ut x i ad k e, & ut x c ad c b, uel ad k c, ei æqualem. Erat autem g ad f, ut x c ad k c. quare i c ad b e eandem habet proportionem, quam g ad f: & conuertendo b e ad i c eandem, quam f ad g.* C 11. quinti. 16. sexti. 35. tertii. 19. quinti.

IN PROPOSITIONEM X.

Est enim quadratum b i æquale quadratis i, b, & duobus, quæ b i continentur, rectangulis.] *Hoc manifestum est ex quarta secundi elementorũ, et alia eiusmodi, quæ sequuntur.* A

Quadrata igitur a b c d e f g h: & quadrata i k l m n o unà cum quadrato a dupla sunt quadratorum a b c d e f g h.] *Nam in antecedentibus bis sumuntur quadrata singularum linearum. sumitur enim bis quadratum a. & quadratum b bis; quòd quadratum o sit æquale ipsi b: & eodem modo quadratum c; quòd x sit æquale ipsi c: & ita in reliquis. sunt enim quadrata n & d æqualia; & item m & e: l & f: k & g: i & h, cum lineæ ipsæ positæ sint æquales.* B

Quod autem reliquum est, ostendemus uidelicet dupla eorum, quæ partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a continentur, unà cum eo, quod continetur h linea, & linea æquali omnibus a b c d e f g h æqualia esse quadratis a b c d e f g h. &c.] *Ostensum antea est quadrata linearum b i, c k, d l, e m, f n, g x, h o esse æqualia his omnibus, uidelicet quadratis partium uniuscuiusque lineæ, & duplis rectangulorum, quæ illis partibus continentur. Et præterea ostensum est, quadrata a b c d e f g h; & quadrata i k l m n x o, unà cum quadrato a esse dupla quadratorum a b c d e f g h. Quare si deinceps ostenderimus reliqua, hoc est dupla rectangulorum, quæ continentur partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a, unà cum rectangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, esse æqualia iisdem quadratis a b c d e f g h: quod uolumus, erit plenissime demonstratum. nanque omnia antecedentia, quæ quidem sunt æqualia quadratis linearum omnium, hoc est ipsius a, & reliquarum ei æqualium, unà cum quadrato a, & eo, quod continetur h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, consequentium, hoc est quadratorum a b c d e f g h tripla erunt.* C

Quoniam enim duo, quæ lineis b i continentur, æqualia sunt duobus contentis b h.] *Hoc est rectangulo contento h, & dupla ipsius b, ex prima sexti.* D

Et duo, quæ continentur k c æqualia sunt contento h, & quadrupla ipsius c, quia k est dupla ipsius h] *Cum k sit dupla ipsius h: sumatur alia linea ipsius c dupla, quæ sit p. habebit h ad k eandem proportionem, quam c ad p. quare rectangulum contentum h p æquale erit contento k c: & duplum rectanguli h p æquale duplo rectanguli k c. sed duplum rectanguli h p est æquale ei, quod continetur h, & dupla ipsius p, hoc est quadrupla ipsius c. duplum igitur rectanguli k c est æquale contento h, & quadrupla ipsius c. Et eadem ratione duplum rectanguli l d æquale monstrabitur contento h, & sexcupla ipsius d; quòd l tripla sit ipsius h: et ita in reliquis.* E 16. sexti. 1. sexti.

Omnia rectangula unà cum eo, quod continetur linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, æqualia erunt contento linea h, & linea æquali his omnibus uidelicet ipsi a, & triplæ b, &c.] *Omnia scilicet rectangula consequentia, de quibus ultimo loco dictum est, hoc est rectangulum contentum linea h, & dupla ipsius b: contentum h, & quadrupla c: contentum h & sexcupla d: contentum h, & octupla e: contentum h & decupla f: contentum h, &* F

duodecupla g: contentum h, & quaterdecupla eiusdem: & contentum h & linea æquali omnibus
1. sexti. *a b c d e f g h. Hæc (inquam) omnia sunt æqualia rectangulo contento linea h, & linea æquali his omnibus; lineæ scilicet a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h; nam altitudinem habent eandem lineam h, bases uero omnes uni basi æquales. Quare omnia antecedentia, hoc est dupla rectangulorum partibus uniuscuiusque lineæ æqualis ipsi a contentorum, unà cum rectangulo contento h & linea æquali omnibus a b c d e f g h, sunt uni rectangulo iam dicto æqualia. sed eidem æqualia sunt quadrata a b c d e f g h, ut mox ostendetur. antecedentia igitur omnia æqualia sunt quadratis a b c d e f g h.*

G Nam quadratum a est æquale contento h linea, & linea æquali his omnibus uidelicet ipsi a, & reliquis, quarum unaquæque est æqualis ipsi a.] *Tres nanque lineæ h, a,*
17. sexti. *& composita ex a & ceteris ei æqualibus, sunt proportionales. quare quadratum a est æquale rectangulo contento linea h, & linea composita iam dicta. hoc autem rectangulum æquale est ei, quod continetur linea h, & linea composita ex his omnibus; uidelicet linea a, & dupla linearum b c d e f g h: quòd lineæ æquales a, dempta ipsa a, duplæ sunt linearum b c d e f g h. est enim o posita æqualis ipsi b: & x ipsi c: & n, d: & m, e: & l, f: & k, g: & i, h. Quadratum igitur a æquale est rectangulo contento linea h, & linea composita ex a, & dupla linearum b c d e f g h. Rursus quoniam proportionales sunt tres lineæ h, b, & composita ex b & reliquis ipsi b æqualibus; hoc est composita ex b, & dupla reliquarum c d e f g h: erit quadratum b æquale contento linea h, & composita ex b, & dupla ipsarum c d e f g h: & eodem modo in ceteris ratiocinati, tandem colligemus rectangula omnia, quæ sunt æqualia quadratis a b c d e f g h esse quoque æqualia uni rectangulo contento linea h, & æquali his omnibus; ipsi a, triplæ b, quincuplæ c, septuplæ d, nonuplæ e, undecuplæ f, tredecuplæ g, & quindecuplæ h. Quare quadrata a b c d e f g h eidem illi rectangulo æqualia esse, nemo sane dubitare poterit: quod unum restabat ostendendum.*

H Ex quibus colligitur, quadrata omnia linearum æqualium maximæ &c.] *Hoc est quadrata linearum a, b i, c k, d l, e m, f n, g x, & h o minora sunt, quàm tripla quadratorum a b c d e f g h. demptis enim ex illis, quæ horum tripla sunt; quadrato scilicet a, & rectangulo contento linea h, & linea æquali omnibus a b c d e f g h, reliqua minora erunt, quàm tripla eorundem quadratorum.*

I Reliquorum autem dempto maximæ quadrato, maiora, quàm tripla.] *Quadratum enim a, & rectangulum contentum linea h & æquali ipsis a b c d e f g h, quæ quidem ex antecedentibus demuntur; minora sunt, quàm tripla quadrati a, quod ex consequentibus demptum est, quippe cum rectangulum dictum minus sit quadrato ipsius a, ut superius est demonstratum.*

K Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus &c.] *Constat hoc ex corollario uigesimæ sexti, græcus autem codex ita corrigendus.* τὰ εἴδεα ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια.

IN PROPOSITIONEM XI.

A Quare & omnia quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x ad omnia contenta linea n x &c.] *Ex duodecima quinti.*

B Itaque contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x.] *Concluditur hoc ex prima sexti. nam tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, s λ, t μ, y n, communes utrisque sunt, rectangulum uero contentum n x, & linea æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x cum altitudinem habeat lineam n x, basim uero æqualem his omnibus, æquale erit quadratis linearum q d, z f, 9 h, λ k, μ m, n x; & rectangulo, cuius altitudo n x, basis uero linea æqualis omnibus o q, p z, r 9, s λ, t μ, y n: altitudo enim utrobique eadē est, bases uero omnes uni basi æquales.*

C Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m æqualia sunt quadratis b u, q d, z f, 9 h,
4. secundi λ k, μ m, &c.] *Nam quadratum a b æquale est quadratis b u, a u, & duplo eius, quod conti-*
1. sexti. *netur b u, a u, hoc est ei, quod continetur b u & dupla a u: & eodem modo quadratum c d æquale est quadratis q d, c q; & contento, q d & dupla c q: & ita in reliquis. quare omnia antecedentia omnibus consequentibus æqualia sunt, ut proponitur.*

D Communia igitur utrisque sunt quadrata linearum æqualium ipsi n x: contentū autē linea n x, & æquali omnibus o q, p z, 9 r, λ s, μ t, y n minus est contento b u &c.] *Monstrauit primum Archimedes spatia hæc omnia, uidelicet rectangulum contentum linea n x, & æquali*

æquali ipsis o d, p f, r h, s k, t m, y x; & tertiam partem quadratorum o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, A
y n esse æqualia his omnibus, uidelicet quadratis q d, z f, 9 h, λ k, ɥ m, n x; & rectangulo con B
tento n x & linea æquali o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n & tertiæ parti quadratorum o q, p z, r 9,
s λ, t ɥ, y n. Deinde monstrauit quadrata a b, c d, e f, g h, i k, l m omnia æqualia esse his qua- C
dratis, uidelicet b u, d q, f z, h 9, k λ, m ɥ; & quadratis a u, c q, e z, g 9, i λ, l ɥ; & rectan D
gulo contento b u, & linea composita ex dupla a u, c q, e z, g 9, i λ, l ɥ. Vocentur autem prima omnia, ut breuitati consulamus, spatia A, secnuda B, tertia C, quarta D. erunt ergo spatia A spatijs B æqualia: spatia uero C æqualia spatijs D. Aggreditur nunc monstrare spatia B minora esse spatijs D, ut ex hoc postea inferat spatia quoque A spatijs C esse minora. Illud uero sic monstrabitur. Nam quadrata q d, z f, 9 h, λ k, ɥ m, n x sunt æqualia quadratis b u, q d, z f, 9 h, λ k, ɥ m; cum totidem utrobique sint quadrata ex ijsdem, uel æqualibus lineis orta: rectangulum uero contentum linea n x, & æquali omnibus o q, p z, r 9, λ s, t ɥ, y n minus est rectangulo contento linea b u, & linea æquali duplo harum omnium a u, c q, e z, g 9, i λ, l ɥ; quòd duplum harum linearum excedat lineas o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n, excessu lineæ a u. est enim duplum linearum c q, e z, g 9, i λ, l ɥ æquale lineis o q, p z, r 9, s λ, t ɥ; & linea a u æqualis lineæ y n. quare rectangulum consequens cum assumat in basi duplum ipsius lineæ a u: excedit antecedens spatio contento lineis a u, b u. Præterea tertia pars quadratorum o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n est etiam minor quadratis a u, c q, e z, g 9, i λ, l ɥ; ex eo, quod in superiori propositione ab Archimede monstratum est, nempe quadrata linearum æqualium maximæ minora esse, quàm tripla quadratorum linearum se se æqualiter excedentium. constat igitur spatia B minora esse spatijs D: & idcirco spatia A spatijs C minora erunt. græcus autem codex ita restituendus est. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ɥ μείζονά ἐστι τῶ τρίτω μέρους τῶν τετραγώνων, τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ɥ, υ ν *&c. & paulo post.* πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ɥ, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ɥ μ, ν ξ.

Quod autem reliquum est, ostendemus; maiora scilicet esse quadratis c d, e f, E
g h, i k, l m, n x, &c.] *Rursus uult ostendere Archimedes spatia A; hoc est rectangulum contentum linea n x, & æquali omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x; & tertiam partem quadratorum*
o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n, maiora esse quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. ad quod assumit qua E
drata c d, e f, g h, i k, l m, n x esse æqualia quadratis c q, e z, g 9, i λ, l ɥ; & quadratis q d, z F
f, 9 h, λ k, ɥ m, n x; & rectangulo contento linea n x, & æquali duplæ linearum c q, e z, g 9, i λ, l ɥ. id, quod apparet manifestissime ex quarta secundi. Sed dicantur causa breuitatis spatia illa E, hæc autem spatia F.

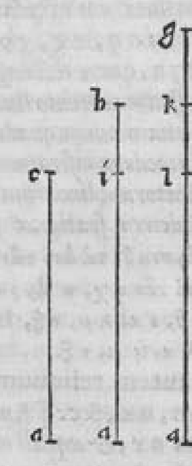
Suntq; communia quadrata q d, z f, 9 h, λ k, ɥ m, n x; & contentum linea n x &c.] F
Cum antea ostensum fuerit spatia A esse æqualia spatijs B: spatia autem E spatijs F æqualia: si nunc ostenderimus, spatia B esse maiora spatijs F: erunt quoque spatia A ipsis E maiora. Quadrata enim q d, z f, 9 h, λ k, ɥ m, n x sunt utrisque communia; & rectangulum, quod continetur linea n x, & æquali omnibus o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n maius est rectangulo contento n x, & æquali duplæ linearum c q, e z, g 9, i λ, l ɥ; nanque earum dupla est æqualis lineis o q, p z, r 9, s λ, t ɥ. quare basis antecedentis rectanguli excedit basim consequentis, linea y n: & rectangulum excedit rectangulum, spatio y n x. Quadrata uero o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n maiora sunt, quàm tripla quadratorum c q, e z, g 9, i λ, l ɥ: & idcirco tertia illorum pars, his quadratis maior est; quòd paulo ante fuerit ostensum, quadrata linearum æqualium maximæ, quadratorum ex lineis se se æqualiter excedentibus, dempto maximæ quadrato, maiora esse, quàm tripla. relinquitur ergo rectangulum contentum linea n x, & æquali omnibus omnibus o d, p f, r h, s k, t m, y x unà cum tertia parte quadratorum o q, p z, r 9, s λ, t ɥ, y n, maius esse quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. In hunc usque locum processit Archimedes nullum eorum, quæ proposuit, manifeste concludens, nisi fortasse aliqua desiderentur. At nos illud ipsum facile assequemur ex ijs, quæ ante monstrata sunt. monstratum nanque est, quadrata linearum o d, p f, r h, s k, t m, y x, quæ sunt quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia A eam habere proportionem, quam quadratum a b lineæ maximæ ad rectangulum a b u; & tertiam partem quadrati a u. simul & illud monstratum est, spatia A esse minora spatijs C. quare ex 8. & 13. quinti concluditur primum, uidelicet quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia C, hoc est ad quadrata a b, c d, e f, g h, i k, l m linearum se se æqualiter excedentium, dempta minima, minorem habere proportionem, quàm qua-

 dratum

dratum a b lineæ maximæ ad rectangulum a b u; & tertiam partem quadrati a u, hoc est ad id, quod est æquale utrisque; rectangulo contento linea maxima, & minima; & tertiæ parti quadrati excessus, quo maxima minimam excedit. Rursus quoniam monstrata sunt spatia A maiora spatijs E: ex eisdem colligitur secundum, quadrata linearum æqualium maximæ ad spatia E, hoc est ad quadrata linearum se se æqualiter excedentium dempta maxima, maiorem habere proportionem, quàm quadratum lineæ maximæ ad rectangulum maxima, minimaq; linea contentum; & ad tertiam partem quadrati eius lineæ, qua maxima excedit minimam: quæ omnia ostendisse oportebat. Corollarium patet ex iam dictis, & corollario uigesimæ sexti elementorum.

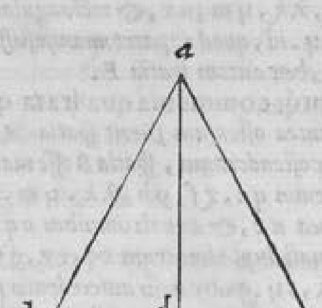
IN PROPOSITIONEM XIII.

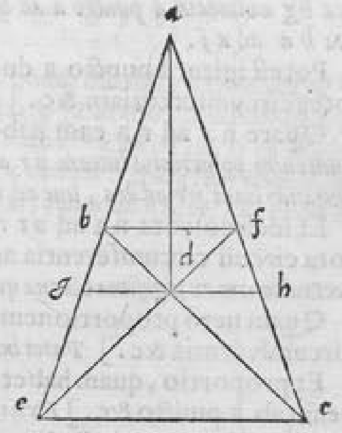
A Etidcirco a g, a c sunt ipsius a h duplæ. *Hoc manifeste apparere potest, cum id, quo linea a g excedit lineam a c, sit duplum eius, quo linea a b excedit eandem a c. sed ut res manifestior fiat, ponantur tres lineæ a c, a b, a g, se se æqualiter excedentes, & excessus, quo linea a b excedit a c, sit i b; quo autem linea a g excedit a b, sit k g: & abscindatur ab ipsa k a, linea æqualis, k g, quæ sit k l. perspicuum est lineam l g duplam esse ipsius i b: & lineas a c, a i, a l inter se se æquales; propterea q; duas lineas a c, a l duplas ipsius a i. Duæ igitur a c, a l ipsius a*
1.quinti. *i æque multiplices sunt, atque l g ipsius i b; nempe duplæ. quare & lineæ a c, a l, l g, linearum a i, i b; hoc est, a c, a g, ipsius a b duplæ sunt; quod monstrare oportebat.*



B Sed eius lineæ, quæ in triangulo bifariam diuidit angulum c a g, ipsæ a g, a c maiores sunt, quàm duplæ.] *Si enim trianguli angulus bifariam diuidatur: diuidens autem linea producatur usque ad basim: duo trianguli latera maiora erunt, quàm dupla ipsius diuidentis; quod nos ita monstrabimus.*

SIT triangulum a b c: & sit a d linea diuidens angulum b a c bifariam. Dico laterá a b, a c maiora esse, quàm dupla ipsius a d. Itaque triangulum, uel duo latera habebit æqualia, uel inæqualia. habeat primo æqualia. erunt iam duo
4. primi. *triangula a b d, a c d æqualia, & similia inter se: nanque angulus a b c æqualis est angulo a c d: & b a d æqualis ipsi*
32. primi. *c a d. quare & reliquus angulus a d b reliquo a d c æqua-*
13. *lis: & uterque rectus. ergo linea a b maior est ipsa a d;*
18. *cum maiori angulo subtendatur. eadem quoque ratione & linea a c maior ipsa a d. duæ igitur lineæ a b, a c maiores sunt, quàm duplæ ipsius a d. Si uero triangulum latera habeat inæqualia sit, ut in alia figura, latus a c maius latere a b: & producatur a b usque ad e; ita ut fiat æquale lateri a c: iungantur quoque e c: & per punctum b ducatur linea b f æquidistans ipsi e c: itemq; per d alia ducatur eidem æquidistans, quæ sit g d h: & iungantur e f. perspicuum est igitur, propter similitudinem triangulorum a e c, a g h, lineas a g, a h æquales esse. quare trianguli æquicruris a g h duo latera a g, a h maiora erunt, quàm dupla ipsius a d, ex ijs, quæ proxime monstrata sunt. Quòd si monstrauerimus, lineas a b, a c trianguli a b c maiores esse lineis a g, a h: manifeste patebit, quod proponebatur. In hac enim dispositione multa fieri triangula, æqualia inter se, & similia, neminem latere potest, qui elementorum libros recte perceperit. è quorum numero triangulum b d e æquale est, & simile triangulo f d c: & triangulum b d g triangulo f d h: & denique g d e ipsi h d c. constat præterea lineam g h duos angulos,*
15. primi. *qui sunt ad d uidelicet b d e, f d c bifariam secare; cum angulus g d e sit æqualis angulo f d h: &*
3. sexti. *propterea angulo b d g: & similiter angulus h d c sit æqualis angulo b d g, hoc est ipsi f d h. Sed & illud constat. cum linea a d secet angulum b a c bifariam, basis portiones eandem proportionem habere, quàm reliqua ipsius trianguli latera; hoc est c d ad d b esse, ut a c ad a b. quòd cum*





lineæ a c posita sit maior ipsa a b: erit & c d maior ipsa d b. eadem quoque ratione in triangulo f d c, cuius angulus ad d bifariam secatur ipsa d h, erit c h ad h f, ut c d ad d f; hoc est ad b d, erit igitur c h maior ipsa h f. quare linea composita ex dupla ipsius a b, & ipsis f b, h c, maior erit composita ex dupla eiusdem a b, & dupla f h. At uero lineæ primæ compositæ æquales sunt duæ lineæ a b, a c; cum a f sit æqualis ipsi a b: secundæ autem sunt æquales duæ lineæ a g, a h; quòd h g ipsi f h sit æqualis. ergo duæ lineæ a b, a c duabus lineis a g, a h sunt maiores. ex quibus sequitur, lineas a b, a c multo maiores esse, quàm duplas ipsius a d: quod monstrare uolebamus.

IN PROPOSITIONEM XVI.

Necessarium igitur est circuli huius circumferentiam, quæ ad præcedentia habetur intra lineam spiralem cadere; quæ uero ad sequentia, extra.] A
Hoc est circumferentiam eam, quæ à d puncto uersus præcedentia habetur, quæ est d r t intra spiralem lineam cadere; quæ uero habetur ab eodem puncto uersus consequentia, hoc est d n t, extra.

Angulum uero a d f non esse acutum constat, quia maior est angulo semicirculi.] B
Ostensum est in decima sexta tertij elementorum, semicirculi angulum omni angulo acuto rectilineo esse maiorem, hoc est eum, qui diametro, & circuli circumferentia continetur. Quare si angulus a d r omni acuto rectilineo maior est: necessario sequitur, angulum a d f rectilineum, cum eo maior sit, quòd linea d f extra circulum cadat, nullo pacto esse acutum.

Quare ab a puncto ad contingentem potest recta linea duci, ita ut eius pars, &c.] C
Hoc quomodo fieri possit, docet ipse in quinta huius.

Et tota igitur i a ad a r minorem proportionem habet, quàm circumferentia r d n t ad d n t circumferentiam.] *Per compositam scilicet rationem, ex uigesima octaua quinti apud Campanum.* D

Hoc est quam s g k h circumferentia ad circumferentiam g k h.] *Est enim ut angulus r a d ad ipsum d a t, ita circumferentia r d ad circumferentiam d n t: & ita circumferentia s g ad circumferentiam g k h. quare ut circumferentia r d ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g ad ipsam g k h: & componendo, ut circumferentia r d n t ad circumferentiam d n t, ita circumferentia s g k h ad circumferentiam g k h.* E ult. sexti. 11. quinti.

Vt ostensum est.] *Videlicet in decima quarta huius.* F

Quod fieri minime potest, cum sit r a æqualis a d.] *Vide ne codex græcus mendosus sit, cum hæc uerba desint, μείζων δὲ ἁ ι α τᾶς α λ, hoc est, maior autem i a ipsa a l. sequitur absurdum ex octaua quinti; nanque a i cum sit maior ipsa a l: maiorem habet proportionem ad a r, quàm a l ad eandem, siue ad ei æqualem a d; cuius oppositum sequebatur ex ante dictis.* G

IN PROPOSITIONEM XVIII.

Et sumatur linea quædam recta l a, minor quidem, quàm f a, maior uero, quàm circumferentia circuli h k g.] *Id, quo pacto fiat, docetur quarta huius.* A

Proportioq́; , quàm habet h a ad a l minor est ea, quam habet dimidia g h ad lineam ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam; quoniam & maior est ea, quam habet h a ad a f.] *Proportio enim, quam habet h a ad a l maior est ea, quam habet h a ad a f. at dimidium lineæ h g ad lineam ab a puncto ad ipsam h g perpendiculariter ductam, habet eam proportionem, quam h a ad a f, ut monstrabitur. ergo & proportio, quam habet h a ad a l, maior est proportione, quam habet dimidium h g ad lineam ab a puncto ad ipsam g h perpendiculariter ductam. Illud autem monstrabitur ad hunc modum. ducatur ab a ad ipsam h g perpendicularis a i. constat lineam a i diuidere ipsam h g in partes æquales: & triangulum* B maior 8. quinti. 13. quinti. 3. tertii.

32. primi. *lum a i h triangulo f a h; esse æquiangulum: cum angulus ad h sit communis; angulus uero f a h*
4. sexti. *æqualis angulo a i h; quorum uterque est rectus. habet igitur linea i h ad i a; hoc est dimidium lineæ h g ad lineam à puncto a ad h g perpendiculariter ductam proportionem eandem, quam linea h a ad a f.*

C Potest igitur à puncto a duci ad productam linea a n: ita ut n r quæ interiicitur inter circumferentiam &c.] *Ex septima huius.*

D Quare n r ad r a eam habebit proportionem, quam h r recta ad ipsam a l.] *Cum enim posuerimus lineam n r ad h r habere proportionem eam, quam linea h a ad a l: & permutando linea n r ad h a, siue ad r a, ipsi æqualem, eam habebit, quam h r ad a l.*

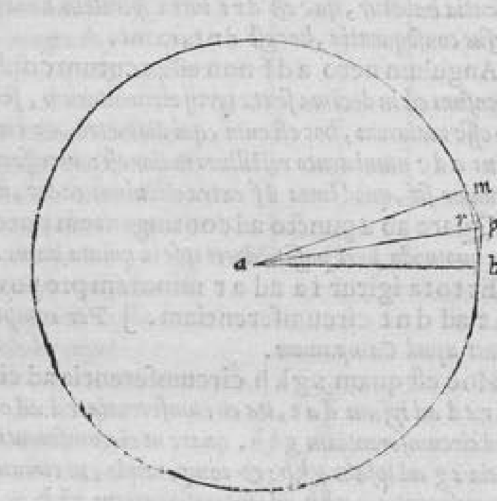
E Et idcirco tota n a ad a r minorem habebit, quam h r circumferentia unà cum tota circuli circumferentia ad circumferentiam circuli h g k.] *Per compositam uide licet rationem ex uigesima octaua quinti.*

F Quam uero proportionem habet circumferentia h r una cum tota circuli h g k circumferentia &c.] *Patet hoc ex decima quinta huius.*

G Et proportio, quam habet a h ad a l minor est ea, quam dimidia g h habet ad lineam ab a puncto &c.] *Ex ijs, quæ nos proxime ostendimus; nam linea h a ad a f eandem habet proportionem, quam dimidium lineæ h g ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam h g ductam.*

H Potest igitur ab a puncto duci linea a p ad contingentem &c.] *Ex octaua huius.*

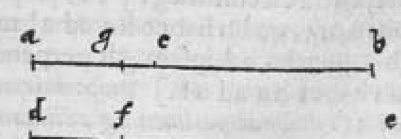
I Cum sit h p recta maior circumferentia h r.] *Fiat ad lineam a p, & ad punctum in ea datum a, angulus æqualis angulo h a p, qui sit p a m: & ducta p m, erunt duæ lineæ h p, p m maiores circumferentia h r m, ex ijs, quæ posita sunt ab Archimede*
23. primi.
15. quinti. *in principio lib. de sphæra, & cylindro. sicut autem lineæ h p, p m ad circumferentiam h r m, ita dimidium harum linearum ad dimidium circumferentiæ, hoc est linea h p ad circumferentiam h r. est enim linea h p æqualis lineæ p m; quòd triangulus p a h æqualis*
4. primi.
ult. sexti. *sit triangulo p a m: & circumferentia h r æqualis est circumferentiæ r m; cum æqualibus angulis subijciantur. quare sequitur lineam h p maiorem esse circumferentia h r.*
14. quinti.



K Quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quam circumferentia circuli h g k ad h k r circumferentiam.] *Quam obrem illud sequatur, nos uniuerse demonstrabimus proposito eiusmodi theoremate.*

Si pars ad totum maiorem proportionem habeat, quam alterius totius pars ad suum totum: habebit & totum ad reliquum, maiorem proportionem, quàm alterum totum ad reliquum.

Sit totius a b, pars a c; quæ ad a b maiorem habeat proportionem, quàm totius d e pars d f ad ipsam d e. Dico a b ad c b maiorem proportionem habere, quàm d e ad f e. fiat ut d f ad d e, sic alia quæpiam linea, quæ sit a g
13. quinti. *ad a b. habebit ergo a c ad a b maiorem proportionem, quam a g ad*
10. eiusdé. *eandem. quare a c maior erit ipsa a g: & ob id g b maior ipsa c b. Et quoniam a g ad a b est, ut d f ad d e: erit è contrario a b ad*
19. quinti *a g, ut d e ad d f: & per conuersionem rationis a b ad g b, ut d e*
8. quinti. *ad f e. sed a b ab c b maiorem habet proportionem, quam ad g b; cum maior sit g b, ipsa c b, ut dictum*

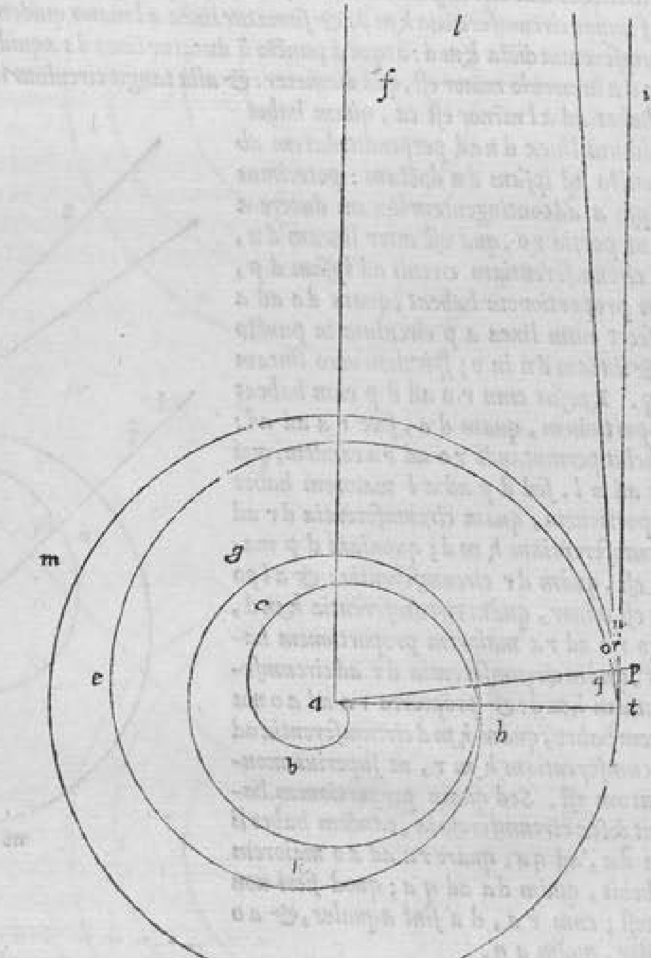


dictum est. ergo & a b ad c b maiorem habet, quam d e ad f e: quod monstrare uolebamus.

IN PROPOSITIONEM XIX.

Et proportio, quam habet t a ad a l, maior est ea, quam dimidia t n habet ad lineam ab a puncto ad ipsam t n perpendiculariter ductam. M] *Ducatur, ut dictum est superius, à puncto a ad lineam t n perpendicularis a i. erit eadem ratione t a ad a f, ut t i ad i a; hoc est ut dimidium lineæ t n ad perpendicularem ab a ad ipsam t n ductam. Quòd cum linea a l posita sit minor linea a f: habebit t a ad a l maiorem proportionem, quam ad a f; hoc est, quàm di-* 8.quinti. *midium t n ad perpendicularem ab a ad ipsam ductam.*

Similiter autem ostendetur, neque minor esse, B quàm dupla.] *Nam si fieri possit, sit linea f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: assumaturq; linea a l, maior quidem, quá linea a f, minor uero, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n: & ducatur à puncto t linea t u æquidistans ipsi a f. Rursus in circulo est linea t n, minor diametro: & alia tangit circulum in puncto t. proportioq;, quam habet t a ad a l minor est ea, quam dimidium lineæ t n habet ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam t n ductam. ducemus ergo ab a lineam a p ad contingentem; ita ut r o, quæ media interijcitur inter lineam, rectam in circulo datam, & circuli circumferentiam, ad lineam t p eam habeat pruportionem, quàm t a ad a l: id uero fieri posse ex octaua huius mauifestum est; secet enim linea a p circulum quidem in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q, & lineam t n in o. Quoniam igitur linea r o ad t p eam habet proportioñ, quam t a, siue r a ei æqualis ad a l, ut posuimus; & permutando r o ad r a habet eam, quam t p ad a l. sed t p ad a l maiorem habet proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli circumferentiam t m n bis sumptam; nam t p maior est, quàm circumferentia t r: & a l minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. quare r o ad r a habet maiorem proportionem, quàm circumferentia t r ad circuli t m n circumferentiam bis sumptam: & ex ijs, quæ nos monstrauimus in antecedente, r a ad a o maiorem habet proportionem, quàm circumferentia circuli t m n bis sumpta ad circumferentiam t m r unà cum*



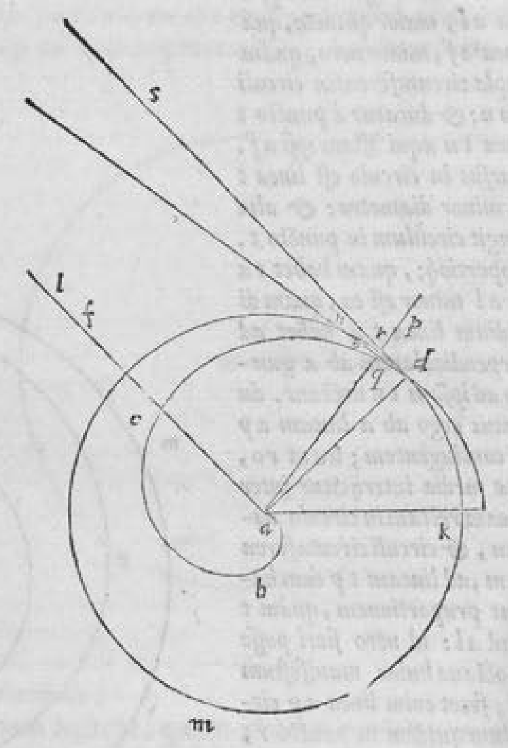
cum tota circuli circumferentia. quam uero proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet t a ad q a, ex decima quinta huius. ergo r a ad a o maiorem habet, quàm t a ad a q: quod fieri non potest; quoniam lineæ r a, t a inter se sunt æquales; & a o maior, quàm a q. non est igitur f a minor, quàm dupla circumferentiæ circuli t m n.

C Et multiplicem esse circumferentiæ circuli, secundum numerum circulationis nominati eodemmet numero.] *Vt si linea spiralis in tertia circulatione fuerit descripta; erit ea tripla tertij circuli: & si in quarta circulatione; quadrupla quarti circuli: & ita in reliquis.*

IN PROPOSITIONEM XX.

A Similiter autem superioribus ostendetur, neque minor esse.] *Nam si fieri potest, sit a f minor circumferentia k m d: & sumatur linea a l maior quidem, quàm a f; minor uero, quàm circumferentia dicta k m d: atque à puncto d ducatur linea d s æquidistans ipsi a f. Quoniam igitur linea d n in circulo minor est, quã diameter: & alia tangit circulum in puncto d: proportioq́; quam a d habet ad a l minor est ea, quam habet dimidium lineæ d n ad perpendicularem ab*

8. huius. *à puncto ad ipsam d n ductam: poterimus ab ipso a ad contingentem lineam ducere a p, ut portio r o, quæ est inter lineam d n, & circumferentiam circuli ad ipsam d p, eam proportionem habeat, quam d a ad a l; secet enim linea a p circulum in puncto r; & lineam d n in o; spiralem uero lineam in q. Rursus cum r o ad d p eam habeat proportionem, quam d a, siue r a ad a l: habebit permutando r o ad r a eandem, quã d p ad a l. sed d p ad a l maiorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad circumferentiam k m d; quoniam d p maior est, quàm d r circumferentia: & a l posita est minor, quàm circumferentia k m d, ergo r o ad r a maiorem proportionem habet, quàm cirrumferentia d r ad circumferentiam k m d: & propterea r a ad a o maiorem habet, quam k m d circumferentia ad*



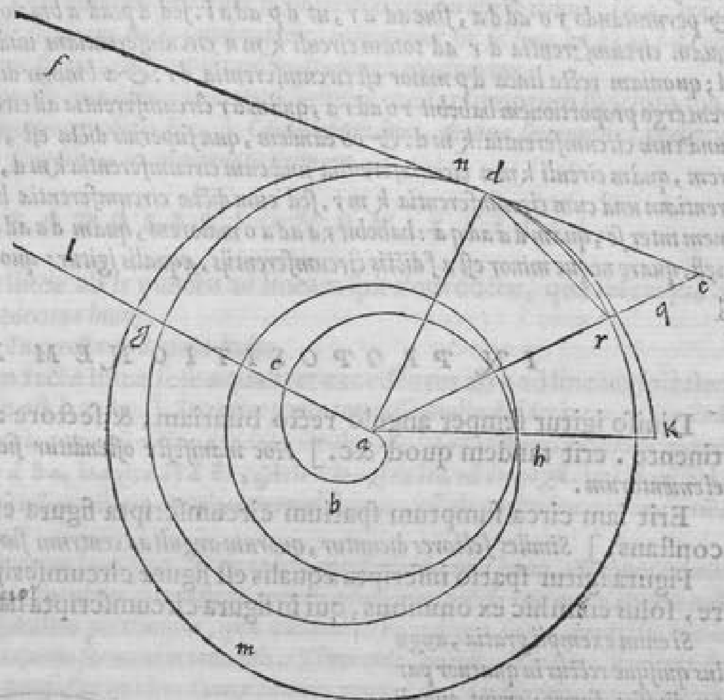
15. huius. *circumferentiam k m r, ut superius monstratum est. Sed quam proportionem habent dictæ circumferentiæ, eandem habet linea d a, ad q a. quare r a ad a o maiorem*

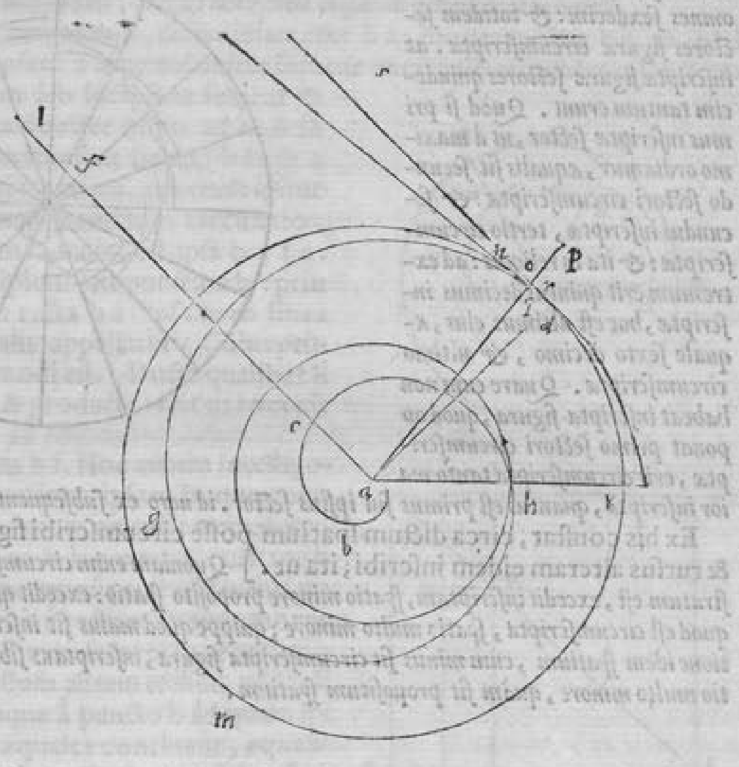
8. quinti. *habebit, quàm d a ad q a; quod fieri non potest; cum r a, d a sint æquales, & a o maior, quàm a q.*

H Eodem quoque modo ostendetur, & si lineam spiralem in secunda circulatione descriptam.] *Sit enim a b c h linea spiralis in prima circulatione descripta, & h g d in secunda: & contingat eam aliqua recta e d f in puncto d: ab ipso autem d ad principium lineæ spiralis ducatur d a: & centro quidem a, interuallo autem a d describatur circulus d m n; qui secet principium circulationis in puncto k: & ad ipsam d a erigatur perpendicularis a f. coibit ipsa cum linea e d f, ex ante dictis. coeat in f. Dico a f æqualem esse toti circumferentiæ circuli d m n, & præterea circumferentiæ k m d. Si enim non est æqualis, uel maior erit, uel minor. Sit primum, si fieri potest, maior: & sumatur aliqua recta a l minor quidem, quàm a f, maior uero, quàm tota circuli d m n circumferentia, & circumferentia k m d. Rursus circulus est k m n: atque in ipso recta linea d n, minor diametro: & proportio, quam habet d a ad a l maior est ea, quam ha-*

7. huius. *bet dimidium lineæ d n, ad perpendicularem ab a puncto ad ipsam d n ductam. Quare fieri poterit*

terit, ut ab ipso a ad d n protractam ducatur linea a c, secans circulum quidem in r; lineam uero spiralem in q; ita ut e r ad d r eam proportionem habeat, quam d a ad a l. habebit igitur permutando e r ad d a, uel ad a r proportionem eam, quã d r ad a l. At uero d r ad a l minorem habet proportionem, quam circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cũ circumferentia k m d; quòd recta linea d r minor sit circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. minorem ergo proportionẽ habebit e r ad a r, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. quare & componendo a e ad a r minorem habebit, quàm tota circumferentia circuli k m n unà cum circumferentia k m d r, ad totã circumferẽtiam unà cum circumferentia k m d. Hæ autem circumferentiæ inter se se eãdem habent proportionem, quã q a ad d a. sequitur ergo minorem habere proportionem a e ad a r, quàm q a ad d a; quod esse non potest; cum q a minor sit, quàm a e; & ipsæ a r, d a sint æquales. non igitur a f maior est tota circuli k m n circumferentia, unà cum circumferentia k m d.





15. huius.

Similiter autem ante dictis monstrabimus, neque minorem esse; sumpta linea a l maiore ipsa a f, et minore dictis circũferentijs, atque per punctũ d ducta d s æquidistanti ipsi a f. A puncto enim a ad contingentẽ ducere licebit lineam a p, quæ secet circulum quidem in puncto r, & lineam in circu 8. huius.

f lo

lo exiſtentē, uidelicet ipſam d n in o, ſpiralem uero in q, eo pacto, ut r o ad d p ita, ſit ut d a ad a l. erit & permutando r o ad d a, ſiue ad a r, ut d p ad a l. ſed d p ad a l maiorem proportionem habet, quàm circumferentia d r ad totam circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m d; quoniam recta linea d p maior eſt circumferentia d r: & a l minor dictis circumferentijs. maiorem ergo proportionem habebit r o ad r a, quàm d r circumferentia ad circumferentiam circuli k m n unà cum circumferentia k m d. & ob eandem, quæ ſuperius dicta eſt, rationem, r a ad a o maiorem, quàm circuli k m n circumferentia unà cum circumferentia k m d, a d circuli k m n circumferentiam unà cum circumferentia k m r. ſed cum dictæ circumferentiæ habeant eandem proportionem inter ſe, quam d a ad q a: habebit r a ad a o maiorem, quàm d a ad q a: quod item eſſe non poteſt. quare neque minor eſt a f dictis circumferentijs. æqualis igitur: quod fuerat demonſtrandum.

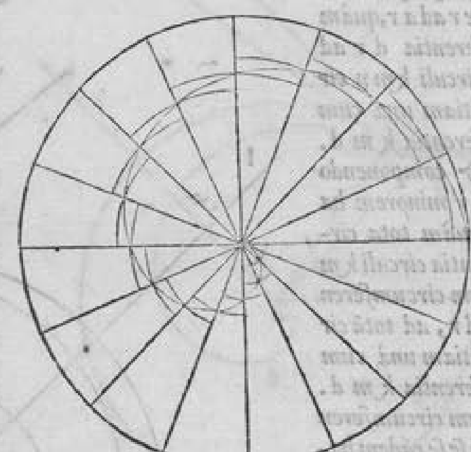
IN PROPOSITIONEM XXI.

A Diuiſo igitur ſemper angulo recto bifariam, & ſectore angulum rectum continente. erit tandem quod &c.] *Hoc manifeſte oſtenditur fieri poſſe ex prima decimi elementorum.*

B Erit iam circa ſumptum ſpatium circumſcripta figura ex ſimilibus ſectoribus conſtans.] *Similes ſectores dicuntur, quorum anguli ad centrum ſunt æquales.*

Sectores ſimiles.

C Figura igitur ſpatio inſcripta æqualis eſt figuræ circumſcriptæ dempto h a k ſectore, ſolus enim hic ex omnibus, qui in figura circumſcripta habentur, relictus eſt.] *Si enim exempli gratia, angulus quiſque rectus in quatuor partes diuiſus fuerit: erunt anguli omnes ſexdecim: & totidem ſectores figuræ circumſcriptæ. at inſcriptæ figuræ ſectores quindecim tantum erunt. Quòd ſi primus inſcriptæ ſector, ut à maximo ordiamur, æqualis ſit ſecundo ſectori circumſcriptæ: & ſecundus inſcriptæ, tertio circumſcriptæ: & ita in reliquis: ad extremum erit quintus decimus inſcriptæ, hoc eſt ultimus eius, æquale ſexto decimo, & ultimo circumſcriptæ. Quare cum non habeat inſcripta figura, quod opponat primo ſectori circumſcriptæ, erit circumſcripta tanto maior inſcripta, quantus eſt primus ſui ipſius ſector. id uero ex ſubſequenti figura fiet manifeſtum.*



D Ex his conſtat, circa dictum ſpatium poſſe circumſcribi figuram, qualis dicta eſt, & rurſus alteram eidem inſcribi; ita ut.] *Quoniam enim circumſcripta figura, ut demonſtratum eſt, excedit inſcriptam, ſpatio minore propoſito ſpatio: excedit quoque ſpatium illud, circa quod eſt circumſcripta, ſpatio multo minore; quippe quod maius ſit inſcripta figura. Et ſimili ratione idem ſpatium, cum minus ſit circumſcripta figura, inſcriptam ſibi ipſi figuram excedit, ſpatio multo minore, quàm ſit propoſitum ſpatium.*

IN PROPOSITIONEM XXII.

A Itaque diuiſis ſemper angulis rectis in angulos æquales ei, qui continetur k h a: & aliis diſpoſitis ut ſupra.] *In ſecunda lineæ ſpiralis circulatione aliter contingit, quàm in prima: nã tot ſectores ſunt in utraque figura, quot anguli: & propterea circumſcripta inſcriptam non excedit*

dit toto illo sectore b k a. par enim est ex eo demi sectorem æqualem ultimo sectori inscriptæ figuræ, scilicet b e r; qui sit b e s. unde relinquitur harum figurarum excessum esse spatium e s k a; hoc est id, quo sector b k a excedit sectorem b e r: quod quidem, cum minus sit sectore b k a, ut pote eius pars, multo minus erit dato spatio, & propositum multo magis concludetur.

Constat igitur fieri posse, ut circumscripta figura excedat sumptum spatium spatio minori, quocunque proposito &c.] *Corollarium hoc, & quæ sequuntur, perspicua sunt ex ijs, quæ proxime scripsimus in uigesimam primam.* B

IN PROPOSITIONEM XXIIII.

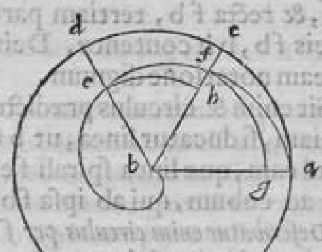
Sunt igitur quædam lineæ ab h puncto ad lineam spiralem ductæ, quæ sese æqualiter excedunt.] *Ex duodecima huius.* A

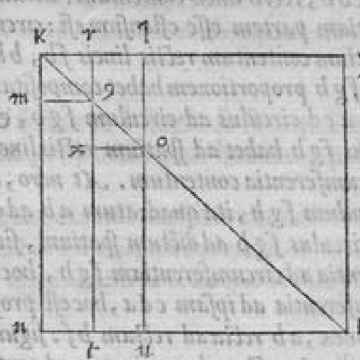
Vt ostensum est.] *In corollario decimæ huius.*

Rursus sunt quædam rectæ lineæ sese æqualiter excedentes ab h ad lineam spiralem B
ductæ, quarum maxima est h a. &c.] *In codice græco impresso multa desiderantur, ut ita scribi oportcat.* πάλιν οὖν ἐντὶ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε, καὶ ἔστιν ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. C

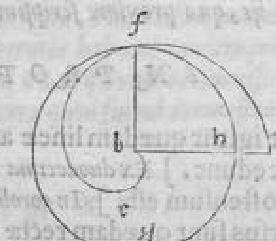
Hoc enim demonstratum iam fuit.] *In eodem corollario decimæ huius. Pappus in collectionibus mathematicis hoc idem aliter demonstrat, paucis admodum positis: & quoniam non nulla etiam addidit ad lineam spiralem pertinentia, quæ animaduersione digna sunt; eius uerba hoc loco subscribenda censui in latinum sermonem conuersa. Theorema, inquit, de helica, seu linea spirali in plano describenda, proposuit quidem Conon Samius geometra, Archimedes uero admirabili quadam aggressione demonstrauit. Itaque dicta linea eiusmodi generationem habet.* D

Sit circulus, cuius centrum b, & semidiameter b a: moueaturque b a ita, ut b punctum maneat, & ipsum a æqueuelociter feratur in circuli circumferentia: simul uero aliquod punctum à b incipiens feratur in recta linea b a æqueuelociter usque ad a: & in æquali tempore b pertranseat lineam b a: & a ipsam circuli circumferentiam. punctum igitur hoc in linea b a motum secundum circulationem describet lineam: qualis, est ipsa b e f a: et eius quidem principium erit punctum b: principium circulationis recta b a: ipsa uero linea helix, seu linea spiralis appellatur. Cuius principale accidens eiusmodi est. Ducta qualibet linea ad ipsam, ut f b, & producta, erit ut tota circuli circumferentia ad circumferentiam a d c, ita recta a b ad rectam b f. Hoc autem intelligere facile est ex generatione ipsa. In quo enim tempore a punctum totam circuli circumferentiam pertransit, in hoc & b pertransit rectam b a: in quo autem a pertransit circumferentiam a d c, in hoc & b ipsam b f rectam: & sunt motus ipsi sibi ipsis æquales. quare & inter se proportionales erunt. Manifestum autem & illud, rectas lineas omnes, quæcunque à puncto b ad ipsam spiralem ductæ angulos æquales continent, æqualiter sese inuicem excedere. Quibus positis ostenditur, figuram contentam linea spirali, & recta, quæ est in principio circulationis, tertiam partem esse comprehendentis ipsam circuli.





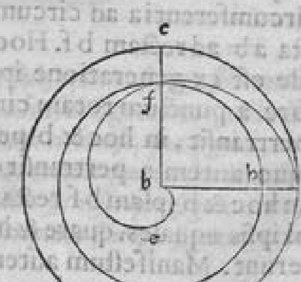
SIT enim, & circulus, & prædicta linea; & exponatur parallelogrammum rectangulum k n *l p: sumaturq; a c circumferentia pars quædam circumferentiæ circuli. & sumatur h r recta, ipsius k p eadem pars. Iungantur præterea c b, b a: & lineæ quidem k n æquidistans ducatur r t, lineæ uero k r, ipsa m 9: & circa b centrum describatur circumferentia f g. Quoniam igitur est ut a b recta linea ad a g, hoc est, ut b c ad c f, sic tota circuli circũferentia ad circumferentiam c a: hoc enim est lineæ spiralis principale accidens. Vt autem circuli circumferentia ad ipsam c a, sic p k ad k r: & ut p k ad k r, sic l k ad k 9, hoc est r t ad r 9. & ut igitur b c ad c f, ita t r ad r 9: & per conuersionem rationis. Quare ut quadratum b c ad quadratum b f, ita quadratum r t ad quadratum t 9. Vt autem quadratum b c ad quadratum b f, ita a b c sector ad sectorem f b g: & ut quadratum r t ad quadratum t 9, ita cylindrus factus à parallelogrammo k t circa axẽ n t ad cylindrum à parallelogrãmo m t circa eundem axem. Vt ergo sector a b c ad f b g sectorem, ita cylindrus à parallelogrammo k t circa axem n t ad cylindrum a b ipso m t circa eundem axem: similiter quoque si a c circumferentiæ ponamus æqualem c d: ipsi autem k r rectæ lineæ æqualem ponamus r q: & eadem construamus: erit ut d b e sector ad sectorem e b h, sic cylindrus à parallelogrammo r u circa axem t u ad cylindrum à parallelogrammo u x circa eundem axem. Eadem ratione procedentes demonstrabimus, ut totus circulus ad omnes figuras ex sectoribus inscriptas lineæ spirali, sic esse cylindrum à parallelogrammo n p, circa axem n l ad omnes figuras ex cylindris ipsi cono, qui fit à triangulo k n l circa axem l n, inscriptas: et rursus, ut circulus ad omnes figuras ex sectoribus circumscriptas lineæ spirali, sic cylindrum ad omnes figuras ex cylindris eidem cono circumscriptas. ex quo manifestum est, circulum ad eam figuram, quæ inter lineam spiralem, & rectam a b interijcitur, ita esse, ut cylindrus ad conum. triplus est igitur circulus prædictæ figuræ; quod fuerat demonstrandum.*

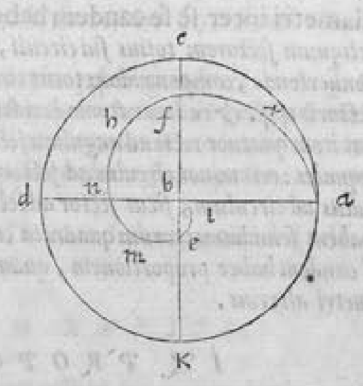


Eodem modo demonstrabimus, si ducatur quæpiam linea ad spiralem, ut b f: & per f circa centrum b describatur circulus: figuram contentam linea spirali f e b, & recta f b, tertiam partem esse figuræ circumferentia circuli f g h, & rectis lineis f b, b h contentæ. Deinceps autem conscribemus theorema circa eandem lineam notatione dignum.

Sit enim & circulus prædictus in generatione, & linea spiralis eadem a f e b. Dico iam, si ducatur linea, ut b f, esse figuram contentam tota linea spirali, & recta a b ad eam, quæ linea spirali f e b, & b f recta continetur, ut cubus, qui fit à linea a b ad cubum, qui ab ipsa f b.

