# EDIZIONE NAZIONALE

# MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Clavius

785
Giovanni Maria
Sartori -
Sac. Ecclesiae Urbis

PCSAFI
3-81

ALGE

$\frac{82}{482}$

34
4

30
4

26

34 : $\frac{1}{4}$

37 : $\frac{1}{4}$

1A : $\frac{1}{10}$

34

27

Lucas Fanti Sac. Theo. Doct.
Primus Presbyter
Ecclesiæ Venetæ S. Mariæ Jubenicorum
D. D.
orate pro me.

# ALGEBRA CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS

E SOCIETATE IESV.

ROMAE,
Apud Bartholomæum Zannettum.
Anno M. DC. VIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

## *CLAVDIVS AQVAVIVA*
*Societatis Iesu Præpositus Generalis.*

CVm opus hoc, cui titulus est Algebra, P. Christophori Clauij Bambergensis, Tres eiusdem Societatis Theologi, quibus id commisimus, recognouerint, ac in lucem edi posse probauerint; facultatem damus, vt typis mandetur, si Reuerendissimo D. Vicesgerenti; & Reuerendissimo P. Magistro Sacri Palatij ita videbitur. In cuius rei fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ Kalendis Octobris 1607.

*Claudius Aquauiua.*

---

Imprimatur si videbitur R.P.M. Sac. Palatij Apostolici.

*Cesar Fidelis Vicesg.*

---

*Imprimatur*

Frater Augustinus Galaminius Sac. Pal. Apost. Magister.

# ILL.$^{MO}$ ET EXCELL.$^{MO}$ D.
# DON IOANNI DE GVEVARA
## DVCI BOVINI
## REGNI NEAPOLITANI
## MAGNO SENISCALLO.

*Christophorus Clauius è Societate IESV.*
*S. P. D.*

SPLENDIDA sunt, & magnificis amplificata titulis, Dux Excellentissime, quae de animorũ nostrorum nobilitate, ac praestantia circumferuntur: sed nullum profecto luculentius, nullum, si naturam spectes, ad vtilitatem, vel ad voluptatem iucundius, ab vniuersitatis artifice mortales obtinuere beneficium, quàm quod sibi bonarum artium, ac disciplinarum ad rerum naturam pertinentiũ ornamenta comparare possunt. Has inter facultates, quarũ praecipua laus in veri vestigatione consistit, non postremae notae Mathematicas esse is neget, qui nullum sibi putet esse cum veritate commerciũ. Ex Mathematicis vero, quae quasi in patritias distributae familias, aliae aliò euasere, Arithmetica tanto caeteris praestat, quanto eius natura syncerior, veritas explicatior esse iudicatur. Quid enim illa vel ad ingenij subtilitatem acutius, vel ad certitudinem firmius excogitari potest? quid est, quod Arithmeticis, & illis quidem pauculis notis, addendo, subtrahendo, multiplicando, diuidendoque numeros progressionũ Geometricarum ab vnitate incipientium (quam artem patrio vocabulo Algebram Arabes nominarunt) confici non possit? Quoties huius disciplinae artificio exterriti etiam acutiores ita sunt, vt nullũ putarent tacitum pectoris arcanum esse, quod numerorum iudicium effugiat, fallat Arithmeticorum ingenia. Huius in facultatis sinum, tametsi semper, in hac tamen extrema senectute mea quasi contento cursu, tamquam in portum ita me recepi, vt in eius placidissimo complexu omne imbecillae aetatis fastidiũ leuauerim, atq; ob incredibilem eius varietatem, voluptatemque molestias omnes temperauerim. Quamuis vero

exciteextiterint non pauci tum ex antiquis,tum ex recentioribus, qui aliqua cum laude huius disciplinae excoluerunt cognitionẽ, operae tamen pretium fore iudicaui, si quae illi obscurè, implicatè, confusè scripserunt, aperirem ipse, enodarẽ, suis locis exacte digererem. Itaque spissum sane, & densum opus,summisque difficultatibus inuolutum sum senex aggressus, vt eorum vtilitati consulerem, quorum ingenia, dummodo prius non leuiter Arithmeticis sint regulis exercita, absolutam Algebrae cognitionem affectant. Libellum itaque hunc, qua potui diligentia,conscripsi, quem iam improbae lucis iudicium subeuntem cuius potius clientelae commiterẽ, Dux Illustrissime, quàm tuae, cuius generis amplissimi nobilitatem non longam solum auorum series tot magnificis nobilitata monumentis, sed propria etiam laus omni virtutum genere spectabilis commendat? Accedit ad hoc incredibilis tua in me humanitas,qua me tunc adeo complexus es, cum te Romae, ac Illustrissimum Parentem tuũ Innicum alloquutus sum, qui praeclarissimo ad imitationem, admirationemque posteritatis exemplo, rebus omnibus humanis, honoribus, potentia, opibus, studio paupertatis

cum

cum religiosae vitae conditione commutatis, eo velificauit, vbi ne leuis quidem ambitiosae gloriolae aura animi fluctus commouente, ea consequi potest, quae nulla temporum volubilitate labefactantur. Quod si aliquid huic addendũ est, hoc addam (mitto tua in me, ac Mathematicos omnes, tum beneuolentiam, tum liberalitatem) quod nimirum hoc grati animi monumentum tua sibi vindicat in nostrum ordinẽ vniuersum munificentia, qua Bouini ad adolescentium excolenda, qua ad pietatem, qua ad litterarum studia, ingenia, Collegium à fundamentis excitasti. Complectere igitur qua soles clementia ac humanitate tenue hoc munusculum, in quo si rei amplitudinem, ac praestantiam, certe animi voluntatem non desiderabis. Ipse vero eam tibi à Deo Optimo Maximo precabor foelicitatem, quae votis tuis, nostrisque ex omni parte respondeat. Vale.

ROMAE IDIBVS MARTII. M. DC. VIII.

INDEX

# INDEX
# CAPITVM ET RERVM, QVAE IN IIS CONTINENTVR.

## PROOEMIVM DE ALGEbræ præstantia.



## CAPVT I.
## De Inuentore Algebræ, ac nomine.



## CAPVT II.
## De Numeris Cossicis, siue Denominatis.



## CAPVT III.
## De Numeratione Cossicorum numerorum.



## CAPVT IIII.
## De Additione, & Subtractione numerorum Cossicorum.



Sub-

# INDEX.



## CAPVT V.
## De Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.



## CAPVT VI.
## De numeris fictis, siue minoribus, quam nihil.



## CAPVT VII.
## De Fractionibus numerorum Cossicorum.



## CAPVT VIII.
## De Regula Algebrae.



## CAPVT IX.
## De Aequationum varietate.



## CAPVT X.
## De reductione Aequationum.

## CAPVT XI.
## De diuisione, quam præcipit Regula Algebræ.



## CAPVT XII.
## De extractione radicum, cuius mentionem facit Regula Algebræ.



## CAPVT XIII.
## De multitudine Regularum Algebræ, quam alij auctores introducunt.

## CAPVT XXV.
## De minutijs numerorum Irrationalium, ac de earundem Algorithmo.



## CAPVT XXVI.
## De numeris Irrationalibus Cossicis, siue Denominatis, vna cum eorum Algorithmo.



## CAPVT XXVII.
## De Binomijs, atque Apotomis, Residuisve.



## CAPVT XXVIII.
## De extractione radicum ex Binomijs, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat.



Ex bi-

## LEMMA.



## SCHOLIVM.



## CAPVT XXIX.

## Ænigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur.



## SCHOLIVM.



## SCHOLIVM.



4 Duos

## SCHOLIVM.

58 Tres

eorum

## SCHOLIVM.



## SCHOLIVM.

noris

137 Da-

## LEMMA.



## SCHOLIVM.

SCHO-

## SCHOLIVM.





## CAPVT XXX.

### Aenigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.

# INDEX.





mul-

## LEMMA.



## COROLLARIVM.



## SCHOLIVM.



40 Da-

## CAPVT XXXI.

### Aenigmata varia numerorum ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus.

49 Tres

que,

VEL



## CAPVT XXXII.
## Ænigmata varia ad figuras Geometricas pertinentia.

## LEMMA.



## SCHOLIVM.



est

EPIGRAMMATA QVINQVE
Graeca.



Finis Indicis Capitum, & rerum.

# ERRATORVM CORRECTIO.

| *Pag.* | *Linea* | | *Errata* | | *Correctiones.* |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 24 | | curandum | | verendum |
| 6 | in margine | | visitatorum, | | visitatorum. |
| 24 | 1 | | ₰ce siue | | ₰ce exclusiue |
| 34 | 21 | | partes addendæ | | partes addendas |
| 36 | 24 | | perfectionem huius | | perfectiorem huius |
| 37 | 8 | | regulas | | regulas interfic |
| 45 | 16 | | absolutum | | absolutus |
| 55 | 21 | | Geometricæ | | Geometriæ |
| 58 | 27 | | radicem | | radicem |
| 98 | 28 | | radicem | | radicum |
| 149 | in margine legatur | | [ linea minor ] | pro | [ linea maior ] |
| 160 | 17 | | problemate sunt | | problemata sunt |
| 161 | 6 | | singulos enim | | singulas enim |
| 161 | 7 | | quali oculis | | quasi oculis |
| 164 | 13 | | secundus sit | | secandus sit |
| 165 | 11 | | dati inuentus | | dati inuentas |
| 166 | 10 | | maiora | | maiore |
| 166 | 15 | | dematur | | demantur |
| 171 | 14 | | totius numero | | totius numeri |
| 172 | 10 | a fine | Diuisis ergo 10. | | Diuisis ergo 20. |
| 176 | 15 | | sesquiquintam | | sesquiquintum |
| 176 | 8 | a fine | secundus sit | | secandus sit |
| 185 | 19 | | sit 1 ꝛe 10. | | sit 1 ꝛe 10. |
| 229 | 20 | | datur quiuis | | datus quiuis |
| 253 | 6 | a fine | habeat datam | | habeat datam |
| 256 | 7 | a fine | numerum datum superat. | | numerum superat. |
| 271 | 14 | | qui prodectus | | qui productus |
| 316 | 2 | | & seruatur | | & seruant |
| 316 | 15 | | proportionis vnius. | | portionis vnius. |
| 317 | 6 | | summa ex | | summæ ex |
| 326 | 22 | | cum cum 4. vlnis | | cum 4. vlnis |

PROOE-

# PROOEMIVM
# DE ALGEBRAE PRAESTANTIA.

*ET dignitate ſumma, & ampliſſimarum laudum præconijs nulli poſtrema ea ars eſt, quam recepto vocabulo Algebram noſtrates appellarunt: ſiue enim eius veluti natiuam originem inquiras, inde vſque ab Arabum felicibus ingenijs repetenda eſt: ſiue honeſtatem, inter Mathematicarum ordinis primas verſatur: ſiue amplitudinem, nullis numerorum ſtatis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priſcis, recentibus, cultis, barbaris inſtitutis, non vllo terrarum, vaſto licet, ambitu continetur. Propoſitum ſiue ſcopus eius eſt, vt certam* Scopus Algebræ. *aliquam à ſenſuum cognitione, ac ſenſu ſecretam quantitatem exploret, & tandem inter duos aliquos numeros æqualitate, ſiue æquatione comperta, deprehendat, atque demonſtret. Venaticæ canis inſtar, quæ, ſi quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata deliteſcentem feram ſubodorata fuerit, tandiu oculis, tamdiu odora narium ſagacitate ſcrutatur ſingula, donec comprehenſam, dentibusq. hærentem prædam domino ſiſtat. Et ſane multo etiam opificium ipſum opus admiratione antecellit, & arduum ſua ſponte facinus, atque præclarum exornat ipſa conficiendi ratio, redditq. præſtantius. Perſimile eſt, quod diſſimili in re andabatarum more ludentibus* euenire solet. Quamdiu enim obuelatis oculis vrgentur ipsi, vrgentq. vrgentes se, comprehensuros se aliquem nunquam desperant, e multis tamen, quis tandem sit intercipiendus, ignotum habent, & frustra sæpe his atque illis tentatis tenebris, vbi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus absoluitur. Obscuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, suspenso velut vestigio, pertentat, certa, se in aliqua Geometrica progressione ab vnitate profecta deprehensuram, quod quærit, in qua tamen progressione inuentura sit, incerta; ac tamdiu cæco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, vestigat, ac perfert, donec eo progrediatur, & ad eum numerum deueniatur, qui fuerat quæstioni subiectus, qui tum demum in lucem emergit, cum ipsa absoluitur operatio. Et primo quidem is numerus existit, qui in toto illo numerorum labore vnitatem progressionis ab vnitate incipientis proximè consequitur, tum etiam ij omnes numeri deprehenduntur, qui ad quæstionem explicandam indagandumq. propositum additi & diuisi fuere, vt suis deinde locis planum faciemus. Quàm igitur scopus iste latè vagatur, qui nec genus vllum numerorum, nec vllius magnitudinis diuersitatem, à se alienam putat? vt non numerorum modo latebras omnes detegat, sed uniuscuiusque etiam molis finitam magnitudinem, sonorum metrum, ponderum momenta, mensurarumq. certos terminos assequatur, neque vlla Arithmetica quæstio subijciatur, quam non veluti suam agnoscat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obscuras, tam difficiles Mathematicæ partes vna Algebra pertractat vniuersas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos solui non posse, accidit aliquando, aut si quid obscurum extrahi à tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certissima, sed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio causanda est. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modo agamus, vt quantis interuallis Algebra Arithmetic**æ** præceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa est, quod non etiam huius veluti fasces vereatur? quæ exempla tam sua, quæ tam ancipites quæstionum ambages, quæ tantæ moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditissimarum, quæ non sint omnia illi cum ista communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebram fugiat; quæ explicare ipsa cum nequeat, cognoscenda Algebræ tradat, habet quam plurima. Illud vero quam præclarum est, quàm vnicuique optandum maximè, quam huius facultatis peculiare? Quod enim cæteris commune est, vt non ante proposita difficultas expediri possit, nec ne, sentias, quam totam absoluas, & bis iterumq. integram repetas, iteresq. operationem; id in hac, in ipso operationis decursu obuiam fit, & prodit ipsa se quæstio, prius quam labor finem accipiat. Quæ enim sæpe suppositæ fallaciæ, & quæstionum pugnantes inter se sententiæ Algebræ imperitos latent, eas Arithmeticæ studiosus, nisi per hanc exploratas habeat, totus de propositæ quæstionis solutione sollicitus frustra laborat, atque ad has, atque ad illas regulas animum refert, experitur singulas, singulas recognoscit, torquet sese & conficit, ad extremum inanes labores suos sentit, studiumq. infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate est magnopere curandum, ne laborem vllum temere susceptum, & ad extremum vsque frustra toleratum dolendum sit; quod aliæ Mathematicæ partes accipere quidem ab hac possunt, præstare ipsa non possunt. Atque hæc pauca de præstantia ac dignitate Algebræ præfationis loco dicta sint.

Algebræ excellentia.

# DE INVENTORE ALGEBRAE AC nomine. Caput I.

DE inuentore huius artis non conuenit inter omnes; Gebrum Arabem Astronomum afferunt nõ pauci, & a Gebro Algebram dictam contendũt. Vero similius tamẽ Ioannes Regiomontanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inuentum attribuit. Ipse enim Diophantus in tredecim librorum præfatione, quos hac de re scripsit ad Dionysium, se primum huius scientiæ inuentorem profitetur, & a nemine ante se in lucem datam, immò ad suam vsque ætatẽ ignotam omnino fuisse, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipsum varietatem; nam quod inter cæteras Arithmeticæ regulas maximè præstat, Ars maior a plurimis appellata est. Regulam census & rei Latini dixerunt; hoc est, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæstiones in hac arte propositæ soluuntur per calculationes radicum, quos ipsi res, & quadratorum, quos ijdem census vocant, vt suo loco constabit. Apud Italos Regula cosæ (seu della cosa) nuncupatur; quod in quæstionibus soluendis semper vna radix ponatur, quam ipsi cosam dicunt. Ex quo etiam nomen illud sortita est, quo a multis regula Cossica nominatur. Non vno eam nomine Arabes omnes nominarunt; Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem sonat, ac restauratio; quia nimirum in quæstionibus hac arte soluendis ad aliquam semper æquationem, siue æqualitatem est deueniendum; in qua, quicquid ablatum, quicquid diminutum est, quicquid deesse comperitur, restaurari oportet. Almuchabulam vero, quod oppositionem eorum lingua significat, propterea vocant alij, quod in quæstionum abditis exponendis in hac sciẽtia, cum ad æquationem æqualitatemve aliquam peruentum est, duo semper numeri æquales, diuerso tamen nomine, sibi inuicem opponuntur. Atque hinc postremo factum est, vt geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint; quòd scilicet tum per restaurationé, tum per hanc, quam modo diximus, oppositionem, quæstiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognoscet planius, qui quæstionum, quæ hoc opere continentur, solutiones diligentius cognouerit. Vsus tamen apud scriptores, vt cum Arabibus Algebra hæc tota nostra scientia communi appellatione diceretur, obtinuit.

*Varia nomina Algebra.*

HAEC de inuentore & nomine Algebræ dicta sufficiant. Quæ si quam præclara est, quam iucunda studiosis sui, quam omnibus se se præstat admirabilem; tam etiam perspicuè tradita esset, nec in

Arith-

Arithmeticorum, qui eam docuerunt, obſcuritate declaranda magis, quam in eiuſdem facultatis præceptis explicandis laborandum eſſet, coleretur etiam ipſa inter primas, ſuamq. dignitatem pariter, & nominis ſplendorem integrum retineret: nec tam multi ſcriptorum vel ambagibus impediti, vel obſcuritate deterriti, relato repente veſtigio, ante diſcendæ Algebræ voluntatem & ſpem perdiſcendi abieciſſent, quam Algebram ipſam, primo, vt aiunt, e limine ſalutarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præſentia, nec moleſtus, licet grauis, nec ſi eius fructus exiſtat, iniucundus. Quod & diuina ope præſtare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebram ſpectant, ea methodo tradere, difficultatumq. moles omnes explanare conabor, vt quiuis mediocriter tantum in Arithmeticæ præceptis verſatus, quam fieri poſſit, minimum in ea addiſcenda laboris experiatur. In quo tamen præſtando, ſicut diligentiam non patiar deſiderari meam, ita eorum a me opinioné alienam puto, ſi qui ſunt, qui vſquequaque perfectam & numeris omnibus abſolutam Algebræ tractationem a me requirant.

NON adeò me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam deſcripſerunt, præferendum putem; vt quod ipſi non effecerunt, præſtare me poſſe profitear.

AEQVATIONES eſſe plurimas inter tres, pluresvè numeros diuerſis nominibus appellatos, probe ſcio, quæ in quæſtionibus Algebræ beneficio diſſoluendis interdum, licet non ita frequenter, incidunt, nec tamen ſatis adhuc compertum apud omnes eſt, qua arte ab ipſis radices ſint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quæ adhuc cognitæ exploratæq. ſunt, & eas, quæ nondum ſuis è tenebris emerſerunt, cap. 12. enumerabo. Meum igitur hoc opus eſt, ea vna cura, vt quæ inuolutè alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obſcurius; proferre quæ latent, ardua explanare, facē præferre, ſingula, quo ad mea induſtria feret, dilucide & enucleate tradere atque docere. Poſtremo non tam de Algebræ dignitate & exiſtimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quæſtiones infinitæ propemodum commendare, quæ æquationibus inuentis ſoluuntur, certamque, vt ſuis locis conſtabit, ſcientiæ rationem habent. Verum qui ſuos labores non omnino otioſos in Algebræ ſcientia poſuiſſe optat, eum in vulgaribus Arithmeticæ præceptis ſe ſe aliquando exercuiſſe oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem inſtitutionemq. accedere, cuiuſmodi illa ſunt, quæ quaſi fundamenta ſunt tyronibus iacienda; Additio numerorum, ſubtractio, multiplicatio, atque diuiſio, non integrorum modo, ſed & fractorū. His adde proportionum regulam, quæ a pleriſque regula trium nuncupatur; atque his ſimilia non pauca: Proportiones præterea, progreſſionesq. numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas calluiſſe debet. Tertio noſſe debet radicum omnium extractiones ex quocunque numero, qui proponatur, ſiue integer is fuerit, ſiue fractus.

*Intentio auctoris.*

fractus. Demum & Geometria, & disciplinis alijs excultum, nec leuiter expolitum esse præstabit.

*Algorithmus quid.*

STVDII præterea plurimum in Algorithmo addiscendo collocādum erit, quem habet hæc facultas a cæteris peculiarem. Algorithmum vero dicimus tractationem, quæ additionem, subtractionem, & alias operationes numerorum complectitur. Eum inquam Algorithmum numerorum quorundam, quos in vulgari Arithmetica explicari in vsu non est. Eorum porro numerorum triplex omnino genus numeratur. Primum quidem eorum, quos Cossicos plerique, vel Denominatos dixerunt, ijq. in aliqua Geometrica progressione, quæ ab vnitate ducit initium, reperiuntur; cuiusmodi sunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiusdem generis sunt non pauca, de quibus mox dicere instituam. In altero genere insunt numeri, qui radicales appellantur, vt radix quadrata, cubica, & huiusmodi cuiuscunque numeri, siue is eam habeat radicem, siue non habeat, atque de his differemus, cum ad caput 16. peruenerimus. Tertij denique generis sunt numeri radicales numerorū eius generis, quod primo loco positum est a nobis, quales sunt radix quadrata, vel cubica, & similes, quotcunque quadratorum, cuborum, vel radicum, &c. de quibus postremus nobis erit labor. Et quoniam eorum numerorum Algorithmus, quos in secundo ac tertio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obscuritatem habet non contemnendam, de industria eum in finem regulæ Algebræ reijci placuit. Nam etiamsi quæstionum satis multæ cum Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebræ regulam enodari ac solui nequeant sine illo Algorithmo; nulla tamen inter Algebræ scientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta est, vt hæc ab illo, tanquam nexu quodam adhærescant sibi, aut nunquam diuelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda sit. Primū igitur Algorithmus Cossicorum, siue eorum, qui Denominati dicuntur, numerorum explicandus nobis est, qui ad hanc scientiam penitus cognoscendam omnino censetur necessarius. Tum ipsam Algebræ regulam, eaq. omnia persequemur, quæ ad eiusdem regulæ plenam cognitionem faciunt; quibus absolutis, a cap. 16. initium facientes, totoq. 26. numerorum radicalium, & absolutorum & Denominatorum, siue Cossicorum Algorithmum tractemus. Extremas partes Aenigmata agent, quibus propositis, & tandem explicatis, planior ac perfectior totius regulæ Algebræ sensus fiet, & fructus vberior.

*Tria genera numerorū in Algebra visitatorum.*

DE

# DE NVMERIS COSSICIS, siue Denominatis. Cap. II.

NVMERI Cossici, siue Denominati sunt omnes numeri cuiuscunque progressionis Geometricę ab vnitate incipientis. Proposita namq. qualibet Geometrica ab vnitate initium sumente progressione Primus terminus, id est, vnitas numerum absolutum, & simplicem repræsentat: Secundus vero terminus vnitatem sequens vocatur radix omnium sequẽtium, cum ex eius multiplicatione in seipsum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiusdem secundi termini in tertium producatur quartus, & sic deinceps, vt in scholio propos. 10. lib. 8. Eucl. demonstrauimus. Tertius deinde terminus, quia producitur, vt dictum est, ex secundo in seipsum, dicitur Quadratus, seu Census, vel Zensus, vt nonnulli huius artis periti volunt. Quartus postea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc est, secundi termini in suum quadratum, nimirum in tertium terminum, vt diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progressionis Geometricæ, cuius initium est vnitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in sequentes terminos. *Numeri Cossici qui sint.*

QVIA vero varie huiuscemodi numeri a varijs auctoribus denominantur, delegimus nos ex omnibus modum quendam denominandi illos numeros facilem, & valde accommodatum, vt denominationes has quantumlibet extendere possimus, & appositis characteribus designare; appellantes nimirum numeros progressionis Geometricæ, numeros Cossicos: qua quidem in re nonnullos scriptores recentiores secuti sumus. Parum enim refert, si hoc nomine, vel alio appellentur numeri progressionis Geometricæ, dummodo res ipsa intelligatur. Denominationes autem hæ exprimuntur sequentibus characteribus. *Cur numeros proportionis Geometricæ dicamus Cossicos.*

N. ℞. ʒ. ce. ʒʒ. ß. ʒce. Bß. ʒʒʒ. cce.
ʒß. Cß. ʒʒce. Dß. ʒBß. ceß. ʒʒʒʒ. Eß. &c.

PRIMVS character N. appellationem habet numeri absoluti & simplicis, ita vt numerus, cui appositus fuerit, pro absoluto & simplici habeatur. vt 4 N. nihil aliud significant, quã quatuor vnitates simplices ac absolutas: Plerunque tamen character hic, vel signum N. non solet numeris apponi, quando pro absolutis habendi sunt. Itaq. siue numerus aliquis gerat hoc signum N, siue eo careat, accipiendus est pro numero absoluto. *Explicatio characterum Cossicorum.*

Secundus character ℞. habet appellationẽ Radicis, vel Rei, ita vt vt numerus, cui appositus sit, a radicibus denominetur. vt 4 ℞. significant quatuor radices, vel res. Vnde si progressio Geometrica habeat 2. in secundo loco, erunt 4 ℞. octo vnitates: si vero 3. duodecim vnitates. & sic de cæteris.

Tertius character ℨ. repræsentat quadratum, quem zensum nonnulli dicunt. vt 4 ℨ. sunt quatuor quadrati vel zensi. Itaq. si tertius numerus progressionis Geometricæ sit 4. erunt 4 ℨ. decem & sex vnitates: Si autem 9. triginta sex vnitates. &c.

Quartus character ce. denotat cubum. vt 4 ce. significāt quatuor cubos; ita vt si cubus fuerit 8. 4 ce. sint 32. vnitates: si 27. 4 ce. sint 108. vnitates. &c.

Idem dicendū est de reliquis characteribus, quorū significationes hic sunt subscriptæ, vna cum appellationibus, & signis, quibus alij scriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorū Cossicorum apud scriptores varios variæ sunt, vt diximus, ita etiam signa seu characteres, quibus ipsas exprimunt, ijdem non sunt.

N. Numerus simplex, & absolutus.

℞. Radix. Italis Res, vel Cosa. Vnde hoc modo ab ipsis radix exprimitur. 1 co. 4 co. 20 co. &c. Alij vero ita designant. 1 ℞. 100 ℞. &c.

ℨ. Zensus, siue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc charactere q. vt 1 q. 30 q. 8 q. &c. Itali sic notant. ce. vt 1.ce. 4.ce. 20.ce. &c.

ce. Cubus. Alij artifices ita depingunt. cu. vt 7 cu. 8 cu. 200 cu. &c.

ℨℨ. Zenzizensus, siue Quadratiquadratus. Nonnulli ita signant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero sic. ce.ce. vt 4 ce.ce. 9 ce.ce. 12 ce.ce. &c.

ß. Surdesolidus. Hunc alij dicunt Sursolidum, vel Supersolidum: Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita solent exprimere. Rel.P. vt 11 Rel.P. 20 Rel.P. &c.

ℨce. Zenficubus, seu Quadratus cubi, vel Cubizensus. Quadraticubus. Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc charactere vtuntur. qce. Posset quoque hic numerus inuersis notis signari, vt ceℨ. ceq. Itali hoc modo signāt. ce.cu. vel cu.ce.

Bß. Bsurdesolidus. Secundum quosdam Bisurdesolidus, vel Sursolidus, aut Supersolidus secundus. Apud Italos vocatur Relatum secundum. vnde ita depingunt. Rel.2.

ℨℨℨ. Zensizenzensus, seu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq. Itali vero sic. ce.ce.ce.

Cce. Cubicubus, seu Cubus cubi. qui ita a quibusdam pingitur. cece. Ab Italis autem sic. cu.cu.

ℨß. Zensurdesolidus, seu quadratus Surdesolidi, vel Surdesolidus quadrati. Hunc ita nonnulli designant. qß. Itali vero, quoniam eum vocant censum Relati primi, hoc modo notant. ce. Rel.P.

Cß. Csur-

Cß. Cſurdeſolidus. Secundum alios Terſurdeſolidus, vel Superſolidus tertius. Italis dicitur Relatum tertium, & ita pingitur. Rel.3.

Eodem modo proportione quadã reliqua ſigna, ſiue characteres Coſſici explicari poterunt, qui quidem in infinitum progrediuntur, vt mox dicemus.

*Quomodo ſeries naturalis numerorũ numeros Coſſicos progreſſionis Geometricæ exponat.*

VT autem cognoſcamus, quidnam ſibi velint prædictæ denominationes, & qua ratione originem ducant a terminis cuiuſque progreſſionis Geometricæ ab vnitate initium ſumentis, conſiderandæ ſunt diligenter ſequentes duæ progreſſiones, vna cum ſupradictis characteribus Coſſicis in medio earum poſitis.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| N. | ℞. | ʒ. | ce. | ʒʒ. | ß. | ʒce. | Bß. | ʒʒʒ. | cce. | ʒß. |
| 1. | 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | 64. | 128. | 256. | 512. | 1024. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | &c. |
| Cß. | ʒʒce. | Dß. | ʒBß. | ceß. | ʒʒʒʒ. | Eß. | &c. |
| 2048. | 4096. | 8192. | 16384. | 32768. | 65536. | 131072. | &c. |

PRIOR progreſſio eſt naturalis numerorum ſeries incipientium ab 0. qui exponunt & ſigna Coſſica ſubſcripta, & terminos poſterioris progreſſionis, quæ Geometrica eſt, ab vnitate initiũ ducens: appellanturq. numeri ordinis ſuperioris exponentes terminorum progreſſionis Geometricæ, & ſignorum Coſſicorum. Hæc autem expoſitio in hoc conſiſtit. Prima figura 0, habens ſub ſe N, & 1. indicat numerum ſimplicem & abſolutum ex vnitatibus compoſitum, & ob id nullo exponente inſignitur, quamuis impropriè hæc figura 0, dici poſſit Exponens numeri abſoluti. Secundus terminus 1. ſupra 2. & ℞. oſtendit numerum ſecundum progreſſionis Geometricæ eſſe primam denominationem in numeris Coſſicis, appellariq. Radicem. Tertius deinde terminus 2. manifeſtat, tertium numerum Geometricæ progreſſionis eſſe ſecundam denominationem, vocariq. Zenſum, ſiue Quadratum. Sic quoque 6. demonſtrat, ſextam denominationem eſſe numerum Zenſicubum, & ſic de cæteris.

*Quot proportiones inter vnitatem, & quemlibet numerũ progreſſionis Geometricæ intercipiantur.*

DEINDE ijdem numeri exponentes progreſſionis naturalis numerorum docent, quot proportiones progreſſionis Geometricæ interijciantur inter quemlibet numerum eiuſdem Geometricæ progreſſionis, atque vnitatem. Vt 1. ſupra ℞. & 2. ſignificat, inter 2. ſiue radicem progreſſionis Geometricæ, atque vnitatem contineri vnicam proportionem 2. ad 1. At 2. ſupra ʒ. & 4. indicant, inter 4. ſiue ʒ. quadratumve, atque vnitatem comprehendi duas proportiones 4. ad 2. & 2. ad 1. Item 3. ſupra ce, & 8. monet, inter 8. ſiue ce, & vnitatem cadere tres proportiones 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. & ſic de cæteris, vt 6. ſupra ʒce. & 64. monſtrat, inter 64. ſiue zcc. atque vnitatem intercipi sex proportiones 64. ad 32. & 32. ad 16. & 16. ad 8. & 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. &c.

*Cuius characteris exponēs gignatur ex mutua multiplicatione, diuisioneque duorum exponentium.*

PRAETEREA quilibet duo exponentes numeri inter se multiplicati producunt exponentem characteris Cossici, qui ex characteribus assumptorum exponentium componitur. Vt ductis 2. in 3. fit 6. exponens characteris zcc, qui ex z & cc componitur. Item ex 3. in 5. fit exponens 15. characteris ccſs. ex cc, & ſs. cōpositi. &c. Sic etiam diuiso quouis numero exponente maiore per minorem quemcunque, indicabit Quotiens, si integer numerus est, exponentem characteris Cossici, qui relinquitur, si ex charactere numeri exponentis diuisi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta est diuisio. Vt si 6. exponens characteris zcc. diuidatur per 2. exponentem characteris z. fit Quotiens 3. exponens characteris cc. qui relinquitur, si ex charactere zcc, exponentis 6. auferatur character z. exponentis 2. Item si numerus 15. exponens characteris ccſs. diuidatur per 5. exponentem characteris ſs. fit Quotiens 3. exponens characteris cc, qui relinquitur, si ex ccſs. tollatur ſs. &c.

RVRSVS hæc figura 2. posita supra 4. & z. docet, quadratum, seu secundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis positæ. Nam si radix 2. ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, seu Zensus 4. Eodem pacto figura hæc 3. posita supra 8. & cc. significat, cubum, siue tertiam denominationem produci ex radice ter posita, & multiplicata. Nam si radix 2. ter ponatur, vt hic, 2.2.2. fiatq. multiplicatio 2. in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8. Sic quoque figura 5. monstrat, numerum Surdesolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies positæ, vt hic. 2.2.2.2.2. Eademq. est ratio de omnibus alijs.

*Definitio vniuscuiusque numeri Cossici.*

EX his facile definientur omnes numeri Cossici. Si enim petatur, quid sit v.g. numerus Bſurdesolidus, dicemus eum esse numerum, qui ex aliquo numero septies posito, & multiplicato gignitur. Vt 128. nascitur ex multiplicatione huius radicis 2. septies positæ in hunc modum, 2.2.2.2.2.2.2. Similiter Zenſizenſus erit numerus, quem numerus aliquis quater positus sua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties positus multiplicatione sua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Vt quoniam 2. positus decies hoc modo, 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. & multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui est zſ. idcirco 2. dicitur radix Zenſurdesolida huius numeri 1024. Idemq. de alijs dicendum est.

VIDES igitur, quam apposite naturalis progressio numerorum ab o. incipientium, & supra progressionem Geometricam ab vnitate cœptam posita, dicatur exponere terminos progressionis Geometricæ.

CAETERVM non solum ex multiplicatione radicis aliquoties positæ producuntur numeri progressionis Geometricæ, vt exposuimus, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter

se,

se, vt signa eorum Cossica demonstrant. Vt licet hic numerus Zensurdesolidus 1024. gignatur ex radice decies posita, hoc modo, 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2. vt eius exponens 10. indicat: tamen quia eius signum Cossicum ʒß. constat ex his duobus signis Cossicis ʒ. & ß. quorum exponentes sunt 2. & 5. idcirco si eadem radix 2. bis ponatur, hoc modo, 2.2. propter 2. exponentem signi ʒ. & multiplicetur, vt producatur 4. & hic productus quinquies positus, hoc modo, 4.4.4.4.4. ob 5. exponentem signi ß. multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo, si radix 2. quinquies ponatur, propter signum ß. atque ita multiplicetur, & productus numerus 32. ponatur bis, propter signum ʒ. idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2.2.2.2.2. facit 32. hic autem numerus ita multiplicatus 32.32. procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum est, si eorum signa Cossica ex pluribus signis Cossicis componantur.

EST quoque in superioribus progressionibus dignum consideratione, quod additio numerorum progressionis Arithmeticæ respondet multiplicationi numerorum progressionis Geometricæ; & subtractio diuisioni. Sicut enim exempli gratia, 2. & 5. faciunt 7. si simul addantur, ita quoque ʒ. & ß. quorum 2. & 5. sunt exponentes, nempe 4. & 32. inter se multiplicati producunt 128. id est, Bß. cuius exponens est 7. Item sicut 3. & 9. simul faciunt 12. ita ce. & cce. nimirum 8. & 512. quorum exponentes sunt 3. & 9. inter se multiplicati gignunt 4096. hoc est, ʒʒce. cuius exponens est 12. atque eodem modo de reliquis dicendum est.

*Additio & subtractio idē faciunt in serie naturali numerorum, quod Multiplicatio & Diuisio in progressione Geometrica.*

RVRSVS quemadmodum subtrahendo 5. a 7. remanent 2. ita diuidendo Bß, nempe 128. cuius exponens est 7. per ß, hoc est, per 32. cuius exponens est 5. prodit numerus 4. nempe ʒ. cuius exponens est 2. Similiter sicut subtrahendo 3. ex 12. relinquuntur 9. ita diuidendo ʒʒce. hoc est, 4096. cuius exponens est 12. per ce, id est, per 8. cuius exponens est 3. producitur cce, nempe 512. cuius exponens est 9. & sic de cæteris. Demonstrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.

QVOD autē dictum est hactenus de progressione Geometrica duplæ proportionis, quæ ab vnitate incipit, idem intelligendum est in quauis alia progressione Geometrica, cuius initium vnitas est: cuiusmodi sunt verbi gratia duæ sequentes progressiones Geometricæ, quarum prior continet proportiones quadruplas, posterior autem septuplas complectitur.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | &c. |
| N. | ℞. | ʒ. | ce. | ʒʒ. | ß. | ʒce. | Bß. | ʒʒʒ. | &c. |
| 1. | 4. | 16. | 64. | 256. | 1024. | 4096. | 16384. | 65536. | &c. |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | |
| N. | ℞. | ʒ. | ce. | ʒʒ. | ß. | ʒce. | Bß. | &c. |
| 1. | 7. | 49. | 343. | 2401. | 16807. | 117649. | 823543. | &c. |

Omnia namq. quæ dicta sunt, ad has duas progressiones, & ad omnes alias transferri facilè possunt.

*Quomodo omnes numeri progressionis Geometricæ sint denominandi.*

SVPEREST, vt doceamus quanam ratione omnes numeri propositæ cuiuscunque progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis denominandi sint, aut (quod idem est) quænam signa Cossica dictis numeris tribuenda sint, & ascribenda. Quod quidem facile præstabimus, si prius denominemus numeros, quorum exponentes sunt numeri primi, cuiusmodi sunt sequentes.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. &c.

Horum autem characteres, siue signa, quæ ipsi exponunt, hæc sunt;

ȝ. ce. β. Bβ. Cβ. Dβ. Eβ. Fβ. Gβ. Hβ. Iβ. Kβ. Lβ. Mβ. Nβ. Oβ. Pβ. Qβ. &c.

Cum enim tertius numerus ab vnitate in progressione quauis Geometrica sit quadratus, vt demonstratur propos. 8. lib. 9. Eucl. erit eius signum ȝ, cuius exponens 2. Rursus quia quartus numerus ab vnitate est Cubus, vt constat ex eadem propos. erit eius nota ce, & exponens 3. Deinde quia sextus ab vnitate numerus, quem exponit numerus primus 5. neque quadratus est, neque cubus, nisi quando secundus numerus ab vnitate quadratus est, vel cubus, vt ex propos. 10. lib. 9. Eucl. liquido constat, tribuerunt ei scriptores hoc signum β. ita vt Surdesolidus appellatus sit. Quoniam vero idem in reliquis numeris, quorum exponentes sunt numeri primi, contingit, ita vt neque quadrati sint, neque cubi, primo ab vnitate non existente quadrato, vel cubo, vt ex eadem propos. perspicuum est; appellati sunt quoque illi numeri progressionis Geometricæ, qui exponentes habent numeros primos, Surdesolidi, ita vt is, quem exponit 7. dicatur secundus Surdesolidus, qui vero exponitur ab 11. Tertius Surdesolidus, & sic de cæteris. Sed quia, si secundus Surdesolidus ita signetur, 2β. & tertius sic, 3β. &c. facile notæ Arithmeticæ huic signo β. appositæ alios numeros confundere & perturbare possunt; visum est artificibus loco notarum Arithmeticarum asciscere literas Alphabeti, denominareq. secundum β. Bβ. a secunda litera, & tertium Cβ. a tertia litera, &c. Hoc igitur modo formantur signa & characteres numerorum Cossicorum, quorum exponentes sunt numeri primi, vt hæc formula indicat.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | 3. | 5. | 7. | 11. | 13. | 17. | 19. | 23. | 29. | 31. | 37. | &c. |
| ȝ. | ce. | β. | Bβ. | Cβ. | Dβ. | Eβ. | Fβ. | Gβ. | Hβ. | Iβ. | Kβ. | &c. |

EX his inueniemus characteres cæterorum numerorum Cossicorum, quorum exponentes non sunt numeri primi, sed compositi, hoc modo. Resoluatur numerus exponens compositus, cuius denominatio, & character desideratur, in suas partes aliquotas incompositas, quæ inter se ordine multiplicatæ ipsum constituant, atque producant. quod in hunc modum fiet.

*Numerū compositū in suas*

NVMERVS compositus datus diuidatur per minimum numerum primum, per quem diuidi potest: Similiter quotiens, si fuerit numerus

merus compositus: Rursus hic quotiens, si fuerit compositus, per numerum primum minimum, qui eum numeret, diuidatur: atque ita deinceps continuè fiat diuisio, donec occurrat quotiens, qui sit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam si omnes diuisores eiusmodi, etiamsi aliqui sæpius repetantur, vnà cum vltimo quotiente ordine ponantur, & inter se multiplicentur, producetur præcisè datus numerus compositus: atque ipsi diuisores, vnà cum vltimo quotiente sunt partes incompositæ datum numerum compositum per multiplicationem constituentes. Vt si numerus compositus datus sit 924. Primo diuido eum, quoniam par est, per 2. tanquam per eius partem incompositam minimam, inuenioq. quotientem 462. Reseruo autem 2. Rursus quotientem 462. quia par est, diuido per 2. efficioq. quotientem 231. & reseruo iterum 2. Deinde quotientem 231. quia impar est, diuido per 3. tanquam per minimum numerum primum, reperioq. quotientem 77. (quod si aliquid in diuisione relictum fuisset, expertus fuissem diuisionem per 5. 7. & alios numeros primos, donec nihil fuisset residuum. Et si nullum talem diuisorem, qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuisores 2. 2. & vltimus quotiens essent partes incompositæ datum numerum restituētes, & nulla alia dari posset, præter vnitatem) Reseruo igitur 3. Et rursus diuido 77. per 3. sed quoniam aliquid superest in diuisione, non reseruo 3. sed eundem quotientem 77. partior per 5. sed quia aliquid superest in diuisione, diuido eundem per 7. inuenioq. quotientem 11. numerum primum. Sunt ergo partes incompositæ 2. 2. 3. 7. 11. numerum datū 924. sua multiplicatione restituentes. *partes incompositas resolue, quæ ipsum producant.*

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompositis inuētis characteres debiti subscribantur. Hac enim ratione prosiliet character integer compositus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum sit signum Cossicum numeri trigesimiprimi Cossici, cuius exponens est numerus hic compositus 30. Quotus enim numerus Cossicus est ab vnitate, tot vnitates, minus vna, continet eius exponens, vt ex antedictis progressionibus apparere potest. Quoniā igitur partes ipsius aliquotæ incompositæ sua multiplicatione ipsum procreantes sunt 2. 3. 5. quarum signa sunt ʒ. ce. β. idcirco numerus dictus trigesimusprimus hoc signo Cossico decorabitur ʒceβ, appellabiturq. Zensicubisurdesolidus. Eodem modo exponens 24. cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 2. 3. habebit signum Cossicum ʒʒʒce. Ita quoque exponens 100, cuius partes incompositæ sunt 2. 2. 5. 5. hoc signum Cossicum sortietur ʒʒββ. & sic de cæteris.

IDEM consequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter se multiplicati producunt exponentem numerum oblatum. Nam eorum signa Cossica component signum Cossicum propositi numeri exponentis. vt si exponens sit 12. numeri sua multiplicatione ipsum producentes sunt 3. & 4. quorum signa Cossica sunt ce, & ʒʒ. Signum igitur Cossicū exponentis 12 est ʒʒce.

Semper

Semper enim signa Cossica minora præponuntur maioribus. Eodé pacto numeri sua mutua multiplicatione producentes eundem numerum exponentem 12. sunt 2. & 6. quorum prior signum Cossicum habet ℥. posterior vero ℥ce. Signum ergo Cossicum numeri exponentis 12. est ℥℥ce. vt prius. Quod si aliquando ignoretur alterius numerorum multiplicantium, vel etiam vtriusque signum Cossicum, sumendi erunt alij duo numeri ipsum producentes, vt in posteriori exemplo, si nos lateat signum Cossicum huius multiplicantis 6. accipiemus 2. & 3. qui ipsum procreant, quorum signa sunt ℥.ce. Inuenitur ergo idem signum Cossicum numeri exponentis 12. ℥℥ce. &c.

*Quem locum progressionis Geometricæ occupet quilibet numerus Cossicus.*

IAM vero si econtrario signi cuiuslibet Cossici propositi numerus exponens quæratur; si quidem fuerit incompositum, accipiemus ex superiori progressione numerorum primorum numerũ primum proposito signo debitum. vt si offeratur Cossicum hoc signum Dß. erit eius exponens 13. Si vero signum sit compositum, sumemus exponentes signis componentibus debitos, eosq. inter se multiplicabimus. nam productus numerus erit exponens propositi signi Cossici. vt si detur signum Cossicum ℥℥ce. compositum ex his tribus ℥.℥.ce. capiemus horum exponentes 2.2.3.ex superiori progressione primorum numerorum, eosq. inter se multiplicabimus; nam productus numerus 12. est exponens dicti signi ℥℥ce. atque ita de cæteris dicendum est.

*Quomodo alij numeros progressionis Geometricæ denominent.*

NON est autem prætereundum, quosdam auctores hac in arte non mediocriter versatos aliter hos numeros Cossicos denominare, habita nimirum ratione multiplicationis, qua ex radice producuntur. Quoniam enim tertius numerus ab vnitate progressionis Geometricæ, quem nos Quadratum, vel Zensum diximus, producitur ex multiplicatione radicis bis positæ hoc modo, 2.2. vel 3.3. vel 4.4. vel 5.5. &c, ita vt vna tantum fiat multiplicatio; propterea numerum hoc modo genitum, id est, quadratum, appellant Primam quantitatem; quia prima est omnium, quæ ex radice nascuntur. Cubum deinde, quia gignitur ex radice ter posita, ita vt fiant duæ multiplicationes, dicunt Secundam quantitatem. Zensizensum vero eadem de causa vocant Tertiam quantitatem. & sic de cæteris intelligendum est. Sed placet nobis proprijs signis, & characteribus vti, vt clarius res ipsa percipiatur. Nostra etenim signa, & characteres a literis, ac numeris facilè discernuntur, ita vt confusio nulla possit exoriri: quæ in aliorum signis, characteribusq. vitari vix potest.