Describatur enim circulus per f circa centrum b, qui sit f g h. Itaque quoniam est, ut figura, quæ linea spirali a f e b, & recta a b continetur, ad figuram contentam spirali f e b, & f b recta, sic a c d circulus ad figuram circumferentia f g h, & f b, b h, rectis lineis contentam: utrunque enim utriusque tertiam partem esse ostensum est: circulus autem a c d ad spatium contentum rectis lineis f b, b h, & circumferentia f g h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a c d circulus ad circulum f g h, & ex ea, quam circulus f g h habet ad spatium rectis lineis f b, b h, & f g h circumferentia contentum. At uero, ut a c d circulus ad circulum f g h, ita quadratum a b ad quadratum b f: & ut circulus f g h ad dictum spatium, sic tota ipsius circumferentia ad circumferentiam f g h, hoc est a c d circuli circumferentia ad ipsam c d a, hoc est propter accidens spiralis lineæ, a b recta ad rectam b f. figura igitur, quæ linea spirali, & recta a b continetur ad contentam spirali, & b f proportionem habet compositam ex ea, quam ab quadratum habet ad quadratum f b, & ex ea, quam habet linea recta a b ad ipsam b f. hæc autem proportio eadem est ei, quam habet cubus a b ad cubum b f.





Ex hoc conſtat, ſi poſita eadem linea ſpirali, & circulo circa ipſam, producatur a b ad d: & ad rectos angulos ipſi ducatur linea c f b e k, qualium partium una eſt, ſpacium contentum linea ſpirali b l e, & recta b e, talium illud quidem, quod continetur ſpirali n m e, & rectis n b, b e eſſe ſeptem: & quod continetur f h n, & rectis f b, b n undeuiginti: quod uero a x f, & a b, b f continetur, triginta ſeptem perſpicua enim hæc ſunt ex præoſtenſo theoremate. Et qualium a b recta eſt quatuor, talium ipſam quidem f b eſſe trium; n b, duarum; & b e unius: quod etiam perſpicuum eſt, ex accidenti lineæ ſpiralis, & ex eo, quod circumferentiæ a c, c d, d k, k a inter ſe ſunt æquales.

IN PROPOSITIONEM XXV.

Quæ eadem eſt ei, quam habent hæc utraque; rectangulum contentum ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro primi; & tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiameter ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli.] *Quoniam ſemidiameter primi circuli ad ſemidiametrum ſecundi ſubduplam habet proportionem: nam ex decima quinta huius h e, ad h a eam habere proportionem compertum eſt, quam habet circumferentia circuli a f g i ad eandem circumferentiam bis aſſumptam: ſi poſuerimus ſemidiametrum primi circuli, uidelicet h e eſſe trium partium; erit h a ſemidiameter ſecundi earundem partium ſex: & rectangulum his ſemidiametris contentum 18: quadratum autem exceſſus earum 9. quare compoſitum ex illo rectangulo, & tertia parte huius quadrati erit 21. ſed quam proportionem habet 21 ad 36, hoc eſt ad quadratum lineæ h a, eam habet 7 ad 12. compoſitum igitur iam dictum ad quadratum ſemidiametri ſecundi circuli habet eandem proportionem, quàm 7 ad 12.* A 15.quinti

Sit linea ſpiralis a b c d e.] *Addenda ſunt hæc in græco codice.* ἔσω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένη. B

Habebit igitur circulus y ad circulum a f g i eam proportionem, quam ſeptem ad duodecim; propterea quòd ipſius ſemidiameter ad ſemidiametrũ circuli a f g i eandem habet poteſtate proportionem.] *Circuli enim ad inuicem ſunt, ſicuti diametrorum quadrata. ſed ſemidiametrorum quadrata non aliam habent proportionem, quàm diametrorum. circuli ergo ad inuicem erunt, ſicuti ſemidiametrorum quadrata. Quòd cum poſitum ſit dictarum ſemidiametrorum quadrata eam habere proportionem, quam ſeptem ad duodecim: et ipſi circuli neceſſario eandem habebunt.* C 2. duod:. 15.quinti.

Sectores igitur à lineis æqualibus maximæ deſcripti &c.] *Poſt ea uerba.* χωρὶς τῶ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας. *& hæc addenda ſunt.* οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα ποτὶ τὼς τομέας τὼς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τῶ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας. D

Hoc enim oſtenſum eſt.] *In undecima huius.* E

Sectores igitur ab æqualibus maximæ deſcripti ad ſectores à lineis ſe ſe æqualiter excedentibus, dempto eo, qui à maxima, maiorem proportionem habent, quàm quadratum h a &c.] *Ex undecima huius.* F

Et tertia pars quadrati eius lineæ, qua ſemidiameter circuli maioris excedit ſemi diametrum minoris.] *Græcus codex ita reſtituendus.* καὶ τὸ τρίτον μέρος τῶ τετραγώνου τῶ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τῶ κέντρου τῶ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων, τᾶς ἐκ τῶ κέντρου τῶ ἐλάττονος ποτὶ τὸ τετράγωνον. G

IN PROPOSITIONEM XXVI.

Sector igitur y q ad h a f ſectorem eandem proportionem habet, quam rectangulum a h e, & tertia pars quadrati e f habeat ad quadratum h a. horum enim ſemidiametri A

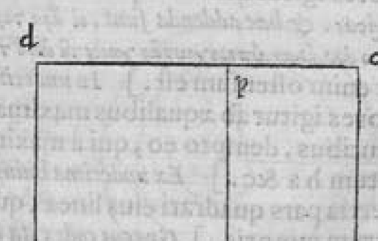
ult. sexti. diametri inter se se eandem habent potestate proportionem.] *Erit enim sector ų q ad reliquum sectorem totius sui circuli, sicut eius sectoris angulus ad reliquum ex quatuor rectis: & conuertendo, componendoq; totus circulus ad sectorem ų q erit, sicut quatuor recti ad angulum sectoris ų q. & eadem ratione accidet in circulo maiore, ut totus circulus sit ad sectorem h a f, sicut item quatuor recti ad angulum sectoris h a f. sed cum anguli sectorum ų q, & h a f sumpti sint*
11.quinti. *æquales: erit minor circulus ad sectorem ų q, sicut maior ad sectorem h a f: & permutando, circulus ad circulum, sicut sector ad sectorem. sed quam proportionem habent circuli inter se se, hanc habent semidiametrorum quadrata, ut superius est monstratum. sector igitur ų q ad sectorem h a f eandem habet proportionem, quam quadratum semidiametri unius, ad quadratum semidiametri alterius.*

IN PROPOSITIONEM XXVII.

A Secundus autem circulus ad primum est, sicut duodecim ad tria: quod manifeste patet.] *Constat nanque ex decima quinta huius semidiametrum secundi circuli duplum esse semi*
20.sexti. *diametri primi. quare erit circulus secundus ad circulum primum, sicut quatuor ad unum (hanc*
15.quinti. *enim habent proportionem semidiametrorum quadrata). sicut autem quatuor ad unum, sic duodecim ad tria. circulus igitur secundus ad primum est sicut duodecim ad tria. ratio autem, qua hoc*
25. huius. *loco utitur Archimedes, & inferius sæpissime ex uigesima secunda quinti necessaria est. nam si spatium k l ad secundum circulum est, sicut septem ad duodecim: secundus autem circulus ad pri-*
24. huius. *mum, sicut duodecim ad tria: & primus circulus ad spatium k, sicut tria ad unum: erit ex æquali spatium k l ad k, sicut septem ad unum: & diuidendo l spatium ad k, sicut sex ad unum. quare k spatium sexta pars est eius spatij, in quo l.*

B Hæc autem eam habent inter se proportionem, quam decem & nouem ad septẽ.] *Videntur ante hæc uerba non nulla desiderari in græco codice, ut ita legendum sit.* καὶ τὸ κλμ ἄρα ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἀπὸ τᾶς γβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τῦ ἀπὸ τᾶς αβ. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. *Vt autem hoc ita esse facile intelligatur. ponamus semidiametrum primi circuli h a esse trium partium: erit h b semidiameter secundi circuli earundem partium sex, ex decima quinta huius: & h c tertij circuli semidiameter nouem. quare rectangulum c h b, & tertia pars quadrati c b erunt 57: & re-*
15.quinti. *ctangulum b h a, & tertia pars quadrati b a 21. Hæc autem inter se sunt sicut 19 ad 7. spatium ergo k l m ad spatium k l est, ut 19 ad 7: & diuidendo spatium m ad k l, ut 12 ad 7. at ipsum k l ad l est, ut 7 ad 6: quod superius est demonstratum. est igitur m ad l, ut 12 ad 6. quare spatium m duplum est ipsius l spatij.*

C Sed utraque illa excedunt hæc utraque eo, quo & rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est eo, quod d h, c e continetur.] *Nam cum lineæ c d, d e sint æquales; erunt earum quadrata æqualia; & item tertia ipsorum pars æqualis. Quare ea utrinque æquali existente, excessus tantum erit id, quo rectangulum e h d excedit rectangulum d h c; hoc est rectangulum contentum lineis d h, c e; quod sic monstratur. Sit linea h e æqualis ipsi h e in spirali linea descriptæ: & ad punctum h erigatur perpendicularis h d, quæ sit etiam ipsi h d æqualis: & compleatur rectangulum d h e o: ab ipsa uero h e abscindatur æqualis ipsi h c: & per c ducatur æquidistans ipsis h d, e o, quæ sit c p. manifestum est his ita constitutis, rectangulum d e æquale esse rectangulo contento e h, h d; & rectangnlum d c æquale ei, quod continetur d h, h c. relinquitur ergo eorum excessum esse rectangulum c o; quod quidem est id, quod continetur linea p c, hoc est d h, & ipsa c e, ut monstrare uolebamus.*



D Quare spatium n ad k l m n eandem habet &c.] *Codex græcus ita restituendus est.*

τὸ

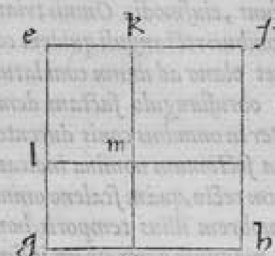
τὸ γ ἄρα ποτὶ κλμν χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ, καὶ τὸ ὑπὸ θγ, βδ.

Hæc autem æqualia ſunt rectangulo d h c, & tertiæ parti quadrati c d.] *Eſt enim linea d h æqualis duabus lineis h b, b d. quare rectangulum baſim habens d h, altitudinem uero h c, æquale eſt duobus rectangulis baſes habentibus h b, b d, & altitudinem eandem h c. tertia uero pars quadrati c d æqualis eſt tertiæ parti quadrati c b; quòd quadrata ſint æqualia, ex æqualibus lineis orta.* E 1. ſexti.

Rectangulum uero h d, c e ad rectangulum h c, d b eam habet, quam h d ad h c; quoniam lineæ c e, b d ſunt æquales.] *Ex prima ſexti.* F

IN PROPOSITIONEM XXVIII.

Quare x ſpatium ad n p, eam habet, quam rectangulum h a g cum duabus tertiis quadrati g a ad utraque hæc; & ad rectangulum a h g, & ad tertiam partem quadrati g a.] *Quoniam enim ut ex uigeſima ſexta huius apparet; ſpatium n p ad ſectorem c h g, eam habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati a g ad quadratum g h; & conuertendo ſector c h g ad ſpatium n p habet eam, quam quadratum g h ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. quare diuidendo ſpatium x ad ipſum n p habet eam, quam exceſſus, quo quadratum g h excedit hæc utraque; rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc eſt (ut mox oſtendemus) rectangulum h a g, & duæ tertiæ quadrati g a ad rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g. rectangulum autem h a g, & duas tertias quadrati g a eſſe id, quo quadratum g h excedit rectangulum g h a, & tertiam partem quadrati a g, hoc pacto oſtendetur. fiat ex linea g a h quadratum e g h f: & per a ducatur a k æquidiſtans ipſi g e, h f: fiat quoque ex ipſa g a quadratum l g a m. manifeſtum iam eſt, rectangulum k h æquale eſſe ei, quod continetur g h, h a; & rectangulum k l æquale contento h a, a g; quòd linea e l æqualis ſit ipſi h a. quare ſi à quadrato lineæ g h, auferemus rectangulum k h, quod continetur g h, h a; & tertiam partem quadrati a g: relinquentur utraque hæc; rectangulum k l, hoc eſt contentum h a, a g; & duæ tertiæ quadrati a g.* A



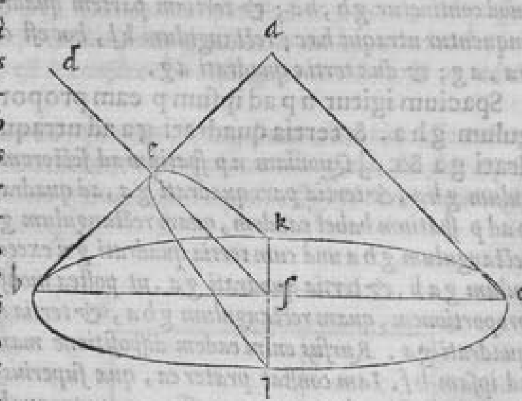
Spacium igitur n p ad ipſum p eam proportionem habet, quam utraque; rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad utraque; ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a &c.] *Quoniam n p ſpatium ad ſectorem n eandem habet proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. per conuerſionem rationis ſpatium n p ad p ſpatium habet eandem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad exceſſum, quo rectangulum g h a unà cum tertia quadrati g a excedit quadratum h a. exceſſus autem is eſt rectangulum g a h, & tertia quadrati g a, ut poſtea monſtrabitur. ſpatium igitur n p ad p habet eam proportionem, quam rectangulum g h a, & tertia quadrati g a ad rectangulum g a h, & tertiam quadrati g a. Rurſus enim eadem diſpoſitione manente, quæ prius, producatur linea l m uſque ad ipſam h f. Iam conſtat præter ea, quæ ſuperius dicta ſunt, i m f, quadratum eſſe, & æquale quadrato lineæ h a. quare exceſſus, quo utraque hæc, rectangulum a f, hoc eſt contentum g h, h a, & tertia pars quadrati g a, excedunt quadratum h a, erit rectangulum m h, quod quidem æquale eſt contento h a, a g, & tertia pars quadrati ipſius a g: quod monſtrare uolebamus. Reliqua quæ ſequuntur ex uigeſima ſecunda quinti, & prima ſexti, tum manifeſtam, tum firmam habent demonſtrationem, ut uerbum amplius addere ſuperuacaneum uideatur.* B

EIVSDEM COMMENTARIVS

IN QVADRATVRAM PARABOLES.

IN PROPOSITIONEM I.

A SISIT rectanguli coni sectio a b c.] *Quam rectanguli coni sectionem appellat Archimedes, posteriores ut Apollonius Pergæus, & alij parabolen dixerunt. quamobrem autem id factum sit, tradit Eutocius Ascalonita in commentarijs in primum conicorum Apollonij his uerbis, quæ à nobis latine reddita sunt. Prisci inquit, conum definientes; rectanguli trianguli circumuolutionem, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere: & conos omnes rectos, & unam in singulis sectionem fieri arbitrati sunt: in rectangulo quidem cono uocatam parabolen; in obtusiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipsim: atque ita nominatas apud ipsos sectiones passim inuenias. Quemadmodum igitur priscis illis in unaquaque triangulorum specie speculantibus duos rectos: primum in æquilatero; deinde in æquicruri; post in scaleno: ætate posteriores uniuersale theorema demonstrarunt, eiusmodi. Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis sunt æqules: ita & in coni sectionibus: rectanguli quidem coni sectionem dictam, in rectangulo tantum cono speculati sunt; secto scilicet plano ad unum coni latus perpendiculariter erecto: obtusianguli autem coni sectionem, in cono obtusiangulo factam demonstrarunt, & acutiangli coni sectionem in cono acutiangulo; similiter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus perpendiculariter erecta; quod & prisca sectionum nomina indicant. Verum postea Apollonius Pergæus uniuerse inspexit in omni cono, tam recto, quàm scaleno omnes sectiones inesse, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonstrationem, magnum geometram ipsum appellarunt. Hæc quidem Geminus scripta reliquit in sexto mathematicarum præceptionum libro. Quod autem dicit, manifestum faciemus in subiectis figuris. sit per axem coni triangulum a b c: & à quo uis puncto e ducatur ipsi a b ad angulos rectos linea d e f: & per d e f immissum planum perpendiculariter erectum ad ipsam a b secet conum. rectus est igitur uterque angulus a e d, a e f: rectanguloq; existente cono, & angulo b a c recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis æquales erunt anguli b a c, a e f. quare æquidistans erit linea d e f ipsi a c: & fiet in superficie coni sectio parabole, sic dicta* ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι; *hoc est ab eo,*



Parabole unde dicatur.

quòd parallela sit linea d e f, quæ communis sectio est plani secantis, & trianguli per axem, ipsi a c lateri trianguli. Sed si obtusiangulus sit conus, ut in secunda figura, obtuso uidelicet existente angulo b a c, & angulo a e f recto: duobus rectis maiores erunt anguli b a c, a e f: & non coibit d e f cum ipso a c latere ad partes, in quibus f, sed ad eas, in quibus sunt a, & e; producta nimirum c a in d. faciet igitur secans planum in superficie coni sectionem hyperbolen; dictam

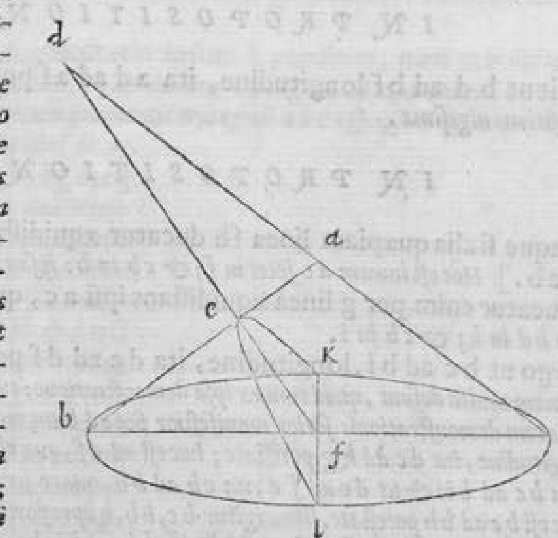
Hyperbole unde.

ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν: *hoc est ab eo, quòd anguli b a c, a e f excedant duos ractos: uel quòd d e f excedat uerticem coni, & coeat cum ipso c a extra. Quòd si acutiangulus sit conus; hoc est acuto existente angulo b a c: erunt anguli b a c, a e f minores duobus rectis: & lineæ e f, a c productæ coibunt tandem in aliqua parte; augere nanque, & in longius ducere conum possumus. Erit igitur in superficie sectio, quæ appellatur ellipsis* διὰ τὸ ἐλλείπειν; *hoc est ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant; uel quòd ellipsis diminutus quidam circulus sit. Ad hunc quidem modum antiqui*

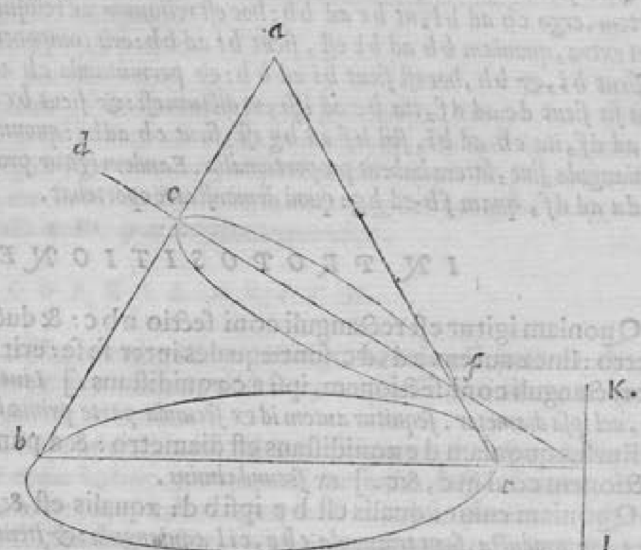
Ellipsis unde.

ponentes

ponentes secans planum per d e f ad rectos angulos ipsi a b lateri trianguli per axem coni; & insuper differentes conos; & propriam in unoquoque sectionem. At Apollonius ponens conum, & rectum, & scalenum; differenti ipsius plani occursu, differentes efficit sectiones. Sit enim, ut in iisdem figuris, secans planum k e l: communis autem sectio ipsius plani, & coni basis, linea k l: communis rursus sectio eiusdem, & trianguli a b c sit ipsa e f; quæ & diameter uocatur sectionis. Itaque in omnibus sectionibus ponit lineam k l ad rectos angulos esse basi trianguli a b c. Verum siquidem e f æquidistans sit ipsi a c; parabolen fieri k e l sectionem in coni superficie. Si uero coeat cum latere a c extra uerticem coni, ut in d; fieri ipsam k e l sectionem, hyperbolen: Quòd si coeat intra; fieri sectionem ellipsim, quam & θυρεὸν uocant. Generaliter igitur paraboles diameter æquidistans est uni lateri trianguli: hyperboles autem, & ellipsis diameter cum eo coit; hyperboles quidem ad partes uerticis coni; ellipsis uero ad partes basis. Scire præterea illud oportet, parabolen, & hyperbolen ex eorum numero esse, quæ in infinitum augentur: at ellipsim non item; tota enim in seipsam uergit, uelut circulus. Hæc Eutocius, quæ Archimedis uerbis magnam lucem afferre possunt: cum antiquarum appellationum cuiusque coni sectionis rationem exquisitissime tradant. Nos deinceps non antiqua, sed quibus Apollonius usus est, sectionum nomina crebro usurpabimus: quippe quæ latius pateant; & in omni cono reperiantur.



Parabole quō fiat.



Hyperbole. Ellipsis

Parabole, & Hyperbole in infinitū augentur.

Erunt ipsæ a d, d c inter se æquales.] *Demonstratum est id ab Apollonio Pergæo libro primo conicorum, propositione quadragesima sexta.*

Quod si a d, d c sint æquales.] *Addenda sunt hæc in græco codice, ut opinor, quibus tanquam demonstratis utitur Archimedes: demonstrat autem Apollonius libro secundo, propositione quinta.*

IN PROPOSITIONEM II.

Erunt lineæ d b, b e inter se æquales.] *Demonstrauit Apollonius libro primo, propositione trigesima quinta.*

IN PROPOSITIONEM III.

Erit ut b d ad b f longitudine, ita a d ad a f potestate.] *Apollonius eodem libro propositione uigesima.*

IN PROPOSITIONEM IIII.

A Itaque si alia quæpiam linea f h ducatur æquidistans ipsi b d, & secans utrasque a c, c b.] *Hoc est lineam a c secet in f; & c b in h: ipsam autem sectionem coni rectanguli in g.*

B Ducatur enim per g linea æquidistans ipsi a c, quæ sit k g.] *Secet autem ipsa k g lineam b d in k; & c b in i.*

C Ergo ut b c ad b i, longitudine, ita d c ad d f potestate.] *Ita restituendus est codex; nam multa desunt, quod tum ex ipsa demonstratione: tum ex ueteri translatione apparet. Totius autem demonstrationis series manifestior fiet ad hunc modum. Quoniam enim sicut b d ad b*
33. primi element. *k longitudine, ita d c ad k g potestate; hoc est ad d f, quæ est æqualis ipsi k g: ut autem b d ad b*
k, ita b c ad b i: & ut d c ad f d, ita c b ad b h. quare sicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d
2. sexti. 11. quinti. *f; hoc est b c ad b h potestate. lineæ igitur b c, b h, b i proportionales sunt. & si quidē linea f h secet*
20. sexti. *c b intra sectionem: erit sicut b c ad b h, ita b h ad b i; hoc est sicut totum ad totum, ita pars ad*
19. quinti. *partem. ergo c h ad h i, ut b c ad b h: hoc est reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. si uero secet extra, quoniam b h ad b c est, sicut b i ad b h: erit componendo b h & b c; hoc est c h ad b c, sicut b i, & b h, hoc est sicut h i ad b h: & permutando c h ad h i, sicut b c ad b h. Itaque*
11. quinti. *cum sit sicut d c ad d f, ita b c ad b h, ut dictum est: & sicut b c ad b h, ita c h ad h i: erit sicut d c ad d f, ita c h ad h i. sed h f ad h g est, sicut c h ad h i: quoniam duo triangula c h f, i h g. cū*
4. sexti. *æquiangula sint, latera habent proportionalia. Eandem igitur proportionem habet d c ad d f; hoc est d a ad d f, quam f h ad h g: quod demonstrare oportebat.*

IN PROPOSITIONEM V.

A Quoniam igitur est rectanguli coni sectio a b c: & ducta est b d æquidistans diametro: lineæ autem a d, d c sunt æquales inter se se: erit linea, quæ in b puncto tangit rectanguli coni sectionem, ipsi a c æquidistans.] *Linea b d, uel æquidistans est diametro, uel ipsa diameter. sequitur autem id ex secunda parte primæ huius.*

B Rursus quoniam d e æquidistans est diametro: & à puncto c ducta est c e tangens sectionem coni in c, &c.] *ex secunda huius.*

C Quoniam enim æqualis est b e ipsi b d: æqualis est & i l ipsi k i.] *Ducta enim b c linea, & producta, fient triangula c b e, c i l æquiangula: & item æquiangula c d b, c k i: & ipsa*
4. sexti. *c d e, c k l. quare sicut b e ad i l, ita c e ad c l: & sicut c e ad c l, ita c d ad c k. sicut autem c*
11. quinti. *d ad c k, ita d b ad k i. ergo sicut b e ad i l, ita d b ad k i: & permutando, sicut b e ad d b, ita*
14. quinti. *i l ad k i. sed b e æqualis est ipsi d b: & i l igitur ipsi k i est æqualis.*

D Habet autem & k i ad h k eandem, quam d a ad a k.] *Est enim ex antecedente k i*
19. quinti. *ad h i, ut d a ad d k: & permutando k i ad d a, ut h i ad d k. quare h k ad a k, ut k i ad d a: & rursus permutando, conuertendoq; k i ad h k, ut d a ad a k.*

E Quare eandem habet proportionem k h ad h l, quam a k ad k c.] *Hoc loco, ut opinor, multa desunt, ad demonstrationem necessaria, seu uitio temporis intercepta, seu ab ipsomet auctore omissa, quæ nos ita supplebimus. Quoniam enim l i ad i k est, ut c d ad d a: erit componendo k l ad k i, ut a c ad d a: & permutando k l ad a c, ut k i, ad d a. & rursus quoniam k i ad h k est,*
11. quinti. *ut d a ad a k. permutando erit k i ad d a, ut h k ad a k. quare sicut k l ad a c, sic erit h k ad a*
19. quinti. *k & sic h l ad k c. & rursus permutando k h ad h l, ut a k ad k c: quod fuerat ostendendum.*

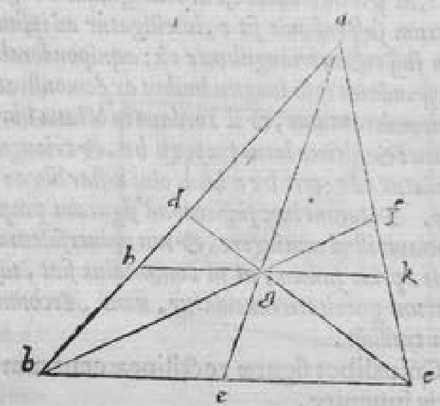
IN PROPOSITIONEM VI.

A Et sit conspectum in plano super horizontem erecto.] *Quod græci, ὀρθὸν latine, ut*
ὀρθὸν *opinor, dicemus directum, uel erectum ad perpendiculum, nos tamen breuitatis caussa, quoniam*

illud ſæpiſſime occurrit, præſertim in libro de conoidibus, & ſphæroidibus: uno duntaxat uerbo expreſſimus, erectum ubique uertentes.

Erit trianguli b c d centrum grauitatis ipſum h punctum; nam monſtratum eſt hoc in mechanicis.] *Sit triangulum a b c, & ducatur ab angulis ad bipartitiones laterum rectæ lineæ a e, b f, c d. perſpicuum eſt centrum grauitatis trianguli a b c eſſe ipſum g; in quo uidelicet lineæ illæ coeunt, ex duodecima primi libri de æquiponderantibus: & triangula a g b, b g c, c g a eſſe æqualia inter ſe ſe. ſunt enim duo triangula a e b, a e c æqualia; quòd baſes æquales habeant, & ab eodem ſint uertice: & duo item triangula g e b, g e c æqualia. quare ſi à triangulo a e b auferatur triangulum g e b: & à triágulo a e c auferatur ipſum g e c: erunt reſidua æqualia, uidelicet triangula a g b, a g c. Et eadem ratione, ſi à duobus triangulis æqualibus b f c, b f a auferantur æqualia g f c, g f a; erit reliquum triangulum b g c reliquo b g a æquale. & per communem conceptionem triangulum b g c æquale triangulo a g c: & omnia triangula a g b, b g c, c g a inter ſe ſe æqualia. triangulum ergo b a g duplum eſt trianguli b g e; & propterea baſis a g dupla ipſius g e. non aliter monſtrabimus lineam b g duplam lineæ g f: & lineam c g ipſius g d duplam. Itaque ſi per g ducatur linea æquidiſtans ipſi b c, quæ ſit h k: erit & a h dupla lineæ h b, & a k dupla k c. Quare generaliter, ſi quodlibet latus trianguli ſecetur ita, ut portio ad uerticem dupla ſit portionis ad baſim: & per punctum ſectionis ducatur linea æquidiſtans baſi; centrum grauitatis ipſius trianguli erit in linea ducta, atque in eius puncto medio: quod monſtrare oportebat.*

1. ſexti



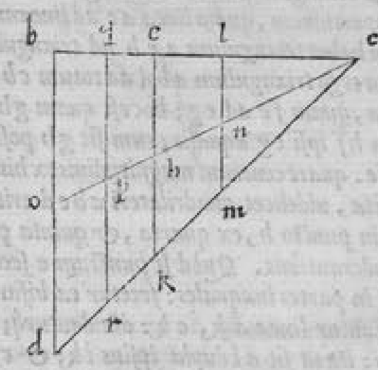
2. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex his ſequitur uniuſcuiuſque trianguli centrum grauitatis eſſe in linea ab angulo ad dimidiam baſim ducta; & in eo lineæ puncto, quo ipſa ſic diuiditur, ut portio ad uerticem dupla ſit portionis ad baſim.

Si igitur b d c trianguli ſuſpenſio, quæ eſt ad b c, ſoluatur; & ſuſpendatur ad e: manebit triangulum, ut nunc habet. unumquodque enim ſuſpenſorum, ex quo puncto conſtitutum eſt, manet; cum in linea perpendiculari ſit punctum ſuſpenſionis, & centrum grauitatis ſuſpenſi; quod etiam eſt demonſtratum.] *Secetur rurſus linea e c in l ita, ut c l dupla ſit ipſius l e: ducaturq́; l m æquidiſtans b d: & ſecetur bifariam in puncto n. erit eadem ratione trianguli e c k centrum grauitatis ipſum n: & ducta linea à puncto c ad dimidium lateris b d, in quo ſit o, tranſibit per utraque puncta n h; eſt enim utriuſque triangulorum b c d, e c k centrum grauitatis in linea c o, ex undecima primi de æquiponderantibus. Quòd ſi fiat, ut b l ad l c, ita n h ad h p: erit ipſum p centrum grauitatis trapezij b e k d. nam quoniam c e poſita eſt ipſius e b dupla: & c l etiam dupla ipſius l c: habebit b c ad c e eandem proportionem, quam c e ad c l. quare triangulum b c d ad triangulum e c k ſibi ſimile habebit eam, quam linea b c ad lineam c l: & diuidendo; conuertendo ue, triangulum e c k ad trapezium b e k d, eam habebit, quam linea c l ad lineam l b; hoc eſt, quam linea p h ad h n. & quoniam à triangulo b c d abſcinditur triangulum e c k, quod non habet idem centrum grauitatis: erit centrum reſidui,*

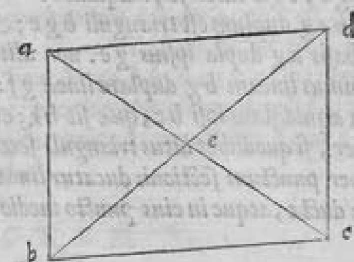
C



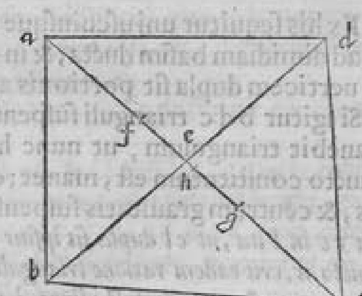
19. ſexti.

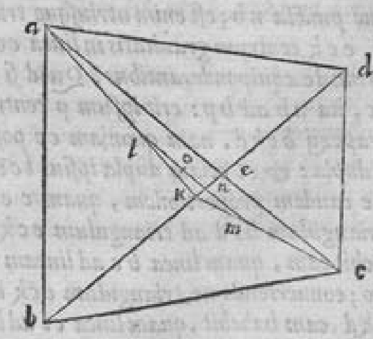
hoc est trapezij b e k d in linea n h; atque in puncto p: cum sit p h ad h n, ut triangulum e c k ad
trapezium b e k d, ex sexta eiusdem de æquiponderantibus. Dico igitur triangulum b c d, si suspen
datur ad e punctum existens in eadem perpendiculari, in qua est centrum grauitatis h, mansu-
4. sexti. *rum, ut nunc manet, ducta nanque per p linea q p r, æquidistanti ipsi b d, erit ob triangulorum*
19.quinti. *similitudinem, ut q e ad e p, ita e c ad c h: & ita reliqua q e ad reliquam p h. Rursus ut e c ad*
c h, ita l c ad c n: & reliqua e l ad h n. quare q e ad p h erit, ut e l ad h n: & permutando, q e
ad e l, ut p h ad h n, hoc est ut triangulum e c k ad trapezium b e k d. si igitur in libra q e l, cuius
centrum suspensionis sit e, intelligatur ad ipsum quidem q suspensum esse trapezium b e k d; ad l
uero suspensum triangulum e c k; æquiponderabit alterum alteri; quod magnitudines ex altera par
te respondeant ipsis longitudinibus ex demonstratis ab Archimede in quarta, & quinta primi de
æquiponderantibus, & à Iordano in octaua libri de ponderibus. manebit ergo libra horizonti æqui-
distans: & idcirco latus trapezij b e, & trianguli e c manebit. quare si totum triangulum b c d su
spendatur ad e; erit b e c latus eius instar libræ: & manebit, ut manet; quod demonstrare uoleba-
mus. Poterant hæc sufficere ad figuram propositam. uerum quoniam Archimedes uniuerse pro-
nunciauit illud contingere, & nos uniuersalem afferemus demonstrationem in omnibus figuris recti
lineis. prius tamen, ut id commodius fiat, uisum est docere, quo pacto in omni figura rectilinea
centrum grauitatis inueniatur. nam Archimedes in libro de æquiponderantibus elementa tan-
tum tradidit.

Cuiuslibet figuræ rectilineæ centrum grauitatis inuenire.



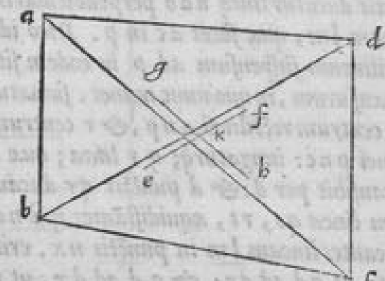
IN triangulo, qua ratione illud inueniatur satis
constat ex duodecima primi de æquiponderantibus, &
ex ijs, quæ nos supra scripsimus: Sed sit quadrilaterum
a b c d, cuius oporteat centrum grauitatis inuenire; &
& ducantur diametri a c, b d secantes se se in e. Et si
quidem quadrilaterum parallelogrammum sit, centrũ
grauitatis eius erit in puncto e; quod ostendit Archime
des in octaua eiusdem libri. Si uero non sit parallelo-
grammum; & tamen punctum e secet ipsam b d dia-
metrum in partes æquales: diuidatur linea a e in f, ita
ut a f sit dupla f e: & similiter linea c e diuidatur in
g, ut c g ipsius g e sit dupla: diuidatur quoque g f in h,
ut g h æqualis sit ipsi f e. Dico iam punctum h cen-
trum esse grauitatis quadrilateri a b c d. est enim f cen
trum grauitatis trianguli a b d: & g item grauitatis
15.quinti. *centrum trianguli c b d, ut supra ostendimus. habet au*
tem f e ad e g eam proportionem, quam a e ad e c;
cum sit f e tertia pars ipsius a e, & e g tertia ipsius e
1. sexti. *c; & triangulum a e d ad triangulum e d c eam habet*
proportionem, quam linea a e ad lineam e c: & ean-
12.quinti. *dem habet triangulum a e b ad triangulum e b c. to-*
tum ergo triangulum a b d ad totum c b d habebit eã
dem, quam f e ad e g; hoc est quam g h ad h f: est e-
nim h f ipsi e g æqualis; cum sit g h posita æqualis ip
si f e. quare centrum magnitudinis ex his triangulis cõ-
positæ, uidelicet quadrilateri a b c d erit in linea f g,
& in puncto h, ex quarta, & quinta primi de æqui-
ponderantibus. Quod si punctum e secet diametrum
b d in partes inæquales: secetur ea bifariam in k: &
ducantur lineæ a k, c k: diuidanturq; in l m pun-
ctis; ita ut sit a l dupla ipsius l k; & c m item dupla
m k: & iungantur l m linea, quæ secet b d in n; &
fiat m o æqualis ipsi l n. Dico punctum o esse centrum
2. sexti. *grauitatis ipsius quadrilateri. Quoniam enim posui-*



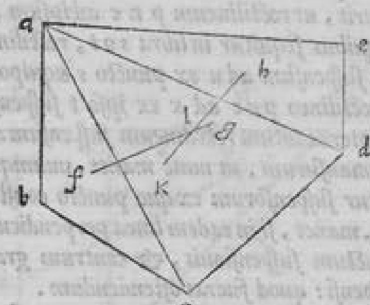


mus k l ad l a eam habere proportionem, quam k m ad m c: æquidistabit linea l m lineæ a c; & erit triangulum k n l simile triangulo k e a; & triangulum k n m simile ipsi k e c. est igitur l n ad n k, ut a e ad e k: & n k ad n m, ut e k ad e c. quare ex æquali l n ad n m, ut a e ad e c. ut autem l n ad n m, ita m o ad o l: & ut a e ad e c, ita triangulum a b d ad triangulū c b d. ut ergo triangulum a b d ad triangulum c b d, ita m o ad o l. Itaque cum sit l centrum grauitatis trianguli a b d: & m centrum trianguli c b d; eadem ratione totius quadrilateri centrum grauitatis erit in linea l m, & in o puncto.

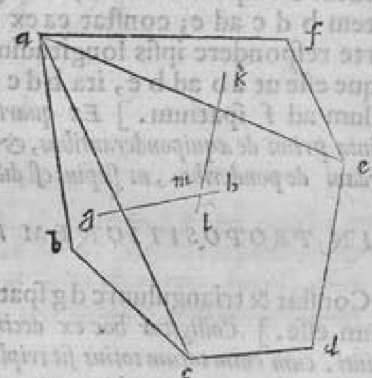
ALITER. Sit quadrilaterum a b c d; ducanturq; a c, b d: & sit trianguli a b c centrum grauitatis e: trianguli autem a d c centrum sit ipsum f. erit centrum magnitudinis ex his compositæ in linea ducta ab e ad f. rursus sit g centrum grauitatis trianguli a d b; & h centrum trianguli d b c; & ducatur g h secans lineam e f in k. erit & eiusdem magnitudinis, hoc est quadrilateri a b c d centrum grauitatis in linea g h. quare in puncto k; in quo uidelicet ipsæ lineæ conueniunt.



Sit pentagonum a b c d e; & ducantur a c, a d: trianguli autem a b c centrum grauitatis sit f: & quadrilateri a c d e sit centrum g: & iungantur f g. rursus trianguli a d e centrum sit h; & quadrilateri a b c d centrum k; & ducatur h k secans lineam f g in l. Dico l centrum esse grauitatis ipsius pentagoni: erit enim totius magnitudinis compositæ centrum in linea f g, & in linea h k. ergo in puncto l; in quo scilicet ipsæ conueniunt.



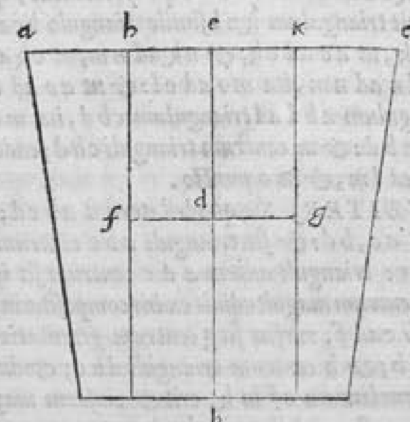
Sit Hexagonum a b c d e f: & ducantur a c, a e: sitq; trianguli a b c centrum grauitatis g: & pentagoni a c d e f centrum sumatur, quod sit h: & ducatur g h. rursus centrum trianguli a e f sit k; & pentagoni a b c d e sit l: & ducatur k l, quæ secet ipsam g h in m. erit eadem ratione punctum m centrum grauitatis totius hexagoni. Non aliter in heptagono, octagono, & in alijs, quæ deinceps sunt, centrum grauitatis inuenietur: quod facere oportebat.

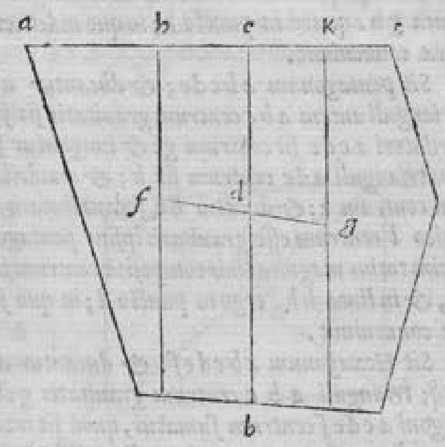


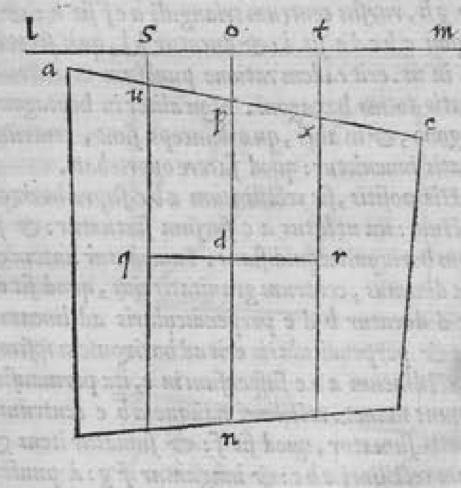
His positis, sit rectilineum a b c supra horizontem erectum: ita ut latus a c sursum statuatur: & sit primum horizonti æquidistans. Inueniatur autem ex ijs, quæ diximus, centrum grauitatis eius, quod sit d: & per d ducatur b d e perpendicularis ad lineam a c, quæ & perpendicularis erit ad horizontem ipsum. Dico rectilineum a b c suspensum in e, ita permansurum, ut nunc manet. rectilinei nanque a b e centrum grauitatis sumatur, quod sit f: & sumatur item g centrum rectilinei e b c: & iungantur f g: à punctis uero f g ad lineam a c ducantur f h, g k æquidistantes ipsi b e. transibit igitur linea f g per d: & habebit f d ad d g proportionem eam, quam rectilineum e b c ad rectilineum a b e, ex sexta primi de æquiponderantibus. & rursus quam proportionem habet f d ad d g, eam habebit h e ad e k. si enim æquidistent lineæ f g, a c: erit h e æqualis ipsi f d; & e k ipsi d g. si uero non æquidistent: coibunt inter sese, uel ad partes a, uel ad partes c. quocunque autem modo id fiat: secabuntur ipsæ secundum eandem proportionem à lineis æquidistantibus h f, e d, k g, ut supra ostendimus: & idcirco erit h e ad e k, ut f d ad d g; hoc est, ut rectilineum e b c ad ipsum a b e. si ergo in libra h e k rectilineum

quidem

quidem a b c suspendatur ad punctum b: rectilineum uero e b c ad k; æquiponderabunt inter sese, ex iam dictis: & manebit libra, ut manet. Quare si totum rectilineum a b c ex his constans suspendatur ad e: & ipsum quoque permanebit in eodem situ, in quo positum fuerat. Quòd si latus a c non æquidistet horizonti: intelligatur ipsa linea l m horizonti æquidistans; & rursus per d centrum grauitatis ducatur linea n d o perpendicularis ad lineam l m, quæ secet a c in p. Dico idem rectilineum suspensum ad p in eodem situ permansurum, in quo nunc manet. sumatur enim q centrum rectilinei a n p, & r centrum rectilinei p n c: iungaturq; q r linea; quæ & ipsa transibit per d: & à punctis q r ducantur ad l m lineæ q s, r t, æquidistantes ipsi n d o, & secantes lineam l m in punctis u x. erit s o ad o t, ut q d ad d r; & q d ad d r, ut rectilineum p n c ad rectilineum a n p. quare s o ad o t erit, ut rectilineum p n c ad ipsum a n p. ex quibus sequitur in libra s o t, rectilineum a n p suspensum ad u ex puncto s æquiponderare rectilineo p n c ad x ex ipso t suspenso; & propterea totum rectilineum suspensum ad p ita permansurum, ut nunc manet. unumquodque igitur suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet, si in eadem linea perpendiculari sit punctum suspensionis, & centrum grauitatis suspensi: quod fuerat ostendendum.







D Et quoniam æquiponderant spatium quidem f suspensum ad a; triangulum autem b d c ad e; constat ea ex altera parte respondere ipsis longitudinibus, atque esse ut a b ad b e, ita b d c triangulum ad f spatium.] *Ex quarta, & quinta primi de æquiponderantibus, & octaua Iordani de ponderibus, ut sæpius est dictum.*

IN PROPOSITIONEM VII.

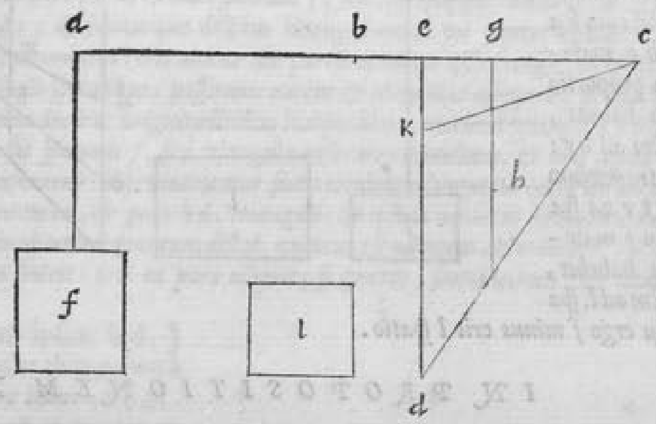
A Constat & triangulum c d g spatii f triplum esse.] *Colligitur hoc ex decimanona quinti. cum enim totum totius sit triplum; & ablatum ablati item triplum; & reliquum reliqui triplum erit.*

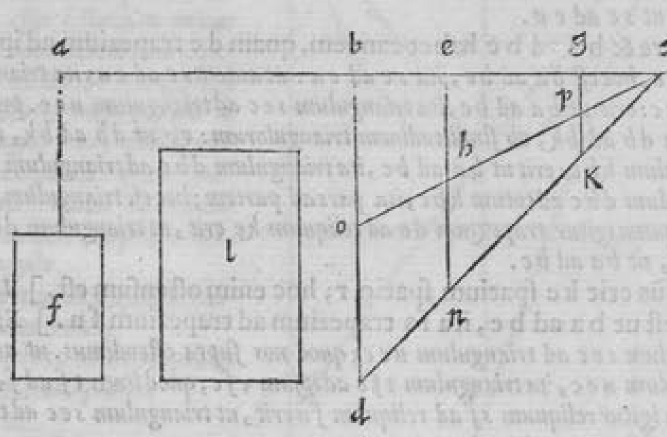
IN PROPOSITIONEM IX.

A Demonstrabitur hoc similiter antecedenti.] *Sumpto enim centro grauitatis trianguli c d k, quod sit h, & ducta h g æquidistanti ipsi d e, si suspensio fiat ad g: manebit triangulum, ut nunc manet, ex iam demonstratis; & habebit ad spatium f eandem proportionem, quam habet linea a b ad b g. quare triangulum c d k maius erit ipso f; quòd linea a b maior sit linea b g. & cum b g sit maior ipsa b e: erit & f spatium maius spatio l.*

IN PROPOSITIONEM X.

Trapezii igitur b d k g, centrum grauitatis est punctum h.] *Elicitur hoc ex ultima primi de æquiponderantibus. trapezij enim b d k g centrum grauitatis est in linea recta, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungit; atque in eo lineæ puncto, quo ita diuiditur, ut pars terminum habens minus laterum æquidistantium ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam utraque linea; æqualis duplæ maioris unà cum minori ad duplam minoris, unà cum maiori, secetur igitur latus b d bifariam in o: & ducatur o c secans g k in p. erit ut linea b o ad o c, ita g p ad p c, propter triangulorum similitudinem; & ut o c ad o d, ita p c ad p k. quare ex æquali ut b o ad o d, ita g p ad p k. sunt autem b o, o d æquales. & ipsæ ergo g p, p k æquales erunt. Eadem ratione ostendemus & lineam e n bifariam secari ab ipsa o c, uidelicet in puncto h. & cum p h ad h o eam proportionem habeat, quam g e ad e b, ut supra ostendimus, hoc est, quam dupla d b unà cum ipsa k g ad duplam k g unà cum d b: erit ipsum h centrum grauitatis trapezij b d k g.* A

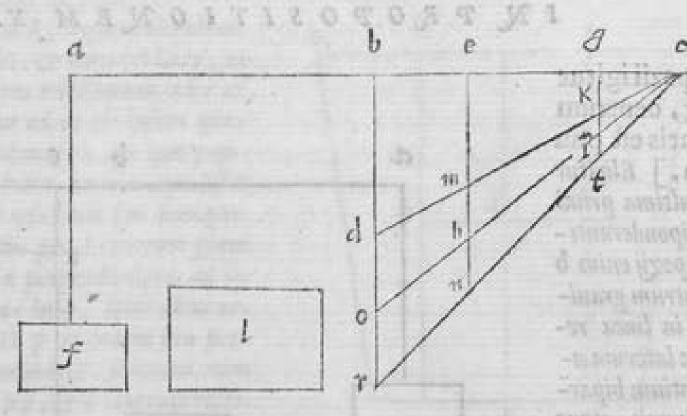




4. sexti.

IN PROPOSITIONEM XI.

Similiter iis, quæ dicta sunt, ostendetur spatium f minus esse spatio l.] *Secetur enim b c in e, ita ut g e ad e b eam habeat proportionem, quam dupla d r unà cum k t, habet ad duplam k t unà cum d r: & per e ducatur æquidistans ipsi b d r, quæ sit e m n: & diuidatur e m n bifariam in puncto h. erit trapezij d k t r centrum grauitatis ipsum h. nam ducta o p linea, quæ laterum æquidistantium bipartitiones iungat, transibit per h, ut proxime ostendimus: & p h ad h o eam proportionem habebit, quam g e ad e b. trapezium igitur d k t r si à punctis b g soluatur; & suspendatur ad e: manebit in eodem situ; & æquiponderabit spatio f. quare*



f. quare ut b a ad b e, ita erit trapezium d k t r ad f spatium. Quòd cum b a ad b e maiorem proportionem habeat, quàm ad b g: & trapezium d k t r ad spatium f maiorem habebit,
9.quinti. *quàm ad l. spatium ergo f minus erit l spatio.*

IN PROPOSITIONEM XIIII.

A Quare triplum erit b d e triangulum spatii r q z 9 λ.] *Ex sexta huius.*
B Eandem habet proportionem b c ad b e, quam s e ad e u.] *Est enim ex quinta huius b e, ad e c, ut e u ad u s: & conuertendo e c ad b e, ut u s ad e u. quare componendo b c ad b e, ut s e ad e u.*
C Quare & b a ad b e habet eandem, quam d e trapezium ad ipsum k e.] *Cum igitur*
1. sexti. *sit ut b c, hoc est b a ad b e, ita s e ad e u: ut autem s e ad e u, ita triangulum s e c ad triangu-*
11.quinti. *lum u e c: erit ut b a ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c. præterea cum sit ut s e ad*
4. sexti. *e u, ita d b ad b k, ob similitudinem triangulorum: & ut d b ad b k, ita triangulum d b c ad triangulum k b c: erit ut b a ad b e, ita triangulum d b c ad triangulum k b c. Quare sicut totum triangulum d b c ad totum k b c, ita pars ad partem; hoc est triangulum s e c ad triangulum u e c.*
19.quinti. *& reliquum igitur trapezium d e ad reliquum k e erit, ut triangulum d b c ad triangulum k b c; hoc est, ut b a ad b e.*
D Maius erit k e spatium spatio r; hoc enim ostensum est.] *In decima huius.*
E Et est ut b a ad b e, ita f s trapezium ad trapezium f u.] *Est enim ut a b ad b e, ita triangulum s e c ad triangulum u e c; quod nos supra ostendimus. ut autem triangulum s e c ad*
4. sexti. *triangulum u e c, ita triangulum t f c ad ipsum ς f c; quòd linea t f ad f ς sit, ut s e ad e u. tra-*
19.quinti. *pezium igitur reliquum s f ad reliquum f u erit, ut triangulum s e c ad triangulum u e c. hoc est ut a b ad b e.*
F Spatium igitur q trapezio quidem l f minus est, trapezio autem f u maius; nanque & hoc ostensum est.] *In duodecima huius.*
G Similiter etiam λ spatium triangulo x i c minus est, & triangulo c i o maius.] *Nam ut b i ad i c, ita i o ad o x, ex quinta huius: & conuertendo, componendo ue, ut b c, hoc est, ut a b ad b i, ita x i ad i o: ut autem x i ad i o, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. quare ut a b ad b i, ita triangulum x i c ad triangulum o i c. Et quoniam triangulum x i c æquiponderat λ spatio: & quam proportionem habet a b ad b i, eandem triangulum x i c habet ad triangulum o i c: erit ex octaua huius spatium λ minus triangulo x i c, maius autem triangulo o i c.*

IN PROPOSITIONEM XV.

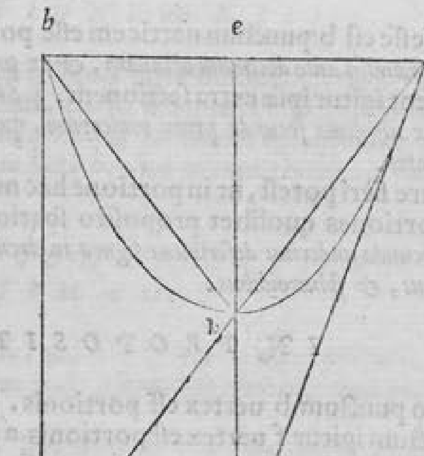
A Quare d b c triangulum triplum erit spatii r q z 9 λ.] *Ex septima huius.*
B Similiter ut prius ostendetur, b u trapezium spatio r maius.] *Ex undecima huius.*
C Et trapezium h e maius spatio q: trapezium autem f u minus eodem.] *Ex tertiadecima. Quod uero reliquum est, ut in proxima propositione concludemus.*

IN PROPOSITIONEM XVI.

Poteſt autem ſumi aliquod ſpatium minus dicto exceſſu, quod ſit pars trianguli b d c.] *Nam ſi exceſſus, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſibi ipſi eouſque coaceruetur, quouſque ſuperet triangulum b d c: diuidaturque dictum triangulum in tot partes æquales, quoties exceſſus ſibi ipſi fuerit coaceruatus: erit una ex illis partibus minor ipſo exceſſu, ut docetur in quarta propoſitione libri de lineis ſpiralibus. poſſumus autem & idem illud aſſequi ex prima decimi elementorum. expoſitis enim duabus magnitudinibus inæqualibus, uidelicet triangulo b d c, & exceſſu, quo b h c portio excedit ſpatium f, ſi à triangulo auferatur dimidium: & eius, quod reliquum eſt, rurſus dimidium auferatur: idq; continenter fiat: tandem relinquetur quædam magnitudo minor dicto exceſſu. erit autem ea, & pars b d c trianguli: & ipſum metietur ſecundum numerum, qui in dupla proportione ab unitate tantum diſtat, quantus eſt numerus ablationum. Vt exempli gratia ſi ablatio ter facta fuerit: erit ea pars octaua; ſi quater, ſextadecima: & deinceps eodem modo.* A

Erit & b e pars eadem ipſius b d.] *Quam enim proportionem habet triangulum b c e ad ipſum b c d, eandem & e habet ad b d.* B 1. ſexti.

Spatium ergo f minus eſt trapeziis m l, x r, p h, & triangulo p o c.] *Nam cum triangulum b c e, & ſpatium f ſint minora portione b h c: ſi ab ea auferrems ſpatium æquale triangulo b c e: eſſet f ſpatium minus eo, quod relinqueretur. nunc autem cum à portione auferatur minus, quàm ſit triangulum b c e; auferuntur enim partes trapeziorum m e, u l, h r, h o, & trianguli c o s, quibus omnibus eſt æquale b e c triangulum: multo magis ſequitur, ut ſpatium f minus ſit reſiduo ipſius portionis, quod conſtat trapezijs m l, x r, p h, & p c o triangulo.* C



Oſtenſum eſt enim maius, quàm triplum.] *In decima quarta huius.* D

Et dictorum ſpatiorum minus, quàm triplum.] *In eadem decima quarta.* E

IN PROPOSITIONEM XVII.

Recta linea ab h ducta æquidiſtans diametro bifariam ſecat ipſam b c, & b c æquidiſtans eſt lineæ ſectionem tangenti in h.] *Fit enim ipſa h e portionis diameter. quare ex prima huius ſequitur, b c æquidiſtare lineæ coni ſectionem in puncto h tangenti.* A

Triangulum b d c quadruplum eſt b h c trianguli.] *Sequitur nanque ex ſecunda huius, lineas e h, h k æquales eſſe. quare ducta c h & producta ad ipſam b d in f, erunt & b f, f d æquales, ob ſimilitudinem triangulorum: & propterea ipſa triangula c b f, c f d æqualia. Rurſus cum ſint c e, e b æquales: & ipſæ c h, h f æquales erunt: & triangula æqualia b h c, b h f. eſt igitur triangulum* B 4. ſexti. 1. ſexti. 2. ſexti.

b h b d c

b d c ipsius b h c quadruplum, ut proponebatur.

C Portionum quæ recta, & curua linea continentur &c.] *Hactenus ostendit Archimedes, quomodo paraboles quadratura per mechanicas, ut ipse ait, rationes fuerit inuenta. Nunc rursus eandem ipsam rationibus geometricis demonstrare aggreditur.*

IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Constat lineam a c æquidistantem esse ei, quæ in b coni sectionem contingit.] *Ex prima huius.*

IN PROPOSITIONEM XIX.

A Manifestum est eandem habere proportionem b d ad b h longitudine, quam a d ad f h potestate.] *Ex tertia huius.*

IN PROPOSITIONEM XX.

A Necesse est b punctum uerticem esse portionis. æquidistans est igitur &c.] *Ex ijs quæ præmisit ante decimam octauam, & ex prima huius.*

B Cadent igitur ipsæ extra sectionem.] *Si enim intra sectionem caderent: coirent cum diametro ex uigesima secunda primi conicorum, quod est absurdum; cum ponantur diametro æquidistantes.*

C Quare fieri potest, ut in portione hac multiangula figura describatur; ita ut reliquæ portiones quolibet proposito spatio sint minores.] *Ex prima decimi, quo pacto in secunda undecimi describitur figura in circulo, & à nobis in ellipsi, propositione quinta de conoidibus, & sphæroidibus.*

IN PROPOSITIONEM XXI.

A Ergo punctum b uertex est portionis.] *Ex decima octaua huius.*

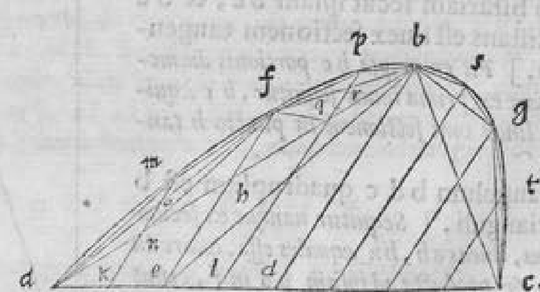
B Punctum igitur f uertex est portionis a f b.] *Ex eadem decima octaua. est enim a h ad*

2. sexti. *h b, ut a e ad e d. quæ cum sint æquales inter se, & ipsæ a h, h b æquales erunt.*

C Est enim b d ipsius quidem e f sesquitertia; ipsius autem e h dupla.] *Primum pa-*

4. sexti. *tet ex decima nona: secundum uero demonstrabitur hoc pacto. Quoniam triangula a b d, a h e, sunt æquiangula: erit sicut a d ad d b, ita a e ad e h: & permutando sicut a d ad a e, sic d b ad e h. quare cum dupla sit a d ipsius a e, ex positione: dupla quoque erit, & d b ipsius e h.*

D Quare & a e b triangulum duplum est trianguli f b a.] *Colligitur hoc ex duodecima quinti. Quòd si rursus in reliquis portionibus a f, f b, b g, g c triangula eodem modo describantur: erunt utraque triangula a f b, b g c eorum triangulorum quadrupla. secentur enim bifariam a e, e d in punctis k l: ducaturq; k m diametro æquidistans, & secans a h in puncto n; & a f in o: & ducatur l p itidem diametro æquidistans, quæ secet h b in q; & f b in r. Itaque quoniam in triangulo a e f ducta est k o, ipsi e f æquidistans: erit a o ad o f, ut a k ad k e. æquales igitur sunt a o,*



o f: & m punctum uertex est portionis a m f, ex decima octaua huius. Rursus quoniam in triangulo a d b ducuntur e f, l p æquidistantes ipsi d b: erit ut e l ad l d, ita h q ad q b. quare æquales erunt

erunt h q, q b: idcircoq; & ipsæ f r, r b æquales: & punctum p uertex portionis f p b. triangula igitur a m f, f p b eandem basim, & altitudinem eandem habebunt portionibus, in quibus describuntur. Dico triangulum a f b quadruplum esse triangulorum a m f, f p b. est enim linea f b diameter uidelicet portionis a f b, sesquitertia lineæ m n, ex decima nona huius; & dupla ipsius n o. quare & n o ipsius o m dupla: & ob eandem caussam q r dupla est ipsius r p. ductis igitur lineis f n, n q, erit triangulum f n o duplum trianguli f o m: & triangulum a o n duplum trianguli a o m. 1. sexti.
quare triangulum a n f duplum erit ipsius a m f. est autem a n f quarta pars trianguli a f b. Eadem quoque ratione ostendetur, & triangulum f b q, quod item est quarta pars eiusdem trianguli a f b, duplum esse ipsius f p b. totum ergo triangulum a f b, triangulorum a m f, f p b quadruplum erit. Non aliter ostendemus triangulum b g c quadruplum esse triangulorum b s g, g t c, in reliquis portionibus b g, g c descriptorum. ex quibus sequitur, utraque triangula a f b, b g c triangulorum omnium a m f, f p b, b s g, g t c quadrupla esse: quod demonstrare oportebat. 12. quinti. 12. quinti.

Similiter quoque ostendentur triangula a m f, f p b, b s g, g t c quadrupla esse triangulorum eorum, quæ in reliquis portionibus describuntur: & ita deinceps in aliis.

IN PROPOSITIONEM XXII.

Similiter autem ostendetur triangula in reliquis portionibus descripta, eandem basim habentia ipsis, & altitudinem eandem, spatio h æqualia esse.] *Ostendimus enim in antecedenti triangula a d b, b e c, triangulorum in reliquis portionibus descriptorum quadrupla esse. Quare cum spatium q ponatur quadruplum spatij h: erunt triangula in reliquis portionibus descripta, ipsi h spatio æqualia.*

IN PROPOSITIONEM XXIIII, ET VLTIMAM.

A Vnde sequitur omnia spatia minora esse, quàm sesquitertia maximi spatii.] *Sunt enim omnia spatia unà cum tertia parte minimi spatij sesquitertia maximi, quod proxime est demonstratum.*

B Et k spatium sesquitertium spatii f.] *Positum nanque est f spatium æquale triangulo a b c, & spatium k eiusdem trianguli a b c sesquitertium.*

C Et quoniam spatium k excedit f g, h i spatia minori excessu, quàm sit i.] *Excedit enim tertia tantum parte ipsius i spatij: quod etiam est demonstratum.*

EIVSDEM COMMENTARIVS,

IN LIBRVM DE CONOIDIBVS,

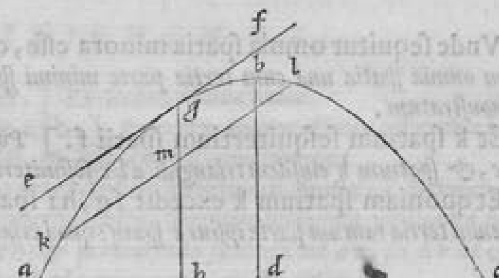
ET SPHAEROIDIBVS.

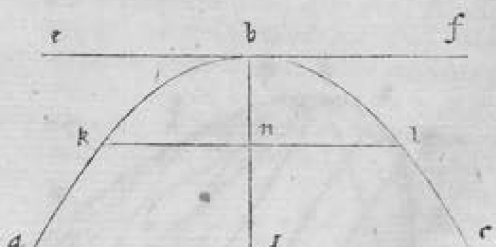
A SI RECTANGVLI coni sectio &c.] *Diximus supra rectanguli coni sectionem posteriores parabolen appellasse, atque huius ipsius caussam ex Eutocio attulimus.*

B Conoides rectangulum appellari.] *Nos non ineptæ, ut opinor, ob illud ipsum conoides parabolicum appellabimus, & eodem modo conoides hyperbolicum, quod obtusiangulum uocat Archimedes. Quæ utraque non aliter, quàm parabole, & hyperbole, ita intelligi oportet, ut in infinitum augeantur.*

Conoidea in infinitū augentur.

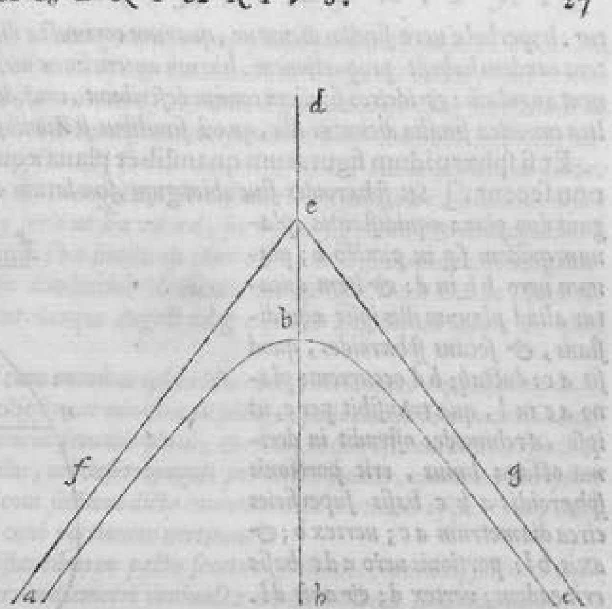
C Verticem punctum, in quo alterum planum conoides contingit; axem uero rectam lineam intra portionem receptam, ex ea, quæ per uerticem portionis ducta sit axi conoidis æquidistans.] *Videntur hæc dicta de portione conoidis rectanguli, seu parabolici abscissa plano non erecto super axem: ea enim, quæ abscinditur plano super axem erecto, uerticem habet eundem, quem conoides; & axem axis conoidis partem, intra portionem receptam. Hoc autem idcirco contingit in portione conoidis parabolici de axe, quòd in portione paraboles idem contingat de diametro: nam si parabole abscindatur linea recta, quæ cum diametro eius rectos contineat angulos; uertex idem est in utraque: diameter uero portionis, diametri sectionis pars est. sin minus, uertex portionis est punctum illud, in quo altera linea parabolen tangit, lineæ abscindenti æquidistans; diameter uero linea, quæ ab eo puncto ducitur æquidistans ipsi paraboles diametro: quod ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij abunde colligitur. Vt autem ea, quæ hoc loco dicuntur, dilucidiora fiant. Sit conoides parabolicum a b c, cuius axis b d: & planum cuius recta linea e f, illud tangat in puncto g: & à g demittatur linea g h, æquidistans ipsi b d: rursus ducatur aliud planum conoides abscindens, æquidistansq; alteri k l; cui linea g h occurrat in puncto m. erit portio conoidis parabolici k g l abscissa plano non erecto super axem; cuius basis superficies circa diametrum k l; uertex uero g; & axis g m. Quòd si planum e f tangat conoides in b puncto: ducto altero plano ei æquidistanti k l, cui axis b d occurrat in n, erit k b l portio abscissa plano super axem erecto; & eius basis superficies k l; uertexq; b: & axis b n. Et si idem conoides parabolicum a b c scindatur plano per axem, & per ipsam g h ducto: fiet sectio a b c parabole figuram describens, ut infra ostendetur: & erit paraboles portionis k g l, basis linea k l; uertex g; & diameter g m. & similiter portionis paraboles k b l, basis k l; uertex b; & diameter b n.*



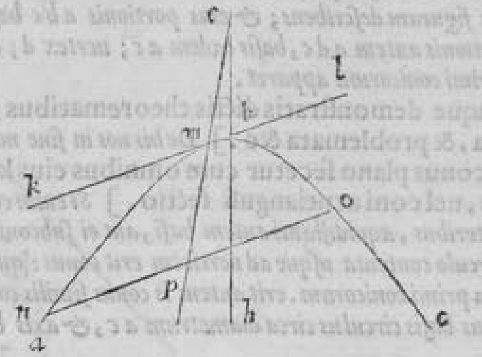


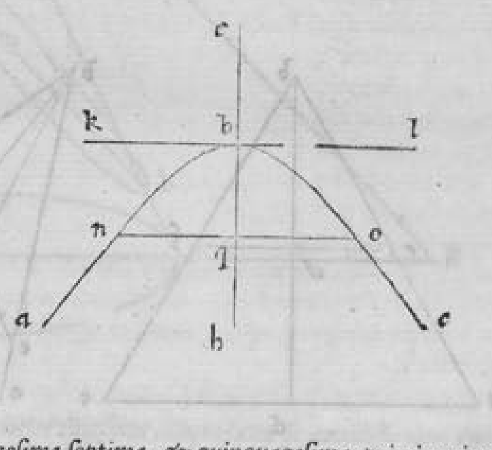
D Si in eodem plano sint obtusianguli coni sectio, eiusq; diameter, & lineæ, quæ sunt proximæ coni obtusianguli sectioni, &c.] *Lineæ sectioni coni obtusianguli proximæ apud Archimedē sunt, ut opinor, quas Apollonius appellat* ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ, *hoc est non coeuntes cum sectione. Sit enim coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c: & eius figuræ latus transuersum b d bifariam secetur in puncto e; quod Apollonius hyperboles centrum uocat: atque ab eo ducantur lineæ non coeuntes cum sectione e f, e g, ut idem docuit Apollonius in prima secundi conicorum.*

conicorum. Si igitur omnes hæ lineæ sint in eodem plano: & manente diametro b h, circumducatur planum quousque redeat in eum locum, à quo cœpit moueri: manifestum est liceas e f, e g conum comprehendere æquicrurem, quem Archimedes conum conoides continentem appellat; cuius uertex est e, & axis e h: & insuper hyperbolen a b c comprehendere figuram, quam ille conoides obtusiangulum, nos hyperbolicum dicemus; cuius uertex b, & axis b h: linea uero e b erit, quam ad axem adiectam uocat Archimedes, Apollonius in hyperbole eam, quæ ex centro appellat.



Et si obtusiangulum conoides planum contingat &c.] *Sit conoides obtusiangulum, seu hyperbolicum a b c, ut in proxima figura: atque ipsum tangat planum k l in puncto m: intelligatur item aliud planum ei æquidistans; & conoides secans, n o: ductaq; e m linea, & producta occurrat plano n o in p. erit portionis conoidis m n o abscissæ plano super axem non erecto, basis superficies circa diametrum, n o; uertex m; & axis m p; linea uero ad axem adiecta m e. Sed si planum k l tangat conoides in puncto b: ducaturq; aliud planum ei æquidistans n o, cui axis b h occurrat in q: erit portionis n b o abscissæ plano super axem erecto, basis superficies circa diametrum n o; uertex b; & axis b q; lineaq; ad axem adiecta, eadem, quæ conoidis, hoc est ipsa b e. Fit autem hoc in portione conoidis hyperbolici; quòd & in portione hyperboles idé fiat. Si enim conoides hyperbolicum a b c secetur plano per axem, perq; lineam e p ducto: fiet a b c sectio, hyperbole, quæ figuram describit, ut etiam ostendemus: & erit n m o hyperboles portionis, basis n o; uertex m: & m p diameter; linea uero m e ea, quæ ex centro: quod ex quadragesima septima, & quinquagesima primi conicorum apertissime constat: & ita portionis hyperboles n b o, basis n o; uertex b; diameter b q; & b e ea, quæ ex centro.*



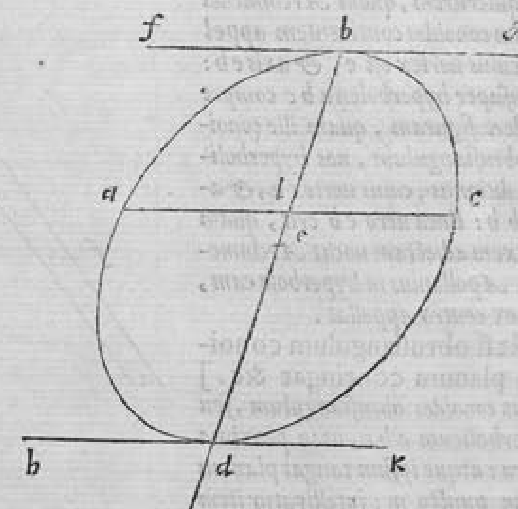


h bo

Omnia conoidea rectangula sunt similia, obtusiangulorum uerò conoideon &c.] F
Parabolæ enim omnes similes sunt, à quibus rectangula, hoc est parabolica conoidea describuntur Parabolæ omnes similes

Hyperbolæ similes Conoidea hyperbolica similia. *tur. hyperbolæ uero similes dicuntur, quarum coniunctæ diametri inter se, uel quarum figuræ latera eandem habent proportionem. harum autem lineæ non coeuntes cum sectione æqualem continent angulum: & idcirco similem conum describunt, conoides ipsum continentem: recteq; hyperbolica conoidea similia dicuntur illa, quæ à similibus sectionibus ortum habent.*

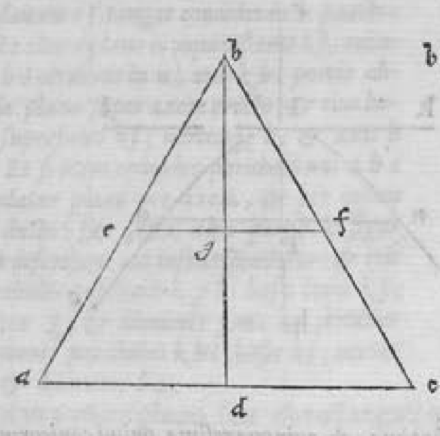
G Et si sphæroidum figurarum quamlibet plana æquidistantia contingant, quæ ipsas non secent.] *Sit sphæroides siue oblongum, siue latum a b c d, cuius centrum e: & ipsum tangant duo plana æquidistantia; planum quidem f g in puncto b; planum uero h k in d: & item ducatur aliud planum illis ipsis æquidistans, & secans sphæroides, quod sit a c: ductaq; b d occurrente plano a c in l, quæ transibit per e, ut ipse Archimedes ostendit in decima octaua huius, erit portionis sphæroidis a b c basis superficies circa diametrum a c; uertex b; & axis b l: portionis uero a d c basis erit eadem; uertex d; & axis d l. Huius caussa est, quòd in ellipsi eadem eueniunt. Secetur enim sphæroides plano per axem ducto, & per lineam b d. fiet sectio a b c d*

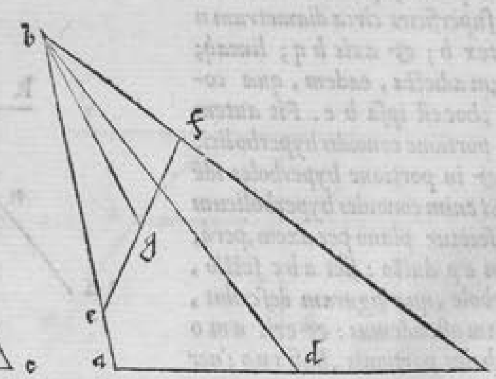


ellipsis figuram describens; & eius portionis a b c basis erit linea a c; uertex b; & diameter b l: portionis autem a d c, basis eadem a c; uertex d; & diameter d l, ut ex quadragesima septima primi conicorum apparet.

H Itaque demonstratis dictis theorematibus, per ea ipsa inueniuntur theoremata multa, & problemata &c.] *De his nos in fine nonnulla conscribemus.*

I Si conus plano secetur cum omnibus eius lateribus coeunti: sectio, uel erit circulus, uel coni acutianguli sectio.] *Si enim conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, æquidistanti autem basi, aut ei subcontrarie posito: sectio circulus erit, & eius pars hoc circulo contenta usque ad uerticem erit conus: quod demonstrauit Apollonius in quarta, & quinta primi conicorum. erit autem is conus similis cono, à quo abscinditur. Sit nanque conus a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d: seceturq; primum plano basi æquidistan*





ti, quod faciat sectionem e f. circulus igitur erit e f, centrum habens in axi, ubi punctum g: & e b f conus, cuius basis circulus circa diametrum e f, & axis b g. Dico conum e b f similem esse cono a b c. secetur enim conus a b c & altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c. erit a b c triangulum, & item triangulum e b f; ex tertia primi conicorum. & cum e f æquidistet basi:

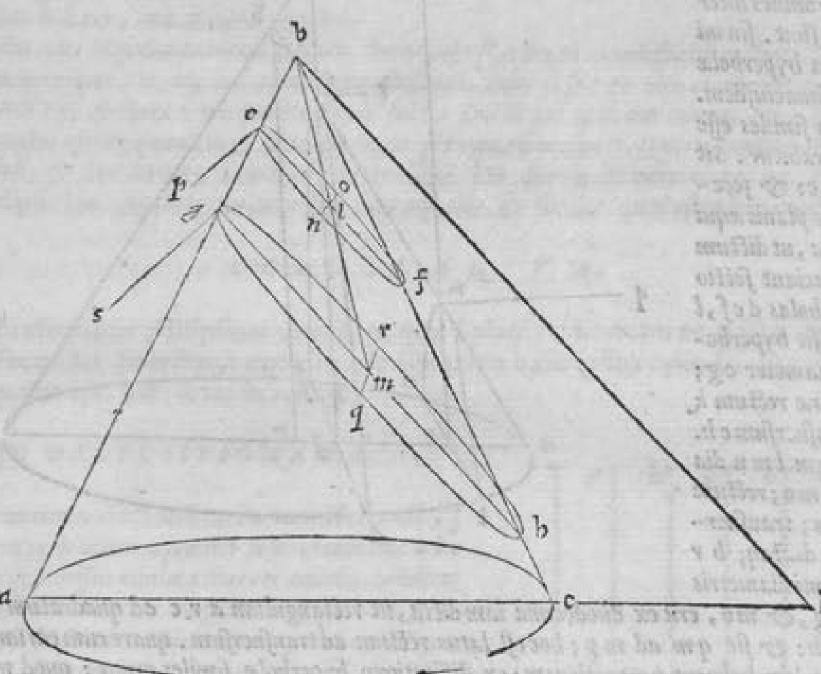
triangulum

triangulum b e f simile erit triangulo b a c: triangulumq́; b e g simile ipsi b a d. quare ut b d ad b a, ita b g ad b e: ut autem b a ad a c, ita b e ad e f: & ex æquali, ut b d ad a c, ita b g a e f. conus igitur e b f, cuius basis est circulus circa diametrum e f, & axis b g, similis est cono a b c, cuius basis circulus circa diametrum a c, & axis b d, ex diffinitione similium conorum. Sed si secetur conus scalenus plano subcontrarie posito ipsi basi: secetur autem & altero plano per axem ducto: erit angulus b f e æqualis angulo b a c: & triangulum f b e simile triangulo a b c. diuidatur ipsa e f linea bifariam in g, & iungantur b g. erit ut b a ad a d, sic b f ad f g. quare & triangulum b f g simile erit triangulo b a d. conus igitur f b e similis est cono a b c, ex diffinitione conorum scalenorum similium tradita à Campano in duodecimo elementorum, propositione decima; quos ipse pyramides inclinatas appellat. sunt nanque anguli ad g æquales angulis ad ipsum d: quod monstrare uolebamus. — Diff. 20. undecimi. — 6. sexti.

Si uero conus plano secetur coeunti cum omnibus ipsius lateribus, non autem æquidistanti basi, aut ei subcontrario posito: sectio erit ellipsis, ut monstrauit idem Apollonius in decima tertia eiusdem. Oportet tamen communem sectionem secantis plani, & eius, in quo est coni basis, esse lineam rectam, ad rectos existentem angulos, uel basi trianguli per axem, uel ei, quæ in eadem ipsi recta linea constituitur. Figuram autem coni sectione dicta contentam ad uerticem usque coni, Archimedes ἀπότμημα κώνου uocat, nos coni portionem uertimus. — Coni portio.

Quòd si conus duobus planis æquidistantibus eo pacto secetur: sectiones erunt ellipses inter se similes. sunt autem ellipses similes, quarum diametri coniunctæ eandem habent proportionem. — Ellipses similes.

Sit conus a b c: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est, quæ faciant ellipses e f, g h. Dico eas similes esse. secetur enim conus & plano per axem ducto: sitq́; sectio triangulum a b c: communes autem sectiones planorum æquidistantium, & eius quod per axem ductum est,

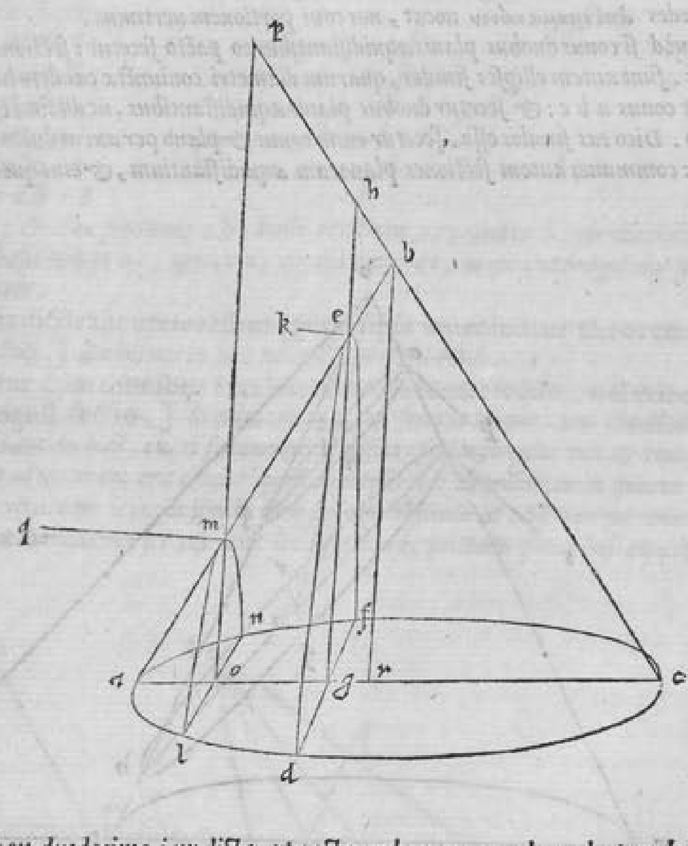


sint rectæ lineæ e f, g h. erunt hæ maiores diametri ellipsium, atque inter se æquidistantes. ducatur à puncto b linea b k, æquidistans ipsis e f, g h lineis, quæ cum linea c a producta coeat in k: & sit ellipsis e f centrum l; secunda diameter n l o; & rectum figuræ latus p e: quod græci ὀρθίαν, ἢ ὀρθίαν πλευρὰν dicunt: ellipsis autem g h centrum sit m; secunda diameter q m r; & rectum latus s g. erit iam p e ad e f; hoc est rectum latus ad transuersum, ut rectangulum a k c ad quadratum b k, ex decima tertia primi conicorum Apollonij: & ita s g ad g h. quare p e ad e f erit, — 16. undec.

ut s g

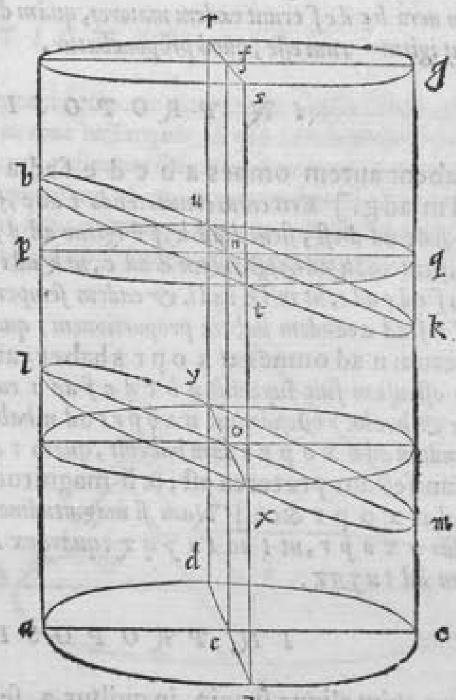
ut s g ad g h. ut autem p e ad e f, ex uigesima prima eiusdem, ita quadratum n l ad rectangulum e l f; hoc est ad quadratum e l. & eadem ratione ut s g ad g h, ita quadratum q m ad quadratum g m. quadratum igitur n l ad quadratum e l est, ut quadratum q m ad quadratum g m. Itaque cum quadrata semidiametrorum ipsarum e f, g h ellipsium eandem inter se proportionem
22. sexti. *habeant: & semidiametri ipsae: & item diametri eandem habebunt: & erunt ellipses similes: quod*
15. quinti. *erat ostendendum. Ex quo patet coni portiones e b f, g b h similes quoque inter se esse. dicuntur*
Coni, & Cylindri portiones similes. *autem similes coni portiones, quemadmodum & portiones cylindri similes, quae bases similes habent; & earum axes angulos aequales continent cum diametris basium consimilibus; proportionemq; ad eas habent eandem. ducta enim b m, qui est axis coni portionis g b h, transibit per l, quod ex similitudine triangulorum eorum facile ostendi potest: cumq; e f, g h rectae lineae aequidi-*
29. primi. *stent: & ipsae n o, q r aequidistabunt; & erunt anguli ad l constituti aequales ijs, qui sunt ad m:*
18. primi. *& ut b m ad g h, ita b l ad e f. ut autem g h ad q r, ita e f ad n o. quare ex aequali & b l ad n o erit, ut b m ad q r. ex diffinitione igitur coni portio e b f similis est portioni g b h, ut dicebamus.*

Si denique conus secetur duobus aequidistantibus planis, quae secent basim coni per rectam, ad rectos angulos existentem ipsi basi trianguli per axem: fient & eo pacto sectiones similes. nam uel diametri sectionum aequidistabunt uni ex lateribus trianguli per axem, uel non aequidistabunt. siquidem aequidistabunt: erunt sectiones parabolae ex undecima primi conicorum, quae omnes inter se similes sunt. sin minus: erunt hyperbolae ex duodecima eiusdem. eas autem similes esse ita monstrabitur. Sit conus a b c: & secetur duobus planis aequidistantibus, ut dictum est; quae faciant sectiones hyperbolas d e f, l m n: & sit hyperboles d e f diameter e g; latus figurae rectum k e; & transuersum e h. ipsius autem l m n diameter sit m o; rectum latus q m; transuersum m p: ductaq; b r aequidistanti diametris



earum e g, & m o, erit ex duodecima iam dicta, ut rectangulum a r c ad quadratum b r, sic k e ad e h: & sic q m ad m p; hoc est latus rectum ad transuersum. quare cum earum figurae latera eandem habeant proportionem: ex diffinitione hyperbolae similes erunt: quod monstrare oportebat.

K Et si cylindrus duobus planis aequidistantibus secetur, quae cum omnibus ipsius lateribus coeant.] *Sectiones cylindri, circuli quidem erunt centra habentes in axi, cum plana illa ipsum secantia aequidistent basi, aut ei subcontrarie ducantur: ellipses autem, cum aliter quomodocunque habeant, si modo communis sectio secantium planorum, & eius, in quo est basis cylindri linea recta sit, ad rectos angulos existens, aut basi parallelogrammi per axem, aut ei, quae est in eadem recta linea: quod monstratum est à Sereno in cylindricis. Itaque ellipses illae aequales erunt, & similes; quoniam aequales habebunt utrasque diametros, ut ostendetur. Sit enim cylindrus*

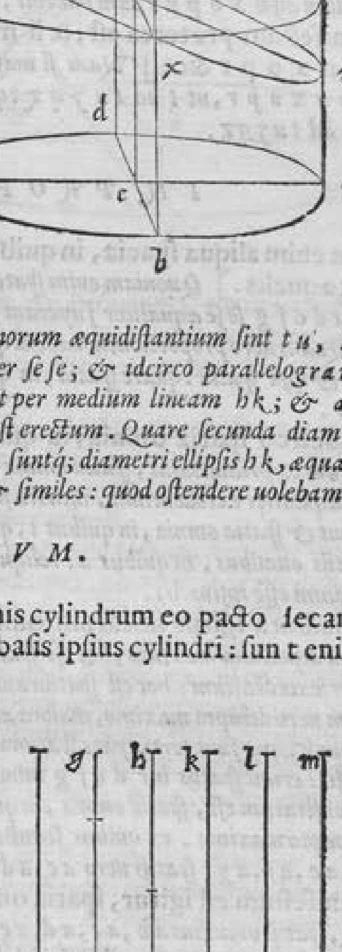


drus a g, cuius basis circulus a b c d; axis e f: & secetur duobus planis æquidistantibus, ut dictum est: secetur præterea & altero plano per axem ducto: sitq; sectio a g. erit a g parallelogrammum, quod monstrauit eodem in loco Serenus: planorum autem sectiones sint h k, l m ellipses; quarum maiores diametri rectæ lineæ h k, l m; & centra in axi cylindri; hoc est in punctis n o. nam ducto plano p q per n, æquidistanti basi, sectio circulus erit, & linea p n, æqualis lineæ n q. cumq; triangulum h n p simile sit triangulo k n q, quod manifeste patet: erit ut p n ad n h, sic q n ad n k: & permutando, ut p n ad n q, sic h n ad n k. sunt autem p n, n q æquales. æquales igitur ipsæ h n, n k. quare ellipsis h k centrum est n. eodem modo monstrabimus, & ellipsis l m centrum esse ipsum o. & cum plana æquidistent: æquidistabunt & ipsæ h k, l m: atque erit ipsum h m parallelogrammum. unde æqualis erit l m ipsi h k. secetur rursus cylindrus plano per axem ducto, & erecto super aliud planum secans item per axem: sitq; sectio b d r s, quæ & ipsa parallelogrammum erit; communes autem sectiones huius, & planorum æquidistantium sint t u, x y. erunt eadem ratione t u, x y rectæ lineæ, æquidistantes inter se se; & idcirco parallelogrammum quoque erit t y: & linea x y æqualis ipsi t u. sed t u diuidit per medium lineam h k; & angulos cum ea rectos efficit; quoniam & planum super planum est erectum. Quare secunda diameter est ellipsis h k: & similiter x y secunda diameter ellipsis l m. suntq; diametri ellipsis h k, æquales diametris ellipsis l m. ellipses igitur inter sese sunt æquales, & similes: quod ostendere uolebamus. 16. undec. 34. primi.

COROLLARIVM.

Ex his sequitur, Ellipsium omnium, quæ à planis cylindrum eo pacto secantibus fiunt, secundas diametros æquales esse diametro basis ipsius cylindri: sunt enim t u, x y æquales ipsi b d: & ita in reliquis.

IN PROPOSITIONEM I.



Huius uero demonstratio manifesta est.]

Sint magnitudines æqualiter se se excedentes a b c d e f: sitq; excessus minimæ illarum æqualis, uidelicet ipsi f: adiiciatur autem ad ipsam b magnitudo g, æqualis ipsi f: & ad c adiiciatur magnitudo h, æqualis e: & ad d magnitudo k, æqualis sibi ipsi: & ad e magnitudo l, æqualis c: & ad f magnitudo m, æqualis b. Erunt hæ sic factæ magnitudines inter se se æquales: & item æquales maximæ: magnitudines uero b g, c h, d k, e l, f m duplæ magnitudinum b c d e f. quare addita utrobique magnitudine a, erunt magnitudines a, b g, c h, d k, e l, f m magnitudinum a b c d e f minores, quàm duplæ; deficiunt enim à duplis tanta magnitudine, quanta est a: magnitu-

dinum uero b c d e f erunt eædem maiores, quàm duplæ; quod superant eadem illa magnitudine a. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.

IN PROPOSITIONEM II.

A Habent autem omnes a b c d e f ad a eandem proportionem, quam omnes g h i k l m ad g.] *Erit enim conuertendo f ad e, sicut m ad l: & componendo f e ad e, sicut m l ad l. sed e ad d est, sicut l ad k. f e igitur ad d sunt, sicut m l ad k: & rursus componendo f e d ad d, sicut m l k ad k: est autem d ad c, ut k ad i. quare f e d ad c, ut m l k, ad i: rursusq; componendo f e d c ad c, ut m l k i ad i. & eadem semper ratione utentes, tandem concludemus, omnes a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam habent omnes g h i k l m ad g.*

22.quinti.

B Verum n ad omnes n x o p r s habet eandem, quam t ad omnes t u y q z 9.] *Quo modo ostensum fuit superius a b c d e f ad a eandem habere proportionem, quam g h i k l m ad g: & hoc loco ostendemus n x o p r s ad n habere eam, quam t u y q z 9 ad t. quare & conuertendo n ad n x o p r s eam habebit, quam t ad t u y q z 9.*

C Manifestum præterea est; & si magnitudinum a b c d e f, ipsæ a b c d e referantur ad n x o p r &c.] *Nam si magnitudines s 9 auferamus, ea, qua diximus ratione: erit n ad ipsas n x o p r, ut t ad t u y q z. quare ex æquali a b c d e f ad n x o p r ita erit, ut g h i k l m ad t u y q z.*

IN PROPOSITIONEM III.

A Sunt enim aliqua spacia, in quibus a, se se æqualiter excedentia; & excessus minimo est æqualis.] *Quoniam enim spatia, in quibus sunt b c d e f g, omnia sunt quadrata: sicut lineæ b c d e f g sese æqualiter superant: ita & reliqua quadratorum latera sese æqualiter superabunt. Quam uero proportionem habent quadratorum latera, quæ sunt bases spatiorum a, eandem habent & ipsa spatia. quare spatia, in quibus a sese æqualiter excedunt: & excessus est æqualis minimo.*

1.sexti.

B Et idcirco spatia omnia, in quibus i, omnibus, in quibus a, minora erunt.] *Nam cum ex prima huius, spatia omnia, in quibus h i, æqualia maximo, spatiorum, in quibus a, sese æqualiter excedentium, minora sint, quàm dupla; reliquorum uero dempto maximo, maiora. erunt & spatia omnia, in quibus i, quæ sunt dimidia spatiorum omnium, in quibus h i, minora spatijs omnibus, in quibus a: reliquis uero dempto maximo, maiora; positum est enim lineam i dimidium esse ipsius h i.*

C Quadrata igitur linearum omnium æqualium maxime &c.] *Quadrata linearum omnium æqualium maximæ, hoc est spatia, in quibus k l, quadratorum omnium linearum se se æqualiter excedentium; hoc est spatiorum, in quibus b c d e f g, minora sunt, quàm tripla: reliquorum uero dempto maximo, maiora, ex corollario decimæ de lineis spiralibus. spatia igitur omnia, in quibus k, quæ sunt tertia pars spatiorum omnium, in quibus k l; cum linea k ipsius k l lineæ sub tripla sit: erunt spatijs b c d e f g minora; spatijs autem c d e f g maiora: atque erunt, ut superius monstratum est, spatia omnia, in quibus i minora omnibus, in quibus a; maiora autem reliquis dempto maximo. ex quibus sequitur spatia omnia, in quibus i k esse minora spatijs a b, a c, a d, a e, a f, a g; spatijs uero a c, a d, a e, a f, a g, maiora.*

1. sexti.

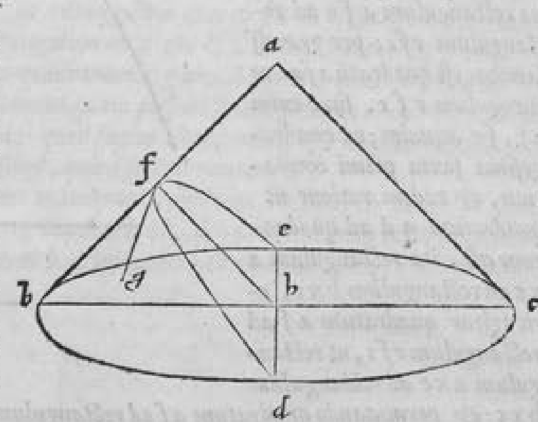
D Manifestum est igitur, spatia omnia, in quibus h i k l &c.] *Cum spatia omnia, in quibus i k, spatijs omnibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, sint minora; reliquis uero dempto a b, maiora: habebunt spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem proportionem, quàm ad spatia, in quibus i k; ad spacia autē a c, a d, a e, a f, a g, maiorem. Sed quam proportionem habent spatia omnia, in quibus h i k l ad spatia, in quibus i k, eam habet linea h l ad lineam i k. spacia igitur omnia, in quibus h i k l ad omnia a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm linea h l ad lineam i k; ad ipsa uero spatia a c, a d, a e, a f, a g, maiorem habent, quàm dictæ lineæ, proportionem.*

8.quinti.
1. sexti.
13.quinti.

E Si quancunque coni sectionem rectæ lineæ contingant &c.] *Ostendit hoc Apollonius Pergæus in tertio conicorum, propositione decima septima.*

IN PROPOSITIONEM IIII.

Et sumatur ea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur; dupla illius, quæ est usque ad axem.] *In parabola enim, quæ fit ex cono rectangulo, de qua Archimedes loquitur, linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, ordinatim scilicet ad diametrum (græcis ὀρθία) dupla est eius lineæ, quæ habetur à uertice sectionis usque ad coni angulum, hoc est usque ad axem. Sit enim conus rectangulus a b c, cuius uertex a; basis autem circulus circa diametrum b c: & secetur plano per axem, quod faciat sectionem triangulú a b c: secetur autem & altero plano secante basim coni per rectam d e, ad rectos angulos existentem ipsi b c basi trianguli per axem; quod faciat sectionem in superficie coni d f e: & diameter sectionis f h æquidistans sit alteri lateri trianguli; hoc est ipsi a c: deinde à puncto f ducatur f g linea ad rectos angulos ipsi f h: ita ut g f ad f a eam habeat proportionem, quam quadratum b c ad rectangulum b a c. erit sectio d f e parabole; quod ex undecima primi conicorum Apollonij colligitur; & ipsa g f linea, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur, dupla lineæ f a. quadratum enim b c duplum est rectanguli b a c; cum angulus ad a sit rectus, ex penultima primi elementorum.* A

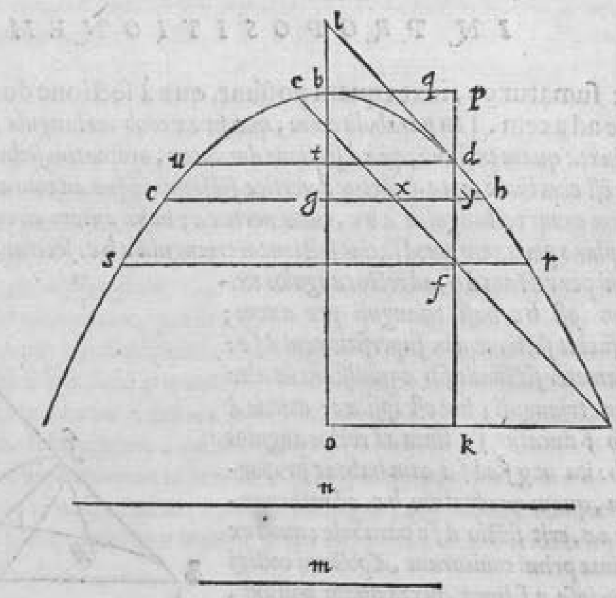


Quoniam igitur d f diameter est portionis: & a e bifariam secatur in f; & d f æquidistans est diametro sectionis coni rectanguli &c.] *Primum horum patet ex diffinitione diametri: secundum uero tum ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, tum ex corollario quinquagesimæ primæ eiusdem.* B

Ostensum nanque est hoc in conicis.] *Nullibi hoc ostensum est, quòd sciam in conicorum quatuor libris, qui extant ab Apollonio conscriptis. is enim aliam uiam ingressus est, ad illud idem inuestigandum; quod in primo libro apparet, propositione quadragesima nona. Sed tamen nos ex conicis id ipsum demonstrare conabimur. erit autem theorema eiusmodi.* C

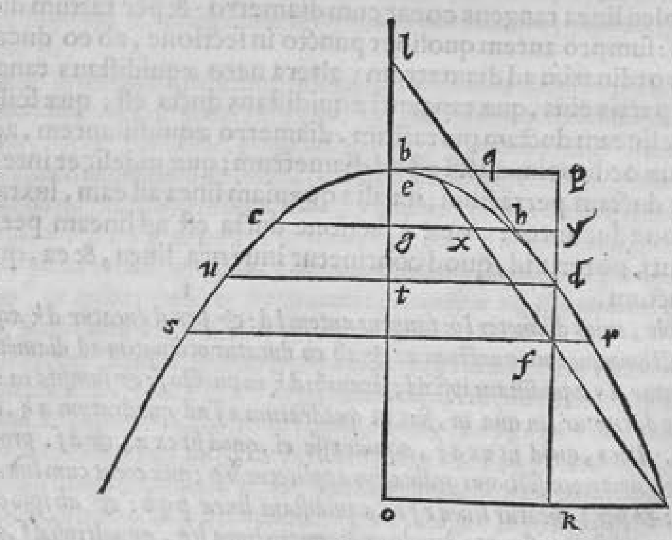
Si parabolen linea tangens coeat cum diametro: & per tactum ducatur diametro æquidistans: sumpto autem quolibet puncto in sectione, ab eo ducantur duæ lineæ: una quidem ordinatim ad diametrum; altera uero æquidistans tangenti; & fiat, ut quadratum partis eius, quæ tangenti æquidistans ducta est; quæ scilicet est inter sectionem, & lineam ductam per tactum, diametro æquidistantem, ad quadratum partis illius, quæ ordinatim ducta est ad diametrum; quæ uidelicet interiicitur inter sectionem, & ductam per tactum; ita alia quæpiam linea ad eam, iuxta quam possunt, quæ à sectione ducuntur: quæ à sectione ducta est ad lineam per tactum, æquidistans tangenti, poterit id, quod continetur inuenta linea, & ea, quæ ab ipsa abscinditur ad tactum.

Sit parabole, cuius diameter l o: tangens autem l d: & per d ducatur d k æquidistans ipsi l o: sumaturq; in sectione quod uis punctum a: & ab eo ducatur ordinatim ad diametrum linea a k o: & item alia ducatur a e æquidistans ipsi d l; secansq; d k in puncto f: & sumpta ea iuxta, quam possunt quæ à sectione ducuntur, in qua m, fiat ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea quæpiam n ad lineam m. Dico, quod fit ex a f, æquale esse ei, quod fit ex n, & d f. producatur enim linea k f d: & per b uerticem sectionis ordinatim applicetur b p; quæ coeat cum linea k d in puncto p, secetq; d l in q: & per f ducatur linea r f s, æquidistans lineæ p q b: & ab ipso d item ducatur linea d t u, eidem æquidistans: sumpta deinde ex diametro linea b g, æquali ipsi d f, per g similiter ducatur alia linea h x g c, æquidistans p q b; & secans lineam a e in puncto x. Itaque quoniam linea a e æquidistat lineæ d l; & k p ipsi o l; & a o ipsi p b: erunt triangula a f k, q d p, q l b æquiangula; quorum q d p, q l b etiam sunt æqualia: nam b t; hoc est p d, æqualis est ipsi l b, ex 35 primi conicorum. ut autem p d ad p q, ita l b ad b q: & permutando ut p d ad l b, ita p q, ad q b. quare cum illæ



ſint æquales: & hæ pq, qb æquales erunt; & ſimiliter lq, qd. præterea ut a f ad ak, ita q d ad qp: & ob id, ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum q d ad quadratum q p; hoc eſt ad quadratum q b. ſed ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a f e ad rectangulum r f s; per præmiſſam; hoc eſt quadratũ a f ad rectangulum r f s. ſunt enim a f, f e æquales; ex quadrageſima ſexta primi conicorum. & eadem ratione ut quadratum q d ad quadratum q b, ita rectangulum a x e ad rectangulum h x c. erit igitur quadratum a f ad rectangulum r f s, ut rectangulum a x e ad rectangulum h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum a x e, ut rectangulum r f s ad rectangulum h x c: & per conuerſionem rationis quadratum a f ad exceſſum, quo quadratum a f excedit rectangulum a x e; hoc eſt ad quadratum f x, ex quinta ſecundi, ut rectangulum r f s ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c: & permutando quadratum a f ad rectangulum r f s, ut quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c. erat autem quadratum a f ad rectãgulũ r f s, ut quadratum d q ad quadratũ q b. quare quadratum f x ad exceſſum, quo rectangulũ r f s excedit rectangulum h x c erit, ut quadratum d q ad quadratum q b: & rurſus permutando quadratum f x ad quadratum d q, ut exceſſus, quo rectangulum r f s excedit rectangulũ h x c ad quadratum q b. ſed quadratum f x eſt æquale quadrato d q: nam linea f x eſt æqualis lineæ d q, ut apparebit. exceſſus igitur, quo rectangulum r f s excedit ipſum h x c, eſt æqualis quadrato q b. Lineam autem f x æqualem eſſe lineæ d q, ſic oſtendetur. Sit enim y punctum, in quo linea k p ſecat lineam h c. quoniam igitur b g; hoc eſt p y facta eſt æqualis ipſi d f: ſi quidem y cadit intra ſectionem, ſublata ab utraque communi linea d y; uel utrique addita, ſi extra cadit, ut in ſecunda figura, erit y f lineæ æqualis p d. & quo

præmissa ab Archimede demonstrata aût ab Apollonio lib. 3° conicorum theor. XVI

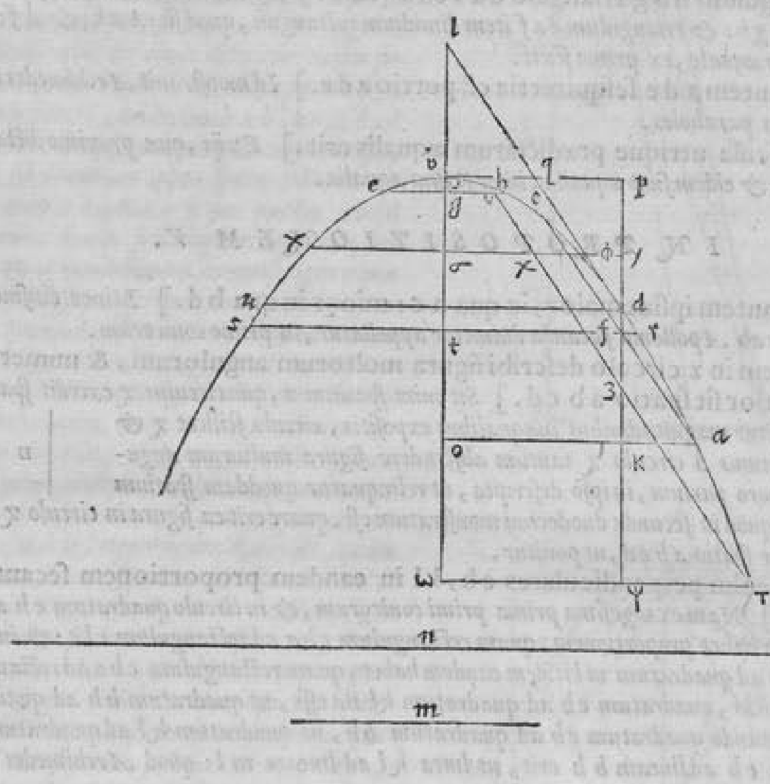


niam linea a e æquidiſtat lineæ d l; & h c ipſi p b: erunt triangula f y x, d p q æquiangula: & ut y f ad p d, ita f x ad d q, & y x ad p q. æqualis eſt igitur f x ipſi q d; & y x ipſi p q. eſt autem y g æqualis ipſi p b. quare & reliqua g x eſt æqualis reliquæ b q; & quadratum g x æquale quadrato b q. ergo exceſſus, quo rectangulum r f s excedit rectangulum h x c, eſt æqualis quadrato g x: & propterea rectangulum h x c unà cum quadrato g x eſt æquale rectangulo r f s. ſed cum rectangulum h x c unà cum quadrato g x æquale ſit quadrato c g: erit rectangulum r f s æquale quadrato c g. Itaque ut quadratum d q ad quadratum q b, hoc eſt ut quadratum a f ad quadratum a k, ita quadratum a f ad quadratum c g. erat autem ut quadratum a f ad quadratũ a k, ita linea n ad lineam m. quadratum igitur a f ad quadratum c g erit, ut linea n ad lineam m: & accepta cõmuni altitudine f d, erit quadratum a f ad quadratum c g, ut rectangulum ex n & f d ad rectangulum ex m & f d: & permutando quadratum a f ad rectangulum ex n & d f, ut quadratum c g ad rectangulum ex m & b g, æquali ipſi f d. at uero quadratum c g æquale eſt ei, quod fit ex m & b g rectangulo; poſitum eſt enim lineam m eſſe, iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ducuntur: quadratum igitur a f eſt æquale ei, quod fit ex n & d f: quod fuerat oſtendendum: & ita ſectionis a d e, cuius diameter d f, erit linea n, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur.