# DE NVMERATIONE COSSICORVM numerorum. Cap. III.

FACILIS est ex dictis Numeratio numerorum Cossicorum. Quando enim soli ponuntur, vt 5 ℞. vel 8 ℨ. vel 20 ℭ. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zensi, siue quadrati, vel 20. cubi, &c. Quando autem coniuncti inter se proponuntur, medio hoc signo +, vel hoc —. vt 5 ℞ + 8 ℨ. vel 8 ℨ — 5 ℞. vel 20 ℭ + 8 ℨ — 5. habenda est maxima ratio horum signorum +. —. quorum illud dicitur signum additorum, significatq. plus, vel additionem; hoc vero appellatur signum subtractorum, denotatq. minus, vel diminutionem, aut subtractionem. Hinc factum est, vt numeri illi, quibus interponitur signum +, dicti sint compositi. Quibus vero interijcitur signum —. nominati sint Diminuti. Quibus denique vtrumque signum interponitur, appellati sint mixti. licet omnes dici possint compositi. Itaq. compositus hic. 5 ℞ + 8 ℨ. effertur hoc modo. 5 radices, plus 8 zensi. Hic vero Diminutus 8 ℨ — 5 ℞. hoc modo. 8 zesi, minus 5 radices. Mixtus vero iste, 20 ℭ + 8 ℨ — 5. hoc pacto. 20 cubi, plus 8 zensi, minus 5. vnitates. Nam, vt dictũ est, numerus, qui post se non habet characterem aliquem Cossicum, significat numerum absolutum ex vnitatibus compositum.

*Explicatio signorum + & —.*

*Numeri Cossici compositi, Diminuti & mixti qui.*

REFERVNTVR autem, vt patet, hæc signa +. —. ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligitur habere signũ additorum +. Sensus porro numerorum compositorum, diminutorum, vel mixtorum facilis est. Nam cum dicimus 5 ℞ + 8 ℨ, intelligimus 5. radices vna cum 8 zensis: hoc est, vnitates 42. si radix est 2. & quadratus, vel zensus 4. Sic cum dicimus 8 ℨ — 5 ℞. intelligimus ex 8 zensis detractas esse 5 radices. vnde si radix est 2. atque adeo zensus 4. continebit numerus propositus vnitates 22. Idem dicendum est de alijs.

QVONIAM vero in antecedenti capite characteres numerorum Cossicorum, cuiusmodi sunt ℞. ℨ. ℭ. &c. appellauimus interdum etiam signa Cossica; vt vitemus omnem confusionem, appellabimus in sequentibus has notas ℞. ℨ. ℭ. &c. characteres, has vero +. —. signa.

PLERIQVE auctores pro signo + ponunt literam P, vt significet plus: pro signo vero — ponunt literam M, vt significet minus. Sed placet nobis vti nostris signis, vt a literis distinguantur, ne confusio oriatur.

PRAETEREA inter recentiores non pauci radices surdas, vt vocant, *Radices surdæ quo pacto signentur.*

vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc signo √. quod statim insequitur character Cossicus ȝ. vel ce, vel ȝȝ. &c. prout radix illa est quadrata, Zensicave, vel Cubica, vel Zensizensica, siue quadratiquadrata, &c. V.g. radicē quadratam numeri 12. designāt hoc modo, √ȝ 12. cubicam hoc modo √ce 12. & Zensizensicam hac ratione, √ȝȝ 12. atque hanc ob causam signum hoc √ radicale appellatur. Quo signo nos etiam in sequentibus vtemur: quippe cum minor confusio ex eo oriatur, quā si, quod plerique faciunt, radicem quadratam ita signemus, Rq. Cubicam hoc modo, R cu. Zensizensicam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac designatione, literæ Rq. Rcu. Rqq. cum alijs literis confunduntur. Diligenter ergo hæc signa √ȝ. √ce. √ȝȝ. √ß. &c. addiscenda sunt, vt ea, quæ sequuntur, intelligantur, quando nimirum huiusmodi signa occurrent. Sciendum tamen, quotiescunque nominatur radix alicuius numeri, sine voce, quadrata, cubica, surdesolida, vel zensizensica, &c. vel illi numero præfigitur signum hoc √. sine charactere ȝ, ce, ß. ȝȝ, &c. intelligi radicem quadratā simpliciter apud scriptores. quod a nobis etiam non raro obseruabitur.

*Signum radicale quid.*

## DE ADDITIONE ET SVBTRACTIONE numerorum Cossicorum. Cap. IIII.

*Additio Cossicorum numerorum diuersarum denominationum.*

QVANDO numerus Cossicus additur numero Cossico alterius denominationis, vel characteris, absoluitur additio mediante hoc signo +, fitq. numerus compositus. Vt hi duo numeri 6 ℞. & 8. simul additi faciunt 6 ℞ + 8. Item 6 ℞. & 8 ce. faciunt 6 ℞ + 8 ce. &c.

*Additio numerorum Cossicorum eiusdem appellationis.*

QVANDO vero addendus est numerus Cossicus alteri numero Cossico eiusdem appellationis, vel characteris, adduntur simul numeri, & summæ apponitur idem character Cossicus. Vt hi numeri 4 ȝ. & 9 ȝ. simul additi faciunt 13 ȝ. Item 5 ℞. & 4 ℞. faciunt 9 ℞. &c.

*Subtractio numerorum Cossicorum diuersarum appellationum.*

PARI ratione, quando numerus Cossicus subtrahitur a numero Cossico alterius denominationis, absoluitur subtractio mediante hoc signo —, fitq. numerus diminutus. Vt hic numerus 6 ℞. detractus ex 8 ȝ. relinquit 8 ȝ — 6 ℞. Item 12. ex 6. ℞. relinquunt 6 ℞ — 12. & sic de cæteris.

*Subtractio numerorum Cossicorum eiusdem denominationis.*

QVANDO vero numerus Cossicus subtrahendus est ex altero numero Cossico eiusdem characteris, subtrahitur numerus a numero, & reliquo numero idem character affigitur. Vt 4 ℞. ex 9 ℞. relinquunt 5 ℞. Et 9 ce. ex 20 ce. relinquunt 11 ce. &c.

SED quando Cossici numeri compositi, diminuti, & mixti inter se ad-se adduntur, vel alter ab altero subtrahitur, ponendus erit alter sub altero, ita vt numeri eiusdem appellationis inter se respondeant; quemadmodum in fractionibus Astronomicis fieri consueuit. Quod si in alterutro eorum non reperiatur numerus respondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili o. cum signo +. Quibus constitutis, addendi erunt numeri eiusdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & summæ, vel numeri reliqui proprijs in locis subscribendi, vna cum iisdem signis +, vel −, quæ in numeris addendis, vel subtrahendis reperiuntur.

*Additio & subtractio Cossicorum numerorum compositorum &c.*

### *Exempla Additionis.*

| ℞. | | N. |
|---|---|---|
| 6 | + | 8. |
| 7 | + | 10. |
| 13 | + | 18 |

| ȝ. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 8 | − | 5. |
| 3 | + | 9 | − | 8. |
| 10 | + | 17 | − | 13 |

| re. | | N. | | ȝ. |
|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 8 | − | 3 |
| 4 | + | 11 | − | 5 |
| 11 | + | 19 | − | 8 |

| re. | | ȝ. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | + | 11 | + | 0 | − | 6 |
| 3 | + | 0 | + | 8 | − | 4 |
| 7 | + | 11 | + | 8 | − | 10 |

| ß. | | ȝȝ. | | ℞. | | N. | | ȝ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 0 | + | 8 | − | 5 | + | 4 |
| 4 | + | 9 | + | 6 | − | 9 | + | 0 |
| 11 | + | 9 | + | 14 | − | 14 | + | 4 |

| | ȝ. | | N. |
|---|---|---|---|
| | 4 | − | 8 |
| − | 10 | − | 10 |
| | 14 | − | 18 |

In penultimo exemplo additus est huic numero, 7 ß + 8 ℞ − 5 + 4 ȝ. hic numerus, 4 ß + 9 ȝȝ + 6 ℞ − 9. factaq. est hæc summa. 11 ß + 9 ȝȝ + 14 ℞ − 14 + 4 ȝ.

### *Exempla Subtractionis.*

| re. | | ȝ. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 11 | + | 8 | − | 10 |
| 3 | + | 0 | + | 8 | − | 4 |
| 4 | + | 11 | + | 0 | − | 6 |

| ℞. | | N. | | ȝ. |
|---|---|---|---|---|
| 11 | + | 19 | − | 8 |
| 4 | + | 11 | − | 5 |
| 7 | + | 8 | − | 3 |

| ß. | | ȝȝ. | | ℞. | | N. | | ȝ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | + | 9 | + | 14 | − | 14 | + | 4 |
| 7 | + | 0 | + | 8 | − | 5 | + | 4 |
| 4 | + | 9 | + | 6 | − | 9 | + | 0 |

| ȝ. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|
| 10 | + | 17 | − | 13 |
| 7 | + | 8 | − | 5 |
| 3 | + | 9 | − | 8 |

In penultimo exemplo reliquus numerus est, 4 β + 9 ʒʒ + 6 ℞ — 9. Reijcitur enim + 0. quia neque in reliquo numero subtractionis, neque in summa additionis poni debet figura hæc 0. cum sit supervacanea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit, 4 ℞ + 11 ʒ — 6.

POTEST etiam fieri additio, & subtractio, si characteres Cosſici scribantur post numeros, non autem supra ipsos numeros, vt secundum exemplum Additionis, ita stabit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | ʒ | + | 8 | ℞ | — | 5 | N |
| 3 | ʒ | + | 9 | ℞ | — | 8 | N |
| 10 | ʒ | + | 17 | ℞ | — | 13 | N |

Secundum item exemplum Subtractionis ita stabit.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | ℞ | + | 19 | N | — | 8 | ʒ |
| 4 | ℞ | + | 11 | N | — | 5 | ʒ |
| 7 | ℞ | + | 8 | N | — | 3 | ʒ |

Quod etiam de multiplicatione, diuisioneq. intelligendum est. Atque hic modus vt plurimum a nobis obseruabitur in hoc opere.

*Quid agendũ, quando vnus numerus habet signũ +, & alter signũ — in additione, & subtractione.*

QVOD si in additione, vel subtractione alter numerorum habuerit signum +, alter vero —, commutatur species, seu operatio, hoc est, in Additione subtrahitur minor ex maiore, & reliquo numero tribuitur signum maioris numeri, a quo facta est subtractio, siue illud fuerit +, siue —.

In Subtractione vero adduntur simul numeri, & summæ apponitur signum superioris numeri, a quo fieri debebat detractio, quodcunque illud fuerit siue +, siue —.

## *Exempla Additionis.*

| ʒ¢. | | β. | | ʒʒ. | | ¢. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | + | 0 | + | 8 | + | 6 | — | 4 | + | 8 |
| 7 | + | 5 | — | 11 | — | 11 | + | 0 | + | 0 |
| 14 | + | 5 | — | 3 | — | 11 | — | 4 | + | 8 |

| ʒ. | | ℞. |
|---|---|---|
| 6 | + | 8 |
| 2 | — | 10 |
| 8 | — | 2 |

Si hi duo numeri 6 ʒ — 8 ℞. & 12 ℞ — 3 ʒ debeant addi, formabimus exemplum hoc modo, vt singula singulis respondeant.

| | ʒ. | | ℞. |
|---|---|---|---|
| + | 6 | — | 8 |
| — | 3 | + | 12 |
| | 3 | + | 4 |

Vel sic

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | 6 ʒ | — | 8 ℞ |
| — | 3 ʒ | + | 12 ℞ |
| | 3 ʒ | + | 4 ℞ |

Ratio-

Rationem vero huius operationis pulchre docent numeri absoluti, vt hic vides.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 + 5 | 8 — 5 | 8 + 4 | 8 — 4 |
| 10 — 4 | 10 + 4 | 10 — 5 | 10 + 5 |
| 18 + 1 | 18 — 1 | 18 — 1 | 18 + 1 |

Quoniam enim in primo exemplo ad 8 + 5, hoc est, ad 13. non adduntur integre 10. vt fiant 23. sed subductis prius 4. Ideo fit summa 19. nempe 18 + 1. Itaq. postquam addita sunt 8. & 10. factaq. sunt 18. detrahenda sunt 4. ex 5, vt remaneat 1, cum hoc signo +.

Eodem modo in secundo exemplo, non adduntur integre 8, sed minus 5. ad 10 + 4, hoc est, ad 14. propterea postquam ex 8. & 10. facta sunt 18. detrahenda sunt 5. ex 4. Et quia deest vnitas, vt possit subtrahi, idcirco ponitur 1. cum signo —. Eadem ratio est in cæteris. Vbi vides in primo exéplo ex 8 + 5. & 10 — 4. id est, ex 13. & 6. effici 18 + 1. id est, 19. In secundo verò ex 8 — 5. & 10 + 4. hoc est, ex 3. & 14. fieri 18 — 1. hoc est, 17. In tertio quoque ex 8 + 4. & 10 — 5. hoc est, ex 12. & 5. conflari 18 — 1. hoc est, 17. In quarto denique ex 8 — 4. & 10 + 5. id est, ex 4. & 15. confici 18 + 1. id est, 19.

## Exempla Subtractionis.

| zce. | ß. | zz. | ce. | ze. | N. |
|---|---|---|---|---|---|
| 14 + | 5 — | 3 — | 11 — | 4 + | 8 |
| 7 + | 0 + | 8 + | 0 — | 4 + | 8 |
| 7 + | 5 — | 11 — | 11 ± | 0 + | 0 |

| x. | ze. |
|---|---|
| 8 — | 2 |
| 6 + | 8 |
| 2 — | 10 |

In priori exemplo, quando detrahuntur — 4 ze. ex — 4 ze. potest signari reliqua figura 0, vel signo +, vel signo —. Nihil .n. interest vtrũ illorum ponatur, quando reliquus numerus est 0. Immo totus reliquus numerus ita scribendus erit. 7 zce + 5 ß — 11 zz — 11 ce.

Ratio quoque huiusce operationis perspicua est in numeris absolutis, vt ex sequentibus exemplis apparet.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 + 5 | 18 + 4 | 18 — 5 | 18 — 4 |
| 8 — 4 | 8 — 5 | 8 + 4 | 8 + 5 |
| 10 + 9 | 10 + 9 | 10 — 9 | 10 — 9 |

Quoniam enim in primo exemplo non integre subducuntur 8. ex 18 + 5. hoc est ex 23. sed minus 4. propterea subductis 8. ex 18. vt relinquantur 10. addenda sunt rursum 4. ad 5. Eademq. est ratio in secundo exemplo. In tertio vero exemplo, cum 8. deducantur ex 18, ex quibus iam ablata sunt 5. restituenda sunt 5. ipsis 4. & summa per signum — notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, si ex 18 + 5. hoc est, ex 23. detrahantur 8 — 4. hoc est, 4. relinqui 10 + 9. id est, 19. In secundo quoque, si ex 18 + 4. hoc est, ex 22. detrahantur 8 — 5. id est, 3. relinqui 10 + 9. hoc est, 19. In tertio vero, si ex 18 — 5. id est, ex 13. detrahantur 8 + 4. id est, 12. remanere 10 — 9. id est, 1. In quarto denique, si ex 18 — 4. hoc est, ex 14. demantur 8 + 5 id est, 13. remanere quoque 10 — 9. hoc est, 1.

*Quid agendũ in subtractione, quando vtero; numerus habet signũ + vel — & numeri præposterè ponuntur.*

QVOD si quando contingat, vt idem signum + vel — reperiatur tam in numero subtrahendo, quam in eo, a quo fit subtractio, sed subtrahendus maior sit; subtrahendus erit præpostero ordine superior ab inferiori, sed numero reliquo dandum signum contrariũ, ita vt ex signo +, fiat —, & ex —, fiat +. Vt duo exempla, quæ sequuntur, indicant.

| ʒ. | | ℞. | | N. |
|---|---|---|---|---|
| 9 | + | 4 | — | 5 |
| 4 | + | 7 | — | 8 |
| 5 | — | 3 | + | 3 |

| ℞. | | ʒ. | | N. |
|---|---|---|---|---|
| 6 | — | 5 | + | 3 |
| 7 | — | 9 | + | 10 |
| —1 | + | 4 | — | 7 |

In posteriori exemplo, quoniam 6 ℞. & 7 ℞. intelliguntur habere signum +, idcirco reliquus numerus adeptus est signum —. Vnde ita scribendus erit, 4 ʒ — 1 ℞ — 7. Non enim recte primus numerus afficitur signo —. Huius etiam operationis veritas perspicua est in duobus hisce exemplis numerorum absolutorum. Vbi vides, si in priori exemplo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | + | 4 | — | 5 |
| 4 | + | 7 | — | 8 |
| 5 | — | 3 | + | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | — | 5 | + | 3 |
| 7 | — | 9 | + | 10 |
| — 1 | + | 4 | — | 7 |

ex 9 + 4 — 5. id est, ex 8. subtrahantur 4 + 7 — 8, id est, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In posteriori verò, si ex 6 — 5 + 3. subducantur 7 — 9 + 10. hoc est, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc est, — 4. quia nimirũ superiori numero desunt 4. vnitates, vt inferior subtrahi possit.

CAETERVM omnia præcepta hactenus tradita de additione, & subtractione, quod ad signa + & — spectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

*Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.*

1

*Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostere ponuntur: Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex +, fit —, & ex —, fit +.*

2

*Diuersa signa mutant speciem operationis; Et in additione ponitur signũ maioris numeri; In subtractione vero, superioris, a quo fit subtractio, siue*

maior

maior is sit, siue minor, aut æqualis. Quæ quidem regulæ, intellectis præceptis traditis, difficiles non sunt.

SVPEREST, vt doceamus, quo modo instituenda sit probatio, siue examen Additionis, & Subtractionis. Duobus igitur modis cõprobari potest, an recte nec ne in Additione, vel Subtractione operatum sit. Primum enim probari potest Additio per subtractionem, & subtractio per Additionem; quemadmodum in absolutis numeris solet fieri. *Probatio additionis & subtractionis.*

Secundo cõstruatur tabula cum aliquibus progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus, vt hic cernis.

| N | ℞ | ʒ | ce | ʒʒ | ß | ʒce | Bß | ʒʒʒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{256}$ |

Deinde resoluantur numeri Cosici addendi, iuxta aliquam harũ progressionum, in numeros absolutos, ijq. simul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione signi +, vel —. Post hæc eodem modo resoluantur numeri Cosici summæ collectæ. Si enim recte facta est additio, erunt numeri summæ collectæ resoluti simul æquales numeris addendis resolutis simul. Vt in hoc exemplo. 6.ce. (si probatio instituatur per progressionem, cuius radix est 2.) faciunt 48. & 4 ʒ. faciunt 16. Iungantur simul 48. & 16. propter signum +, fiunt 64. Itẽ 4 ce. faciunt 32. addantur ad 64, propter signum + (semper enim numerus nullo signo notatus, intelligitur insignitus hoc signo +, vt dictum est.) fiunt 96. Denique 8 ʒ. faciunt 32. quæ ablata ex 96, ob signum —, relinquunt 64. Vide iam, an 10 ce — 4 ʒ, resoluti faciant quoque 64. Perspicuum autem est, 10 ce. facere 80, a quibus si deducantur 4 ʒ, hoc est, 16. propter signum —, relinqui 64. &c.

| ce. | | ʒ. |
|---|---|---|
| 6 | + | 4 |
| 4 | — | 8 |
| 10 | — | 4 |

NON secus Subtractio comprobabitur, si eius numeri Cosici in absolutos numeros commutentur. Nam numeri subtracti, & reliqui simul æquales debent esse numeris, a quibus facta est subtractio, &c. Vt in hoc proposito exemplo, si probationem instituamus iuxta progressionem, cuius radix est 3. 10 ce. faciunt 270, a quibus, si deducantur 4 ʒ, id est 36. propter signum —, remanent 234. Satis autem constat 6 ce + 4 ʒ. & 4 ce — 8 ʒ. resolutos ac simul additos facere quoque 234.

| ce. | | ʒ. |
|---|---|---|
| 10 | — | 4 |
| 6 | + | 4 |
| 4 | — | 8 |

Eodem modo si 6 ce + 4 ʒ. resoluti detrahantur ex 10 ce — 4 ʒ. resolutis, relinquentur 4 ce — 8 ʒ. resoluti. Vel certe si 4 ce — 8 ʒ.

reso-

resoluti deducantur ex 10 ce — 4 ʒ. remanebunt 6 ce + 4 ʒ. resoluti.

Idem exemplum examinabitur per progreßionem, cuius radix est $\frac{1}{2}$. licet aliquantò laboriosius, hoc modo. 10 ce. faciunt $\frac{10}{8}$. a quibus si tollantur 4 ʒ. nimirum $\frac{4}{4}$. hoc est, $\frac{8}{8}$. remanent $\frac{2}{8}$. Necesse igitur est, vt 6 ce + 4 ʒ. resoluti, & detracti ex $\frac{2}{8}$. relinquant 4 ce — 8 ʒ. resolutos. Et quia 6 ce. faciunt $\frac{6}{8}$. & 4 ʒ. efficiunt $\frac{4}{4}$. id est, $\frac{8}{8}$. quæ cum $\frac{6}{8}$. faciunt $\frac{14}{8}$. quæ ex $\frac{2}{8}$. subtrahendæ sunt. At quoniam numeri præpostere ponuntur, subtrahendæ sunt $\frac{2}{8}$. ex $\frac{14}{8}$. vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta primam regulam. Atque tantundem debent conficere 4 ce — 8 ʒ. Sunt autem 4 ce. $\frac{4}{8}$. a quibus vt auferatur 8 ʒ. id est, $\frac{8}{4}$. vel $\frac{16}{8}$. auferendæ sunt $\frac{4}{8}$. ex $\frac{16}{8}$. propterea quod numeri sunt positi præposterè, vt remaneant — $\frac{12}{8}$. iuxta legem primæ regulæ. quod est propositum.

---

# DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione numerorum Cossicorum. Cap. V.

*Multipl. & Diuisio numeri Cossici per absolutum.*

CVM numerus Cosſicus per numerum absolutum multiplicatur, aut diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) eiusdem denominationis Cossicæ. Vt multiplicatis 4 ℞. vel 8 ʒ, per 3. proueniunt 12 ℞. vel 24. ʒ. &c. Item diuisis 12 ℞. vel 24 ʒ, per 3. producuntur 4 ℞. vel 8 ʒ. &c.

*Multipl. & Diuisio numeri Cossici per Cossicum numerum.*

QVANDO vero numerus Cosſicus per numerum Cosſicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) alterius denominationis Cosſicæ, vt autem sciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commonstrat progreßio quælibet Geometrica ab vnitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum est, & hic apparet.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | &c. |
| N. | ℞ | ʒ | ce | ʒʒ | ß | ʒce | Bß | ʒʒʒ | cce | &c. |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | &c. |

Nam in multiplicatione fit exponẽs numerus denominationis Cosſicæ conflatæ ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur, exponunt. In diuisione autem reperitur exponens numerus Cosſicæ denominationis productæ,

ductæ, qui relinquitur, si exponens numerus denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente numero denominationis diuidendæ. Vt ex multiplicatione 4 ℞. in 4 ℞. vel 4 ℞. in 7 ℞. fiunt 16 ʓ. vel 28 ʓ. Nam vnitas, quæ est exponẽs huius characteris Cossici ℞. addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris ʓ. Sic etiam ex multiplicatione 4 ℞. in 5 ʓ. fiũt 20 ce. Et ex 4 ʓ. in 6 ß. fiunt 24 Bß. &c. Item ex diuisione 24 Bß. per 4 ʓ. fiunt 6 ß. Et ex diuisione 36 ʓce. per 4 ʓʓ. producuntur 9 ʓ. Et ex diuisione 12 ʓʓ. per 4 ce, fiunt 3 ℞. Et ex 8 ʓ. per 8 ʓ. fit 1 N. quia subductis 2. a 2. relinquitur 0, exponens numeri absoluti. Ita quoque diuisis 12 ʓce. per 4 ß. proueniunt 3 ℞. &c.

EX his facile intelligitur, quonam modo numerus Cossicus in seipsum multiplicetur quadrate, cubice, &c. Nam 5 ce, in se quadrate faciunt 25 ʓce. cum 3. & 3. faciant 6. At 5 ce, in se cubice, faciunt 125 cce. Nam primum 5 ce, in se faciunt 25 ʓce. Deinde 25 ʓce. in 5 ce. faciunt 125 cce. &c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis est. Repetatur enim progressio characterum Cossicorum numeros progressionis Geometricæ denominantium, vna cum naturali progressione numerorum exponentium, vt hic.

*Demonstratio Multiplicationis & Diuisionis numerorum Cossicorum.*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c. |
| N. | ℞. | ʓ. | ce. | ʓʓ. | ß. | ʓce. | bß. | ʓʓʓ. | cce. | ʓß. | Cß. | &c. |

Quoniam igitur, vt in scholio propos. 11. lib. 9. Eucl. docuimus, quilibet numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiue, quantum ipse abest exclusiue ab vnitate; fit vt ce, seipsum multiplicans producat ʓce. qui tertium locum occupat post ce, exclusiue, quemadmodum & ce, tertium habet locum post N. hoc est, post vnitatem exclusiue. Quare cum exponens huius characteris ce, nempe 3. ad se additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum possidet post 3. exclusiue, propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quot nimirum interualla denominatio ce. distat a N. seu vnitate exclusiue (Nam exponens cuiusque denominationis Cossicæ tot continet vnitates, quotum locum ipsa denominatio obtinet ab vnitate, siue a N. exclusiue.) perspicuum est, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. esse exponentem huius characteris Cossici ʓce. qui producitur ex multiplicatione ce, in se. Eademq. ratio est de cæteris characteribus Cossicis, qui seipsos multiplicant.

RVRSVS, quia, vt ex eodem scholio constat, si minor aliquis numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quempiam eiusdem progressionis, procreatur numerus, qui tantum a maiore distat exclusiue in progressione eadem, quantum minor ab vnitate abest exclusiue; efficitur vt ce. multi-

plicans

plicans ʒce, producat cce, qui tertium occupat locum post ʒce, exclusiue, sicut & ce, tertium possidet locum exclusiue post N, hoc est, post vnitatem. Quocirca cum exponens 3. characteris ce, additus ad 6, exponentem characteris ʒce. faciat 9. exponentem, qui tertiũ locum adeptus est post 6. exclusiue, propterea quod in 3. continentur tres vnitates, quorum nimirum locum exclusiue ab vnitate, seu N, occupat character hic ce; manifestum est, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem esse huius characteris Cossici cce. qui gignitur ex multiplicatione ce, in ʒce. Eadem de causa idem character cce, procreatur ex multiplicatione ʒʒ. in ß. & sic de cæteris.

QVONIAM vero, vt Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuisionem, & Diuisio Multiplicationem probat; fit vt quemadmodum ex additione 3. ad 3. fiũt 6. & ex multiplicatione ß, in ce, fit ʒce; ita subtractis 3. ex 6. relinquantur 3. & diuiso ʒce, per ce, proueniat ce. Item sicut ex additione 3. ad 6. fiunt 9. & ex multiplicatione ce, in ʒce, fit cce; sic etiam subtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiso cce, per ce, producatur ʒce. eademq. ratio est de reliquis.

EX hac demonstratione perspicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progreſsionis Arithmeticæ respondere multiplicationi numerorum progreſsionis Geometricę, & Subtractionem Diuisioni. Demonstrauimus enim, quemadmodum ex additione 2. ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione ʒ, in ʒʒ, fieri ʒce. Item sicut subtractis 2. ex 6. relinquuntur 4. ita diuiso ʒce, per ʒ, fieri ʒʒ, &c.

ITAQVE ex multiplicatione cuiusuis characteris Cosſici in aliũ quemcumque producitur character Cosſicus tantum a maiore distans exclusiue, quantum minor ab vnitate, hoc est, ab hoc signo N. recedit exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cosſici. Vt ex ce, in ʒʒʒ, fit Cß. &c. Ex diuisione vero cuiuslibet characteris Cosſici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Cosſicus tantum a maiore distans exclusiue, retrocedendo tamen, quantum minor ab vnitate, seu charactere N, abest exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cosſici. vt ex diuisione cce, per ʒʒ, producitur ß. &c.

*Multipl. & Diuisio numeri Cossici compositi per absolutum, vel per Cossicum tam simplicẽ, quam compositum.*

QVANDO autem numerus Cosſicus compositus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum absolutum, vel Cossicum tam simplicem, quam compositum, diminutumve, præter documentum iam traditum habenda est maxima ratio horum signorum +. & —. Nam quando numeri se mutuo multiplicantes, vel diuidentes habuerint idem signum +, vel —. apponitur producto semper hoc signum +. Quando vero alter illorum habuerit signum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuò hoc signo —. Quod alij scriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuisione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus: At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autẽ vnica hac regula memoriæ mandabitur.

Eadem

*Eadem signa ponunt signum additorum: Diversa vero signa ponunt signum subtractorum.*

*Regula in multipl. & diuisione numerorum Cossicorum obseruanda.*

## *Exempla Multiplicationis.*

| | | |
|---|---|---|
| 7 ℨ + 4 𝓇 | 7 ℨ — 4 𝓇 | 7 ℨ — 4 𝓇 |
| 9 N | 9 | 9 𝓇 |
| 63 ℨ + 36 𝓇 | 63 ℨ — 36 𝓇 | 63 ce — 36 ℨ |

| | |
|---|---|
| 8 ℨ + 9 | 8 ℨ — 9 |
| 8 ℨ + 9 | 8 ℨ — 9 |
| 72 ℨ + 81 | — 72 ℨ + 81 |
| 64 ℨℨ + 72 ℨ | 64 ℨℨ — 72 ℨ |
| 64 ℨℨ + 144 ℨ + 81 | 64 ℨℨ — 144 ℨ + 81 |

8 ce — 4 ℨ
6 𝓇
48 ℨℨ — 24 ce

6 ℨ + 8 𝓇 — 6 N
2 ℨ — 4 N
— 24 ℨ — 32 𝓇 + 24 N
12 ℨℨ + 16 ce — 12 ℨ
12 ℨℨ + 16 ce — 36 ℨ — 32 𝓇 + 24 N

9 ℨ + 8 N — 3 𝓇
7 ce — 4 ℨℨ — 8 ℨ
— 72 ℨℨ — 64 ℨ + 24 ce
— 36 ℨce — 32 ℨℨ + 12 β
63 β + 56 ce — 21 ℨℨ
— 36 ℨce + 75 β — 125 ℨℨ + 80 ce — 64 ℨ

In hoc vltimo exemplo præcedunt ſemper in ſumma maiores denominationes Coſsicæ minores denominationes Coſsicas. Sed quoniam non recte in initio ponitur hoc ſignum —, propterea ita collocanda erit ſumma producta.

75 β — 36 ℨce — 125 ℨℨ + 80 ce — 64 ℨ.

## *Exempla Diuiſionis.*

per $\frac{2\cancel{8}}{\cancel{8}}$ ce ce $\left(3\frac{1}{8}\right.$N | p $\frac{2\cancel{8}}{\cancel{8}}$ $\frac{ce}{𝓇}$ $\left(3\frac{1}{8}\right.$ℨ | p $\frac{2\cancel{8}}{\cancel{8}}$ $\frac{𝓇}{𝓇}$ $\left(3\frac{1}{8}\right.$N

$\frac{\cancel{6}}{\cancel{2}}$ ℨ 𝓇 + $\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}$ 𝓇 𝓇 $\left(3\right.$ 𝓇 + $1\frac{1}{2}$ N | $\frac{2\cancel{8}}{\cancel{6}}$ ℨℨ 𝓇 — $\frac{2\cancel{2}}{\cancel{6}}$ ℨ 𝓇 $\left(4\frac{2}{3}\right.$ ce — 3 𝓇

D ℨ ℨ

— $\cancel{4}\cancel{0}$
$\cancel{3}\cancel{0}$ ℨ — $\cancel{8}\cancel{8}$ ℞ + $\cancel{2}\cancel{4}$ N ( 6 ℞ — 8 N
$\cancel{8}$ ℞ — $\cancel{3}$ N
$\cancel{8}$ ℞ — $\cancel{3}$ N

— $\cancel{1}\cancel{2}$ ℨ $\cancel{0}$ ℞
$\cancel{1}\cancel{2}$ ℨℨ + $\cancel{1}\cancel{0}$ ℞ = $\cancel{1}\cancel{0}$ ℨ — $\cancel{3}\cancel{2}$ ℞ + $\cancel{2}\cancel{4}$ N ( 6ℨ + 8℞ — 6N
$\cancel{2}$ ℨ + $\cancel{0}$ ℞ — $\cancel{4}$ N
$\cancel{2}$ ℨ + $\cancel{0}$ ℞ — $\cancel{4}$ N
$\cancel{2}$ ℨ + $\cancel{0}$ ℞ — $\cancel{4}$ N

Quoniam in omni diuisione numerorum Cossicorum denominationes debent esse continuatæ, idcirco in vltimo exemplo, in quo diuisor est 2 ℨ — 4 N. interposuimus 0 ℞, cum signo +, vt totus diuisor sit 2 ℨ + 0 ℞ — 4 N. Idem factum esse vides in sequenti exemplo, vbi diuidendus numerus est 1 ℞ + 1. & diuisor 1 ℞ + 1.

— $\cancel{1}$ ℨ + $\cancel{1}$ ℞
$\cancel{1}$ ℞ + $\cancel{0}$ ℨ + $\cancel{0}$ ℞ + $\cancel{1}$ ( 1 ℨ — 1 ℞ + 1 N
$\cancel{1}$ ℞ + $\cancel{1}$
$\cancel{1}$ ℞ + $\cancel{1}$
$\cancel{1}$ ℞ + $\cancel{1}$

*Quando non possit fieri diuisio.*

CAETERVM tria hæc vltima exempla, in quibus diuisor est numerus compositus, vel diminutus, arte sunt excogitata. Nam vt plurimum per huiusmodi diuisores diuisio fieri non potest, sed subscripto diuisore ipsi diuidendo numero, interiectaq. linea, fit fractio, vt hic.

3 ß per 2 ℨ + 4 N || 8 ℨ — 9 ℞ p 4 ℞ + 3 N

Quotientes sunt.

$\frac{3\ ß}{2\ ℨ + 4\ N}$ || $\frac{8\ ℨ - 9\ ℞}{4\ ℞ + 3\ N}$

Quid autem faciendum sit cum fractionibus huiusmodi, infra cap. 10. docebimus, cum de reductione æquationum inter minutias inuentarum agemus. Eodem modo fractio constituitur, cum numerus Cossicus simplex, vel compositus per Cossicum numerum simplicem maioris denominationis diuiditur, vt 8 ℨ. per 2 ℨ℞. constituunt hanc fractionem $\frac{8\ ℨ}{2\ ℨ℞}$. Item diuisis 9 ℨ + 4. per 3 ℞. fit hæc fractio $\frac{9\ ℨ + 4}{3\ ℞}$. &c.

*Probatio Multiplicationis & Diuisionis.*

SVPEREST, vt tradamus examen Multiplicationis atque Diuisionis. Hoc autem duplex est. Primum Multiplicatio per Diuisionem, & contra examinari potest, vt in numeris absolutis præcipitur.

DEIN-

DEINDE probatio institui potest per resolutionem Cossicorum numerorum secundum aliquam radicẽ progressionis Geometricæ, vt dictum est ad finem cap. 4. Nam numeri Cossici, qui multiplicãtur inter se, resoluti tantum faciant necesse est, si multiplicentur inter se, quantum numeri Cossici producti, secundum eandem radicem resoluti. Et diuidendus numerus Cossicus resolutus tantum debet producere diuisus per diuisorem resolutum, quantum Quotiens secundum eandem radicem resolutus: vt hic apparet.

### *Exemplum Multiplicationis.*

Secundum radicem 2. faciunt 6 ℞ — 8. 4. & 5 ℞ — 3. faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. fiunt 28. Tantundem quoque fit ex resolutione producti numeri secundum eandem radicem 2. vt patet.

6 ℞ — 8
5 ℞ — 3
— 18 ℞ + 24
30 ȝ — 40 ℞
30 ȝ — 58 ℞ + 24

### *Exemplum Diuisionis.*

— 18 ℞
30 ȝ — 58 ℞ + 24 ( 5 ℞ — 3 N
6 ℞ — 8
6 ℞ — 8

Diuidendus numerus 30 ȝ — 58 ℞ + 24. secundum radicem 2. resolutus facit 28. Diuisor vero 6 ℞ — 8. facit 4. Diuisis autem 28. per 4. producuntur 7. Perspicuum autem est, quotientem hunc 5 ℞ — 3. secundum eandem radicem resolutum efficere quoque 7.

QVOD autem eadem signa + & +, vel — & —, in Multiplicatione & Diuisione producant semper signum hoc +. Diuersa autem signa +, & —, vel — & +, faciant semper hoc signum —; prætterquam quod examen Multiplicationis & Diuisionis abunde id comprobare possit: tamen idipsum clare perspicitur in numeris absolutis. Vt in hoc exemplo sequenti, quis non videt, si multiplicentur 8 — 2. hoc est, 6. per 7 — 3. hoc est, per 4. produci 24. nẽpe 56 — 38 + 6? Nam cum ex 7. in 8. fiunt 56. quoniam non multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. sed in 8, detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior est vero producto. Vnde ex multiplicatione postea eiusdem numeri 7. in — 2. fiunt 14. signanda hoc signo —. atque ita ex + in —, fit —. Rursus quia non totus hic numerus 7. sed detractis prius 3. multipli-

*Quod eadem signa producant signũ +. Diuersa autẽ signum —.*

8 — 2
7 — 3
56 — 14
— 24 + 6
56 — 38 + 6

catur in 8 — 2, fit vt productus 56 — 14. fit vero producto maior. Quare ex multiplicatione — 3, in 8. fiunt 24. notãda hoc signo —, atque ita rursus ex — in + fit —. Sed quia non totum hoc, quod prouenit ex — 3. in 8. sed quod producitur ex — 3. in 8, subtractis prius 2. idcirco restituendum est id, quod iniuste ablatum est; atque ita postremo ex — 3. in — 2, fiunt 6. notanda signo hoc +, quod additionem significat, vt restituantur 6. quæ ablata fuerant. Eadem ratio est in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 6. in — 4. gignatur hic numerus — 24. vt dictum est, necesse est, vt ex diuisione — 24. per — 4. producantur 6; & ex diuisione — 24. per 6. fiant — 4. Quare in diuisione quoque ex —, in —, fit +, & ex —, in +, vel contra, fit —. Itaq. quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant, ita siue Plus in Plus, siue Minus in Minus multiplicatum, aut diuisum producit Plus. Item sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat, ita siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum, aut diuisum producit Minus.

## DE NVMERIS FICTIS, SIVE MINOribus quam nihil. Cap. VI.

QVEMADMODVM variæ finguntur radices numerorum, qui eas non habent, qualis est radix quadrata, vel cubica, vel Zensizensica, vel Surdesolida huius numeri 20, fitq. hęc fictio summa vtilitate, & commodo eorum, qui in rebus Mathematicis versantur, vt suo loco dicemus: Ita etiam a scriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil, vt 0 — 4. hoc est, nihil detractis prius quatuor vnitatibus. Item 6 — 10. hoc est, sex vnitates minus 10. vnitatibus. Quod vnico exemplo hoc subtractionis perspicuum fier. Sint ex 8 — 2, deducenda 10 — 5. hoc est,

*Numeri ficti, siue minores quam nihil.*

5, ex 6. Primo detraho — 5 ex — 2, hoc est, quia superior numerus minor est, detraho 2, ex 5, & reliquo numero 3, tribuo contrarium signum +, iuxta legem subtractionis supra traditam.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | — | 2 | |
| 10 | — | 5 | |
| — | 2 | + | 3 |

Nam re vera hic numerus — 2. intelligitur superare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idem nihil descendat quinque vnitatibus, hoc est, tribus vnitatibus magis, quam — 2, recedat a nihilo. Quod etiam hinc potest intelligi, quod huic numero — 2, desint tantum duæ vnitates, vt æqualis fit nihilo, at huic — 5, desint quinque, vt nihilo æquiualeat. Deinde subtraho + 10, ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non potest. Vnde non inuenio numerum

aliquem

aliquem verum, quem pro relicto reponam, si 10. ex 8, subducam. Nam si superior numerus 8, maior esset inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa subtractione: Et si æqualis esset superior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus subtrahendus 10, maior sit numero 8, a quo fieri debet subtractio, efficitur, vt numerus infra 0, hoc est minor nihilo, relinquatur, ille nimirum, qui deest superiori, vt ab eo inferior detractus relinquat 0, cuiusmodi est numerus, qui relinquitur ex subtractione superioris ab inferiore, notatus signo —, quod defectum significat, nẽpe — 2. Vt totus numerus relictus sit — 2 + 3. Sed quia non recte ad initium numeri præfigitur hoc signum —, ita statuendus erit relictus. 3 — 2. Eodem modo, quotiescunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus est, (quod re vera fieri non potest) ponitur in hac scientia pro relicto excessus, quo inferior numerus superiorem superat, præfixo hoc signo —, vt subtractis 20, ex 12, relinquuntur — 8. &c.

VIDES igitur, quam pulchre hæc ars pro immensa copia sua vtatur & ijs, quæ sunt, & ijs, quæ non sunt, sed tantum esse finguntur. Quod accuratius adhuc ex ijs, quæ sequuntur, iam iam intelliges.

QVEMADMODVM supra vnitatem ponuntur numeri integri, & infra vnitatem fractiones vnitatis, vt vnitas media sit inter numeros integros & fractos; ita supra 0, seu nihilum, ponitur vnitas cum reliquis numeris veris, & infra 0, fingitur vnitas cum reliquis numeris, præposito tamen semper signo hoc —, ita vt 0, seu nihilũ, medium sit inter numeros veros, & fictos, siue minores nihilo. Quod apposite sequentes duæ progressiones commonstrant, quarum superior est naturalis series numerorum, inferior autem Geometrica, illiusq. numeri numeros huius exponunt, vt cap. 2. diximus.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| &c. | —7 | —6 | —5 | —4 | —3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | &c. |
| &c. | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | &c. |

Nam & hic superioris progressionis numeri idem faciunt additione, & subtractione, quod inferioris progressionis numeri multiplicatione, atque diuisione. Vt enim ex multiplicatione $\frac{1}{4}$ in 32, fiunt 8, ita ex additione — 2, ad 5. fiunt 3. Item sicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ in 8, fiunt 4, ita ex additione —1, ad 3, fiunt 2. Rursus, vt ex diuisione 8, per $\frac{1}{4}$, prodeunt 32, sic ex subtractione —2, de 3, relinquuntur 5. Et quemadmodum ex diuisione 8, per $\frac{1}{2}$, exeunt 16, ita ex subtractione —1, de 3, relinquuntur 4. &c. Vt ex ijs, quæ de additione subtractioneq. numerorum Cossicorum diximus, perspicuum est. Immo ex hoc facile constat, in additione & subtractione diuersa signa mutare speciem operationis, &c. vt docuimus cap. 4. alias non responderet additio & subtractio in progressione naturali numerorum multiplicationi ac diuisioni in Geometrica progressione.

EX his liquido constat, non frustra excogitari huiusmodi numeros fictos, siue nihilo minores, quandoquidem tam concinne eorũ additio ad numeros integros, vel subtractio, respondet multiplicationi, & diuisioni numerorum integrorum progressionis Geometricæ per numeros fractos eiusdem progressionis, vt dictum est.

*Vnum & eũdem numerũ habere posse duas radices quadratas inæquales.*

EST autem hoc loco obseruatione dignum, dari posse numerum Cossicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales; siue (quod idem est) exhiberi posse duos numeros inæquales, quorum vterque in seipsum ductus producat eundem numerũ. Nam hi duo numeri, 2 ʒ — 3 ꝛe. & 3 ꝛe — 2 ʒ. si vterque in se multiplicetur, producũt 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce. vt hic vides

| | |
|---|---|
| 2 ʒ — 3 ꝛe | 3 ꝛe — 2 ʒ |
| 2 ʒ — 3 ꝛe | 3 ꝛe — 2 ʒ |
| — 6 ce + 9 ʒ | — 6 ce + 4 ʒʒ |
| 4 ʒʒ — 6 ce | 9 ʒ — 6 ce |
| 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce | 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce |

Cum tamen ipsi numeri multiplicati inter se sint valde inæquales. Prior enim 2 ʒ — 3 ꝛe, si per radicem 2. resoluatur, efficit 8 — 6. hoc est, 2. qui numerus in se ductus procreat 4. qui æqualis est producto 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce. cum hic per eandem radicem 2. resolutus efficiat quoque 4. Posterior vero 3 ꝛe — 2 ʒ. efficit 6 — 8. id est 0 — 2. qui numerus in se multiplicatus producit quoque 4. si leges multiplicationis seruentur. Itaque tam numerus 2 ʒ — 3 ꝛe. quam 3 ꝛe — 2 ʒ. radix est quadrata numeri 4 ʒʒ + 9 ʒ — 12 ce. quod sane mirum videri possit, & paradoxum, cum tamen ita rem sese habere, resolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

HOC idem cernitur in numeris absolutis. Nam vterque horum numerorum 4 — 1. & 1 — 4. id est 3. & 0 — 3. in se multiplicatus gignit 9. vt hic cernis.

| | |
|---|---|
| 4 — 1 | 1 — 4 |
| 4 — 1 | 1 — 4 |
| — 4 + 1 | — 4 + 16 |
| 16 — 4 | 1 — 4 |
| 9 | 9 |

Idemq; in infinitis alijs numeris licebit experiri. Quod si ducantur 4 — 1. in 1 — 4. producetur numerus 8 — 17. hoc est, 0 — 9. At ex multiplicatione 2 ʒ — 3 ꝛe. in 3 ꝛe — 2 ʒ. procreabitur numerus 12 ce — 4 ʒʒ — 9 ʒ. qui resolutus per radicem 2. efficit 32 — 36. id est, 0 — 4. cum tamen vterque illorum in se ductus producat 4. Causa autem huius rei in multiplicationem numerorum

Cossi-

Cossicorum, & signorum + & — reijcienda videtur: & debilitas ingenij humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicationis dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

# DE FRACTIONIBVS numerorum Cossicorum. Cap. VII.

EAEDEM fere operationes sunt in fractionibus, seu Minutijs Cossicis, quæ in vulgaribus Minutijs, adhibitis tamen ijs, quæ de integris Cossicis numeris hactenus tradidimus, quod ad characteres Cossicos, & signa + & — attinet. Nam, vt de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{3}{8\,℞}$. significat, tres vnitates diuisas esse per 8 ℞. Et $\frac{7\,ʓ}{9}$. denotat 7. Zenios esse diuisos per 9, vnitates. Itē $\frac{9\,ʓʓ + 8\,ʓ}{6\,℞}$. indicat hunc numerū 9 ʓʓ + 8 ʓ. diuisum esse p 6 ℞. Et $\frac{9\,ʓʓ - 8\,ʓ}{6\,℞}$. vult numerum hunc 9 ʓʓ — 8 ʓ, esse diuisum p 6 ℞. &c.

*Numeratio fractionū Cossicarum.*

Abbreuiatio duobus modis fieri potest. Aut enim solum abbreuiantur numeri, vt in Minutijs vulgaribus fit, intactis characteribus Cossicis; aut etiam characteres Cossici abbreuiantur. Vt fractio hæc [illegible] quod ad numeros attinet, reducitur ad hāc [illegible]. Hæc autem [illegible]. reducitur ad hanc [illegible]. quia maxima mensura communis est 9. Modus autem inueniendi maximam mensuram trium aut plurium numerorum colligitur ex propos. 3. lib. 7. Eucl. Si enim sunt tres numeri, inuenta maxima mensura duorum, si hæc metiatur quoque tertium, erit ipsa maxima mensura omnium; si vero non metiatur tertium, erit maxima mensura illius maximæ mensuræ, & tertij numeri, omnium trium mensura maxima. Eodē modo, datis quatuor numeris, inuenta maxima mensura trium, si hæc metiatur & quartum numerum, erit ipsa maxima omnium quatuor mensura; si vero non metiatur, erit maxima mensura mensuræ illius maximæ, & quarti numeri, maxima mensura omnium quatuor. Et sic de reliquis. Similiter hæc minutia [illegible]. ad hanc reducitur [illegible]. Hæc autē [illegible]. reducitur ad hāc [illegible]. &c.

*Abbreuiatio fractionū Cossicarum.*

AT vero abbreuiatio characterum Cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam si reliquis numeris proprij characteres tribuantur, peracta erit abbreuiatio, quod ad characteres attinet. Hinc perspicuum est, numerum minoris characteris Cossici fieri in hac abbreuiatione Absolutum. Item Minutiam, in quo Absolutus numerus reperitur, non posse abbreuiari, quod ad characteres attinet. Vt hæc Minutia [illegible] abbreuiari non potest, quod spectat ad characteres: sed quod ad numeros attinet, reducetur per abbreuiationē

ad hanc

ad hanc, [illegible]. At vero hæc Minutia [illegible] quod ad characteres spectat, ad hanc reducitur. [illegible]. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc [illegible]. Hæc autem [illegible], reducitur ad istam, quod ad numeros & characteres attinet, [illegible].

*Demonstratio abbreuiationis fractionũ Cossicarum.*

FACILIS autem est demonstratio huiusce abbreuiationis. Nam quod spectat ad numeros, cum Minutiæ propositæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum mensuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuisos. Quare æquales erunt hæ fractiones, [illegible]. [illegible]. Quod vero ad characteres attinet, cum singuli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita vt eadem prorsus sit distantia inter characteres, ad quos facta est reductio, quæ inter characteres initio propositos, habebunt eandem proportionem characteres, ad quos facta est reductio, quam priores characteres propositi. Aequales itaq. erunt hæ Minutiæ, [illegible]. [illegible]. a Nam eadem proportio est

a 19. 7.

4 ℨ. ad 1 ℨℭ, quæ 4. ad 1 ℨℨ. cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4 ℨ, primi numeri, in 1 ℨℨ, numerum quartum, qui ex 4. numero tertio in 1 ℨℭ, numerum secundum. Vtrobique enim producitur hic numerus 4 ℨℭ. &c. Vel certe, cum & inter ℨ, ac ℨℭ, & inter N, ac ℨℨ, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod ℨ, & ℨℭ, æqualiter sunt depressi, nempe per 2. exponentem huius characteris minoris ℨ. &c.

*Reductio fractionum Cossicarum.*

REDVCTIO fractionum ad eundem denominatorem absoluitur multiplicando numeratores in denominatores per crucem, & denominatores inter se, vt in Minutijs vulgaribus. Vt hæ fractiones [illegible]. [illegible]. reducuntur ad has. [illegible]. [illegible].

*Demonstratio reductionis fractionũ Cossicarum.*

RATIO autem huius reductionis perfacilis est. Quoniam enim idem numerus 5 ℨℭ, multiplicans duos numeros 3 ℭ, & 4 ℨ, produxit 15 Bß, & 20 ℨℨℨ. b eadem proportio erit 15 Bß, ad 20 ℨℨℨ. quæ 3 ℭ, ad 4 ℨ. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæ [illegible]. & [illegible]. Eodem modo æquales erunt hæ fractiones [illegible]. & [illegible]. Nam hic numerus 4 ℨ, multiplicans duos 4 ℭ, & 5 ℨℭ, genuit hos duos 16 ß, & 20 ℨℨℨ.

b 17. 7.

QVOD si numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem sint reducenda, supponenda est vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, vt prius. Vt 6. & [illegible]. hoc modo $\frac{6}{1}$ [illegible]. reducentur ad has fractiones [illegible]. & [illegible]. Et hæ duæ [illegible]. [illegible]. ad has [illegible]. [illegible]. Nam huic numero Cossico integro 5 ℨ, supposita est vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhæreat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Vt si 4 ℨ + [illegible] & [illegible] reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4 ℨ, per 1 ℭ, vt habeamus duas fractiones has [illegible] [illegible] quas ad has duas reuocabimus. [illegible] [illegible]. & sic de cæteris.

IAM

IAM vero quatuor reliquæ operationes fractionum Cossicarum, hoc est, Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Diuisio, non differunt ab ijs, quas de Minutijs vulgaribus tradidimus, habita tamen semper ratione signorum + & —, nec non characterum Cossicorum, quorum operationes in superioribus præceptis continentur. Itaq. solum exemplis rem absoluemus hoc loco.

*Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio fractionum Cossicarum.*

### *Exempla Additionis.*

[illegible] ✕ [illegible] faciunt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] ✕ [illegible] faciũt [illegible]. Itẽ [illegible] ✕ [illegible] faciũt [illegible]. Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino similes sunt, propterea solum numeratores adduntur inter se, & summæ idem denominator subscribitur. Hæc autem fractio quod ad numeros, & characteres simul spectat, reducetur ad hanc [illegible].

### *Exempla Subtractionis.*

[illegible] de ✕ [illegible] relinquũt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] de ✕ [illegible] relinquunt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] de [illegible] relinquunt [illegible] hoc est, [illegible]. Item [illegible] de [illegible] relinquunt [illegible]. Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino sunt similes, & ijdem, detrahendus est numerator a numeratore, & reliquo numero idem denominator subscribendus.

### *Exempla Multiplicationis.*

[illegible] per [illegible] faciunt [illegible]. Item [illegible] per 4 ℨ — 8 N. faciunt [illegible]. Hic enim integro numero supponitur vnitas pro denominatore, vt exemplum ad Multiplicationem paretur hoc modo. [illegible] per [illegible]. Item [illegible] per [illegible] — 8 N. faciunt [illegible]. Prius enim in hoc exemplo facta est reductio — 8 N, ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet — 8 N, per 5 ℨ, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ fuerunt hæ [illegible] per [illegible].

### *Exempla Diuisionis.*

[illegible] per [illegible] faciunt [illegible]. Itẽ [illegible] per [illegible] faciunt [illegible] hoc est [illegible] siue 1 [illegible]. Item [illegible] per 4 ℨ — 8 N. faciunt [illegible]. Item [illegible] per [illegible] faciunt [illegible].

QVONIAM vero Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac

Diuisio se mutuo probant, fit vt si ex additione $\frac{4\,\mathfrak{z}}{3\,N}$ & $\frac{4\,\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{c}}$ fiunt $\frac{4\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}+4\,\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{c}}$ hoc est, $\frac{4\,\mathfrak{z}+4\,N}{3\,\mathfrak{z}}$; subductis $\frac{4\,N}{3\,\mathfrak{z}}$ ex $\frac{4\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}+4\,\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{c}}$ relinquatur $\frac{4\,\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{c}}$ Relinquuntur autem iuxta regulam $\frac{4\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{z}\mathfrak{c}}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{4\,N}{3\,\mathfrak{z}}$. Necesse est igitur, has duas minutias $\frac{4\,\mathfrak{z}}{3\,\mathfrak{c}}$ & $\frac{4\,N}{3\,\mathfrak{z}}$ esse æquales, hoc est, eandem proportionem esse 4 $\mathfrak{z}$. ad 3 $\mathfrak{c}$, atque 4 N, ad 3 $\mathfrak{z}$. Quod quidem verum est. Nam si Minutiæ dictæ multiplicentur per crucem, producentur æquales numeri, hoc est, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4 $\mathfrak{z}$, in 3 $\mathfrak{z}$, quantum ex secundo in tertium, nimirum ex 3 $\mathfrak{c}$, in 4 N. Itaq. non est necesse, vt eadem Minutia omnino proueniat, sed satis est, vt æqualis Minutia producatur, quæ quidem æqualitas facile comprobari potest ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum est de exemplis Multiplicationis ac Diuisionis, vt ex superioribus exemplis apparet.

*Compendiaria quædam operationes Minutiarum ad plurimas quæstiones soluendas perutiles.*

## I.

*Compendia quædam fractionum.*

***Dati numeri partem quamcumque, vel partes nominatas ad ipsum numerum addere.***

SIT datus numerus $\frac{4\,\mathfrak{z}-16\,N}{3\,N}$ cui volo addere $\frac{3}{4}$ ipsius numeri. Vtor ergo hoc compendio, etiamsi ignorem, quæ sint $\frac{3}{4}$ ipsius. Addo ad partem, vel partes addendæ, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{3}{4}$ facio $\frac{7}{4}$. Hanc vero minutiam multiplico per numerum datum, efficioq. $\frac{28\,\mathfrak{z}-112\,N}{12\,N}$ summam quæsitam.

Item si $\frac{2}{3}$, addendæ sint ad 12 $\mathfrak{z}$. addo vnitatem ad $\frac{2}{3}$, vt fiant $\frac{5}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. $\mathfrak{z}$, facioq. summam hanc $\frac{60\,\mathfrak{z}}{3}$. hoc est, 20 $\mathfrak{z}$. Similiter si ad hanc minutiam $\frac{3}{5}$ addendum sit eius dimidium; addita vnitate ad $\frac{1}{2}$, fiunt $\frac{3}{2}$. Multiplico $\frac{3}{2}$ per $\frac{3}{5}$. fit summa tota $\frac{9}{10}$. &c.

## II.

***Dati numeri partem, vel partes quascunque ad partem, vel partes quascunque eiusdem numeri addere.***

SIT datus numerus $\frac{8\,\mathfrak{z}-32}{7\,N}$ ad cuius $\frac{1}{3}$, volo addere $\frac{1}{4}$. eiusdem dati numeri. Addo partes propositas inter se, vt $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, facioq. $\frac{13}{12}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{8\,\mathfrak{z}-32\,N}{7\,N}$ efficioq. summam $\frac{104\,\mathfrak{z}-416\,N}{84}$.

Similiter si $\frac{3}{7}$ huius numeri 35. ad $\frac{4}{5}$ eiusdem volo addere. Addo prius $\frac{3}{7}$ & $\frac{4}{5}$. facioq. $\frac{34}{35}$. Multiplico $\frac{34}{35}$ per 35. efficioq. $\frac{1190}{35}$ hoc est, 34. &c.

## III.

***Dati numeri partem, vel partes quaſcunque ab ipſo numero ſubtrahere.***

SIT datus numerus $\frac{2z+3x-10}{12x}$, a quo volo ſubtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{5}$, hæc eſt $\frac{8}{15}$ (ſunt enim prius in vnam ſummã redigendæ fractiones, ſi plures fuerint). Demo $\frac{8}{15}$ ex vnitate (quod breuiter fit, ſubtrahendo numeratorem a denominatore. Nam reliquus numerus eſt numerator) remanentq. $\frac{7}{15}$. Multiplico $\frac{7}{15}$ per datum numerum $\frac{2z+3x-10}{12x}$ facioq. reliquum numerum $\frac{14z+21x-70}{180x}$.

Similiter volo ſubtrahere $\frac{4}{5}$ huius numeri $\frac{3}{10}$, ab ipſo numero $\frac{3}{10}$. Detraho $\frac{4}{5}$ ex vnitate, manet $\frac{1}{5}$. Multiplico $\frac{1}{5}$ per $\frac{3}{10}$, facioq. $\frac{3}{50}$ pro ſumma reliqua, &c.

## IIII.

***Dati numeri partem, vel partes quaſcunque a parte, vel partibus quibuſcunque eiuſdem numeri ſubtrahere.***

SIT datus numerus $\frac{12x+3}{5}$ a cuius $\frac{1}{3}$ volo detrahere $\frac{1}{4}$. Demo prius $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$, remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$ per $\frac{12x+3}{5}$ facioq. ſummam reliquam $\frac{12x+3}{60}$.

Item volo ſubducere $\frac{1}{4}$. huius numeri 36. ex $\frac{1}{3}$ eiuſdem numeri. Demo $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{3}$ manent $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$ per 36. facioq. $\frac{120}{24}$ hoc eſt, 5. pro numero reliquo. &c.

## V.

***Dati numeri partem, vel partes quaſcunque inuenire.***

SIT datus numerus $\frac{12x+8}{5}$. Volo ipſius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, id eſt, $\frac{7}{12}$. (quando enim plures ſunt fractiones, colligendæ ſunt prius in vnam ſummam). Multiplico $\frac{7}{12}$ per datum numerum $\frac{12x+8}{5}$ facioque $\frac{84x+56}{60}$ atque hic numerus conſtituit $\frac{7}{12}$, hoc eſt, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. dati numeri $\frac{12x+8}{5}$.

Similiter volo $\frac{3}{4}$ huius numeri 24. Multiplico $\frac{3}{4}$ in 24. facioq. $\frac{72}{4}$ hoc eſt, 18. &c.

## VI.

***Numerum inuenire, cuius pars nominata data ſit, vel partes. Hoc eſt, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus ſit data quauis pars, vel partes.***

SIT hic numerus $\frac{12℞-4}{5}$ duæ tertiæ partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12℞-4}{5}$ per $\frac{2}{3}$. facioq. $\frac{36℞-12}{10}$ atque hic est numerus, cuius $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{12℞-4}{5}$.

Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, sit $\frac{4}{5}$. Diuido 8 per $\frac{4}{5}$ facioq. $\frac{40}{4}$, hoc est, 10. atque hic est numerus, cuius $\frac{4}{5}$. faciunt 8. &c.

# DE REGVLA ALGEBRAE.
## Cap. VIII.

ABSOLVTO Algorithmo numerorum Cossicorum, ordo iam postulat & locus, vt celeberrimã Algebræ regulam exponamus. Occasione enim huius omnia, quæ hactenus tradita sunt de numeris Cossicis, planiora fient, & reliqua, quæ ad perfectionem huius regulæ cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, vt debent, explicari possunt, nisi occasione accepta a partibus regulæ Algebræ, vt suo loco dicemus. Regula igitur Algebræ, quam alij scriptores in plures distraxerunt, huiusmodi est.

*Regula Algebræ.*

*Pro numero incognito in quæstione ponatur radix vna hoc modo, 1 ℞. (Possunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 ℞. vel 3 ℞, &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quæstionis propositæ.) Quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Aequatio aliqua inueniatur: Hæc reducatur, si reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus. Nam vel Quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. Pulchre autem diuisor suo charactere Cossico demonstrabit, quando radix ex Quotiente, & quænam sit extrahenda.*

HABET autem regula hæc quatuor partes. Prima est Inuentio Aequationis: Secunda, Reductio Aequationis inuentæ: Tertia, Diuisio alterius numeri Aequationis per numerum maioris characteris Cossici: Quarta & vltima, Extractio radicis alicuius ex Quotiente.

HARVM duæ sunt omnino necessariæ, nimirum Inuētio Aequationis,

tionis, & Diuisio. In omni enim quæstione per hanc regulam soluenda inuenienda est Aequatio siue Aequalitas inter duos numeros, & Diuisio instituenda. Reliquæ duæ, nimirum Reductio Aequationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino sunt necessariæ. Neque enim omnis Aequatio inuenta reductionem exigit, neque semper ex Quotiente radix extrahenda est, vt ex ijs, quæ sequuntur, manifestum erit. Quid porrò inter vnicam hanc regulam nostram, & multiplices aliorum regulas (Plures enim alij regulas præscribunt) cap. 13. manifestum erit.

SED priusquam omnes has quatuor partes regulæ singulatim pertractemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipsam explanabimus, hoc proposito problemate.

***Inuenire numerum, ita vt dimidio ipsius, & tertia parte ab eo sublatis, reliquus numerus sit 7.***

PONO hunc numerum ignotum, qui quæritur, esse 1 ℞. ita vt 1 ℞, æqualis intelligatur numero abscondito, quem inquirimus. Cum enim omnis numerus siue integer, siue fractus, siue integer cũ fracto obtinere possit secundum locum alicuius progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis, ita vt sit radix illius progressionis: consistit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progressionem Geometricam numerus quæsitus constituat; hoc est, in quanam progressione numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæstionis tenorem examino 1 ℞, hoc est, sumo ipsius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc est, $\frac{1}{2}$ ℞, & $\frac{1}{3}$ ℞, quæ partes simul constituunt $\frac{5}{6}$ ℞. Aufero $\frac{5}{6}$ ℞, ex 1 ℞, remanet $\frac{1}{6}$ ℞. Iam sic ratiocinor. Quoniam 1 ℞, posita est æqualis toti numero abscondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}$ ℞, æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{3}$ ℞, tertiæ parti eiusdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero subtractis, reliquus numerus est 7; fit, vt $\frac{1}{2}$ ℞, & $\frac{1}{3}$ ℞, hoc est, $\frac{5}{6}$ ℞. detractis ex 1 ℞, reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{6}$ ℞, æqualis sit reliquo numero 7, quia si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia. Inuenta est igitur Aequatio, siue Aequalitas inter $\frac{1}{6}$ ℞, & hunc numerum 7. atque ita prima pars regulæ absoluta est, quæ ita habet. [*Pro numero incognito in quæstione ponatur 1 ℞, quæ iuxta quæstionis tenorem examinetur, donec Æquatio aliqua inueniatur.*] Satis autem patet ex proposito exemplo, qua ratione iuxta tenorem quæstionis Aequatio inueniẽda sit. Est autem Aequatio, vt hic sumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, siue res varie denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis est inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7. quæ duo variè denominantur. Nam cum duæ res æquales dicũtur, quæ eandem habent denominationem, est ea æqualitas, siue æquatio vel falsa, vt cum dico æquationem esse inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{4}$ ℞, & $\frac{1}{5}$ ℞. vel certe identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prorsus, vt cum dico, æqualitatem esse, seu æquationem inter 4 ℞, & 4 ℞,

*Prima pars regulæ Algebræ.*

*In quo consistat artificiũ regulæ Algebræ.*

*Æquatio quid.*

& 4 ℞,

& 4 ℞, aut inter 7. & 7. Necesse est ergo, vt æqualitas ad regulam Algebræ pertinens sit inter duas res diuersorum nominum.

*Secunda pars regulæ Algebræ.*

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur, si reductione opus fuerit.*] Hoc est, Aequatio inuenta reducatur, si res postulauerit. Quando autem, & quomodo sit reducenda Aequatio, paulo post docebimus. Nunc certum sit, nostram Aequationem inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7. non indigere reductione.

*Tertia pars regulæ Algebræ.*

QVARE subiungit regula. [*Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni Aequatione reperiuntur duo numeri inæqualiter denominati, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maioris characteris Cossici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet, vt diuisio fiat per maiorem numerum Cossicũ, sed per maioris characteris Cossici numerum. Nam Diuisor in hac regula, dum diuidit, abijcit characterem suum, alioquin Quotiens semper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Cossici, quando a charactere denominatur, æqualis sit reliquo æquationis numero, perspicuum est, si alter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero numero sibi æquali semel duntaxat continetur. Cur autem Diuisor huiusmodi abijciat suum signum Cossicum, paulo inferius cap. 11. dicam, vbi hanc diuisionem, quæ in Algebræ regula præcipitur, plenius explanabimus. In nostra Aequatione inuenta inter $\frac{1}{6}$ ℞, & 7 N, maior character Cossicus est ℞, hoc est, maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponens sit 0, illius vero 1. Per exponentes enim cognoscimus, vter character Cossicus maior sit, vel minor. Itaq. diuidendus est hic numerus 7 N, per $\frac{1}{6}$, relicto charactere ℞. fitq. Quotiens 42.

*Quarta pars regulæ Algebræ.*

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretium scilicet radicis in principio positæ, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerũ, qui quærebatur, notum reddet, &c.*] Quando, & quæ radix Quotiẽtis manifestet numerum incognitum, qui quæritur, perpulchre docet maior character Cossicus, per cuius numerum Diuisio instituitur, vt proprio loco docebimus. In proposito nostro exemplo non est extrahenda vlla radix, sed ipse Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaq. numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, est 42. versaturq. propositum problema in progressione Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus est 42. qualis est hæc.

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c.

In hac enim sola apparet, veram esse vltimam æquationem inuentã inter $\frac{1}{6}$ ℞ & numerum 7. Iam vero si huius numeri 42. inuenti sumatur $\frac{1}{2}$. nimirum 21. & $\frac{1}{3}$. videlicet 14. atque hæ partes ex ipso numero 42. detrahantur, fit reliquus numerus 7. id quod in quæstione proposita desiderabatur.

ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, institui potest examẽ, siue probatio, iuxta problematis, vel quæstionis propositæ tenorem. Sed problemate propo-

proposito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, absoluta, declarandæ sunt deinceps singulæ partes regulæ exquisitius, ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

# DE AEQVATIONVM VARIETATE. Cap. IX.

SATIS constat ex iis, quæ dicta sunt, vt ex positione 1 ℞, si ea examinetur secundum exempli pronunciationem, æquatio inter duos numeros inuenienda sit: Nunc autem de hac æquatione plura dicenda erunt, vt intelligamus, quotnam modis vna eademq. æquatio possit variari. Inuenta enim æquatione aliqua, poterunt ex ea plurimæ aliæ constitui. Vt in superiori exemplo, inuenta est æquatio inter $\frac{5}{6}$ ℞, & 7. Et quoniam ponebatur 1 ℞, æqualis toti numero inueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, hoc est, $\frac{3}{6}$ ℞ & $\frac{2}{6}$ ℞, hoc est, 7. æquentur vni radici, ita vt æquatio sit inter $\frac{5}{6}$ ℞ + 7, & 1 ℞. iuxta hanc cōmunem sententiam. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis. Sic etiam si $\frac{1}{6}$ ℞, demātur ex 1 ℞, & 7, ex toto numero 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{5}{6}$ ℞, & 35. &c.

SED vt accuratius varias æquationum commutationes cognoscamus, sciendum est, omnem calculum, qui in hac Algebræ regula instituitur, fieri per lineas, superficies, atque corpora, quæ progrediuntur secundum proportionem aliquam Geometricam ab vnitate inchoatam, vt supra diximus. Apposite igitur variæ æquationes ex hac sequenti figura Geometrica intelligi possunt.

Est enim 1 ℞, linea quædam partium sub certo quodam numero, seu series quædam rerum quarūcunque sub numero aliquo determinato. Vt in hac figura quadrangulari, sex lineæ longitudinis, quarum quælibet partes habet 12; similiterq. duodecim lineæ latitudinis, in quarum qualibet reperiuntur partes 6, videre licet. Vides autem primo, vt 6 ℞, longitudinis æquentur huic numero 72. quia sex lineæ, seu 6 ℞, longitudinis complent totam figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 ℞, latitudinis eidem numero 72, æquales sint. Totam enim figuram habentem partes 72, constituunt 12 ℞, latitudinis, seu 12 lineæ latitudinis, vt patet. Sed in exemplum sumamus 12 ℞, latitudinis, vt æquatio sit inter 12 ℞, & 72. Et quoniam, si ab æqualibus æqualia auferantur, *Variæ permutationes æquationum.*

tur, quæ remanent, æqualia sunt; si ex vtroque numero æquationis auferamus 4 ℞, remanebit adhuc æquatio inter 8 ℞, & 72 — 4 ℞. Nã 8 ℞, latitudinis in figura superiori continent partes 48. at 4 ℞, faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72. relinquuntur 48. Similiter, quoniam si æqualibus æqualia addantur, quæ fiunt, æqualia sunt; si vtriq; parti huius vltimæ æquationis inter 8 ℞, & 72—4 ℞, addamus 10. inueniemus æquationem inter 8 ℞ + 10, & 82—4 ℞. Nam 8 ℞ + 10, faciunt 58, & tantundem efficiunt 82—4 ℞, vt constat. Quod si rursus vtrique parti huius æquationis inter 8 ℞ + 10, & 82—4 ℞, auferamus 4 ℞, remanebit æquatio inter 4 ℞ + 10, & 82 — 8 ℞. Nam ex superiori figura vtraque pars constituit 34. Ita quoque si ex huius æquationis vltimę parte vtraque detrahamus 10. constituetur æquatio inter 4 ℞, & 72 — 8 ℞. Vtraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex vna æquatione inuenta sexcentæ aliæ possunt constitui, non variato valore, seu pretio vnius radicis.

SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto consistit.

*Præceptũ variandi quamcunque æquationem.*

*Vtrique termino Æquationis idem commune addatur, aut ab vtroque idẽ commune subtrahatur; aut certe vterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidatur ve. Ita enim remanebit illæsa æquatio sub terminis mutatis.*

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione in memoriam reuocanda sunt documenta illa, quæ de signis istis +, & —, tradidimus. Variatio superiorum æquationum facta est per additionem, & subtractionem eiusdem numeri ab vtroque termino æquationis: Nunc subijciemus alterum exemplum, multiplicationis, & diuisionis. Sit igitur ex eadem figura superiori inuenta æquatio inter 3 ℞ + 12, & 72 — 7 ℞. Quod si vtrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationẽ inter 6 ℞ + 24 & 144—14 ℞. Nam vterque terminus facit 60. Sic etiam, si vtrunque terminum huius posterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter 1 ℞ + 4, & 24 — 2 $\frac{1}{3}$ ℞. Vt perspicuum est.

## DE REDVCTIONE AEQVATIONIS. Cap. X.

QVANDO in solutione alicuius quæstionis ad Aequationem deuentum fuerit, ita vt per numerũ, maioris characteris Cossici reliquus Aequationis numerus diuidi non possit, vt regula Algebræ præcipit; reducenda est Aequatio inuenta prius, quam Diuisio instituatur. Tunc autem Diuisio fieri non potest, cum maior chara-

character Cossicus, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel etsi solus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, vt ex his exemplis perspicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter 9 ℞ — 12, & 42. Hic vides diuisionem fieri non posse per 9, numerum videlicet maioris characteris Cossici ℞, quia non solum 9 ℞, constituunt alteram æquationis partem, sed 9 ℞ — 12. Sic quoque, si æquatio fuerit inter 9 ℞, & 72 — 3 ℞, non poterit diuisio fieri per 9, numerum scilicet huius characteris ℞, quia licet solus hic numerus 9 ℞, occupet alteram partem æquationis, idem tamen character ℞, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter 9 ℞ + 12, & 78 — 2 ℞, diuisio nulla fieri potest, quod in vtraque parte æquationis reperiatur & character hic ℞, & hic N. Idem iudicium de alijs æquationibus huiusmodi habeto, qualis est inter 1 ʒ — 3 ℞, & 108. Item inter 1 ʒ — 48, & 8 ℞. Itẽ inter 108 + 8 ℞, & 2 ʒ — 12 ℞ + 60. &c. Omnes hæ æquationes, in quibus valor radicis est 12. & similes aliæ, reducendæ sunt ad alias, in quibus maior character Cossicus in altera parte æquationis solus statuatur, & in altera parte amplius non repetatur, & in quibus nullus character Cossicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, seu permutationem particularum æquationis, quã in præcedenti cap. descripsimus. Vt æquatio inter 9 ℞ — 12, & 42, reducitur per restaurationem huius diminuti — 12, hoc est, per additionem huius numeri 12, ad vtramque partem, ad hanc inter 9 ℞, & 54. Ita etiam æquatio inter 9 ℞, & 72 — 3 ℞, per restaurationem huius diminuti — 3 ℞, hoc est, per additionem 3 ℞, ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter 12 ℞, & 72. Pari ratione æquatio inter 9 ℞ + 12, & 78 — 2 ℞, primo per restaurationem diminuti huius — 2 ℞, seu additionem 2 ℞, ad vtrãque partem, reducitur ad æquationem inter 11 ℞ + 12, & 78. Secundo hæc per transpositionem huius additi + 12, hoc est, per subtractionem 12, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 11 ℞, & 66.

*Varia æquationes reducẽdæ.*

*Æquationes ita reducendæ sunt, vt maior character solitarie in vna parte ponatur, &c.*

*Reductiones variarũ æquationum.*

RVRSVS æquatio inter 1 ʒ — 3 ℞, & 108, reducitur per restaurationem diminuti huius — 3 ℞, ad æquationẽ inter 1 ʒ, & 3 ℞ + 108. vtrique enim parti additæ sunt 3 ℞. Sic etiã æquatio inter 1 ʒ — 48, & 8 ℞, reducitur per restaurationem huius diminuti — 48, hoc est, per additionem 48. ad vtrãque partẽ, ad istam inter 1 ʒ, & 8 ℞ + 48. Denique æquatio inter 108 + 8 ℞, & 2 ʒ — 12 ℞ + 60, reducitur primo per restaurationem — 12 ℞, ad æquationem inter 108 + 20 ℞, & 2 ʒ + 60. Secundo hæc per transpositionem + 60, id est, per ablationem 60, ex vtraque parte, reducitur ad æquationem inter 2 ʒ, & 20 ℞ + 48. Itaq. omnis reductio æquationum, vt expeditior fiat, initium sumere debet a restauratione diminuti, si quod fuerit, hoc est, numerus ille, qui hoc signum — gerit, vtrique parti æquationis addi debet. Deinde transponendus est numerus signum + gestans, ex vna parte in alteram, hoc est, ex vtraque parte est detrahendus.

Quæ quidem restauratio, seu additio, & transpositio, seu subtractio, quamuis recte fiat per regulam additionis, & subtractionis, vt ex dictis patet, tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum est.

*Primum præceptum reductionis.*

*Quicquid transponitur, mutat signum.* Hoc est, particula æquationis habens signum —, transposita in alteram partem acquirit signũ +, nimirum additur alteri parti. Particula vero gerens signum +, transposita mutat + in —, id est, subtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmissis obseruatum est. Quod si particula illa, quæ transponitur, habuerit similem denominationem in altera parte, in quam est transponenda, vsurpandum erit secundum hoc præceptum.

*Secundũ præceptum reductionis.*

*Eadem signa subtrahunt, diuersa vero addunt.* Hoc est, si particula æquationis transponenda gerens signum quodcunque ex his duobus +, —, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiusdem denominationis cum eodem signo, subtrahendus est numerus illius particulæ ab hoc numero, relinquendumq. est idem signum, quod habet numerus, a quo fit subtractio: Vnde inchoanda erit transpositio a minori numero. Si vero particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiusdem denominationis cum opposito signo, addendus est numerus illius particulæ huic numero, relinquendumq. est idem signum, quod habet numerus, ad quẽ fit additio. Atque vt vtriusque regulæ vsus melius intelligatur, reducemus adhuc vnam aut alteram æquationem. Sit æquatio inter 6 ꝝ — 10, & 10 ꝝ — 34. quoniam igitur numeri 10. & 34. habẽt idem signum —, propterea, vt minor 10, transferatur, auferendus est numerus 10, ex 34. atque ita remanebit æquatio inter 6 ꝝ, & 10 ꝝ — 24. Rursus quia numeri 10 ꝝ, & 6 ꝝ, idem habent signũ +, idcirco minor 6 ꝝ, a maiori 10 ꝝ, aufertur, vt maneat æquatio inter 0 ꝝ, & 4 ꝝ — 24. Denique transponendo — 24, erit æquatio inter 24, & 4 ꝝ. Sit rursum æquatio inter 54 + 4 ꝝ, & 1 ʒ — 6 ꝝ + 30. Primum quia + 4 ꝝ, & — 6 ꝝ, diuersa signa habent, propterea adduntur 4 ꝝ, ad 6 ꝝ, vt fiant — 10 ꝝ. fitq. æquatio inter 54, & 1 ʒ — 10 ꝝ + 30. Deinde quia 54, & + 30, idem signum + habent, ideo subtrahuntur 30, a 54, vt maneat æquatio inter 24, & 1 ʒ — 10 ꝝ. Tertio transpono — 10 ꝝ, vt fit æquatio inter 1 ʒ, & 10 ꝝ + 24. & sic de cæteris.

*Summa reductionis.*

ITAQVE colligitur ex ijs, quæ diximus, totum negotium reductionis in transpositione particularum esse positum; Transpositionẽ autem istam ex proxime dictis documentis pendere. Oblata enim æquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Cossici non solus vnam partem æquationis constituit, sed ei coniunctus est alius numerus Cossicus minoris denominationis, transferendus est hic in alteram partem, iuxta præceptum quidem primum, si in altera parte, in quam transfertur, non reperiatur numerus eiusdem denominationis: At vero si altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc transpositio, habuerit eiusdem denominationis numerum, peragenda

agenda est hæc translatio iuxta alterum documentum. quæ omnia in superioribus exemplis obseruata esse vides. Denique eousque continuanda est æquatio, addendo, auferendo, & transponendo, quoad maioris characteris numerus in vna parte solitarius conspiciatur.

VOLO autem studiosum hoc loco esse monitum, hæc duo præcepta solum inuenta esse pro compendio reductionis. Nam qui additionis & subtractionis regula vult esse contentus, potest citra omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis consulerem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & subtractionis confundant, id quod sæpe accidere solet, præsertim tyronibus huius artis.

*Securior est reductio sine duobus præceptis prædictis.*

SED agamus iam de reductione illarum æquationum, quæ inter Minutias reperiuntur. Omnis autem eiusmodi æquatio reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in crucem. Sit inuenta æquatio inter has Minutias [illegible] ✕ [illegible]. Multiplicentur in crucem, nempe numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem posterioris; eritq. facta æquatio inter 9 ȝ + 36 ℨ, & 180 ȝ — 990 ℨ. Hoc est, per abbreuiationem characterum, inter 9 ℨ + 36, & 180 ℨ — 990. & per abbreuiationem numerorum, inter 1 ℨ + 4, & 20 ℨ — 110. Quod si fiat reductio per transpositionem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter 19 ℨ, & 114.

*Reductio æquationum inter Minutias, & inter numeros Cossicos irrationales, & numeros absolutos inuentam.*

SIC æquatio inter [illegible] & [illegible], reducitur per multiplicationem in crucem ad hanc inter 8 ℨ + 36, & 12 ȝ — 58 ℨ. Quæ si per transpositionem reducatur, erit eadem æquatio inter 66 ℨ + 36, & 12. ȝ.

QVOD si æquatio inuenta sit inter hanc minutiam [illegible] & quamcunque aliam rem, vt libram, vel vnciam, vel horam, vel gradum, vel minutum, &c. sumenda est hæc res tanquam integrum aliquod, & pro ea vnitas constituenda, cui alia vnitas supponatur, vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter $\frac{628}{186 + 1ℨ}$ & $\frac{1}{1}$ quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 628, & 186 + 1 ℨ.

DEMONSTRATIO reductionis æquationũ inter Minutias perfacilis est. Quoniam enim duæ Minutiæ ponuntur æquales, erit eadem proportio numeratoris Minutiæ prioris ad denominatorem eiusdem, quæ numeratoris Minutiæ posterioris ad denominatorem eiusdem. Quare si Minutiæ per crucem multiplicentur, hoc est, numerator prioris Minutiæ in denominatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in numeratorem posterioris, nempe primus numerus in quartum, & secundus in tertium, producti erunt numeri æquales: atque adeo Aequatio inuenietur inter illos numeros productos. Quod erat demonstrandum.

*Demonstratio reductionis æquationũ inter minutias.*

QVO pacto autem æquatio inter numerum Cossicum irrationalem, & numerum absolutum, vt inter √ȝ 24 ℨ. & 12. vel inter

√ʒ 10 ʒ. & 20. reducenda sit, docebimus ad finem cap. 26. vbi de huiusmodi numeris acturi sumus.

*Characteres abbreuiandi sunt, vt habeatur numerus absolutus in vna parte æquationis.*

SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus sit numerus absolutus, abbreuiandi erunt characteres Cossici, vt cap. 7. docuimus. Vt æquatio inter 2 ʒ, & 12 ꝛe, reducenda est ad æquationem inter 2 ꝛe, & 12.

SIMILITER æquatio inter 1 ʒce, & 1 ß + 35156 ʒʒ, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ, & 1 ꝛe + 35156.

Item æquatio inter 1 ß, & 1 ʒʒ + 35156 ce, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ꝛe + 35156.

Item æquatio inter 1 ʒʒ. & 1 ce + 35156 ʒ, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ꝛe + 35156.

Item æquatio inter 1 ce. & 1 ʒ + 35156 ꝛe, reducenda est ad æquationem inter 1 ʒ. & 1 ꝛe + 35156. & sic de alijs huiusmodi.

VERVM hæc abbreuiatio non est omnino necessaria, vt in cap. 12. dicemus ante extractiones radicum numerorum Cossicorum simplicium.

*Reducenda est æquatio, per diuisionem, vt numerus maioris characteris solitariè positus sit vnitas.*

POSTREMO si facta reductione æquationis, vt maior character Cossicus ponatur solus ex altera parte æquationis, qui maior sit quam ꝛe, qualis est ʒ, vel ce, vel ʒʒ, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Cossici maioris, si non est vnitas; ita vt vnitas ab illo charactere Cossico denominata æqualis sit alteri parti æquationis. Vt si æquatio sit inuenta inter 4 ʒ, & 8 ꝛe + 96. diuidendi erunt singuli numeri per 4. vt reducatur æquatio ad æquationem inter 1 ʒ. & 2 ꝛe + 24.

Item æquatio inter 12 ʒ. & 66 ꝛe + 36. reducenda est per diuisionem ad æquationem inter 1 ʒ. & 5½ ꝛe + 3. &c.

RATIO huius reductionis obscura non est. Cum enim singuli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Cossici, habebunt Quotientes eandem proportionem, quam numeri diuisi. Quam ob rem, quemadmodum inter numeros diuisos, ita & inter Quotientes Aequatio necessario reperietur.

CAETERVM hæc reductio fiet, si iuxta tenorem regulæ Algebræ diuisio instituatur per numerum maioris characteris, ipso charactere abiecto, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuiduntur, vt cap. insequenti dicetur: adeo vt hæc reductio, de qua proximè diximus, superuacanea esse videatur, quandoquidem Diuisio, quæ in regula Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem necessariam esse docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuisio iuxta legem regulæ Algebræ, commodissimè quoque offerat.

# DE DIVISIONE, QVAM PRAECIPIT regula Algebræ. Cap. XI.

*Explicatio plenior diuisionis, quam regula Algebræ præcipit.*

FACTA reductione æquationis, vbi id res postulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebræ, vt per numerum maximi characteris Cossici, abiecto charactere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Cossicis. Est autẽ hæc diuisio compendium quoddam regulæ illius aureç proportionum, quam trium appellant. Nam si exempli gratia 7 ℞. æquales sint huic numero 42. inquirendum est, cui numero 1 ℞. æqualis sit. Quare iuxta doctrinam regulæ trium, multiplicantur inter se 42, & 1 ℞, producunturq. 42 ℞, quibus diuisis per 7 ℞, prodeunt 6. pro æstimatione vnius radicis. Quando enim Cossicus numerus per numerum Cossicum eiusdem characteris diuiditur, producitur numerus absolutum, vt ex ijs constat, quæ cap. 5. scripsimus; quia nimirum exponentes æquales sunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponens numeri absoluti. Hinc est, quod regula Algebræ absolute docet, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse alterum numerum æquationis. Nam hac ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex proposito exemplo constat. Idem enim numerus producitur ex diuisione 42 ℞, per 7 ℞, qui ex diuisione 42, per 7.

SIMILITER si 12 ℥, æquales sint 66 ℞ + 36, inquirendum est, cui numero æqualis sit 1 ℥. Quare multiplicãtur inter se 66 ℞ + 36, & 1 ℥, producunturq. 66 ℭ + 36 ℥: quibus diuisis per 12 ℥, vt iubet regula trium, proueniunt $5\frac{1}{2}$ ℞ + 3. pro pretio vnius Zensi, seu quadrati. Idem hic numerus producetur, si per 12 ℥, abiecto prius charactere hoc ℥, diuidantur 66 ℞ + 36. vt constat: propterea ait regula Algebræ, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse simpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium instituatur. Eodem modo si $\frac{1}{3}$ ℥. & 6 ℞ + $13\frac{1}{3}$. æquales sint, quærendũ est, quanta sit æstimatio vnius Zensi vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebræ, diuidendo singulos numeros per $\frac{1}{3}$, numerum scilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 1 ℥. & 18 ℞ + 40. hoc est, pretium 1 ℥. erit 18 ℞ + 40.

Item si æquatio inueniatur inter 3 ℥ℭ. & 600 ℭ + 10368 indagandum est pretium vnius zensicubi. quod per regulam trium fiet, si dicatur. Si 3 ℥ℭ. dant 600 ℭ + 10368. quid dabit 1 ℥ℭ? Multiplicando enim duos posteriores numeros inter se, producetur numerus 600 ℭℭ + 10368 ℥ℭ. quo diuiso per primum numerum,

vide-

videlicet per 3 ce. fiet Quotiens 200 ce + 3456. eritq. æquatio inter 1 ℨce & 200 ce + 3456. quæ facilius inuenitur, si singuli numeri huius æquationis inter 3 ℨce. & 600 ce + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. scripsimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: sed satis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto charactere, singuli numeri alterius partis æquationis vnà cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

QVOD si diuisor fuerit vnitas denominata a maiore charactere Cossico, non opus est diuisione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt si 1 ℨ, æqualis sit 3 ℞ + 18. &c. Quare operæ pretium est, vt æquatio reducatur, ita vt numerus maioris characteris sit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

QVOD autem, quando vnitas denominatur a maiore charactere, diuisione non sit opus, liquidò constat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 ℨ. & 3 ℞ + 18. si dicatur. Quando 1 ℨ. dat 3 ℞ + 18. quid dabit 1 ℨ? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 ℞ + 18. per 1 ℨ. fit numerus 3 ce + 18 ℨ. qui diuisus per 1 ℨ. facit 3 ℞ + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuisionis liquet.

---

# DE EXTRACTIONE RADICVM, cuius mentionem facit regula Algebræ. Cap. XII.

*Quando quotiens indicat pretium radicis.*

DOCENDVM est vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuisionis numerum ignotum, qui quæritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis, & quænam eundem numerum absconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterum Cossicorum, maior character Cossicus fuerit ℞, tunc numerus quotiens continuo numerũ, qui quæritur, manifestum facit. Vt si 5 ℞, æquales sint 30. facta diuisione 30. per 5. dabit Quotiens, nempe 6, pretium vnius radicis; vt ad initium præcedentis cap. dictum est. Immò quotiescunque numerus Cossicus maioris denominationis æquatur numero Cossico proximè minoris denominationis, diuiso numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnius radicis, etiamsi non sit facta abbreuiatio characterũ: quia huiusmodi æquatio per abbreuiationem characterum reducitur ad æquationem inter ℞ & N. Vt si 5 ß. æquentur 30. ℨℨ. diuisis 30. per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnius radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 ℞, & 30. si characteres abbreuientur.

nientur. Quod etiam ex regula trium manifestum est. Nam si dicatur. Si 5 ß. dant 30 ʒʒ. quid dabit 1 ℞? multiplicando 30 ʒʒ. per 1 ℞. fiunt 30 ß. quibus diuisis per 5 ß. fit Quotiens 6. numerus absolutus. Eademq. ratio est de cæteris numeris Cossicis collateralibus. Ratio huius rei est, quod in omni progressione Geometrica incipiente ab 1. eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proximè antecedentem, quæ secundi ad primum, hoc est, radicis ad vnitatem.

*Quando, & quæ radix sit extrahenda, quando alter numerorum æquationis est numerus absolutus.*

SI vero maximus character Cossicus æquationis, qui solus ex vna parte equationis statuitur, maior sit, quã ℞, & numerus absolutus sit in altera parte, extrahenda est ex Quotiente radix, quam ipse character significat. Vt si character sit ʒ, extrahenda est radix Zensica, siue quadrata: si ce, cubica: si ʒʒ, Zensizensica: si ß, Surdesolida, &c. Quia in huiusmodi æquationibus ex diuisione inuenitur æstimatio vnius zensi, vel cubi, vel zensizensi, &c. Exempli gratia, si æquatio sit inter 2 ʒ, & 144 — 12 ℞, erit (facta prius diuisione, vt 1 ʒ, equalis sit 72 — 6 ℞.) extrahenda radix quadrata ex 72 — 6 ℞. Similiter, si æquatio sit inter 1 ʒ, & 6 ℞ + 72, vel 72 + 6 ℞, eruenda erit quadrata radix ex 6 ℞ + 72, vel ex 72 + 6 ℞. Sic etiam, si æquatio inueniatur inter 5 ʒ, & 720. erit, facta diuisione, quærenda radix quadrata ex Quotiente hoc 144. Item si 10 ce, equales sint 466560, inuenienda erit, facta diuisione, radix cubica huius Quotientis 46656. & sic de cæteris. Vt autem generaliter sciatur, quænam radix eruenda sit ex Quotiente, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus, abbreuiandi sunt characteres, vt æquatio fiat inter N. & numerum Cossicum. Vt si æquatio sit inter 10 ʒce. & 466560 ce. reducetur ea ad æquationem inter 10 ce & 466560. Facta ergo diuisione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656. Et sic de cæteris. Ratio est, quia per diuisionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Cossici, ad quem facta est abbreuiatio per characteres. Nam si dicas. Si 10 ce dant 466560. quid dabit 1 ce? facies ex multiplicatione secundi numeri in tertium, 466560 ce. quibus diuisis per 10 ce. fit Quotiens 46656. valor vnius cubi &c.

*Quanã radix sit extrahẽda, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorũ neuter est numerus absolutus.*

DENIQVE quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, vt cognoscas, quænam radix, facta diuisione minoris numeri Cossici per maiorem, ex Quotiente sit eruenda, etiamsi characteres non abbreuientur: vide quot denominationes in progressione Geometrica inter propositos duos numeros Cossicos sint interiectæ. Nam si vna tantum est intermedia, extrahenda est radix quadrata: si duæ, cubica: si tres, Zensizensica, &c.