5.ſecundi

1.ſexti.

Atque ad hunc quidem modum propoſitum concludemus, ubi linea a e ſecat lineam h c. Quòd ſi non ſecet, ut in poſtrema figura: aſſumemus ex diametris d k, b o duas lineas æquales; ex diametro quidem d k, lineam d ζ, ex diametro autem b o, ipſam b σ: ita ut ducta per ζ, æquidiſtans ipſi



d l; hoc eſt τ ζ υ ſecet φ χ ductam per σ, æquidiſtantem ipſi p q b. & item ordinatim applicata ad diametrum linea τ ψ ω, quam habet proportionem quadratum τ ζ ad quadratum τ ψ, eandem habeat linea n ad m. non aliter, quàm ſuperius, oſtendemus, quadratum τ ζ æquale eſſe ei, quod fit ex n & ζ d rectangulo, hoc eſt, ſectionis τ d υ, cuius eſt diameter d ζ, lineam n eſſe eam, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur. quod cum ita ſit: & quadratum a f lineæ ordinatim ad diametrum ductæ, æquale erit ei, quod fit ex n & f d. At propter ſimilitudinem triangulorum a k f, τ ψ ζ; linea a f erit ad lineam a k, ut τ ζ ad τ ψ. quare & ut quadratum a f ad quadratum a k, ita linea n ad lineam m: & illud eſt, quod oſtendiſſe oportebat.

Ex

Ex iam dictis perspicuum est, si in parabola à sectione ducatur linea æquidistans diametro: & à quolibet eiusdem sectionis puncto linea ordinatim ad diametrum applicetur: ducatur quoque alia linea ipsi æquidistans, diuidensq; sectionem; ita ut à linea æquidistanti diametro æqualē abscindat ei: quæ à diametro ab alia abscissa est ad uerticem sectionis: esse rectangulum partibus huius contentum, quæ uidelicet fiunt à linea diametro æquidistanti, æquale quadrato lineæ ad diametrum ordinatim applicatæ, hoc est rectangulum r f s æquale esse quadrato c g: quod demonstratum est superius: & eodem modo in aliis demonstrabitur.

D Et potest h g æquale ei, quod continetur linea m & b g.] *Ex undecima primi conicorum Apollonij. est enim linea m, iuxta quam possunt quæ à sectione ordinatim ad diametrum ducuntur, ut etiam superius dictum est.*

E Quare & quadratum a f ad quadratum h g eandem habet proportionem, quam n a d m; quòd d f, b g positæ sint æquales. *Nam cum quadratum a f æquale sit rectagulo ex n & d f: & quadratum h g æquale rectangulo ex m & b g: erit, ut quadratum a f ad quadratum h g, sic rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g: ut autem rectangulum ex n & d f ad rectangulum ex m & b g, æquali ipsi d f, sic n ad m; cum rectangula habeant eandem altitudinem. quadratum igitur a f ad quadratum h g proportionem habet eandem, quam n ad m.*

F Aequales igitur erunt h g, a k.] *Sequitur ex iam dictis, & undecima quinti, quadrata h g; a k esse æqualia. quare & eorum latera æqualia sint necesse est.*

G Ergo triangulum h b g triangulo d a f est æquale.] *Quod triangulum h b g dimidium sit rectanguli h g b: & triangulum d a f item dimidium rectanguli, quod fit ex a k; & d f: uel potius dimidio eius æquale, ex prima sexti.*

H Trianguli autem a d e sesquitertia est portio a d e.] *Id monstrauit Archimedes in libello de quadratura paraboles.*

I Portio abscissa utrique prædictarum æqualis erit.] *Ex ijs, quæ proxime dicta sunt. quæ autem uni, & eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia.*

IN PROPOSITIONEM V.

A Diameter autem ipsius maior, in qua a c; minor in qua b d.] *Minor eiusmodi sectionis diameter ab Apollonio secunda diameter appellatur, in primo conicorum.*

B Potest autem in z circulo describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit spatio a b c d.] *Sit enim spatium n, quo circulus z excedit spatium a b c d. duabus igitur magnitudinibus inæqualibus expositis, circulo scilicet z & n spatio, poterimus à circulo z tantum abscindere figura multorum angulorum, & numero parium, in ipso descripta, ut relinquatur quoddam spatium ipso n minus: quod in secunda duodecimi monstratum est. quare erit ea figura in circulo z descripta adhuc maior spatio a b c d, ut ponitur.*

C Quoniam enim perpendiculares e h, k l in eandem proportionem secantur ad puncta m b.] *Nam ex uigesima prima primi conicorum, & in circulo quadratum e h ad quadratum k l eam habet proportionem, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a: & in ellipsi, quadratum b h ad quadratum m l itidem eandem habet, quam rectangulum c h a ad rectangulum c l a. unde sequitur, quadratum e h ad quadratum k l ita esse, ut quadratum b h ad quadratum m l: & permutando quadratum e h ad quadratum b h, ut quadratum k l ad quadratum m l.*
22. sexti. *quare & linea e h ad lineam b h erit, ut linea k l ad lineam m l: quod Archimedes ponebat ex conicis.*

D Constat trapezium l e ad ipsum h m eandem habere proportionem, quam h e ad b h.] *Iisdem enim sic stantibus, producantur h l, b m lineæ usque quo conueniant in puncto o: producatur item e k; quæ & ipsa unà conueniet cum illis in eodemmet puncto, ut monstrabimus. nam nisi ita fiat: erit punctum, in quo conueniunt h l, e k, uel infra ipsum o, uel supra. Sit primum infra, si esse possit, ubi est p: iunganturq; e o: & producatur l k, ut secet lineam e o in q. erunt triangulæ o h b, o l m inter se æquiangula: & item æquiangula inter se ipsa o h e, o l q: lateraq; habebunt proportionalia. quare ut o l ad o h, ita l m ad h b: & rursus ut o l ad o h,*
4. sexti.
11. quinti. *ita l q ad h e. ergo l m ad h b est, ut l q ad h e: & permutando l m ad l q, ut h b ad h e. sed*

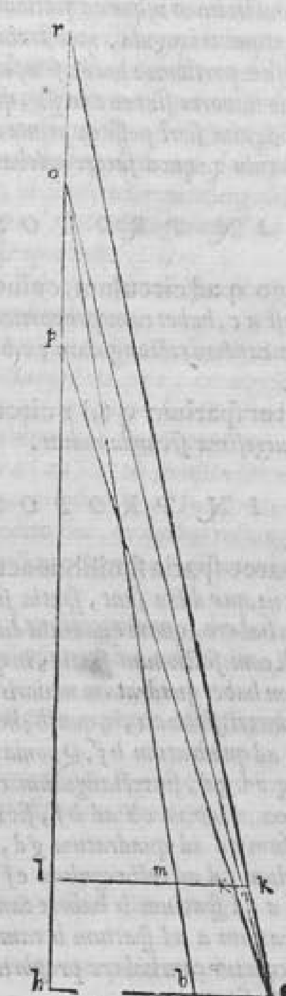
erat

erat l m ad l k, ut h b ad h e: monstratum enim iam est, e h, k l in eandem proportionem secari secundum h m. ex quo sequitur l q æqualem esse ipsi l k; totum parti: quod fieri non potest. non igitur e k producta conuenit cum h l infra ipsum o. Sed conueniat supra in r, si possit. Rursus ad eundem modum ratiocinantibus, idem sequetur absurdum. ergo conueniet & e k in puncto o. Quo quidem confirmato, habebit triangulum o h e ad triangulum o h b eam proportionem, quam h e habet ad h b: & eadem ratione triangulum o l k ad triangulum o l m eam, quam l k ad l m; hoc est quam h e ad h b. reliquum igitur spatium l e ad reliquum h m habebit eandem, quam h e ad h b: quod ostendisse oportuit.

9.quinti.

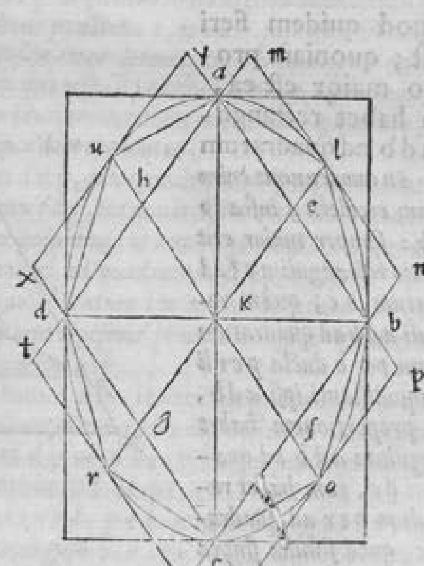
1. sexti.

19.quinti.



E

Rursus in coni acutianguli sectione potest describi figura multorum angulorum, & numero parium, quæ maior sit circulo z.] *Sit sectio coni acutianguli, seu ellipsis a b c d; cuius diameter maior sit a c, minor uero b d: in eaq; describatur figura quadrilatera, ductis lineis a b, b c, c d, d a. Iam constat figuram hanc maiorem esse, quàm sit dimidium ipsius spatij sectione a b c d contenti: quoniam si per puncta a b c d duxerimus lineas sectionem tangentes; fiet alia figura quadrilatera circumscripta, quæ erit dupla ipsius inscriptæ; ex quadragesima prima primi Euclidis. nam dimidium circumscriptæ figuræ b a d duplum est dimidij inscriptæ; uidelicet trianguli a b d, cum basim eandem habeant, & eandem altitudinem: & similiter b c d duplum trianguli c b d. ipsa autem figura quadrilatera circumscripta minus est spatium sectione coni acutianguli contentum. quare inscripta figura maior est, quàm ipsius dimidium. secentur deinde bifariam rectæ lineæ a b, b c, c d, d a in punctis e f g h: & à centro sectionis, quod sit k ad e ducta linea producatur usque ad sectionem in puncto l: & per l alia ducatur tangens sectionem m l n. manifestum est ex conuersa quadragesimæ septimæ primi conicorum Apollonij, uel ex sexta secundi, lineam m l n tangentem sectionem æquidistare ipsi a b. quare ductis lineis a l, l b, erit a l b triangulum ipsius parallelogrammi a n dimidium, & ob id maius quàm dimidium eius, quæ circa ipsum est, portionis ellipsis. Idem quoque fiat in alijs portionibus. demonstrabitur unumquodque aliorum triangulorum b o c, c r d, d u a maius esse, quàm dimidium portionis ipsum*



ambientis. Rursus secentur bifariam rectæ lineæ a l, l b, b o, o c, c r, r d, d u, u a: & à centro k per ea puncta ductis lineis usque ad sectionem; ductisq́; alijs sectionum tangentibus, fiant alia parallelogramma, atque triangula. monstrabimus eodem modo unumquodque triangulum maius, quàm dimidium suæ portionis: hocq́; semper fiat, quousque relinquantur quædam sectionis portiones, quæ omnes minores sint eo excessu, quo spatium sectione coni acutianguli contentum excedit circulum z. id enim fieri posse ex prima decimi Euclidis docuimus. figura igitur eo pacto descripta maior erit circulo z: quod facere uolebamus.

IN PROPOSITIONEM VI.

A Spatium ergo q ad circulum, cuius diameter a c &c.] *Spatium enim q ad circulum, cuius diameter est a c, habet eam proportionem, quam b d ad a c, ex antecedenti. Quam autem habet b d ad a c eandem rectangulum ex b d, a c habet ad quadratum a c; ex lemmate uigesimæ secundæ decimi.*

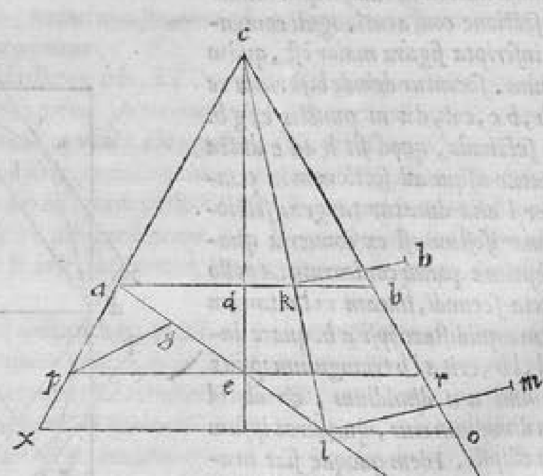
B Constat igitur spatium q ad z circulum habere eam, quam &c.] *Per æquam scilicet rationem ex uigesima secunda quinti.*

IN PROPOSITIONEM VII.

A Ex hoc apparet spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta &c.] *Apparet, inquit ex ijs, quæ dicta sunt, spatia similibus acutianguli coni sectionibus contenta eam inter se proportionem habere, quam quadrata diametrorum, quæ sint eiusdem rationis. Sint enim similium acutianguli coni sectionum spatia, in quibus a b. habebit spatium a ad spatium b eam proportionem, quam habet quadratum maioris diametri sectionis, in qua a; quæ sit c g ad quadratum maioris diametri sectionis, in qua b; hoc est e h: & item habebit eam, quam quadratum minoris diametri g d ad quadratum h f. Quoniam cum sectiones similes sint, erit ut c g ad g d, sic e h ad h f. sed ut c g ad g d, sic rectangulum c g d; hoc est c d ad quadratum g d, ex lemmate uigesimæ secundæ decimi: & ut e h ad h f, sic rectangulum e h f; hoc est e f ad quadratum h f. Vt igitur rectangulum c d ad quadratum g d, sic rectangulum e f ad quadratum h f: & permutando, ut rectangulum c d ad rectangulum e f, sic quadratum g d ad quadratum h f. monstratum est autem spatium a ad spatium b habere eam proportionem, quam rectangulum c d ad rectangulum e f. ergo spatium a ad spatium b eam habebtt, quam quadratum g d ad quadratum h f: & eodem modo ostendetur eam habere proportionem, quam quadratum c g habet ad quadratum e h. quare patet propositum.*

IN PROPOSITIONEM VIII.

A Quod quidem fieri potest; quoniam proportio maior est ea, quam habet rectangulum a d b ad quadratum d c.] *In quodcunque enim punctum ceciderit f infra ipsum b: semper maior erit proportio rectanguli a e f ad quadratum e c, quàm rectanguli a d b ad quadratum d c. nam per e ducta p e r linea, æquidistanti ipsi a d b, quam proportionem habet rectangulum a d b ad quadratum d c, eam habet rectangulum p e r ad quadratum e c; quòd similia sint ea*



triangula, & latera proportionalia habeant. Sed cum rectangulum a e f maius sit rectangulo p e r, ut inferius ostendemus: sequitur ex octaua quinti maiorem esse proportionem rectanguli a e f ad quadratum e c, quàm rectanguli p e r ad idem quadratum e c; hoc est, quàm rectanguli a d b ad quadratum d c. Reliquum est, ut ostendamus, rectangulum a e f maius esse ipso p e r. id autem fiet hoc pacto. Quoniam enim angulus e r p maior est angulo c f a: & angulo c r p æqualis 16. primi. *est angulus c p r: fieri potest, ut ab angulo c p r auferamus angulum æqualem ipsi c f a. auferatur; & sit r p g. est igitur ut f e ad e r, sic p e ad e g, ob similitudinem triangulorum e f r, e p g:* 5. primi. *& propterea rectangulum f e g æquale est rectangulo p e r. sed rectangulum f e a maius est ipso f e g. quare & maius erit rectangulo p e r: quod ostendisse oportuit.* 16. sexti.

Et quadratum e c ad rectangulum p e r eam habet, quam quadratum d c ad rectangulum a d b.] *Propter triangulorum eorum similitudinem.* B

Est autem ut rectangulum a e f ad rectangulum p e r, ita rectangulum a l f ad ipsum x l o.] *Proportio nanque rectanguli a e f ad rectangulum p e r, ex uigesima tertia sexti componitur ex proportione, quam habet a e ad p e, & ex ea, quam habet e f ad e r: & eodem modo proportio rectanguli a l f ad rectangulum x l o componitur ex proportione a l ad l x, & l f ad l o. sed proportio a e ad p e est eadem proportioni a l ad l x, ob similitudinem triangulorum a e p, a l x: & proportio item e f ad e r est eadem ei, quam habet l f ad l o: simile est enim triangulum f e r triangulo f l o. cum igitur proportiones eædem sint, ex quibus rectangulorum eorum proportiones componuntur: erit rectangulum a e f ad rectangulum p e r, sicut a l f rectangulum, ad rectangulum x l o.* C

Et ut quadratum dimidiæ maioris diametri ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] *Monstrauit hoc Apollonius primo conicorum, propositione uigesima prima.* D

Sed rectangulum x l o ad quadratum c l habet eam, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] *Ob triangulorum similitudinem.* E

Sed linea c m est in superficie coni. constat igitur, & h punctum in coni esse superficie.] *Cui hoc non probatur, is legat primam propositionem primi conicorum Apollonij.* F

IN PROPOSITIONEM IX.

Vel ellipsis.] *Hoc est coni acutianguli sectio: fuit enim hæc primum sic appellata, ut superius adnotauimus.* A

Sumatur conus uerticem habens c punctum, in cuius superficie sit circulus, uel acutianguli coni sectio circa diametrum e b.] *Si quidem circulus circa diametrum e b descriptus fuerit: iam inuentus erit conus uerticem habens punctum c, in cuius superficie sit data acutianguli coni sectio. Si uero non circulum, sed ellipsim circa diametrum e b contigerit describi: quoniam ab eius centro recta linea super planum, in quo ipsa est, erecta ad ipsum c pertingit: poterimus ex ijs, quæ proxime monstrata sunt, conum inuenire uerticem habentem c punctum; in cuius superficie acutianguli coni sectio circa e b descripta deprehendatur.* B

Est igitur ut quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.] *Vt enim quadratum n ad rectangulum f d g, ita quadratum alterius diametri, siue circuli, siue ellipsis ad quadratum e b: quod antea posuimus. ut autem quadratum alterius diametri ad quadratum e b, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b: & ut quadratum semidiametri ad quadratum dimidiæ e b, ita quadratum l m ad rectangulum e l b; quod monstrauit Apollonius in primo conicorum, propositione uigesima prima. ut igitur quadratum n ad rectangulum f n g, ita quadratum l m ad rectangulum e l b.* C 15. quinti. 11. quinti.

Vt autem rectangulum f d g ad rectangulum a d b, ita rectangulum e l b ad ipsum p l r.] *Proportio enim rectanguli f d g ad rectangulum a d b, composita est ex proportione, quam habet f d ad a d, & ex ea, quam habet d g ad d b: & ita prrportio rectanguli e l b ad rectangulum p l r composita est ex proportione e l ad p l, & l b ad l r. sed ut f d ad a d, ita e l ad p l, ob similitudinem triangulorum a f d, p e l. ut autem d g ad d b, ita l b ad l r; propterea quòd simile est triangulum g d b triangulo b l r. quare eisdem existentibus pro-* D 23. sexti.

portionibus, quæ rectangulorum proportiones componunt, erit ut rectangulum f d g ad ipsum a d b, ita e l b ad p l r.

E Sed ut quadratum n ad rectangulum a d b, ita quadratum h k ad rectangulum a k b.] Constat id ex eadem uigesima prima primi conicorum Apollonij.

F Habet autem & rectangulum p l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam rectangulum a k b ad quadratum k c.] Est enim ex quarta sexti ob similitudinem triangulorum, ut p l ad c l, ita a k ad k c: & ut l r ad c l, ita k b ad k c.

IN PROPOSITIONEM X.

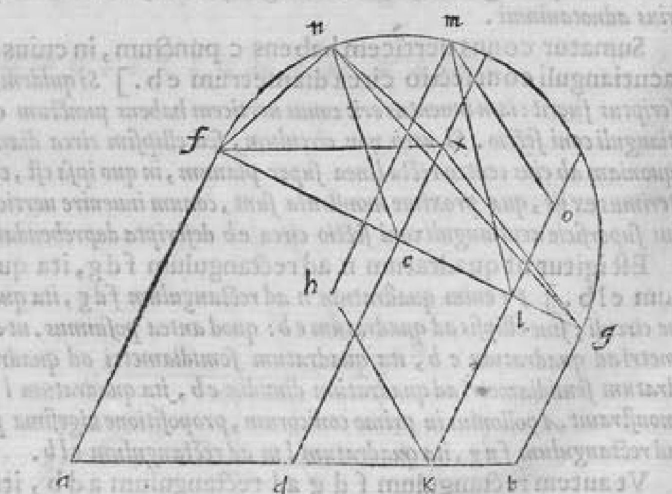
A Eandem ergo proportionem habet quadratum lineæ perpendicularis h k ad rectangulum a k b, & quadratum f c ad rectangulum a d b: quoniam æqualis est f g alteri diametro.] Sequitur hoc ex uigesima prima primi conicorum Apollonij: est enim f c æqualis semidiametro datæ sectionis. nam productis lineis f g, a b quousque conueniant: fiet triangulum, cuius basis f a; & lineæ basi æquidistantes c d, g b: eritq; ut a b ad f g, ita a d ad f c. & cum f g sit æqualis alteri diametro, ut positum est: erit & f c æqualis semidiametro.

B Habet autem & rectangulum f l g ad rectangulum a k b proportionem eam, quam f c quadratum ad quadratum a d ellipsis.] Proportiones enim laterum, ex quibus rectangulorum ipsorum proportiones componuntur eædem sunt: nanque est ut f c ad a d, ita f l ad a k; & l g ad k b.

C Quare rectangulum f l g æquale est quadrato h k.] Nam ostensum est, ut quadratum f c ad rectangulum a d b; hoc est ad quadratum a d, ita quadratum h k ad rectangulum a k b: & ita rectangulum f l g ad rectangulum a k b. quare ex nona quinti sequitur rectangulum f l g æquale esse quadrato h k.

D Est igitur linea c n æqualis ipsi c f.] Positum iam est, quadratum c f excedere quadra-
pen.primi tum dimidij alterius diametri, quadrato c x. sed cum angulus ad x rectus sit: erit quadratum c n æquale quadrato x n, quod est dimidium alterius diametri, & quadrato c x: & propterea linea c n æqualis erit lineæ c f.

E Ergo ut quadratum m o ad quadratum m l, ita est quadratum x n ad quadratum n c.] Sunt enim triangula m l o, n c x æquiangula, ut monstrabitur: idcircoq; latera habent proportionalia. nam ductis lineis g x, f x, g n, f n, quoniam trianguli f x c duo latera f c, c x æqualia sunt duobus lateribus g c, c x trianguli g c x; & angulus ad c rectus in
4. primi. utroque: erit linea f x æqualis lineæ g x: & rursus trianguli f n x duo latera f x, x n æqualia sunt duobus lateribus g x, x n ipsius g x n trianguli; & anguli ad x recti. lineæ igitur g n, f n eadem ratione sunt æquales. quare & triangulum f n c æquale est, & simile triangulo g n c: & angulus f c n æqualis angulo g c n. linea ergo c n perpendicularis est ad ipsam f g. sed & l



28. primi. m ducta est perpendicularis ad eandem. æquidistantes igitur sunt l m, c n. At uero & æquidistan-
10.undec. tes sunt ipsæ k o, d f. quare angulus o l m æqualis est angulo x c n: & angulus ad o rectus æqualis angulo recto ad l x. reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis, & triangulum m l o triangulo n c x æquiangulum, quod monstrare uolebamus.

Vt autem quadratum m l ad rectangulum a k b, ita c n quadratum ad ipsum a d.] *Erit igitur ut quadratum m l ad rectangulum f l g, ita quadratum c n ad quadratum c f. ut autem rectangulum f l g ad rectangulum a k b, ita quadratum c f ad quadratum a d. nam rursus productis lineis f g, a b usque adeo, ut conueniant; fiet triangulum; cuius basis erit f a, & basi æquidistantes lineæ c d, l k, g b: & ob id, ut f l ad a k, ita l g ad k b, & f c ad a d. Quare ex æquali sicut quadratum m l ad rectangulum a k b, sic quadratum c n ad quadratum a d.* F

Perspicuum est igitur perpendiculares m o, h k æquales esse.] *Concluditur ex nona quinti, quadratum m o esse æquale quadrato h k. quare & latus lateri æquale erit.* G

IN PROPOSITIONEM XI.

Omnis coni ad conum proportionem compositam esse ex proportione basium, & proportione altitudinum &c.] *Qui sint, qui hoc monstrarint, non adhuc comperi, nisi fortasse innuat Euclidem; ex ijs enim, quæ ipse tradit in duodecimo elementorum libro, illud facile elicitur. Et quanquam uerissimum sit in omnibus non solum conis, sed & cylindris ipsis: potissimum tamen de ijs dicitur, qui super inæquales bases, & inæquali altitudine constituuntur. nam qui bases quidem habent inæquales, altitudinem uero eandem, proportionem habent, quam eorum bases, ut monstrauit Euclides libro duodecimo propositione undecima. at qui bases æquales, altitudinem uero inæqualem nacti sunt, proportionem habent eandem, quam eorum altitudines: id, quod ipse idem monstrauit propositione decima quarta eiusdem libri. Itaque nos non hæc solum, sed & alia quàm plurima demonstrabimus, ab his non abhorrentia. postquam nonnulla, quæ ad eorum demonstrationem faciunt, præmiserimus.* A

PROPOSITIO I.

Omnem præterea cylindri portionem triplam esse portionis coni, quæ basim habeat ipsi eandem, & æqualem altitudinem &c.] *Cum cylindri, & coni portiones eandem basim, & æqualem altitudinem habuerint: erit cylindri portio portionis coni tripla; quod monstrabimus (ut ipse inquit) eodem prorsus modo, quo in decima propositione duodecimi Euclidis monstratur, omnem conum cylindri tertiam partem esse, qui eandem basim, & æqualem altitudinem habeat. figuram uero describemus in ellipsi, hoc est in ipsa basi, quemadmodum supra docuimus in sextam huius scribentes.* B

PROPOSITIO II.

Coni & cylindri portiones, quæ eandem habent altitudinem, adinuicem sunt, sicuti bases.

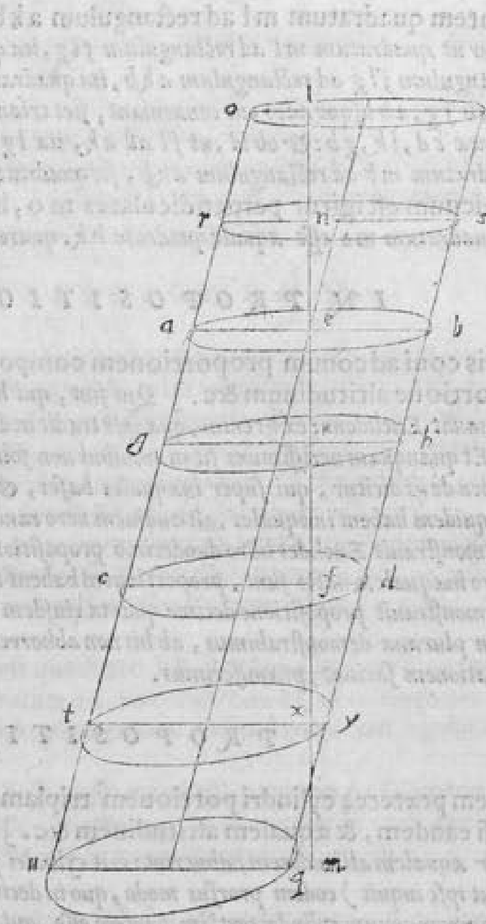
Et hoc facile demonstrabitur, quo modo in undecima duodecimi eiusdem Euclidis demonstratum est, sub eadem altitudine existentes conos, ac cylindros adinuicem esse, sicuti bases.

PROPOSITIO III.

Si cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: erit portio ad portionem, sicuti altitudo ad altitudinem.

Cylindri portio a d plano secetur g h, æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, uidelicet ipsis a b, c d: à puncto autem e, termino axis portionis demittatur linea e f, perpendicularis super planum, in quo est c d: & occurrat plano g h in puncto k. Dico sic esse portionem b g ad portionem g d, ut altitudo e k ad altitudinem k f. producatur enim linea e f utraque ex parte in l m puncta: & ponantur ipsi e k lineæ æquales quotcunque libuerit e n, n l: ipsi autem k f ponantur æquales quotcunque f x, x m: & ducantur per puncta l m plana æquidistantia ipsis a b, c d: & ad ea usque producatur cylindri portio o q. præterea per puncta n x ducantur plana æquidistantia ijsdem, quæ portionem ipsam secent. manifestum est ex ijs, quæ superius monstrata sunt, his planis portionem cylindri secantibus, sectiones fieri coni acutianguli sectiones, seu ellipses, æquales, & similes. Quare spatia his sectionibus contenta æqualia erunt. Itaque intelligantur portio-

nes cylindri p r, r b, d t, t q, quarum bases sint spatia coni acutianguli sectionibus r s, a b, t y, q u contenta. & quoniam ipsæ l n, n e, e k, altitudines sunt æquales: portiones p r, r b, b g ad inuicem sunt, sicuti bases, ex antecedenti. bases autem sunt æquales. & ipsæ igitur portiones æquales erunt. Et eodem modo, quoniam ipsæ m x, x f, f k, sunt æquales: & bases æquales: portiones q t, t d, d g inter se sunt æquales. Demonstrabitur tandem, quemadmodum in tertia decima duodecimi Euclidis portionem b g ad portionem g d esse, sicut altitudo e k ad k f altitudinem: quod monstrare uolebamus.



Monstrabitur quoque simili ratione idem omnino contingere in cylindro scaleno, ut si plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, sit cylindrus ad cylindrum, sicut altitudo ad altitudinem.

Eorum etenim cylindrorum bases circuli sunt, ut monstrauit Serenus in cylindricis, atque æquales circuli; quòd æquales habeant diametros. faciet autem ad eius demonstrationem undecima duodecimi Euclidis, quam etiam ad conos, & cylindros scalenos referri nihil est, quod prohibeat, quemadmodum, & decimam eiusdem.

Manifestum etiam est, si cylindrus quilibet, seu cylindri portio plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum ad cylindrum, seu portionem ad portionem, sicut axis unius ad axem alterius.

De recto enim cylindro patet ex demonstratis ab Euclide, de scaleno autem, & cylindri portione patere potest ex iam dictis, nam ut altitudo ad altitudinem, ita axis ad axem ex secunda sexti elementorum, uel ex decima septima undecimi.

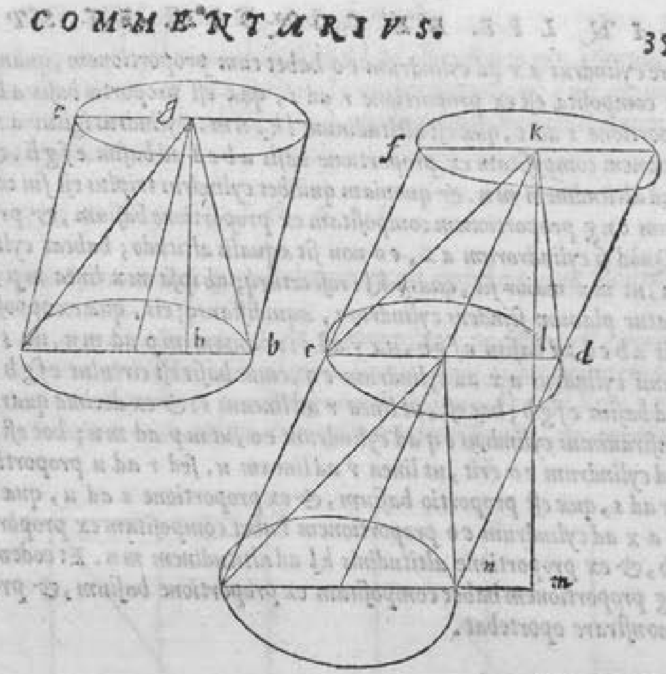
PROPOSITIO IIII.

Quæ inæqualibus basibus existunt cylindri, & coni portiones, adinuicem sunt, sicuti altitudines.

Sint inæqualibus basibus a b, c d cylindri portiones e b, f d: & à punctis g k, quæ sunt termini axium demittantur lineæ perpendiculares g h, k l ad plana, in quibus sunt bases a b, c d. Dico portionem cylindri e b ad portionem f d esse, sicut altitudo g h ad altitudinem k l. producatur enim k l usque ad m; ita ut sit l m æqualis ipsi g h: & per m ducatur planum m n, æquidistans c d plano: & usque eò intelligatur producta portio f d, quæ sit f n. Quoniam igitur e b, c n cylindri portiones eandem habent altitudinem: adinuicem sunt sicuti bases. bases autem sunt æquales. ergo & cylindri portiones e b, c n inter se sunt æquales. Præterea cum cylindri portio f n plano quodam secetur c d æquidistanti eis, quæ ex opposito planis: cylindri portio c n ad portionem f d est, sicut altitudo m l ad altitudinem l k, æqualis autem monstrata est portio c n ipsi portioni e b. portio igitur e b ad portionem f d est, sicut m l; hoc est g h altitudo ad altitudinem k l. sed

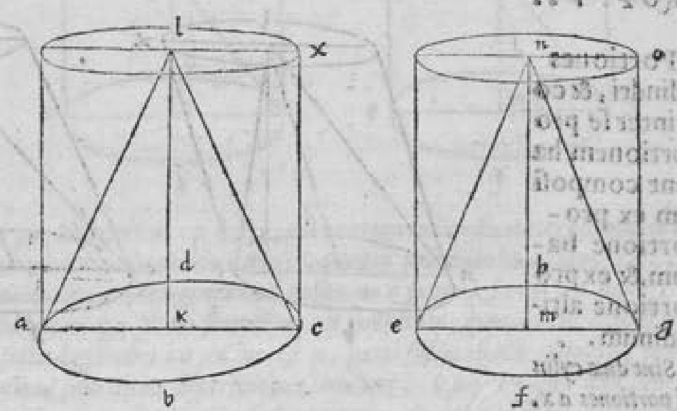
sicut

ſicut cylindri portio ad cylindri portionem, ſic portio coni ad coni portionem; nam cylindri portio tripla eſt portionis coni, ut dictum eſt. quare & coni portio a b g ad coni portionem c d k eſt, ſicut g h altitudo ad altitudinem k l: quod fuerat monſtrãdum. Hoc idem facile cõcludetur de cylindris, ac conis ſcalenis ex decima, & undecima duodecim Euclidis una cum antecedenti.

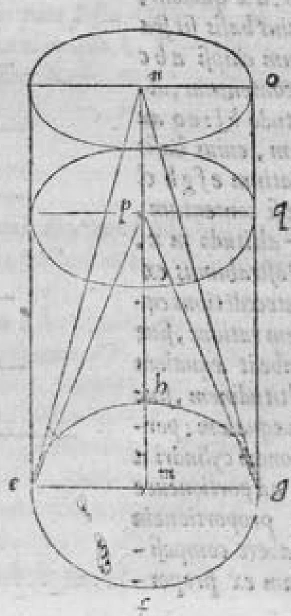


PROPOSITIO V.

Cylindri omnes, & coni inter ſe proportionem habẽt compoſitam ex proportione baſium, & ex proportione altitudinum.



Sint duo cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni a x, e o; a x quidem, cuius baſis ſit circulus a b c d, altitudo k l; e o autem, cuius baſis circulus e f g h; & altitudo m n. Dico cylindrum a x ad cylindrum e o proportionem habere compoſitam ex proportione baſis a b c d ad baſim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Vel igitur hi cylindri habebunt æqualem altitudinẽ, uel non æqualem. habeant primo æqualem: & ſit ut baſis a b c d ad baſim e f g h, ita linea r ad lineam s. ut autem k l ad m n, ita s ad lineam t. Iam ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionẽ, quam baſis a b c d ad baſim e f g h; hoc eſt, quam linea r ad lineam s. & cũ ſit æqualis k l ipſi m n: erit & s æqualis ipſi t.



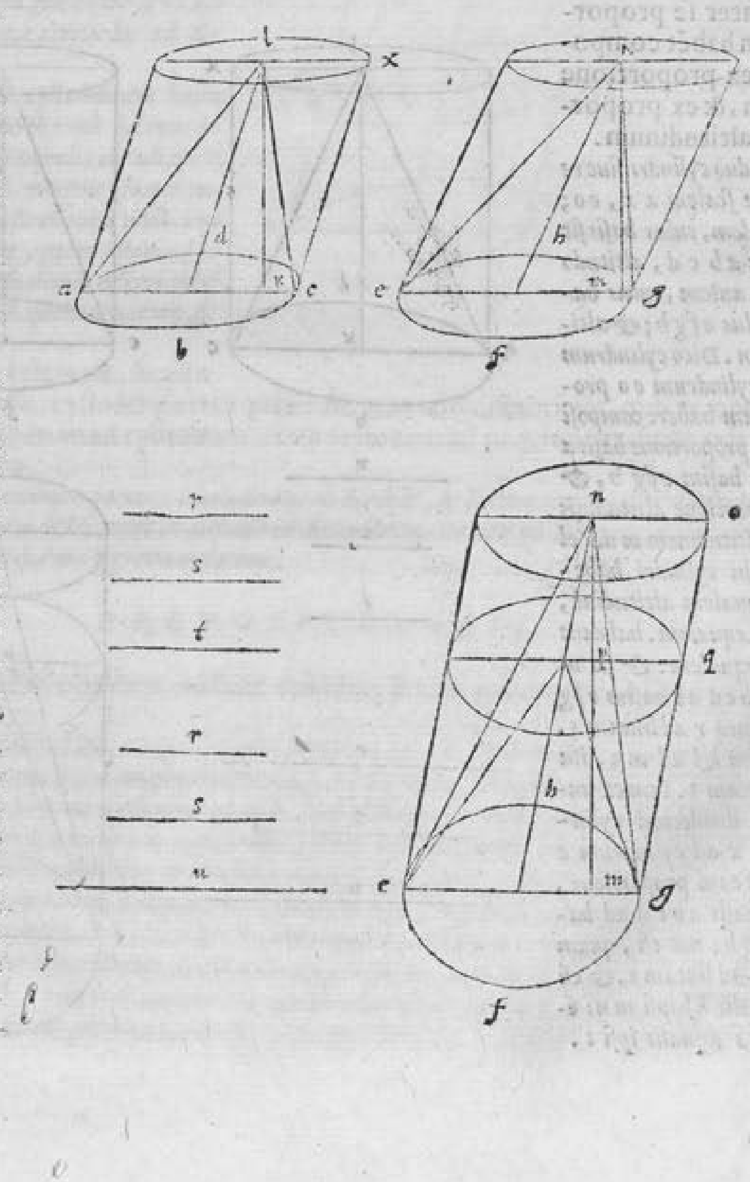
quare cylindrus a x ad cylindrum e o habet eam proportionem, quam r ad t. proportio autem r ad t composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basis a b c d ad basim e f g h: & ex proportione s ad t, quæ est altitudinum l k, n m. Cylindrus igitur a x ad cylindrum e o habet proportionem compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & quoniam quilibet cylindrus triplus est sui coni: habebit & a l c conus ad conum e n g proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Quòd si cylindrorum a x, e o non sit æqualis altitudo; habeat cylindrus e o maiorem altitudinem, ut m n maior sit, quàm k l: reseceturq; ab ipsa m n linea m p, æqualis ipsi k l: & per p ducatur planum scindens cylindrum, æquidistansq; eis, quæ ex opposito planis: & sit rursus, ut basis a b c d ad basim e f g h, ita r ad s: ut autem m p ad m n, ita s ad u. erit ex undecima duodecimi cylindrus a x ad cylindrum e q, cuius basis est circulus e f g h, altitudo m p, ut basis a b c d ad basim e f g h; hoc est, ut linea r ad lineam s: & ex decima quarta duodecimi, & ijs, quæ nos 22.quinti. *monstrauimus cylindrus e q ad cylindrum e o, ut m p ad m n; hoc est ut s ad u. quare cylindrus a x ad cylindrum e o erit, ut linea r ad lineam u. sed r ad u proportio composita est ex proportione r ad s, quæ est proportio basium, & ex proportione s ad u, quæ est altitudinum. cylindrus igitur a x ad cylindrum e o proportionem habet compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. Et eodem modo conus a l c ad conum e n g proportionem habet compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum: quod demonstrare oportebat.*

PROP. VI.

Portiones cylindri, & coni inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

Sint duæ cylindri portiones a x, e o: a x quidem, cuius basis sit spatium ellipsi a b c d contentum, altitudo k l: e o autem, cuius basis spatium e f g h ellipsi contentum, & altitudo m n. Mõstrabimus ex antecedẽtibus eadem ratione, siue habeát æqualem altitudinem, siue inæqualem; portionem cylindri a x ad portionem e o proportionem habere compositam ex propor-

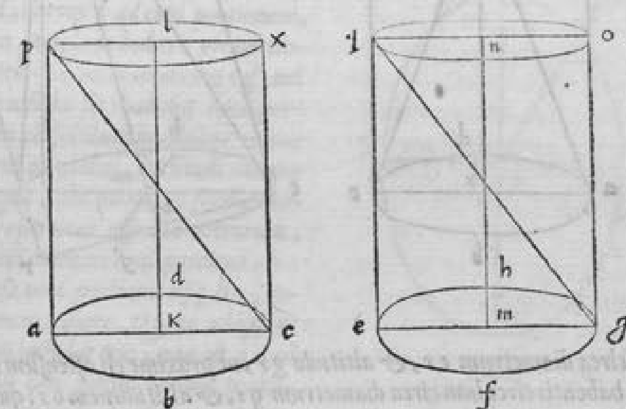


tione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis k l ad altitudinem m n. & cum cylindri portio tripla sit portionis coni: habebit & coni portio a l c ad portionem coni e n g proportionem compositam ex proportione basium earum a b c d, e f g h, & ex proportione altitudinum k l, m n: quod fuerat nobis propositum.

PROPOSITIO VII.

Cylindrus omnis, plano per diametrum parallelogrammi, quod ex eius sectione per axem fit, ducto bifariam secatur.

Sit cylindrus a x, cuius basis circulus a b c d; axis k l: & secetur plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem ducto, & erecto super planum secans, quod faciat sectionem parallelogrammum a c x p: & plani per diametrum parallelogrammi secantis, sit recta linea c p. Dico cylindrum plano per c p ducto bifariam secari. Sit alter cylindrus huic similis, & æqualis e o, cuius basis circulus e f g h; axis m n: & secetur itidem duobus planis, ut in altero factum est: sitq; sectio per axem parallelogrammum e g o q: & g q recta linea plani per diametrum secantis. Erit iam parallelogrammum e g o q æquale, & simile parallelogrammo a c x p: et diameter g q dia metro c p æqualis. quare & ellipsis facta plano per diametrum g q, æqualis, &



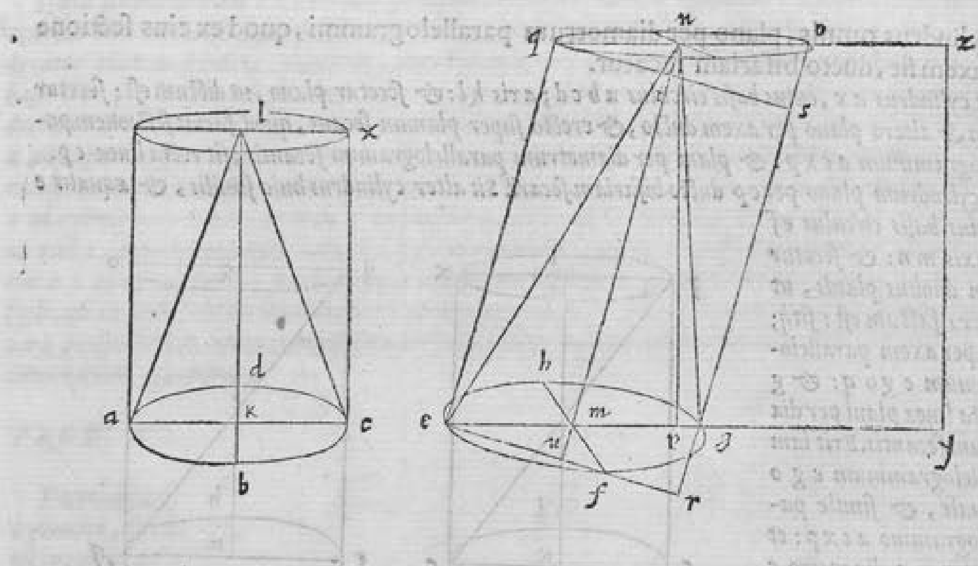
similis erit ellipsis factæ plano per diametrum c p ducto; nam earum maior diameter est eadem diametro parallelogrammi; minor uero æqualis diametro basis, quod in principio huius monstratū est. Itaque congruet parallelogrammum parallelogrammo, posita m n super k l; & g q super c p. congruet autem & planum secundum g q plano secundum c p constituto; quoniam & ellipsis ellipsi. congruet igitur & pars secta à cylindro e o, in qua est n, parti sectæ ab alio cylindro, in qua l: atque altera alteri: & partium superficies superficiebus similiter. Rursus posita n m super k l, ut sit n super k, & m super l; congruent & parallelogramma, & cadet q super c; & g super p: & planum secundum q g plano secundum c p congruet: & pars secta à cylindro, in qua m, parti sectæ ab alio cylindro, in qua l: & item pars in qua n, parti in qua k. Quoniam igitur pars eadem utrique congruit parti: manifestum est partes æquales inter se esse. quare cylindrus plano per c p ducto bifariam secatur. quod ostendere oportebat.

PROPOSITIO VIII.

Cylindri omnes, & cylindrorum portiones, & item coni, & conorum portiones inter se, proportionem habent compositam ex proportione basium, & ex proportione altitudinum.

Sit cylindrus siue rectus, siue scalenus a x, cuius basis sit circulus a b c d; altitudo l k: & cylindri portio e o, basim habens spatium ellipsi e f g h, contentum; axem uero n m; & altitudinem n p. Dico cylindrum a x ad cylindri portionem e o proportionem habere compositam ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. secetur cylindri portio plano per axem ducto: & sit sectio e g o q, quam esse parallelogrammum facile monstrari potest; quomodo à sereno monstratum est, cuiuslibet cylindri, plano per axem ducto, sectionem esse parallelogrammum: & à puncto e ducatur linea e r, ad rectos angulos ipsi e q: & similiter à q alia ducatur ad rectos angulos eidem, quæ sit q s secans axem in y. Intelligaturq; cylindri portio, producta ex parte e f g h, usque ad lineam e r, quam n m secet in u: & per e r ducatur

tur planum secans erectum super planum per axem: deinde per lineam q s ducatur aliud planum secans, quod plano per lineam e r ducto æquidistet. Erit r q cylindrus, basim habens circulum circa diametrum e r, & axem t u, æqualis cylindri portioni e o: nam pars e r g, addita cylindri portioni, æqualis est parti q s o, demptæ ab eadem. est enim e r g dimidia cylindri, cuius basis est cir



culus circa diametrum e r, & altitudo g r, ut proxime est ostensum: & q s o item dimidia cylindri, basim habentis circulum circa diametrum q s, & altitudinem o s: qui cylindri cum æquales habeant & bases, & altitudines, æquales inter se sunt. quare & eorum dimidiæ partes, æquales. Eorum autem altitudines, lineas scilicet g r, o s æquales esse patet; nanque est r s æqualis ipsi o g, cum utraque sit æqualis eidem q e. dempta ergo communi linea s g, relinquentur ipsæ q r, o s æquales. producatur quoque linea e g usque ad y: ita ut sit g y media proportionalis inter g e, e r.
17. sexti. *Itaque cum tres lineæ e g, g y, e r proportionales sint; rectangulum g e r æquale est quadrato g y: & est e g diameter ellipsis e f g h: & e r æqualis secundæ diametro eiusdem. rectangulum igitur ex diametris ellipsis e f g h est æquale quadrato g y: & propterea spatium ipsa ellipsi contentum æ-*
29. primi. *quale est circulo circa diametrum g y; ex septima huius. Et quoniam angulus e g r æqualis est angulo n m p: & anguli e r g, n p m utrique recti: erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis: & triangulum e r g triangulo n p m simile. quare e r ad e g est, ut n p ad n m; hoc est ad t u; ei*
4. sexti. *æqualem. Et rursus cum tres lineæ proportionales sint e r, g y, e g: erit, ut e r ad e g, ita quadra*
corol. 20. sexti. *tum e r ad quadratum g y; hoc est circulus circa diametrum e r ad circulum circa diametrum g y. Intelligatur cylindrus g z, cuius basis sit circulus circa diametrum g y, & altitudo n p. quorum*
2. duodec. *autem cylindrorum bases ex altera parte respondent altitudinibus, ij inter se sunt æquales; ex decima quinta duodecimi. æqualis est igitur cylindrus g z cylindro r q. sed cylindrus r q est æqualis portioni cylindri e o, ut monstrauimus. quare & g z cylindrus eidem portioni e o est æqualis. & proportio cylindri a x ad cylindrum g z est eadem proportioni eiusdem ad cylindri portionem e o. sed proportio cylindri a x ad cylindrum g z, composita est ex proportione circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y, & ex proportione l k ad n p. ergo & proportio eiusdem cylindri a x ad cy-*
7. quinti. *lindri portionem e o composita est ex eisdem proportionibus. proportio autem circuli a b c d ad circulum circa diametrum g y est eadem proportioni eiusdem circuli a b c d ad spatiũ ellipsi e f g h contentum; quod quidem ipsi circulo circa g y diametrum est æquale. proportio igitur cylindri a x ad cylindri portionem e o composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p. At uero triplus est cylindrus a x, coni a l c: & portio cylindri e o item tripla portionis coni e n g. ergo & coni a l c ad coni portionem e n g proportio composita est ex proportione basis a b c d ad basim e f g h, & ex proportione altitudinis l k ad altitudinem n p: quod proposuimus demonstrandum.*

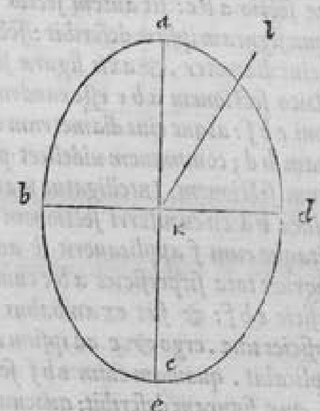
Ex

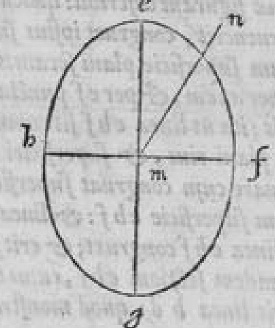
Ex his colligitur, cylindros omnes, & eorum portiones, & item conos, & eorum portiones, sub eadem quidem altitudine existentes, eam inter se proportionem habere, quam ipsæ bases; super æqualibus autem basibus existentes, eam habere, quam altitudines.

PROPOSITIO IX.

Similes coni, & cylindri porriones in tripla sunt proportione diametrorum consimilium, quæ in basibus.

Coni, & cylindri portiones similes, quæ sint, dictum est superius. Sint autem hæ, quarum bases quidem a b c d, e f g h spatia ellipsibus contenta: diametri uero basium maiores a c, e g; minores b d, f h; & axes k l m n. Dico coni portionem, cuius basis a b c d, uertex l ad coni portionem, cuius basi e f g h, & uertex n, triplam habere proportionem eius, quam habet diameter a c ad diametrum e g; uel quam b d ad ipsam f h. nam nisi ita sit: habebit coni portio a b c d l eam proportionem ad solidum quoddam minus ipsa coni portione e f g h n, aut ad maius. sed simili ratione qua utitur Euclides in duodecimo, ubi monstrat similes conos, & cylindros in tripla proportione esse diametrorum, quæ in basibus, & hoc loco monstrabimus coni portioné a b c d l neque ad solidum minus ipsa coni portione e f g h n, neque ad maius, eam proportionem habere. Quare ad ipsam e f g h n triplam proportionem habebit eius, quæ est a c ad e g, aut b d ad f h. ut autem coni portio ad coni portionem, ita & cylindri portio ad cylindri portionem. Cylindri igitur portio, cuius basis a b c d, & uertex l ad cylindri portionem, cuius basis e f g h, uertex n, triplam habet proportionem diametri a c ad diametrum e g, uel b d ad f h: quod fuerat propositum.





PROPOSITIO X.

Aequalium coni, & cylindri portionum bases ex contraria parte respondent altitudinibus; & quarum coni, & cylindri portionum bases ex contraria parte respondent altitudinibus, hæ inter se sunt æquales.