*Qualis radix sit extrahẽda, etiamsi characteres non abbreuientur.*

CAETERVM qua arte radices ex numeris absolutis sint extrahendæ, copiose satis in Geometria practica exposuimus, nunc vero explicandum est, quonam modo ex numeris Cossicis sint eliciendę.

*Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus.*

SI igitur extrahenda est radix aliqua ex numero Cossico simplici, sumatur proposita radix illius numeri, relicto charactere, ac si absolutus esset. Deinde exponens characteris eiusdem numeri diuidatur

uidatur

uidatur per exponentem characteris, a quo radix extrahenda denominatur, inuenieturq. exponens characteris, a quo radix quæsita denominabitur. Vt sit inuenienda radix quadrata huius numeri 144 ℨ. Sumpta radice quadrata ipsius numeri 144. quæ est 12. diuidatur exponens huius characteris ℨ, per exponentem characteris ℨ, a quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur, nimirum 2, per 2. proueniet enim 1, pro exponente characteris ꝛe. Est ergo 12 ꝛe. radix quadrata huius numeri 144 ℨ. Nam si hic numerus 12 ꝛe, in seipsum multiplicetur, producetur numerus propositus 144 ℨ.

RVRSVS sit eruenda radix quadrata ex 144 ℨce. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12. diuidatur exponens characteris huius ℨce. nempe 6, per exponentem radicis quadratæ, nimirum per 2. reperieturq. exponens 3. cuius character est ce. Igitur 12 ce, radix quadrata est huius numeri 144 ℨce.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 ce, erit 4 ꝛe. Nam radix cubica numeri huius 64, est 4. & exponente huius characteris ce, nempe 3, diuiso per 3, exponentem scilicet characteris, a quo radix cubica nomen sumit, producitur vnitas, exponens videlicet huius characteris ꝛe.

Item radix quadrata huius numeri 25 ℨℨ, erit 5 ℨ.
Et radix Zensizensica huius numeri 16 ℨℨℨ, erit 2 ℨ.
Et radix Surdesolida numeri huius 32 ℨß, erit 2 ℨ.
Et radix Zensizensica huius numeri 81 ℨℨ, erit 3 ꝛe. &c.

QVOD si vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producatur numerus exponens integer, carebit propositus numerus Cossicus radice illa, quæ desideratur. Vt numerus 25 ce non habet radicem quadratam, vel cubicam, quia etiamsi numerus 25. habeat radicem quadratam, nempe 5. tamen ex diuisione 3, exponentis scilicet huius characteris ce, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus $1\frac{1}{2}$. cui nullus character respondet. Rursus etsi ex diuisione 3, exponentis huius characteris ce, per 3, exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponens characteris huius ꝛe. tamen numerus 25. caret radice cubica. &c.

*Qui numeri Cossici compositi habeant radices.*

QVOD vero attinet ad extractiones radicum ex numeris Cossicis compositis, & diminutis, sciendum est, tunc solum posse certa via & arte ex eiusmodi numeris extrahi radices, quãdo tres numeri Cossici æquationis habent exponentes, qui eundem inter se excessum habeant: hoc est, qui sint Arithmeticè proportionales. Quales sunt sequentes æquationes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.ℨ. | 6ꝛe+72. | Exponentes sunt. | 2. 1. 0. |
| 1.ℨ. | 72—6ꝛe. | Exponentes sunt. | 2. 0. 1. |
| 1.ℨ. | 14ꝛe—48. | Exponentes sunt. | 2. 1. 0. |
| 1.ℨℨ. | 18ℨ+648. | Exponentes sunt. | 4. 2. 0. |
| 1.ℨℨ. | 725—4ℨ. | Exponentes sunt. | 4. 0. 2. |

1.ℨℨ.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.𝔷𝔷. | 43𝔷—41616. | Exponentes ſunt. | 4. | 2. | 0. | |
| 1.𝔷ℭ. | 200ℭ+3456. | Exponentes ſunt. | 6. | 3. | 0. | |
| 1.𝔷ℭ. | 5120—16ℭ. | Exponentes ſunt. | 6. | 0. | 3. | |
| 1.𝔷ℭ. | 8000ℭ—156251. | Exponentes ſunt. | 6. | 3. | 0. | |
| 1.𝔷𝔷𝔷. | 2000𝔷𝔷+185076881. | Exponentes ſunt. | 8. | 4. | 0. | |
| 1.𝔷𝔷𝔷. | 214651701—20𝔷𝔷. | Exponentes ſunt. | 8. | 0. | 4. | |
| 1.𝔷𝔷𝔷. | 20000𝔷𝔷—78461119. | Exponentes ſunt. | 8. | 4. | 0. | |
| 1.𝔷β. | 80β+39609. | Exponentes ſunt. | 10. | 5. | 0. | |
| 1.𝔷β. | 7424—200β. | Exponentes ſunt. | 10. | 0. | 5. | |
| 1.𝔷β. | 2000β—999424. | Exponentes ſunt. | 10. | 5. | 0. | &c. |

Quando exponentes Arithmeticam progreſſionem ſeruantes omnes ſunt maiores quam 0. abbreuiandi ſunt per ſubtractionem minimi numeri exponentis. Vt hæ ſequentes æquationes

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.Cβ. | 725β—4ℭℭ. | Exponentes ſunt. | 11. | 7. | 9. |
| 1.Cβ. | 200𝔷𝔷𝔷+3456β. | Exponentes ſunt. | 11. | 8. | 5. |
| 1.𝔷β. | 200𝔷ℭ+14336𝔷. | Exponentes ſunt. | 10. | 6. | 2. |

reducuntur ad has.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.𝔷𝔷. | 725—4𝔷. | Exponentes ſunt. | 4. | 0. | 2. |
| 1.𝔷ℭ. | 200ℭ+3456. | Exponentes ſunt. | 6. | 3. | 0. |
| 1.𝔷𝔷𝔷. | 200𝔷𝔷+14336. | Exponentes ſunt. | 8. | 4. | 0. |

Et ſic de alijs infinitis dicendum eſt. Ita enim facile cognoſcetur, quænam radix eruenda ſit.

*Qui numeri Coſſici compoſiti nō habeāt radices.*

QVANDO autem exponentes non ſeruant Arithmeticam proportionalitatem, hoc eſt, non habent eundem exceſſum, vt ſi æquatio foret inter 1 ℭ, & 4𝔷+16. vbi exponentes ſunt 3. 2. 0. Vel inter 1ℭ, & 10𝔯+24. vbi exponentes ſunt 3. 1. 0. nondum eſt inuenta ars, qua huiuſmodi radices certò eruantur; quamuis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibuſdam exemplis ſingularibus inuenerint æſtimationem vnius radicis. Raphael autem Bombellus ex quibuſdam etiam æquationibus eiuſmodi, & alijs nonnullis putat ſe inueniſſe, quo pacto eruendæ ſint radices. Franciſcus quoque Vieta dicitur demonſtraſſe regulam generalem pro eiuſmodi radicibus extrahendis: quā quia videre hactenus non licuit, & rationes Bombelli obſcuræ valde ſunt, atque æquationes eiuſmodi, in quibus nimirum plures numeri Coſſici quam duo æquantur vni numero Coſſico, (qualis eſt V.g. æquatio inter 1ℭ+3𝔷+72𝔯 & 34) numero fere infinitæ exiſtunt, & quæ rarò in vſum veniunt, patiunturq., ipſo teſte, non paucas exceptiones, contenti erimus in hac noſtra Algebra ijs, quæ facilem, certam, atque exploratam habent ſcientiam, id eſt, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Coſſicis prioris generis, quando nimirum vnus numerus Coſſicus duobus æquatur, exponenteſq. ſeruant proportionalitatē

Arithmeticam: quippe cum hæ satis sint ad innumera fere numerorum ænigmata dissoluenda.

AC primo quidem agemus de extractione radicum ex ijs numeris, quorum exponentes sunt 2.1.0, vel 2.0.1, quæ omnes quadratæ sunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes sunt 4.2.0. vel 6.3.0. vel 8.4.0. vel 10.5.0. &c. quæ quidem radices sunt vel Zensizensicæ, vel Zensicubicæ, vel Zensizenzésicę, vel Zensurdesolidę, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratã, ac certissimam habent scientiam, qua earum radices inueniantur.

*Extractio radicis quadratæ ex Cossico numero composito vel diminuto.*

HAC igitur arte radices quadratæ eruuntur ex compositis, siue diminutis numeris Cossicis.

1. ***Dimidium numeri radicum sume.***
2. ***Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem subtrahe numerum absolutum, prout signo + vel — fuerit affectus.***
3. ***Ad huius summa, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahe dimidium numeri radicum, prout radicum numerus signo + vel — fuerit notatus. Nam vltima hac summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium vnius radicis quadratæ.***

SIT æquatio inuenta inter 1 ʒ, & 72 — 6 ℞. Facta diuisione, 72 — 6 ℞, per 1, vt iubet regula Algebræ, prodit idem numerus, pretium videlicet vnius Zensi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum sumo dimidium numeri radicum, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo absolutum numerum 72, propterea quod gerit signum +, facioq. 81.

Tertio a radice quadrata huius summæ 81, nempe a 9, detraho dimidium numeri radicum, puta 3. Nam numerus radicum signo — affectus est, relinquunturq. 6. pro æstimatione radicis quæsitę. Quod sic probatur. Si 1 ℞, est 6, erunt 6 ℞, 36, quibus sublatis ex 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

SIT rursus æquatio inuenta inter 1 ʒ. & 6℞+72. Inuenienda igitur est radix quadrata huius numeri 6℞+72.

Primum capio dimidium numeri radicum, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter signum +, quod gerit numerus absolutus, facioq. 81.

Tertio ad radicem quadratam huius summæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicum, nempe 3; affectus enim est numerus radicum signo +, efficioq. 12, pro pretio radicis. Quod ita confirmatur. Cum 1 ℞, est 12, erunt 6 ℞, 72, quibus additis ad 72, fiunt 144, quibus æqualis est numerus quadratus radicis 12.

SIT

SIT denique inuenta æquatio inter 1 ℨ. & 18℞—72. Quærenda ergo est radix huius quadrati 18℞—72.

Primum accipio dimidium numeri radicum, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72, propter signum —, quod præponitur numero absoluto, relinquunturq. 9.

Tertio ad radicem quadratã huius relicti 9, hoc est, ad 3, addo dimidium numeri radicum, vtpote 9. Gerit namq. numerus radicũ signum +. efficioq. 12, pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18 ℞, faciunt 216, si 1 ℞, est 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis est numerus quadratus radicis inuentæ 12.

SED hoc loco monendus lector est, huiusmodi numeros Cossicos Diminutos, in quibus numerus absolutus gerit signum —, habere duplicem radicem, quæ æquationi satisfaciat, maiorem scilicet & minorem. Maior inuenitur, vt proxime dictum est. Minor vero habebitur, si radix quadrata illius relicti ex dimidio numeri radicum detrahatur. Vt in dato exemplo postremo, si 3, radix quadrata huius relicti 9, subtrahatur a 9, dimidio numeri radicum, relinquentur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Cossici 18℞—72. Quod ita constat. 18 ℞, faciunt 108, si 1 ℞, est 6, ablatis igitur 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

*Qui numeri Cossici habeãt duplicem radicem.*

*Quo pacto tũ maior, tũ minor radix inueniatur.*

ITAQ. in huiusmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relicto illo vel addere dimidium numeri radicum, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicum subducere. Non tamen semper vtraque radix propositum problema soluet, sed altera tantum, vt in ænigmate 25. cap. 32. manifestum fiet.

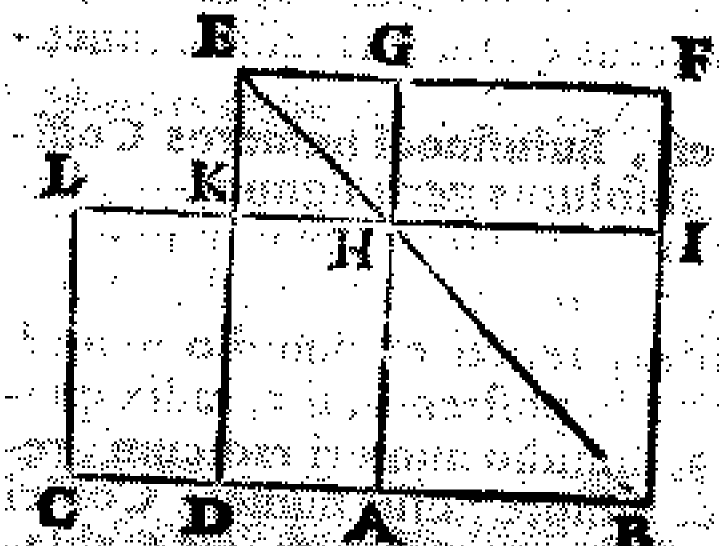
SOLVM numerus ille Cossicus Diminutus habens numerum absolutum signo — affectum. vnicam habet radicem, cuius numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicum æqualis est. Huius enim numeri Cossici radix est dimidium ipsum numeri radicum. Vt si æquatio fit inter 1 ℨ, & 12℞—36. erit radix huius numeri diminuti 12℞—36. dimidium numeri radicum, nimirum 6: quia numerus absolutus 36, æqualis est quadrato dimidij numeri radicum. Nam capiatur dimidium numeri radicum, nempe 6; & a quadrato huius dimidij, vt a 36, detrahantur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoque est 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicum, puta 6, siue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, semper inuenietur radix esse 6, quæ æquationi satisfaciat, vt constat.

EX his perspicuum est, triplicem esse numerum Cossicum, cuius radix quæritur. Aut enim compositus est, cuius tam numerus radicum, quam numerus absolutus gerit signum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicum, vel numerus absolutus signo — est notatus, vt ex tribus exemplis adductis liquido constare potest.

AGE vero, aperiamus rationem huius extractionis radicũ Geometricis demonstrationibus, vt non solum experientia, sed etiam certissima scientia cognoscamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris Cossicis compositis, diminutisve. Repetamus ergo primum exemplum, in quo æquatio erat inter ʒ, & N — ꝛ; vel si restauretur diminutum hoc — ꝛ, inter ʒ + ꝛ, & N.

*Demõstratio extractionis radicũ ex Cossicis numeris compositis, diminutisve.*

SIT AB, latus Zensi, seu quadrati nobis ignotum, quod quęritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum æqualis, quę bifariam secetur in D, vt sit AD, dimidium numeri radicum. Super rectam BD, compositam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicum, describatur quadratum DF, cuius diameter BE. Ducta deinde ipsi DE, parallela AG, quę diametrũ secet in H, ducatur per H, recta IL, ipsi BC, parallela secans DE, in K, occurrensq. rectę, quę ex C, ipsi DE, parallela ducitur, in L.



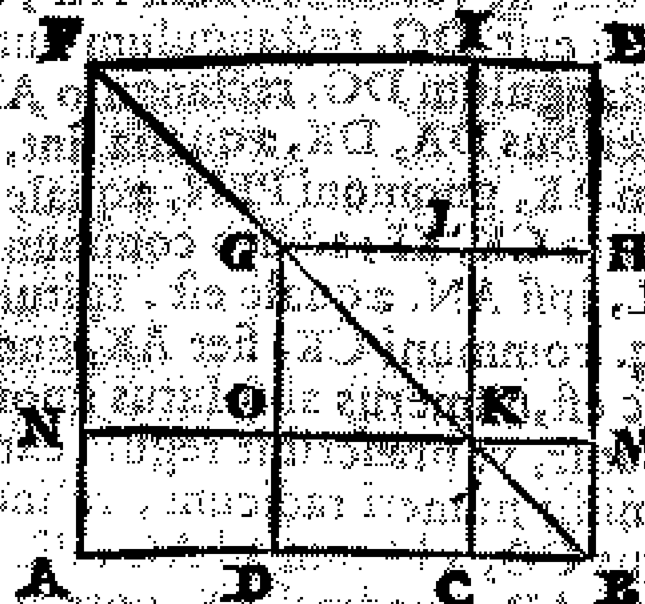

Quoniam igitur AI, KG, quadrata sunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. Eucl. erit rectangulum CH, contentum sub AC, numero radicum, & AH, latere quadrati, quod quęritur, valor, seu precium radicum; (Numerus enim radicum multiplicatus in valore radicis producit omnium radicum valorem. Vt existente vna radice 6, valebunt 5 ꝛ, 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicum, [a] cum ęqualia sint rectangula DH, DL. [b] Cum ergo rectangula DH, HF, ęqualia quoque sint, erunt DH, HF, ęqualia integro radicum pretio. Et quoniam quadratum AI, ęquale ponitur alicui numero absoluto, minus valore radicum: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicum, quarum numerus est AC, ponitur ęquale alicui numero absoluto, erit gnomon GBK, illi numero absoluto ęqualis: qui si addatur ad GK, quadratum dimidij numeri radicum, cognitum erit totum quadratum DF, a cuius latere DB, si auferatur AD, dimidiũ numeri radicum, vt pręcipit regula, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

a 36. primi.
b 43. primi.

SED sumamus iam secundum exemplum, vbi ęquatio erat inter ʒ, & ꝛ + N.

SIT rursus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 1 ʒ, ęqualis ꝛ + N, erit numerus radicum minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicum ęqualis, cuius dimidium AD, vel DC. Descripto ex AB, quadrato AE, vna cum diametro BF, ducatur DG, ipsi AF, parallela secans BF, in G, puncto, per quod agatur GH, ipsi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipsi BE, secans BF, in K, & GH, in L. Denique per K, agatur MN, parallela ipsi AB, secans DG, in O. Eruntq. DH, OL, CM, qua-

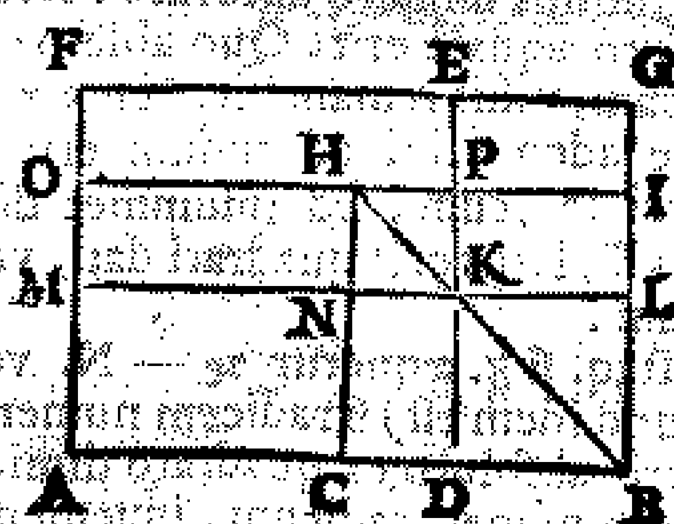
quadrata per coroll. propoſ. 4. lib. 2. Eucl. Quoniam igitur rectangulum AI, comprehenſum [a] ſub AF, latere quadrati ignoti, & numero radicum AC, valor eſt omnium radicum, vt in pręcedenti demonſtratione dictum eſt, ponitur q. quadratum AE, ęquale valori radicum, vna cum numero aliquo abſoluto, erit rectangulũ CE, numero illi abſoluto ęquale. a 36. & 43. primi.




Et quoniam AO, DK, ęqualia ſunt, [b] necnon & DK, KH, ęqualia erunt AO, KH. Addito ergo communi DM, erit rectangulum AM, gnomoni LBO, ęquale. Sed AM, ipſi CE, ęquale eſt, hoc eſt, numero abſoluto. [c] (Sunt enim AK, KE, ęqualia, additoq. communi CM, ęqualia fiunt AM, CE.) Igitur & gnomon LBO, numero abſoluto ęqualis erit: qui ſi addatur ad OL, quadratum dimidij numeri radicum, cognitum erit quadratum DH, cuius lateri DB, ſi adijciatur AD, dimidium numeri radicum, vt regula extractionis radicum iubet, notum fiet latus AB. Quod eſt propoſitum. b 43. primi. c 43. primi.

SVMAMVS denique tertium exemplum, in quo poſita fuit ęquatio inter ʒ, & 2℞ — N. Vel ſi reſtauretur diminutum hoc, — N, inter ʒ + N, & 2℞.

SIT numero radicum ęqualis recta AB, quę biſariam ſecetur in C, & non biſariam in D. Super maiorem partem AD, deſcribatur quadratum ADEF, & perficiatur rectangulum AG. Deinde ex BC, dimidio numeri radicum fiat quadratum BCHI, cuius diameter BH, ſecet DE, in K, puncto, per quod agatur ipſi AB, parallela LM, ſecans CH, in N. Producta quoque IH, ſecet AF, in O, & DE, in P. Eruntq. quadrata DL, NP, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. [d] & rectangulum AH, quadrato CI, ęquale. Siue igitur quadratum datum, quod quęritur, ſit AE, ſiue DL, ſiue CI, ſemper vera erit ęquatio, hoc eſt, erit ʒ, ęqualis radicibus minus aliquo numero abſoluto. vel 1 ʒ, cum aliquo numero abſoluto ęqualis radicibus. d 36. primi.




Sit enim primum quadratum propoſitum AE. Erit ergo rectangulũ AG, contentum ſub latere quadrati AF, & numero radicum AB, valor omnium radicum: Atque adeo cum valori radicum ęquale ſit quadratum AE, vna cum numero abſoluto, vel quadratum AE,

æquale

æquale ſit valori radicum AG, minus numero abſoluto, ex hypotheſi; erit DG, rectangulum numero abſoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG, rectangulo AK, æquale eſt, quod latera DE, DB, lateribus DA, DK, æqualia ſint, propter quadrata AE, DL: Eſt autem AK, gnomoni PBN, æquale. (Cum enim æqualia ſint complementa CK, KI; addito communi DL, erit CL, ipſi DI, æquale: Sed CL, ipſi AN, æquale eſt. Igitur & DI, ipſi AN, æquale erit; additoq. communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale.) Igitur & DG, hoc eſt, numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui ſi auferatur, vt præſcribit regula extractionis radicum, ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, relinquetur notum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicum, conſtituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod eſt propoſitum.

a 43. primi.
b 36. primi.

SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicum, & numero abſoluto eodem manentibus; Erit ergo rectangulum AL, contentum ſub numero radicum AB, & latere quadrati BL, æſtimatio omnium radicum: Ac proinde, cum quadratum DL, vna cum numero aliquo abſoluto, valori radicum æquale ſit, vel quadratum DL, æquale ſit valori radicum AL, minus aliquo numero abſoluto, ex hypotheſi; erit rectangulum AK, numero abſoluto æquale. quod cum æquale ſit gnomoni PBN, vt oſtenſum eſt, erit & numerus abſolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, notum remanebit quadratum NP, cuius latus CD, ex CB, dimidio numeri radicum ſubtractum, notum relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod eſt propoſitum.

POSTREMO datum ſit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, ſub AB, numero radicum, & latere BI, comprehenſum, pretium radicum propoſitarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, vna cum dato numero abſoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero abſoluto. Rectangulum igitur AH, numero abſoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicum, nihil remanebit, cum æqualia ſint rectangula AH, CI; atque adeo nihil addendum erit vel ſubtrahendum a dimidio numeri radicum, ſed ipſummet dimidium numeri radicum, nempe CB, latus erit quadrati dati, vt ante docuimus. Quod eſt propoſitum.

c 36. primi.

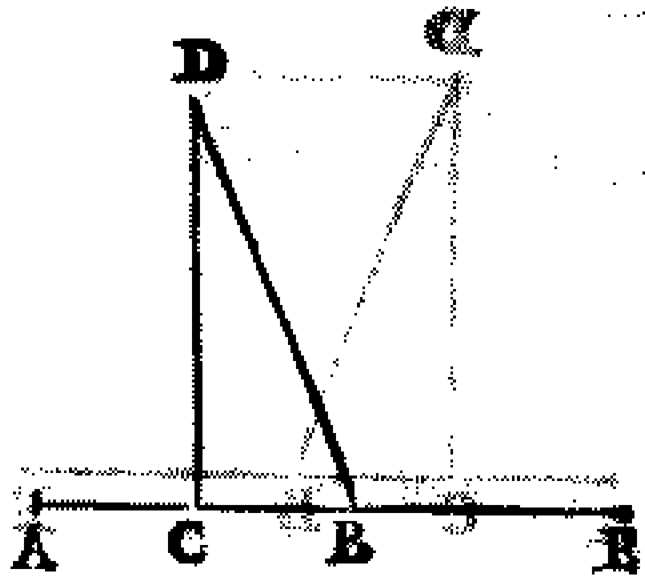
Itaq. ſi ℨ. æquetur ℞ — N. vel æquatio ſit inter ℨ + N, & ℞. (quod idem eſt) ſi radicem numeri, qui relinquitur, ſubtracto numero abſoluto ex quadrato dimidij numeri radicum, addamus dimidio numeri radicum, inueniemus radicem maiorem æquationi propoſitæ ſatisfacientem: Si vero eandem ex dimidio numeri radicum ſubtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propoſitæ: Si denique numerus abſolutus æqualis ſit quadrato dimidij numeri radicum, erit ipſum dimidium numeri radicum radix, quæ inquiritur.

*Demonſtratio alia extractionis radicũ ex*

PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis ſuæ Algebræ adducit alias demonſtrationes non minus elegãtes, quibus prius inueſtigat Geometrice,

metrice, quinam quadratus numerus, vel Zensus, æqualis sit cuicunque numero absoluto, minus quotcunque radicibus, siue qui vnà cum quotlibet radicibus æqualis sit cuicunque numero absoluto: Vel qui æqualis sit quotcunque radicibus, vnà cum quouis numero absoluto: Vel denique qui sit æqualis quotcunque radicibus, minus quolibet numero absoluto, siue qui vnà cum quocunque numero absoluto æqualis sit quotlibet radicibus. *numeris Cossicis compositis, diminutiuis.*

PROPONATVR ergo primum hic numerus Cossicus 55 — 6 ℞. Inueniendum est quadratum huic numero æquale, atque adeo demonstrandum, rectè ex superioribus præceptis, eius radicem quadratam fuisse inuentam. Prius restituatur ablatum illud — 6 ℞, per transpositionem, vt sit Aequatio inter 1 ȝ + 6 ℞, & 55. Sit numerus radicum recta AB, quæ bifariam secetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, æqualis lateri illius quadrati, quod numero absoluto est æquale. (omnis enim numerus, etiam non quadratus, habet in quantitate continua radicem, seu latus, vt propos. 22. lib. 6. Geometricæ Practicæ docui.) connectaturq. recta BD, cui ex CB, producta æqualis abscindatur CE. Dico quadratum rectæ BE, vnà cũ radicibus propositis, quarum numerus est AB, æquale esse numero absoluto, cuius latus quadratum est CD; ac proinde idem quadratum rectæ BE, æquale esse eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propositis, quarum numerus est AB.




[a] Quoniam enim quadratum ex BD, æquale est quadratis ex CD, CB; estq. quadratum ex BD, quadrato ex CE, æquale; erit quoque quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale. [b] Sed quadrato ex CE, æquale est rectangulum sub AE, BE, vnà cum quadrato ex CB. Igitur & rectangulum sub AE, BE, vnà cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatoq. communi quadrato rectæ CB; æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato ex CD. [c] Est autem rectangulum sub AE, BE, æquale quadrato ex BE, & rectangulo sub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vnà cum rectangulo sub AB, BE, æquale erit quadrato ex CD. Cum igitur (posito quadrato ex BE) rectangulum sub AE, BE, numero radicum, & latere quadrati comprehensum sit valor radicum, liquido constat, quadratum rectæ BE, vnà cum radicibus datis, quarum numerus est AB, æquale esse numero proposito absoluto, cuius latus quadratum est CD, ideoq. idem quadratum rectæ BE, æquale esse numero absoluto, cuius latus quadratum est CD, minus valore radicum, quarum numerus est AB. Quod est propositum.

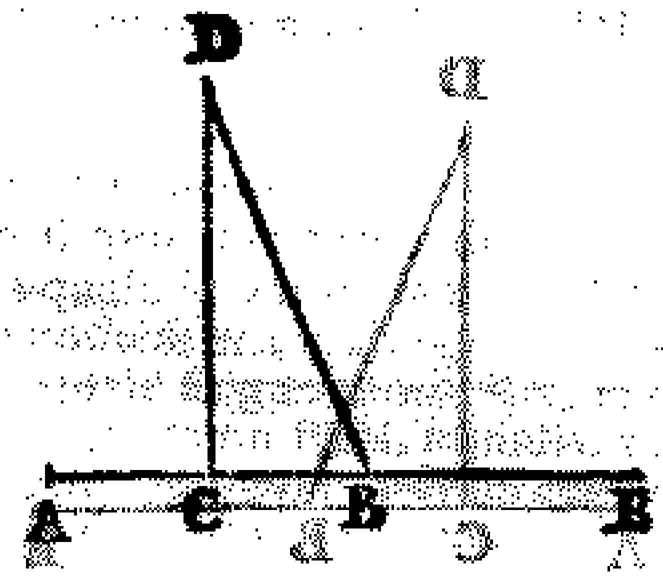
a 47. primi.
b 6. secun.
c 3. secun.

EX hac demonstratione manifestum est, præceptum superius re-

cte

cio præscribere modum inueniendi radicem ex numero hoc Cossico 55 — 6 ℞. Nam si ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, adijciatur numerus absolutus, nempe quadratum ex CD, nota fient
a 47. primi. duo simul quadrata ex CB, CD, a hoc est, quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB, dimidium numeri radicum, cognitum erit latus BE, hoc est, radix quadrata, quæ quærebatur.

SIT rursum Cossicus numerus 6 ℞ + 55. Exhibendum est quadratum illi æquale, demonstrandumq. recte eius radicem esse extractã; iuxta præcepta superiora. Sit rursus recta AB, secta bifariam in C, numerus radicum, & perpendicularis CD, latus quadratum numeri absoluti, & ductæ rectæ BD, æqualis sit recta CE. Dico quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus datis, quarum numerus AB, vna cum numero dato absoluto, cuius quadratum latus CD.

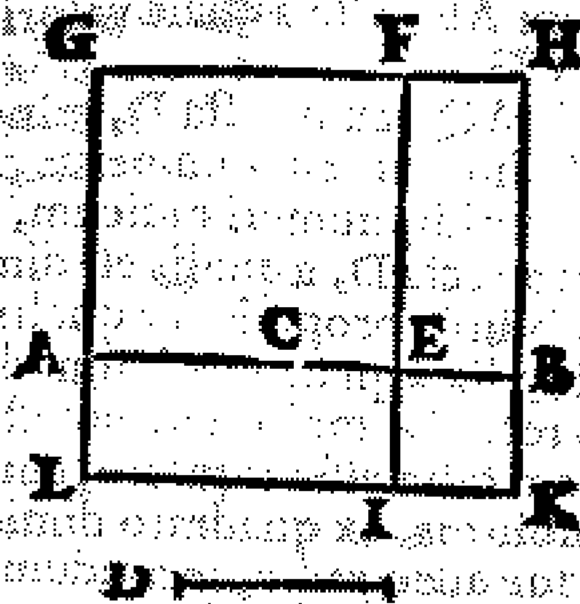



b 47. primi. b Quoniam enim quadratum ex BD, atque adeo & quadratum ex CE, quadratis ex CD, CB, æquale est; c Est autem quadrato ex
c 6. secun. CE, æquale quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE; Erit quoque quadratum ex CB, vna cum rectangulo sub AE, BE, comprehensum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatoq. communi quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato ex CD, hoc est, numero absoluto proposito. Quare cum & rectangulum sub AE, AB, latere quadrati, (posito quadrato ex AE,) & nu-
d 6. secun. mero radicum contentum sit radicum propositarum valor, d sitq. quadratum ex AE, duobus rectangulis sub AE, BE, & sub AE, AB, æquale; perspicuum est, quadratum rectæ AE, æquale esse radicibus, quarum numerus est AB, vna cum dato numero absoluto, cuius latus quadratum CD. Quod est propositum.

LATVS autem AE, ita notum fiet ex superioribus, & hac demonstratione. Ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicum, addatur numerus absolutus, quadratum videlicet rectæ CD; fientq. nota
e 47. primi. duo quadrata simul rectarum CB, CD, e hoc est quadratum ex BD, seu CE. Quod si ad latus CE, cognitum apponatur dimidium numeri radicum, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quærebatur.

SIT denique numerus Cossicus 18 ℞ — 56. cui inueniendum est quadratum æquale, & ostendendum, recte inuentum esse eius latus. Sit, vt prius, numerus radicum recta AB, secta bifariam in C; & recta D, latus sit quadratum numeri absoluti; restituaturq. diminutũ hoc, — 56, vt sit etiam æquatio inter ℥ + 56, & 18 ℞. Sit autem primum recta D, minor dimidio numeri radicum AC, vel CB. Dinidatur recta AB, in E, ita vt D, sit medio loco proportionalis inter segmenta AE, EB, ex ijs, quæ ex Peletario docuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. [a] Erit igitur rectangulum sub AE, EB, quadrato ex D, hoc est, numero absoluto proposito æquale. Dico tam quadratũ rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero absoluto æquale esse radicibus propositis, quarum numerus est AB: ideoq. tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale esse valori radicum propositarum, minus numero absoluto. Describantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturq. rectangula AH, BL. Eritq. tam rectangulum EH, quam EL, contentum sub AE, EB, numero absoluto, hoc est, quadrato rectæ D, æquale. Posito igitur latere quadrati AE, erit rectãgulum AH, contentum sub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propositarum; Manifestum autem est, quadratum AF, vna cum EH, numero absoluto, æquale esse valori radicum AH: ac proinde idem quadratum AF, æquale esse valori radicum AH, minus absoluto numero EH. Posito rursus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, sub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehensum. Perspicuum autem est, quadratum etiam BI, vna cum EL, absoluto numero esse valori radicum BL, æquale: ideoq. idem quadratum BI, æquale esse valori radicum BL, minus numero absoluto EL.

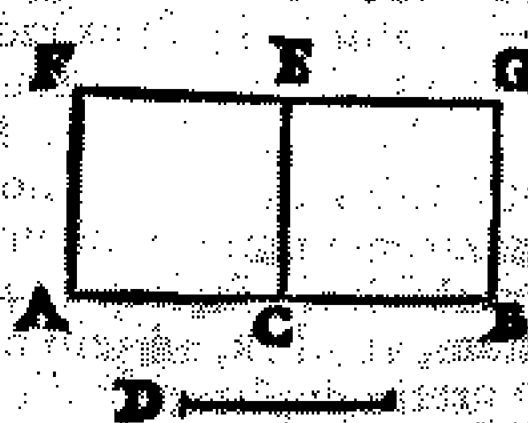
a 17. sexti.




Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. [b] Quoniam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale est quadrato ex AC, vel CB; si ex quadrato rectæ AC, vel CB, id est, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum sub AE, EB, nempe numerus absolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si vero idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

b 5. secun.

SIT deinde recta D, æqualis dimidio numeri radicum AC, vel CB. Dico quadratum ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero absoluto dato æquale esse radicibus propositis. Describatur enim ex AC, quadratum AE, compleaturq. rectangulum AG. eritq. CG, quoque quadratum. Quoniam igitur recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero absoluto; positoq. AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, sub latere




H AC,

AC, & numero radicum AB, contentum, æstimatio, siue pretium radicum. Liquido autem constat, quadratum AE, vna cum CG, numero absoluto, æquale esse radicibus AG: ideoq. quadratum idem AE, esse æquale valori radicum AG, minus numero absoluto CG.

ITAQ. cum recta D, minor est dimidio numeri radicum AC, vel CB, hoc est, cum numerus absolutus æquationis minor est quadrato dimidij numeri radicum, inuenitur duplex radix æquationis. Cũ vero recta D, æqualis est dimidio numeri radicum, id est, numerus absolutus propositus æqualis est quadrato dimidij numeri radicum, est radix æquationis ipsum dimidium numeri radicum. Neque vero recta D, maior esse potest dimidio numeri radicum AC, vel CB. Nam falsa esset æquatio, cum quadratum ipsius D, nempe numerus absolutus, ex quadrato dimidij numeri radicum auferri non posset, atque adeo radix, secundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, si maior esset quam AC, vel CB, nõ posset esse medio loco proportionalis inter duo segmenta rectę AB, vt patet ex demonstratione illa, quam ex Peletario apposuimus ad propos. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non posset quadratum æquationi satisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicum ex numeris Cossicis compositis hoc etiam modo proponere.

*Alius modus extrahẽdi radicem quadratam ex numero Cossico composito, vel diminuto.*

1. *Ad quadratum numeri radicum adde, vel ab eodem subtrahe quadruplum numeri absoluti, prout signo +, vel —, fuerit affectus numerus absolutus.*
2. *Ad huius summæ, vel relicti radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahe numerum radicem, prout radicum numerus signo +, vel —, fuerit notatus. Nã vltima hac summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipsius valor erit vnius radicis.*

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Cossico, 72 — 6 ℞. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti; & ex radice quadrata summæ confectæ 324, hoc est, ex 18, detraho numerum radicum, nempe 6, remanentq. 12, pro valore duarum radicum. Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRSVS ex numero hoc Cossico, 6℞ + 72, eruenda sit radix. Ad quadratum numeri radicum, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti, facioq. 324. Ad huius summæ deinde radicem quadratam, vt ad 18, adijcio numerum radicum, vtpote 6, facioq. 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inueniẽda sit radix huius numeri Cossici, 18℞ + 72.

Ex 324, quadrato numeri radicum, subtraho 288, quadruplum absoluti numeri, relinquunturq. 36. Ad huius relicti radicem quadratam, nempe ad 6, adiungo 18, numerum radicum, conficioq. 24, pro duplicatæ radicis pretio. Vna ergo radix erit 12. Quod si radicem quadratam relicti illius, nempe 6, detraham ex 18, numero radicum, remanebunt 12. pro valore duplicatæ radicis minoris; (Huiusmodi enim numerus Cossicus duplicem habet radicem, vt dictum est) Quare vna radix erit 6.

ATQVE hic modus commodissimus est, quando radicum numerus impar est, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod semper est numerus fractus, &c. *Commoditas huius posterioris modi extractionis.*

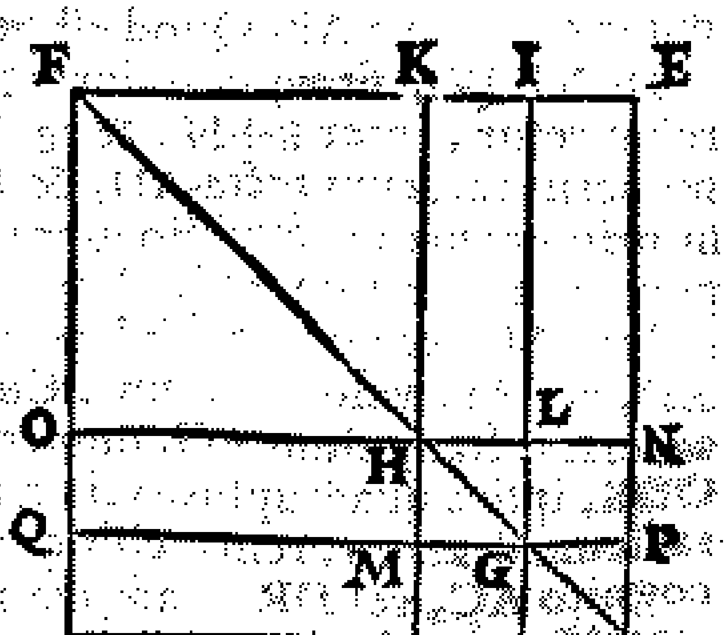
RATIO vero huius operationis hæc est. a Quoniam quadratum numeri radicum quadruplum est quadrati, quod ex dimidio numeri radicum gignitur, quemadmodum & numerus absolutus quadruplicatus numeri absoluti quadruplus est, b fit vt & summa, quæ fit ex quadrato numeri radicum, & quadruplo numeri absoluti, quadrupla sit summæ, quæ prius in alio modo operationis conficiebatur ex quadrato dimidij numeri radicum, & numero absoluto: c efficitur quoque, vt & relictum, quod fit ex detractione quadrupli numeri absoluti ex quadrato numeri radicum, quadruplum sit relicti, quod antea fiebat ex detractione numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri radicum. d Quam ob rem radix quadrata huius summæ, vel relicti, dupla erit radicis quadratæ prioris summæ, vel relicti: quemadmodum & numerus radicum duplus est dimidij numeri radicum. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adijciamus numerum radicum, vel ab eadem subtrahamus eundem, e fiet quoque summa, vel relictum duplum summæ, vel relicti, quod fit ex additione dimidij numeri radicum ad radicem quadratam in priore operatione inuentam, vel ex detractione dimidij numeri radicũ ex priore radice quadrata. Quare dimidium summæ huius, vel relicti pretium erit radicis æquationi satisfacientis.

a Schol. propos. 4. lib. 2.
b 1. quinti.
c 5. quinti.
d Schol. propos. 4. lib. 2.
e 1. vel 5. quinti.

QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio. Sit primum æquatio inter ʒ, & N — 2e, hoc est, si restauretur diminutum, inter ʒ + 2e, & N.

PONATVR AB, latus quadrati ignotum, quod quęritur, quo producto ad partes A, sumatur recta AC, numero radicum ęqualis. Sumatur quoque ex eadem AB, ad partes B, protracta, recta BD, ipsi AB, ęqualis; & ex tota CD, describatur quadratum CDEF, vna cum diametro DF, perficiaturq. figura, vt vides, ita vt similis sit omnino figurę propos. 8. lib. 2. Euclidis. Erit igitur, vt in propos. 8. lib. 2. Eucl. demonstratũ

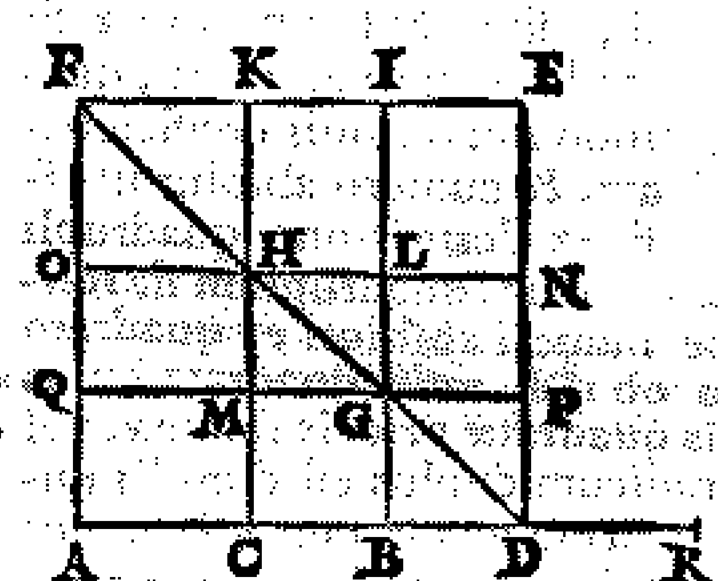
*Demonstratio alterius huius modi extractionis.*



eſt, BP, ML, AG, GN, OK, quadrata, & gnomon ODK, quadruplus rectanguli CG. Quoniam vero AG, ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum CM, contentum ſub numero radicum AC, & latere quadrati AM, valor radicum omnium. Cum ergo æquatio ſit inter ℨ+2℮, & N, erit rectangulum CG, æquale numero abſoluto, atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri abſoluti; qui ſi addatur ad OK, quadratum numeri radicum AC, totũ quadratum CE, cognitum erit; ex cuius latere CD, cognito, ſi tollatur AC, numerus radicum, relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur, cognita. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde æquatio inter ℨ. & 2℮+N. Ponatur AB, latus ignotum quadrati, quod quæritur, & AC, numerus radicum. Producta recta AB, ſumatur BD, ipſi BC, & DR, ipſi AC, æqualis; & ex AD, deſcribatur quadratum ADEF, vna cum diametro DF, perficiaturq. figura, vt prius. Erit rurſum, vt antea, gnomon ODK, quadruplus rectãguli KG, & OK, QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum ſub QM, numero radicum, (a eſt enim QM, ipſi AC, æqualis) & latere quadrati QE, valor omnium radicum. Quocirca cum ſit æquatio inter ℨ, & 2℮+N, erit rectangulum KG, numero abſoluto æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri abſoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicum, notum fiet totum quadratum AE; ad cuius latus AD, cognitum ſi addatur DR, numerus radicum (poſita enim eſt recta DR, numero radicum AC, æqualis) cognita erit tota recta AR, quæ dupla eſt lateris AB, quod quæritur. Si enim æqualibus BC, BD, æquales rectæ adijciantur CA, DR, totæ BA, BR, æquales fient, atque adeo AR, dupla erit ipſius AB. Quod eſt propoſitum.

a 34. primi.

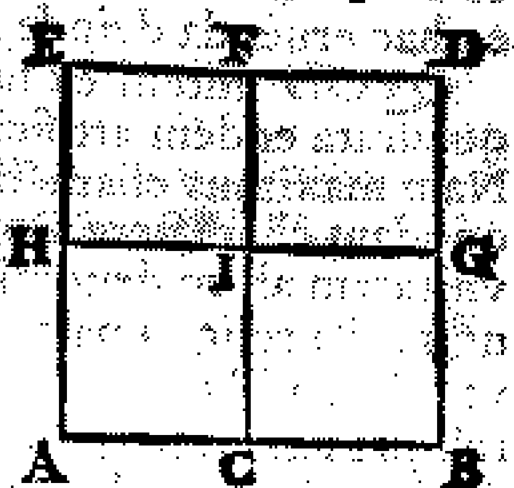



DENIQVE ſit æquatio inter ℨ, & 2℮—N, hoc eſt, ſi diminutum reſtauretur, inter ℨ+N, & 2℮. Repetatur præcedens figura, ſitq. numerus radicum recta AD, & AB, latus quadrati, quod quæritur, ſit primum maius dimidio numeri radicum. Quoniam igitur QI, ponitur quadratum, cuius latus AB, inueniendum eſt, erit rectangulum AI, contentum ſub latere quadrati AB, & numero radicum AD, vel AF, valor radicum. Cum ergo æquatio ſit inter ℨ+N, & 2℮, erit rectangulum AG, numerus abſolutus, atque adeo gnomon ODK, ipſius quadruplus, vti prius; qui ſi ex AB, quadrato numeri radicum dematur, remanebit quadratum OK, notumq́; cuius lateri cognito AC, vel DR, ſi adijciatur numerus radicum AD, fiet nota tota AR, quæ dupla eſt lateris quadrati AB, vt prius eſt demonſtratum.

tum. Quod est propositum.