Hoc monstrabimus eadem prorsus ratione, qua monstratur in decima quinta duodecimi Euclidis, Aequalium conorum, & cylindrorum bases ex contraria parte respondere altitudinibus: & quorum item bases ex contraria parte respondent altitudinibus, conos, & cylindros æquales esse. Monstratum siquidem est, conorum, & cylindrorum portiones sub eadem quidem altitudine existentes, eam inter se proportionem habere, quam ipsæ bases, In æqualibus autem basibus existentes, eam habere, quam altitudines. ex quibus propositum facile concludetur.

De conis item, ac cylindris scalenis uerum id esse monstrabimus non alia ratione, quàm in eadem decima quinta duodecimi de rectis monstratum est.

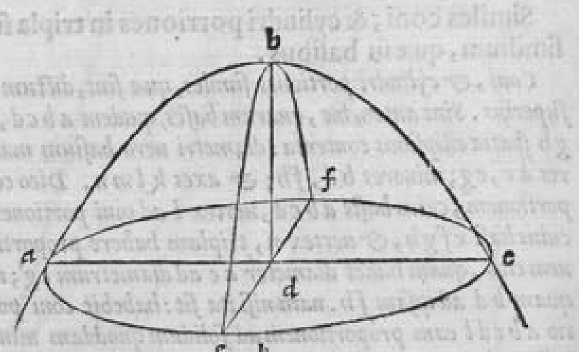
Nanque & hi cum sub eadem sint altitudine proportionem habent inter se, quam eorum bases: & cum in æqualibus basibus statuantur eam habent, quam altitudines.

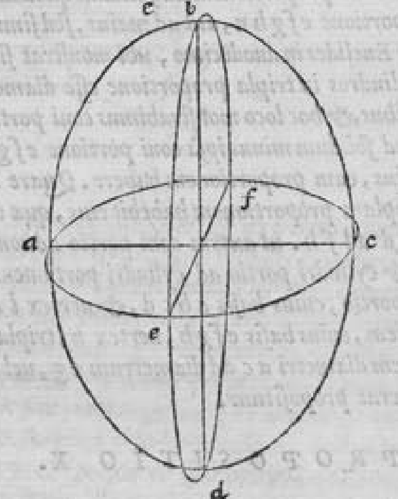
IN PROPOSITIONEM XII.

Horum autem omnium manifestæ sunt demonstrationes.] *Demonstrationes eorum, cum non adeo manifestæ sint his temporibus, nos omnes afferre tentabimus, immutato tamen ordine, prout methodus ipsa postulare uidetur.* A

PROPOSITIO I.

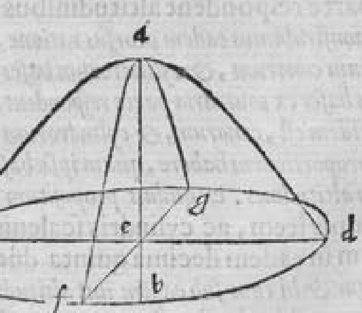
Si conoides, aut ſphæroides quodlibet plano ſecetur per axem ducto: ſectio erit eadem illi, quæ figuram deſcribit: diameter autem eius erit communis ſectio planorum; eius ſcilicet, quod ſecat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum ſuper planum ſecans.





Secetur conoides, aut ſphæroides quodlibet plano, ut dictum eſt: ſecetur autem & altero plano per axem, erecto ſuper planum ſecans: & ſit figuræ ſectio a b c: ſit autem ſectio e b f, quæ figuram ipſam deſcribit: ſectionis eius diameter, & axis figuræ ſit b d. Dico ſectionem a b c eſſe eandem ſectioni e b f: atque eius diametrum eſſe lineam b d; communem uidelicet planorum ſectionem. Intelligatur manente linea b d circumferri ſectionem e b f. itaque cum f applicauerit ſe ad c: congruet tota ſuperficies a b c cum ſuperficie e b f: & fiet ex ambabus ſuperficies una. ergo & e ad ipſum a ſe applicabit. quoniam enim e b f ſectio eſt, quæ figuram deſcribit: quocunque ea peruenerit, congruet ipſius ſuperficies cum ſuperficie plani ſecantis figuram per axem, & per e f puncta tranſeuntis; ita ut linea e b f ſit communis ſectio plani eius, & ſuperficiei figuræ. quare cum congruat ſuperficies a b c cum ſuperficie e b f: & linea a b c cum linea e b f congruet; & erit ſectio a b c eadem ſectioni e b f, cuius diameter erit linea b d: quod monſtrare oportebat.

PROPOSITIO II.

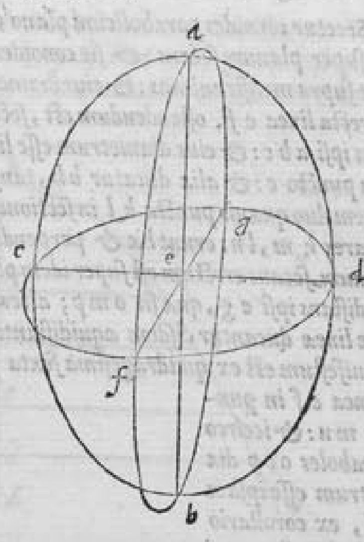


Si conoides, aut ſphæroides quodlibet plano ſecetur ſuper axem erecto: ſectio circulus erit centrum habens in axe.

Sit conoides, aut ſphæroides quodlibet, cuius axis a b: ſecetur autem plano, ut dictum eſt; quod faciat in ſuperficie ſectionem, lineam c d. Dico c d circulum eſſe, centrum habentem in linea a b. Sit enim e punctum, in quo linea a b occurrit ſecanti plano: & per axem, & c d puncta ducatur planum ſecans figuram, & faciens ſectionem c a d. erit ſectio eadem illi, quæ figuram deſcribit, ex antecedenti; & eius diameter linea a b. & quoniam puncta c e d, ſunt in plano ſecanti ſuper axem erecto: ſunt autem & in plano

ſecanti

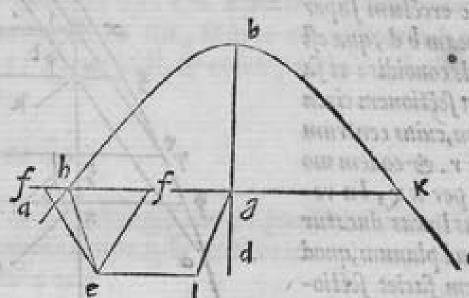
secanti per axem: recta linea erit c e d. sumatur præterea aliud quod uis punctum f in sectione c d: & per f & axem rursus ducatur aliud planum secans, faciensq; sectionem f a g. manifestum est f a g quoque esse eandem illi, quæ figuram describit; habereq; diametrum lineam a b: & similiter lineam f e g rectam esse. Cum ergo sectiones c a d, f a g, uni, & eidem eædem sint: & inter se eædem erunt; quarum eadem diameter a b: & erit c e æqualis ipsi f e. sed est e d æqualis ipsi c e: & e g ipsi f e. quare omnes inter se se sunt æquales c e, f e, e d, e g: & sunt in eodem plano. circulus igitur est linea c d, centrum habens in linea a b: quod fuerat demonstrandum. 3. undec.

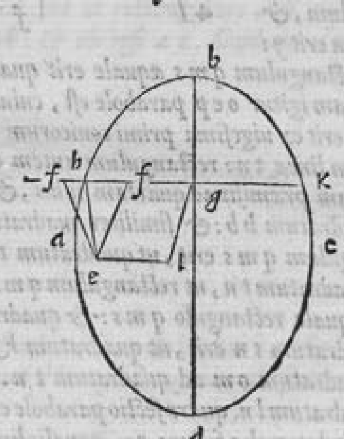


PROPOSITIO III.

Si conoides, aut sphæroides quodlibet secetur plano per axem: lineæ ductæ à punctis, quæ in superficie figuræ sunt, non tamen in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figuræ sectionem cadent.

Sit conoides, aut sphæroides quodlibet: & secetur plano per axem; cuius sectio sit a b c: axis figuræ, & diameter sectionis sit b d. sumatur autem in superficie eius quod uis punctum e, præterquam in ipsa sectione a b c: & ab eo ducatur linea e f perpendicularis ad planum secans. Dico e f intra sectionem cadere; alioquin, aut cadet extra, aut in sectionem ipsam. cadat primum extra, si fieri possit: & per f ducatur aliud planum secans figuram, & super axem erectum, faciet id sectionem circulum, centrum habentem in axi, ubi punctum g. communis autem sectio dictorum planorum sit recta linea f h g k: & à g attollatur g l perpendicularis ad idem planum secans per axem: atque per e ducatur e l æquidistans ipsi f k. erit & l g æquidistans ipsi e f: & idcirco e l æqualis ipsi f g. sed h g cum sit semidiameter circuli: maior est, quàm e l; quòd dupla ipsius h g maior, quàm dupla e l. quare h g maior est, quàm f g; pars, quàm totum: quod fieri non potest. non igitur cadet e f extra sectionem. Similiter quoque demonstrabimus, neque in ipsam sectionem cadere. nam si eadem omnia fiant, quæ superius: sequitur e l æqualem ipsę ipsi h g: quod item fieri non potest: est enim h g circuli semidiameter, & maior, quàm e l, ut dictum est. cadet igitur intra sectionem: quod fuerat propositum.

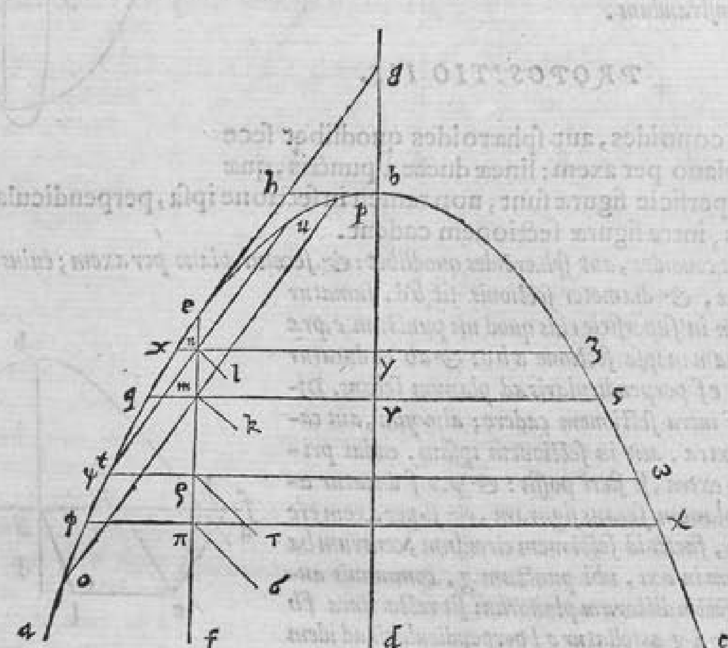




PROPOSITIO IIII.

Si conoides parabolicum plano secetur axi æquidistanti: sectio erit parabole, eadem illi, quæ figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; eius, quod secat figuram; & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans.

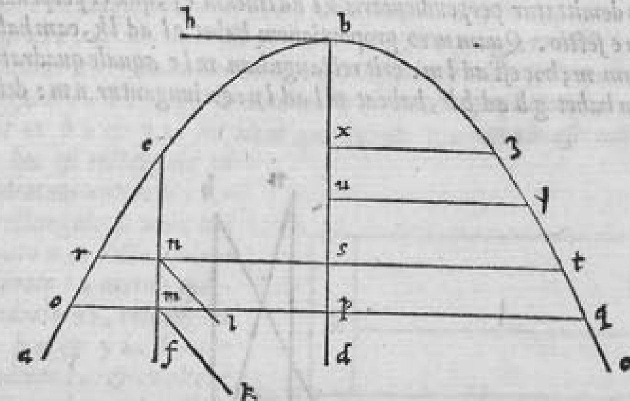
Secetur conoides parabolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoides sectio a b c; quæ erit parabole figuram describens, ex ijs, quæ supra monstrauimus: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram secantis sit recta linea e f. ostendendum est, sectionem conoidis, quæ fit plano circa e f, esse parabolen, eandem ipsi a b c: & eius diametrum esse lineam e f. Ducatur enim linea e g, tangens sectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b h, tangens in puncto b, & secans lineam e g in h. intelligantur autem duo quæuis puncta k l in sectione circa e f: & ab ipsis demittantur ad lineam e f perpendiculares k m, l n. erunt hæ & perpendiculares ad planum, in quo est parabole a b c: quoniam & planum secans erectum est super idem planum. Deinde per m ducantur duæ lineæ; una quidem æquidistans ipsi e g, quæ sit o m p; altera uero q m r s, æquidistans ipsi b h: & similiter per n duæ aliæ lineæ ducantur eisdem æquidistantes, uidelicet t n u ipsi e g æquidistans, & x n y z ipsi b h. manifestum est ex quadragesima sexta primi conicorum Apollonij, lineas o p, t u bifariam secari à linea e f in punctis m n: & iccirco paraboles o e p diametrum esse ipsam e f, ex corollario quinquagesimæ primæ primi eiusdem. præterea per q s, k m rectas lineas ducatur planum. erit hoc erectum super lineam b d, quæ est axis conoidis: et faciet sectionem circulum, cuius centrum est r. & eodem modo per x z, l n rectas lineas ducatur aliud planum, quod item faciet sectionem circulum, & eius cẽtrum erit y:



& ob id rectangulum q m s æquale erit quadrato k m: & rectangulum x n z æquale quadrato l n. Quoniam igitur o e p parabole est, cuius diameter e m: ducunturq́; ordinatim ad diametrum o m, t n: erit ex uigesima primi conicorum linea m e ad lineam e n, ut quadratum lineæ o m ad quadratum lineæ t n: rectangulum autem o m p, hoc est quadratum o m ad rectangulum q m s, ex ea, quam præmisit ad quartam huius, & decima septima tertij conicorum, erit, ut quadratum e h ad quadratum h b: & similiter quadratum t n ad rectangulum x n z. quare quadratum o m ad rectangulum q m s erit, ut quadratum t n ad rectangulum x n z: & permutando quadratum o m ad quadratum t n, ut rectangulum q m s ad rectangulum x n z. sed quadratum k m monstratum est æquale rectangulo q m s: & quadratum l n æquale rectangulo x n z. ergo quadratum o m ad quadratum t n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. erat autem linea m e ad lineam e n, ut quadratum o m ad quadratum t n. linea igitur m e ad lineam e n erit, ut quadratum k m ad quadratum l n. quare sectio parabole erit ex uigesima primi conicorum: et eius diameter linea e f. Abscindatur ab e f linea e π, æqualis lineæ b r: & linea e ρ, æqualis ipsi b y: et à punctis π ρ attollantur æquidistantes ipsis m k, n l usque ad sectionem circa e f, quæ sint π σ, ρ τ: deinde per π ducatur linea φ π χ, æquidistans ipsi b h: & per ρ; eidem æquidistans ducatur ψ ρ ω. erit quadratum σ π æquale rectangulo φ π χ: & quadratum τ ρ æquale ipsi ψ ρ ω. rectangulum autem φ π χ æquale est quadrato q r, per ea, quæ ostendimus ad quintam huius; & rectangulum ψ ρ ω æquale quadrato x y. quadratum igitur σ π est æquale quadrato q r: & quadratum τ ρ quadrato x y. quare & linea σ π lineæ q r; & linea τ ρ ipsi x y est æqualis. parabole igitur circa e f, æqualis est, & eadem parabolæ a b c; hoc est ei, quæ figuram describit: quod fuerat ostendendum.

ALITER.

ALITER. Iisdem manentibus, sumptisq; in sectione circa e f duobus quibuslibet punctis k l, et demissis perpendicularibus k m, l n ad ipsam e f, per m ducatur linea o m p q, æquidistans ipsi h b: & per n r n s t ducatur, eidem æquidistans: similiterq; & per rectas lineas k m, o q; & per ipsas l n r t ducantur plana conoides secantia. erunt ea erecta super axem b d: & facient sectiones circulos, quorum centra p s. unde rectangulum o m q æquale erit quadrato k m: & r n t rectangulum æquale quadrato l n. præterea in diametro sectionis b d sumpta linea b u, æquali ipsi e m; & sumpta b x, æquali e n; atque à punctis u x ductis æquidistantibus ipsi h b lineis u y x z, erit quadratum u y ad quadratum x z, ut linea u b ad lineam b x. sed cũ rectangulum o m q æquale sit quadrato u y, ut supra ostendimus; & rectangulum r n t æquale quadrato x z: erunt quadrata u y, k m æqualia: & item æqualia quadrata x z, l n. quare quadratum k m ad quadratum l n erit, ut linea u b ad lineam b x, hoc est ut linea m e ad lineam e n. sectio ergo circa e f parabole est, & eadem parabolæ a b c, quæ figuram describit: quod proponebatur ostendendum.



20. primi conicorũ

LEMMA.

Si recta linea secetur in duobus punctis: sitq; rectangulum ex partibus unius sectionis æquale rectangulo ex partibus alterius: erunt ipsæ partes inter se æquales: hoc est maior maiori, & minor minori æqualis erit.

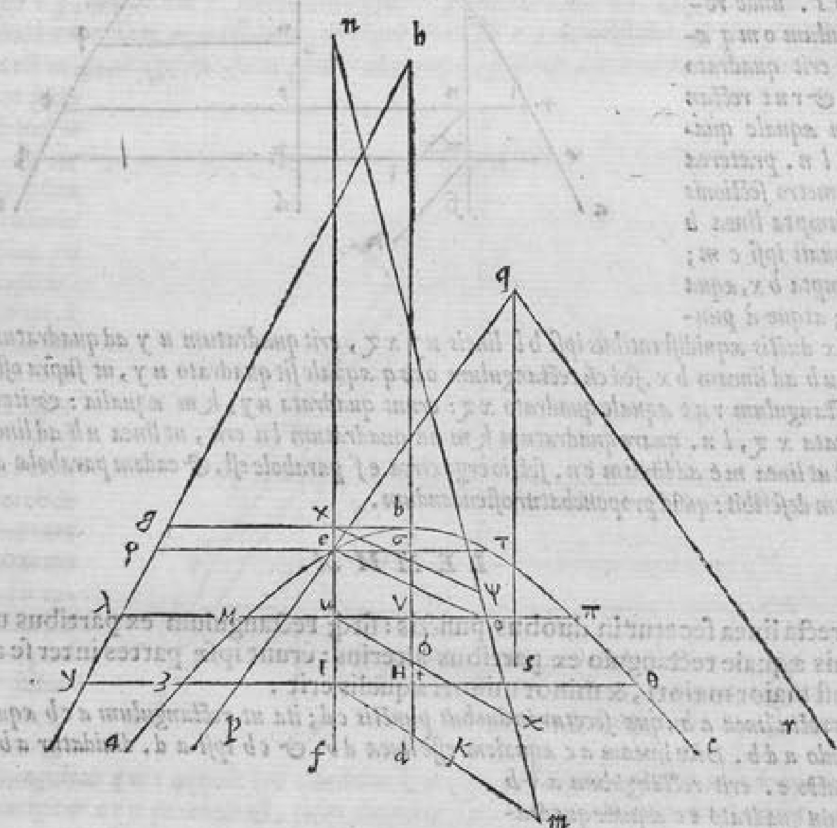
Sit recta linea a b, quæ secetur in duobus punctis c d; ita ut rectangulum a c b æquale sit rectangulo a d b. Dico lineam a c æqualem esse lineæ d b: & c b ipsi a d. diuidatur a b bifariam in puncto e. erit rectangulum a c b unà cum quadrato e c æquale quadrato e b; ex quinta secundi: & eadem ratione rectangulum a d b unà cum quadrato d e æquale eidem. rectangulum ergo a c b unà cum quadrato e c æquale est rectangulo a d b; & quadrato d e: & dempto ex altera parte rectangulo a c b, & ex altera a d b, ei æquali, ut positum est, relinquitur quadratum e c æquale esse quadrato d e: & lineam e c lineæ d e æqualem. quare c b æqualis est ipsi a d: & reliqua a c reliquæ d b æqualis: quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V.

Si conoides hyperbolicum plano secetur, axi æquidistanti: sectio erit hyperbole, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem eius erit communis sectio planorum; & eius, quod figuram secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

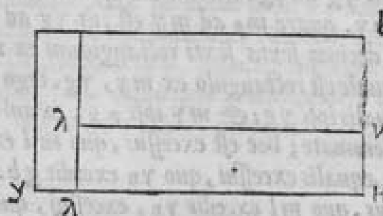
Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum est: secetur autem & altero plano per axem, erecto super planum secans: & sit conoidis sectio a b c, quæ erit hyperbole, ut superius est demonstratum:

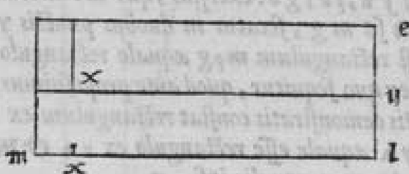
stratum: & eius diameter, & axis conoidis, recta b d: plani uero figuram secantis sit ipsa linea e f. Ostendendum est, sectionem conoidis factam plano circa e f, esse hyperbolen, similem ipsi a b c: eiusq; diametrum esse lineam e f. Sit hyperboles a b c rectum figuræ latus b g; & transuersum b h: & ducta linea h g producatur. Intelligatur autem in sectione circa e f aliquod punctum k: atque ab eo demittatur perpendicularis k l ad lineam e f, quæ et perpendicularis erit super planum, in quo a b c sectio. Quam uero proportionem habet e l ad l k, eam habeat l k ad l k productam
16. sexti. ad punctum m; hoc est ad l m. erit rectangulum m l e æquale quadrato k l. Rursus quam proportionem habet g b ad b h, habeat m l ad l n: & iungantur n m: deinde à puncto e attollatur



perpendicularis e o super planum, in quo sectio a b c usque ad lineam n m. coibit enim cum ea in
6. undec. eodem existens plano, & æquidistabit ipsi l m: proptereaq; n e ad e o erit, ut n l ad l m; hoc est ut h b ad b g. Duabus igitur datis rectis lineis, terminatis ad rectos angulos n e, e o, inueniemus ex quinquagesima tertia primi conicorum, in ipsa e f coni sectionem dictam hyperbolen in eodem plano; ita ut e f diameter sit sectionis; uertex punctum e; eiusq; figuræ rectum latus sit e o; & transuersum e n. Sit autem conus, cuius ipsa est sectio p q r: & eius axis q s. erit iam coni p q r sectio; hoc est ipsa hyperbole inuenta, eadem sectioni conoidis circa e f, factæ ab eodem plano. punctum enim k, quod in sectione conoidis sumpsimus, in sectione quoque coni esse constat, ex duodecima primi conicorum: cum sit quadratum k l æquale rectangulo m l e. Intelligatur aliud punctum t in sectione coni; & ab ipso perpendicularis demittatur t u ad lineam e f: producaturq; ad ipsam n m, ut coeat cum ea in puncto x. erit quadratum t u eadem ratione æquale rectangulo x u e. Ducatur præterea per punctum l linea y ζ l κ θ, æquidistans ipsi g b, & secans hyperbolen a b c in punctis ζ θ, diametrum in κ, & lineam h g productum in y: & item per u e ducantur aliæ lineæ, eidem æquidistantes; per u quidem ipsa λ μ u ν π, secans hyperbolen in μ π, diametrum in ν, & h χ in λ: per e autem linea ρ e σ τ, secans hyperbolen in e τ, diametrum in σ, & h y in ρ: ab ipso demum puncto u attollatur linea perpendicularis super planum, in quo a b c, occurrens

occurrens sectioni conoidis in φ: & per lineas kl, zθ ducatur planum secans conoides: quod cum sit erectum super eius axem; faciet sectionem circulum. ducatur etiam per lineas φu, μπ aliud planum secans item conoides. faciet & id sectionem circulum: atque erit quadratum kl æquale rectangulo zlθ: & similiter quadratum φu æquale ipsi μuπ rectangulo. Monstrabitur linea iam dicta φu æqualis esse ipsi ut. rectangulum enim yηb, ut in subiecta figura apparet, excedit rectangulum λνb, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & excessu, quo yη excedit λν, qui excessus, breuitatis caussa, dicatur yλ. quadratum autem zη æquale est rectangulo yηb: & quadratum μν æquale rectangulo λνb. ergo quadratum zη excedit quadratum μν, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & yλ. sed idem quadratum zη æquale est rectangulo zlθ; hoc est quadrato kl; hoc est rectangulo mle, & quadrato lη: quadratum autem μν eadem ratione æquale est rectangulo μuπ; hoc est quadrato φu; & quadrato uν. rectangulum igitur mle unà cum quadrato lη excedit quadratum φu unà cum quadrato uν, rectangulo λνη, & eo, quod fit ex bη & yλ. Itaque dempto ex altera parte quadrato lη: & ex altera quadrato uν, ei æquali, rectangulum mle nihilo minus excedet quadratum φu, eodem illo excessu. quare quadratum φu, & rectangulum λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ æqualia sunt rectangulo mle. Rursus rectangulum mle, ut in secunda figura, excedit rectangulum xue, rectangulo mlu, & eo, quod fit ex eu & excessu, quo ml excedit xu; qui excessus dicatur mx: & idcirco rectangula xue, mlu unà cum eo, quod fit ex eu & mx æqualia sunt rectangulo mle. 2.secundi





Quadratum igitur φu, & rectangulum λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ sunt æqualia rectangulis xue, mlu unà cum eo, quod fit ex eu, & mx: rectangulum autem λνη unà cum eo, quod fit ex bη & yλ æquale est rectangulo mlu, & ei, quod fit ex eu, & mx, ut inferius apparebit. relinquitur igitur quadratum φu æquale esse rectangulo xue. sed erat quadratum tu æquale eidem rectangulo. ergo quadrata φu, tu æqualia sunt: & ob id lineæ φu, tu æquales; immo uero una, atque eadem linea: & φ, τ unum, atque idem punctum.

Illud autem, quod diximus, facile monstrabitur, præmissis non nullis.

Et primo rectangulum ex bσ & excessu, quo yη excedit λν; hoc est yλ, æquale esse rectangulo ex νη & excessu, quo ρσ excedit gb. dicatur autem is excessus ρg.

Nanque ut hσ ad σρ, ita hb ad bg, ob similitudinem triangulorum hσρ, hbg: & ex decima nona quinti, reliquum ad reliquum, sicut totum ad totum; hoc est bσ ad ρg, sicut hσ ad σρ. Eodem modo ostendemus νη ad yλ esse, ut hη ad ηy. ut autem hσ ad σρ, ita hη ad ηy. quare bσ ad ρg est, ut νη ad yλ: & ex decima sexta sexti rectangulum ex bσ & yλ æquale rectangulo ex ρg & νη: quod fuit propositum.

Deinde yλ æqualem esse ipsi mx.

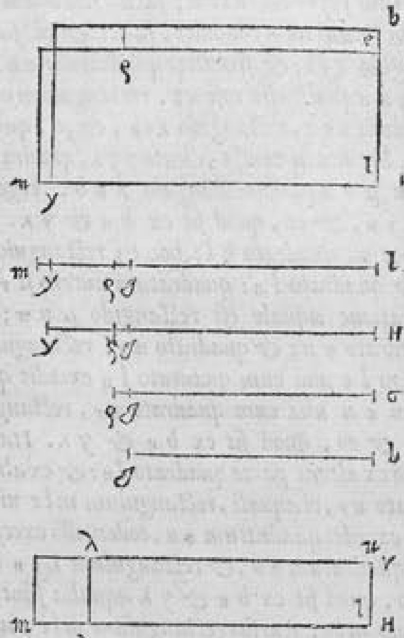
Ostensum est enim νη ad yλ esse, ut hη ad ηy: & similiter ostendetur ul ad mx, ut nl ad lm. cum autem nl ad lm sit, ut hb ad bg; quod antea posuimus; hoc est ut hη ad ηy: erit ul ad mx, ut νη ad yλ: & permutando ut ul ad νη, sic mx ad yλ. sunt autem ul, νη æquales. æquales igitur sunt mx, yλ, ut dicebamus. Idem ostendetur & in reliquis eiusmodi.

Postremo ml excedere yη, eodem excessu, quo ρσ ipsam gb excedit.

Etenim rectangulum mle æquale est quadrato kl; hoc est rectangulo zlθ: additoq; utrinque quadrato æquali; erit rectangulum mle unà cum quadrato eσ æquale rectangulo zlθ unà cum quadrato lη; hoc est æquale quadrato zη. sed quadrato eσ æquale est rectangulum ρσb, ex duodecima primi conicorum: & eadem ratione quadrato zη æquale rectangulum yηb. rectangula igitur mle, ρσb æqualia sunt rectangulo yηb. quare ablato eo, quod est commune utrisque; hoc est rectangulo yησ, & rectangulo ρσb, ut in figura apparet, reliquum reliquo æquale erit; hoc est rectangulum ex el & excessu, quo ml excedit yη, uidelicet mη æquale rectangu- 4.secundi

lo

lo ex bσ & excessu, quo yη excedit ρσ, hoc est yρ. est autem ex decima quarta sexti el ad bσ, ut yρ ad my: & componendo el & bσ; hoc est bη ad bσ, ut yρ & my, hoc est excessus, quo ml excedit ρσ; qui sit mρ ad my. sed ostensum est superius bσ ad ρg esse, sicut bσ ad σρ: & ita ostendetur bη ad excessum, quo yη excedit gb; uidelicet yg, sicut bη ad ηy. atque est bη ad ηy, ut bσ ad σρ. bη igitur ad yg est, sicut bσ ad ρg: & permutando bη ad bσ, sicut yg ad ρg. erat autem bη ad bσ, ut mρ ad my. quare mρ ad my est, ut yg ad ρg: & ex decima sexta sexti rectangulum ex mρ, ρg æquale est rectangulo ex my, yg. ergo mρ est æqualis ipsi yg: & my ipsi ρg, ex antecedenti lemmate; hoc est excessus, quo ml excedit ρσ æqualis excessui, quo yη excedit gb: & excessus, quo ml excedit yη, excessui, quo ρσ excedit gb. si enim ad lineam ml applicentur lineæ yη, ρσ, gb: excessus, quo ml excedit gb, qui sit mg, secatur in duobus punctis yρ: & est rectangulum mρg æquale rectangulo myg. ex quo sequitur, quod ante proposuimus.



His demonstratis constat rectangulum ex bσ & yλ æquale esse rectangulo ex νη & my. est enim my æqualis ipsi ρg.

Itaque cum mlu rectangulum, ut patet, æquale sit rectangulo λνη unà cum eo, quod fit ex νη, & excessu, quo ml excedit λν; hoc est mλ: rectangulum autem ex νη, & mλ æquale sit duobus rectangulis; rectangulo scilicet ex νη & yλ; & rectangulo ex νη & my; ex prima secundi, secta nempe linea mλ in puncto y: rectangulum mlu excedit ipsum λνη rectangulum duobus rectangulis; rectangulo ex νη & yλ; & rectangulo ex νη & my. sed rectangulum
1.secundi *ex bη & yλ eadem ratione est æquale tribus rectangulis, uidelicet rectangulo ex νη yλ; rectangulo ex σν yλ; & ei, quod ex bσ yλ. Quorum primum æquale est, immo idem primo, ex ante dictis; tertium secundo, ut monstrauims; medium uero, quod fit ex σν, yλ æquale ei, quod fit ex eu, & mx. est enim σν æqualis ipsi eu, & mx ipsi yλ, ut etiam ostensum est. rectangulum igitur mlu excedit rectangulum λνη rectangulo, quod ex bη, yλ, dempto ex ipso, quod fit ex eu, mx. Quare eo utrinque addito, rectangulum mlu unà cum rectangulo, quod ex eu, mx, excedit rectangulum λνη, eo, quod fit ex bη, yλ. Vnde sequitur duo rectangula, scilicet rectangulum λνη, & rectangulum ex bη, yλ, æqualia esse duobus rectangulis; rectangulo mlu; & rectangulo ex eu, mx, ut proponebatur. Idem continget & in alijs quibuslibet punctis. constat igitur eandem esse sectionem, coni, & conoidis. quare sectio conoidis hyperbole est, cuius diameter ef; & similis ipsi abc, ex diffinitione, cum figurarum in latera eandem habeant proportionem: quæ omnia demonstrasse oportebat.*

Ex iis, quæ dicta sunt, colligi potest, latus transuersum sectionis circa ef excedere latus transuersum sectionis abc, duplo lineæ bσ.

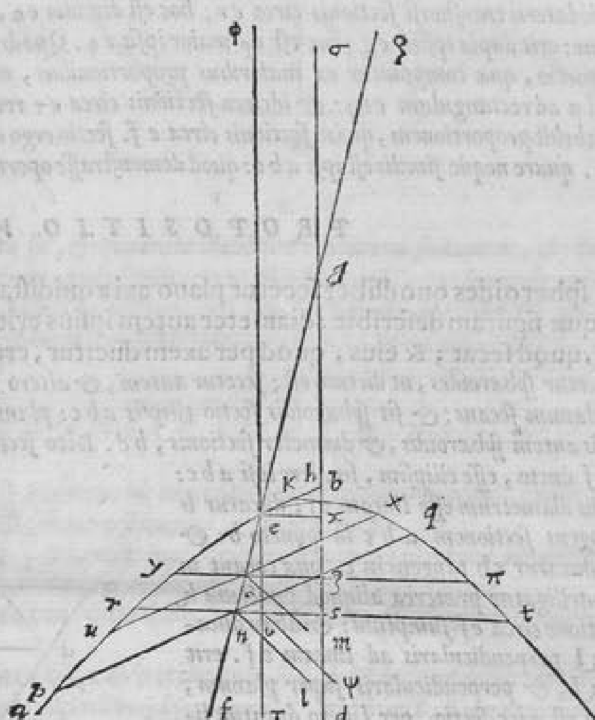
A puncto enim, in quo secant sese lineæ gb, nf, ducta linea χψ, æquidistanti ipsi ml, monstrabitur eadem ratione excessum, quo ml excedit ψχ, æqualem esse excessui, quo yη excedit gb. sed monstratum est ml excedere ρσ, eodem illo excessu. cum ergo ml pariter excedat lineas ψχ, ρσ: erunt ψχ, ρσ æquales, & ob similitudinem triangulorum ρσh, ψχn, æquales quoque σh, χn. sunt autem & ipsæ bσ, χe æquales. quare linea en, hoc est latus transuersum sectionis circa ef excedit lineam bh, latus transuersum sectionis abc, lineis bσ, χe; hoc est duplo lineæ bσ, ut dicebamus.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

Si conoides hyperbolicum secetur plano ducto per uerticem coni continentis conoides: sectio erit hyperbole, haud similis illi, quæ figuram describit: & eius diameter erit communis sectio planorum; secantis scilicet figuram; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

Secetur conoides hyperbolicum plano, ut dictum est: secetur autem, & altero plano, per axem ducto, & erecto super planum secans: sitq́; conoidis sectio a b c, quæ est hyperbole: & eius diameter, & axis conoidis linea b d: plani uero figuram secantis sit recta linea g e f; cum g sit uertex coni continentis conoides. Dico sectionem conoidis, quæ fit plano circa e f ducto, esse hyperbolen, haud similem sectioni a b c: & eius diametrum esse lineam e f. ducatur linea e h, tangens sectionem a b c in puncto e: & alia ducatur b k, tangens in b, secansq́; lineam e h in k. sumantur autem in sectione circa e f duo quælibet puncta l m: & ab ipsis demittantur l n, m o perpendiculares ad lineam e f; quæ & super planum, in quo a b c sectio, perpendiculares erunt: & per n ducantur duæ lineæ; quarum una æquidistet ipsi e k, uidelicet p n q; altera uero r n s t, æquidistet ipsi k b: & similiter per o ducantur aliæ duæ lineæ, iisdem æquidistantes, uidelicet u o x ipsi e k, & y o z π ipsi k b. secabit e f lineas p q, u x bifariam in punctis n o, ex quadragesima septima primi conicorum: & erit sectionis p e q diameter e n. producatur e g usque ad ρ; ita ut sit g ρ æqualis ipsi e g. erit e ρ latus transuersum sectionis p e q, ut elicitur ex quinquagesima primi conicorum: & per lineas r t, l n ducatur planum. quod cum sit erectũ super lineam b d axem conoidis, faciet sectionem circulum, cuius centrum s: & item per lineas y π, m o ducatur aliud planum. faciet id similiter sectionem circulum, cuius centrũ z: & erit quadratum l n æquale rectangulo r n t: & quadratum m o æquale rectangulo y o π. Itaque quoniam sectionis p e q diameter est e n; & latus transuersum e ρ: ducunturq́; ordinatim ad diametrum p n, u o: quadratum p n ad quadratum u o, ex uigesima primi conicorum erit, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. sed rectangulum p n q, hoc est quadratum p n ad rectangulum r n t, ex decima septima tertij conicorum est, ut quadratum e k ad quadratum k b: & ita rectangulum u o x, hoc est quadratum u o ad rectangulum y o π, ut quadratum e k ad quadratum k b. quare quadratum p n ad rectangulum r n t est, ut quadratum u o ad rectangulum y o π: & permutando quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum r n t ad rectangulum y o π. quorum rectangulorum r n t est æquale quadrato l n: & y o π æquale quadrato m o. quadratum igitur p n ad quadratum u o est, ut quadratum l n ad quadratum m o. & erat quadratum p n ad quadratum u o, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e. quare quadratum l n ad quadratum m o est, ut rectangulum ρ n e ad rectangulum ρ o e: & idcirco ex uigesima prima primi conicorum, sectio, quam facit plaⁿum

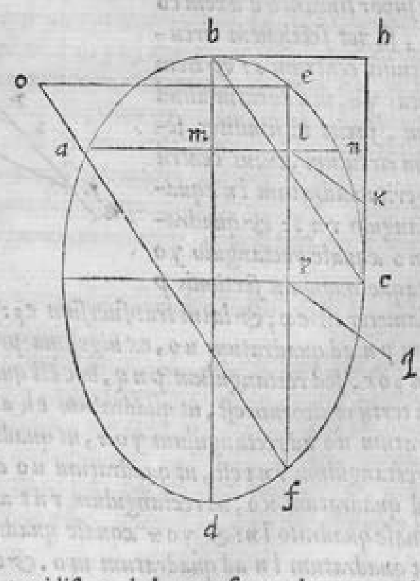


num circa e f, hyperbole est; eiusq; diameter e f: & latus transuersum e ρ. Esse autem eam hyperbolen dissimilem illi, quæ conoides describit; hoc est ipsi a b c, monstrabitur hoc pacto. Sit hyperboles a b c transuersum latus linea b σ; dupla scilicet ipsius b g: & secetur conoides alio plano per e, axi æquidistanti, & erecto super planum secans per axem: sit autem eius recta linea e τ. erit sectio, quam facit, hyperbole, similis ipsi a b c, ut supra monstrauimus: & eius diameter e τ: quæ secet lineam r t in υ: sitq; transuersum latus e φ: & per e ducatur linea e χ, equidistans ipsi k b, & secans b d in χ. præterea à puncto υ attollatur perpendicularis $\upsilon \psi$ super planum, in quo hyperbole a b c, usque ad sectionem circa e τ. est igitur ut quadratum l n ad rectangulum e n ρ, ita sectionis circa e f rectum latus ad transuersum, ex uigesima prima primi conicorum: & ex eadem,
23. sexti. ut quadratum $\psi \upsilon$ ad rectangulum e $\upsilon \varphi$, ita sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum. quadratum autem l n ad rectangulum e n ρ habet proportionem compositam ex proportione l n ad e n, & ex proportione l n ad n ρ: & pariter quadratum $\psi \upsilon$ ad rectangulum e $\upsilon \varphi$ proportio-
8. quinti nem habet compositam ex proportione $\psi \upsilon$ ad e υ, & proportione $\psi \upsilon$ ad $\upsilon \varphi$. sed $\psi \upsilon$ ad e
15. tertii. υ habet maiorem proportionem, quàm l n ad e n: nam $\psi \upsilon$ maior est, quàm l n: & e υ con-
Penul. primi. tra minor, quàm e n. & $\psi \upsilon$ ad $\upsilon \varphi$ item maiorem habet proportionem, quàm l n ad n ρ: nam $\upsilon \varphi$ minor, quàm n ρ; constat enim linea $\upsilon \varphi$ lineis υ e, e φ: & n ρ constat lineis n e, e ρ. quarum n e maior est ipsa e υ: & e ρ maior ipsa e φ. quoniam cum e g maior sit x g, quæ est æqualis dimidio lateris transuersi sectionis circa e r; hoc est dimidio e φ, ut patet ex iis, quæ proxime tradidimus: erit dupla ipsius e g; hoc est e ρ maior ipsa e φ. Quadrati igitur $\psi \upsilon$ ad rectangulum e $\upsilon \varphi$ proportio, quæ componitur ex maioribus proportionibus, maior erit, quàm proportio quadrati l n ad rectangulum e n ρ: & idcirco sectionis circa e τ rectum latus ad transuersum maiorem habebit proportionem, quàm sectionis circa e f. sectio ergo circa e f non est similis sectioni circa e τ. quare neque similis est ipsi a b c: quod demonstrasse oportebat.

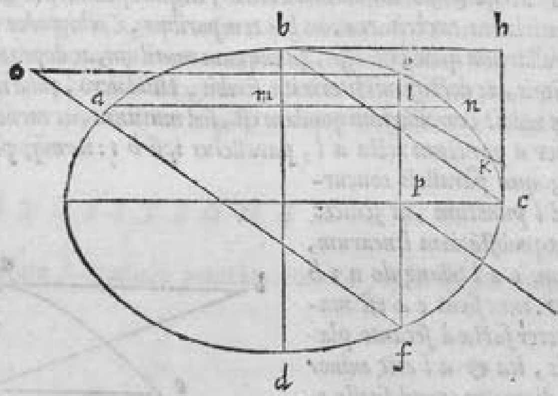
PROPOSITIO VII.

Si sphæroides quodlibet secetur plano axi æquidistanti: sectio erit ellipsis, similis illi, quæ figuram describit: diameter autem ipsius erit communis sectio planorum; eius, quod secat; & eius, quod per axem ducitur, erectum super planum secans.

Secetur sphæroides, ut dictum est; secetur autem, & altero plano per axem ducto, erectoq; super planum secans: & sit sphæroidis sectio ellipsis a b c: plani figuram secantis, sit recta linea e f: axis autem sphæroidis, & diameter sectionis, b d. Dico sectionem sphæroidis, quæ fit plano circa e f ducto, esse ellipsim, similem ipsi a b c; & eius diametrum esse lineam e f. ducatur b h tangens sectionem a b c in puncto b: & item ducatur c h tangens in c, quæ coeant in h. Intelligatur præterea aliquod punctum k in sectione circa e f sumptum: & ab eo ducatur k l perpendicularis ad lineam e f. erit iam k l, & perpendicularis super planum, in quo est a b c sectio. per l uero ducatur linea a m l n æquidistans ipsi b h: & per rectas lineas a n, k l, ducatur planum secans sphæroides. quod erit erectum super lineam e f. quare & super lineam b d, ei æquidistantem: & faciet sectionem circulum, cuius centrum m: & idcirco quadratum k l æquale erit rectangulo a l n. Sed rectangulum a l n ad rectangulum e l f est, ut quadratum b h ad quadratum h c, ex decima septima tertii conicorum. quare quadratum k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum b h ad quadratum h c. iungantur b c: & per e ducatur linea æquidistans b h: per f uero ducatur æquidistans ipsi c b, quæ coeant in o. erit triangulum e f o simile triangulo h c b: & o e ad e f, ut b h ad h c.



b c. quadratum igitur k l ad rectangulum e l f erit, ut quadratum o e ad quadratum e f: & similiter quadrata aliarum perpendicularium ab eadem sectione ad e f ductarum, ad ea, quæ fiunt ex ipsius e f partibus rectangula, erunt, ut quadratũ o e ad quadratum e f. & sunt o e, e f lineæ inæquales, quoniam & inæquales b h, h c. manifestũ est igitur ex uigesima prima primi conicorum, eius modi sectionem esse ellipsim, alteramq; diametrum ipsius esse lineam e f; alteram uero æqualem ipsi e o. nam linea e f bifariam secta in p, erit rectangulum f p e; hoc est quadratum f p ad quadratum perpendicularis à puncto p eductæ usque ad sectionem, quæ sit p q, ut quadratum f e ad quadratum e o. quare & linea f p ad lineam p q: & dupla ipsius f p; hoc est f e ad duplam p q; hoc est ad alteram diametrum, ut linea f e ad lineam e o. altera igitur diameter æqualis est ipsi e o. demonstrabitur autem similis ei, quæ figuram describit; hoc est sectioni a b c, si intellexerimus planum aliud secans figuram per axem, erectum itidem super planum, in quo a b c sectio, cuius recta linea sit b d. erit enim sectio ea, quæ figuram describit: & eademmet ratione quadrata perpendicularium à sectione ad b d lineam ductarum ad ea, quæ fiunt ex ipsius b d partibus rectangula erũt, ut quadratum o e ad quadratum e f. Quod cum ita sit, & quadrata diametrorum earum sectionum, & diametri ipsæ eandem se proportionem habebunt. unde similes erunt ellipses: quod fuerat demonstrandum. At uero si sphæroides oblongum plano ita secetur: erit linea e f maior eius diameter; cum linea h c maior sit, quàm b h. Contra uero eueniet in sphæroide lato; nam h c minor erit, quàm b h. quare eius minor diameter, erit linea e f.



IN PROPOSITIONEM XII.

Media sit proportionalis.] *Videntur hic non nulla desiderari in græco codice, qualia fortasse hæc sunt.* καὶ δυνάται ἴσον; *hoc est, ut nos restituimus, & potest æquale.* A

Id enim demonstratum est.] *Præmisit hoc Archimedes tanquã in conicis demonstratum; demonstrauit autem Apollonius in tertio conicorum, propositione decima septima.* B

Ipsi uero n t æqualis est linea t m: quoniam & b r ipsi b m.] *Ex trigesima quinta primi conicorum eiusdem Apollonii.* C

Quoniam igitur similia sunt c a l, t m b triangula &c.] *Et hoc loco desiderantur aliqua in hanc sententiam.* τὸ ἀπὸ τᾶς φ κ καθέτω τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς α θ, θ γ περιεχόμενον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ: *hoc est quadratum perpendicularis h k ad rectangulum a h c habet eãdem proportionem, quam quadratum a l ad quadratum a c.* D

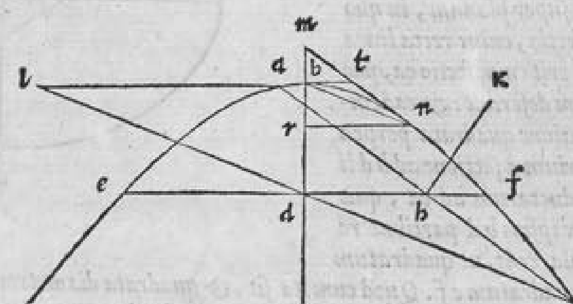
Patet igitur sectionem esse acutianguli coni sectionem.] *Ex uigesima prima primi conicorum.* F

Et eius maiorem diametrum esse a c, minorem uero æqualem ipsi a l.] *Opponitur enim a c minori angulo: & iccirco maior est, quàm a l. ostendetur autem minor diamerer æqualis lineæ a l ea ratione, qua in præcedenti usi sumus.* G

IN PROPOSITIONEM XIIII.

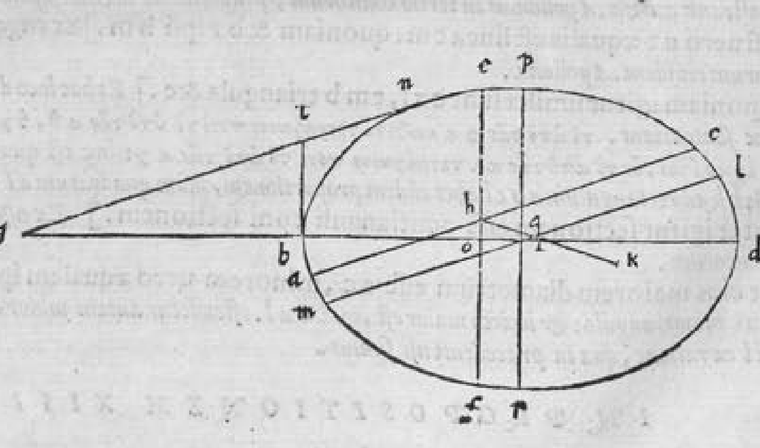
Est autem linea b t minor ipsa t n: propterea quòd & m t minor est ipsa t n; cum b m minor sit b r.] *B t minor est ipsa m t; quoniam minori angulo opponitur, m t autem minor est ipsa t n, ut monstrabimus. ergo b t multo minor est ipsa t n. Sed ipsam m t minorem esse t n,* A *patebit, cum m b comperta fuerit minor, quàm b r. producatur enim linea b m usque ad o; ita, ut b o sit transuersum latus sectionis a b c. & quoniam linea n m tangens sectionem in puncto n, coit cum b o in m: & ab n ordinatim ducta est n r ad diametrum: erit ex trigesima sexta primi conicorum, ut o m ad m b, ita o r ad b r: & permutando ut o m ad o r, ita b m ad b r. sed o m minor est ipsa o r. ergo & m b est ipsa b r minor, & ex secunda sexti m t minor ipsa t n: quod oportebat demonstrare.*

B Similiter perpendiculari existente n r in obtusianguli coni sectione, diameter ipsius maior erit c l.] *Ita legitur in codicibus omnibus, quos uidi, sed mendose, ut opinor; neque enim quid his uerbis significetur, satis possum intelligere.* FRANCISCVS MAVROLICVS *Messanensis uir omni doctrina, atque optimarum artium studijs eruditissimus, & in Mathematicis ita exercitatus, ut his temporibus Archimedes alter iure optimo dici possit, arbitratur corollarium quoddam esse, quanquam mutilum, ac deprauatum. is enim in quibusdam ad me humanissimis, ac doctissimis literis ita scribit. Illud uero, quod in fine decimæ quartæ propositionis te anxium reddit, corollarium quodam est, sed mutilum, ac mendosum: ita uero corrigendum est. si agatur per a punctum recta a l, parallelus ipsi b t: itemq; per c punctum recta e l, parallelus ipsi n b; quæ paralleli concurrant apud l punctum, ut scilicet propter æquidistátiam linearum, triangulum c a l triangulo n t b simile fiat. tunc sicut c a est maior diameter factæ à secante plano ellipsis, ita & a l erit minor eiusdem diameter: quod facile ostendi potest: & in præcedenti decima tertia propositione fieri potuisset in parabola. nam propter dictorum triangulorum similitudinem, linea c a ad lineam a l est, sicut linea n t ad lineam t b. fuit autem sicut n t ad t b, sic c h ad h k (puncto h per æqua secante ipsam c a): & perinde sic tota, c a ad duplum ipsius h k; hoc est diametros maior ad minorem. eandem igitur rationem habet linea c a ad diametrum minorem, & ad a l. igitur a l æqualis est diametro minori ellipsis, sicut infert corollarium. Hæc Maurolicus, quæ adeo quadrant ad hunc locum, ut non aliter ipse Archimedes scripsisse uideri possit; alioqui mancam quodammodo, atque imperfectam eorum scientiam, tradidisset.*



IN PROPOSITIONEM XV.

A Similiter iis, quæ ante tradita sunt, ostendentur quadrata perpédicularium, &c.] *Intelligatur enim púctum in sectione sumptum k: & ab eo ad a c lineam perpédicularis demittatur k h; quæ etiam perpendicularis erit super planum, in quo est a b c sectio: per b uero ducatur e f ad angulos rectos ipsi b d: & per e f, k h rectas*



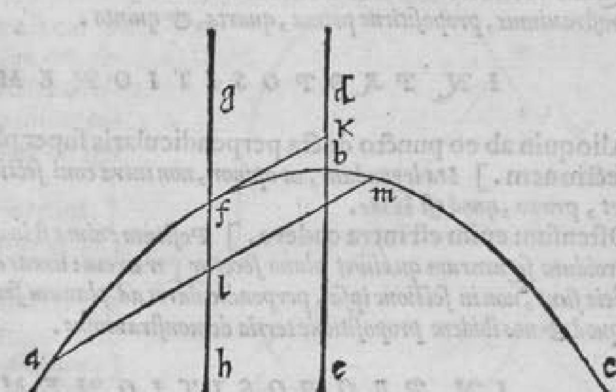
ctas lineas ducatur planum secans conoides; quod quidem erectum erit super axem b d: & faciet sectionem circulum, cuius centrum o. quadratum igitur k h erit æquale rectangulo e h f: & rectangulum e h f ad rectangulum a h c, ex decima septima tertij conicorum, eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n: & ob id quadratum k h ad rectangulum a h c eandem habebit proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n: & similiter idem continngere ostendetur, alijs perpendicularibus à sectione ad a c, lineam demissis. quare sectio erit coni acutianguli sectio: & eius diameter ipsa linea a c.

Si sphæroides latum plano secetur, alia quidem eadem erunt, &c.] Eadem omnia fiant in sphæroide lato, quæ prius facta fuere in oblongo. monstrabitur plano per a c lineam ducto, sectionem factam, esse coni acutianguli sectionem: & eius minorem diametrum esse lineam a c, intra sphæroides contentam. nam rectangulum p q r ad rectangulum m q l eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: minus autem est rectangulum m q l rectangulo p q r; quòd linea, q l minor sit ipsa q r. quadratum igitur n t minus est quadrato b t. quare quadrata perpendicularium à sectione ad a c, ductarum, maiora erunt rectangulis a h c: & a c minor erit sectionis diameter, ut proponebatur. B

IN PROPOSITIONEM XVI.

At in rectanguli coni sectione à quouis puncto eorum, quæ in sectione &c.] A

Sit rectanguli coni sectio, seu parabole a b c, cuius diameter d b e: & sumptum sit in sectione quoduis punctum f: & per f ducatur g f h, æquidistans diametro. Dico lineæ g f h partem eam, quæ est à puncto f uersus sectionis uertinem; hoc est uersus g, extra sectionem cadere; quæ autem est uersus h, cadere intra. ducatur enim linea tangens sectionem in f puncto; quæ coeat cum diametro in k: & per a ducatur a l m, æquidistans ipsi f k. secabitur iam linea a l m ab ipsa f h, in partes æquales, ex quadragesima sexta primi conicorum: & similiter omnes lineæ per quoduis sectionis punctū



ductæ eidem æquidistantes. efficitur enim linea f h diameter sectionis a f m ex corollario quinquagesimæ primæ primi conicorum. Quare necessarium est, ipsam f h intra sectionem cadere, & f g extra: quod fuerat monstrandum.