SIT iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus: eritq. rectangulum AP, contentum sub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio est inter ʒ+N, & 2e, erit rectangulum AG, numerus absolutus, ac proinde gnomon ODK, ipsius quadruplus: qui ablatus ex AE, quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK, eiusq. latus propterea AC, notum fiet. Quod si AC, ex AD, numero radicum dematur, remanebit nota recta CD, quæ lateris BD, dupla est. Quod est propositum.

IAM vero, si quadruplum numeri absoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum, erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod quæritur. Sit enim AB, recta numerus radicum secta bifariam in C, descriptoq. quadrato AD, ducantur rectæ CF, GH, secantes quatuor latera bifariam, & quadratũ in quatuor quadrata æqualia. Si igitur AC, dimidium numeri radicum ponatur latus quadrati, erit rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AH, & numero radicum AB, valor radicum; ac propterea cùm æquatio sit inter ʒ+N, & 2e, erit CG, rectangulum numero absoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD, ex numero radicum AB, descripto æquale. Si igitur quadruplum numeri absoluti, hoc est, quadratum AD, auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB, remanebit 0. quod siue addatur ad AB, numerum radicum, siue ab eo subtrahatur, nota fiet recta AB, quæ dupla est lateris AC. Quod est propositum.




QVOD vero spectat ad extractionem radicum Zensizensicarum, vel Zensicubicarum, vel Zensizenzensicarum, vel Zensurdesolidarum, quando nimirum numeri Cossici æquationis, abbreuiatis tamen eorum characteribus, habent exponentes, qui progressionem Arithmeticam constituant vnam ex his: 4.2.0. vel 4.0.2. vel 6.3.0. vel 6.0.3. vel 8.4.0. vel 8.0.4. vel 10.5.0. vel 10.0.5. &c. in quibus maior character semper componitur ex ʒ. & alio charactere Cossico, vt ex numeris exponentibus manifestũ est: extrahenda est prius radix quadrata, propter characterem ʒ. iuxta modum hactenus descriptum, accommodando omnia ea, quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus est charactere Cossico in illa parte æquationis, ex qua radix eruenda est: perinde ac si æquatio foret inter tres numeros Cossicos characteribus ʒ. 2e & N. affectos. Deinde ex hac radice quadrata inuenta, siue ea rationalis sit, siue irrationalis, elicienda est radix alia, iuxta reliquam partem characteris Cossici maioris, relicto hoc charactere ʒ. (est enim character maior Cossicus compositus) hoc est, eruenda est radix denominata a charactere Cossico, qui in ea parte æquationis cernitur, in qua duo numeri reperiuntur, & qui medius est inter maximum characterem, *Extractio radicis zensizẽsica, zensicubica, &c.*

cterem, & minimum, siue N. Vt si æquatio sit inter 1ȝȝ. & 18ȝ + 648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 18ȝ + 648, propter priorem partem signi Cossici ȝ. non aliter, ac si esset æquatio inter 1 ȝ. & 18 ℛ + 648. quæ radix est 36. ex qua rursus eruenda est radix quadrata, nempe 6. ob reliquam partem characteris Cossici, nimirum ȝ. qui medium locum obtinet inter ȝȝ. & N. Igitur 6. erit radix numeri Cossici propositi.

Eodem modo si sit æquatio inter 1 ȝce, & 5120 — 16 ce. sumenda est prius radix quadrata huius numeri 5120 — 16 ce, & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, si æquatio habeatur inter 1ȝȝȝ, & 20000 ȝȝ — 78461119. accipienda est primum quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zensizensica. Et sic de cæteris.

QVOD autem ex huiusmodi numeris Cossicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo superius vsi sumus, perspicuum est. Nam maximus character Cossicus, cum sit compositus ex ȝ. & alio quodam charactere Cossico siue simplici, siue composito, indicat vnitatem ab eo denominatam esse zensum, seu quadratum alicuius numeri a reliqua parte maximi characteris Cossici denominati, ita vt reliqua illa pars sit tanquam radix prioris partis. Quare cum hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inuestigatur, denominari poterit eius numerus a ℛ, si numerus maximi characteris, nempe vnitas, a ȝ. denominetur: atque adeo iuxta præcepta tradita recte ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. Verbi gratia. In æquatione inter ȝce, & ce + N. cum hic character ȝce. significet zensum vnius cubi, erit vnius cubus radix quadrata illius zensi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicum eiusdem zensi. Et sic de cæteris. Inuenta autem hac radice quadrata, extrahenda est ex ea radix a reliqua parte maximi characteris Cossici denominata, quia illa radix quadrata est numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non absolutus. Quemadmodum qui vult radicem zensicubicam huius numeri 64. inuenire prius debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non est numerus absolutus, sed cubus, cum numerus 64. sit zensus vnius cubi, sumenda erit radicis inuentæ 8. radix cubica, nimirum 2. atque hic numerus radix erit Zensicubica dati numeri 64.

## EXEMPLA DVO,

### *in quibus occurrunt radices surdæ.*

SIT æquatio inter 1 ȝce. & 800ce — 156751. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficioq. 160000. Detraho 156751. & reliqui numeri 3249. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adijcio, efficioq. 457. cuius radix cubica dat radicem Zensicubicam quæsitam, quæ surda est. Eius cubus est 457. qui ductus in se facit Zensicubum 208849. qui æqualis

est

est 800 ce. id est, 365600. minus 156751. vt patet. Idem ferè constabit, si per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua est $7\frac{7}{10}$. inuēta per appositionem duorum ternariorum cifrarum. Eius cubus est $\frac{456533}{1000}$. & Zensicubus 208422. proximè: qui æqualis est fermè 800ce, hoc est, $\frac{365226400}{1000}$. minus 156751. Nam post detractionē reliquus fit numerus $208475\frac{2}{5}$. qui parum differt a 208422. Causa huius inæqualitatis est, quod propinqua illa radix non est vera radix. Felicius ergo æquatio succedit, si operatio per ipsammet radicem surdam instituatur.

ET quoniam numerus 800ce — 156751. duplicem radicem habet, vt supra diximus, propterea quod numerus absolutus signo — affectus est; maior inuenitur, vt dictum est, nimirum radix cubica numeri 457. minor verò reperietur, si superioris numeri 3249. relicti post detractionem numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahamus, & reliqui numeri 343. radicem cubicam sumamus 7. Huius enim Zensicubus est 117649. qui æqualis quoque est 800 ce; id est, 274400. minus 156751. vt manifestum est. Itaq; maior radix huius numeri 800ce — 156751. surda est, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis est, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

SIT rursus æquatio inter 1ȝ. & 8ℛ — 5. Dimidium numeri radicum, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicem quadratam $3\frac{79}{250}$. (quæ inuenta est per appositionem trium binariorum cifrarum.) addo ad dimidium numeri radicum, vt ad 4. efficioq; radicem propinquam $7\frac{79}{250}$. numeri propositi 8ℛ — 5. Eius quadratum est $53\frac{32741}{62500}$. quod ferè æquale est 8ℛ — 5. quippe cum 8ℛ — 5. efficiant $53\frac{66}{125}$.

RADIX minor eiusdem numeri 8ℛ — 5. (Habet enim duplicem radicem, propter signum —. quod numerus absolutus gerit, vt supra diximus) est $\frac{171}{250}$. quæ habetur, si reliqui numeri superioris 11. radix propinqua $3\frac{79}{250}$. ex 4. dimidio numeri radicum detrahatur. Quadratum radicis $\frac{171}{250}$. est $\frac{29241}{62500}$. quod ferè æquale est 8ℛ — 5. Nam 8ℛ — 5. conficiunt $\frac{59}{125}$. qui numerus illum quadratum superat hoc fracto numero $\frac{259}{62500}$. qui minor est, quam $\frac{1}{241}$.

FELICIVS quoque æquatio succedet, si per radices surdas operari velimus. Nam maior radix est 4 + √ȝ 11. Minor vero 4 — √ȝ 11. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis — 5. efficit 27 + √ȝ 704. hoc est, $53\frac{32}{60}$. proximè. Huius verò tam quadratum, quam octuplum radicis — 5. conficit $\frac{28}{60}$. proximè, nimirum 27 — √ȝ 704. Ratio porrò huius operationis per radices surdas intelligetur cap. 23. in algorithmo surdorum numerorum.

Multi-

Multiplicationes ita formantur.

| | |
|---|---|
| 4 + √ȝ 11 | 4 — √ȝ 11 |
| 4 + √ȝ 11 | 4 — √ȝ 11 |
| + √ȝ 176 + 11 | — √ȝ 176 + 11 |
| 16 + √ȝ 176 | 16 — √ȝ 176 |
| summa. 27 + √ȝ 704. | Summa. 27 — √ȝ 704. |
| 4 + √ȝ 11 | 4 — √ȝ 11 |
| 8 | 8 |
| 32 + √ȝ 704 | 32 — √ȝ 704 |
| Demptis 5. remanent | Demptis 5. remanent |
| 27 + √ȝ 704 | 27 — √ȝ 704 |

Posui duo hæc exempla, vt videas, non minus veram esse regulam Algebræ a nobis traditam in numeris surdis, quam in rationalibus.

*Quando aliquando quæstio aliqua nō soluitur, culpa in Arithmeticum, non autem in Algebram transferenda est.*

IAM verò, si quando æquatio occurrat, quam resoluere nescias, culpa transferenda non est in artem Algebræ, sed in te potius, qui non omnium æquationum scientiam perdidicisti. Verbi gratia. Si incides in æquationem inter 1 ce. & 3ȝ+2℞+8. & nescias ex hoc numero 3ȝ+2℞+8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, nō autem regulæ Algebræ, quæ docet, si ex illo numero radix cubica extrahatur, quæstioni satisfactum esse. Est autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus est 64. qui æqualis est tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id est, 8. & octo vnitatibus. Idem iudicium habeto de æquatione inter 1 ce. & 196ȝ+147. Item inter 1ce. & 30℞+133. Quia enim exponentes denominationum non seruant proportionem Arithmeticam, nondum est inuenta ars, qua resolui possint, cum tamen sint solubiles. Nam in vtraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices surdæ, quarum doctrinam non perfecte calles, non erit vitio vertendum scientiæ Algebræ, si quæstio proposita maneat adhuc ignota. Id quod in duobus exemplis superioribus perspicuum esse potest, in quibus, vt æquatio proposita explicaretur, opus fuit, per numeros surdos, siue irrationales, operationem instituere.

SAEPENVMERO etiam accidit, vt in quæstionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometriæ, vel alterius cuiuspiam scientiæ, vt infra, quando varias quæstiones proponemus dissoluendas, perspicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina satis non fuerit exercitatus, frustra se ad quæstionis propositæ explicationem accinget. Nunquam enim ea scientia destitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebræ, sed ipsius accidere, pro certo tenendum est.

QVEM-

QVEMADMODVM si forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri surdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is, qui per eam regulam ratiocinationem instituit, ignarus sit doctrinæ illorum numerorum, ac proinde quæstionem propositam soluere nequeat; accusanda non est ipsa regula, sed artifex. Cum enim prædicta regula iubeat multiplicare secundum numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quæstionis solutionem, culpa erit artificis, si operari nesciat per numeros surdos, aut fractos, non autem ipsius regulæ. Vt si proponatur hæc quæstio. 2. dant √℥ 3. quid ergo dabit √℥ 12? certum est, eum, qui nesciat multiplicare, ac diuidere radices surdas, quæstionem non posse soluere. Secundus enim numerus √℥ 3. ductus in tertium, id est, in √℥ 12. facit √℥ 36. qua diuisa per primum numerum 2. fit Quotiens √℥ 9. hoc est, numerus 3. Eadem ratione regula Algebræ docet, quid agendum sit in qualibet quæstione proposita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiamsi artifex enodare nesciat, nihil tamen Algebræ regula de sua firmitate, ac robore amittit, sed tota culpa in artificem reijcienda est.

---

# DE MVLTITVDINE REGVLARVM Algebræ, quam alij auctores introducunt; Cap. XIII.

VIDISTI hactenus, opinor studiose lector, vnicã nostram regulam Algebræ perfectè, planèq. nos docere, qua ratione quamlibet quæstionem propositam euoluere debeamus: quippe quæ præcipiat, vt 1 ℞, quæ pro numero inuestigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quæstionis tenorem examinemus, donec in æquationem aliquam incidamus duorum numerorum. Deinde, æquatione huiusmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione æquationis tradidimus, per numerum maioris characteris Cossici reliquum æquationis numerum diuidamus; ac tandem ex Quotiente radicem æquationi congruentem extrahamus, si opus est. Vt autem te non lateat, quam varias alij scriptores regulas Algebræ tradant, operæ pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica nostra, quid inter nostram, & multiplices aliorum regulas intersit, intelligas.

ALII ergo scriptores æquationes illas potissimum considerant, quæ inter tres primos terminos progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis, hoc est, inter Numerum, Radicem, atque Quadratum, siue Zensum, reperiuntur. qui quidem tres termini sex possunt modis inter se æquari. Aut enim æquatio est inter ℨ. & ℞: aut

*Inter quos numeros alij potissimũ æquationes obseruent.*

*Tres simplices æquationes.*

*Tres compositæ æquationes.*

inter ꝛ. & N: aut inter ȝ. & N. quæ tres æquationes ab illis simplices dicuntur, quod solum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter ȝ+ꝛ. & N: aut inter ȝ. & ꝛ+N: Vel (quod idem est) inter ȝ. & N+ꝛ. Aut denique inter ȝ+N & ꝛ: quæ tres æquationes ab eisdem compositæ vocantur, propterea quod in ijs semper duo termini vni termino adæquantur. Pro his sex æquationibus sex regulas præscribunt.

## REGVLA PRIMA.

*Quãdo æquatio est inter ȝ & ꝛ.*

QVANDO reperitur æquatio inter ȝ. & ꝛ. diuiso numero signi ꝛ. per numerum signi ȝ. Quotiens exhibet pretium 1 ꝛ. Vt si 5 ȝ. æquales sint 30 ꝛ. diuisis 30. per 5. prodibit Quotiens 6. pro æstimatione vnius radicis. Nam quadratum huius radicis est 36. atque idcirco 5 ȝ. faciunt 180. quantum nimirum faciunt 30 ꝛ.

## REGVLA II.

*Quãdo æquatio est inter ꝛ. & N.*

QVANDO æquatio reperitur inter ꝛ. & N. diuiso numero absoluto per numerum signi ꝛ. procreabitur in Quotiente pretium 1 ꝛ. quemadmodum in 1. regula. Vt si 5 ꝛ. æquales sint 30. diuisis 30. per 5. exit Quotiens 6. pro valore 1 ꝛ. Nam radix 6. quinquies sumpta facit 30.

## REGVLA III.

*Quãdo æquatio est inter ȝ. & N.*

QVANDO inter ȝ. & N, æquatio deprehenditur, diuiso numero absoluto per numerum signo ȝ. affectum, habebitur in Quotiente valor 1 ȝ. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1 ꝛ. Vt si æquatio sit inter 4 ȝ. & 144. diuisis 144. per 4. prouenit Quotiens 36. pro valore 1 ȝ. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ est 6. offeret pretium 1 ꝛ. Nam quadratum numeri 6. est 36. quo multiplicato per 4. fit numerus 144.

## REGVLA IIII.

*Quãdo æquatio est inter ȝ+ꝛ. & N.*

QVANDO æquatio occurrit inter ȝ+ꝛ. & N. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, productoq. numerus absolutus addendus. Nam si ex huius aggregati radice quadrata dematur semissis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1 ꝛ. Vt si æquatio constituatur inter 1ȝ+12ꝛ. & 85. multiplicabimus 6. semissem videlicet numeri radicum, in se, productoq. 36. adijciemus 85. vt fiat 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. si subducatur semissis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 1ꝛ. Nam 1 ȝ. est 25. additis autem 12 ꝛ. videlicet 60. fit numerus absolutus 85. vt proponitur.

REGV-

## REGVLA V.

QVANDO æquatio instituitur inter ʒ. & ℞+N, vel inter ʒ. & N+℞. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & producto numerus absolutus adijciendus. Nam si ad huius aggregati radicem quadratam addatur semissis numeri radicum, cõstabitur æstimatio 1 ℞. Vt si æquatio ponatur inter 1 ʒ. & 6℞+16. vel inter ʒ. & 16+6℞. ducemus 3. id est, semissem numeri ℞. in se, ac producto 9. adijciemus numerum absolutum 16. vt fiant 25. Ad huius enim numeri radicem quadratam 5. si addatur semissis numeri radicum, nimirum 3. constabitur numerus 8. pro pretio 1 ℞. Nam eius quadratum est 64. qui numerus æqualis est 6 ℞. id est, 48. vna cum 16. vt patet.

*Quãdo æquatio est inter ʒ & ℞+N.*

## REGVLA VI.

QVANDO denique æquatio reperitur inter ʒ+N. & ℞; multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & ex producto auferendus numerus absolutus propositus. Nam si ad radicem quadratam reliqui numeri adijcias semissem numeri radicum, vel ex hac semisse eandem radicem detrahas, conficies pretium 1 ℞. ita vt eiusmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem scilicet ac minorem. Vt si proposita sit æquatio inter 1ʒ+21. & 10℞. ducemus 5. semissem numeri radicum in se, & ex producto numero 25. auferemus numerum absolutum 21. Nam si ad reliqui numeri 4. radicem quadratam 2. addemus semissem numeri radicum, hoc est, 5. efficiemus 7. valorem maioris radicis: Et si eandem radicem 2. subtrahemus ex 5. nimirum ex semisse numeri radicum, reliqua fient 3. pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7. quadratum est 49. & additis 21. fit numerus 70. qui æqualis est 10℞. At vero minoris radicis 3. quadratum est 9. & additis 21. fit numerus 30. qui æqualis est 10 ℞. vt liquet.

*Quãdo æquatio est inter ʒ+N. & ℞.*

PORRO quando plures, vel pauciores zensi, quam 1. in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum signo ʒ. affectum, vt æquatio fiat inter 1 ʒ. &c. quod & nos faciendum esse præcepimus. V. g. si æquatio detur inter 3ʒ+63. & 30. ℞. diuidendi erunt singuli numeri per 3. vt æquatio fiat inter 1 ʒ+ 21. & 10 ℞: ac deinde regula 6. vsurpanda. Sic si detur æquatio inter $\frac{1}{2}$ ʒ. & 3℞+8. Vel inter $\frac{1}{2}$ʒ. & 8+3 ℞. si numeri singuli diuidantur per $\frac{1}{2}$. inuenietur æquatio inter 1 ʒ. & 6 ℞+16. vel inter 1 ʒ. & 16+6 ℞. quæ per 5. regulam explicabitur.

*Quando in æquatione reperiuntur plures, pauciores-ve zensi.*

HAE ergo sunt 6. regulæ ab omnibus fermè auctoribus traditæ. Omnes enim aliæ æquationes inter alios numeros Cossicos, qui diuersi sunt a ʒ. ℞. & N. ad prædictas 6. reducuntur; vt frustra nonnulli scriptores plures regulas præscribant. Nã si huiusmodi æqua-

*Quo pacto aliæ æquationes ad 6. superiores regulas reuocentur.*

tiones occurrant, in quibus numeri exponentes characterum seruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreuiandi erunt characteres, vt supra dictum est, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus absolutus reperiatur: Deinde obseruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenſizenſicæ, Zenſicubicæ, &c. ſcripſimus: quando videlicet exponentes ſeruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2.0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

*Præſtantiorẽ eſſe vnicã noſtram regulã Algebræ ſex aliorum regulis.*

QVOD ſi rem attentius introſpicere velimus, facile deprehendemus, vnicam noſtram Algebræ regulam longè eſſe præſtantiorem ſupradictis 6. regulis aliorum: quippe cum in noſtra fiat ſemper reductio æquationis ad 1 ℨ. in vna parte æquationis, ac proinde ſigna + & —. in altera æquationis parte plene, atque abundè nos inſtruant, quando fieri debeat additio, & quando ſubtractio. quod in ſuperioribus 6. regulis non tam clarè apparet.

*Æquatio ſimplex, & compoſita quæ.*

QVEMADMODVM autem ſcriptores Algebræ æquationes priorum trium regularum, ſimplices appellant, trium vero poſteriorum regularum æquationes compoſitas, vt paulo ante diximus: ita quoque nos in iis, quæ ſequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, ſimplicem nominabimus, compoſitam vero eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

---

## QVAESTIO PROPOSITA VTRVM poſſibilis ſit, nec ne, an vero inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipſa operatione, quæ per Algebræ regulam fit, cognoſcatur. Cap. XIIII.

*Quo pacto cognoſcatur, nũ quæſtio ſit poſſibilis, an impoſſibilis.*

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebræ hanc habere excellentiam, vt in ipſo opere nos edoceat, num quæſtio, quæ proponitur, ſolui poſſit, nec ne: docendum iam paucis erit, qua id ratione fiat. Quotieſcunque igitur in diſſoluenda per Algebræ præcepta quæſtione aliqua incidimus in æquationem aliquam impoſſibilem, vel nugatoriam, atque ineptam, pronunciabimus quæſtionem ſolui nulla ratione poſſe: vel certè eſſe nugatoriam, & ineptam. quod nonnullis exemplis declarabitur.

*1. quæſtio impoſſibilis.*

1. *Quæratur numerus, qui ductus in 3. & hic productus in ſe, tantum faciat, quantum ex ipſo numero in ſe multiplicato, & ex hoc producto in 5.*

PONA-

PONATVR quæsitus numerus 1℞. quæ ducta in 3. facit 3℞. & hic productus in se, facit 9ʒ. qui numerus debet esse æqualis ei, qui fit ex 1℞ in se, & ex producto in 5. Fit autem ex 1℞ in se, 1ʒ. & hic numerus in 5. ductus facit 5ʒ. Inuenta ergo est æquatio inter 9ʒ. & 5ʒ. quæ est impossibilis. Quapropter enunciabimus, quæstionem propositam esse impossibilem.

*2. Diuidatur numerus 12. in tales duas partes, vt ⅓. vnius cum ¼. alterius efficiat 4.* 2. *quæstio impossibilis.*

PONATVR pro vna parte 1℞. eritq. altera 12 — 1℞. Tertia pars illius est ⅓℞. & quarta pars huius est 3 — ¼℞. quę simul efficiunt 3 + $\frac{1}{12}$℞. (Nam ex + ⅓℞. & — ¼℞. fit $\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia esse debent numero 4. Ablatis vtrinque 3. erit æqualitas inter $\frac{1}{12}$℞. & 1. Igitur diuisa 1. per $\frac{1}{12}$. fiet 1℞ 12. atque hæc est prima pars numeri 12. & altera pars 0. quod est ineptum. Impropriè tamen ⅓. illius, nimirum 4. cum ¼. huius, id est, 0. cum 0. facit 4.

QVOD si, positis eisdem partibus 1℞. & 12 — 1℞. accipiamus ¼. prioris, nempe ¼℞. & ⅓. posterioris, videlicet 4 — ⅓℞. quę partes simul conficiunt 4 — $\frac{1}{12}$℞. (quod ¼℞. & — ⅓℞. faciant — $\frac{1}{12}$℞. vt ex cap. 4. constat) quæ æqualia non possunt esse numero 4. Ergo neque hoc modo quæstio possibilis est.

*3. Diuidatur numerus 10. in tales duas partes, vt ex ductu vnius in alteram producantur 26.* 3. *quæstio impossibilis.*

PONATVR pro vna parte 1℞. eritq. altera 10 — 1℞. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 10℞ — 1ʒ. qui productus æqualis esse debet numero 26. Addito 1ʒ. vtrinque, fiunt 10℞. æquales 1ʒ + 26. ablatisq. 26. vtrinque, erit æqualitas inter 1ʒ. & 10℞ — 26. Ex hoc numero, qui æqualis est 1ʒ. extrahemus radicem quadratam hoc modo, vt supra docuimus. Semissis radicum est 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non possunt 26. vt vult signum —. Igitur dicemus, quæstionem solui non posse.

*4. Inueniantur duo numeri, vt ex ductu vnius in alterũ fiat numerus triplus summæ ipsorum.* 4. *quæstio impossibilis.*

PONATVR vnus 1℞. & alter 2. vnitates. Ex 1℞. in 2. fit numerus 2℞. qui triplus esse debet summæ ipsorum, quæ est 1℞ + 2. Ergo summa hæc triplicata, nimirum 3℞ + 6. æqualis debet esse 2℞. quod falsum est. Impossibilis igitur est quæstio proposita, si alter numerorum constituatur 2. Si pro secundo numero positæ fuissent

plures

plures vnitates, quam in denominatore proportionis datæ continẽtur, nimirum 4. vel 5. vel 6. &c. quæstio solui posset. Nam posito secundo numero 4. inueniretur 1 ℞. esse 12. atque ita duo numeri quæsiti essent 12. & 4. qui inter se multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus est summæ ipsorum, quæ est 16.

*5. quæstio impossibilis.*

*5. Quæratur numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipsius quadratum, & summa ex ipso numero, & eius quadrato collecta sit 7.*

PONAMVS numerum esse 1 ℞. quæ multiplicata per 3. facit 3 ℞. qui numerus æqualis debet esse quadrato ex 1 ℞. producto, nimirum 1 ℨ. eritq. vnius radicis pretium 3. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc est, in se ipsum, procreat eius quadratum 9. Sed quoniam hic quadratus cum sua radice 3. conficit 12. non autem 7. dices quæstionem esse impossibilem. quod etiam ex ipsis æquationibus constat. Nam 1 ℞. cum suo producto 3 ℞. facit 4 ℞. quæ æquales esse debent 7. atque ita 1 ℞. erit $\frac{7}{4}$. Et quia 1 ℞. cum suo quadrato, id est, cum 1 ℨ. etiam æqualis debet esse numero 7. erit æquatio inter 1 ℨ. + 1 ℞. & 7. hoc est, (ablata 1 ℞. vtrinque) inter 1 ℨ. & 7 — 1 ℞. inuenieturq. 1 ℞. esse $\sqrt{7\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$. quæ a priori valde differt. Immo si tam 4 ℞. quam 1 ℨ. + 1 ℞. æquales sunt 7. erunt bis 7. id est, 14. æquales 1 ℨ. + 5 ℞. hoc est, æquatio constituetur inter 1 ℨ. & 14 — 5 ℞. eritq. 1 ℞ 2. quæ ab vtraque superiori longè etiam differt. Denique si tam 4 ℞. quam 1 ℨ. + 1 ℞. æquales sunt 7. erit etiã æqualitas inter 4 ℞. & 1 ℨ. + 1 ℞. ablataq. vtrinque 1 ℞. erunt 3 ℞. æquales 1 ℨ. Pretium ergo 1 ℞. erit 3. Quocirca cum tam variæ æstimationes 1 ℞ inueniantur, quæstio solui non poterit, præsertim cum per nullam radicum inuentarum quæstioni satisfiat, nisi priori eius parti per radicem 3.

*6. quæstio impossibilis.*

*6. Quæratur numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis sit 12. radicibus eiusdem quadrati.*

PONATVR numerus esse 1 ℞. Eius quadratus erit 1 ℨ. Igitur 1 ℨ. + 40. æqualia sunt 12 ℞. hoc est, 1 ℨ. æqualis erit 12 ℞ — 40. Sumatur semissis numeri radicum, nimirum 6. Et quia ab huius semissis quadrato, id est, ex 36. numerus 40. detrahi non potest, erit quæstio impossibilis.

*7. quæstio possibilis quidẽ, sed nugatoria*

7. IAM vero si quando accidat, æquationem inuentam esse inter duos numeros Cossicos æquales, eiusdemq. denominationis, quæstio solui poterit per quemuis numerum.

*Quando q̃stio per quemuis*

*Vt si quæratur numerus, quo multiplicato per 2. & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem*

ei,

*ei, qui ex numero in seipsum ducto producitur, & ex producto in 4.* *numerū solui possit.*

PONATVR numerus esse 1 ℞. Ex 1 ℞. in 2. fiunt 2 ℞. & ex 2 ℞ in se fiunt 4 ℨ. Et quia 1 ℞ ducta in se gignit 1 ℨ. & ex 1 ℨ. in 4. fiunt 4 ℨ. inuenta erit æquatio inter 4 ℨ. & 4 ℨ. quæ nugatoria est & inepta. Quæstio igitur exerceri poterit in omni numero. Nam V. g. ex 10. in 2. fiunt 20. & ex 20. in se fiunt 400. quantum videlicet fit ex 10. in se, & ex producto 100. in 4.

8. *Item numerus 10. diuidendus sit in tales duas partes, vt numerus, qui fit ex vna parte in totum numerum, æqualis sit quadrato eiusdem partis, vna cum numero, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.* *8. quæstio possibilis, sed nugatoria.*

PONATVR prima pars esse 1 ℞. ideoq. altera 10 — 1 ℞. Et quia ex priori parte, id est, ex 1 ℞. in totum numerum 10. fiunt 10 ℞: Ex eadem autem parte in se fit 1 ℨ. & ex 1 ℞ in 10 — 1 ℞ fiunt 10 ℞ — 1 ℨ. quæ addita ad 1 ℨ. fiunt 10 ℞. quia vt 1 ℨ addatur ad — 1 ℨ. debet fieri subtractio, vt in additione dictum est. Igitur inuenta est æquatio inter 10 ℞. & 10 ℞. quæ similiter nugatoria est fieriq. potest, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocunque in duas partes distributo, vt demonstratum est ab Eucl. lib. 2. propos. 3. Quòd si altera pars 10 — 1 ℞ ducatur in totum numerum 10, fiunt 100 — 10 ℞. Si vero eadem pars in se ducatur, fiunt 100 — 20 ℞ + 1 ℨ. & duæ partes 1 ℞. & 10 — 1 ℞ inter se multiplicatæ faciunt 10 ℞ — 1 ℨ. quæ cum 100 — 20 ℞ + 1 ℨ. faciunt 100 — 10 ℞. quæ æqualia esse debent 100 — 10 ℞. producto scilicet secundæ partis in 10. quæ æquatio nugatoria quoque est.

9. *Sit rursum diuidendus numerus 10. in tales duas partes, vt producti ex toto numero 10. in ipsas partes sint simul æquales quadrato totius numeri.* *9. quæstio nugatoria, quāuis possibilis.*

PONATVR vna pars 1 ℞. ideoq. altera 10 — 1 ℞. Ex toto numero 10. in 1 ℞. & 10 — 1 ℞ fiunt 10 ℞. & 100 — 10 ℞. qui numeri simul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10. in se fiunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod est ineptum. Quæstio ergo soluitur per quemcunque numerum in quascunque duas partes diuisum, vt ab Eucl. lib. 2. propos. 2. ostẽsum est.

LIQVET igitur, ex ipsa operatione cognosci posse, num proposita quæstio solui possit, nec ne: an vero sit vana, ac nugatoria, quæ videlicet in omnem numerum conueniat.

# DE SECVNDIS RADICIBVS. Cap. XV.

*Cur excogitata sint secũda radices.*

QVAERVNTVR non rarò duo, vel tres, aut etiã plures numeri sub incerta proportione: idcirco postquam pro primo numero posita est 1 ℞. non videtur commodum pro secundo numero ponere iterum 1 ℞: & pro tertio etiam 1 ℞. &c. quia cum 1 ℞ primo loco posita diuersum plerunque valorem habeat a radice secundo loco posita, itemq. a radice tertio loco posita; facilè eueniret, vt in operatione exempli radices inter se confunderentur, nisi diuersis characteribus designentur. Quam ob rem excogitatæ sunt radices secundæ, quas Cardanus Quantitates surdas, Petrus Nonius, & alij Quantitates simplices, aut absolutas appellant, notantq. hoc modo. 1q. 2q. &c. hoc est, vna quantitas, duæ quantitates, &c. Nos cum alijs appellabimus radices secundas, notabimusq. hoc modo, 1 A. hoc est, 1 ℞. secunda distincta ab ea, quæ primo loco posita est, 1 B. id est, 1 ℞ secunda distincta a duabus, quæ primo, & secundo loco positæ sunt: & sic deinceps. Hac enim ratione facilius secundarum radicum algorithmus explicabitur.

IN numeratione, quando numerus duo signa habet, intelligitur numerus cum priore signo ductus in vnitatem posterioris signi. Vt 1 ℞ A, significat 1 ℞, ductam in 1 A. & 3 ℞ A, significat 3 ℞. ductas in 1 A. Sic 1 ʒ A ʒ, indicat 1 ʒ. ductum in 1 A ʒ. &c.

*Additio secũdorũ radicũ.*

ADDITIO vero perficitur, si numeri inter se addantur, & character idem secundæ radicis apponatur: quando videlicet secundæ radices sunt eiusdem generis. Vt ex 3 A. & 4 A, fiunt 7 A. atque ex 3 B, & 4 B, fiunt 7 B. &c. Quando verò secundæ radices non sunt eiusdem generis, fit additio per signum additorum +. Vt ex 3 A, & 4 B, fiunt 3 A + 4 B. Item ex 3 ℞. & 4 A, fiunt 3 ℞ + 4 A. &c.

*Subtractio secundarum radicum.*

SVBTRACTIO quoque, quando secundæ radices sunt eiusdem generis, fit, si numerus a numero subtrahatur, & reliquo numero idem character secundæ radicis apponatur. Vt 3 A. ex 7 A. relinquunt 4 A, & 3 B, ex 7 B, relinquunt 4 B, &c. Quando autem secundæ radices sunt diuersæ, fit subtractio per signum subtractorũ —. Vt 3 A. ex 4 B, relinquunt 4 B — 3 A.

*Multiplicatio secundarũ radicum.*

MVLTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radicis primæ multiplicandus est cum numero radicis secundæ signatæ solum litera A, vel B, &c. multiplicantur numeri inter se, & eadem signa apponuntur. Vt ex 2 ℞. in 2 A. fiunt 4 ℞ A. id est, 4 ℞ multiplicatæ in 1 A. Similiter ex 2 A, in 2 ℞. fiunt 4 A ℞, hoc est, 4 A, multiplicatæ in 1 ℞. Sic etiam ex 3 ʒ in 4 B, fiunt 12 ʒ B. id est,

12 ʒ.

12 ȝ. multiplicati in 1 B. &c. Sic etiam ex 1 ℞ in 1 A, fit 1℞A, id eſt, 1℞ multiplicata in 1A. Et ex 1ȝ. in 1Aȝ. fit 1ȝAȝ. hoc eſt, 1ȝ. ductus in 1Aȝ.

QVANDO numerus abſolutus in numerum ſecundæ radicis ducitur, fit numerus ſecundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4 B, fiunt 28 B, &c.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in numerum ſecũdæ radicis diuerſæ literæ; ducitur numerus in numerum, productoq. eædem literæ apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 AB, hoc eſt, 27 A, multiplicatæ in 1 B.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in numerum ſecundæ radicis eiuſdem literæ, producitur character ȝ, præpoſita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 Aȝ.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in ſe quadratè, vel cubicè, &c. producitur character ȝ, vel ce, &c. præpoſita eadem litera. Vt 1 A, in ſe quadratè, facit 1Aȝ. hoc eſt, 1. quadratum ſecundæ radicis. Rurſus ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ȝAȝ. id eſt, 1ȝ primæ radicis ductus in 1ȝ. ſecundæ radicis. Item 3 B, in ſe quadratè faciunt 9Bȝ. Sic 3 B, in ſe cubicè, faciunt 27 Bce.

QVANDO numerus ſecundæ radicis ducitur in alium numerum eiuſdem radicis ſecundæ, quæ etiam habet characterem Coſſicum, intelligitur primus numerus habere etiam ſignum Coſſicum ℞. Vt ex 1 A, in 1Aȝ, fit 1Ace. Et ex 3 B, in 4 Bce, fiunt 12Bȝȝ.

QVANDO numerus Coſſicus ſimplex, abſq. litera ſecundæ radicis, multiplicatur in numerum ſignatum litera, & ſigno Coſſico, ducitur numerus in numerum, & producto eadem ſigna apponuntur. Vt ex 2 ce. in 4Aȝ. fiunt 8ceAȝ. hoc eſt, 8 ce multiplicati in 1 Aȝ. Item ex 1ce in 1℞Aȝ. fit 1ȝȝAȝ. id eſt, 1ȝȝ. ductus in 1Aȝ. Tantum quoque fit ex 1ȝA, in ſe quadratè. Nam ex 1ȝ. in ſe fit 1ȝȝ. & ex 1 A, in ſe fit 1Aȝ.

QVANDO numerus poſt literam ſecundæ radicis ſignum Coſſicum gerens ducitur in numerum, qui poſt literam ſecundæ radicis gerit quoque ſignum Coſſicum, producitur numerus cum charactere Coſſico, quem exponentes characterum dant, cui præponenda inſuper eſt litera, vel literæ ſecundæ radicis. Vt ex 2Aȝ, in 5 Ace. fiunt 10 Aß. Item ex 3Aȝ. in 4Bce, fiunt 12ABß.

QVANDO numerus poſt literam ſecundæ radicis characterem Coſſicum gerens ducitur in numerum, qui poſt characterem Coſſicum literam quoque ſecundæ radicis habet, producitur numerus cum poſteriore charactere Coſſico, quem inſequitur litera ſecundæ radicis, deinde apponitur character Coſſicus productus ex priore charactere Coſſico in literam ſecundæ radicis, ac ſi haberet ſignum hoc ℞. Vt ex 1Ace in 1ȝA, fit 1ȝAȝȝ. Tantundem quoque fit ex 1℞Aȝ. in ſe quadratè. Item ex 3Aȝ, in 4ceA, fiunt 12ceAce, id eſt, 12ce multiplicati in 1Ace.

IN diuiſione ſecundarum radicum, fit prius reductio ſignorum Coſſicorum, per ſubtractionem ſimilium ſignorum. Vt ex diuiſio- *Diuiſio ſecundarũ radicũ.*

ne 8ceAȝ, per 4Aȝ, reductis signis, diuiduntur 8ce, per 4. fitque Quotiens 2ce. Sic 8ceAȝ, per 4ce, fit Quotiens 2Aȝ.

QVANDO autem diuiditur numerus ℞, per numerum secundarum radicum, fit minutia in Quotiente. Vt 2℞ per 4A, fit 2℞/4A.

*Extractio radicum ex secundis radicibus.*

IN extractione radicum, eruitur radix ex numero, si habet, eiq. apponitur litera secundæ radicis, reiecto charactere Cossico. Vt radix quadrata numeri 25Aȝ. est 5 A. Itẽ radix cubica numeri 27Ace. est 3 A. Et radix zensizensica numeri 16Dȝȝ. est 2D.

QVANDO vero numerus non habet talem radicem, vel character Cossicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum litera, & charactere, signum radicale. Vt radix cubica numeri 3Aȝ. est √ce3Aȝ. Item radix quadrata numeri 4Ace. est √ȝ4Ace.

*Examen operationum radicum secundarum.*

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuisionesq. per progressiones Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progressionem duplarum proportionum ascribemus primis radicibus, & progressionem triplarum radicibus secundis. cuiusmodi sunt hæ.

| N | ℞ | ȝ | ce | ȝȝ | ß | ȝce | Bß | ȝȝȝ | cce | ȝß | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | &c. |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 | &c. |

Itaq. vt videas, ex 2 ℞ in 2 A, fieri 4℞A, id est, 4℞ ductas in 1 A. resolutæ 2 ℞, faciunt 4. & 2 A, faciunt 6. at 4. in 6. efficiunt 24. quantum videlicet faciunt 4 ℞, id est, 8 ductæ in 1 A, id est, in 3.

DEINDE ex 2 A, in 2℞, diximus fieri 4A℞, hoc est, 4A, ductas in 1 ℞. Et quia 2 A, sunt 6. & 2 ℞, sunt 4. fiunt autem 24. ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id est, 12. in 1 ℞, videlicet in 2.

PRAETEREA ex 1 ℞. in 1 A, producitur 1 ℞A, quia 1 ℞ est 2. & 1 A, est 3. fiunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1℞, id est, ex 2. in 1 A, id est, in 3.

SIC etiam ex 1 ȝ. in Aȝ, fit 1ȝAȝ, nimirum 1 ȝ, ductus in 1Aȝ. Et quia 1 ȝ, est 4. & 1Aȝ, est 9. fiunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1 ȝ. id est, ex 4. in 1Aȝ, id est, in 9.

RVRSVS ex 3 ȝ. in 4 B, facti sunt 12ȝB, hoc est, 12 ȝ. ducti in 1 B. Nam 3 ȝ. sunt 12. & 4 B, sunt etiam 12. fiunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 ȝ, id est, ex 48. in 1 B, id est, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C, fiunt 18 C, hoc est, ex 6. in 9. fiunt 54. hoc est, 18 C. Sic ex 7. in 4 B, factæ sunt 28 B, nimirum 84. quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id est, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreatæ sunt 27 AB, id est, 27 A, multiplicatæ in 1 B. Nam 3 A, sunt 9. & 9 B, sunt 27. Fiunt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id est, ex 81. in 1 B, id est, in 3.

ITEM

ITEM ex 3A, in 4A, fiunt 12Aʒ, hoc est, 12ʒ. secundæ radicis. Nam 3 A, sunt 9. & 4 A, sunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12 ʒ. secundæ radicis.

PRAETEREA ex 1 A, in se quadratè fit 1Aʒ. hoc est, 1 ʒ secundæ radicis. Item 3 B, in se quadratè faciunt 9Bʒ, id est, 9 ʒ. secundæ radicis. Nam 3 B, sunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9 ʒ. secundæ radicis. Item ex 1℞A, in 1℞A, fit 1ʒAʒ, id est, 1 ʒ. primæ radicis ductus in 1 ʒ secundæ radicis. Nam 1 ℞ A, significat 1 ℞ primam ductam in 1 radicem secundam, id est, 2 ducta in 3. hoc est, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum nimirum fit ex 1 ʒ. primæ radicis, id est, ex 4. in 1. quadratum secundæ radicis, nimirum in 9. Sic 3 B, in se cubicè faciunt 27 Bce, id est, 27 ce secundæ radicis. Quia 3 B, sunt 9. & 9. in se cubicè faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27 ce secundæ radicis.

POST hæc, ex 1A, in 1Aʒ, fit 1Ace, hoc est, cubus secundæ radicis, nimirum 27. Nam 1A, valet 3. & 1 ʒ. secundæ radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3 B, in 4Bce, fiunt 12Bʒʒ. hoc est, 12ʒʒ. secundæ radicis. Nam 3 B, sunt 9. & 4ce secundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12 ʒʒ. secundæ radicis.

AMPLIVS ex 2 ce. in 4 Aʒ. fiunt 8ceAʒ, hoc est, 8 ce multiplicati in 1 ʒ secundæ radicis. Nam 2 ce sunt 16. & 4 ʒ secundæ radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16 in 36. quantum nimirum faciunt 8 ce, id est, 64. multiplicati in 1 ʒ. secundæ radicis, videlicet in 9. Item ex 1 ce. in 1℞Aʒ. fit 1ʒʒAʒ. id est, 1ʒʒ. ductus in 1 ʒ secundæ radicis. Nam 1ce. est 8. & 1℞Aʒ. id est, 1℞ ducta in 1ʒ secundæ radicis, est 18. Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum scilicet facit 1ʒʒ, nimirum 16. ductus in 1 ʒ. secundæ radicis, id est, in 9.

ITEM ex 2Aʒ, in 5Ace. fiunt 10 Aß. Nam 2 ʒ. secundæ radicis sunt 18. & 5ce secundæ radicis sunt 1080. Fiunt autem 2430. ex 18. in 1080. quantum scilicet faciunt 10 ß. secundæ radicis. Item ex 3Aʒ. in 4Bce, fiunt 12ABß. Nam 3ʒ secundæ radicis faciunt 27. & 4ce secundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12ß. secundæ radicis.

POSTREMO ex 1Ace. in 1ʒA, fit 1ʒAʒʒ. hoc est, 1 ʒ. ductus in 1ʒʒ secundæ radicis. Nam 1 ce secundæ radicis est 27. & 1 ʒ est 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 1 ℞ secundam, id est, in 3. fiunt 324. ac tantundem fit ex 1ʒ. in 1ʒʒ. secundæ radicis, hoc est, ex 4. in 81. Quòd autem ex 1℞Aʒ, in se quadratè fiat quoque 1ʒAʒʒ. sic perspicuum fiet. Numerus 1℞Aʒ. significat 1 ℞ primã, id est, 2. ductam in 1 ʒ. secundæ radicis, id est, in 9. quę multiplicatio facit 18. At ex 18. in 18. fit numerus 324. qui equiualet numero 1ʒAʒʒ. hoc est, numero producto ex 1 ʒ. id est, ex 4. in 1ʒʒ. secundę radicis, hoc est, in 81. Similiter ex 3 A ʒ, in 4 ce A, fiunt 12ce Ace. Nam 3 ʒ secundę radicis sunt 27. & 4 ce A, (id est, 4 ce ducti in 1 A, vel in radicem secundam, hoc est, ex 32. in 3.) faciunt

96. Fiunt autem 1592. ex 27. in 96. Ac tantundem faciunt 12ℭ A℮. hoc est, 12ℭ multiplicati in 1 ℭ secundæ radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM vero ex diuisione 8ℭA℥. per 4A℥, produci Quotientem 2ℭ. eodem modo probabimus. Nam 8ℭA℥. (id est 8 ℭ multiplicati per 1A℥, hoc est, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuisus per 4 ℥ secundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc est, 2 ℭ. Item ex diuisione 8ℭA℥. per 4ℭ. gigni Quotientem 2A℥. perspicuum etiam est. Nam 8ℭA℥ (id est, 8 ℭ. ducti in 1A℥, videlicet 64. in 9.) sunt 576. qui numerus diuisus per 4 ℭ, id est, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2 ℥. secundæ radicis.

PARI ratione, numeri 25A℥. radicem quadratam esse 5A. manifestum quoque est. Nam 5 A, sunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales sunt 25℥ secundæ radicis. Non aliter ostendemus, 3A, esse radicem cubicam numeri 27A℮. Nam 3 A, sunt 9. at ex 9. in se cubicè fiunt 729. videlicet 27 ℭ secundæ radicis. Ita quoque numeri 16D℥℥. radix Zensizensica erit 2 D. quia 2 D, sunt 6. & ex 6. in se Zensizensicè fiunt 1296. nimirum 16℥℥ secundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes secundarum radicum examinare per progressiones Geometricas, vt earum veritas omnibus constaret: quia de illis fortasse non nemo dubitare posset, cum earum ratio sit paulo obscurior, quam illa operationum numerorum Cossicorum. Vsus porrò secundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ dissoluendis.