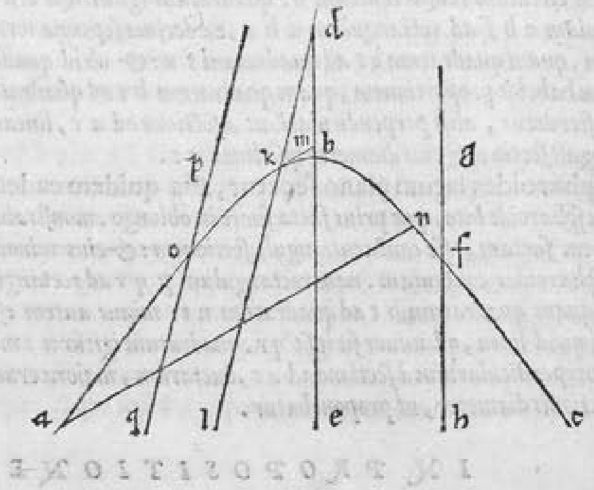
ALITER. Si linea f h non cadet intra sectionem; cadet extra: & g f h tanget sectionem in puncto f. quare ex uigesima quarta primi conicorum coibit cum diametro, quæ iam posita est diametro æquidistans: quod fieri non potest. constat igitur uerum esse, quod proponebatur.

Sectio erit obtusianguli coni sectio: eius autem diameter erit linea, à uertice coni in conoide ducta est.] Præmisit hoc Archimedes in duodecima huius: & nos eodem in loco propositione prima, & sexta demonstrauimus. B

Sed in sectione coni obtusianguli si à quouis puncto in sectione sumpto &c.] Sit coni obtusianguli sectio, seu hyperbole a b c, cuius quidem uertex sit b: & uertex coni continentis conoides, seu centrum sectionis, ut Apollonius uocat, sit d: à quo ducatur linea in quácunque sectionis partem libuerit: & ei æquidistans alia ducatur. Dico lineæ æquidistantis partem eam, quæ conuexa respicit sectionis, extra sectionem cadere; quæ uero contraria, intra. Ducta sit primum à d in sectionem per punctum b linea d b e, quæ erit diameter sectionis: sumptoq́; quouis puncto f in ea, & per f ducta g f h linea, æquidistanti ipsi d b e, cadet f g extra sectionem; f h uero intra. nisi enim C

ita

ita sit: cadet f h extra; & continget sectioné in puncto f. quare g f h producta coibit cum diametro: quod est absurdum; posita enim fuerat diametro æquidistans. Quòd si linea à d ducta transeat per aliud quoduis sectionis punctum, ut per k; quæ sit, d k l: ducemus lineam k m tangentem sectionem in k: & per a ipsi k m æquidistantem faciemus a n. secabit igitur linea d k l lineam a n bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. & fiet diameter sectionis a k n. sumpto autem quolibet puncto in sectione, quod sit o, ducatur p o q, æquidistans ipsi d k l. cadet similiter p o. extra sectionem; & o q intra; alioqui continget ipsa p o q sectionem in o: & coibit cum diametro d k l: quod fieri nequit; erat enim et æquidistans. quare manifeste constat propositum.



D Quare sectionem faciet coni sectionem.] *Ex duodecima huius, et ijs, quæ nos eo loco demonstrauimus, propositirne prima, quarta, & quinta.*

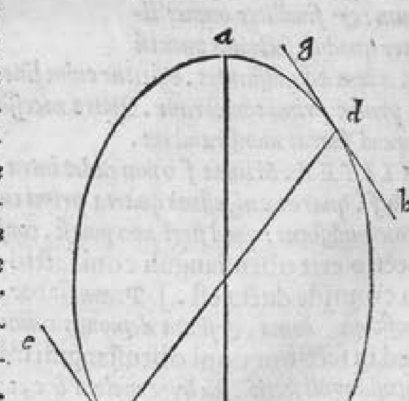
IN PROPOSITIONEM XVII.

A Alioquin ab eo puncto ducta perpendicularis super planum secans, cadet extra coni sectionem.] *Ita legendum, ut opinor, non intra coni sectionem, codex etiam græcus* ἐντὸς *habet, pro eo, quod est* ἐκτὸς.

B Ostensum enim est intra cadere.] *Positum enim est in duodecima huius, si conoidum, aut sphæroidum figurarum quælibet plano secetur per axem: lineas ductas à punctis, quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione ipsa, perpendiculares ad planum secans, intra figuræ sectionem cadere: quod & nos ibidem propositione tertia demonstrauimus.*

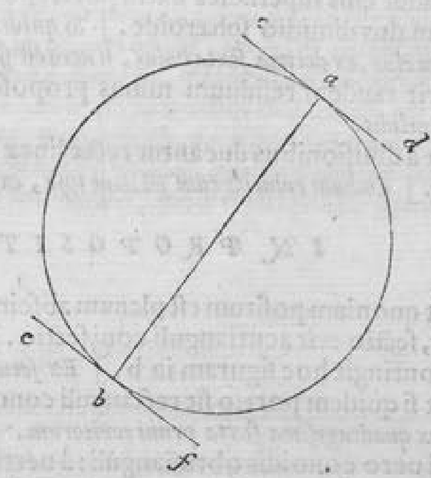
IN PROPOSITIONEM XVIII.

A Necesse est igitur idem esse planum ductum per axem, & per utrunque contactum.] *Sit sphæroides a b c d, cuius axis a c: & sint duo plana æquidistantia, quæ id contingant, non erecta super axem e f, g h: contingat autem e f planum sphæroides in puncto b: & g h in d. Dico unum, atque idem esse planum, quod per axem, & per utrunque contactum ducitur; alioqui erunt duo plana super idem planum erecta, transeuntia per eandem lineam, quæ super planum illud erecta non sit. planum enim per axem ductum, & per contactum b, erectum erit & super planum e f, ex præmissa; & ex decima quarta undecimi Eucl. super planum g h, ei æquidistans. Eadem quoque ratione planum ductum per axem, & per d contactum erectum erit super utrunque planum e f, g h. quare duo plana ducta per eandem lineam; hoc est per axem a c, quem super plana illa æquidistantia non esse erectum ante posuimus, erunt*



erecta super idem planum, uidelicet super e f, aut super g h: quod fieri non potest. sequeretur enim ex eo trianguli duos angulos æquales esse duobus rectis. idem ergo planum erit, in quo & axis & contactus ipsi habentur: quod fuerat demonstrandum.

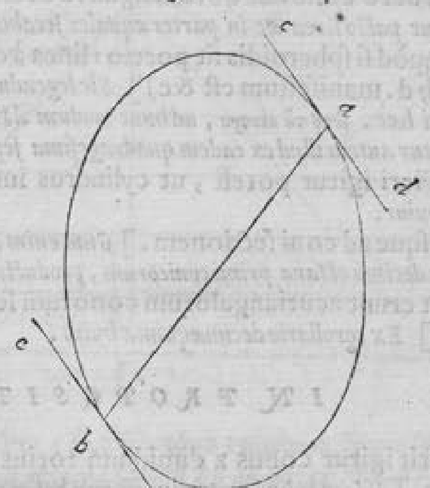
At si duæ rectæ lineæ inter se æquidistantes acutianguli coni sectionem cõtingant &c.] *Monstrabitur id ex elementis conicis, non solum in ellipsi, sed & in circulo. Sit ellipsis, uel circulus a b: sintq; c d, e f rectæ lineæ æquidistantes, quæ ellipsim, uel circulum contingant; c d quidem in puncto a; e f autem in b: & iungantur puncta contactuum ducta a b. Dico a b per centrum transire. nisi enim transeat per centrum: coibunt ipsæ c d, e f, ex uigesima septima secundi Apollonij: quod est absurdum; nam positæ sunt æquidistantes. ergo a b per centrum transibit, atque in eadem recta linea erunt & centrum, & contactuum puncta: quod monstrare uolebamus.* B



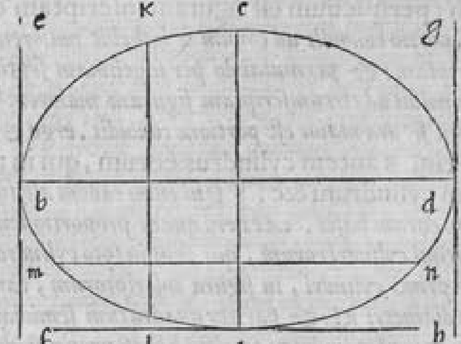
IN PROPOSITIONEM XIX.

Sit enim sectio sphæroidis a b c d acutianguli coni sectio.] *Non erit sectio ea semper coni acutianguli sectio, uel ellipsis, sed quandoque circulus: cum scilicet planum erectum sit super axem: quod & ipse Archimedes postea innuit.* A

Transibit igitur ea per centrum.] *Per ea, quæ proxime ostendimus in ellipsi, & circulo.* B



Constat lineas ductas à punctis a c æquidistantes ipsi b d contingere sectionem: & extra sphæroides cadere.] *Quoniam enim a c, b d diametri sunt sectionis, uel principales, uel ex generatione: sumpto in ea quolibet alio puncto m, & per m ducta m n, æquidistanti b d, secabit a c ipsam m n bifariam. ergo ex sexta secundi conicorum, quæ sectionem contingit ad a punctum, æquidistans est ipsi m n. quare & ipsi b d. quæ igitur ab a ducta est æquidistans ipsi b d, contingit sectionem; & similiter ostendetur, quæ à c ducitur eidem b d æquidistans, sectionem contingere. sequitur ergo, ut extra sphæroides cadant: quod erat ostendendum.* C



Quod si planum æquidistans contingentibus planis non ducatur per centrum &c.] *Ducta enim per k æquidistans ipsi b d, cadet extra sectionem ad partes b, in quibus minor est portio; ad partes uero d, intra; nanque eam diameter a c secabit bifariam, ex quadragesima septima primi conicorum. Quòd si quis contendat, extra sectionem cadere omnino; tanget sectionem in k: & coibit cum diametro b d, ex uigesima quinta eiusdem; quod est absurdum;* D *surdum; nam posita est eidem b d æquidistans. Eadem erit demonstratio, & in ipso circulo.*

IN PROPOSITIONEM XXI.

A Cadet eius superficies extra portionem, quia uel conoides est, uel sphæroides, non maius dimidio sphæroide.] *Si quidem conoides est: cadet superficies cylindri extra portionem eius, ex decima sexta huius. si uero est sphæroides, ex decima nona idem continget.*

B Erit tandem residuum minus proposita solida magnitudine.] *Ex prima decimi Euclidis.*

C Et à diuisionibus ducantur rectæ lineæ æquidistantes ipsi a c ad coni usque sectionem.] *Coibunt enim hæ cum sectione ipsa, ex decima nona primi conicorum.*

IN PROPOSITIONEM XXII.

A Et quoniam positum est planum abscindens portionem non esse erectum super axem, sectio erit acutianguli coni sectio.] *Ex decima quinta huius.*

B Contingit hoc figuram in b.] *Ex secunda parte decimæ septimæ huius.*

C Et si quidem portio sit rectanguli conoidis &c.] *Secabit ea lineam a c in partes æquales, ex quadragesima sexta primi conicorum.*

D Si uero conoidis obtusianguli: à uertice coni continentis conoides &c.] *Et hoc quoque pacto linea a c in partes æquales secabitur, ex quadragesima septima primi conicorum.*

E Quòd si spheroidis sit portio: linea à centro ducta ad b, intra portionem recipiatur b d. manifestum est &c.] *Sic legendum, ut opinor. uidentur enim in græco codice desiderari hæc. ἀπὸ τοῦ κέντρου, ad hunc modum εἰ δὲ σφαιροειδέος ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα, sequitur autem illud ex eadem quadragesima septima primi conicorum.*

F Fieri igitur potest, ut cylindrus inueniatur axem habens b d &c.] *Ex decima huius.*

G Vsque ad coni sectionem.] *Cum enim æquidistent ipsi a c: & ipsi y u æquidistabunt. quare ex decima octaua primi conicorum, producta in utranque partem coibunt cum sectione.*

H Et erunt acutiangulorum conorum sectiones similes ei, quæ est circa diametrum a c.] *Ex corollario decimæquintæ huius.*

IN PROPOSITIONEM XXIIII.

A Erit igitur conus z dimidium totius cylindri: quoniam eiusdem coni est sesquialter.] *Nam cylindrus triplus est coni basim eandem, & æqualem altitudinem habentis: quod ipse Archimedes paulo ante posuit, & demonstrauit Euclides propositione decima duodecimi libri.*

B Et quoniam circumscripta figura minus excedit inscriptam, quàm portio conum: perspicuum est figuram inscriptam cono z maiorem esse.] *His enim sic stan-*
8.quinti *tibus, portio conoidis ad conum z habebit maiorem proportionem, quàm circumscripta figura ad inscriptam: & permutando per uigesimam septimam quinti Euclidis ex traditione campani, portio conoidis ad circumscriptam figuram maiorem habebit, quàm conus z ad inscriptam. Sed circumscripta figura maior est portione conoidis. ergo & inscripta multo maior erit cono z.*

C Primus autem cylindrus eorum, qui in toto sunt cylindro axem habens d e ad pri-
11.duodec. mum cylindrum &c.] *Qui enim eadem altitudine sunt cylindri, proportionem habent candem quam eorum bases. At uero quam proportionem habet circulus circa diametrum a c; hoc est basis primi cylindri eorum, qui sunt in toto cylindro, ad circulum circa diametrum k l; ad basim scilicet primi cylindri, in figura inscriptorum, eandem habet quadratum diametri a c ad quadra-*
2.duodec. *tum diametri k l: & pariter quadratum semidiametri d a ad quadratum semidiametri k e. ergo*
15.quinti. *cylindrus ad cylindrum eandem habet proportionem, quam quadratum d a ad quadratum k e.*

D Hæc autem eadem est ei, quam b d habet ad b e. [*Ex uigesima primi conicorum.*

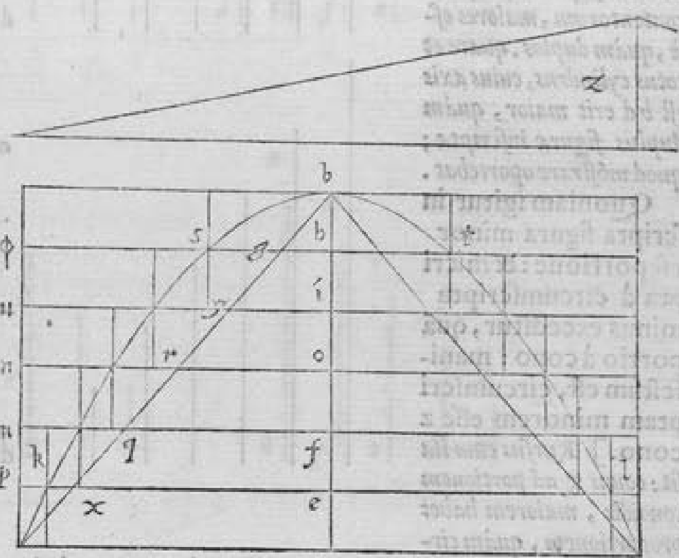
E Et ei, quam d a ad e x.] *Ex quarta sexti. æquiangula enim sunt triangula b a d, b x e.*

F Similiter ostendetur & secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro &c.] *Per eadem enim, quæ prius, ostendetur primus cylindrus, eorum, qui sunt in toto cylindro ad secundum*

cundum cylindrum eorum, qui in figura inscripta, eam habere proportionem, quam habet a d ad q f, & cum secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro, æqualis sit primo; & ipse ostendetur ad secundum eorum, qui in figura inscripta, eandem habere proportionem, quam habet p e; hoc est a d ad q f. & ita deinceps in reliquis.

Et omnes cylindri, qui in eo cylindro continentur, cuius basis est circulus circa diametrum a c, & axis d b.] *In græco codice ita habetur.* καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δὲ ἐστὶν ἁ δ ι εὐθεῖα, *& reliqua, & paulo post,* ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ὁ δ ι. *sed legendum, ut opinor,* δ β *utrobique, non* δ ι: *& infra.* πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, *expungendum illud* πολλῷ. *nisi enim omnes assumantur cylindri, qui in toto cylindro sunt, cuius axis d b, non uideo, quo pacto demonstrari possint esse maiores, quàm dupli figuræ inscriptæ, cum non sint. cylindri nanque omnes in cylindro contenti, cuius axis est d i, tantum abest, ut sint maiores, quàm dupli inscriptæ figuræ, ut etiam sint multo minores.* G H

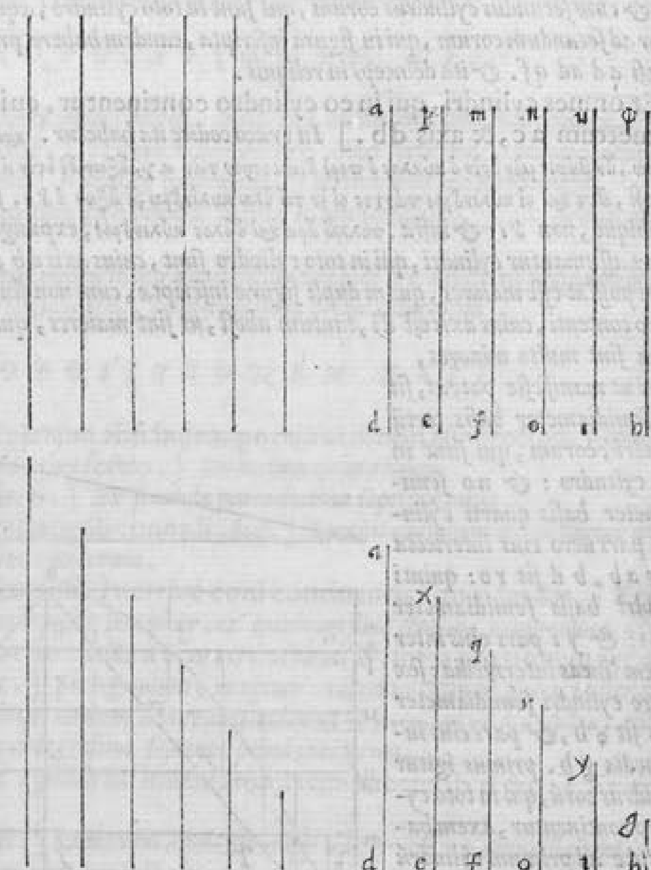
Quod ut manifeste pateat, sit m f semidiameter basis tertij cylindri, eorum, qui sunt in toto cylindro: & n o semidiameter basis quarti cylindri: pars uero eius interiecta inter a b, b d sit r o: quinti cylindri basis semidiameter sit u i: & y i pars eius inter easdem lineas intermedia: sexti uero cylindri semidiameter basis sit φ h, & pars eius intermedia g h. primus igitur cylindrus eorũ, qui in toto cylindro continentur, axem habens d e ad primum cylindrũ eorum, qui continentur in figura portioni inscripta, cuius idem est axis, eam proportionem habet, quam linea a d ad lineam x e: & secundus cylindrus eorum, qui sunt in toto cylindro axem habens e f ad secundum cylindrum figuræ inscriptæ, cuius idem axis, eam habet proportionem, quam linea p e; hoc est a d ad q f: & tertius cylindrus ad tertium eam habet, quam m f ad r o: & item quartus ad quartum, quam n o ad y i: & quintus similiter ad quintum, hoc est ad ultimum eorum, qui in figura inscripta, quam u i ad g h: sextus autem cylindrus, hoc est ultimus eorum, qui in toto sunt cylindro, non habet alium in figura inscripta, ad quem referatur; nec item linea φ h habet lineam ei respondentem. sunt igitur quædam magnitudines, sex uidelicet cylindri, qui in toto cylindro sunt, quorum unusquisque habet axem æqualem ipsi d e: & aliæ item magnitudines, lineæ, quæ sunt semidiametri basium eorum cylindrorum, numero illis æquales, uidelicet a d, p e, m f, n o, u i, φ h: & quam proportionem habent prius sumptæ magnitudines, eandem habent & posterius sumptæ; quoniam cylindri sunt æquales inter se se, & lineæ item æquales: referunturq; è sex cylindris, quinque ad alios quosdam cylindros in figura inscripta contentos; extremus autem ad nullum refertur. & similiter è sex lineis, quinque tantum referuntur ad quasdam alias lineas, & eisdem proportionibus; cum extrema non habeat, ad quam referatur. Quare ex secunda huius omnes cylindri, qui sunt in toto cylindro, ad omnes cylindros in figura inscripta contentos, eam proportionem habent, quam omnes lineæ a d, p e, m f, n o, u i, φ h ad omnes lineas x e, q f, r o, y i, g h. At sex illæ lineæ cum his quinque comparatæ ex prima huius, maiores sunt, quàm duplæ; nanque cum lineis se se æqualiter excedentibus, excessu, qui sit æqualis minimæ, dempta maxima earum, comparantur totidem lineæ, omnes maximæ illarum æquales: quod sic patet. Quam enim proportionem habet b d ad b e, eandem habet ex quarta sexti a d ad x e: & quam habet b e ad b f, eandem habet x e ad q f: & quam



K

L

bf ad bo, eandem qf ad ro: & ita de reliquis. sed cum lineæ bd, be, bf, bo, bi, bh sese æqualiter excedant, & excessus sit æqualis minimæ; hoc est ipsi bh: & lineæ ad, xe, qf, ro, yi, gh sese æqualiter excedent, excessu minimæ earum æquali. ex quibus sequitur, Omnes cylindros, qui sunt in toto cylindro, cylindrorum in figura inscripta contentorum, maiores esse, quàm duplos. quare et totus cylindrus, cuius axis est bd erit maior, quàm duplus figuræ inscriptæ; quod mõstrare oportebat.



K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione: & inscripta à circumscripta minus exceditur, quã portio à cono: manifestum est, circumscriptam minorem esse z cono.] *Rursus cum ita sit: conus z ad portionem conoidis, maiorem habet proportionem, quàm circumscripta figura ad inscriptam; & permutando conus z ad circumscriptam figuram, maiorem habet, quàm portio conoidis ad inscriptam. sed inscripta figura minor est portione conoidis. circumscripta igitur multo minor erit cono z.*

L Ergo & omnes cylindri, qui in toto cylindro sunt cuius axis db ad omnes cylindros in figura circumscripta contentos &c.] *Hæc omnia necessariam habent demonstrationem, ex prima parte primæ, & secundæ huius, iisdem, sicuti prius, dispositis; præterquam quòd hic utrobique æquales numero assumuntur magnitudines.*

COROLLARIUM.

Ex his constat cuilibet portioni conoidis rectanguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & axẽ, qui ad axem portionis proportionem habeat sesquialteram.

IN PROPOSITIONEM XXIIII.

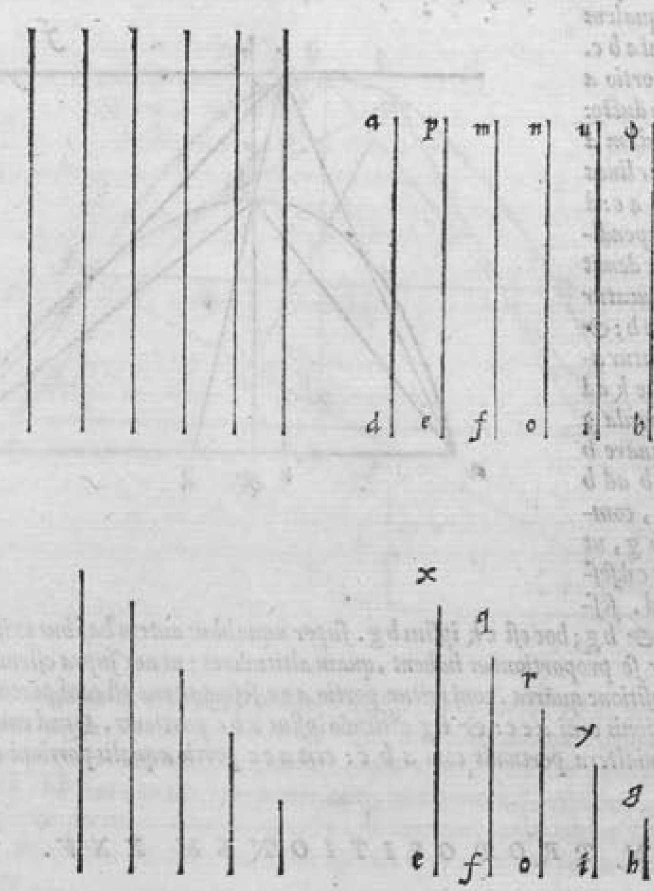
A Quæ lineam ac bifariam secabit.] *Ex quadragesima sexta primi conicorum, ut etiam superius est adnotatum.*

B Sectio est acutianguli coni sectio.] *Ex decima tertia huius.*

C Fieri potest, ut cylindrus inueniatur axem habens in recta linea bd.] *Ex decima huius.*

D Fieri itidem potest, ut & conus inueniatur uerticem habens b punctum &c.]

Ex



Ex nona huius.

Et plana portionum pertingent ad superficiem portionis &c.] *Quoniam & lineæ, per quas plana ducuntur ex utraque parte productæ ad coni sectionem perueniunt, ut in uigesima secunda huius dictum est.*

Nam portiones æqualem habentes altitudinem adinuicem sunt sicuti bases.] *Quo modo hoc monstretur, diximus in undecimam huius, propositione secunda.* F

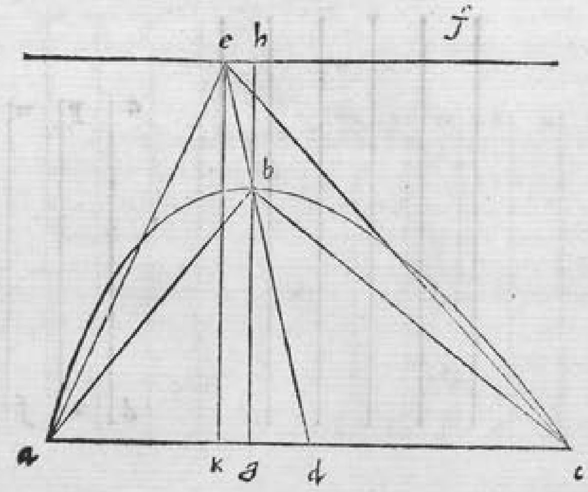
Bases autem, quoniam similes acutiangulorum conorum sect iones sunt, eandem proportionem &c.] *Ex septima huius.* G

Eandem habet b d ad b e longitudine.] *Corrigendus est hoc loco græcus codex, nanque habet δυνάμει, pro eo, quod est, μήκει. sequitur autem id ex uigesima primi conicorum, quòd paraboles a b c, in qua uertex b, diameter ex generatione fit ipsa b d.* H

COROLLARIVM.

Colligitur etiam ex his, cuilibet portioni conoidis rectanguli abscissæ plano non erecto super axem, coni portionem illam esse æqualem, quæ basim habeat eandem, & axem axis portionis sesquialterum, qui cum diametris basis consimilibus æquales angulos contineat.

Sit enim conoidis rectanguli portio a b c, cuius basis spatiū coni acutianguli sectione circa diametrū a c contentum, & axis b d: sitq́; portio coni a b c, basim habens eandem portioni, & axem eundem. erit iam portio conoidis portionis coni sesquialtera. producatur autem d b usque ad e; ita, ut e d sit sesquialtera ipsius b d: & intelligatur coni portio a e c, cuius basis eadem portionibus di ctis, & axis e d. Dico portionem coni a e c æqualem esse conoidis portioni a b c. secetur enim coni portio a e c plano per axem ducto: & sit sectio triangulum a e c: & per e ducatur linea e f, æquidistans ipsi a c: à puncto autem b perpendicularis ad lineam a c demittatur b g: & producatur quousque secet e f in h: & ab e rursus demittatur alia perpendicularis e k ad a c. erunt iam triangula g b d, h b e similia. quare h b ad b e erit, ut g b ad b d: & permutando, componendoq; h g ad b g, ut e d ad b d. sed erat e d sesquialtera ipsius b d. sesquialtera est igitur & h g; hoc est e k ipsius b g. super æqualibus autem basibus existentes coni portiones eandem inter se proportionem habent, quam altitudines; ut nos supra ostendimus ad undecimam huius, propositione quarta. coni igitur portio a e c sesquialtera est coni portionis a b c: nam e k altitudo est portionis coni a e c: & b g altitudo ipsius a b c portionis. Quod cum sit & conoi-



9.quinti. dis portio a b c sesquialtera portionis coni a b c: erit a e c portio æqualis portioni conoidis a b c; ut dicebamus.

IN PROPOSITIONEM XXV.

A Et quoniam sunt æquales b h, k l, & ipsæ c h, a q æquales erunt.] *Ostensum est hoc in quarta huius.*

B Sed coni portio, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b habent inter se proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.] *Ex ijs, quæ nos ostendimus ad undecimam huius, propositione octaua.*

C Quare portio coni, cuius uertex l ad conum, cuius uertex b compositam habet proportionem ex ea, quam habet k a ad e h, & ex ea, quam l m ad b h.] *Nam quod fit ex diametris sectionis coni acutianguli ad quadratum e c eam proportionem habet, quam k a ad e h: quod sic patet. ducatur à puncto a æquidistans ipsi l k; quæ sit a n: & ab f ducatur f n æquidistans ipsi e c; quæ coeat cum a n in puncto n: linea autem f n secet lineam l k in o. erit altera diameter sectionis coni acutianguli æqualis lineæ f n; ex decima tertia huius; & erit f n æ-*

2. sexti. *qualis ipsi e c. nanque f o ad o n est, ut f k ad k a: & componendo f n ad o n, ut f a ad k a. sed k a est dimidia ipsius f a. ergo & o n dimidia est ipsius f n. & est o n æqualis h e; utraque enim æqualis ipsi q a. lineæ igitur f n, c e, quarum dimidiæ sunt æquales, & ipsæ æquales sunt; & æquales alteri diametro sectionis coni acutianguli, cuius maior diameter est f a. habet autem eiusmodi sectio ad circulum, cuius diameter est c e eam proportionem, quam rectangulum ex f a, c e ad qua-*

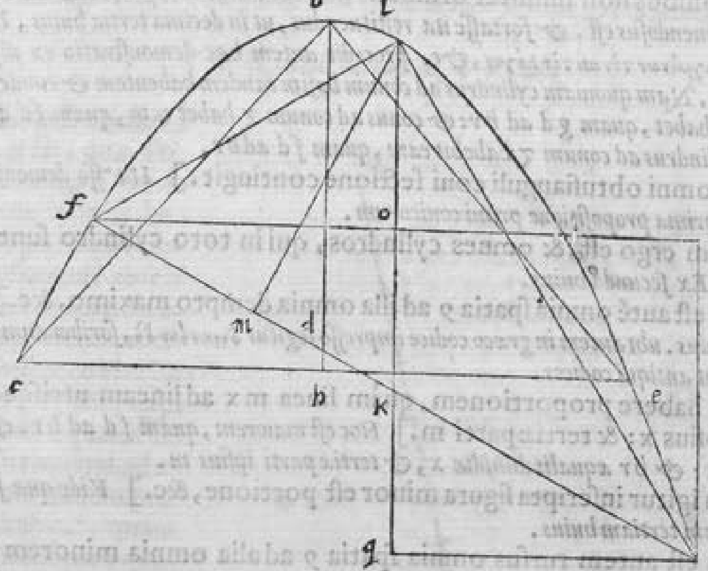
1. sexti. *dratum c e; ex sexta huius; hoc est, quam f a ad c e; cum eandem altitudinem habeat: & quam earum dimidiæ k a ad e h: quod monstrare uolebamus.*

D Habetq; l m ad k l eam, quam q a ad a k.] *Aequiangula enim sunt triangula l m k, a q k.*

E Earum autem proportionum, quæ est a k ad a q eadem est ei, quæ l k ad l m.] *Ostensum est supra, q a ad a k eam habere proportionem, quam l m ad l k. quare & conuertendo a k ad q a habet eandem, quam l k ad l m.*

F Perspicuum est igitur portionem coni, cuius uerte x l æqualem esse cono, cuius

uertex



uertex b.] *Concluditur ex ante dictis portionem coni, cuius uertex est l, ad conum, cuius uertex b, eam habere proportionem, quam habet l k ad b h. nam utraque harum proportionum componitur ex iisdem proportionibus; ex ea scilicet, quam habet l k ad l m; & ex ea, quam l m ad b h; Quòd cum l k, b h sint æquales: & portio coni, cuius uertex l, & conus, cuius uertex b sunt æquales: & insuper portiones conoidis æquales. portio enim, cuius uertex l sesquialtera est portionis coni, ex antedicta; portio uero, cuius uertex b ex uigesima tertia huius, est etiam ipsius coni sesquialtera.*

IN PROPOSITIONEM XXVI.

Itaque conus, cuius axis b d ad conum, cuius axis b h proportionem habet compositam ex ea, quam habet a d ad h e potestate, & ex ea, quam b d habet ad b h longitudine.] *Nam circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum e f proportionem habat eam, quam quadratum a c ad quadratum e f; ex prima duodecimi: & propterea etiam eam, quam quadratum semidiametri a d ad quadratum semidiametri h e; hoc est, quam habet a d ad h e potestate.* A 15.quinti.

Quam uero proportionem habet a d ad h e potestate, eandem habet longitudine b d ad b h.] *Ex uigesima primi conicorum.* B

Hæc autem eadem est ei, quam d b quadratum habet ad quadratum h b.] *Ex uigesima tertia sexti.* C

IN PROPOSITIONEM XXVII.

Et quæ tripla lineæ ad axem adiectæ.] *Linea ad axem adiecta est (ut ipse in principio scribit) quæ interiicitur media inter uerticem conoidis, & uerticem coni continentis conoides; hoc est, quæ in ipsa hyperbola, dimidia est transuersi lateris figuræ. Inferius eam, quæ ex centro appellat una cum Apollonio.* A

Et quoniam circumscripta figura inscriptam minus excedit quàm portio conum z.] *Vnde hoc sequatur, dictum est superius in uigesima tertia huius.* B

Sit igitur b r tertia pars ipsius b d, erit g d ipsius h r tripla.] *Nam g b tripla est h b: & b d item tripla b r. quare ex prima quinti g b & b d iunctæ; hoc est g d tripla est h b & b r; hoc est ipsius h r.* C

Et

D Et quoniam cylindrus, basim habens circulum circa diametrum a c,& axem b d.] *Ex decima duodecimi Euclidis.*

E Proportionibus non similiter ordinatis habebit dictus cylindrus ad z conũ &c.] *Codex græcus mendosus est, & fortasse ita restituendus, ut in decima tertia huius,* ἕξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον, *&c. procedit autem hæc demonstratio ex uigesima tertia quinti Euclidis. Nam quoniam cylindrus ad conum basim eandem habentem & eundem axem, eam proportionem habet, quam g d ad h r: & conus ad conum z habet eam, quam f d ad g d. ex æquali igitur cylindrus ad conum z habebit eam, quam f d ad h r.*

F Quod in omni obtusianguli coni sectione contingit.] *Ita esse demonstrat Apollonius uigesima prima propositione primi conicorum.*

G Manifestum ergo est, & omnes cylindros, qui in toto cylindro sunt, ad cylindros, &c.] *Ex secunda huius.*

H Ostensum est autẽ omnia spatia 9 ad illa omnia dempto maximo, &c.] *Ex secunda parte tertiæ huius. ubi autem in græco codice impresso legitur* δεικτέον δὲ, *scribendum* δέδεικται δὲ, *ut etiam habent antiqui codices.*

I Maiorem habere proportionem, quàm linea m x ad lineam utrisque æqualem; & dimidiæ ipsius x; & tertiæ parti m.] *Hoc est maiorem, quàm f d ad h r. est enim f d æqualis ipsi m x: & h r æqualis dimidiæ x, & tertiæ parti ipsius m.*

K Quoniam igitur inscripta figura minor est portione, &c.] *Vide quæ scripsimus supra in uigesimam tertiam huius.*

L Ostensum est autem rursus omnia spatia 9 ad alia omnia minorem proportionem, &c.] *Ex prima parte tertiæ huius.*

COROLLARIUM.

Manifestum est ex modo demonstratis, cuilibet portioni conoidis obtusianguli abscissæ plano super axem erecto, conum illum rectum esse æqualem, cuius basis sit eadem, & axis, qui ad axem portionis, proportionem habeat, quam utraque linea; & quæ sit æqualis axi portionis, & quæ tripla lineæ ad axem adiectæ, habet ad lineã utrique æqualem; axi portionis, & ei, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ.

IN PROPOSITIONEM XXVIII.

A Secabit eadem ratione bifariam ipsam a c.] *Ex ijs, quæ dicta sunt in uigesima secunda huius. id uero monstrauit Apollonius quadragesima sexta primi conicorum.*

B Quod conoides in b puncto continget.] *Ostenditur id in decima septima huius.*

C Sectio erit acutianguli coni sectio, cuius diameter maior c a.] *Ex decima quarta huius.*

D Cylindrum inuenire poterimus habentem axem in recta linea b d, &c.] *Ex decima huius.*

E Rursus & conum inuenire poterimus uerticem habentẽ punctum b, &c.] *Ex nona.*

F Hoc inuento erit portio coni basim habens eandem dictis portionibus, & axem eundem.] *Græcus codex ita restituendus est, ut mihi uidetur.* ἀφρεθέντος οὖν ἐσεῖται τὸ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τοῦτε τόμου, καὶ τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

G Dico portionem conoidis cono z esse æqualem.] *Et hoc loco, ut opinor, ita restituendus est, corrigendusq; græcus codex.* φημὶ δὴ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ ψ, εἰ δυνατὸν, ἔστω μεῖζον.

H Bases autem cum similes acutiangulorum conorum sectiones sint &c.] *In græco codice desiderantur hæc,* αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν. *sequitur autem id ex corollario decimæ quintæ huius, & ex septima.*

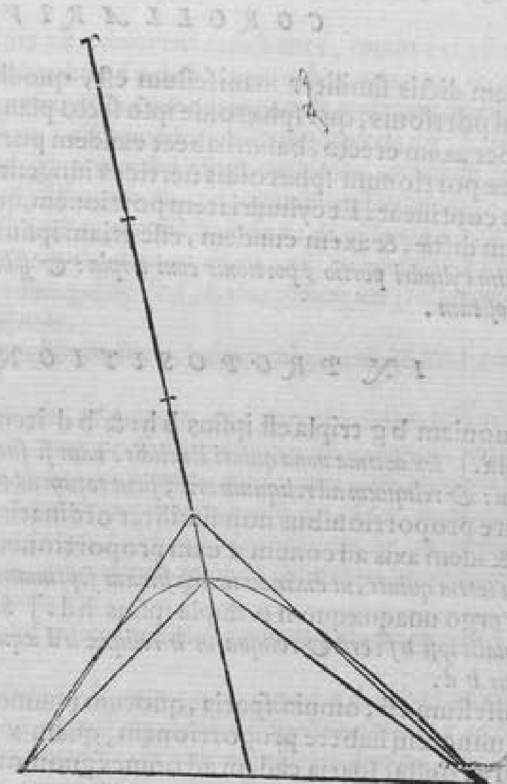
I Quam uero proportionem quadratum a d habet ad quadratum k e, eandem habet rectangulum f d b ad rectangulum f e b &c.] *Ex uigesima, primi conicorum, quòd b d diameter sit sectionis coni obtusianguli; & b f transuersum figuræ latus.* prima

K Quoniam f d ducta est per h, in quo lineæ, quæ sunt sectioni proximæ conueniũt.] *Idem*

Idem est, ac si dixisset. Quoniam f d ducta est per uerticem coni continentis conoides. in eo enim conueniunt lineæ quas Archimedes τὰς ἔγγιστα τᾶς τομᾶς, hoc est proximas sectioni appellat. Apollonius autem τὰς ἀσυμπτώτες τῆ τομῆ, id est, non coeuntes cum sectione, ut in principio diximus.

COROLLARIVM.

Manifestum est etiam ex iam dictis, & iis, quæ nos supra monstrauimus ad finem uigesimæ quartæ huius, cuilibet portioni conoidis obtusianguli abscissæ plano super axem non erecto, coni portionem illam esse æqualem, cuius basis sit eadem, & axis cum diametris basis æquales angulos continens, qui ad axem portionis eãdem proportionem habeat, quam habet linea utrisque æqualis; axi portionis, & triplæ eius, quæ ad axem adiecta est, ad lineam utrisque æqualem; axi portionis, & lineæ, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ.



IN PROPOSITIONEM XXIX.

A Latitudinem habens una parte maiorem, quàm sit latitudo gnomonis proxime ablati.] *Codex græcus hoc loco ita currigendus est. πλάτος μὲν ἔχων ἑνὶ τμάματι μεῖζον τῶ πλατέος.*

B Quare & quam rectangulum b h d ad rectangulum b e d.] *Ex uigesima prima primi conicorum.*

C Hoc enim in iis, quæ de spiralibus lineis edidimus, demonstratum est.] *In corollario uidelicet decimæ propositionis.*

COROLLARIVM.

Ex iis, quæ superius demonstrata sunt constat, quodlibet sphæroides duplum esse coni illius recti, qui basim quidem habeat circulum circa sphæroidis diametrum, axem uero axi sphæroidis æqualem. Et insuper cylindrum rectum, qui basim habeat eandem dicto cono, & axem eundem, ipsius sphæroidis esse sesquialterum.

Is nanque cylindrus triplus est coni; sphæroides autem eiusdem coni est duplum, ut diximus, ex quo sequitur cylindrum sphæroidis sesquialterum esse.

IN PROPOSITIONEM XXX.

A Quæq; ipsa b d iungit recta linea per h transibit; & erunt portionum uertices

b d;

b d; axes uero b h, h d.] *Ex decima octaua huius.*

B Et portio cylindri basim habens eandem portioni, & axem eundem.] *Codex græcus ita corrigendus.* καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, *& reliqua, & paulo post* οὐκ ἔσαι ἐν μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου, εἰ δὲ ἔλασσον ἐστιν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον.

COROLLARIUM.

Ex iam dictis similiter manifestum est, quodlibet sphæroides duplum quoque esse coni portionis, quæ sphæroide ipso secto plano per centrum transeunte, non autem super axem erecto, basim habeat eandem portioni sphæroidis, & axem æqualem lineæ portionum sphæroidis uertices iungenti, qui cum diametris basis æquales angulos contineat. Et cylindri item portionem, quæ basim habeat eandem coni portioni iam dictæ, & axem eundem, esse etiam ipsius sphæroidis sesquialteram.

Est enim cylindri portio, portionis coni tripla: & sphæroides duplum eiusdem. ex quibus patet propositum.

IN PROPOSITIONEM XXXI.

A Et quoniam b g tripla est ipsius b h: & b d item tripla ipsius b r: erit & d g ipsius h r tripla.] *Ex decima nona quinti Euclidis. nam si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: & reliquum ad reliquum erit, sicut totum ad totum.*

B Quare proportionibus non similiter ordinatis cylindrus, cuius basis eadem portioni, & idem axis ad conum z eam proportionem habebit, quam d f ad h r.] *Ex uigesima tertia quinti, ut diximus in uigesimam septimam huius.*

C Erit ergo unaquæque n o dupla ipsius h d.] *Sit enim ipsi b d æqualis f m. quoniam h b est æqualis ipsi h f: erit & reliqua m h reliquæ h d æqualis; & propterea m d; hoc est o n dupla ipsius h d.*

D Manifestum est, omnia spatia, quorum unumquodque maximo est æquale ad alia omnia minorem habere proportionem, quàm x n ad lineam &c.] *Ex tertia huius.*

E Quare constat spatia eadem ad omnes gnomones maiorem proportionem habere, quàm x n ad lineam &c.] *Nam si à linea n x auferamus dimidiam n o, & tertiam partem x o: relinquentur dimidia n o, & duæ tertiæ ipsius x o.*

IN PROPOSITIONEM XXXII.

A Et erunt uertices portionum coniuncti ducta linea b f.] *Et ipsam lineam b f Apollonius uocat ellipsis diametrum ex generatione. quare, quam Archimedes sphæroidis portionum uertices iungentem appellat, liceat nobis deinceps breuitatis caussa & sphæroidis axem appellare.*

IN PROPOSITIONEM XXXIII.

A Dicta autem portio dupla est coni basim habentis ipsi eandem, & axem eundem; hæc iam demonstrata sunt.] *In uigesima nona huius.*

B At uero hic conus ad conum habentē pro basi circulum circa diametrum a c &c.] *Ex undecima huius, nam circuli inter se se eandem proportionem habent, quam quadrata diametrorum: & quam item quadrata semidiametrorum.*

C Proportio autem, quam habet quadratum k h ad quadratum e a, eadem est illi &c.] *Ex uigesima prima primi conicorum Apollonij.*

D Habebit igitur rectangulum contentum x d, b h ad rectangulum b h d eam proportionem, quam d h ad d e.] *Cum enim positum sit x d ad h d habere eam proportionem, quam d h ad d e: rectangulum uero contentum lineis x d, b h ad rectangulum b h d, ex prima sexti habeat* *ti habeat eam, quam x d ad h d: habebit rectangulum x d, b h ad ipsum b h d eam, quam d h ad d e.*

Eam proportionem habet, quam rectangulum b e d ad rectangulum f e d; hoc est quam b e ad e f.] *Ex prima sexti Euclidis.* E

Conus igitur, qui est in dimidio sphæroide &c.] *Per æquam rationem ex uigesima secunda quinti.*

Vtrunque enim quadruplum est.] *Ex prima sexti. nam linea f g quadrupla est lineæ b h.* G

Quare & maior portio sphæroidis ad minorem eam habet, quam excessus, quo rectangulum f g, x d, excedit rectangulum f e d.] *Per diuisam rationem ex decima septima quinti. maior enim portio sphæroidis est excessus, quo totum excedit portionem minorem.* H

Rectangulum autem f g, x d ipsum f e d excedit, rectangulo x d, e g; & rectangulo f e x.] *Nam rectangulum f g, x d; ex prima secundi elementorum, æquale est duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d, & rectangulo f e, x d. At uero rectangulum f e, x d, ex eadem, æquale est item duobus rectangulis; rectangulo uidelicet f e x; & rectangulo f e d. rectangulum igitur f g, x d æquale est tribus rectangulis; rectangulo e g, x d; rectangulo f e x; & ipsi f e d. quare rectangulum f g, x d excedit rectangulum f e d, duobus rectangulis; rectangulo scilicet e g, x d; & rectangulo f e x, ut proponebatur.* I

Quam rectangulum f e d ad rectangulum b e d; habet enim eam, quam f e ad b e.] *Corrigendus hoc loco græcus codex.* K

Et conus, qui est in minori portione, ad conum, qui in maiori eam habet, quam rectangulum b e d ad quadratum b e. nam coni altitudinum proportionem habent, cum in eadem sint basi.] *Ex decimaquarta undecimi Euclidis. conus enim in minori portione constitutus ad conum, qui in maiori, eam habet proportionem, quam d e ad b e. quam autem proportionem habet d e ad b e, eandem rectangulum d e b habet ad quadratum b e; ex lemmate uigesimæ secundæ decimi Euclidis. quare conus, qui in minori portione, ad conum, qui in maiori habet eam, quam rectangulum d e b ad quadratum b e.* L

Quoniam rectangulum x d, e g ad rectangulum x d e eam habet, quam e g ad e d.] *Ex prima sexti.* M

Et rectangulum f e x ad rectangulum f e h eam, quam e g ad e d. habet enim x e ad h e proportionem eandem, quam e g ad e d &c.] *Rectangulum enim f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam x e ad h e. & quoniam est ut x d ad h d, ita h d ad d e: erit ex decima nona quinti x h ad h e, ut x d ad h d; hoc est ut h d ad d e: & coniungendo x e ad h e, ut h d & d e; hoc est ut e g ad d e. rectangulum igitur f e x ad rectangulum f e h habet eam proportionem, quam e g ad e d.* N 1. sexti.

Quoniam quadratum b h est æquale rectangulo x d e.] *Nam cum sint tres lineæ proportionales x d, h d, d e, ut dictum est; sitq; b h æqualis ipsi h d: erit quadratum b h æquale ei, quod fit ex d x, d e.* O 17. sexti.

Et excessus, quo quadratum b e excedit quadratum b h, est æqualis rectangulo f e h; quòd b h, b f sunt æquales.] *Ex sexta secundi Euclidis.* P

COROLLARIVM.

Ex hac, & trigesima prima colligitur, cuilibet portioni sphæroidis, secti plano super axem erecto, non autem per centrum transeunte, conum illum rectum esse æqualem, qui basim habeat eandem portioni, & axem, lineam habentem ad axem portionis proportionem eam, quam utraque linea; dimidia axis sphæroidis, & axis reliquæ portionis habet ad reliquæ portionis axem.

IN PROPOSITIONEM XXXIIII. COROLLARIVM.

Sequitur ex hac, & 32, cuilibet portioni sphæroidis secti plano neque super axem erecto, neque centrum transeunte, coni portionem illam esse æqualem, cuius basis eadem portioni & axis cum diametris basis æquales angulos continens, qui ad axem portionis eam proportionem habeat, quam habet utraque linea; & dimidia eius, quæ iungit uertices portionum factarum, & axis reliquæ portionis ad eundem reliquæ portionis axem.

His igitur positis nos augendæ, amplificandæq; doctrinæ gratia, non nulla theorema, et problemata addemus à re non aliena; quorum cognitionem, neque in utilem prorsus, neque studiosis ingratam fore existimauimus.

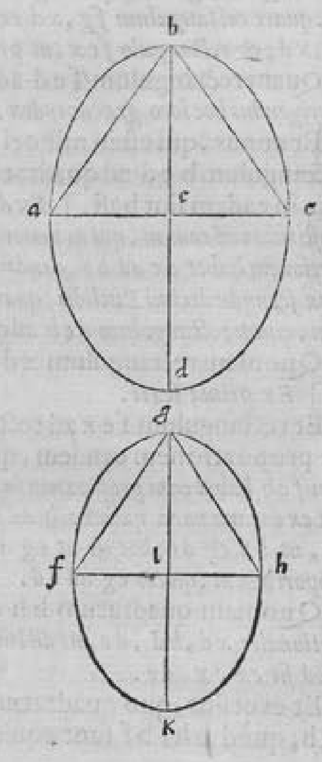
PROPOSITIO I.

Sphæroidea similia inter se se, & portiones sphæroideon similes, & pariter conoideon, triplam eius, quæ est suorum axim proportionem habent.

Sint sphæroidea similia; a b c d quidem, cuius axis b d, & centrum e; f g h k uero, cuius axis g k, & centrum l. Dico sphæroides a b c d ad sphæroides f g h k proportionem habere triplam eius, quæ est axis b d ad axem g k. secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & erecto super axem: & sit sectio sphæroidis a b c d, linea a c: sphæroidis autem f g h k, linea f h. erit ex uigesima nona huius portio sphæroidis a b c dupla coni, qui basim habet portioni eandem, & eundem axem; hoc est coni a b c: & similiter portio sphæroidis f g h dupla erit coni f g h. quare a b c portio ad portionem f g h habet eam proportionem, quam conus a b c ad conum f g h: & eorum dupla; hoc est conoides a b c d ad conoides f g h k habet eam, quam conus rectus, cuius basis a c, & axis b d, ad conum eiusmodi basim habentem f h, & axem g k. Quòd cum sphæroidea similia sint; erunt & ipsi coni similes: & habebit conus ad conum proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f h. quæ autem eadem est proportioni axis b d ad axem g k. conoides igitur a b c d ad conoides f g h k triplam proportionem habet eius, quæ est b d axis ad axem g k.

15.quinti.

12.duodec.



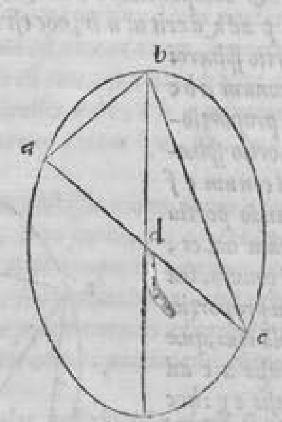
Sint portiones sphæroideon similes; & sint primum abscissæ plano per centrum ducto, & super axem erecto; cuiusmodi sunt in priori dispotione, portiones a b c, f g h. abscinduntur enim similes portiones à figuris similibus, quod ex earum diffinitione apparet. Dico portionem a b c ad ipsam f g h proportionem habere triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l. monstratum nanque antea est portionem a b c ad portionem f g h esse, sicut conus a b c ad conum f g h. qui coni cum similes sint: habent inter se se proportionem triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis f g; hoc est axis b e ad axem g l. quare & portio a b c ad portionem f g h habet proportionem triplam eius, quæ est axis b e ad axem g l.

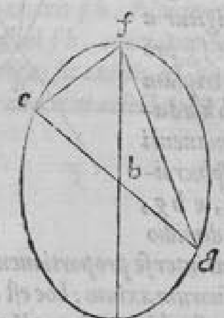
Sint portiones sphæroideon similes, abscissæ plano per centrum quidem ducto, non autem erecto super axem; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem sphæroidis a b c ad ipsam e f g habere proportionem triplam eius, quæ est axis b d ad axem f h. est enim portio sphæroidis a b c, ex trigesima huius, dupla portionis coni a b c: & portio sphæroidis e f g item dupla portionis coni e f g. Quare sphæroidis portio ad portionem sphæroidis est, ut coni portio ad portionem coni. sed coni portio a b c ad coni portionem e f g proportionem habet triplam eius, quæ est diametri basis a c ad diametrum basis e g, ipsi respondentem, ut nos monstrauimus ad undecimam huius, propositione 9. hæc autem eadem est proportioni axis b d ad axem f h, ex diffinitione similium coni portionum quã supra attulimus. ergo & sphæroidis portio a b c ad sphæroidis portioné

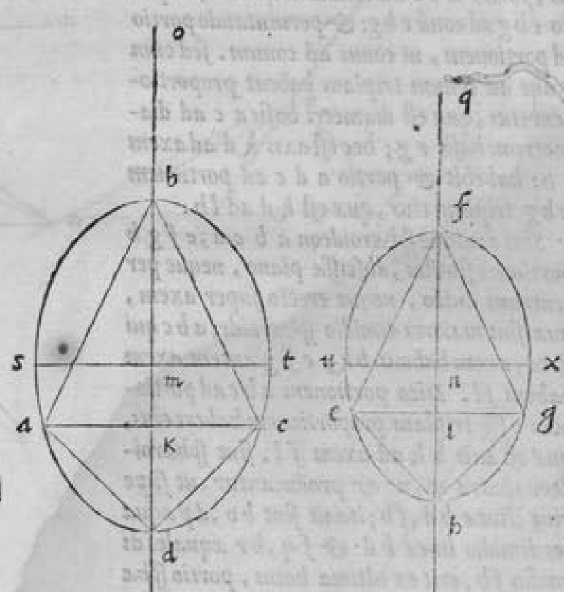
e f g

e f g proportionem habet triplam axis b d ad axem f h.