## DE NVMERIS IRRATIONALIBVS, siue surdis. Cap. XVI.

*Irrationales numeri, siue surdi, qui.*

NVMERI irrationales, siue surdi sunt radices numerorum, quæ exprimi non possunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam causam radices surdæ sunt appellatæ, signanturq. hoc modo. √℥. √ℭ. √℥℥. √ß. √℥ℭ, &c. vt ad finem cap. 3. declarauimus. Vt √℥10. hoc est, radix quadrata numeri 10. dicitur surda, vel irrationalis, quia nullus numeru sdari potest, siue integer sit, siue integer cum fracto, qui in se quadratè multiplicatus producat 10. De integro manifestum est. Nam 3. in se ductus producit 9. numerum minorem, quam 10. At 4. in se multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideoq. neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata esse potest numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara est. Radix enim illa deberet esse inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti sint fracti, qui cum 3. constituant integrũ cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{2}{3}$. $3\frac{4}{5}$. $3\frac{8}{11}$. &c. nullus

nullus tamen eorum in se ductus quadratè producere potest 10. numerum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Eucl. demonstrauimus. Sic etiam √ce 10. irrationalis est, & √ʒʒ 100. &c.

DE hisce numeris nunc agendum est, vt plurimæ quæstiones, in quibus numeri irrationales interueniunt, queant explicari. Res quidem est non paucis difficultatibus inuoluta, sed quæ tamen planè intelligatur, si modo vehemens, ardensq; studium adhibeatur. Quòd si quis ad hanc rem perfectè intelligendam minus idoneus reperiatur, is ne desperet omnino: quippe cum sine hac cognitione innumerabiles penè quæstiones per Algebræ regulã enodari queãt. Quo circa, omissa ad breue tempus tractatione hac numerorum irrationalium, quæ 13. capitibus continetur, conferre se poterit ad cap. 29. & 30. vbi innumerabilia penè ænigmata scitu iucundissima, sine cognitione numerorum irrationalium, enodata inueniet. Deinde postquam se aliquandiu in Algebræ quæstionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium perdiscendam.

SOLET ante omnia a nonnullis disputari, an numeri irrationales verè dicendi sint numeri, necne. Cum enim neque integri numeri sint, neque fracti, vt paulò ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi possit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur esse numeri dicendi. Quia tamen sub regulam cadunt, censendi erunt aliquo modo esse numeri. Nam √ʒ 10. in se multiplicata gignit numerum 10. sicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item √ʒ 3. in √ʒ 12. procreat √ʒ 36. hoc est, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationalium, de quo mox agemus, constabit. Habẽt autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quosuis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

*Vtrum radices surdæ sint numeri, necne.*

$$2\tfrac{1}{2}.\ 2\tfrac{1}{3}.\ 2\tfrac{2}{3}.\ 2\tfrac{1}{4}.\ 2\tfrac{3}{4}.\ 2\tfrac{1}{5}.\ 2\tfrac{2}{5}.\ 2\tfrac{3}{5}.\ 2\tfrac{4}{5}.\ 2\tfrac{1}{6}.\ 2\tfrac{5}{6}.\ \&c.$$

ita quoque inter quoslibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Vt inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

√ʒ5. √ʒ6. √ʒ7. √ʒ8. √ce9. √ce10. √ce11. √ce12. √ce13. √ce14. √ce15. √ce16. √ce17. √ce18. √ce19. √ce20. √ce21. √ce22. √ce23. √ce24. √ce25. √ce26. √ʒʒ17. √ʒʒ18. √ʒʒ19. √ʒʒ20. √ʒʒ21. √ʒʒ22. √ʒʒ23. &c.

Tam enim singuli illi fracti, quam hi surdi singuli maiores sunt quam 2. minores autem quam 3. vt liquet.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum surdarum. Quædam enim sunt simplices, vt √ʒ. alicuius numeri non quadrati. √ce alicuius numeri non cubi. √ʒʒ numeri alicuius non zensizensi. √β alicuius numeri non surdesolidi, atque ita de alijs radicibus numerorum progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum radices

*Duo genera radicum surdarũ, simplex, & composita.*

*Numeri mediales qui.*

*Radix ligata qua.*

*Numerus irrationalis cõpositus, vel diminutus, qui.*

*Radix Vniuersalis, qua.*

*Radix totius numeri compositi, diminutiue, qua.*

radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +. & —. quarum duo item genera ab auctoribus describuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusvè, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectam. Vt cum per hunc numerum √ꝫ9+√ꝫ4. intelligimus 5. vnitates, summam videlicet ex 3. radice zensica numeri 9. & ex 2. radice zensica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ æquiualet numero 5. Sic etiam Ligata radix erit √ꝫ7+√ꝫ4+3. quæ æquiualebit huic, √ꝫ7+5. Significamus enim ad √ꝫ7. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, √ꝫ3+2℞. Denotamus enim 2 ℞ esse additas ad √ꝫ3. Denique Ligata radix erit √ꝫ49—√ce27. Item √ce 100 —√ꝫ 9. In priori namq. intelligimus ex √ꝫ49. hoc est, ex 7. ablatam esse √ce 27. id est, 3. atque ita pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex √ce100. subtrahi √ꝫ 9. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irrationales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerunque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutivè. Vt huius numeri cõpositi. 22+√ꝫ9. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zensica 9. quæ est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particulæ numeri eiusdem, vt fiat numerus √ꝫ9+22. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimus simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale √ꝫ. vel √ce. atque vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo. √ꝫ (22+√ꝫ9.) vel sic, quod idem est, √ꝫ (√ꝫ9+22.) Alia exempla huiusmodi radicum sume hæc. √ꝫ (√ꝫ5+12℞.) Item √ꝫ (4ꝫ+12℞.) Item √ꝫ (√ꝫ9+√ꝫ4) +√ꝫ (11+√ꝫ25.) Est enim sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex √ꝫ9. & √ꝫ4. nimirum ex 3. & 2. quæ est 5. & ad hanc summam adijciatur radix aggregati ex 11. & √ꝫ25. hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. eiusq. radix 3. Quod si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. √ꝫ (11+√ꝫ25) +√ꝫ (√ꝫ9+√ꝫ4) variabitur sensus, quia signum radicale √ꝫ. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur √ꝫ9. & √ꝫ4. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. eiusq. radix √ꝫ21. quæ multum a priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri √ꝫ (7+√ꝫ48) radix erit 2+√ꝫ3. Nã

hic

hic numerus in se ductus producit 7+√ȝ48. vt ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particulæ seorsum accipiuntur, non autem earum summa. Vt hæc radix, √ȝ 16+√ȝ9. quando particulæ per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. Quia sic esset radix Ligata, quam nos simpliciter numerum irrationalem compositum nominauimus, dicitur radix Distincta: & multum differt a Ligata. Nam si accipiatur, tanquam Ligata, & in se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, fient numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum proprijs in locis declarabimus, quisnam sensus sit harum radicum. Variè enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap. 24.

*Radix Distincta, quæ.*

# DE REDVCTIONE RADICVM simplicium ad eandem denominationem.

## Cap. XVII.

VT radices surdæ simplices inter se possint multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere, quæ reductio eodem fere modo fit, quo minutiæ diuersorum denominatorum ad eundem denominatorem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per crucem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est, eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune, vel exponens signi communis producatur. V.g. hæ duæ radices √ȝ5. & √ce4. ita ad idem signum radicale reuocabuntur. Positis numeris, ac signis, vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est numerus 5. cubice, propter signum ce, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. zensicè, propter signum ȝ, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum ȝ. ad ce, vt fiat signum ȝce. cuius nimirum exponens est 6. procreatus ex ductu 2. exponentis ȝ in 3. exponentem ce. vt cap. 2. docuimus. quod signum productum ȝce, vtrique numero prius producto præfigendū est: ita vt √ȝ5. & √ce4. reducta sint ad √ȝce 125. & √ȝce 16. Quo facto, erit √ȝce 125. æqualis √ȝ5. & √ȝce 16. æqualis √ce4. Nam √ȝ5. est √ȝce numeri 125. propterea quod √ȝ5. in se quadratè efficit 5. & 5. in se cubicè facit 125. Eadem ratione √ce4. est √ȝce numeri 16. propterea quod √ce 4. in se cubicè facit 4. & 4. in se quadratè facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam √ce, mul-

*Qua ratione diuersæ radices ad eandē denominationem reducantur.*

| 125 | | 16 |
|---|---|---|
| 5 | X | 4 |
| √ȝ | | √ce |
| 2 | | 3 |
| | 6 | |

a 17. septimi multiplicans √ʒ. & 5. produxit √ʒce. & 125. * erit eadem propor-
tio √ʒce, ad 125. quæ √ʒ, ad 5. Sic quoque, cum √ʒ. multiplicans
√ce. & 4. faciat √ʒce, & 16. erit eadem proportio √ʒce, ad 16. quę
√ce. ad 4. ac proinde √ʒ5. æqualis erit √ʒce 125. & √ce4. ęqualis
√ʒce 16.

*Demonstratio reductionis.* VERVM prędicto modo rectè reduci radices ad eandem deno-
minationem, hoc est, in dato exemplo, √ʒ5. esse √ʒce 125. & √ce4.
æquiualere √ʒce 16. ita quoque Geometricè ostendemus.

C. 2. F. 3.
A B G D E H
1. √ʒ5. 5. 125 1. √ce 4. 4. 16
K. 6.

Sit A, radix Zensica numeri B, cuius radicis exponens sit C. Item
D, sit radix cubica numeri E, cuius exponens sit F. Ducatur B, qua-
dratus huius numeri √ʒ5. in se cubicè, propter exponentem F, vel
signum ce. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus
125. ita vt B, sit √ce, numeri producti 125. cuius exponens F. Item
ducatur E, cubus huius numeri √ce4. in se quadratè, propter signũ
ʒ, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, sit √ʒ numeri
producti 16. cuius exponens C. Postremò ducatur exponens C, in
exponentem F, fiatq. numerus K. Dico A, esse √ʒce, nimirum a 6.
Et D, √ʒce esse numeri H, ab eodem numero K, denominatam. Cum
enim A, sit radix ipsius B, denominata a C, erunt inter B, & vnita-
tem tot proportiones ęquales proportioni A, ad vnitatem, quot
Vnitates sunt in C, nimirum duę, vt cap. 2. explicatum est, & hic
perspicuum est, 1. √ʒ5. 5. Item quia B, radix est ipsius G, denomi-
nata ab F, erunt eandem ob caußam inter G, & vnitatem tot propor-
tiones ęquales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F,
nimirum tres, vt hic etiam patet. 1. 5. 25. 125. hoc est, inter G, & B,
erunt duę proportiones ęquales proportioni B, ad vnitatem: quan-
doquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportiones ęquales pro-
portioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint duę
proportiones ęquales proportioni A, ad vnitatem; erunt sex huius-
modi proportiones inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates
sunt in K. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione
duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportiones
inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F. ac proinde G, erit zensi-
cubus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit √ʒce. numeri G. Non
aliter demonstrabimus, D, esse √ʒce. numeri H. Eademq. ratio est
de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

C. 3. F. 4.
A B G D E H
1. 2. 8. 4096 1. 3. 81. 531441
K. 12.

A, est

A, est √ce. numeri B, denominata a C. At vero D, est √ʒʒ. numeri E, denominata ab F. Ex B, in se zensizensicè, propter exponentem F, fiat G, ita vt B, sit √ʒʒ. numeri 4096. Item ex E, in se cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, sit √ce. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, esse √ʒʒce. numeri G, denominatam a K, id est, a numero 12. Et D, esse √ʒʒce. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata a C; erunt inter B, & vnitatem tot proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum tres, vt hic patet, 1.2.4.8. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F; erunt tot proportiones inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1.8.64.512.4096. hoc est, inter G, & B, erunt tres proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatuor proportiones æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint tres proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem; erit inter G, & vnitatem duodecim proportiones æquales proportioni A, ad vnitatem: quot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirũ 12. qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportiones inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F: ac proinde G, erit ʒʒce, cuius exponens est 12. id est, A, erit √ʒʒce. numeri G. Eademq. ratione D, erit √ʒʒce numeri H.

SINT rursus reuocandi duo numeri 6. id est, √o 6. (quod exponens numeri absoluti sit o.) & √ʒʒ 12. Ducantur 6. in se zensizensicè, vt fiant 1296. Sed 12. ducenda non sunt in √o. propter exponentem o. neque 4. exponens ʒʒ. in o, eandem ob causam. Quare 6. & √ʒʒ 12. reducentur ad √ʒʒ 1296. & √ʒʒ 12. Atque ita, quando proponitur numerus absolutus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radicis. Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6. ductus est in se zensizensicè, factaq. est reductio ad √ʒʒ 1296. & √ʒʒ 12.

| 1296 | | 12 |
|---|---|---|
| 6 | X | 12 |
| √o | 4 | √ʒʒ |

*Quo pacto numerus absolutus, & radix reducantur ad eandẽ denominationem.*

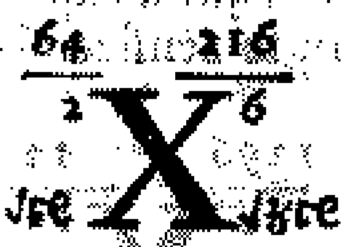
COMPENDIOSE interdum fieri possunt huiusmodi reductiones, per abiectionem signi radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem, quam signum radicale indicat. Tunc enim extrahitur illa radix, signumq. eius radicale deletur. Vt si duæ hæ radices, √ce 27. & √ʒʒ 25. reuocandæ sint ad eandem denominationem, extraho ex 25. radicem zensicam 5. cui præpono reliquum signum ʒ, hoc modo. √ʒ 5. Deinde ex 27. extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zensice, vt fiat √ʒ 9. Erunt ergo datæ duæ radices reductæ ad has √ʒ 9. & √ʒ 5. Si prius extrahetur radix cubica ex 27. nimirũ 3. deleto signo √ce, remanet numerus absolutus 3. Extracta deinde

*Compendium reductionis.*

| 531441 | | 15625 |
|---|---|---|
| 27 | X | 25 |
| √ce | | √ʒʒ |

radice zensica ex 25. quæ est 5. præpono ei reliquum signum ʒ. hoc modo, √ʒ 5. Quia vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducendus est in se zensicè, vt fiat √ʒ 9. atque ita rursus facta est reductio ad √ʒ 9. & √ʒ 5. vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas, √ʒʒce 531441. & √ʒʒce 15625. quæ tandem reducentur ad √ʒ 9. & √ʒ 5. hoc modo. Extraho ex 531441. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zensizensicam 3. cui nullum signum radicale præpono, quia numerus habuit √ʒʒce. Deinde ex 15625. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zensicam 5. cui præfigo signũ ʒ. quod reliquum est, hoc modo √ʒ 5. quia numerus 5. non habet √ʒ. Quoniam vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducatur 3. in se zensicè, vt fiat √ʒ 9. atque ita reductio facta erit ad √ʒ 9. & √ʒ 5. vt prius. Sic etiam si reducendæ sint √ʒß 1024. & √ʒce 216. Extraho ex 1024. radicem surdesolidam 4. deletoq. charactere ß. manet √ʒ 4. Extracta autem radice zensica ex 4. habebimus 2. Item ex 216. eruo radicem cubicam 6. cui præpono signum ʒ. Sed quia prius habuimus numerum absolutum 2. ducemus 2. in se zensice, vt fiat √ʒ 4. Erunt igitur dictæ radices reductæ ad √ʒ 4. & √ʒ 6. Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius signi radicalis.

NONNVNQVAM fieri etiam potest compendium per assumptionem alicuius signi radicalis. Vt si reducendæ sint √ce 2 & √ʒce 6. duco 2. in se zensicè, propter signum ʒ. quod præter ce reperitur in altera radice, facioq. 4. cui præpono ʒ. eritq. facta reductio ad √ʒce 4. & √ʒce 6. Sine compendio fieret reductio, vt hic vides, ad √ʒcece 64. & √ʒcece 216. Et si ex his numeris eruantur radices cubicæ 4. & 6. deleanturq. signa ce. singula ex singulis, facta erit reductio ad √ʒce 4. & √ʒce 6. vt prius. Sic etiam reducentur √ce 2. & √ʒce 8. ad √ʒce 4. & √ʒce 8. si nimirum 2, ducatur in se zensicè, & producto addatur idem signũ radicale ce, præposito insuper signo ʒ.




*Regula reductionis quarundam radicum facilis.*

DENIQVE vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotiescunque in vtraque radice idem character reperitur, reducentur illæ radices facile ad eandem denominationem, si numerus minoris denominationis multiplicetur in se secundum exigentiam alterius characteris, qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, secundum quem facta est multiplicatio. Vt √ʒʒ 9. & √ʒ 4. reducentur ad √ʒʒ 9. & √ʒʒ 16. si nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in se zensicè, propter characterem ʒ. qui in maiore denominatione præter ʒ. reperitur.

ITEM √ʒce 8. & √ʒ 9. reducentur ad √ʒce 8. & √ʒce 729. si nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in se cubicè, propter characterem ce, qui præter ʒ. in maiore denominatione continetur.

SIC etiam √ʒʒce 20. & √ʒ 10. reducentur ad √ʒʒce 20. & √ʒʒce 1000000. si nimirum numerus 10. minoris denominationis

ducatur

ducatur in se zensicubicè, propter characterem ℨce. qui præter ℨ. reperitur in maiore denominatione: hoc est, vel prius in se zensicè, & productus 100. in se cubicè: vel prius in se cubicè, & productus 1000. in se zensicè. Vtroque enim modo producitur numerus 1000000.

ITA quoque √ℨce 30. & √ce 15. reducentur ad √ℨce 30. & √ℨce 225. si videlicet numerus 15. minoris denominationis ducatur in se zensicè, & producto 225. præter characterem ce. apponatur quoque character ℨ. & sic de alijs.

ITAQ. maior character semper manet intactus, & solum minor mutatur, assumendo alium characterem præter illum, quem habet; characterem, inquam, secundum cuius exigentiam multiplicatus fuit numerus minoris denominationis, & qui in maiore denominatione reperitur vltra minoris denominationis characterem.

---

# DE MVLTIPLICATIONE, ac Diuisione radicum simplicium.

## Cap. XVIII.

VT doctrinæ ordo seruetur, agendum erit de multiplicatione, diuisioneq. radicum simplicium ante additionem, subtractionemque, quia sine multiplicatione additio, subtractioq. radicum absolui non potest. Quando ergo duæ radices multiplicandæ, aut diuidendæ sunt eiusdem generis, multiplicantur earum numeri inter se, aut diuiduntur, & producto numero idem signum radicale præponitur. *Multiplicatio, ac diuisio radicum simplicium, quo pacto fiat.*

Vt ex ductu √ℨ 7. in √ℨ 10. fit √ℨ 70.
Ex √ℨ 3. in √ℨ 12. fit √ℨ 36. id est, 6.
Ex √ℨ $2\frac{1}{4}$. in √ℨ 8. fit √ℨ 18.
Ex √ce 24. in √ce 10. fit √ce 240.
Ex √ce 4. in √ce 16. fit √ce 64. hoc est, 4.
Ex √ℨℨ 9. in √ℨℨ 8. fit √ℨℨ 72.
Ex √ß 4. in √ß 8. fit √ß 32. id est, 2.

Item ex diuisione √ℨ 70. per √ℨ 7. fit √ℨ 10.
Ex √ℨ 36. per √ℨ 12. fit √ℨ 3.
Ex √ℨ 18. per √ℨ 8. fit √ℨ $2\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$.
Ex √ce 240. per √ce 24. fit √ce 10.
Ex √ce 64. per √ce 4. fit √ce 16.
Ex √ℨℨ 72. per √ℨℨ. 8. fit √ℨℨ 9.
Ex √ß 32. per √ß 8. fit √ß 4.

QVANDO autem propositæ duæ radices non sunt eiusdem naturæ, reducendæ sunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuisio instituenda vt prius.

VT ex ductu √ȝ 8. in $1\frac{1}{2}$. fit √ȝ 18. Nam numerus $1\frac{1}{2}$. Zensicè in se ductus facit √ȝ $2\frac{1}{4}$. hoc est, √ȝ $\frac{9}{4}$. atque ita ex √ȝ 8. in √ȝ $\frac{9}{4}$. fit √ȝ $\frac{72}{4}$. hoc est, √ȝ 18.

EX √ce 2. in √ȝce 6. fit √ȝce 24. Duæ namq. illæ radices reducuntur ad has duas √ȝce 4. & √ȝce 6.

EX √ȝ 5. in √ce 4. fit √ȝce 2000. Nam datæ duæ radices reuocãtur ad has, √ȝce 125. & √ȝce 16.

ITEM ex diuisione √ȝ 18. per $1\frac{1}{2}$. fit √ȝ 8. Numerus enim $1\frac{1}{2}$. ductus in se quadratè facit $2\frac{1}{4}$. cui præponendum est signum ȝ. vt fiat √ȝ $2\frac{1}{4}$. atque ita diuisa √ȝ 18. per √ȝ $2\frac{1}{4}$. hoc est, per √ȝ $\frac{9}{4}$. fit Quotiens √ȝ 8.

EX √ȝce 24. per √ce 2. fit Quotiens √ȝce 6. Nam duæ illæ radices reducuntur ad has √ȝce 24. & √ȝce 4. si nimirum numerus 2. ducatur in se quadratè, & producto 4. præter signum ce, apponatur etiam signum ȝ, vt fiat √ȝce 4. atque ita diuisa √ȝce 24. per √ȝce 4. fit Quotiens √ȝce 6.

EX √ȝce 2000. per √ȝ 5. fit Quotiens √ce 4. Duæ namq. illæ radices reducuntur ad √ȝȝce 4000000. & √ȝȝce 15625. Nam 2000. in se quadratè faciunt 4000000. & 5. in se Zensicubicè faciunt 15625. quibus productis præponitur commune signum ȝȝce. cuius exponens 12. gignitur ex 6. exponente signi ȝce. in 2. exponentem signi ȝ. Atque ita si diuides √ȝȝce 4000000. per √ȝȝce 15625. facies Quotientem √ȝȝce 256. hoc est, √ce 4. Nam √ȝȝ. numeri 256. est 4. cuius √ce, est √ce 4.

EX √ȝ $\frac{1}{2}$. per √ȝ $\frac{2}{3}$. fit Quotiens √ȝ $\frac{18}{24}$. id est, √ȝ $\frac{3}{4}$. Nam ex ductu Quotientis √ȝ $\frac{3}{4}$. in diuisorem √ȝ $\frac{2}{3}$. fit √ȝ $\frac{6}{12}$. hoc est, √ȝ $\frac{1}{2}$. numerus diuisus.

*Multiplicatio radicum in se quadratè, cubicè, zensizensicè, &c.*

QVANDO radix aliqua multiplicatur in se quadratè vel cubicè, vel secundum exigentiam alterius signi radicalis, quod gerit, sumendus est ipsemet numerus pro numero producto, deleto signo radicali.

VT √ȝ 4. in se quadratè facit 4. Nam √ȝ 4. in √ȝ 4. facit √ȝ 16. hoc est, 4.

EX √ȝ 18. in se quadratè facit 18. id est, √ȝ 324. quæ est 18.

EX √ce 4 in se cubicè facit 4. Nam √ce 4. in √ce 4. facit √ce 16. & ex √ce 4. in √ce 16. facit √ce 64. hoc est, 4. atque radix cubica huius producti est √ce 4.

SIC √ȝȝ 16. in se zenfizensicè facit 16. Nam ex √ȝȝ 16. in √ȝȝ 16. fit √ȝȝ 256. & ex √ȝȝ 256. in se fit √ȝȝ 65536. nimirum 16. quia radix quadrata numeri 65536. est 256. & huius radix quadrata est 16.

AT quando radix aliqua multiplicatur in se secundum exigentiã alterius signi radicalis, ducendus est numerus in se secundum exigentiam alterius huius signi radicalis, ac producto signum radi-

cale

cale numeri multiplicati præponendum.

VT ex √ʒ 6. in se cubicè fit √ʒ 216. Vnde radix cubica huius producti erit √ʒ 6. Nam ex √ʒ 6. in se fit √ʒ 36. & ex √ʒ 6. in √ʒ 36. fit √ʒ 216.

EX √ce 8. in se quadratè fit √ce 64. id est, 4. Vnde radix quadrata numeri √ce 64. est √ce 8. hoc est, 2.

EX √ce 6. in se quadratè fit √ce 36. Atque ita radix quadrata numeri √ce 36. est √ce 6.

EX √ʒce 6. in se quadratè fit √ʒce 36. hoc est, √ce 6. Nam radix Zensica numeri 36. est 6. & huius radix cubica est √ce 6. Vnde radix quadrata numeri √ʒce 36. vel √ce 6. est √ʒce 6.

EX √ʒce 6. in se cubicè fit √ʒce 216. vel √ʒ 6. quia huius numeri 216. radix cubica est 6. & huius radix quadrata est √ʒ 6. Itaq. radix cubica numeri √ʒce 216. vel √ʒ 6. est √ʒce 6.

EX √ʒʒ 6. in se quadratè fit √ʒʒ 36. hoc est, √ʒ 6. quia radix quadrata numeri 36. est 6. & huius radix quadrata est √ʒ 6. Ex quo fit, radicem quadratam numeri √ʒʒ 36. vel √ʒ 6. esse √ʒʒ 6. Itaque vt habeatur quadratum alicuius radicis zenſizenſicæ, ſatis eſt, amouere vnum ſignum ʒ. Vt in dato exemplo quadratum √ʒʒ 6. fuit √ʒ 6. Sic etiam quadratum √ʒʒ 8. eſt √ʒ 8. & ſic de cæteris.

*Facilis inuentio quadrati radicis Zenſizenſicæ.*

ITAQ. ſi radix quadrata aliqua ſurda duplanda eſt, multiplicandus eſt eius numerus per 4. Producti namq. √ʒ. eſt dupla radicis datæ. Vt duplum √ʒ 3. erit √ʒ 12. Nam vt √ʒ 3. ducatur in 2. reducendæ ſunt numeri √ʒ 3. & 2. ad eandem denominationem √ʒ 3. & √ʒ 4. &c.

*Quo modo radix dupletur, vel tripletur, &c.*

SIC etiam ſi duplanda ſit √ce 10. multiplicanda erit per √ce 8. fietq. eius duplum √ce 80. Duo namq. numeri √ce 10. & 2. reuocandi ſunt ad eandem denominationem, √ce 10. & √ce 8.

NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5. &c. ſi dicti numeri multiplicentur zenſicè, vel cubicè, vel zenſizenſicè, ſecundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt √β 9. triplicabitur, ſi ducatur in √β 243. vt gignatur √β 2187. Quadruplicabitur autem, ſi multiplicetur per √β 1024. vt fiat √β 9216. quæ quadrupla eſt √β 9. &c.

HINC facilè cognoſcemus ſummam quotcunque radicum ſurdarum æqualium. Si enim vnà illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quot ſunt radices propoſitæ, gignetur earum ſumma. Vt quinque √ʒ 7. faciunt √ʒ 175. Item quatuor √ce 8. faciunt √ce 512. hoc eſt, 8. Sic decem √ʒce 4. faciunt √ʒce 4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnam ſummã, nihil eſt aliud, niſi vnum illorum numerorum ducere in ipſorum multitudinem. Vt ſumma trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis eſt numero producto ex 12. in 3. &c.

*Summa quotuis radicum æqualium.*

RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radicem, vt diximus, ſic demonſtrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, √ʒ 3. & BC, √ʒ 12. Dico √ʒ 36. hoc eſt, radicem quadratam numeri 36. qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum

*Demonſtratio multiplicationis radicum quadratarũ.*

12.

A —√ȝ 3— B —√ȝ 12— C

12. lineæ BC, esse numerum productum ex linea AB, id est, ex √ȝ 3. in lineam BC, hoc est, in √ȝ 12. Quoniam enim ex Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. rectangulum sub AB, BC, medio loco proportionale est inter quadrata rectarum AB, BC: [a] erit id, quod fit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, æquale ei, quod fit ex rectangulo sub AB, BC, in se multiplicato: ideoq. productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC. quod erat demonstrandum.

a 20. sept.

*Demonstratio generalis multiplicationis omnium radicum.*

IN alijs autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonstrabimus. Sit A, √ȝ. numeri B: & C, √ȝ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A, sit √ce numeri E: Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, sit √ce numeri F. Item ex A, in E, fiat zensizensus G, vt A, sit √ȝȝ numeri A: Et ex C, in F, fiat zensizensus H, vt C, sit √ȝȝ numeri H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zensizenso G, in Zensizensum H, fiat Zensizensus M. Dico numerum I, productum ex A, √ȝ B, in C, √ȝ D, esse √ȝ numeri K, producti ex ȝ B, in ȝ D. Item eundem numerum I, productum ex A, √ce E, in C, √ce F; esse √ce numeri L, producti ex ce E, in ce F. Denique eundem numerum I, productum ex A, √ȝȝ G, in C, √ȝȝ H, esse √ȝȝ numeri M, producti ex ȝȝ G, in ȝȝ H. Atque ita deinceps, si A, & C, in G, & H, ducantur, vt fiant Surdesolidi; & deinde Zensicubi, &c.

| | | |
|---|---|---|
| | M, 1296. | |
| G 16 | | H 81 |
| | L, 216 | |
| E 8 | | F 27 |
| | K, 36 | |
| B 4 | | D 9 |
| | I, 6 | |
| A 2 | | C 3 |

Quoniam enim A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; [b] erit B, ad I, vt A, ad C. Item quia C, multiplicans A, & C, fecit I, & D; [c] erit quoque I, ad D, vt A, ad C, hoc est, vt B, ad I: ac proinde B, I, D, continuè sunt proportionales. [d] Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in se. Fit autem K, ex B, in D. Igitur idem K, fiet ex I, in se; hoc est, I, erit √ȝ numeri K.

b 17. sept.
c 17. sept.
d 20. sept.

DEINDE quia E, multiplicans A, & D, fecit E, & K; [e] erit E, ad K, vt A, ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F; [f] erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc est, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, proportionales sunt. [g] Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum, qui ex I, tertio in K, secundum. Factus est autem L, cubus ex E, in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, suum quadratum: ac proinde I, erit √ce numeri L.

e 17. sept.
f 17. sept.
g 19. sept.

RVRSVS quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & L; [h] erit G, ad L, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A, & F, fecit I, & H; [i] erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc est, vt G, ad L: ac proinde quatuor numeri G, L, I, H, proportionales sunt. [k] Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in L, secundum. Factus est autem M, Zensizensus ex G, in H. Idē ergo M, fiet

h 17. sept.
i 17. sept.
k 19. sept.

fiet ex I, in L, suum cubum: ideoq. I, erit √ȝȝ numeri M. & sic de cæteris. quod erat demonstrandum.

QVAMVIS autem in exemplo positi sint numeri rationales, idem tamen verum etiam est in numeris irrationalibus, vt Franciscus Maurolicus in sua Arithmetica speculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur, in qua eadem demonstratio locum habet. Nam quemadmodum propositiones lib. 7. Eucl. demonstratæ sunt in numeris fractis, ita eædem ostendentur in numeris surdis. V.g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I; erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quam I, ad C, vt A, ad vnitatem. quamuis proportio hæc sit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C. vt vult propos. 17. lib. 7. Eademq. ratio est de cæteris propositionibus lib. 7. Eucl.

M, 225. vel √ȝ 50625

G, 9. vel √ȝ 81 — H, 25. vel √ȝ 625

L, √ȝ 3375

E, √ȝ 27 — F, √ȝ 125

K, 15. vel √ȝ 225

B, 3. vel √ȝ 9 — D, 5. vel √ȝ 25

I, √ȝ 15

A, √ȝ 3 — C, √ȝ 5

RECTE etiam diuidi radicem per radicem, si præceptum traditum seruetur, demonstratione non indiget: quippe cum Quotiens multiplicatus per diuisorem producat numerum diuisum. Vt quia √ȝ 15. diuisa per √ȝ 3. Quotientem facit √ȝ 5. Et √ȝ 5. ducta in √ȝ 3. facit √ȝ 15. vt demonstratum est, dubitandum non est, recte factam esse diuisionem.

IMMO ritè fieri multiplicationem, diuisionemq. radicum surdarum eo modo, quem præscripsimus, abundè nos docere possunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuisæ procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex √ȝ 4. in √ȝ 49. fit √ȝ 196. hoc est 14. Et ex diuisione √ȝ 196. per √ȝ 4. fit Quotiens √ȝ 49. id est, 7. Item ex √ce 8. in √ce 27. fit √ce 216. nimirum 6. Et ex diuisione √ce 216. per √ce 8. fit Quotiens √ce 27. nimirum 3. &c.

## L E M M A.

*VTRVM duæ radices surdæ commensurabiles sint nec ne; & quam proportionem inter se habeant, cognoscere.*

DIVIDATVR vna radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit ratio-

*An duæ radices sint commensurabiles, & quam habeant proportionẽ; quo pacto cognoscatur.*

rationalis, ipsæ radices cõmensurabiles erunt, proportionẽq. habebunt inter se, quã Quotiens ad vnitatẽ. Vel si Quotiens est minutia, quam numerator minutiæ ad denominatorem. Vt quoniam si diuidatur √ʒ 12. per √ʒ 3. fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. erunt √ʒ 12. & √ʒ 3. commensurabiles, habebuntq. proportionem duplam, nimirum 2. ad 1.

SIC etiam diuisa √ʒ 3. per √ʒ 12. fit Quotiens √ʒ $\frac{3}{12}$. vel √ʒ $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Sunt ergo √ʒ 3. & √ʒ 12. commensurabiles, earumq. proportio eadem est, quæ $\frac{1}{2}$. ad 1. hoc est 1. ad 2. numeratoris ad denominatorem. Nam per propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem est proportio numeratoris minutiæ cuiusuis ad eiusdẽ denominatorem, quæ ipsius minutiæ ad vnitatem.

ITEM √ʒ 18. & √ʒ 8. commensurabiles erunt, proportionemq. habebunt, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. quod maiore diuisa per minorem, Quotiens fit √ʒ 2$\frac{1}{4}$. vel √ʒ $\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Diuisa autem √ʒ 8. per √ʒ 18. fit Quotiens √ʒ $\frac{4}{9}$. hoc est $\frac{2}{3}$. Sunt ergo √ʒ 8. & √ʒ 18. commensurabiles, proportionemq. habent, quam 2. ad 3.

RVRSVS commensurabiles erunt √ʒ 75. & √ʒ 48. Nam diuisa illa per hanc, fit Quotiens √ʒ 1$\frac{9}{16}$. vel √ʒ $\frac{25}{16}$. id est, $\frac{5}{4}$. proportionem autem habebunt, quam 5. ad 4.

ITA quoque repententur esse commensurabiles √ʒ 9. & √ʒ 4. proportionemq. habere, quam 3. ad 2.

PRAETEREA √ce 320. & √ce 135. commensurabiles sunt: quia illa per hanc diuisa, fit Quotiens √ce 2$\frac{10}{27}$. vel √ce $\frac{64}{27}$. id est, $\frac{4}{3}$. estq. earum proportio sesquitertia, nimirum 4. ad 3.

EADEM ratione commensurabiles sunt √ce 162. & √ce 2058. habentq. proportionem, quam 7. ad 3. nimirum duplam sesquitertium, si maior cum minore conferatur. Diuisa namq. maiore per minorem, fit Quotiens √ce 12$\frac{19}{27}$. vel √ce $\frac{343}{27}$. hoc est, $\frac{7}{3}$.

COMMENSVRABILES quoque sunt √ce 6000. & √ce 2058. habentq. proportionem, quem 10. ad 7. Diuisa enim priore per posteriorem, fit Quotiens √ce 2$\frac{314}{343}$. vel √ce $\frac{1000}{343}$. hoc est, $\frac{10}{7}$.

NON secus commensurabiles erunt √ʒʒ 3888. & √ʒʒ 243. quia ex diuisione prioris per posteriorem fit Quotiens √ʒʒ 16. hoc est 2. Habent ergo proportionem duplam.

EODEM modo commensurabiles erunt √ʒʒ 19683. & √ʒʒ 243. habebuntq. proportionem triplam. quia ex diuisione prioris per posteriorem prodit Quotiens √ʒʒ 81. hoc est, 3.

DENIQVE commensurabiles etiam erunt √ʒʒ 19683. & √ʒʒ 3888. proportionemq. habebunt sesquialteram. quia ex diuisione fit Quotiens √ʒʒ 5$\frac{1}{16}$. vel √ʒʒ $\frac{81}{16}$. id est, $\frac{3}{2}$.

IAM vero si ex diuisione gignatur numerus surdus, vel irrationalis, radices incommensurabiles erunt, proportionemq. habebunt irrationalem. Cuiusmodi sunt √ʒ 48. & √ʒ 8. quia ex diuisione oritur Quotiens √ʒ 6. irrationalis, cum 6. non habeat radicem quadratam: habent tamen proportionem, quam √ʒ. 6. ad 1.

INCOMMENSVRABILES quoque erunt √ce 32. & √ce 18. Nam

ex

ex diuisione gignitur Quotiens √ce $1\frac{7}{9}$. vel √ce $\frac{16}{9}$. qui licet habeat radicem quadratam $\frac{4}{3}$. cubicam tamen non habet. Erit autem earũ proportio eadem, quæ √ce 16. ad √ce 9. vel √ce $\frac{16}{9}$. ad 1.

QVANDO radices sunt diuersorum generum, reducendæ prius sunt ad eandem denominationem. Vt si dentur √ꝫce 64. & √ce 27. Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad √ꝫce 64. & √ꝫce 729. si posterior per priorem diuidatur, fit Quotiens √ꝫce $11\frac{25}{64}$. hoc est, √ꝫce $\frac{729}{64}$. id est, $\frac{3}{2}$. sunt ergo √ꝫce 64. & √ce 27. commensurabiles, habetq. posterior ad priorem proportionem, quam 3. ad 2.

EST Lemma hoc pernecessarium ad radicum additionem, subtractionemque, de qua in duabus propositionibus sequentibus.

## DE ADDITIONE RADICVM simplicium. Cap. XIX.

*Additio radicũ æqualiũ.*

QVANDO addendæ sunt inter se duæ, vel plures radices æquales, multiplicanda est vna earum per 2. vel 3. aut 4. &c. prout radices fuerint 2. vel 3. aut 4. &c. Productus enim numerus erit summa illarum radicum, vt cap. præcedenti diximus. Vt summa ex √ꝫ 6. & √ꝫ 6. collecta est √ꝫ 24. Nam √ꝫ 6. duplicata, hoc est, multiplicata per √ꝫ 4. facit √ꝫ 24. Item √ce 6. √ce 6. √ce 6. faciunt √ce 162. propterea quod √ce 6. triplicata, id est, multiplicata per √ce 27. facit √ce 162. & sic de alijs.

*Additio radicum incõmensurabilium.*

QVANDO autem duæ radices inæquales eiusdem speciei addendæ inter se sunt, experiendum prius est, per Lemma præcedens, an sint commensurabiles, an vero incommensurabiles: idemq. faciendum est, si radices sint diuersarum denominationum, postquam ad eandem denominationem fuerint reuocatæ. Et si quidem deprehendentur esse incommensurabiles, non poterunt in vnam summam colligi, ita vt ex illis vna radix simplex conficiatur, sed addendæ sunt per interpositionem signi additorum +. Vt ex √ꝫ 6. & √ꝫ 11. fit summa √ꝫ 6 + √ꝫ 11. Vel √ꝫ 11 + √ꝫ 6. Item ex 8. & √ꝫ 7. fit summa 8 + √ꝫ 7. vel √ꝫ 7 + 8. Sic ex √ce 9. & √ce 20. fit summa √ce 9 + √ce 20.

*Additio radicum quadratarũ per propos. 4. lib. 2. Eucl.*

RADICES tamen quadratæ incommensurabiles addi inter se possunt, hoc etiam modo. Ad summam quadratorum addatur duplum eius, quod fit ex vna radice in aliam. Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit summa propositarum duarum radicum. Sint addendæ √ꝫ 6. & √ꝫ 11. Quadrati numeri 6. & 11. faciunt 17. Et ex √ꝫ 6. in √ꝫ 11. fit √ꝫ 66. cuius duplum est √ꝫ 264. Summa ergo ex √ꝫ 6. & √ꝫ 11. collecta erit radix quadrata huius aggregati 17 + √ꝫ 264. nimirum √ꝫ (17 + √ꝫ 264.) Ratio huius operationis ex propos. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam si linea aliqua recta diuisa sit in √ȝ 6. & √ȝ 11. erunt duo quadrata harum partium 6. & 11. quibus si addatur productum ex √ȝ 6 in √ȝ 11. bis, fiet totum quadratũ totius lineæ binomium hoc, 17 + √ȝ 264. Huius ergo radix quadrata, nimirum √ȝ ( 17 + √ȝ 264 ) erit summa quæsita, ex √ȝ 6. & √ȝ 11. collecta. Quo pacto autem ex binomijs radix quadrata sit extrahenda, quando res exigit, & ratio postulat, cap. 27. dicemus: quæ tamen hic inuenietur esse √ȝ 11 + √ȝ 6. quæ non differt a summa radicum propositarum, si per signum + copulentur. Hæc autẽ ratio addendi in numeris rationalibus euidens quoque est. Sint enim addendæ √ȝ 4. & √ȝ 9. vbi manifestum est, summam collectã esse 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13. Et ex √ȝ 4. in √ȝ 9. fit √ȝ 36. cuius duplum est √ȝ 144. Summa ergo ex √ȝ 4. & √ȝ 9. collecta, erit radix quadrata huius aggregati 13 + √ȝ 144. nimirum √ȝ (13 + √ȝ 144). Constat autem, 13. cum √ȝ 144. id est, cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc etiam artificio addi possunt radices quadratæ commensurabiles, sed semper producetur radix simplex in summa. Vt si addendæ sint √ȝ 3. & √ȝ 12. Diuisa hac per illam, fit Quotiens √ȝ 4. rationalis: ac proinde commensurabiles sunt. Ergo si earum quadrati 3. & 12. in vnam summam colligantur, fit numerus 15. Et si vna radix in alteram ducatur, fit numerus √ȝ 36. cuius duplum √ȝ 144. cum 15. facit 15 + √ȝ 144. Huius igitur radix quadrata, nimirum √ȝ (15 + √ȝ 144) hoc est, √ȝ 27. summa erit collecta ex √ȝ 3. & √ȝ 12.

*Additio radicum cõmensurabilium.*

AT verò si radices cuiuscunque generis addendæ fuerint inuentę commensurabiles, hoc est, si diuisa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis siue integer, siue fractus, aut integer cum fracto, & si quidem integer, subscripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars est 1. minoris numeri fractionis. Quare si talis pars sumatur ex minore radice, eaq. multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur summa propositarum radicum. Item quã proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propositarum radicum ad talem partem maioris radicis, qualis pars est 1. maioris numeri fractionis. Quare si talis pars ex maiore radice accipiatur, eaq. ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, producetur propositarum radicum summa.

Vt si addendæ sint √ȝ 8. & √ȝ 18. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiẽs rationalis √ȝ $2\frac{1}{4}$. siue √ȝ $\frac{9}{4}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Quia igitur summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, habebit quoque quintuplam proportionem summa datarum radicum ad semissem minoris radicis. Est autem √ȝ 2. semissis minoris radicis

√ȝ 8.

√ȝ 8. Diuisa namq. √ȝ 8. per 2. hoc est, per √ȝ 4. fit Quotiens √ȝ 2. Quamobrem si √ȝ 2. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc est, per √ȝ 25. gignetur √ȝ 50. summa ex √ȝ 8. & √ȝ 18. collecta.

ITEM quia summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. id est, 5. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radicis. Est autem √ȝ 2. tertia pars maioris radicis √ȝ 18. Diuisa namq. √ȝ 18. per 3. hoc est, per √ȝ 9. fit Quotiens √ȝ 2. Si igitur √ȝ 2. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id est, in √ȝ 25. procreabitur eadem summa √ȝ 50.

EADEM summa conflabitur, si minor radix, √ȝ 8. diuidatur per maiorem √ȝ 18. Fiet enim Quotiens √ȝ $\frac{4}{9}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. Ergo rursus quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem quintuplã, ita quoque eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiã partem maioris radicis, √ȝ 18. hoc est, ad √ȝ 2. Item quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{2}{3}$. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum √ȝ 8. & √ȝ 18. ad semissem minoris radicis, √ȝ 8. nimirum ad √ȝ 2. &c.

RVRSVS sint addendæ √ȝ 3. & √ȝ 12. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens √ȝ 4. hoc est 2. Supposita ergo vnitate, vt fiat fractio $\frac{2}{1}$. quoniam summa 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, estq. 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque summa datarum radicum ad minorem radicem √ȝ 3. proportionem triplam. Quare si √ȝ 3. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in √ȝ 9. fiet summa √ȝ 27.

ITEM quia prædicta summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 1. proportionem habet triplam, estq. 1. semissis maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque summa radicum propositarum ad semissem maioris radicis √ȝ 12. hoc est, ad √ȝ 3. proportionem triplam. Si igitur √ȝ 3. semissis videlicet maioris radicis, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id est, in √ȝ 9. producetur eadẽ summa √ȝ 27.

*Demonstratio additionis radicum cõmensurabilium.*

DEMONSTRATIO huiusce rei est, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita se habeat summa priorum duorum ad maiorem vel minorem ipsorum, vt summa duorum posteriorum ad maiorem, vel minorem ipsorum. Item ita summa priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, vt summa duorum posteriorum ad similem partem maioris, vel minoris. Vt datis numeris 6. 4. & 18. 12. proportionalibus; erit componendo, vt 10. ad 4. ita 30. ad 12. Et per conuersionem rationis, vt 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero est quoque vt 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem; erit ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia est quoque, vt 6. ad 1. sextam partem, ita 18. ad 3. sextam partẽ; erit quoque ex æquo, vt 10. ad 1. ita 30. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (supposita 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum. Et sane admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in iis, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{5}{3}$. vel per $\frac{5}{2}$. multiplicetur maior radix √ꝫ 18. vel minor, √ꝫ 8. Ita vides ex √ꝫ 18. in $\frac{5}{3}$. hoc est, in √ꝫ $\frac{25}{9}$. Vel ex √ꝫ 8. in $\frac{5}{2}$. id est, in √ꝫ $\frac{25}{4}$. gigni √ꝫ 50. vt prius.