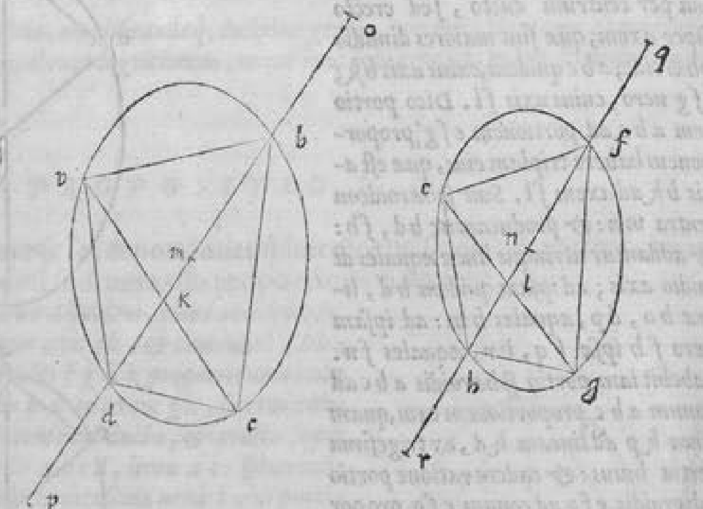
Sint rursus sphæroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissæ plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, quæ sint maiores dimidio sphæroide; a b c quidem, cuius axis b k; e f g uero, cuius axis f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ est axis b k ad axem f l. Sint sphæroideon centra m n: & producantur b d, f h: & addantur utrinque lineæ æquales dimidio axis; ad ipsam quidem b d, lineæ b o, d p, æquales b m: ad ipsam uero f h ipsæ f q, h r, æquales f n. habebit iam portio sphæroidis a b c ad conum a b c proportionem eam, quam linea k p ad lineam k d, ex trigesima tertia huius: & eadem ratione portio sphæroidis e f g ad conum e f g proportionem habebit, quam linea l r ad lineam l h. Sed linea k p ad lineam k d est, ut linea l r ad lneam l h: quod sic patet. secentur sphæroidea a b c d, e f g h plano ducto per axem. fient sectiones, ellipses similes inter se se; quòd sphæroidea similia sint; & erit ellipsis a b c d diameter b d: & ipsius e f g h diameter f h. ducantur secundæ diametri s m t, u n x. quadratum igitur s m ad quadratum b m eam habet proportionem, quàm quadratum u n ad quadratum f n. ut autem quadratum s m ad quadratum b m, ita quadratum a k ad rectangulum b k d: ex uigesima prima primi conicorum; & eadem ratione, nt quadratum u n ad quadratum f n, ita quadratum e l ad rectangulum f l h. ergo quadratum a k ad rectangulum b k d eam habet proportionem, quam quadratum e l ad rectangulum f l h. sed proportio quadrati a k ad rectaugulum b k d composita est ex proportione a k ad b k, & ex proportione a k ad k d. & itidem proportio quadrati e l ad rectangulum f l h composita est ex proportione e l ad f l, & e l ad l h. quarum proportionum, quæ est a k ad b k, eadem est proportioni e l ad f l, cum similes sint portiones. reliqua igitur proportio a k ad k d eadē est reliquæ e l ad l h. ex quo sequitur, & portionem sphæroidis a d c similem esse portioni e h g. Et quoniam b k ad a k est, ut f l ad e l: & a k ad k d, ut e l ad l h: erit ex æquali b k ad k



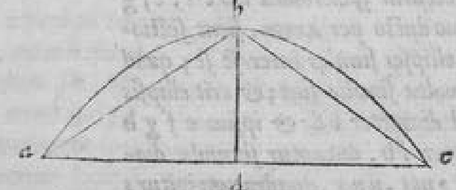


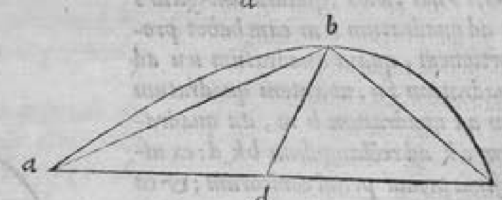


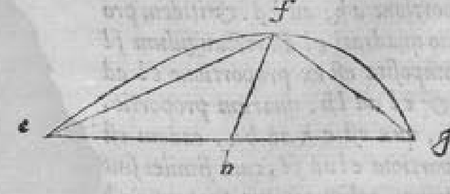
d, ut f l ad l h: & componendo b d ad k d, ut f h ad l h. est autem m d ad b d, ut n h ad f h. quare & m d; hoc est d p ad k d erit ut n h; hoc est ut h r ad l h: & rursus componendo k p ad h d, ut l r ad b h. Quare portio sphaeroidis a b c ad conum a b c eandem habet proportionem, quam portio sphaeroidis e f g ad conum e f g: & permutando portio ad portionem eam habet, quam conus ad conum. sed conus ad conum proportionem habet triplá eius, quae est diametri basis a c ad diametrum basis e g: hoc est eius, quae est axis b k ad axem f l. portio igitur a b c ad portionem e f g proportionem habet triplam eius, quae est axis b k ad axem f l. Iisdem manentibus & portiones sphaeroideon similes a d c, e h g, quae sint minores dimidio sphaeroide, habebunt inter se proportionem triplá eius, quae est suorum axium; hoc est axis k d ad axem l h. monstrabitur enim eadé ratione, lineam k o ad lineam k b esse, ut linea l q ad lineam l f. quare ex trigesima prima huius, portio a d c ad conum a d c erit, ut portio e h g ad conú e h g: & permutando portio ad portionem, ut conus ad conum. sed cum conus ad conum triplam habeat proportionem eius, quae est diametri basis a c ad diametrum basis e g; hoc est axis k d ad axem l h: habebit & portio a d c ad portionem e h g triplam eius, quae est k d ad l h.



Sint denique sphaeroideon a b c d, e f g h portiones similes, abscissae plano, neque per centrum ducto, neque erecto super axem, quae sint maiores dimidio sphaeroide; a b c quidem, axem habens b k; e f g autem axem habens f l. Dico portionem a b c ad portionem e f g triplam proportionem habere eius, quae est axis b k ad axem f l. sint sphaeroideon centra m, n: & producantur, ut superius, lineae b d, f h; ita ut sint b o, d p aequales dimidio lineae b d: & f q, h r aequales dimidio f h. erit ex ultima huius, portio sphaeroidis a b c ad portionem coni a b c, ut linea k p ad lineam k d: & similiter portio sphaeroidis e f g ad coni portionem e f g, ut linea l r ad lineam l h. Sed cum linea k p ad lineam k d sit, ut linea l r ad ipsam l h; quod eodem, quo superius modo demonstrabimus;





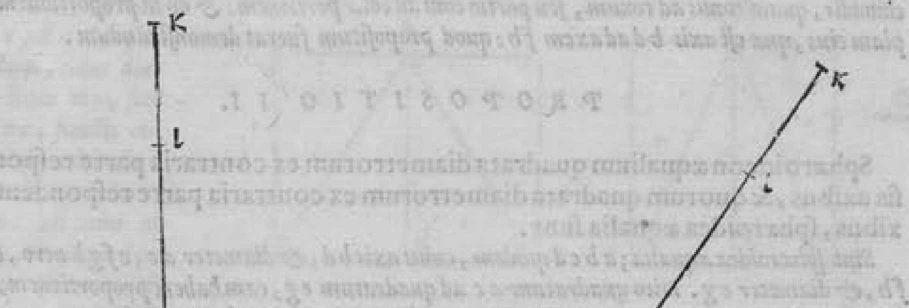


erit portio sphæroidis a b c ad portionem coni a b c, ut portio sphæroidis e f g ad coni portionem e f g: & idcirco portio sphæroidis ad sphæroidis portionem, ut coni portio ad coni portionem. portionis autem coni ad coni portionem proportio tripla est eius, quæ est axis ad axem. ergo & portionis sphæroidis a b c ad portionem sphæroidis e f g proportio tripla est eius, quæ axis b k ad axem f l.

Et similiter demonstrabimus portiones sphæroideon similes a d c, e h g minores dimidio sphæroide proportionem habere triplam eius, quæ est suorum axium k d, l h. quæ omnia demonstrasse oportebat.

Sint portiones conoideon rectangulorum similes, siue abscissæ plano super axem erecto, siue non erecto; a b c, cuius axis b d; & e f g, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad portionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ est b d ad f h. Erit nanque ex uigesima tertia, & uigesima quarta huius, portio conoidis a b c sesquialtera coni, seu portionis coni a b c: & portio conoidis e f g item sesquialtera coni, seu coni portionis e f g. quare portio conoidis ad conoidis portionem eam proportionem habet, quam conus ad conum, seu coni portio ad coni portionem; & propterea triplam habet eius, quæ est axis b d ad axem f h.

Sint rursus portiones conoideon obtusiangulorum similes, uel abscissæ plano super axem erecto, uel non erecto; a b c quidem, cuius axis b d; e f g uero, cuius axis f h. Dico portionem a b c ad protionem e f g proportionem habere triplam eius, quæ est b d ad f h. adijciatur ad lineam b d productam, linea b k, quæ sit æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: sit autem b l æqualis duplæ eiusdē: & ad lineam f h adijciatur linea f m, æqualis triplæ lineæ ad axem adiectæ: & sit f n, æqualis du-



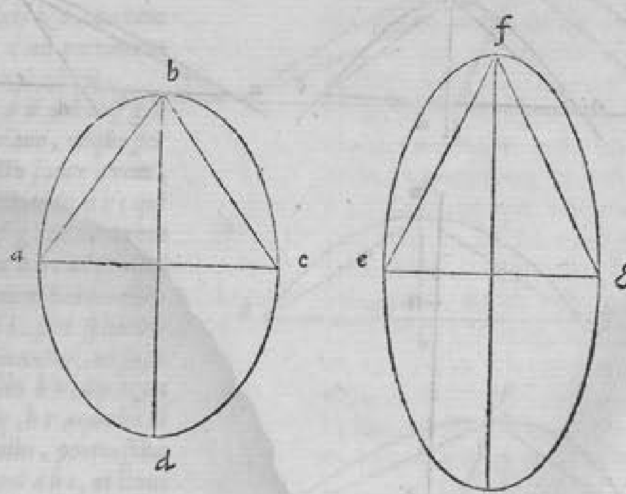
plæ eiusdem. habebit ex uigesima septima, & uigesima octaua huius, portio conoidis a b c ad conum, seu portionem coni a b c eam proportionem, quam habet linea k d ad lineam l d. & similiter portio conoidis e f g ad conum, seu coni portionem e f g habebit eam, quam linea m h ad lineam n h. sed k d ad l d habet eandem, quam m h ad n h, ob similitudinem portionum, ut monstrabitur. secentur enim conoidea plano per axem ducto. erunt sectiones, hyperbolarum portiones similes, à similibus hyperbolis abscissæ. & quoniam similium hyperbolarum latera figuræ eandem habent inter se proportionem: estq; quadratum a d ad rectangulum b d l, ut figuræ rectum latus ad transuersum, ex uigesima prima primi conicorum: & ita quadratum e h ad rectangulum f h n, ut figuræ rectum latus ad transuersum: habebit quadratum a d ad rectangulum b d l eandem proportionem, quam quadratum e h ad rectangulum f h n. Sed quadrati a d ad rectangulum b d l proportio composita est ex proportione a d ad b d, & ex proportione a d ad d l: & similiter proportio quadrati e h ad rectangulum f h n composita est ex proportione e h ad f h; & e h ad h n. quarum proportionum ea, quæ est a d ad b d, eadem est proportioni e h ad f h; quòd portiones similes sint. reliqua igitur a d ad d l, eadem est reliquæ e h ad h n. at b d ad a d habet eandem proportionem, quam f h ad e h. quare ex æquali b d ad d l proportionem habet eam, quam f h ad h n: & conuertendo d l ad b d, quam h n ad f h: & denique diuidendo l b ad b d, quam n f ad f h. est autem k l ad l b, ut m n ad n f; utraque enim utriusque dimidia est: & b d ad d l, ut f h ad h n. ergo ex æquali k l ad l d est, ut m n ad n h: & componendo k d ad l d, ut m h ad n h. Portio igitur conoidis a b c ad conum, seu ad portionem coni a b c eandem habet proportionem, quam portio conoidis e f g ad conum, seu coni portionem e f g: & permutando portio conoidis ad portionem conoidis, quam conus ad conum, seu portio coni ad coni portionem: & ob id proportionem habet triplam eius, quæ est axis b d ad axem f h: quod propositum fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Sphæroideon æqualium quadrata diametrorum ex contraria parte respondent ipsis axibus, & quorum quadrata diametrorum ex contraria parte respondent ipsis axibus, sphæroidea æqualia sunt.

Sint sphæroidea æqualia; a b c d quidem, cuius axis b d, & diameter a c; e f g h uero, cuius axis f h, & diameter e g. Dico quadratum a c ad quadratum e g, eam habere proportionem, quam habet f h ad b d. Secetur enim eorum utrunque plano per centrum ducto, & super axem erecto. erit ex his, quæ demonstrata sunt, portio sphæroidis a b c ad portionem sphæroidis e f g, ut conus a b c ad conum e f g. quare portionibus æqualibus existentibus (sunt enim æqualium sphæroideon dimidiæ) erunt & ipsi coni æquales: & æquales item eorum dupli; hoc est conus, qui basim habet circulum a c, & axem b d, & conus, qui basim habet circulum e g, & axem

15.duode. *f h. Sed conorum æqualium bases ex contraria parte respondent suis axibus; hoc est, circulus a c ad circulum e g proportionem habet eandem, quã axis f h ad axem b d: & ut circulus a c ad circu-*



2.duodec. *lum e g, ita quadratum diametri circuli a c ad quadratum circuli e g. quadratum igitur diametri a c ad quadratum diametri e g; hoc est quadratum diametri sphæroidis a b c d ad quadratum diametri sphæroidis e f g h est, ut axis f h ad axem b d: quod primum fuit demonstrandum. Sed iam*

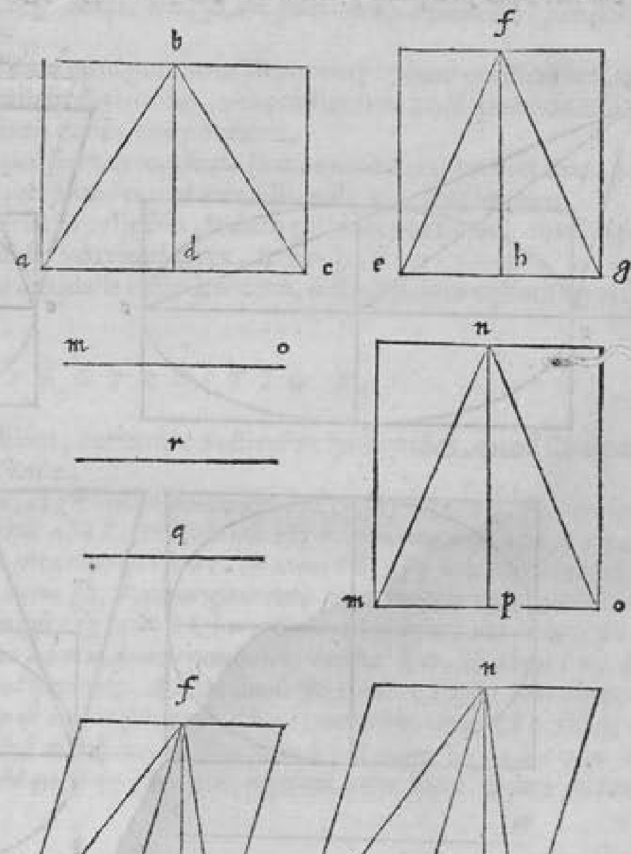
ipsorum

ipsorum sphæroideon a b c d, e f g h quadrata diametrorum ex contraria parte respondeant ipsis axibus, ut sit quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g sicut axis f h ad axem b d. Dico sphæroidea a b c d, e f g h æqualia esse. Iisdem nanque manentibus, quoniam ut quadratum diametri a c ad quadratum diametri e g, ita circulus a c ad circulum e g: erit circulus a c ad circulum e g, ut axis f h ad axem b d. quare conus, cuius quidem basis est circulus a c; axis autem b d, est æqualis cono, cuius basis circulus e g, & axis f h: & eorum subdupli, hoc est conus a b c est æqualis cono e f g. sed ut conus a b c ad conum e f g, ita portio sphæroidis a b c ad portionem sphæroidis e f g. ergo & portio sphæroidis a b c est æqualis portioni sphæroidis e f g: & propterea sphæroides a b c d æquale sphæroidi e f g h: quod secundo loco demonstrandum fuerat.

PROPOSITIO III.

Datis duobus conis, siue cylindris quibuscunque, tertium constituere conum, siue cylindrum, qui sit alteri eorum æqualis, alteri uero similis.

Sint prius dati coni a b c, e f g, siue recti utrique, siue scaleni, siue alter rectus, alter scalenus; a b c quidem, cuius basis sit circulus circa diametrum a c, & altitudo b d; e f g uero cuius basis circulus circa diametrum e g, altitudo f h: & oporteat conum constituere cono a b c æqualem, & similem ipsi e f g. fiat sicut f h ad e g, sic b d ad q: & inter duas rectas lineas a c, & q duæ mediæ proportionales sumãtur, m o, & r: ita ut sit, sicut a c ad m o, ita m o ad r, & r ad q: & supra circulum, cuius diameter sit linea m o, fiat conus m n o, similis cono e f g, cuius altitudo n p. Dico eum æqualem esse cono a b c. est enim ut f h ad e g, ita n p ad m o: quod in rectis conis est manifestum, ex eorum diffinitione; in his enim f h & n p axes sunt: in scalenis autem monstrabitur hoc pacto. per lineam f h, & axem coni e f g, qui sit f s, ducatur planum secans conum, quod faciat sectionem triangulum f h s: & eodem modo per lineam n p, & lineam n t, axem coni m n o ducatur aliud planũ secans conum, quod faciat sectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s. nanque angulus n t p est æqualis angulo f s h, ex diffinitione conorum scalenorum similium: & angulus n p t est æqualis angulo f h s; cum uterque sit rectus. reliquus igitur angulus reliquo angulo est æqualis: & totum triangulum



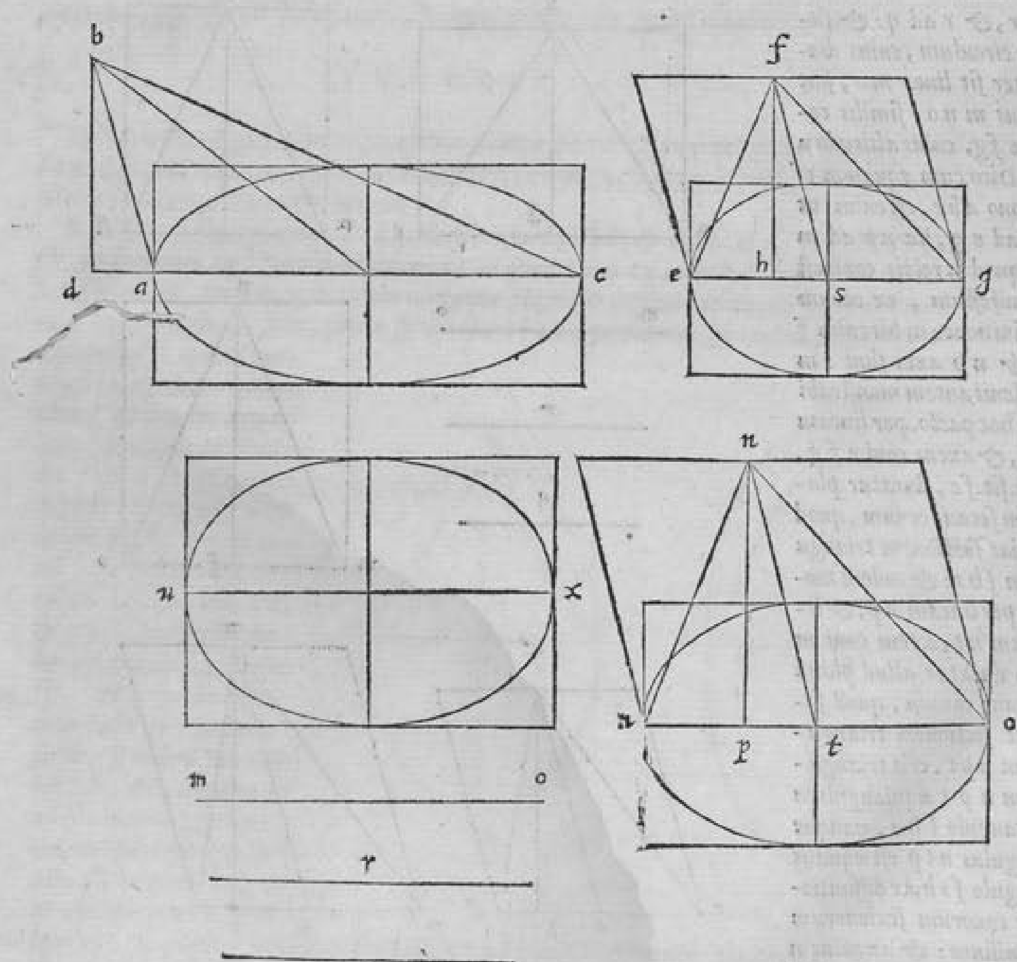
toti

toti triangulo æquiangulum. quare ut f h ad f s, ita n p ad n t. ut autem f s ad e g, ita n t ad m o, ex diffinitione eadem, & permutata ratione. ergo ex æquali ut f h ad e g; hoc est ut b d ad q, ita n p ad m o: & permutando, conuertendoq; ut n p ad b d, ita m o ad q. Itaque cum quatuor lineæ proportionales sint a c, m o, r, q: erit sicut quadratum a c ad quadratum m o, ita m o ad q. sicut autem m o ad q, ita n p ad b d. sicut igitur quadratum a c ad quadratum m o; hoc est sicut circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum m o, ita n p ad b d. quare ex decima quinta duodecimi elementorum, & ex ijs, quæ à nobis demonstrata sunt ad undecimam huius, propositione decima, conus m n o est æqualis cono a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et cum sit cylindrus ad cylindrum, sicut conus ad conum: eodem faciemus modo, si sint dati cylindri a b c, e f g: & oporteat cylindro quidem a b c æqualem, ipsi uero e f g similem constituere cylindrum, &c.

PROPOSITIO IIII.

Datis duabus coni, aut cylindri portionibus, tertiam constituere coni, aut cylindri portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri similis.

Sint datæ coni portiones; a b c quidem basim habens spatium contentum ellipsi a c, cuius maior diameter sit a c recta linea, & altitudo b d; e f g uero basim habens spatium, e g ellipsi contentum, cuius diameter maior sit recta linea e g, & altitudo f h: oporteatq; aliam coni portionem inuenire, quæ sit æqualis portioni a b c, & similis ipsi e f g. constituatur ex diametris ellipsis



ellipsis a c rectangulum a c: & eodem modo ex diametris ellipsis e g constituatur aliud rectangulum e g: & ex uigesima quinta sexti elementorum constituatur tertium rectangulum u x, æquale ipsi a c rectangulo, & simile ipsi e g: in quo describatur ellipsis u x, cuius maior diameter recta linea u x. erit & ellipsis u x, similis ellipsi e g: & ex septima huius, spatium ellipsi u x contentum, æquale spatio contento ellipsi a c. fiat ut f h ad e g, sic b d ad q: & inter duas rectas lineas u x, q inueniantur duæ mediæ proportionales m o, & r: intelligaturq; coni portio m n o similis coni portioni e f g, basim habens spatium ellipsi contentum, cuius maior diameter sit m o, & altitudo n p. Dico coni portionem m n o eam esse, quam quærimus. ducatur enim planum secans coni portionem e f g, transiensq; per lineam f h, & eius axem f p; quod faciat sectionem triangulum f h s: & similiter per lineam n p, & axem portionis coni m n o, qui sit n t, ducatur aliud planum eam secans, faciensq; sectionem triangulum n p t. erit triangulum n p t æquiangulum triangulo f h s, ex diffinitione coni portionum similium, quam nos in principio huius attulimus; & eadem ratione, qua usi sumus in antecedenti, erit ut f h ad e g, ita n p ad m o: & tandem, ut quadratum u x ad quadratum m o, ita n p ad b d. ut autem quadratum u x ad quadratum m o, ita spatium ellipsi u x comprehensum ad spatium comprehensum ellipsi m o, ex corollario septimæ huius. sed spatium ellipsi u x comprehensum est æquale spatio comprehenso ellipsi a c, ut monstratum est. ergo ut basis portionis coni a b c ad basim portionis coni m n o, ita n p ad b d. quarum autem coni portionum bases ex contraria parte respondent suis altitudinibus, hæ inter se sunt æquales, ut monstratum est ad undecimam huius propositione decima. Aequalis est igitur coni portio m n o coni portioni a b c, & similis ipsi e f g: quod fecisse oportebat. Et idem sequetur, si sint datæ cylindri portiones a b c, e f g. nanque erit cylindri portio m n o æqualis a b c portioni, & similis portioni e f g.

Quòd si dato cono, & data coni portione, oporteat conum constituere, æqualē datæ coni portioni, & similem dato cono, uel constituere coni portionem æqualem dato cono, similem uero datæ coni portioni.

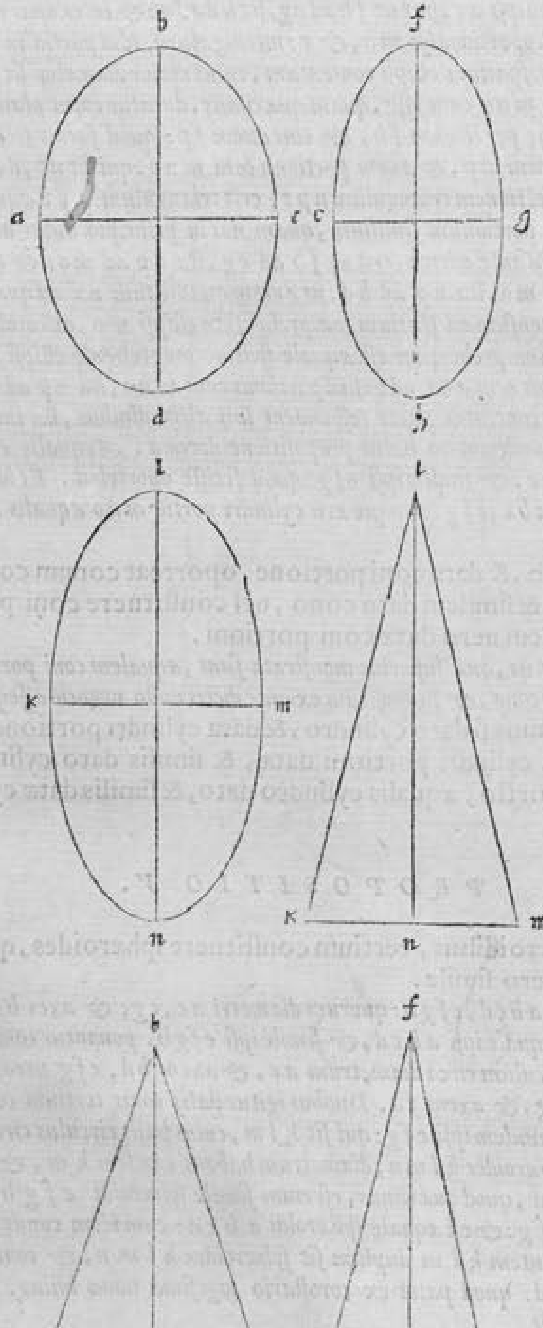
Conum inueniemus ex ijs, quæ superius monstrata sunt, æqualem coni portioni datæ, uel coni portionem æqualem dato cono, & propositum ex ante dictis nullo negocio assequemur.

Neque aliter faciemus si dato cylindro, & data cylindri portione, constituendus sit cylindrus, æqualis cylindri portioni datæ, & similis dato cylindro, uel constituenda sit cylindri portio, æqualis cylindro dato, & similis datæ cylindri portioni.

PROPOSITIO V.

Datis duobus sphæroidibus, tertium constituere sphæroides, quod sit alteri eorum æquale, alteri uero simile.

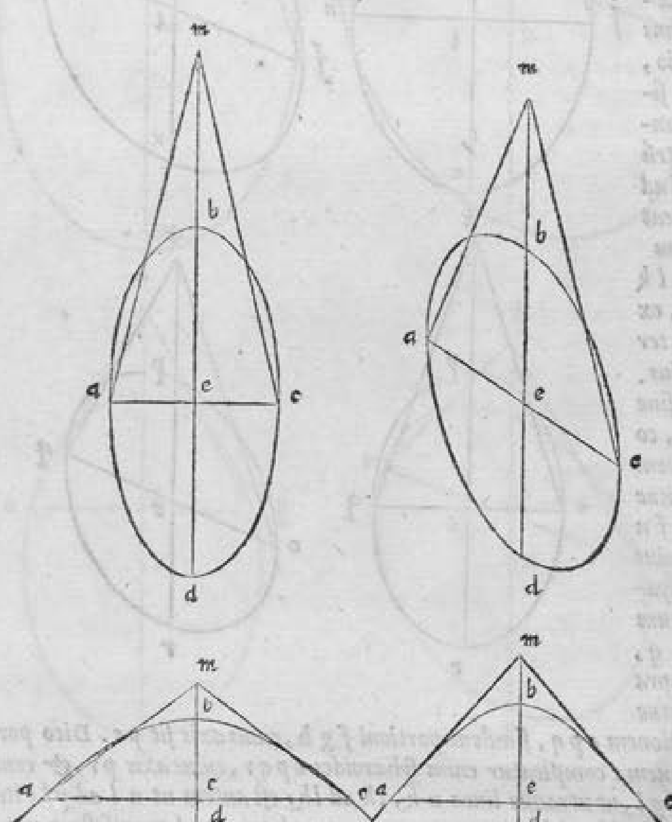
Sint data sphæroidea a b c d, e f g h: quorum diametri a c, e g; & axes b d, f h: & oporteat constituere sphæroides, æquale ipsi a b c d, & simile ipsi e f g h. ponantur coni a b c, e f g; a b c quidem basim habens circulum circa diametrum a c, & axem b d; e f g uero basim habens circulum circa diametrum e g, & axem f h. Duobus igitur datis conis tertium constituemus conum; æqualem ipsi a b c, & similem ipsi e f g: qui sit k l m, cuius basis circulus circa diametrum k m, & axis l n. ponatur sphæroides k l m n, diametrum habens eandem k m, & axem l n. Dico k l n m sphæroides esse illud, quod quærimus. est enim simile sphæroidi e f g h; cum conus k l m factus sit similis cono e f g: & est æquale sphæroidi a b c d: cum idem conus k l m factus sit æqualis cono a b c. coni autem k l m duplum sit sphæroides k l m n, & coni a b c item sit duplum sphæroides a b c d: quod patet ex corollario uigesimæ nonæ huius. Quare factum iam est, quod fecisse oportuit.


b
f
a
c c
g
d
l
l
k
m
K
m
n
n
f
b
a
c e
g
d
b

PROPOSITIO VI.

Datis duabus portionibus siue sphæroidis, siue conoidis, tertiam inuenire sphæroidis, siue conoidis portionem, quæ alteri earum sit æqualis, alteri uero similis.

Sint datæ sphæroidis, siue conoidis portiones, abscissæ plano quomodocunque ducto a b c, f g h: et sit a b c abscissa à sphæroide, siue conoide a b c d, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b e: & f g h sit abscissa à sphæroide, uel conoide f g h k, cuius portionis basis sit circulus, siue spatium ellipsi contentum circa f h diametrum, et axis g l: oporteat autem portionem inuenire æqualem portioni a b c, & similem ipsi f g h. Constituantur ex ijs, quæ ante tradita sunt, coni, seu portiones coni a m c, & f n h; a m c quidem æqualis por



tioni a b c, basim habens eadem ipsi; f n h uero æqualis portioni f g h, & ipsi eandem habens basim. Sitq́; primum f g h portio, cui oporteat similem constituere, sphæroidis portio, abscissa plano per centrum ducto, uel erecto super axem, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio basim habens circulum, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum fh, & axem n l, qui sit æqualis axi sphæroidis g k, ex corollario uigesimæ nonæ, & trigesimæ huius. Itaque dato cono, siue coni portioni a m c, æqualem conum constituemus, siue coni portionem, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, et axis t s: & supra eandem basim intelligatur constituta sphæroidis portio o p q, similis portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse eam, quam uolumus. Compleatur enim sphædoides: & sit o p q r, cuius axis p r, & centrum s. erit ut n l ad f h, ita t s ad o q: ut autem f h ad g k, ita o q ad p r. quare ex æquali, ut n l ad g k, ita t s ad p r: & sunt æquales n l, g k. ergo æquales quoque sunt t s, p r: & propterea portio o p q æqualis est cono, seu portioni coni o t q; hoc

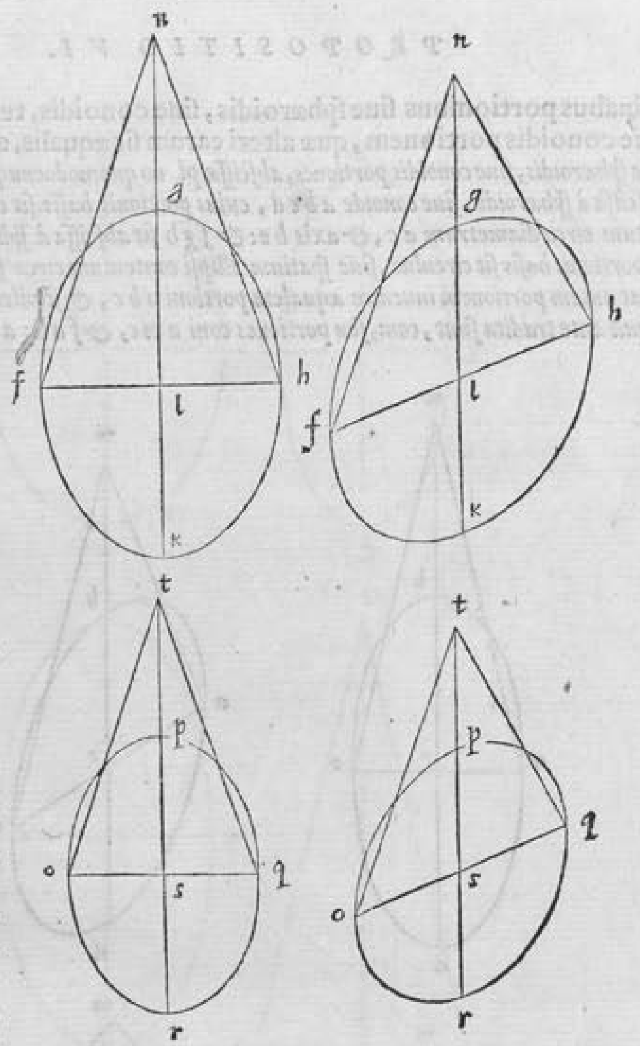
p 2 est

4. et 5. 6.

ex premissa

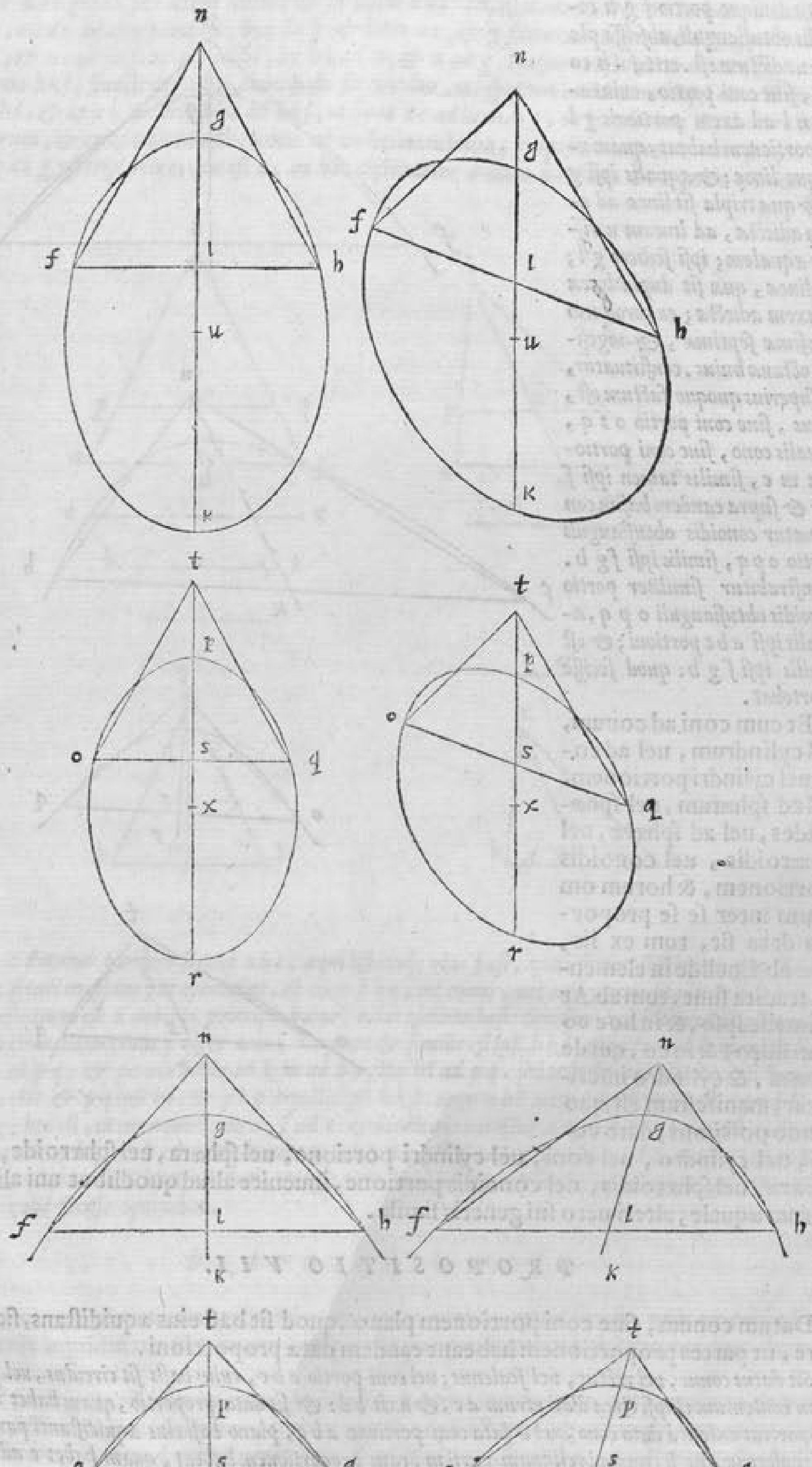
est ipsi a m c, cui erat æqualis portio sphæroidis a b c. æqualis est igitur portio o p q portioni a b c, & similis ipsi f g h.

Sit f g h portio sphæroidis abscissa plano non per centrum ducto, sed erecto super axem, uel non erecto: sit autem u centrum sphæroidis f g h k. erit conus f n h, siue coni portio, cuius basis circulus, siue spatium ellipsi contentum circa diametrũ f h, & axis n l; qui ad ipsam g l eam habeat proportionem, quam utraque linea u k, l k habet ad ipsam l k, ex corollario trigesimæ tertiæ, & ultimæ huius. Rursus dato cono, siue coni portioni a m c, conum, siue portionem coni æqualem constituemus, similem ipsi f n h: & sit o t q, cuius basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum o q, & axis t s: & supra eandem basim constituemus sphæroidis portionem o p q, similem portioni f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem eam esse quæsitam portionem. compleatur enim sphæroides o p q r, cuius axis p r, & centrum x. Et quoniam est n l ad g l, ut utraque linea u k, l k ad l k: est autem ut n l ad g l, ita t s ad p s: & ut utraque linea u k, l k ad l k, ita utraque x r, s r ad s r: quod manifeste patet ex ijs, quæ supra ostendimus, ob similitudinem portionum f g h, o p q: erit t s ad p s, ut utraque x r, s r ad s r: & eadem ratione portio o p q æqualis cono, seu coni portioni o t q; hoc est ipsi sphæroidis portioni a b c, & similis ipsi f g h.

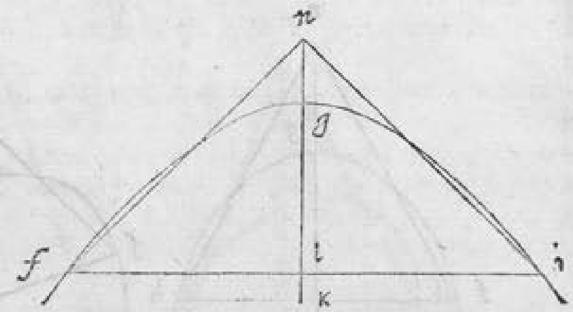


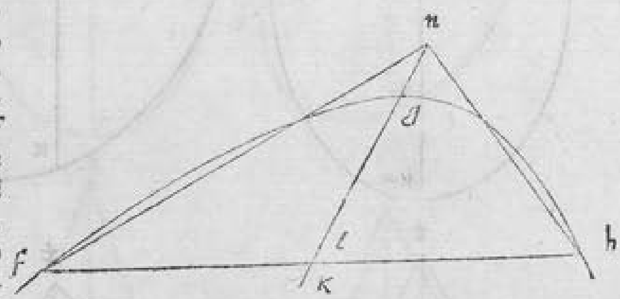
Sed sit f g h portio conoidis rectanguli, abscissa plano super axem erecto, uel non erecto. erit f n h conus, siue coni portio, cuius basis, circulus, siue spatium contentum ellipsi circa diametrum f h, & axis n l; qui ad axem portionis g l proportionem habeat sesquialteram, ex corollario uigesimæ tertiæ, & uigesimæ quartæ huius. Constituatur igitur conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis uero ipsi f n h: & sit eius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum o q, & axis t s: deinde supra eandem basim constituatur conoidis rectanguli portio o p q, similis ipsi f g h, cuius axis sit p s. Dico portionem o p q esse æqualem portioni a b c. est enim ut n l ad f h, ita t s ad o q: & ut f h ad g l, ita o q ad p s. quare ut n l ad g l, ita t s ad p s. sed n l sesquialtera est ipsius g l. ergo & t s erit ipsius p s sesquialtera: & portio conoidis rectanguli o p q æqualis ipsi o t q; hoc est ipsi a b c, & similis ipsi f g h.

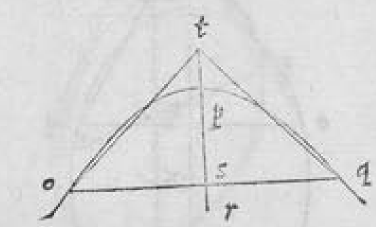
Sit

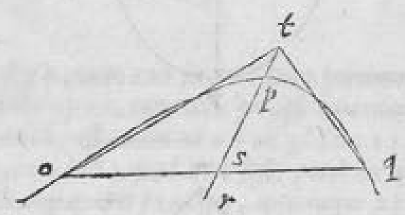

n
g
f
l
h
u
k
t
p
o
s
q
x
r

Sit denique portio f g h conoidis obtusianguli, abscissa plano, ut dictum est. erit f n h conus, siue coni portio, cuius axis n l ad axem portionis g l proportionem habeat, quam utraque linea; & æqualis ipsi g l; & quæ tripla sit lineæ ad axem adiectæ, ad lineam utrisque æqualem; ipsi scilicet g l; & lineæ, quæ sit dupla lineæ ad axem adiectæ; ex corollario uigesimæ septimæ, & uigesimæ octauæ huius. constituatur, ut superius quoque factum est, conus, siue coni portio o t q, æqualis cono, siue coni portioni a m c, similis tamen ipsi f n h: & supra eandem basim constituatur conoidis obtusianguli portio o p q, similis ipsi f g h. monstrabitur similiter portio conoidis obtusianguli o p q, æqualis ipsi a b c portioni; & est similis ipsi f g h: quod fecisse oportebat.









Et cum coni ad conum, uel cylindrum, uel ad coni, uel cylindri portionem, uel ad sphæram, uel sphæroides, uel ad sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portionem, & horum omnium inter se se proportio data sit, tum ex iis, quæ ab Euclide in elementis tradita sunt, tum ab Archimede ipso, & in hoc eodem libro, & in eo, qui de sphæra, & cylindro inscribitur; manifestum est, quo modo posimus, dato cono, uel cylindro, uel coni, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel sphæræ, uel sphæroidis, uel conoidis portione, inuenire aliud quodlibet uni alicui eorum æquale, alteri uero sui generis simile.

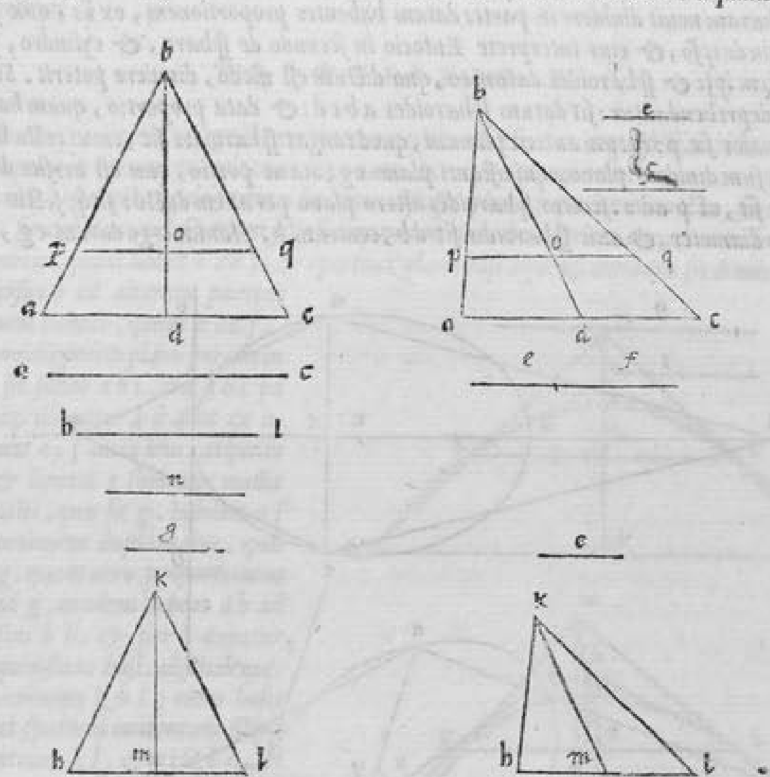
PROPOSITIO VII.

Datum conum, siue coni portionem plano, quod sit basi eius æquidistans, sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sit datus conus, uel rectus, uel scalenus; uel coni portio a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum a c, & axis b d: & sit data proportio, quam habet e ad f: oporteat autem à dato cono, uel à data coni portione a b c, plano basi eius æquidistanti partem abscindere uersus b, quæ ad reliquam partem, eam proportionem habeat, quam habet e ad f.

Secetur

Secetur a b c plano per axem ducto: & sit sectio a b c, triangulum: fiatq; ut utraque linea e, f ad e, ita a c ad aliam lineam, quæ sit g: & inter a c, & g sumantur duæ mediæ proportionales h l, & n: ut sit sicut a c ad h l, ita h l ad n, & n ad g. Itaque constituatur conus, siue coni portio h k l, similis ipsi a b c, cuius basis sit circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum h l, & axis k m. erit a b c ad h k l, ut linea a c ad lineam g, ex duodecima duodecimi elementorum, & ex ijs quæ monstrauimus ad undecimam huius, propositione nona. nam proportio a c ad g est tripla eius, quæ est a c ad h l. abscindatur à linea b d linea b o æqualis ipsi k m:



& per o ducatur planum secans a b c, æquidistansq; eius basi, quod faciat sectionem p q. Dico a b c secari eo plano, ut oportebat. est enim p b q, uel conus, uel coni portio similis ipsi a b c, ut monstratum est à nobis in principio huius; cuius quidem basis circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum p q, & axis b o. quare & similis est ipsi h k l. est igitur ut k m ad h l, ita b o ad p q: & permutando ut k m ad b o, ita h l ad p q. sed cum sit æqualis b o ipsi k m: æqualis erit & p q ipsi h l: & p b q æqualis ipsi h k l. ergo a b c ad p q b est ut linea a c ad lineam g; hoc est, ut utraque linea e, f ad e: & diuidendo excessus, quo a b c excedit p b q; hoc est a p q c ad p b q, ut f ad e: & demum conuertendo p b q ad a p q c, ut e ad f. constat igitur a b c secari plano æquidistanti eius basi, & esse partem abscissam uersus b, ad reliquam partem, ut e ad f: quod fecisse oportebat.

PROPOSITIO VIII.

Datum cylindrum, seu cylindri portionem plano, quod sit eis, quæ ex opposito planis æquidistans ita secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

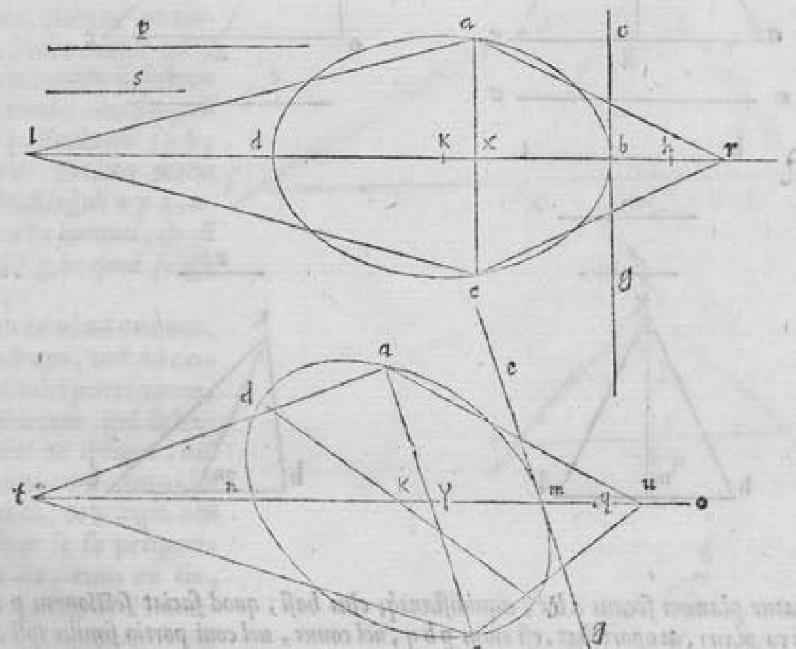
Hoc facile factu est. si enim axem secabimus in partes datam habentes proportionem: & per puncta sectionum plana ducemus, planis ex opposito æquidistantia: & cylindrum item, uel portionem cylindri secundum datam proportionem secabimus. monstratum nanque superius est ad undecimam

decimam huius, propositione tertia, si cylindrus, uel portio cylindri plano secetur æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, esse cylindrum, ad cylindrum, seu portionem ad portionem, ut axis ad axem.

PROPOSITIO IX.

Datum sphæroides plano, quod sit alteri dato plano æquidistans sic secare, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Qui sphæram nouit diuidere in partes datam habentes proportionem, ex ijs, quæ scripta sunt ab Archimede ipso, & eius interprete Eutocio in secundo de sphæra, & cylindro, propositione quarta, idem ipse & sphæroides datum eo, quo dictum est modo, diuidere poterit. Sed ut omnia manifeste deprehendantur: sit datum sphæroides a b c d: & data proportio, quam habet p ad s, quarum maior sit p: datum autem planum, quod tangat sphæroides sit, cuius recta linea e g: & oporteat ipsum diuidere plano æquidistanti plano e g; ita ut portio, quæ est uersus d ad alteram portionem sit, ut p ad s. secetur sphæroides altero plano per axem ducto: sitq; sectio a b c d, ellipsis, cuius diameter, & axis sphæroidis sit d b, centrum k. planum ergo datum e g, uel tangit ip



sum sphæroides in alterutro punctorum terminantium axem; hoc est in b uel d, uel alibi. tangat primum in b. perspicuum iam est, ipsum erectum esse super axem b d. ponatur autem b f æqualis ipsi k b: & diuidatur in puncto h; ita ut sit f h ad h b, sicut p ad s. diuidatur etiam b d in x, ut sit x f ad f h, sicut quadratum b d ad quadratum d x. Id uero quomodo fieri possit, docuit Eutocius in eum Archimedis locum scribens. Demum per x ducatur planum æquidistans plano e g, quod item erectum erit super b d axem, & sit eius recta linea a x c. Dico planum illud secare sphæroides, ut oportebat; hoc est portionem a d c ad portionem a b c, esse sicut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k b, b x ad b x, sic l x ad d x: sicut autem utraque k d, d x ad d x, sic r x ad b x: & iungantur a l, l c, a r, r c. erit l x ad x r; hoc est conus a l c ad a r c conum, ut p ad s: quod eodem in loco monstrauit Archimedes. Sed conus a l c æqualis est portioni sphæroidis a d c; & a r c conus æqualis portioni eiusdem a b c, ex corollario trigesimæ tertiæ huius. portio igitur sphæroidis a d c ad portionem a b c erit, ut p ad s. Si uero e g planum datum tangat sphæroides in alio quouis puncto, ut in m; ducatur k m linea, & utrinque producatur, quæ sit n k m, secans ellipsim ex altera parte in n: ipsi autem k m ponatur æqualis m o: & rursus diuidatur m o in q, ut sit o q ad q m, sicut p ad s: & diuidatur item m n in y, ut y o ad o q sit, sicut quadratum m

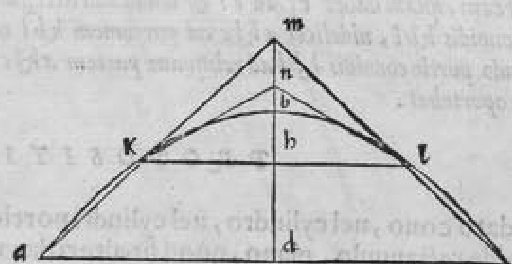
n ad

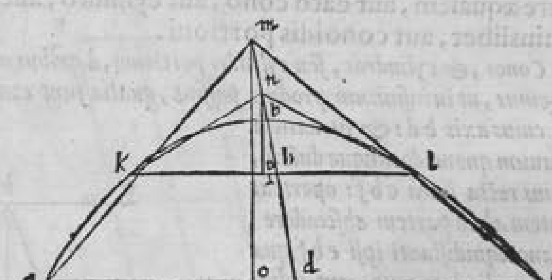
n ad quadratum m n y: & per y ducatur planum æquidistans plano e m s, cuius recta linea a y c. Dico planum illud diuidere sphæroides secundum proportionem datam; hoc est portionem a n c ad portionem a m c esse, ut p ad s. fiat enim sicut utraque linea k m, m y ad m y, sic t y ad n y: sicut autem utraque k n, n y ad n y, sic u y ad m y: & iungantur a t, t c, a u, u c. erit eadem ratione t y ad y u; hoc est coni portio a t c ad coni portionem a u c, ut p ad s. sed coni portio a t c est æqualis portioni sphæroidis a n c: & coni portio a u c æqualis portioni sphæroidis a m c, ex corollario ultimæ huius. portio igitur sphæroidis a n c ad portionem a m c est, ut p ad s: quod fecisse oportebat.