SINT rursus addendæ √ꝫ 72. & √ꝫ 18. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens √ꝫ 4. hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 1. habet proportionem triplam, ita quoque summa duarum radicum ad minorem √ꝫ 18. tripla erit. Si ergo ducatur √ꝫ 18. in 3. id est, in √ꝫ 9. fiet √ꝫ 162. pro summa radicum √ꝫ 72. & √ꝫ 18. Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{2}{1}$. ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{3}{2}$. ita quoque summa quæsita erit ad maiorem radicem √ꝫ 72. sesquialtera. Si ergo √ꝫ 72. ducatur in $\frac{3}{2}$. id est, in √ꝫ $\frac{9}{4}$. producetur eadem summa √ꝫ 162.

Pulchra ratio addendi radices commensurabiles.

POSSVNT etiam addi radices commensurabiles percommode per regulam auream, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{3}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3. ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicum summam. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ꝫ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ꝫ 18. ad aliud: procreabitur summa √ꝫ 50. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{2}{1}$. si fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ꝫ 18. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ꝫ 72. ad aliud: gignetur summa √ꝫ 162. quæ prius.

SINT rursus addendæ √ꝫ 2. & √ꝫ 8. Ex diuisione √ꝫ 8. per √ꝫ 2. fit Quotiens rationalis √ꝫ 4. id est, 2. & supposita 1. fit $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ꝫ 2. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ꝫ 8. ad aliud: colligetur summa √ꝫ 18.

Sint quoque addendæ √c 162. & √c 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis √c 12 $\frac{19}{27}$. vel √c $\frac{343}{27}$. hoc est, $\frac{7}{3}$. Si igitur fiat, Vt 3. ad 10. ita √ce 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita √ce 2058. ad aliud: reperietur summa √ce 6000.

ITEM addendæ sint √ce 8. & √ce 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione √ce 27. per √ce 8. fit Quotiens rationalis √ce $3\frac{3}{8}$. vel √ce $\frac{27}{8}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ce 8. ad aliud, Vel.

Vt 3. ad 5. ita √ce 27. ad aliud: prodibit summa √ce 125. hoc est 5.

RVRSVS addendæ sint √ʒʒ 243. & √ʒʒ 3888. Proportio est $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita √ʒʒ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita √ʒʒ 3888. ad aliud; exurget summa √ʒʒ 19683.

POSTREMO sint addendæ √ʒ 4. & √ce 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hisce radicibus ad eandem denominationem, vt ad √ʒce 64. & √ʒce 729 Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis √ʒce $\frac{729}{64}$. hæc est, $\frac{3}{2}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita √ʒce 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita √ʒce 729. ad aliud: procreabitur summa √ʒce 15625 hoc est, 5.

ADDI quoque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem, addatur Quotienti rationali vnitas. Si namq. numerus conflatus ducatur in minorem radicem, procreabitur summa quæsita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si vnitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem, producetur minor radix; atque adeo duo producti summã duarum radicum conficient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 14. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & in vnitatem fiunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum datarum ex minore radice in summam ex Quotiente, & vnitate collectam.

*Alia ratio pulchra addendi radices commensurabiles.*

SINT enim addendæ √ʒ 8. & √ʒ 18. Diuisa maiore per minorẽ, fit Quotiens rationalis √ʒ $2\frac{1}{4}$. id est, $\frac{3}{2}$. & addita 1 fit $\frac{5}{2}$. Et quoniã ex $\frac{5}{2}$. in √ʒ 8. fit √ʒ 50. erit √ʒ 50. summa duarum radicum √ʒ 8. & √ʒ 18.

ITEM sint addendæ √ce 162. & √ce 2058. Ex diuisione nascetur Quotiens rationalis $\frac{7}{3}$. & addita 1. fit numerus $\frac{10}{3}$. qui ductus in √ce 162. gignit √ce 6000. summam duarum radicum propositarum.

QVANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniungentur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quæsita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, æqualis sit ijs, qui ex eadem diuidente radice fiunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquido constat,

*Addere plures radices habẽtes communem mensurã vnam radicẽ eiusdẽ generis*

ex

ex radice diuidente in summam Quotientum gigni summam radicum propositarum.

Vt si addendæ sint √ʒ 8. & √ʒ 18. Si vtraque diuidatur per √ʒ 2. producentur Quotientes rationales √ʒ 4. & √ʒ 9. hoc est 2. & 3. quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in √ʒ 2. procreabitur summa √ʒ 50.

ITEM sint addendæ √ʒ 8. √ʒ 50. & √ʒ 72. si diuidantur singulæ per √ʒ 2. fient Quotientes rationales, √ʒ 4. √ʒ 25. & √ʒ 36. hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in √ʒ 2. communem diuisorem, producet summam √ʒ 338.

SINT tandem addendæ √ʒ 8. √ʒ 32. & √ʒ 48. Diuidantur singulæ per √ʒ 2. fiunt Quotientes √ʒ 4. √ʒ 16. & √ʒ 24. quorum priores duo sunt rationales, nimirum 2. & 4. at posterior irrationalis. Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt, sed solum duæ priores facient summam √ʒ 72. atque ita ex omnibus tribus fiet summa √ʒ 72 + √ʒ 48.

## DE SVBTRACTIONE radicum simplicium. Cap. XX.

*Subtractio radicis ab æquali radice.*

QVANDO radix aliqua a radice æquali subtrahitur, nihil relinquitur. Vt √ʒ 12. a √ʒ 12. Item √ce 100. a √ce 100. subtracta relinquit √ʒ 0. vel √ce 0.

*Subtractio radicũ inæqualium.*

QVOD si radices fuerint incommensurabiles, (quando nimirum, diuisa maiore per minorẽ, Quotiens est irrationalis) non poterit fieri subtractio, nisi per signum subtractorum —. Vt √ʒ 3. ex √ʒ 10. relinquit √ʒ 10 — √ʒ 3. Item √ce 20. ex √ce 50. relinquit √ce 50 — √ce 20.

*Subtractio radicũ quadratarũ per propos. 7. lib. 2. Eucl.*

QVANDO tamen radices sunt quadratæ, & incommensurabiles, poterit minor a maiore subtrahi hoc etiam modo. A summa quadratorum subducatur, quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius, quod relinquitur, erit residuum subtractionis. Sit subtrahenda √ʒ 12. a √ʒ 20. Quadrati numeri 12. & 20. faciunt 32. Et ex √ʒ 12. in √ʒ 20. fit √ʒ 240. cuius duplum √ʒ 960. detractum ex summa quadratorum relinquit 32 — √ʒ 960. Radix ergo quadrata huius relicti, nimirum √ʒ (32 — √ʒ 960.) erit id, quod relinquitur, detracta √ʒ 12. ex √ʒ 20. Huius operationis ratio ex propos. 7. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam si tota aliqua linea sit √ʒ 20. quæ secetur ita, vt vna pars sit √ʒ 12. erunt duo quadrati numeri 20. & 12. nimirum 32. æquales numero √ʒ 960. qui fit bis ex √ʒ 12. in √ʒ 20. vna cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex √ʒ 12. in √ʒ 20. dematur ex 32. summa quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ. Igitur quadratum huius partis erit 32 — √ʒ 960. Ac proinde residuum, quod relinqui-

tur

tur post subtractionem √ʒ 12. ex √ʒ 20. erit √ʒ (32—√ʒ 960.) Quo pacto autem radix quadrata, quando res exigit, ex Apotomis, siue Residuis sit extrahenda, dicemus cap. 27. quæ tamen hic erit √ʒ 20 —√ʒ 12. non differens a residuo, si √ʒ 12. a √ʒ 20. subtrahatur per interpositionem signi —. Verum hæc ratio subtrahendi perspicua quoque est in numeris rationalibus. Sit enim auferenda √ʒ 4. a √ʒ 49. vbi liquido constat, residuum esse 5. Quadrati 4. & 49. efficiunt 53. Et ex √ʒ 4. in √ʒ 49. fit √ʒ 196. cuius duplum √ʒ 784. ablatum ex 53. summa quadratorum relinquit 53—√ʒ 784. ac proinde residuum quæsitum erit √ʒ (53—√ʒ 784.) Constat autem, esse 53 —√ʒ 784. hoc est, 53—28. eam 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc eodem artificio subtrahi poterit radix quadrata a radice quadrata, si fuerint commensurabiles: sed tunc residuum erit radix simplex. Vt si subducenda sit √ʒ 3. a √ʒ 27. Diuisa hac per illam, fit Quotiens √ʒ 9. rationalis, ac proinde commensurabiles sunt. Summa quadratorum 3. & 27. est 30. a qua si dematur √ʒ 324. nimirum duplum eius, quod fit ex √ʒ 3. in √ʒ 27. remanebunt 30 —√ʒ 324. Igitur √ʒ (30 —√ʒ 324.) hoc est, √ʒ 12. erit residuum subtractionis.

*Subtractio radicum commensurabiliũ.*

SI autem radices cuiuscunque generis propositæ fuerint cõmensurabiles, hoc est, si diuisa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis, ita tamen, vt si fuerit numerus integer, ei supponatur vnitas, vt fiat fractio, ita agemus. Quam proportionem habet numerus, qui relinquitur, detracto denominatore fractionis ex numeratore, hoc est, quam habet differentia numerorum fractionis ad 1. eam quoque habebit residuum post detractionem minoris radicis ex maiore ad talem partem minoris, qualis pars est 1. denominatoris fractionis: vel eam quoque proportionem habebit dictum residuum ad talem partem maioris radicis, qualis pars est 1. numeratoris fractionis. Quocirca si talis pars capiatur ex minore radice, vel maiore, eaq. per denominatorem proportionis illius multiplicetur, producetur residuum, quod quæritur.

SIT subtrahenda √ʒ 8. ex √ʒ 50. Ex diuisione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis √ʒ $\frac{25}{4}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Quia ergo differentia numerorum fractionis $\frac{5}{2}$. est 3. quod detracto denominatore 2. ex numeratore 5. remaneant 3. quæ differentia ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque residuum, quod relinquitur, dempta √ʒ 8. ex √ʒ 50. ad semissem minoris radicis, nimirum ad √ʒ 2. vel ad quintam partem maioris radicis, videlicet ad √ʒ 2. proportionem triplam. Si igitur √ʒ 2. ducatur in 3. hoc est, in √ʒ 9. producetur residuum √ʒ 18. quod desideratur.

IDEM residuum habebitur, si minor radix √ʒ 8. diuidatur per maiorem √ʒ 50. Fiet enim Quotiens √ʒ $\frac{4}{25}$. hoc est, $\frac{2}{5}$. Rursus ergo, quemadmodum 3. differentia numerorum fractionis ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam: ita quoque differentia

rentia duarum radicum propositarum triplam habebit proportionẽ ad semissem minoris radicis, vel ad quintam partem maioris, videlicet ad √ʒ 2. Quare triplum √ʒ 2. nimirum √ʒ 18. erit differentia datarum radicum, id est, residuum post detractionem √ʒ 8. ex √ʒ 50. Demonstratio eadem est, quæ supra in additione adducta est.

HINC fit, residuum quoque produci, si per denominatorẽ proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, hoc est, reliquus numerus, dempto minore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractionis, vel ad minorem, nimirum in proposito exemplo per $\frac{3}{5}$. vel $\frac{3}{2}$. (nam $\frac{3}{5}$. est denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, ad 5. maiorem numerum fractionis: At $\frac{3}{2}$. denominator est proportionis, quam eadem differentia 3. habet ad minorem numerum fractionis) multiplicetur maior radix, vel minor. Ita vides ex ductu √ʒ 50. in $\frac{3}{5}$. vel ex ductu √ʒ 8. in $\frac{3}{2}$. gigni residuum √ʒ 18. idem, quod prius.

*Pulchra ratio subtrahẽdi radices commẽsurabiles.*

SVBTRACTIO quoque radicum commensurabilium commodissimè fieri potest per regulam auream. Cum enim sit, vt differentia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorem eiusdem fractionis numerum, ita residuum, quod quæritur, ad radicem maiorem, vel minorem: Et conuertendo, vt maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad residuum subtractionis; Si in dato exemplo fiat:

Vt 5. ad 3. ita √ʒ 50. ad aliud, Vel

Vt 2. ad 3. ita √ʒ 8. ad aliud, producetur residuum quæsitum √ʒ 18.

SIC etiam si subtrahenda sit √c 162. ex √c 6000. Diuisa hac per illam, fit Quotiens rationalis √c $\frac{1000}{27}$. id est, $\frac{10}{3}$. vbi differentia numerorum fractionis est 7. Si ergo fiat,

Vt 10. ad 7. ita √c 6000. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 7. ita √c 162. ad aliud, gignetur residuum desideratum √c 2058.

*Alia ratio pulchra subtrahendi radices cõmensurabiles.*

SVBTRAHI etiam potest radix a radice, si sint commensurabiles, hac ratione. Diuisa maiore per minorem, dematur vnitas ex Quotiente rationali. Si namq. reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit residuum quæsitum. Nam si totus Quotiens in minorem radicem, id est, in diuisorem ducatur, producetur maior radix, quæ diuisa fuit. Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem; liquido constat, si Quotiens, dempta prius vnitate, ducatur in minorem radicem, gigni eandem maiorem radicẽ, minus minore radice, hoc est, differentiam radicum propositarum.

SIT subtrahenda √ʒʒ 3888. a √ʒʒ 19683. Ex diuisione fit Quotiens rationalis √ʒʒ $\frac{81}{16}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. Dempta 1. remanet $\frac{1}{2}$. quæ (renocata prius ad √ʒʒ $\frac{1}{16}$.) ducta in √ʒʒ 3888. facit √ʒʒ 243. differentiam radicum propositarum.

*Alia subtrahendi ratio quando radi-*

DENIQVE fieri poterit subtractio hoc alio modo. Diuidatur vtraque radix per communem aliquam radicem eiusdem generis, ita vt Quotientes sint rationales, si fieri potest. Nam subtracto vno

Quo-

Quotiente ex alio, si reliquus numerus ducatur in communem illũ diuisorem, procreabitur radix residua. Vt si demenda sit √ζ 27. a √ζ 75. Diuisa vtraque per √ζ 3. fiunt Quotientes rationales √ζ 9. & √ζ 25. hoc est, 3. & 5. Quorum differentia 2. ducta in communem diuisorem √ζ 3. facit √ζ 12. pro residuo subtractionis. Ratio huius operationis hæc est. Sint duo numeri 10. & 30. quorum differentia 20. diuidanturq. per communem diuisorem 5. Habebunt ergo Quotientes 6. & 2. eandem proportionem, quam 30. & 10. Ac proinde per conuersionem rationis, erit 30. ad 20. excessum, quo antecedens 30. superat consequentem 10. vt 6. ad 4. excessum, quo antecedens 6. superat consequentem 2. Et permutando erit 30. ad 6. vt 20. ad 4. Habet autem 30. ad 6. proportionem quintuplam, denominatam videlicet a communi diuisore 5. Igitur & 20. ad 4. proportionem habebit quintuplam: ideoq. 20. diuisus per 5. faciet Quotientem 4. Ex quo constat, si 4. differentia Quotientum 2. & 6. ducatur in diuisorem communem 5. produci 20. differentiam numerorum 10. & 30.

*ces proposita habent aliam radicem eiusdem generis communem mensuram.*

| | | |
|---|---|---|
| | 20 | |
| 10 | | 30 |
| | 5 | |
| 2 | | 6 |
| | 4 | |

# INTER DATOS DVOS NVMEROS quotlibet medios proportionales constituere. Cap. XXI.

AGENDVM iam esset de Algorithmo numerorum irrationalium compositorum; sed libet prius exponere vsum quendam præclarum radicum simplicium in constituendis quotlibet medijs proportionalibus inter datos duos numeros, qui est eiusmodi. Si cõstituendus sit vnus medius proportionalis, assumendum erit signum radicale hoc, √ζ. quod inter quadratum, & vnitatem cadat vnus medius proportionalis in qualibet progressione Geometrica, quæ ab 1. incipiat. Si duo medij, accipiendum est signum radicale √ce: si tres, signum √ζζ: si quatuor, signum √β. si quinque, signum √ζce. & sic deinceps. quod facile nos docebit progressio Geometrica in cap. 2. posita.

*Quotuis medios proportionales inter duos numeros collocare.*

DEINDE diuiso maiore numero per minorem, instituenda est progressio Geometrica ab 1. incipiens, & per Quotientem progrediens tot terminorum, duobus amplius, quot medij proportionales desiderantur.

Tertio cuilibet termino huius progressionis præfigendum signum radicale, quod assumendum esse docuimus, pro ratione numeri mediorum.

Quarto, extractis radicibus, quas signum radicale indicat, quando extrahi possunt, delenda sunt signa radicalia, quorum radices extractæ sunt.

Quinto ac vltimo pro extremis progressionis vltimæ ponendi sunt numeri dati, ac per minorem singuli termini medij multiplicandi.

V.g. si inter 5. & 20. statuendus sit vnus numerus medius, asciscendum est signum hoc radicale √z.

DEINDE diuiso maiore numero 20. per minorem 5. constituenda progressio hæc trium terminorum 1. 4. 16. per Quotientem 4. progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum signum √z. hoc modo. √z 1. √z 4. √z 16. eruntq. hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices quadratæ numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis, sic stabit progressio. 1. 2. 4.

Quinto, huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5. multiplicandi sunt. Vnde sic stabit progressio 5. 10. 20. inuentusq. erit medius terminus proportionalis 10. a quia 5. 10. 20. easdem habent proportiones, quas 1. 2. 4. cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit.

a Schol. 18. septimi.

SINT rursus inter 6. & 18. inueniendi quinque medij proportionales. Hic asciscendum est signum √zce.

DEINDE diuiso maiore numero 18. per minorem 6. instituenda est progressio septem terminorum per Quotientem 3. progrediens, hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum signum √zce. vt hic.

√zce 1. √zce 3. √zce 9. √zce 27. √zce 81. √zce 243. √zce 729.

eruntq. hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices Zenzicubicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi possunt, & deletis signis, quorum radices extractæ sunt, sic stabit progressio.

1. √zce 3. √ce 3. √z 3. √ce 9. √zce 243. 3.

Quinto, ac vltimo, multiplicatis singulis huius progressionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propositis, constitues sequentem progressionem cum quinque medijs terminis proportionalibus.

6. √zce 139968. √ce 648. √z 108. √ce 1944. √zce 11337408. 18.

b eruntq. hi termini continuè proportionales, cum sint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. √zce 3. √ce 3. &c. continuè proportionales.

b Schol. 18. septimi.

QVOD autem hi termini sint continuè proportionales, probari experiendo etiam potest. Nam sumptis quibuslibet tribus proximis, tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se, vt

vult

vult propof.20.lib.7.Eucl. Vt sumptis hisce tribus √ce 648. √ʒ 108. √ce 1944. tam ex primo in tertium, quam ex medio in se, gignitur numerus 108. Nam ex √ʒ 108. in se fit numerus 108. & ex √ce 648. in √ce 1944. fit √ce 1259712. hoc est, 108. Item acceptis tribus hisce, 6. √ʒce 139968. √ce 648. Ex medio in se quadrate fit √ʒce 19591041024. hoc est, extracta radice quadrata 139968. productus numerus est √ce 139968. (quia 139968. radicem cubicam non habet.) qui etiam producitur ex 6. in √ce 648. vt liquet.

## S C H O L I V M.

*SOLET sæpenumero contingere, vt ex numero aliquo extrahenda sit radix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo frustra tempus insumatur, traduntur a nonnullis regulæ quædam, quibus facile cognoscuntur numeri non quadrati, & non cubi.*

*Primum omnes numeri, qui vltimam figuram ad dexteram habent 2. vel 3. vel 7. vel 8. non sunt quadrati: quia in numeris quadratis vltima figura necessariò debet esse vna ex his, 1.4.5.6,9.0.* Qui numeri nõ sint quadrati.

*Deinde nullus numerus, ex quo reiectis 9. vt in probatione nouenaria fieri consueuit, non superest aliqua harum figurarum. 1.4.7.0. quadratus est.*

*Tertio, numerus vltimam figuram habens 5. nisi eam præcedat figura 2. cum alia figura pari, vel cum 0. quadratus esse nequit. Vt hi numeri 125. 325.67525. 89725. 100925. quadrati non sunt.*

*Quarto, numeri vltimam figuram habentes 1. vel 9. nisi eam antecedat figura par, aut 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899. 75331. quadrati non sunt.*

*Quinto, numeri habentes vltimam figuram 4. nisi eam præcedat alia figura par, vel 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 6924. 70014. quadrati esse nequeunt.*

*Sexto, numeri habentes figuram vltimam 6. nisi eam antecedat figura impar, quadrati non sunt. Vt numeri 5746. 7086. 34546. quadrati non sunt.*

*Septimo ac vltimo, numerus habens in fine plures figuras 0. sub numero impari, quadratus esse non potest. Vt numeri 460. 678000. 91010. quadrati non sunt.*

*QVOD verò ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, si reiectis 9. non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaq. 12000. non erit cubus, cum reiectis 9. remaneant 3.* Qui numeri nõ sint cubi.

*Deinde numerus, cuius vltima figura est 2. vel 4. vel 6. si proximè antecedens figura non sit par, vel 0. non potest esse cubus. Vt numeri 34532. 456174. 1100038. non sunt cubi.*

*Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. potest esse cubus. Vt hi numeri 1230. 100. 24000. cubi non sunt.*

*Quarto & vltimo, numerus habens vltimam figuram 5. nisi proximè antecedens figura sit 2. vel 7. cubus esse non poterit. Vt hi numeri. 361035. 67895. 1120015. cubi non sunt.*

*Itaq. antequam ad extractionem radicis quadratæ, vel cubicæ aggrediaris, operæpretium feceris, si prius per conditiones prædictas experiaris, an propositus numerus possit esse quadratus, aut cubus.*

# DE ADDITIONE AC SVBTRACTIONE numerorum irrationalium compositorum. Cap. XXII.

CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compositorum ex radicum simplicium Algorithmo, dummodo pro additione, & subtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ duæ, quæ de signis + & — traditæ sunt cap. 4. videlicet.

Duæ regulæ obseruandæ in additione, & subtractione.

1

*Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præposterè ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit —, & ex — fit +.*

2

*Diuersa signa mutant speciem operationis. Et in additione ponitur signum maioris numeri: In subtractione vero superioris, siue maior is sit siue minor, aut æqualis.*

Quæ quidem duæ regulæ cap. 4. prædicto expositæ sunt, & ex subiectis exemplis intelligi facile possunt.

## *Exempla Additionis.*

$$\begin{array}{r} 6 + \sqrt{18} \\ 4 + \sqrt{8} \\ \hline 10 + \sqrt{50} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{27} + \sqrt{8} \\ \sqrt{12} + \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{75} + \sqrt{18} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{162} - 2 \\ \sqrt{200} - 3 \\ \hline \sqrt{722} - 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt[4]{243} - \sqrt[4]{162} \\ \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{32} \\ \hline \sqrt[4]{1875} - \sqrt[4]{1250} \end{array}$$

Exempla

### *Exempla Subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √zz 1875 + √zz 1250 | √z 50 — 5 |
| √zz 243 + √zz 162 | √z 8 — 2 |
| √zz 48 + √zz 32 | √z 18 — 3 |

### *Exempla exceptionis in subtractione pro prima regula.*

| | |
|---|---|
| √z 50 + 2 | √z 50 — 2 |
| √z 18 + 4 | √z 18 — 4 |
| √z 8 — 2 | √z 8 + 2 |

| | |
|---|---|
| √z 50 + 6 | √z 72 + 2 |
| √z 72 + 2 | 6 + √z 18 |
| 4 — √z 2 | √z 18 — 4 |

### *Exempla exceptionis in additione pro regula secunda.*

| | |
|---|---|
| √z 50 + 3 | √z 50 — 3 |
| √z 32 — 5 | √z 32 + 5 |
| √z 162 — 2 | √z 162 + 2 |

### *Exempla exceptionis in subtractione pro regula secunda.*

| | |
|---|---|
| √z 162 + 2 | √z 162 — 2 |
| √z 50 — 3 | √z 50 + 3 |
| √z 32 + 5 | √z 32 — 5 |

### *Alia exempla additionis.*

| | |
|---|---|
| 8 — √z 50 | √z 50 + 6 |
| √z 242 — 12 | 24 — √z 242 |
| √z 72 — 4 | 30 — √z 72 |

### *Alia exempla subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √z 72 — 4 | 30 — √z 72 |
| 8 — √z 50 | √z 50 + 6 |
| √z 242 — 12 | 24 — √z 242 |

Alia

## *Alia exempla subtractionis.*

| | |
|---|---|
| √ʒ 0 + 16 | √ʒ 180 + 0 |
| √ʒ 320 — 8 | √ʒ 320 — 8 |
| 24 — √ʒ 320 | 8 — √ʒ 20 |

*Obseruāda in nonnullis subtractionibus.*

Hic in priori exemplo quoniam numerus √ʒ 320. non habet respondentem in superiori numero, positus est numerus √ʒ 0. cum signo +. Item quia in posteriori exemplo numerus 8. in superiori numero non habet respondentem, positus quoque est numerus 0. cum signo +. quod semper in subtractione obseruandum est, vt superiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM in huiusmodi exemplis fiet hoc etiam modo subtractio. Post numerum, a quo debet fieri subtractio, ponatur numerus subtrahendus, commutatis tamen singulis signis eius in signa contraria, ponendo — pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Vt si subtractio fieri debeat √ʒ 320 — 8. a numero 16. sic stabit exemplum. 16 — √ʒ 320 + 8
Si ergo addantur 16. ad 8. fiunt 24. & dempta √ʒ 320. erit residuum 24 — √ʒ 320.

Item si fiat subtractio √ʒ 320 — 8. à √ʒ 180. sic stabit exemplum. √ʒ 180 — √ʒ 320 + 8. Si ergo addantur √ʒ 180. & — √ʒ 320. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & —. detracta √ʒ 180. & √ʒ 320. erit residuum 8 — √ʒ 20.

Rursus sit facienda subtractio √ʒ 180 — 8. de √ʒ 320. sic stabit exemplum. √ʒ 320 — √ʒ 180 + 8. Si ergo addantur simul √ʒ 320 — √ʒ 180. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & —, dempta √ʒ 180. de √ʒ 320. erit residuum 8 + √ʒ 20.

Sit præterea facienda subtractio 8 — √ʒ 12. de √ʒ 72 — 4. Sic stabit exemplum. √ʒ 72 — 4 — 8 + √ʒ 12. Si ergo addantur inter se √ʒ 72. √ʒ 12. & — 4 — 8. erit residuum √ʒ 72 + √ʒ 12 — 12. quia radices illæ sunt incommensurabiles. Quòd si addantur per propos. 4. lib. 2. Eucl. facient √ʒ (84 + √ʒ 3456.) atque adeo residuum totum erit √ʒ (84 + √ʒ 3456) — 12.

[illegible]

Hoc autem modo rectè fieri subtractionem, liquido constat in numeris rationalibus. Sit enim facienda subtractio √ʒ 49 — 3. de 8 + √ʒ 9. hoc est, 4. de 11. vbi residuum est 7. Secundum præceptum traditum sic stabit exemplum. 8 + √ʒ 9 — √ʒ 49 + 3.
Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex √ʒ 9. & — √ʒ 49. fit numerus — 4. Ergo residuum est 11 — 4. hoc est, 7. vt ratio postulat.

*Alia exēpla additionis, & subtractionis.*

| |
|---|
| 7 + √ʒ 5 |
| 4 + √ʒ 3 |
| 11 + √ʒ (8 + √ʒ 60) |

SED vt totum hoc negotium additionis, subtractionisq. planius intelligatur, subiungemus alia nonnulla exēpla. Sint ergo addenda 7 + √ʒ 5. ad 4 + √ʒ 3.

Ex

Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex √ʒ 5. ac √ʒ 3. per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. fit √ʒ (8 + √ʒ 60.) Igitur ſumma eſt 11 + √ʒ (8 + √ʒ 60.)

RVRSVS ſint addenda √ʒ 5 + 3. ad √ʒ 20 — 4. Ex √ʒ 5. & √ʒ 20. quia comenſurabiles ſunt, fit √ʒ 45. & ex + 3. ac — 4. fit — 1. Tota ergo ſumma eſt √ʒ 45 — 1. Eadem ſumma conflabitur, ſi √ʒ 5. ad √ʒ 20. addantur per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. vt ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim √ʒ (25 + √ʒ 400.) hoc eſt, √ʒ 45. atque ita rurſus erit tota ſumma √ʒ 45 — 1.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 5 | + | 3 |
| √ʒ 20 | — | 4 |
| √ʒ 45 | — | 1 |

PRAETEREA ſint addenda √ʒ 5 + 7. ad √ʒ 6 — 7. Ex √ʒ 5. & √ʒ 6. fit √ʒ (11 + √ʒ 120.) & ex + 7. & — 7. fit 0. Summa ergo collecta erit √ʒ (11 + √ʒ 120.)

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 5 | + | 7 |
| √ʒ 6 | — | 7 |
| √ʒ (11 + √ʒ 120) | | |

AMPLIVS ſint addenda √ʒ 7 + 3. ad √ʒ 20 — 4. Ex √ʒ 7. & √ʒ 20. fit √ʒ. (27 + √ʒ 560) & ex + 3. & — 4. fit — 1. Tota ergo ſumma erit √ʒ (27 + √ʒ 560) — 1.

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 7 | + | 3 |
| √ʒ 20 | — | 4 |
| √ʒ (27 + √ʒ 560) | | |

SINT quoque addenda √ʒ 5 + 7. ad √ʒ 6 — 2. Ex √ʒ 5. & √ʒ 6. fit √ʒ. (11 + √ʒ 120.) at ex + 7. & — 2. fit + 5. Tota ergo ſumma erit √ʒ (11 + √ʒ 120) + 5. Vel 5 + √ʒ (11 + √ʒ 120.)

| | | |
|---|---|---|
| √ʒ 5 | + | 7 |
| √ʒ 6 | — | 2 |
| √ʒ (11 + √ʒ 120) | + | 5 |

ITEM ſint addenda 7 + √ʒ 5. ad 4 — √ʒ 3. Summa erit 11 + √ʒ 5 — √ʒ 3. Vel ſecundum regulam 2. ſubtrahemus per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. √ʒ 3. a √ʒ 5. propter diuerſa ſigna +. & —. hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex + √ʒ 5. in — √ʒ 3. fit — √ʒ 15. cuius duplum — √ʒ 60. ex aggregato quadratorum 8. auferatur, remanebuntq. 8 — √ʒ 60. Radix ergo huius relicti eſt id, quod relinquitur poſt detractionem √ʒ 3. ex √ʒ 5. cui radici præfigendum eſt ſignum +, maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 11 + √ʒ (8 — √ʒ 60.)

| | | |
|---|---|---|
| 7 | + | √ʒ 5 |
| 4 | — | √ʒ 3 |
| 11 | + | √ʒ (5 — √ʒ 3) |

ITEM ſint addenda 8 — √ʒ 7. ad 10 — √ʒ 7. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex — √ʒ 7. & — √ʒ 7. fit — √ʒ 28. Tota ergo ſumma erit 18 — √ʒ 28.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | — | √ʒ 7 |
| 10 | — | √ʒ 7 |
| 18 | — | √ʒ 28 |

ITEM ſint addenda 10 + √ʒ 49. ad 7 — √ʒ 4. Vbi manifeſtum eſt, ſummam eſſe 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et ſubtracta √ʒ 4. a √ʒ 49. per propoſ. 7. lib. 2. Eucl. propter ſigna +. & — diuerſa, remanent √ʒ (53 — √ʒ 784.) cui præponendum eſt ſignum + maioris numeri. Tota ergo ſumma eſt 17 + √ʒ (53 — √ʒ 784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ʒ 784. ſit 5.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | + | √ʒ 49 |
| 7 | — | √ʒ 4 |
| 17 | + | √ʒ (53 — √ʒ 784) |

(Nam

(Nam 28. radix numeri 784. dempta ex 53. relinquit 25. cuius radix quadrata est 5.) erit tota summa 17 + 5. hoc est, 22.

ITEM sint addenda 10 — √ȝ 49. ad 7 + √ȝ 4. vbi etiam liquet, summam esse 22. Ex 10. & 7. fiunt 17. Et subtracta √ȝ 4. a √ȝ 49. propos. 7. lib. 2. Eucl. propter diuersa signa — & +. remanet √ȝ (53 — 784) cui præfigendum est signum — maioris numeri. Tota ergo summa collecta est 17 — √ȝ (53 — √ȝ 784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — √ȝ 784. sit 5. erit tota summa 17 — 5. hoc est, 22.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | — | √ȝ | 49 |
| 7 | + | √ȝ | 4 |
| 17 | — | √ȝ (53 — √ȝ 784) | |

ITEM sint addenda 6. ad √ȝ 24 + 3. Fiet summa √ȝ 24 + 9. Vel 9 + √ȝ 24.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ | 24 | + | 3 |
| √ȝ | 0 | + | 6 |
| √ȝ | 24 | + | 9 |

ITEM sint addenda 6. ad √ȝ 24 — 3. Fiet summa √ȝ 24 + 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ | 24 | — | 3 |
| √ȝ | 0 | + | 6 |
| √ȝ | 24 | + | 3 |

ITEM sit addenda √ȝ 6. ad √ȝ 24 + 3. Ex radicibus, quia commensurabiles sunt, fit √ȝ 54. At ex — 3 & + 0. fit — 3. Summa igitur est √ȝ 54 — 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ | 24 | — | 3 |
| √ȝ | 6 | + | 0 |
| √ȝ | 54 | — | 3 |

ITEM sit addenda √ȝ 8. ad √ȝ 32 + √ȝ 18. Ex √ȝ 8. & √ȝ 32. quia commensurabiles sunt, fit √ȝ 72. Fit ergo summa √ȝ 72 + √ȝ 18. Atque ex his duabus radicibus, cum commensurabiles sint, fit √ȝ 162. summa quæsita. Vel quia commensurabiles etiam sunt √ȝ 8. & √ȝ 18. fiet ex illis √ȝ 50. ita vt tota summa fit √ȝ 50 + √ȝ 32. Atque ex his duabus radicibus, cum sint commensurabiles, fit √ȝ 162. summa quæsita, vt prius. Itaq. hi numeri √ȝ 72 + √ȝ 18. & √ȝ 50 + √ȝ 32. æquales sunt, cum vterque æqualis sit √ȝ 162. vt patuit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ 8 | + | √ȝ | 0 |
| √ȝ 32 | + | √ȝ | 18 |
| √ȝ 72 | + | √ȝ | 18 |

ITEM sit addenda √ce 216 — √ȝȝ 405. ad √ce 64 — √ȝȝ 80. Ex √ce 116. & √ce 64. quia commensurabiles sunt, fit √ce 1000. hoc est, 10. At ex √ȝȝ 405. & √ȝȝ 80. quia commensurabiles quoque sunt, fit √ȝȝ 3125. Tota ergo summa est 10 — √ȝȝ 3125.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ce 216 | — | √ȝȝ | 405 |
| √ce 64 | — | √ȝȝ | 80 |
| 10 | — | √ȝȝ | 3125 |

ITEM sit addenda √ȝȝ 256 — √ce 27. ad √ȝȝ 81 + √ce 8. Ex √ȝȝ 256. & √ȝȝ 81. fit √ȝȝ 2401. hoc est, 7. At ex — √ce 27. & + √ce 8. fit — √ce 1. hoc est, — 1. Summa ergo tota est 7 — 1. hoc est 6. Quod ita esse, liquet. Nam √ȝȝ 256. est 4. a qua si tollatur √ce 27. hoc est, 3. remanet 1. cui si addatur √ȝȝ 81. id est 3. & insuper √ce 8. id est 2. fiet summa 6. vt prius.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝȝ 256 | — | √ce | 27 |
| √ȝȝ 81 | + | √ce | 8 |
| 7 | — | | 1 |

SINT

SINT denique addendæ √ȝ (5 + √ȝ 6.) & √ȝ (19 — √ȝ 11.) Huiusmodi radices, quas supra appellauimus radices numerorum irrationalium compositorum, diminutorumvè, & quas alij radices Vniuersales dicunt, non possunt commodius in vnam summam redigi, quam per signum +, hoc modo. √ȝ (5 + √ȝ 6.) + √ȝ (19 — √ȝ 11.) Sic etiam, si prior a posteriori sit subtrahenda, erit residuum √ȝ (19 — √ȝ 11) — √ȝ (5 + √ȝ 6.) Sed de huiusmodi radicibus plura cap. 24. dicemus.

SIT subtrahenda √ȝȝ 256 — √ce 27. a √ȝȝ 2401 — √ce 1. Vbi manifestum est, residuum esse 5. Quoniam √ȝȝ 2401. & √ȝȝ 256. commensurabiles sunt, si hæc ab illa demitur, relinquetur √ȝȝ 81. hoc est, 3. Et si — √ce 27. a — √ce 1. subtrahatur, cum sint etiam commensurabiles, remanebit + √ce 8, hoc est, 2. Liquet autem 3. & 2. efficere 5. vt ratio postulat.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ȝȝ | 2401 | — | √ce | 1 |
| √ȝȝ | 256 | — | √ce | 27 |
| √ȝȝ | 81 | + | √ce | 8 |

ITEM sint subtrahenda 9 — √ȝ 50. a √ȝ 72 — 3. Quoniam + √ȝ 72. & — √ȝ 50. habent dissimilia signa, mutabitur species operationis, hoc est, inter se addendæ sunt, fietq. earum summa √ȝ 242. Item quia — 3. & + 9. habent signa diuersa, fiet etiam additio, & summa 12. recipiet signum — superioris numeri. Residuum ergo quod quæritur, erit √ȝ 242 — 12.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ 72 | — | 3 | |
| 9 | — | √ȝ 50 | |
| √ȝ 242 | — | 12 | |

ITEM sit subtrahendus a √ce 1000 + √ȝȝ 3125. numerus hic √ce 216 — √ȝȝ 405. Quia √ce 1000. & √ce 216. commensurabiles sunt, detracta hac ex illa, remanet √ce 64. hoc est, 4. At ex √ȝȝ 3125. & √ȝȝ 405. quæ etiam commensurabiles sunt, fit summa √ȝȝ 20480. Hæ enim inter se addendæ sunt, iuxta 2. regulam, propter signa dissimilia: eiq. summæ præfigendum signum + superioris numeri.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ce | 1000 | + | √ȝȝ | 3125 |
| √ce | 216 | — | √ȝȝ | 405 |
| | 4 | + | √ȝȝ | 20480 |

DENIQVE sit subtrahenda √ce 216 — √ȝȝ 405. a √ce 1000 — √ȝȝ 3125. Residuum erit id, quod in hac formula descriptum est. Nam √ce 216. detracta ex √ce 1000. reliquam facit √ce 64. hoc est, 4. &c.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ce | 1000 | — | √ȝȝ | 3125 |
| √ce | 216 | — | √ȝȝ | 405 |
| | 4 | — | √ȝȝ | 80 |

CAETERVM quando duæ particulæ numeri compositi sunt omnino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuissimè vnus numerus ad alterum additur, vel diminutus a composito demitur, hac ratione. *Compendiosa additio, subtractioq. cōpositorum & diminutorū numerorum similium.*

Additio peracta erit, si prior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt ex additione 15 + √ȝ 8. ad 15 — √ȝ 8. fit summa 30. Item ex additione √ȝ 20 + 6. ad √ȝ 20 — 6. fit summa √ȝ 80. Sic etiam ex √ȝ 20 + √ȝ 6. ad √ȝ 20 — √ȝ 6. fit summa √ȝ 80. Ratio est, quod

O posteriorum

posteriores particulæ se mutuò interimant, propter signa +. & —.

Subtractio vero absoluta erit, si posterior particula alterutrius numeri duplicetur. Vt 10 — √ȝ 4. ex 10 + √ȝ 4. relinquunt √ȝ 16, id est 4. Item √ȝ 12 — 5. ex √ȝ 12 + 5. relinquunt 10. Item √ȝ 12 — √ȝ 5. ex √ȝ 12 + √ȝ 5. relinquunt √ȝ 20. Ratio est, quod priores particulæ ex subtractione nil relinquant, & posteriores addendæ sint, quemadmodum regula 2. præcipit, propter diuersa signa — & +.

---

## DE MVLTIPLICATIONE, ac Diuisione numerorum irrationalium Compositorum, & Diminutorum.

## Cap. XXIII.

HIC etiam in memoriam reuocanda est regula illa, quam cap. 5. de signis + & — præscripsimus. Videlicet.

*Regula in multiplicatione, ac diuisione obseruanda.*

EADEM *signa ponunt signum Additorum: Diuersa vero signa ponunt signum Subtractorum.*

Siue igitur plus in plus, siue minus in minus multiplicetur, semper producitur plus. Et siue plus in minus, siue minus in plus ducatur, semper procreatur minus. Posito igitur ex duobus numeris vno sub altero, fit multiplicatio, vt in numeris absolutis, dummodo obserues ea, quæ cap. 18. de multiplicatione radicum simpliciũ, & cap. 19. de earundem radicum additione, subtractioneq. tradita sunt. id quod exempla infrascripta docebunt. In sequenti exemplo, ex — √ȝ 45. in — √ȝ 20. fit + √ȝ 900. hoc est, + 30. Et ex — √ȝ 45. in + 6, id est, in + √ȝ 36. fit — √ȝ 1620. Et ex — √ȝ 20. in + 8. hoc est, in + √ȝ 64. fit — √ȝ 1280. Ac denique ex + 8. in + 6. fit + 48. Eritq. totus numerus productus 48 — √ȝ 1280 — √ȝ 1620 + 30. qui, si fiat reductio per additionem, & subtractionem, erit 78 — √ȝ 5780. Nam ex + 48. & + 30. fiunt + 78. Et ex — √ȝ 1280. & — √ȝ 1620. quia commensurabiles sunt, fit — √ȝ 5780.

6 — √ȝ 20
8 — √ȝ 45

48 — √ȝ 1280 — √ȝ 1620 + 30

Per reductionem erit, 78 — √ȝ 5780

IN hoc altero exemplo, ex — √ȝȝ 162. in — √ȝȝ 648. fit + √ȝȝ 104976. hoc est, + 18. Et ex — √ȝȝ 162. in + √ȝȝ 288. fit — √ȝȝ 46656. hoc est, √ȝ 216. Et ex — √ȝȝ 648. in + √ȝȝ 128. fit

— √ȝȝ

| | |
|---|---|
| √ʒʒ 288 — √ʒʒ 648 | — √ʒʒ 82944. id est, — √ʒ |
| √ʒʒ 128 — √ʒʒ 162 | 288. ac tãdem ex + √ʒʒ 128. |
| Productus. √ʒ 192 — √ʒ 288 — √ʒ 216 + 18 | in + √ʒʒ 288. |
| Vel 18 + √ʒ 192 — √ʒ 288 — √ʒ 216 | fit + √ʒʒ 36864 id est, √ʒ 192. |

Eritq. totus numerus productus √ʒ 192 — √ʒ 288 — √ʒ 216 + 18. Vel, vt maiores semper numeri præcedant. 18 + √ʒ 192 — √ʒ 288 — √ʒ 216. vt in formula vides.

### *Alia exempla multiplicationis.*

| | |
|---|---|
| √ce 7 + √β 6 | √ʒ 7 + √ce 3 |
| √ʒ 3 | √ʒ 2 |
| √ʒce 1323 + √ʒβ 8748 | √ʒ 14 + √ʒce 72 |

IN priori exemplo reduximus √β 6. & √ʒ 3. ad eandem denominationem, videlicet ad √ʒβ 36. & √ʒβ 243. atque ita ex multiplicatione facta est √ʒβ 8748. Deinde √ʒ 3. & √ce 7. reductæ sunt ad √ʒce 27. & √ʒce 49. eiusdem denominationis, procreataq. est ex multiplicatione √ʒce 1323.

IN exemplo posteriori reductæ sunt √ʒ 2. & √ce 3. ad √ʒce 8. & √ʒce 9. & ex multiplicatione facta est √ʒce 72. atque ex √ʒ 2. in √ʒ 7. facta est √ʒ 14.

### *Aliud exemplum in numeris rationalibus.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ʒ | 9 | + | √ce | 27 |
| | | | √ʒ | 4 |
| √ʒ | 36 | + | √ʒce | 46656 |
| hoc est, | 6 | + | 6 | |

IN hoc exemplo reducuntur √ce 27. & √ʒ 4. ad √ʒce 729. & √ʒce 64. quarum multiplicatio facit √ʒce 46656. hoc est, 6. Deinde ex √ʒ 4. in √ʒ 9. fit √ʒ 36. id est, 6. ita vt totus numerus productus sit 6 + 6. hoc est, 12.

### *Alia duo exempla.*

| | |
|---|---|
| 7 + √ʒ 5 | 7 — √ʒ 5 |
| 7 + √ʒ 5 | 7 — √ʒ 5 |
| 49 + √ʒ 245 + √ʒ 245 + 5 | 49 — √ʒ 245 — √ʒ 245 + 5 |

IN priori exemplo ex numero composito in se fit productus 49 + √ʒ 245 + √ʒ 245 + 5. hoc est, 54 + √ʒ 980. quod ex 49. & + 5. fiant 54. & ex √ʒ 245. & √ʒ 245. hoc est, ex duplo √ʒ 245. fiat √ʒ 980. In posteriori ex numero diminuto in se fit productus 49 — √ʒ 245 — √ʒ 245 + 5. hoc est, 54 — √ʒ 980.

*Compendiosa multiplicatio numeri compositi, vel diminuti in se.*

IMMO vt ducatur numerus compositus in seipsum, vel in alium æqualem, satis est, vt quadrata particularum simul addantur, & huic summæ adijciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam, vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularũ conficiunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo √ʒ 245. in posteriori autem — √ʒ 245. cuius duplum est √ʒ 980. vel — √ʒ 980. Igitur in exemplo priori producetur numerus 54 + √ʒ 980. In posteriori vero hic, 54 — √ʒ 980. veluti prius.

### *Alia duo exempla in numeris rationalibus.*

| | |
|---|---|
| 5 + √ʒ 4 | 5 — √ʒ 4 |
| 5 + √ʒ 4 | 5 — √ʒ 4 |
| 25 + √ʒ 100 + √ʒ 100 + 4 | 25 — √ʒ 100 — √ʒ 100 + 4 |

IN priori ducuntur 7. in se, fitq. productus 49. In posteriori vero ducuntur 3. in se, fitq. productus 9. vt liquet. Quæ multiplicationes per compendium proximè traditum ita fient. Quadrata particularum conficiunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit, in priori quidem exemplo, √ʒ 100. in posteriori vero — √ʒ 100. cuius duplum est √ʒ 400. vel — √ʒ 400. In priori ergo exemplo productus numerus erit 29 + √ʒ 400. hoc est, 49. In posteriori vero 29 — √ʒ 400. id est, 9.