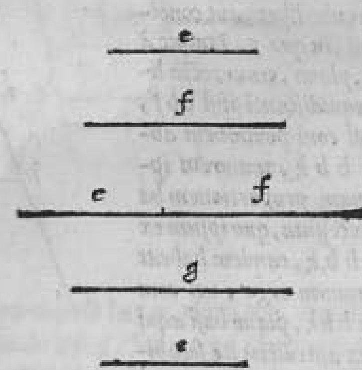
PROPOSITIO X.

Datam conoidis rectanguli portionem plano basi eius æquidistanti ita diuidere, ut partes proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sit data conoidis rectanguli portio a b c, siue abscissa plano super axem erecto, siue non erecto; cuius basis sit circulus, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c, & axis b d: sit autem data proportio, quam habet e ad f: & oporteat plano basi æquidistanti eam sic diuidere, ut pars, quæ est uersus b ad alteram partem proportionem habeat, quam e ad f. Secetur conoidis portio plano per axem ducto: & sit sectio a b c. erit a b c parabole, cuius diameter b d. fiat ex utrisque lineis e, f linea una, atque inter hanc & lineam e sumatur media proportionalis, quæ sit g. habebit e f ad e proportionem duplam eius, quæ est e f ad g. quam uero proportionem habet e f ad g, eandem habeat d b ad 10. diff. quinti. *partem ipsius b h: & per h ducatur planum æquidistans basi, abscindensq; conoidis portionem k b l; cuius basis circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, & axis b h. Dico conoidis portionem a b c sectam esse plano, ut oportebat. producatur enim d b usque ad m; ita ut sit d m sesquialtera ipsius d b: atque à linea b m. abscindatur b n, ut sit h n item sesquialtera ipsius h b. Intelligatur autem conus, siue coni portio a m c, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis a b c, & axis d m: & similiter intelligatur conus, siue coni portio k n l, cuius basis eadem, quæ portionis conoidis k b l, & axis h n: sitq; m o altitudo coni portionis a m c: & n p altitudo portionis k n l. erit iam ex corollario uigesimæ tertiæ & uigesimæ quartæ huius conus, siue coni portio a m c, æqualis conoidis portioni a b c: & conus, siue coni portio k n l, æqualis portioni conoidis k b l. Itaque cum sit, ut e f ad g, ita d b ad b h: ut autem d b ad b h, ita quadratum a d ad quadratum k h, ex uigesima primi conicorum; & ut*





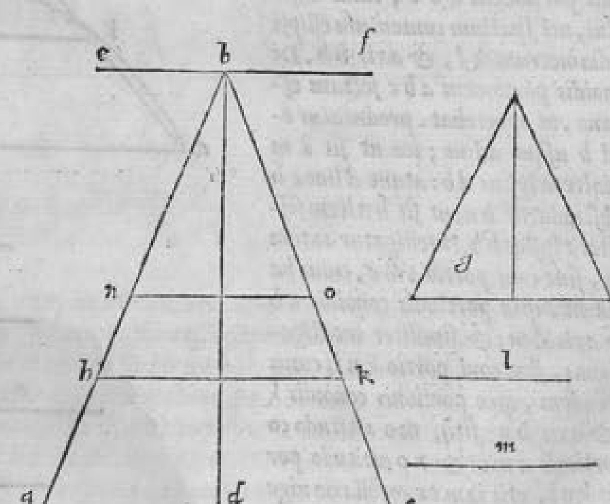


15. quinti quadratum a d ad quadratum k b, ita quadratum a c ad quadratum k l; hoc est circulus circa dia
2. duodec. metrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi contentum circa diametrum a c ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l, ex corollario septimæ huius: sunt enim hæ sectiones similes; cum plana sint æquidistantia: quod patet ex corollario decimæ quintæ. erit ut e f ad g, ita circulus circa diametrum a c ad circulum circa diametrum k l, uel spatium ellipsi circa diametrum a c contentum ad spatium contentum ellipsi circa diametrum k l; hoc est basis coni, uel coni portionis a m c ad basim coni, uel portionis coni k n l. Rursus cum sit d m ad d b, ut h n ad h b: erit permutando d m ad h n, ut d b ad h b. est autem d b ad h b, ut e f ad g. quare ut e f ad g, sic d m ad h n; hoc est altitudo coni a m c ad altitudinem coni k n l. Sed est d m axis portionis coni a m c: & h n axis portionis coni k n l: & ut axis d m ad axem h n, sic altitudo m o ad altitudinem n p, propter similitudinem triangulorum d m o, h n p. ergo & altitudo portionis coni a m c ad altitudinem portionis coni k n l est, ut e f ad g. est autem coni a m c ad conum k n l, seu portionis coni a m c ad portionem coni k n l, proportio composita ex proportione basium, & proportione altitudinum, ut superius est demonstratum, quarum utræque eædem sunt proportioni e f ad g. conus igitur a m c ad conum k n l, siue coni portio a m c ad coni portionem k n l; hoc est portio conoidis a b c ad portionem conoidis k b l, proportionem habet duplam eius, quæ est e f ad g; hoc est eam, quam habet e f ad e: & diuidendo excessus, quo portio conoidis a b c excedit portionem conoidis k b l, uidelicet a k l c ad portionem k b l eam habet, quam f a d e: & denique conuertendo portio conoidis k b l ad reliquam partem a k l c proportionem habet, quam e ad f: quod fecisse oportebat.

PROPOSITIO XI.

A dato cono, uel cylindro, uel cylindri portione, uel sphæra, uel sphæroide, uel conoide rectangulo, plano, quod sit alteri dato plano æquidistans, partem abscindere æqualem, aut dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni.

Conos, & cylindros, seu cylindri portiones, à quibus abscindenda pars est, hoc loco eiusmodi intelligemus, ut in infinitum produci possint, qualia sunt conoidea ipsa. Sit primum datus conus a b c, cuius axis b d: & sit datum planum quomodocunque ductũ, cuius recta linea e b f: oporteat autem ab eo partem abscindere, plano æquidistanti ipsi e b f, quæ sit æqualis dato cono, aut cylindro, aut sphæræ, aut sphæroidi, aut horum cuiuslibet, aut conoidis portioni, in qua g. Itaque à cono a b c, plano, cuius recta linea h k, æquidistanti ipsi e b f, conum, uel coni portionem abscindemus h b k, maiorem ipso g: & quam proportionem habet g ad excessum, quo ipsum exceditur ab h b k, eandem habeat l ad m. conum ergo, uel coni portionem h b k, plano basi æquidistanti, ex antedictis ita secabimus, ut pars, quæ est uersus b

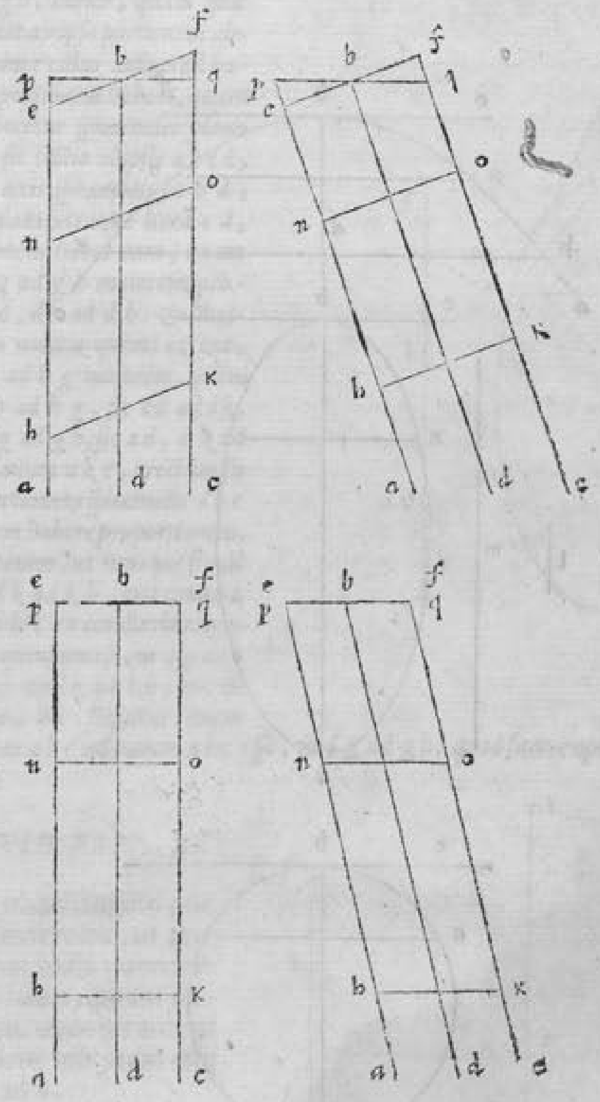


ad reliquam partem proportionem habeat, quam l ad m. sit autem ea n b o. manifestum est ex nona quinti n b o æqualem esse ipsi g. & cum planum, cuius recta linea n o, basi æquidistet, æquidistabit & ipsi e b f: & erit à cono a b c, pars n b o, æqualis ipsi g, abscissa plano æquidistanti dato plano.

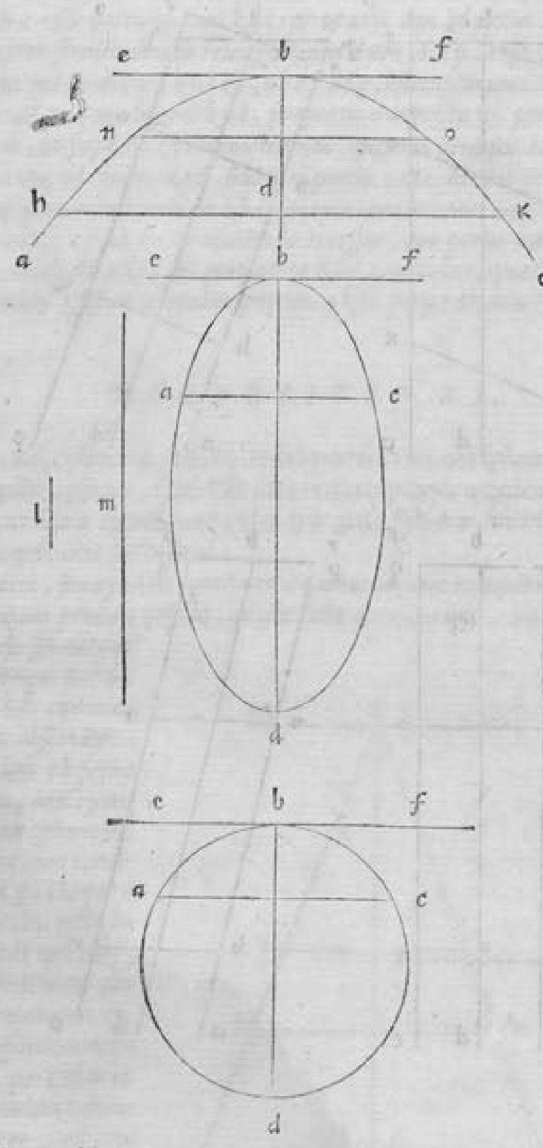
Sit datus cylindrus, uel portio cylindri a p q c, cuius axis b d: & planum ex superiori parte,

circulus,

circulus, uel spatium contentum ellipsi circa diametrum p q: sitq́; datum planum, cuius recta linea e b f, ut eius pars e b secet cylindrum, uel cylindri portionem; b f uero extra cadat: & à dato cylindro, seu cylindri portione a p q c, partem abscindere oporteat, æqualem eidem g, plano æquidistanti ipsi e b f. producatur cylindrus, seu cylindri portio usque ad planum e b f: & ducto alio plano h k æquidistanti e b f, abscindatur pars maior ipso g, quæ sit h e f k; aut cylindrus; aut cylindri portio: & rursus quam habet proportionem g ad excessum, quo exceditur ab h e f k, habeat l ad m. Ipso autem h e f k secto secundum proportionem l ad m, plano n o, æquidistanti eis, quæ ex opposito planis, erit eadem ratione n e f o æqualis ipsi g. sed n p q o est æqualis ipsi n e f o; propterea quòd p b e cylindri particula æqualis est particulæ q b f, ex iis, quæ demonstrata sunt ad ad undecimam huius, propositione octaua. æqualis est igitur n p q o ipsi g: & est planum n o æquidistans ipsi e b f plano dato. Si uero datum planum æquidistet superiori plano p q, uel idem sit ei: similiter abscindemus partem maiorem, quàm sit g, ducto plano h k, ipsi p q æquidistanti; & rursus ducto alio plano n o, æquidistanti eis, quæ ex opposito, ita secabimus, ut n p q o ad h n o k eandem proportionem habeat, quam habet g ad excessum, quo exceditur ab ipso h p q k, erit & n p q o æqualis g: & planum n o æquidistabit dato plano.



Sit præterea datum conoides rectangulum a b c: & datum planum quomodolibet ductum, tangens conoides in puncto b, cuius recta linea e b f. abſcindemus & hic plano ducto h k, æquidiſtanti ipſi e b f, conoidis portionem h b k, maiorem, quàm g: & ut g ad exceſſum, quo exceditur à conoidis portione h b k, ita ſit l ad m. Rurſus ex ſuperius demonſtratis, plano n o ducto æquidiſtanti baſi diuidemus h b k in partes proportione reſpondentes ipſis l m. quo facto, erit item conoidis portio n b o, æqualis ipſi g, abſciſſa plano æquidiſtanti plano dato.



Sit demum datum ſphæroides, ſeu ſphæra a b c d: & datum planum tangens in puncto b, cuius recta linea e b f: & ut g ad exceſſum, quo exceditur ab a b c d, ſit l ad m. ſphæroides ergo, uel ſphæram ſecabimus in partes, quæ proportione reſpondeant ipſis l, m, plano ducto, cuius recta linea a c, æquidiſtanti e b f. erit ſimiliter a b c portio æqualis ipſi g, abſciſſa plano, ut oportebat.

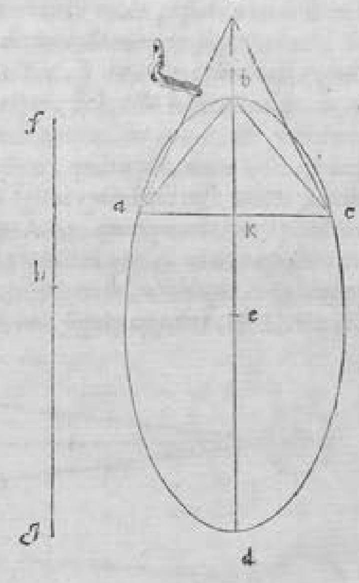
qm tam sphæra q sphæroides, cum [illegible] sunt, ut probavi possim in infinitis [illegible] ea in [illegible], ut maiora sint [illegible]

PROPOSI-

ROPOSITIO XII.

A' sphæroide dato portionem plano sic abscindere, ut portio ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat similem datæ proportioni, si modo data proportio maior sit ea, quam habet 3 ad 2.

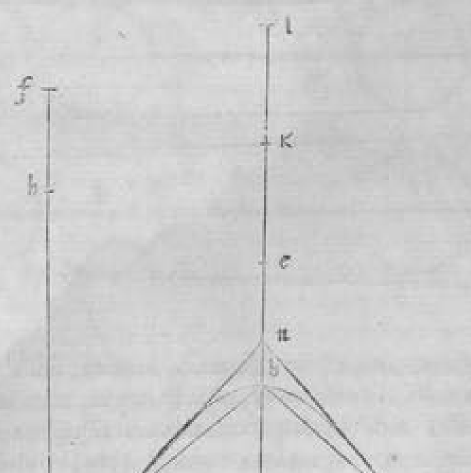
Sit datum sphæroides a b c d: data autem proportio sit f g ad g h, maior, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere, quæ ad conum: cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem habeat, quam f g habet ad g h. Secetur sphæroides plano per axem ducto: & sit sectio ellipsis a b c d, cuius diameter, & axis sphæroidis sit b d, centrum e. Et quoniam utraque linea e d, d b ad d b proportionem habet eam, quam 3 ad 2: habebit f g ad g h maiorem proportionem, quàm e d, d b ad d b: & diuidendo per uigesimam nonam quinti ex traditione Campani f h ad h g maiorem, quàm e d ad d b. fiat ut f h ad h g, sic e d ad d k. erit componendo ut f g ad g h, sic e d, d k ad d k. ducatur per k planum a k c, erectum sis per b d. Dico iam portionem sphæroidis a b c ad conum a b c eandem habere proportionem, quam f g ad g h. Sit enim, ut utraque simul e d, d k ad d k, ita l k ad k b. erit conus a l c æqualis portioni a b c ex corollario trigesimæ tertiæ huius. & quoniam est, ut f g ad g h, ita e d, d k ad d k: & l k ad k b; hoc est conus a l c ad conum a b c: sequitur conum a l c; hoc est portionem a b c ad conum a b c esse, ut f g ad g h: quod facere oportebat.



PROPOSITIO XIII.

A' dato conoide obtusiangulo portionem plano abscindere ita, ut portio ad conum, cuius basis portioni eadem est, & axis idem, datam habeat proportionem. oportet autem datam proportionem minorem esse ea, quam habet 3 ad 2.

Sit datum conoides obtusiangulum a b c, cuius linea ad axem adiecta sit b e: data uero proportio f g ad g h minor, quàm quæ est 3 ad 2: & oporteat ab ipso portionem abscindere habentem ad conum, cuius eadem est basis, & idem axis, proportionem eam, quam habet f g ad g h. Secetur conoides plano per axem ducto: & sit sectio hyperbole a b c, cuius diameter, & axis portionis b d: ipsi autem b e æqualis ponantur e k, k l. habebit l b ad k b proportionem eam, quam habet 3 ad 2. quare f g ad g h minorem



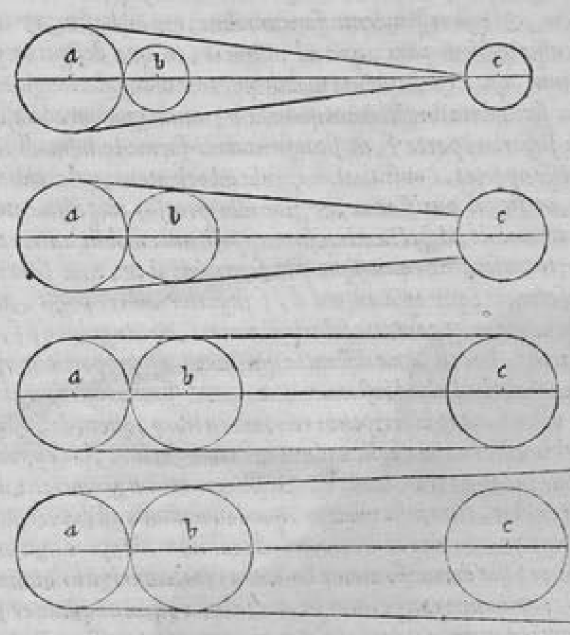
minorem habebit proportionem, quàm l b ad k b: & diuidendo f h ad h g minorem, quàm l k ad k b. Itaque fiat ut f h ad h g, sic l k ad k m: & per m ducatur linea a m c perpendicularis ad b d: & per ipsam a m c ducatur planum super b d erectum. Dico portionem conoidis a b c habere ad conum a b c eandem proportionem, quam f g ad g h. ut enim l m ad k m, ita fiat n m ad m b. erit ex corollario uigesimæ septimæ huius, conus a n c æqualis portioni a b c. est autem ut f h ad h g, ita l k ad k m. quare componendo erit ut f g ad g h, ita l m ad k m: & ita n m ad m b; hoc est conus a n c ad conum a b c. erit igitur conus a n c; hoc est portio a b c ad conum a b c, ut f g ad g h: quod fecisse oportebat.

EIVSDEM

EIVSDEM COMMENTARIVS IN LIBRVM DE ARENAE NVMERO.

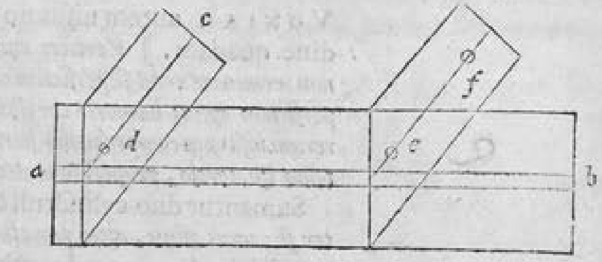
QVONIAM autem uisus non à puncto uidet, sed à magnitu dine quadam.] *Vertices enim pyramidum uisualium non solum non terminantur ad superficiem oculi exteriorem. Sed etiam ultra superficiem ipsius humoris chrystallini protenduntur; alioqui perfecta rerum uisarum comprehensio fieri nullo modo posset, ut monstrauit Vitellio lib. tertio, propositione decima octaua, & sequentibus.* A

Sumantur duo cylindruli &c.] *Sint duo cylindruli æquales inter se; unus albus, alter non albus: sitq; albi basis circulus, in quo c non albi circulus, in quo b: uisus autem, in quo a: & constituantur cylindruli in regula; ita ut albus à uisu remotior sit, non albus, quàm proximus ipsi: & basium centra, & centrum uisus sint in eadem recta linea a b c. Si igitur cylindruli uisu multo subtiliores sint: præteritur is, qui proximus est uisui, & uidetur albus totus. quanquam enim cylindrus, in quo b, prohibeat, quo minus species punctorum superficiei cylindri in quo c, oculo oppositorum directe tendant ad uisum: non tamen prohibere potest ob eius paruitatem, ne oblique in ipsum incidentes, atque ad eius superficiem refractæ uideantur, ut in prima figura apparet. est tamen ea uisio satis confusa. nam distincta uisio fit tantum per lineas perpendiculares à punctis rei uisæ ad oculi superficiem pertinentes: quod idem monstrauit Vitellio eodem lib. propositione decima septima. Si uero non totus albus, sed ipsius partes quæpiam uideatur ex utraque parte non albi: subtiliores quidem uisu cylindruli erunt, non tamen multo subtiliores, ut in secunda figura. Quòd si ea demum magnitudine sumantur cylindruli, ut alter alterum uisui abscondat, & non ampliori loco, ut in tertia figura: ij profecto non erunt uisu minores. si enim ampliori loco absconderet: etiam uisu ipso maiores essent: quod ex quarta figura fit manifestum. Habita igitur magnitudine non minore uisu, facile habetur & locus, in quo radij uisuales coeunt, quem non nulli appellant centrum uisus; & quantitas anguli, minoris, scilicet, & maioris angulo, cui sol accommodatur. nanque ea magnitudine ad extremum regulæ collocata, in quo est uisus, & ex altera eiusdem regulæ parte posito cylindro, ita ut ultro, citroq; moueri possit: conuertatur regula ad solem: cylindrus autem solem totum abscondat: mox eo à uisu abducto, ubi primum ex utraque parte, tam cylindri, quàm magnitudinis incipiat solis minimum quippiam apparere, stabiliatur illic cylindrus. necessarium enim arbitror in hac obseruatione, si recta facienda est, ut & magnitudo, & cylindrus eodem angulo, qui per uisionem fit, contineantur: quod tamen non explicauit Archimedes. Itaque ductis lineis contingentibus magnitudinem, & cylindrum, erit angulus his lineis comprehensus, minor angulo, cui sol accommodatur, uerticem habente ad uisum; quoniam centrum uisus in eo loco erit, in quo dictæ lineæ conueniunt. Rursus eadem ratione adducto ad uisum cylindro, ubi primum*



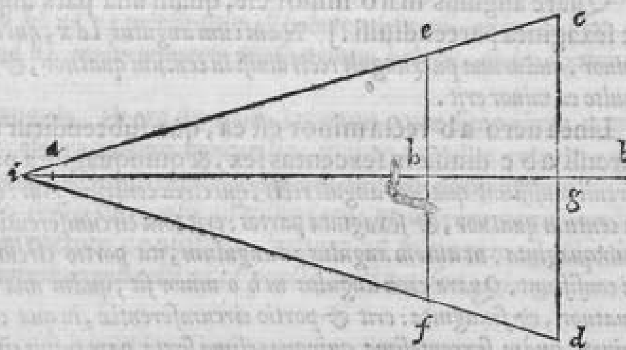
B

mum solem totum abscondat; illic stabiliatur; ductisq; lineis, & cylindrum, & magnitudinem tangentibus, erit qui dictis lineis continetur, angulus maior angulo, cui sol accommodatur, uerticem similiter ad uisum habente. Hæc est, ut opinor, Archimedis instrumenti forma, & hic usus, à quo non multum sane abhorret Dioptra Hipparchi, qua & Ptolemæus solis, & lunæ Diametros obseruauit. construxit enim Hipparcus, ut Proclus in Hypotyposi Astronomicarum positionum scribit, regulam quandam, nulla ex parte flexibilem, non minorem cubitis quatuor. postea per mediam ipsius longitudinem, linea longitudinem totam diuisit: & in hac canaliculum insculpsit formam habentem securis, in quem accommodauit ad rectos angulos prismatium quoddam conuenienti magnitudine: atque eius basim in concauitatem canalis ita congruenter immisit, ut sine ullo impedimento erectum super regulæ latus moueri posset; & per totam ipsius longitudinem percurrere. alterum rursus prismatium similiter apposuit ad rectos angulos ipsi regulæ in altera eius extremitate; quod immobile esset, & in usu semper ad uisum admotum: ipsumq; perforauit foramine uno in media eius latitudine, & magis ad basim; hoc est ad ipsam regulam. alterum uero prismatium, quod, ut diximus, mobile esset, duobus rursus foraminibus perforauit: uno quidem respondente ipsi manentis foramini, in eadem recta linea similiter ad basim; altero autem circa extremitatem prismatij superiorem, & ipso respondente foraminibus, qui ad basim, & in eadem recta linea. sit enim regula a b, cuius quidem pars, quæ ad uisum a, in qua defigatur prismatium c d, alterum autem prismatium, quod est futurum mobile per totam regulæ longitudinem, sit e f, habens dicta duo foramina secundum directionem quandam; unum quidem ad basim, respondens foramini d, alterum uero in superiori parte f, ut sit instrumenti forma huiusmodi. Vsum autem, & positionem ipsius talem esse oportet. Constituatur regula ad orientem, uel occidentem solem, in plano horizonti parallelo, ut sit sol purissimus, & sine ullo prorsus impedimento ad horizontem: sitq; prismatium quidem immobile ad spectantis uisum appositum: mobile autem ad partem solis, quod eousque ultro, citroq; transferatur, quousque per foramina d, e, quæ sunt in duobus prismatijs, inferior solis circumferentia; per ipsa autem d, f superior uideri possit. ita enim à spectantibus & extrema deprehenduntur apparentis solaris diametri, & angulus e d f, cui subtenditur eadem solis diameter apparens; hoc est, quæ distantiæ prismatij e f proportione respondet. Hæc Proclus. Excogitauit postea Rabi leui aliud instrumentum non dissimile instrumento Archimedis, & ad eundem propè usum ualens, ut ipse scriptum reliquit in libro, quem de Astrologia edidit, cuius uerba quoniam ad Archimedis locum explicandum maxime faciunt, hic apponenda censuimus, quemadmodum habentur in latina translatione. Possumus etiam geometrice demonstrare, in quo loco oculi centrum uisus existat, cum instrumento, quod inuenimus ad experientias locorum planetarum, in quouis tempore capiendas: ideo in hoc loco declarabimus de opere instrumenti prædicti, quantum est necessarium pro ista demonstratione habenda. faciemus igitur unum baculum cum superficiebus planis, ac rectis: & in uno capite illius sit una tabella, quæ aliqualiter sit cornuta; cuius alterutrum cornu experientiæ tempore ponetur super alterutram pupillam oculi: & habebimus multas tabellas diuersarum quantitatum perforatas in medio habentes rectas, per quarum foramina intrabit baculus antedictus: & sit altitudo earum super baculum aliquantulum depressior altitudine oculi: & ponemus duas earum in simul in baculo supradicto, unam alteri inæqualem, ita, quòd minor sit propinquior oculo: & supra baculum ambæ faciant angulos rectos: & sint parallelæ: & lineæ procedentes à centro oculi tangant utranque extremitatem utriusque tabellæ: & terminentur ad cœlum, & facto hoc, in certitudine nobis possibili facile sciemus locum, in quo centrum uisus existit; quia dictæ tabellæ sunt parallelæ; & faciunt angulos rectos cum baculo: & lineæ parallelæ intersecant trianguli lineas in tali proportione, qualem una habet ad aliam: & in tali proportione intersecarent omnes lineæ parallelæ, quæ essent ab angulo trianguli usque ad lineam ei subtensam, uel basim. Sed quia distantia unius ad aliam est cognita: & proportio unius ad aliam cognita, ideo inde habebimus scientiam anguli trianguli, in quo centrum uisus existit. Quia qualem proportionem habet linea pro-



cedens

cedens per baculum à centro uisus usque ad minorem tabellam, ad seipsam, ut procedit ab eodem centro ad tabellam maiorem; habet minor tabella ad maiorem. & quia commutamus; diuidimus, & conuertimus: est manifestum, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam, quæ uenit à centro uisus ad eam, sit talis, qualis est proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium, quod est inter utranque. Sed quia proportio differentiæ inter maiorem tabellam, & minorem, ad spatium prædictum est scita: & quantitas tabellæ minoris est scita: sequitur, quòd proportio minoris tabellæ ad lineam procedentem à centro uisus ad eam est scita: & quòd quantitas dictæ lineæ sic procedentis à centro sit etiam scita. Verbi gratia, sit in superficie baculi linea quæ signetur a b, quæ ab oculo ad baculi caput procedat: & ex parte puncti a sit oculus: & sint in tabellis duæ lineæ parallelæ ex partibus, quibus aspiciuntur ab oculo; quæ parallelæ intersecent lineam a b; hoc est lineæ c d, & e f: & linea c d sit maior e f, & linea c d intersecet lineam a b in puncto g; & linea e f intersecet eam in puncto h, & protrahemus lineas c e, & d f: & quia duæ lineæ rectæ secundum c d, & e f, sunt uisæ ab oculo eiusdem anguli: clarum est, quòd si dictæ duæ lineæ secundum c e, & d f protrahentur, in centro uisus concurrent: & ponamus: quòd concurrant in puncto i, & signemus lineam a i: manifestum est, quòd linea b a i est una linea recta; quia posuimus centrum uisus in rectitudine lineæ b a. Item quia linea c g est æqualis lineæ g d: & linea e h est æqualis lineæ h f; & linea g h est communis istis duobus quadrangulis: & angulus c g h est æqualis angulo d g h: & angulus g h e est æqualis angulo g h f: manifestum est, quòd si figura d h supponeretur figuræ c h se per omnia tangerent, ac si unica esset figura; quia punctus d caderet super punctum c. & punctus f super punctum e. Quare manifestum est, quòd angulus g d f est æqualis angulo g c e. unde sequitur, quòd triangulus i c d habet crura æqualia; quia duo eius anguli iuxta basim sunt æquales. quare manifestum est, quòd linea, quæ uenit à puncto i ad punctum g, quæ diuidit lineam c d intersecat lineam c d ad angulos rectos. sed quia linea a g intersecat c d ad angulos rectos: sequitur, quòd linea producta à puncto i ad punctum g transit per punctum a. unde sequitur, quòd linea i a g est una linea recta. & quia triangulus c d i habet infra se lineam e f parallelam lineæ c d, quæ est basis anguli dicti trianguli: manifestum est, quòd qualem proportionem habet linea e i ad lineam c i, talem habet linea e f ad lineam c d. & per istum modum probaretur, quòd qualem proportionem habet linea e h ad lineam c g, talem habet linea i h ad lineam i g. & quia commutamus proportionem, & eam diuidimus: est manifestum, quòd proportio, quam habet e h ad lineam i h est talis, qualem habet differentia lineæ c g super lineam e h, ad lineam g h, quæ est differentia, quam habet linea i g super lineam i h. sed differentia, quam habet linea c g super lineam e h est scita; quia quantitas lineæ c g est scita; & quantitas lineæ e h est scita: remanebit quantitas lineæ i h scita; quia proportio quantitatis e h, quæ est scita ad lineam i h est scita. Et nos cum profunde cum maximo labore quæsiuerimus ueritatem; inuenimus punctum i in isto, uerbi gratia in centro uisus; quòd est in centro humiditatis congelatæ. & ista inquisitio fuit necessaria ualde; quia sine ea non poteramus inuenire anguli experientiæ ueritatem sine errore; quando respiciebamus cum instrumento isto duo corpora radiosa: & uolebamus scire arcum distantiæ inter unum, & reliquum; quia si poneremus centrum uisus infra spatium, quod continet i, & h: iudicaremus arcum distantiæ unius ad alium maiorem; quod esset, quia angulus experientiæ est maior. & per oppositum iudicaremus eam minorem, si dictum centrum poneremus ultra i.



Linea igitur h k maior est, quàm d k: quoniam sol ponitur supra horizontem esse.] Ducatur recta linea h d, & producatur; rursusq; à puncto h super h d, perpendicularis alia ducatur h c, secans mundum in c. erit punctum c in horizonte situm, cum h d producta ad horizontis polum, quem zenit uocant, pertineat. si igitur k centrum solis in c intelligatur esse, uel etiam infra sub horizonte: ductis d k, h k lineis, ipsa d k maior erit, quàm h k: quoniam angu C *lus d h k, cui subtenditur, uel rectus est, uel obtusus. sole autem toto supra horizontem exorto, cum semidiameter solis maior sit terræ semidiametro, angulus h d k erit obtusus. quare linea h k contra maior erit, quàm ipsa d k.*

D Et idcirco angulus l d x maior est angulo m h o.] *Hoc ita esse constat ex iis, quæ monstrantur in uigesima quarta proportione optices Euclidis, & sexagesima septima quinti libri Vitellionis. quare oculo in d existente, quanquam minus uideatur ex corpore solis, quàm eo existente in h, tamen plus uideri existimabitur.*

* Quare angulus m h o minor est, quàm una pars anguli recti in centum quatuor, & sexaginta partes diuisi.] *Nam cum angulus l d x, qui quidem maior est angulo m h o, sit minor, quàm una pars anguli recti diuisi in centum quatuor, & sexaginta partes: angulus m h o, multo ea minor erit.*

E Linea uero a b recta minor est ea, quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ circuli a b c diuisæ in sexcentas sex, & quinquaginta partes.] *In circumferentia enim circuli consistunt quatuor anguli recti, qui circa centrum sunt: & cum rectus quisque diuisus fuerit in centum quatuor, & sexaginta partes: erit tota circumferentia diuisa in partes sexcentas sex, &* 33. sexti. *quinquaginta. ut autem angulus ad angulum, ita portio circumferentiæ ad portionem, in quibus hi consistunt. Quare cum angulus m h o minor sit, quàm una pars anguli recti, diuisi in centum quatuor, & sexaginta: erit & portio circumferentiæ, in qua consistit, hoc est circumferentia a b minor, quàm sexcentesima quinquagesima sexta pars totius circumferentiæ: & propterea a b recta linea minor, quàm quæ eidem sexcentesimæ quinquagesimæ sextæ parti subtenditur.*

F Non enim ignoras iam demonstratum à nobis cuiuslibet circuli circumferentiam maiorem esse, quàm triplam &c.] *Hoc demonstrauit Archimedes in libro de dimensione circuli.*

G Linea ergo recta b a, ad h k minorem habet proportionem, quàm undecim ad mille centum octo, & quadraginta.] *Nam cum ambitus figuræ laterum sexcentorum sex, & quinquaginta, ad semidiametrum minorem habeat proportionem, quàm quatuor, & quadraginta ad septem: hoc est quàm sexcenta sex, & quinquaginta ad centum quatuor, & quatuor undecimas: habebit eius figuræ latus ad semidiametrum proportionem minorem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas. & cum recta linea a b minor sit latere dictæ figuræ, ut demonstratum est: habebit ad semidiametrum h k. multo minorem proportionem, quàm unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas; hoc est quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. proportio enim, quam habet unum ad centum quatuor, & quatuor undecimas, ad integros numeros redacta, est ea, quam habet undecim ad mille centum octo & quadraginta. quod quidem numeris harum proportionum decussatim multiplicatis deprehenditur, ut nos monstrauimus in comm. in librum de dimensione circuli, propositione septima.*

H Quare linea b a minor est, quàm centesima pars lineæ h k.] *Cum enim linea b a minorem habeat proportionem ad lineam h k, quàm 11 ad 1148: sitq; 11 minor, quàm centesima pars 1148: erit b a multo minor, quàm centesima ipsius h k.*

I Ipsi autem b a æqualis est diameter circuli s g; propterea quòd u a eius dimidia &c.] *Ob æqualitatem uidelicet, atque similitudinem triangulorum h a u, & h k r. angulo enim h u a recto æqualis est h r k angulus, qui & ipse rectus est: et qui ad h communis est utrisque. reliquus igitur angulus, reliquo angulo æqualis: & triangulum triangulo simile. quare ut h k ad h a, ita k r ad a u. at uero h k est æqualis ipsi h a, cum sint semidiametri eiusdem circuli: ergo & k r ipsi a u est æqualis: & idcirco dupla ipsius k r, quæ est diameter circuli s g, duplæ a u; hoc est ipsi b a æqualis erit.*

K Quòd d e f circulus minor sit circulo s g.] *Ex positione uidelicet, posuimus enim solem maiorem esse ipsa terra.*

L Quare h k ad y s minorem proportionem habet, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum enim utræque h y, k s sint minores, quàm centesima pars ipsius h k: erit reliqua y s maior, quàm nouem & nonaginta partes eiusdem h k. quare h k ad ipsam y s minorem habebit proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta.*

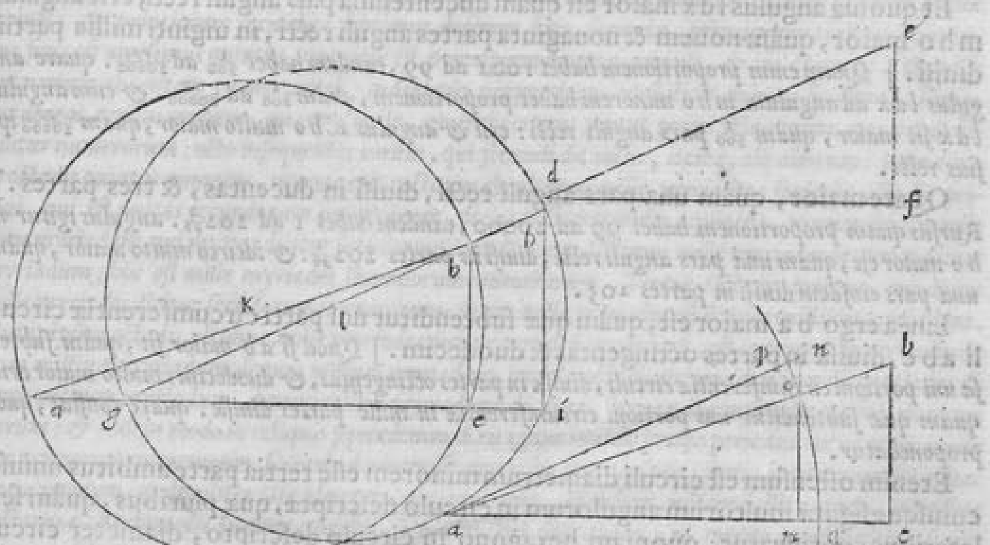
M Et linea s y minor, quàm d t.] *Iungantur d y ducta linea, & iungantur item s t: linea* 16. tertii. *uero d t secet ipsam y s in puncto z. erit trianguli d y z angulus, qui est ad y obtusus; nam quæ circulum tangit in puncto y cum linea y z facit angulum rectum. quare latus d z maius erit la-* 19 primi. *tere y z. Rursus eadem ratione trianguli t s z angulus ad s maior erit: & idcirco latus z t maius*

latere

latere z s. Itaque duo latera d z, z t, quibus æqualis est ipsa d t linea, maiora sunt duobus lateribus y z, z s. atque his ipsis linea y s est æqualis. linea igitur y s minor est linea d t, ut proponebatur.

Minorem proportionem habet h r ad d t, quàm centum ad nouem & nonaginta.] *Cum linea h r minor sit, quàm h k; quòd subtenditur minori angulo: habebit h r ad y s minorem proportionem, quam h k ad eandem. & rursus cum y s minor sit, quàm d t, ut monstrauimus: habebit h r ad d t etiam minorem, quàm ad y s. ergo h r ad d t minorem proportionem habet, quàm h k ad y s. sed h k ad y s monstratum est habere minorem, quàm centum ad nouem, & nonaginta. quare h r ad d t multo minorem proportionem habebit, quàm centum ad nouem & nonaginta.* N 19. primi. 8. quinti.

Si enim duo triangula rectangula, altera duorum laterum, quæ sunt circa angulum rectum, æqualia habeant, altera autem inæqualia; maior angulus eorum, qui lateribus inæqualibus continetur ad minorem, maiorem quidem proportionem habet, quàm maior linea angulo recto subtensa ad minorem; minorem uero, quàm maior eorum, quæ ad angulum rectum consistunt, habeat ad minorem.] *Sint duo triangula rectangula a b c, d e f; quorum anguli recti ad c f puncta constituti sint: trianguli uero a b c latus b c æquale sit lateri e f trianguli d e f: & a c latus maius latere d f. Dico angulum e d f, qui maior est angulo b a c, ad eundem ipsum maiorem quidem habere proportionem, quàm b a latus ad latus e d; minorem uero, quàm latus a c ad latus d f. Abscindatur à linea a c, linea æqualis ipsi d f; quæ sit c g: & ducta g b producatur usque ad h; ita ut g h fiat æqualis ipsi a b: & rursus producta a c ad ipsam à puncto h, demittatur perpendicularis h i, quæ erit æquidistans ipsi b c.* O 28. primi.



secta autem linea a b bifariam à puncto k, centro quidem k, interuallo uero k a, circulus describatur a b c: & similiter secta g h bifariam in l, centro l, & interuallo l g, describatur alter circulus g h i. Iam constat triangulum g b c æquale esse, atque simile triangulo d e f: & a b c circulum circulo g h i æqualem; cum æquales sint eorum diametri: circuli uero a b c circumferentia per c punctum transibit: & similiter circumferentia circuli g h i transibit per punctum i: quoniam anguli g c b, g i h utrique recti sunt. angulus ergo h g i ad angulum b a c eam proportionem habet, quam circumferentia h i ad circumferentiam b c: & circumferentia h i ad b c circumferentiam maiorem proportionem habet, quàm recta linea h i ad rectã lineam b c: quod demonstrauit Ptolemæus in primo magnæ compositionis lib. quare angulus h g i ad angulum b a c maiorem habet, quàm recta linea h i ad ipsam b c. sed h i ad b c ob similitudinem triangulorum eam proportionem habet, quam h g; hoc est b a, ad b g; hoc est ad e d. angulus igitur h g i; hoc est e d f ad b a c angulum habet maiorem proportionem, quàm b a linea ad lineam e d. 31. tertii. ult. sexti. 13. quinti. 4. sexti.

Rursus à linea a c abscindatur a m, æqualis ipsi d f: & ad datum in ea punctum a constitua-
23. primi. *tur angulus n a m, æqualis angulo f d e: fiatq; a n æqualis ipsi d e: & iungantur n m ducta linea,*
quæ secet lineam a b in puncto o. erit triangulum n a m æquale, atque simile triangulo e d f, &
8. quinti. *centro quidem a, interuallo autem a o circulus describatur p o q. sector igitur a p o ad sectorem*
a o q minorem proportionem habet, quàm ad triangulum a o m. sed a p o sector ad triangulum a
o m minorem habet, quàm triangulum a n o ad idem ipsum; quoniam sector a o q maior est trian-
gulo a o m: & triangulum a n o maius sectore a p o. ergo a p o sector ad sectorem a o q minorem
ult. sexti. *habet proportionem, quàm a n o triangulum ad triangulum a o m. ut autem sector a p o ad se-*
1. sexti. *ctorem a o q, ita angulus n a o ad angulum o a m: & ut triangulum a n o ad triangulum a o m,*
28. quinti. *ita linea n o ad lineam o m. angulus igitur n a o ad angulum o a m minorem habet proportionem,*
quàm linea n o ad lineam o m: & componendo angulus n a m ad angulum o a m, minorem habet,
4. sexti. *quàm linea n m; hoc est b e ad lineam o m. ut autem b e ad o m, ita a c ad a m; hoc est ad d f.*
Quare angulus n a m, hoc est, e d f ad ipsum b a c angulum minorem proportionem habet, quàm
linea a c ad lineam d f: quod monstrare oportebat.

P Quare angulus l d x ad angulum m h o, minorem proportionem habet &c.] *Ex decima quinta quinti. nam angulus l d x duplus est anguli k d t: & angulus m h o item duplus anguli k h r.*

Q Et quoniã angulus l d x maior est quàm ducentesima pars anguli recti; erit angulus m h o maior, quàm nouem & nonaginta partes anguli recti, in uiginti millia partiũ diuisi.] *Quam enim proportionem habet 100 ad 99, eandem habet $\frac{1}{200}$ ad $\frac{99}{20000}$. quare angulus l d x ad angulum m h o minorem habet proportionem, quàm $\frac{1}{200}$ ad $\frac{99}{20000}$. & cum angulus*
8. quinti. *l d x sit maior, quàm $\frac{1}{200}$ pars anguli recti: erit & angulus m h o multo maior, quàm $\frac{99}{20000}$ ipsius recti.*

R Quare maior, quàm una pars anguli recti, diuisi in ducentas, & tres partes.] *Rursus quam proportionem habet 99 ad 20000, eandem habet 1 ad $202\frac{2}{99}$. angulus igitur m h o maior est, quàm una pars anguli recti, diuisi in partes $202\frac{2}{99}$: & idcirco multo maior, quàm una pars eiusdem diuisi in partes 203.*

S Linea ergo b a maior est, quàm quæ subtenditur uni parti circumferentiæ circuli a b c, diuisæ in partes octingentas & duodecim.] *Quòd si a b maior sit, quàm subtensa uni portioni circumferentiæ circuli, diuisæ in partes octingentas, & duodecim: multo maior erit, quàm quæ subtenditur uni portioni circumferentiæ in mille partes diuisæ. quare constat, quod proponebatur.*

T Etenim ostensum est circuli diametrum minorem esse tertia parte ambitus uniuscuiusque figuræ multorum angulorum in circulo descriptæ, quæ pluribus, quàm sex lateribus contineatur; quoniam hexagono in circulo descripto, diameter circuli tertia pars est ipsius hexagoni.] *Nam hexagoni latus semidiametro circuli, in quo describitur, est æquale, ut patet ex corollario decimæ quintæ quarti elementorum. Heptagono autem æquilatero in circulo descripto, erit ex ijs, quæ tradita sunt à Ptolemæo in magna compositione, latus ipsius maius, quàm 52 partes earum, quarum diameter est centum & uiginti. quare totus ambitus maior, quàm 364. sed 364 est maior, quàm triplus 120. multo igitur maior erit ambitus dictæ figuræ, quàm triplus diametri circuli, in quo ipsa describitur.*

Rursus Octagono æquilatero in circulo descripto, latus ipsius maius erit, quàm $45\frac{11}{12}$ earundem partium: & ambitus maior, quàm $367\frac{1}{3}$. quare cum $367\frac{1}{3}$ maior sit, quàm triplus 120: erit figuræ ambitus multo maior, quam triplus diametri circuli, in quo describitur. Et eodem modo in reliquis figuris, idem contingere facile demonstrabimus. quo autem pluribus lateribus constat figura, eo maiori ambitu continetur: atque ad circuli circumferentiam propius accedit.

V Sed iam utile esse arbitror de numerorum denominationibus dicere, ut ne decipiantur illi.] *Quoniam in hoc negocio Archimedes necesse habuit numeris uti magnis; qui nisi per obscuram quandam myriadum repetitionem Græcorum more, nominari non possunt; rem utilem se facturum existimauit, si modum traderet, quo numerus quantumuis magnus facile, atque aperte exprimeretur. Itaque distribuit numeros ipsos in singulas octades; ita ut primæ octadis numeri, primi numeri dicantur; secundæ octadis numeri, secundi; Tertiæ tertij; quartæ quarti; & ita in reliquis. atque hac ratione primæ octadis numerus primus, unitatum numerus est; secundus denariorum unitatum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus denum millenariorum,*

quæ

quæ à græcis myriades appellantur; sextus denariorum myriadum est; septimus centenariorum octauus, & ultimus millenariorum. semper enim qui sequitur numerus, præcedentis sui relatiui decuplus est. secundæ octadis primus, qui numerus dicitur unitatum secundorum numerorum, denum millenariorum myriadum numerus est; secundus denariorum denum millenariorum myriadum; tertius centenariorum; quartus millenariorum; quintus myriadum, qui breuitatis caussa dicitur myriadum secundorum numerorum; sextus denariorum myriadum; septimus centenariorum; octauus, & ultimus millenariorum, qui millenariorum dicitur myriadum secundorum numerorum. Tertiæ octadis primus numerus est denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum, qui dicitur numerus denum millenariorum myriadum secundorum numerorum. quintus eiusdem octadis numerus, qui myriadum dicitur tertiorum numerorum, myriadum est denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum: ultimus, qui millenariorum dicitur myriadum tertiorum numerorum, millenariorum est myriadum denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum. quartæ autem octadis primus denum millenariorum est myriadum, denum millenariorum myriadum, denum millenariorum myriadum; diciturq; denum millenariorum myriadum tertiorum numerorum: & eodem modo in ceteris. His ita dispositis continet prima periodus numeros, qui sunt ab unitatibus primorum numerorum usque ad unitates secundorum: secunda periodus eos, qui ab unitatibus secundorum numerorum sunt usque ad unitates tertiorum: tertia ab unitatibus tertiorum ad unitates quartorum; ita ut nonus ab unitate numerus, finis sit primæ periodi, & principium secundæ: septimus decimus finis secundæ, principium tertiæ; cuius ipsius finis est uigesimus quintus, qui idem est principium quartæ periodi, & ita deinceps. Quòd si sint numeri ab unitate proportionales in decupla proportione, ut scilicet primus sit unitas, secundus decem, tertius centum, quartus mille, & sic in ceteris; erunt primi octo eorum, qui primi dicuntur numerorum: octo insequentes eorum, qui secundi dicuntur; itemq; alij aliorum: primæ uero octadis quintus numerus, myrias erit; octauus & ultimus mille myriades: secundæ octadis primus, qui est unitas secundorum numerorum, decies mille myriades; quintus, myrias denum millium myriadum, qui myrias dicitur secũdorum numerorum; Vltimus mille myriades denum millium myriadum; hoc est mille myriades secundorum numerorum. Tertiæ Octadis primus, qui decies mille myriades dicitur secũdorum numerorum: decies mille myriades est denum millium myriadum. Huius ipsius octadis ultimus, mille myriades dicitur tertiorũ numerorũ: est autem mille myriades denum millium myriadum, denum milium myriadum. quartæ octadis primus decies mille myriades denum millium myriadum, denum milliũ myriadum; diciturq; decies mille myriades tertiorum numerorum: & eodem modo in reliquis procedemus. Erit igitur horum prima periodus decies mille myriades primorum numerorum, secunda decies mille myriades secundorum, tertia item tertiorum, quarta quartorum: & similiter aliæ aliorum, qui sequuntur. Hæc sunt, nisi me fallit animus, in quibus dictorum Archimedis summa consistit, sed adeo sunt deprauata, ut merito ignoscendum, si non omnia restituantur.

His igitur hoc modo denominatis, si sint numeri ab unitate proportionales.] *Hæc præmisit Archimedes, quoniam in eiusmodi ratione his potissimum numeris utitur, ut ad rem ipsam facile breuiterq; demonstrandam opportunissimis.* X

Est autem d secundum se ipsum multiplex ipsius a.] *Sequitur hoc etiam ex decima nona septimi elementorum. nam cum d ad unitatem eandem habeat proportionem, quàm l habet ad ipsum b: qui ex d & b fit, æqualis erit ei, qui fit ex unitate, & l. ergo q ipsi l erit æqualis.* Y

Cum ostensum sit sphæras ad inuicem proportionem habere triplam eius, quæ est suarum diametrorum.] *Ostenditur id proportione ultima duodecimi elementorum. quare cum diameter papaueris ad diametrum sphæræ digito æqualem eam proportionem habeat, quam unum ad quadraginta: unũ autem ad quadraginta habeat eam, quam quadraginta ad mille sexcẽta; et quam mille sexcenta ad sexaginta quatuor millia: sequitur sphærã, cuius diameter digito est æqualis, habere ad sphæram papaueris proportionem eandem, quam sexaginta quatuor millia ad unum.* Z

Minor est igitur, quam unitates decem secundorum numerorum.] *A sex unitatibus secundorum numerorum ad decem idcirco transitum fecit Archimedes, ut ad numeros deueniret in proportione decuplos, in quibus facilis est propositi demonstratio, ut superius dictum est.* ω

AL DVS