### *Alia duo exempla.*

| | |
|---|---|
| 6 + √ʒ 8 | √ʒ 10 + √ʒ 2 |
| 6 — √ʒ 8 | √ʒ 10 — √ʒ 2 |
| 36 + √ʒ 288 — √ʒ 288 — 8 | 10 + √ʒ 20 — √ʒ 20 — 2 |

*Compendiosa multiplicatio numeri compositi quadratarum radicũ per similẽ numerum diminutum.*

IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac similibus, in quibus ducitur numerus compositus in similem diminutum, aut contra, perficietur breuissimè multiplicatio, si in alterutro numerorum ex quadrato particulæ prioris demătur quadratum posterioris particulæ, siue posterior particula minor sit priore, siue maior. Vt in priori exemplo, si 8. quadratus numerus posterioris particulæ √ʒ 8. dematur ex 36. numero quadrato prioris particulæ 6. reliquus fiet productus numerus 28. In posteriori autem exemplo, si 2. quadratus numerus posterioris particulæ √ʒ 2. detrahatur à 10. quadrato numero prioris particulæ √ʒ 10. relinquetur productus numerus 8.

ATQVE

ATQVE ita quotiescunque numerus compositus, ac diminutus radicum quadratarum irrationalis, si similes sint, inter se multiplicantur, producitur semper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. propos. 115. demonstrauit. quia huiusmodi numeri sunt Binomium, ac Residuum, vt ex cap. 27. constabit.

QVANDO posterior particula maior est, producitur numerus diminutus, vt in hoc apposito exemplo apparet. Nam si 16. quadratus numerus posterioris particulæ dematur ex 4. quadrato numero particulæ prioris, remanent 4 — 16. Atque hoc ita esse, docet hæc altera formula multiplicationis. Et quoniam 2 + √z 16. faciunt 6. & 2 — √z 16. faciunt 2 — 4. si 2 — 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 — 24. Necesse igitur est, hosce duos numeros 4 — 16. & 12 — 24. esse æquales, vt verè sunt, cum vnus ab altero detractus relinquat 0. vt subscriptæ duæ formulæ subtractionum demonstrant: quia 8 — 8. æquiualent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4 ad — 16. quam ex 12. ad — 24. semper summa fiat — 12. iuxta regulam 2. additionis.

| |
|---|
| 2 + √z 16 |
| 2 — √z 16 |
| 4 — 16 |

| |
|---|
| 2 + √z 16 |
| 2 — √z 16 |
| — √z 64 — 16 |
| 4 + √z 64 |
| 4 — 16 |

| |
|---|
| 2 — 4 |
| 6 |
| 12 — 24 |

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compositorum, vel diminutorum, quas Vniuersales dicunt, agemus cap. 24. quod sequitur.

| | |
|---|---|
| 4 — 16 | 12 — 24 |
| 12 — 24 | 4 — 16 |
| — 8 + 8 | 8 — 8 |

## *Exempla Diuisionis.*

*Diuisio numeri compositi diminutiue per radicem simplicem.*

√ce $\cancel{28}$ + √ce $\cancel{20}$ ( √ce 7 + √ce 5
per √ce $\cancel{4}$ √ce $\cancel{4}$

6
√ce $\cancel{28}$ + √ce $\cancel{20}$ ( √ce 4 + √ce $2\frac{6}{7}$
per √ce $\cancel{7}$ √ce $\cancel{7}$

## *Alia exempla Diuisionis.*

√z 20 — √ce 10 ( √z $2\frac{2}{9}$ — √ce $\frac{10}{27}$
per 3

√zz 8 + √ß 3 ( √zz 2 + √zß $\frac{3}{32}$
per √z 2

IN priori exemplo, diuiſa √ζ 20. per 3. id eſt, per √ζ 9. fit Quotiens √ζ $2\frac{2}{9}$. Diuiſa vero — √ce 10. per + 3. id eſt, per + √ce 27. fit Quotiens — √ce $\frac{10}{27}$. In poſteriori autem exemplo, reducendæ ſunt √ζζ 8. & √ζ 2. ad √ζζζ 64. & √ζζζ 16. eiuſdem denominationis; diuiſaq. illa per hanc, fit Quotiens √ζζζ 4. hoc eſt, √ζζ 2. Eodem modo √β 3. & √ζ 2. reducendæ ſunt ad √ζβ 9. & √ζβ 32. diuiſaq. illa per hanc, fit Quotiens √ζβ $\frac{9}{32}$. Quoniam autem multiplicatio probat diuiſionem, ſi poſterior Quotiens multiplicetur per √ζ 2. diuiſore, producetur numerus diuiſus √ζζ 8 + √β 3. Nam √ζβ $\frac{9}{32}$. & √ζ 2. reducuntur ad √ζζβ $\frac{81}{1024}$. & √ζζβ 1024. quæ inter ſe multiplicatæ gignunt √ζζβ $\frac{82944}{1024}$. hoc eſt, √ζζβ 81. ſiue √β 3. Item √ζζ 2. & √ζ 2. reducuntur ad √ζζζ 4. & √ζζζ 16. quæ inter ſe multiplicatæ faciũt √ζζζ 64. hoc eſt, √ζζ 8. Item ſi ſit diuidendus numerus √ζζ 23328 — √ζζ 10368. per 6. hoc eſt, per √ζζ 1296. fit Quotiens √ζζ 324 — 9. hoc eſt 18 — 9. nimirum 9.

*Diuiſio per numerum radicum quadratarũ, vel zenſizenſicarum compoſitum, aut diminutum.*

QVANDO diuiſor eſt numerus radicum quadratarum, vel zenſizenſicarum compoſitus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum ſimilem, mutato ſigno + in —, & ſigno — in +, vt gignatur numerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum eſt, pro diuiſore. Deinde per eundem hunc numerum ita transmutatum multiplicandus eſt numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuiſorem inuentum diuidendus. Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuiſorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propoſitus numerus diuidendus ad diuiſorem propoſitum: propterea quod idem numerus ille transmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, ſiue diuidendus propoſitus per propoſitum diuiſorem, ſiue nouus diuidendus inuentus per nouum diuiſorem diuidatur. Quemadmodum quia ita ſe habent 12. ad 3. vt 48. ad 12. ſemper Quotiens 4. procreatur; ſiue 12. per 3. ſiue 48. per 12. diuidantur.

2 17. ſept.

SINT diuidenda 42. per √ζ 25 + √ζ 4. hoc eſt, per 7. vbi Quotiens eſt 6. ſi multiplicetur diuiſor per √ζ 25 — √ζ 4. gignetur nouus diuiſor 21. qui nimirum remanet, ſi 4. quadratum poſterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ demătur, vt paulò ante dictum eſt. Et ſi diuidendus numerus 42. hoc eſt, √ζ 1764. per eundem numerum √ζ 25 — √ζ 4. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus √ζ 44100 — √ζ 7056. quo diuiſo per inuentum diuiſorem 21. hoc eſt, per √ζ 441. fit Quotiens 6. Nam √ζ 100. nimirum 10. — √ζ 16. id eſt, — 4. facit 6. vt manifeſtum eſt.

$$\sqrt{\zeta}\ 44100 \;—\; \sqrt{\zeta}\ 7056\ (\sqrt{\zeta}\ 100 \;—\; \sqrt{\zeta}\ 16$$
$$\sqrt{\zeta}\ 441 \qquad\qquad \sqrt{\zeta}\ 4411$$

SINT rurſus diuidenda 54. per 2 + √ζ 16. hoc eſt, per 6. vbi Quotiens eſt 9. Si diuiſor ducatur in 2 — √ζ 16. producetur numerus diminutus 4 — 16. quia poſterior particula priore maior eſt.

Quare

Quare inuertendæ ſunt particulæ diuiſoris hoc modo √ʒ 16 + 2. vt ex ductu √ʒ 16 — 2. fiat numerus ſimplex 12. pro diuiſore. Quòd ſi diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum √ʒ 16 — 2. fiet nouus diuidendus √ʒ 46656 — 108. quo diuiſo per 12. nimirum √ʒ 46656. per √ʒ 144. & — 108. per 12. fit Quotiens √ʒ 324 — 9. hoc eſt, 18 — 9. nimirum 9.

ITEM ſint diuidenda 6. per √ʒ 12 + √ʒ 6. Ducto vtroque numero in √ʒ 12 — √ʒ 6. fiunt √ʒ 432 — √ʒ 216. & 6. Ex diuiſione autem √ʒ 432 — √ʒ 216. per 6. hoc eſt, per √ʒ 36. fit Quotiens √ʒ 12 — √ʒ 6. Probatur. Nam ex Quotiente √ʒ 12 — √ʒ 6. in diuiſorem √ʒ 12 + √ʒ 6. fit numerus diuiſus 6.

ITEM diuidendus ſit numerus 66 — √ʒ 2000. per 8 — √ʒ 45. Si vterque numerus ducatur in 8 + √ʒ 45. fit nouus diuidendus 528 — √ʒ 128000 + √ʒ 196020 — √ʒ 90000. hoc eſt, 228 + √ʒ 7220. (Nam detracta √ʒ 90000. id eſt, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & √ʒ 128000. detracta ex √ʒ 196020. cum hi numeri ſint commenſurabiles, relinquit √ʒ 7220.) atque nouus diuiſor 19. Fit autẽ ex diuiſione Quotiens 12 + √ʒ 20. Nam ex hoc Quotiente in diuiſorem 8 — √ʒ 45. fit numerus 96 + √ʒ 1280 — √ʒ 6480 — √ʒ 900. qui æqualis eſt numero diuiſo 66 — √ʒ 2000. quia √ʒ 900. hoc eſt, 30. ex 96. relinquit 66. & — √ʒ 6480. ex + √ʒ 1280. hoc eſt, ex additione vnius ad alterum propter ſigna diuerſa, cum ſint commẽſurabiles, fit numerus — √ʒ 2000.

SINT quoque diuidenda 20. per √ʒʒ 16 + √ʒʒ 81. hoc eſt, per 5. vbi Quotiens eſt 4. Inuertatur diuiſor ſic, √ʒʒ 81 + √ʒʒ 16. vt poſterior particula minor ſit priore, multipliceturq. tam diuidendus 20. quam diuiſor √ʒʒ 81 + √ʒʒ 16 per √ʒʒ 81 — √ʒʒ 16. fietq. nouus diuidendus √ʒʒ 12960000 — √ʒʒ 2560000. & nouus diuiſor √ʒʒ 6561 — √ʒʒ 256. hoc eſt 9 — 4. videlicet 5. Diuiſo ergo illo diuidendo per 5. hoc eſt, per √ʒʒ 625. fit Quotiens √ʒʒ 20736 — √ʒʒ 4096. hoc eſt, 12 — 8 nimirum 4. vt par eſt. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem eſſe rationem in radicibus zenſizenſicis, quæ eſt in radicibus zenſicis.

SINT rurſus diuidenda 10. per √ʒʒ 5 + √ʒʒ 3. Multiplicetur vterque numerus per √ʒʒ 5 — √ʒʒ 3. fietq. nouus diuidendus √ʒʒ 50000 — √ʒʒ 30000. & nouus diuiſor √ʒʒ 25 — √ʒʒ 9. hoc eſt, √ʒ 5 — √ʒ 3. Et quoniam hic diuiſor non eſt numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuiſorem, per √ʒ 5 + √ʒ 3. fietq. alius nouus diuidendus √ʒʒ 1250000 — √ʒʒ 750000 + √ʒʒ 450000 — √ʒʒ 270000. & alius diuiſor nouus 5 — 3. hoc eſt, 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuiſorem diuidemus, id eſt, per √ʒʒ 16. faciemus Quotientẽ √ʒʒ 78125 — √ʒʒ 46875 + √ʒʒ 28125 — √ʒʒ 16875. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuiſorem propoſitum, nimirum in √ʒʒ 5 + √ʒʒ 3. producetur numerus diuiſus 10. vt hic patet.

√ʒʒ

√ȝȝ 78125 — √ȝȝ 46875 + √ȝȝ 28125 — √ȝȝ 16875
√ȝȝ 5 + √ȝȝ 3

+ √ȝȝ 234375 — √ȝȝ 140625 + √ȝȝ 84375 — √ȝȝ 50625
√ȝȝ 390625 — √ȝȝ 234375 + √ȝȝ 140625 — √ȝȝ 84375

Quoniam enim numeri intermedij, quorum bini æquales sunt, & diuersorum signorum, se mutuo tollunt, relinquetur productus √ȝȝ 390625 — √ȝȝ 50625. hoc est, 25 — 15. videlicet 10.

*Diuisio per numerũ radicũ quadratarum compositũ triũ particularum vel plurium.*

PRAETEREA sint diuidenda 100. per √ȝ 3 + √ȝ 5 + 6. Hic quia diuisor habet tres particulas affectas signo +. vt inueniatur diuisor simplex, multiplicandus est diuisor in similem numerum, mutata vltima particula +. in —. vt hic vides. Producetur enim numerus duarum particularum √ȝ 60 + 2. pro nouo diuisore, qui etiam habebitur hoc modo. Priores duæ particulæ inter se multiplicentur. Nam

√ȝ 3 + √ȝ 5 + √ȝ 6
√ȝ 3 + √ȝ 5 + √ȝ 6

— √ȝ 18 — √ȝ 30 — 6
+ √ȝ 15 + 5 + √ȝ 30
+ 3 + √ȝ 15 + √ȝ 18

√ȝ 60 + 2

si productus numerus √ȝ 15. duplicetur, proueniet √ȝ 60. pro priore particula. Et si vltimæ particulæ numerus 6. dematur ex 8. summa numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit numerus + 2. pro particula posteriore. Quod si numerus diuidendus 100. per eundem numerum √ȝ 3 + √ȝ 5 — √ȝ 6. multiplicetur, gignetur nouus numerus diuidendus √ȝ 30000 + √ȝ 50000 — √ȝ 60000. [a] qui ad nouum diuisorem inuentum eandem proportionem habebit, quam numerus diuidendus propositus 100. ad propositum diuisorem √ȝ 3 + √ȝ 5 + √ȝ 6.

a 17. sept.

SED quoniam inuentus nouus diuisor nondum est simplex, ducemus eum in diminutum similem, nimirum in √ȝ 60 — 2. efficiemusq. 60 — 4. hoc est, 56. pro nouo diuisore. Et si nouus diuidendus √ȝ 30000 + √ȝ 50000 — √ȝ 60000. ducatur in eundem numerum √ȝ 60 — 2. procreabitur nouus numerus diuidendus √ȝ 180000 + √ȝ 300000 + √ȝ 240000 — √ȝ 120000 — √ȝ 200000 — √ȝ 3600000. quo diuiso per diuisorem inuentum 56. prodibit idem Quotiens, qui proueniret, si datus numerus 100. per datum diuisorem √ȝ 3 + √ȝ 5 + √ȝ 6. diuideretur.

QVOD si diuisorem datum √ȝ 3 + √ȝ 5 + √ȝ 6. multiplicaremus per √ȝ 3 — √ȝ 5 + √ȝ 6. (Nam quando omnes tres particulæ habent signum +, poterit quælibet earum mutari in —) produceremus nouum diuisorem √ȝ 72 — 4. & nouum diuidendũ √ȝ 30000 — √ȝ 50000 + √ȝ 60000. Et si tam hic diuidendus, quam ille diuisor √ȝ 72 — 4. ducatur in √ȝ 72 + 4. producetur nouus alius diuidendus, & nouus diuisor simplex 56. [b] ad quem diuidendus nouus eandem proportionẽ habebit, quam datus numerus diuidendus 100 ad

b 17. sept.

ad datum diuisorem √z 3 + √z 5 + √z 6.

SI vero diuisor habuerit vnam particulam cum signo —. vertendum erit signum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, si diuisor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis semper vnam ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vna, & in secunda totidem quoque, minus duabus, & sic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus simplex pro diuisore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus est in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in secundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ sunt, vt diuisor simplex inueniretur.

*Diuisio per numerum radicum cubicarũ compositum.*

QVANDO diuisor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam est diuisor simplex. quod ita fiet. Sint V.g. diuidenda 10. per √ce 5 + √ce 3. Per doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur tres numeri continuè proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportione particularum diuisoris, nimirum √ce 5. ad √ce 3. hac methodo. Primum ducatur √ce 5. in se, fietq. primus numerus √ce 25. Deinde ducatur √ce 5. in √ce 3. gigneturq. secundus numerus √ce 15. Tertio ducatur quoque √ce 3. in se, prouenietq. tertius numerus √ce 9. atque ita hi tres numeri producti. √ce 25. & √ce 15. & √ce 9. erunt continuè proportionales in proportione √ce 5. ad √ce 3. vt in dicta propos. 2. lib. 8. ab Euclide demonstratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem.... Nam positis tribus numeris √ce 25. √ce 15. √ce 9. tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se. Item positis quatuor numeris √ce 5. √ce 3. √ce 25. √ce 15. tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium. quod etiam in his quatuor √ce 5. √ce 3. √ce 15. √ce 9. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur signo +, & medius signo —. hoc modo √ce 25 — √ce 15 + √ce 9. Per hunc communem numerum multiplicantem si multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor √ce 5 + √ce 3. fiet nouus diuidendus √ce 25000 — √ce 15000 + √ce 9000. & nouus diuisor √ce 125 + √ce 27. id est, 8. vt in subiecta formula liquet. qui diuisor simplex habetur, (vt auctores docent, & quod est obseruatione dignum) si numeri particularum diuisoris 5. & 3. simul addantur, etiã si nulla fiat multiplicatio.

|  |  |
|---|---|
|  | √ce 25 — √ce 15 + √ce 9 |
|  | √ce 5 + √ce 3 |
|  | + √ce 75 — √ce 45 + √ce 27 |
|  | + √ce 125 — √ce 75 + √ce 45 |
| Summa. | √ce 125 + √ce 27 |

*Diuisio per numerũ radicũ zensizẽsicarũ, surdesolidarũ &c. cõpositũ.*

EADEM via tenenda est in diuisore composito duarum radicum zensizensicarum, surdesolidarum, zensicubicarum, &c. dummodo tot numeri continuè proportionales, secundum doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur in proportione particularum diuisoris, quot

quot vnitates sunt in exponente ȝȝ. ß. ȝcc. &c. nimirum quatuor in diuisore radicum zensizensicarum, & quinque pro diuisore radicum surdesolidarum, & sex pro zensicubicis, &c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero signum +. secundo signum —. tertio iterum signum +. & quarto iterum signum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant signum +, & in locis paribus signum —. Exemplum ponam in diuisione 10. per √ȝȝ 5 + √ȝȝ 3. quam supra alio modo expediuimus. Quoniam exponens ȝȝ. est 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales √ȝȝ 125. √ȝȝ 75. √ȝȝ 45. √ȝȝ 27. iuxta

√ȝȝ 5 + √ȝȝ 3
√ȝȝ 25. √ȝȝ 15. √ȝȝ 9.
√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27.

doctrinam propos. 2. lib. 8. Eucl. vt hic cernis: vbi apposuimus signum + numeris locorum imparium, numeris autem locorum parium signum — vt diximus faciendum esse. Iam si per hunc numerum quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidẽdus, quam diuisor √ȝȝ 5 + √ȝȝ 3. reperietur nouus numerus diuidendus √ȝȝ 1250000 — √ȝȝ 750000 + √ȝȝ 450000. — √ȝȝ 27. & nouus diuisor √ȝȝ 625 — √ȝȝ 81. hoc est, 2. ijdem omnino, qui supra ante diuisionem per numerum radicum quadratarum compositum trium particularium. Atque hic diuisor, sine multiplicatione, habetur, vt auctores docent, si minoris particulæ numerus in diuisore dematur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulæ indicant.

*Inuentio numeri diuidendi.*

10. hoc est, √ȝȝ 10000
√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27

√ȝȝ 1250000 — √ȝȝ 750000 + √ȝȝ 450000 — √ȝȝ 270000

*Inuentio diuisoris.*

√ȝȝ 125 — √ȝȝ 75 + √ȝȝ 45 — √ȝȝ 27
√ȝȝ 5 + √ȝȝ 3

+ √ȝȝ 375 — √ȝȝ 225 + √ȝȝ 135 — √ȝȝ 81
+ √ȝȝ 625 — √ȝȝ 375 + √ȝȝ 225 — √ȝȝ 135

√ȝȝ 625 — √ȝȝ 81

EADEM ratio est de cæteris. Sed quando numerus exponens radicum

dicum est par, vt √ȝ. √ȝȝ. &c. diuisor simplex habetur, si (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuisore ex numero maioris particulæ subducatur: at vero, quando exponens numerus est impar, vt √ce. √β. &c. simplex diuisor habetur, si numeri particularum diuisoris dati in vnam colligantur summam. id quod in superioribus obseruatum esse vides.

SED neque hoc omittendum est, quando diuisor est duarum radicum diuersarum, eas ad eandem denominationem esse reducendas, antequam operationem auspiceris. *Diuisio per numerum compositum diuersarum radicũ*

DENIQVE quando diuisor est plurium particularum, ac diuersarum radicum, ita vt non facile reduci possit ad simplicem diuisorem, constituenda erit fractio, cuius numerator sit numerus diuidendus, & denominator ipsemet diuisor: non secus ac in numeris absolutis fieri solet, quando minor numerus per maiorem diuidendus proponitur, vt 3. per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Verbi gratia, si numerus √ȝ 48 + √ce 3. diuidendus sit per √ȝ 15 + √ce 6. — √ȝ 3. fiet hæc fractio

| | |
|---|---|
| Numerator. | √ȝ 48 + √ce 3 |
| Denominator. | √ȝ 15 + √ce 6 — √ȝ 3 |

## *SCHOLIVM.*

ACCIDIT *non rarò, vt inter duos numeros irrationales compositos ambigatur, vter eorum maior sit. quæ ambiguitas ita tolletur. Sint propositi duo numeri, 4 + √ȝ 7. & 20 — √ȝ 180. Auferatur vtrobique numerus 4. remanebitq. ex vna parte, √ȝ 7. & ex altera, 16 — √ȝ 180. Certum autem est, si duo numeri dati sint æquales, residua hæc etiam æqualia esse: Et si inæquales, residua eodem modo esse inæqualia. Quadretur vtrumque residuum, eritq. prioris residui quadratum 7. posterioris vero, 436 — √ȝ 184320. Certum quoque est, si residua sint æqualia, eorum quadrata quoque æqualia esse: Et si illa sint inæqualia, hæc etiam esse inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc — √ȝ 184320. fientq. numeri 7 + √ȝ 184320. & 436. Auferantur vtrinque 7. eruntq. reliqui numeri √ȝ 184320. & 429. qui quadrentur, vt fiant 184320. & 184041. Et quia illud quadratum maius est, quam hoc, pronunciabis numerum 4 — √ȝ 7. maiorem esse numero 20 — √ȝ 180. Eodem pacto cum alijs numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum constat. Nam radix propinqua numeri 7. est 2 $\frac{2}{3}$. quæ cum 4. facit 6 $\frac{2}{3}$. At radix propinqua numeri 180. est 13 $\frac{11}{27}$. quæ dempta ex 20. relinquit 6 $\frac{16}{27}$. Constat autem $\frac{2}{3}$. esse numerum maiorem, quam $\frac{16}{27}$. Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio est magis accurata.* Vter duorũ numerorum compositorum maior sit.

# DE RADICIBVS NVMERORVM irrationalium compositorum, vel diminutorum: quas alij Vniuersales dicunt: Et de earundem Algorithmo.
## Cap. XXIIII.

HAE radices oriuntur plerunque ex additione, ac subtractione radicum irrationalium simplicium, incommensurabilium, vt in cap. 19. ac 20. patuit: quas hoc loco paulò diligentius explicare proponimus. quod exequemur, expositis varijs radicibus numerorum compositorum, vnà cum earum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero composito, 10 + √ʒ 7. extrahenda sit radix quadrata, erit ea √ʒ (10 + √ʒ 7.) cuius sensus est, vt radice quadrata numeri 7. si haberi posset, addita ad 10. totius numeri radix quadrata sumatur. In hac vero altera radice. √ce (10 + √ʒ 7.) intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & √ʒ 7. compositi. Et vt res planius percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt √ʒ (10 + √ʒ 16 + 3 + √ʒ 64) nihil aliud significat, quam 5. Nam √ʒ 16. est 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum √ʒ 64. id est, cum 8. faciunt 15. quibus si addantur 10. fiunt 25. pretium totius numeri compositi, cuius radix quadrata est 5. Item √ce (√ʒ 25 + √ʒ 9) erit 2. Est enim sensus, vt sumptis radicibus quadratis numerorum 25. & 9. quæ sunt 5. & 3. efficientes 8. extrahatur ex hac summa radix cubica, quæ est 2. Hæc vero radix, √ʒ (10 + √ʒ 36) + √ʒ (70 + √ʒ 121.) valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compositi 10 + √ʒ 36. quod est 16. nimirum √ʒ 16. quæ est 4. addi ad 9. radicem quadratam compositi 70 + √ʒ 121. quod est 81.

*Varia radices numerorum compositorum.*

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadratæ cuiusuis surdæ simplicis est ipse numerus, deleto signo radicali √ʒ. Et cubus radicis cubicæ simplicis, ipse numerus, deleto signo radicali √ce. Vt quadratum √ʒ 5. est 5. & quadratum √ʒ 25. est 25. Cubus vero √ce 12. est 12. & cubus √ce 27. est 27. propterea quod radix quælibet quadrata ducta in se quadrate producit eius radicis quadratum, ducta vero in se cubice gignit cubum eiusdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuslibet compositi est ipsemet numerus compositus, deleto signo √ʒ. Et cubus radicis cubicæ numeri compositi cuiusuis est ipsemet numerus, deleto signo √ce. Vt quadratum √ʒ (11 + √ʒ 9 + √ʒ 4.) est 11 + √ʒ 9 + √ʒ 4. hoc est, 16. ita vt illa radix valeat 4.

*Quadrata & cubi radicum numerorum compositorum.*

Qua-

Quadratum √ẓ (√ẓ 49 + √ẓ 36 — √ẓ 16) est √ẓ 49 + √ẓ 36 — √ẓ 16. hoc est, 9. ita vt radix illa valeat 3.

Quadratum √ẓ (√ẓ 64 + √ẓ 49 + √ẓ 36 — 5) est √ẓ 64 + √ẓ 49 + √ẓ 36 — 5. hoc est, 16. ita vt valor illius radicis sit 4.

Quadratum √ẓ (√ce 216 + √ce 27) est √ce 216 + √ce 27. hoc est, 9. pretiumq. eius radicis est 3.

Quadratum √ẓ (√ce 216 — √ce 27.) est √ce 216 — √ce 27. hoc est, 3. valorq. eius radicis est √ẓ 3.

Cubus √ce (√ẓ 25 + √ẓ 9) est √ẓ 25 + √ẓ 9. hoc est, 8. ita vt radix illa valeat 2.

Cubus √ce (√ẓ 25 — √ẓ 9) est √ẓ 25 — √ẓ 9. id est, 2. pretiumq. radicis illius est √ce 2.

Cubus √ce (√ce 64 + √ce 27.) est √ce 64 + √ce 27. id est, 7. ita vt radix illa sit √ce 7. Idemq. iudicium facies de zenfizenfis, ac surdesolidis, &c. radicum zenfizenficarum, & surdesolidarum numerorum compositorum. Proposui autem exempla in numeris rationalibus, vt res fieret clarior. Atque hoc modo multiplicatur radix cuiuslibet numeri compositi in se; hoc est, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

*Multiplicatio radicis numeri compositi in se.*

AT vero radix numeri compositi in radicem simplicem, vel in numerum compositum, vel in numerum absolutum, vel denique in aliam radicem numeri compositi, multiplicabitur hac ratione. Vterque numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducatur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, vt supra traditum est. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione. quemadmodum ex √ẓ 5. in √ẓ 12. fit √ẓ 60. radix nimirum zenfica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item sicut ex √ce 9. in √ce 10. fit √ce 90. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubũ 10. gignitur, vt cap. præcedenti traditum est. Hoc autem clarius ex sequentibus exemplis disces. Sit enim multiplicanda √ẓ (7 + √ẓ 3) per 2. Quadrata sunt 7 + √ẓ 3. & 4. Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si ducatur √ẓ 3. in 4. hoc est, in √ẓ 16. fit √ẓ 48. Totus ergo numerus productus est √ẓ (28 + √ẓ 48.) Rite autem hoc modo fieri multiplicationem, disces ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda, √ẓ (7 + √ẓ 4.) hoc est, 3. (nam 7. cum √ẓ 4. faciunt 9. cuius √ẓ est 3.) per 2. Vbi manifestum est, numerum genitum fore 6. Quadrata sunt 7 + √ẓ 4. & 4. Si igitur ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si √ẓ 4. ducatur in 4. hoc est, in √ẓ 16. fit √ẓ 64. eritq. totus numerus productus √ẓ (28 + √ẓ 64.) hoc est, √ẓ 36. nimirum 6. vt conuenit.

*Multiplicatio radicũ numerorum compositorum.*

7 + √ẓ 3
4
28 + √ẓ 48

7 + √ẓ 4
4
28 + √ẓ 64

SIT rursus multiplicanda √ẓ (7 + √ẓ 4) per 3. hoc est 3. per 3. vbi productus numerus est 9. Quadrata sunt 7 + √ẓ 4. & 9. Ex 9. in 7. fiunt

7 + √ẓ 4
9
63 + √ẓ 324

63. &

63. & ex √ȝ 4. in 9. hoc est, in √ȝ 81. fit √ȝ 324. Productus ergo numerus erit √ȝ (63 + √ȝ 324) hoc est, √ȝ 81. nimirum 9.

ITEM sit multiplicanda √ȝ (√ȝ 25 + √ȝ 16) hoc est, √ȝ 9. siue 3. per 3. vbi etiam constat, productum numerum fore 9. Quadrata sunt √ȝ 25 + √ȝ 16. & 9. Ex √ȝ 25. in 9. hoc est, in √ȝ 81. fit √ȝ 2025. Et ex √ȝ 16. in 9. id est, in √ȝ 81. fit √ȝ 1296. Procreatus ergo numerus erit √ȝ (√ȝ 2025 + √ȝ 1296.) hoc est, √ȝ (45 + 36.) siue √ȝ 81. hoc est, 9.

√ȝ 25 + √ȝ 16
9
√ȝ 2025 + √ȝ 1296

SIT multiplicanda √ce (√ce 64 + √ce 27) hoc est, √ce 7. per 2. vbi productus erit √ce 56. Cubi numerorum sunt √ce 64 + √ce 27. & 8. Ex √ce 64. in 8. hoc est, in √ce 512. fit √ce 32768. & ex √ce 27. in 8. hoc est, in √ce 512. fit √ce 13824. Cum ergo √ce 32768. fit 32. Et √ce 13824. fit 24. erit productus numerus √ce (32 + 24) id est, √ce 56.

√ce 64 + √ce 27
8
√ce 32768 + √ce 13824

SIT multiplicanda √ce (64 + √ce 27.) per 2. Cubi numerorum sunt 64 + √ce 27. & 8. Ex 64. in 8. fiunt 512. Et ex √ce 27. in 8. id est, in √ce 512. fit √ce 13824. quæ est 24. additaq. ad 512. facit 536. Est ergo productus numerus √ce 536. atque ita est. Nam √ce (64 + √ce 27) hoc est, √ce 67. ducta in 2. hoc est, in √ce 8. facit √ce 536.

64 + √ce 27
8
512 + √ce 13824

SIT ducenda √ce (√ce 64 + √ȝ 36 + 3.) in 5. Cubi numerorum sunt √ce 64 + √ȝ 36 + 3. & 125. Ex √ce 64. in 125. id est, in √ce 1953125. fit √ce 125000000. At ex √ȝ 36. in 125. id est, in √ȝ 15625. fit √ȝ 562500. Et ex 3. in 125. fiunt 375. Cum ergo √ce 125000000. fit 500. & √ȝ 562500. fit 750. erit procreatus numerus √ce 1625. vt ratio postulat. Nam √ce (√ce 64 + √ȝ 36 + 3.) hoc est, √ce 13. ducta in 5. hoc est, in √ce 125. facit √ce 1625.

√ce 64 + √ȝ 36 + 3
125
√ce 125000000 + √ȝ 562500 + 375

SI numerus per 5. multiplicandus, fuisset √ce (√ce 64 + √ȝ 36 — 3.) productus fuisset numerus √ce (√ce 125000000 + √ȝ 562500 — 375.) hoc est, √ce (500 + 750 — 375.) hoc est, √ce 875. quod verum est. Nam √ce (√ce 64 + √ȝ 36 — 3.) est √ce 7. quæ ducta in 5. hoc est, in √ce 125. facit √ce 875.

SIT multiplicanda √ȝ (12 + √ȝ 6) per 6. Quadrata numerorum sunt 12 + √ȝ 6. & 36. Ex 12. in 36. fiunt 432. Et ex √ȝ 6. in 36. hoc est, in √ȝ 1296. fit √ȝ 7776. Productus igitur ex multiplicatione numerus est √ȝ (432 + √ȝ 7776.)

12 + √ȝ 6
36
432 + √ȝ 7776

SIT

SIT ducenda √ȝ (13 + √ȝ 144) hoc est, √ȝ 25. id est, 5. per 6. vbi certum est, gigni 30. Quadrata numerorum sunt 13 + √ȝ 144. & 36. Ex 13. in 36. fiunt 468. Et ex √ȝ 144. in 36. id est, in √ȝ 1296. fit √ȝ 186624. Numerus ergo productus est √ȝ (468 + √ȝ 186624) hoc est, √ȝ 900. id est, 30.

13 + √ȝ 144
36
468 + √ȝ 186624

SIT multiplicanda √ȝ (13 + √ȝ 9) per √ȝ (5 + √ȝ 16) hoc est, √ȝ 16. id est, 4. per √ȝ 9. id est, per 3. vbi constat produci 12. Quadrata numerorum sunt 13 + √ȝ 9. & 5 + √ȝ 16. Ex √ȝ 9. in √ȝ 16. fit √ȝ 144. Et ex √ȝ 16. in 13. id est, in √ȝ 169. fit √ȝ 2704. Deinde ex √ȝ 9. in 5. hoc est, in √ȝ 25. fit √ȝ 225. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Iam √ȝ 144. id est, 12. cum 65. facit 77. quibus si addantur √ȝ 2704. & √ȝ 225. nimirum 52. & 15. fiunt 144. Igitur √ȝ 144. id est, 12. est numerus productus, vt dictum est.

13 + √ȝ 9
5 + √ȝ 16
√ȝ 2704 + √ȝ 144
65 + √ȝ 225
√ȝ 2704 + √ȝ 225 + 77

SIT rursus multiplicanda √ȝ (√ȝ 1800 + 30) — √ȝ (√ȝ 450 + 15) per √ȝ (√ȝ 450 + 15.) Scribantur numeri, vt hic vides. Ex √ȝ (√ȝ 450 + 15) in √ȝ (√ȝ 450 + 15) fit eius quadratus √ȝ 450 + 15. præposito signo —. cum + in — ducatur. Ex √ȝ (√ȝ 1800 + 30) in √ȝ (√ȝ 450 + 15) fit √ȝ 810000 + √ȝ 1620000 + 450. si nimirum quadrata numerorum inter se multiplicentur: hoc est, 1350 + √ȝ 1620000. quia √ȝ 810000. æquiualet 900. qui numerus additus ad 450. facit 1350. & præposito signo √ȝ. erit productus numerus √ȝ (1350 + √ȝ 1620000.) Est autem radix huius Binomij 1350 + √ȝ 1620000. numerus √ȝ 900 + √ȝ 450. vt ex cap. 18. constabit: hoc est, 30 + √ȝ 450. ex qua si dematur prior productus — √ȝ 450 + 15. factus ex √ȝ (√ȝ 450 + 15) in se, relinquetur numerus 15. vt in hac formula cernis. qui quidem gignitur ex multiplicatione √ȝ (√ȝ 1800 + 30) — √ȝ (√ȝ 450 + 15) in √ȝ (√ȝ 450 + 15)

√ȝ (√ȝ 1800 + 30) — √ȝ (√ȝ 450 + 15)
√ȝ (√ȝ 450 + 15) √ȝ (√ȝ 450 + 15)
+ √ȝ 4050000 + 450 — √ȝ 450 + 15
√ȝ 810000 + √ȝ 4050000
√ȝ 810000 + √ȝ 1620000 + 450

30 + √ȝ 450
15 — √ȝ 450
15

HAC ratione ritè fieri multiplicationem, perspicuum fiet, hoc altero exemplo proposito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productusq. numerus est 3. Nam ex √ȝ (√ȝ 9 + 6) in √ȝ

√ȝ (√ȝ 4 + 14) — √ȝ (√ȝ 9 + 6)
√ȝ (√ȝ 9 + 6) — √ȝ (√ȝ 9 + 6)
+ √ȝ 144 + 84 — √ȝ 9 + 6
√ȝ 36 + √ȝ 1764
√ȝ 144 — 9

( √ȝ

(√ȝ 9 + 6) fit eius quadratus √ȝ 9 + 6. præpoſito ſigno —. cum + in — ducatur. Deinde ex √ȝ (√ȝ 4 + 14) in √ȝ (√ȝ 9 + 6) fit numerus √ȝ 144. id eſt, 12. vt in præcedēti formula vides. Nā √ȝ 36. eſt 6. & √ȝ 144. eſt 12. & √ȝ 1764. eſt 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præpoſito ſigno √ȝ. fit productus √ȝ 144. nimirum 12. a quo ſi detrahatur alter productus √ȝ 9 + 6. nimirum 9. ſupererunt 3. pro toto numero producto.

SIT quoque multiplicanda √ȝ (6 + √ȝ 9) per numerum compoſitum √ȝ 4 + √ȝ 16. Quadratum prioris numeri eſt 6 + √ȝ 9. poſterioris autem 20 + √ȝ 256. vt patet, ſi √ȝ 4 + √ȝ 16. ducatur in √ȝ 4 + √ȝ 16. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit

6 + √ȝ 9
20 + √ȝ 256
√ȝ 9216 + √ȝ 2304
120 + √ȝ 3600
√ȝ 9216 + √ȝ 3600 + √ȝ 2304 + 120

numerus productus √ȝ (√ȝ 9216 + √ȝ 3600 + √ȝ 2304 + 120.) hoc eſt, √ȝ 324. nimirum 18.

MVLTIPLICETVR √ȝ (7 + √ȝ 4) hoc eſt, √ȝ 9. nimirum 3. per √ȝ 9. hoc eſt, per 3. vbi perſpicuum eſt, numerum gigni 9. Quadrata numerorum ſunt 7 + √ȝ 4. & 9. Ex √ȝ 4. in 9. id eſt, in √ȝ 81. fit √ȝ 324. Et ex 7. in 9. fiunt 63. Igitur productus numerus erit √ȝ (63 + √ȝ 324.) hoc eſt, √ȝ 81. ſiue 9. vt diximus.

7 + √ȝ 4
9
63 + √ȝ 324

MVLTIPLICETVR √ȝ (12 + √ȝ 6) per √ȝ 12 + √ȝ 6. Quadrata numerorum ſunt 12 + √ȝ 6. & 18 + √ȝ 288. vt conſtat, ſi √ȝ 12 + √ȝ 6. ducatur in ſe. (Producitur enim numerus iſte 12 + √ȝ 288 + 6. conſtat autem 12. & 6. facere 18.) Ex √ȝ 288. in √ȝ 6. fit √ȝ 1728. Et ex √ȝ 288 in 12. hoc eſt, in √ȝ 144. fit √ȝ 41472. Et ex √ȝ 6. in 18. id eſt, in √ȝ 324. fit √ȝ 1944. Ac tandē [illegible] 12. in 18. fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit √ȝ (216 + √ȝ 1944 + √ȝ 41472 + √ȝ 1728.)

12 + √ȝ 6
18 + √ȝ 288
√ȝ 41472 + √ȝ 1728
216 √ȝ 1944
216 + √ȝ 1944 + √ȝ 41472 + √ȝ 1728

*Multiplicatio radicis numeri compoſiti, vna cum radice numeri diminuti ſimilis, in ſeipſam.*

CAETERVM quando radix zenſica numeri compoſiti, vna cum radice zenſica numeri diminuti ſimilis in ſeipſam multiplicanda proponitur. quod non rarò in Binomijs, ac Reſiduis (de quibus in cap. 27. & 28.) accidit, ita agemus. Sit in ſe multiplicanda √ȝ (12 + √ȝ 6) + √ȝ (12 — √ȝ 6.) Scribatur numerus bis, vt in multiplicatione fieri ſolet. Et quoniam ex propoſ. 4. lib. 2. Eucl. quadrata partium √ȝ (12 + √ȝ 6) & √ȝ (12 — √ȝ 6) vnà cum eo, quod ex vna parte √ȝ (12 — √ȝ 6) bis fit in alteram partem √ȝ (12 + √ȝ 6) æqua-

æqualia sunt ei, qui fit ex numero in se. Sunt autem quadrata partium 12 + √ȝ 6. & 12 − √ȝ 6. quæ simul faciunt 24. (Nam + √ȝ 6. & − √ȝ 6. se mutuo tollunt) Et ex vna parte in alteram fit √ȝ 138 (quia 6. quadratum √ȝ 6. demptum ex 144. quadrato numeri 12. relinquit 138. cui numero præfigendum est signum √ȝ) cuius duplum est √ȝ 552. Productus ergo numerus est 24 + √ȝ 552.

√ȝ (12 + √ȝ 6) + √ȝ (12 − √ȝ 6)
√ȝ (12 + √ȝ 6) + √ȝ (12 − √ȝ 6)

12 + √ȝ 6 + 12 − √ȝ 6
√ȝ 138
√ȝ 138

√ȝ 552
24 + √ȝ 552

Atque radix huius producti est etiam summa duarum radicum √ȝ (12 + √ȝ 6) & √ȝ (12 − √ȝ 6) in vnam summam collectarum. Nam quando summa duorum numerorum in se ducitur, radix quadrata producti numeri est eorundem duorum numerorum summa. Ac proinde cum duæ radices propositæ simul in se ductæ faciant 24 + √ȝ 552. erit huius producti radix, nimirum √ȝ (24 + √ȝ 552) illarum duarum radicum summa.

*Summa ex radice numeri compositi, & radice numeri diminuti similis collecta.*

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit in se multiplicanda √ȝ (10 + √ȝ 36) + √ȝ (10 − √ȝ 36) hoc est, 6. in se: vbi numerus procreatur 36. Quadrata partium sunt 10 + √ȝ 36. & 10 − √ȝ 36. quæ simul additæ faciunt 20. Et ex vna parte in alteram fit √ȝ 64. quæ bis sumpta facit √ȝ 256. id est, 16. atque adeo productus numerus est 20 + 16. hoc est, 36. vt par est. Atque radix huius numeri, nimirum 6. est summa quoque ex duabus illis radicibus collectæ, vt manifestum est.

√ȝ (10 + √ȝ 36) + √ȝ (10 − √ȝ 36)
√ȝ (10 + √ȝ 36) + √ȝ (10 − √ȝ 36)

10 + √ȝ 36 + 10 − √ȝ 36
√ȝ 64
√ȝ 64

√ȝ 256

Productus 20 + √ȝ 256. hoc est, 36.

PRÆTEREA quando multiplicandus est numerus compositus ex radice simplici, & radice compositi numeri, hoc est, ex radice simplici, & radice Vniuersali, per numerum diminutum similem, locum etiam habet compendium cap. 23. traditum ante exempla diuisionis, ad finem nimirum exemplorum multiplicationis. Vt si ducendus sit numerus √ȝ 20 + √ȝ (20 − √ȝ 5) in numerum √ȝ 20 − √ȝ (20 − √ȝ 5) scribatur vnus numerus sub alio, vt hic vides. Nam si 20 − √ȝ 5 quadratum posterioris particulæ numeri compositi, vel diminuti, detrahatur ex 20. quadrato particulæ prioris, reliquus erit numerus 0 + √ȝ 5. vt in hac altera formula cernitur: quia 20. ex 20. nil relinquunt: at

√ȝ 20 + √ȝ (20 − √ȝ 5)
√ȝ 20 − √ȝ (20 − √ȝ 5)

√ȝ 5

20 + √ȥ 20 … — √ȥ 5. ex + √ȥ 0. (quoniam diuersa signa mutant speciem, fitq. additio) remanet + √ȥ 5. vt in Subtractione radicum simplicium diximus. atque ita ex √ȥ 20 + √ȥ (20 — √ȥ 5.) in √ȥ 20 — √ȥ (20 — √ȥ 5) producitur √ȥ 5.

IMMO hoc compendio vti etiam licebit, quando multiplicandus est numerus compositus ex numero Cossico, & radice numeri Cossici compositi vel diminuti, per numerum diminutum similem. Vt si ducendus sit numerus $\frac{1}{2}$ ȥ + √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ) in $\frac{1}{2}$ ȥ — √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ.) Scripto vno numero sub alio, vt hic cernis, detrahitur quadratum $\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ posterioris particulæ ex $\frac{1}{4}$ ȥȥ. quadrato particulæ prioris, vt hæc altera formula ostendit. Nam reliquus numerus 0 — 1 ȥ. erit is, qui producitur ex vno numero in alium.

$\frac{1}{2}$ ȥ + √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ)
$\frac{1}{2}$ ȥ — √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ)
— 1 ȥ

$\frac{1}{4}$ ȥȥ + 0 ȥ
$\frac{1}{4}$ ȥȥ + 1 ȥ
0 + 1 ȥ

SIC etiam ex $\frac{1}{2}$ ȥ + √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ — 1 ȥ) in $\frac{1}{2}$ ȥ — √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ — 1 ȥ) gignetur numerus 1 ȥ. vt altera duæ hæ appositæ formulæ docent.

$\frac{1}{2}$ ȥ + √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ — 1 ȥ)
$\frac{1}{2}$ ȥ — √ȥ ($\frac{1}{4}$ ȥȥ — 1 ȥ)
1 ȥ

$\frac{1}{4}$ ȥȥ + 0 ȥ
$\frac{1}{4}$ ȥȥ — 1 ȥ
0 + 1 ȥ

*Diuisio radicum numerorum compositorum.*

DIVISIO radicum huiusmodi fit hoc modo. Tam numerus diuidendus, quam diuidens reducatur ad quadratum: Deinde diuisio fiat, vt supra explicatum est. Radix enim producti numeri erit Quociens. vt exempla probabunt: quemadmodum, vt in cap. præcedenti diximus, ex diuisione √ȥ 12. per √ȥ 3. exit √ȥ 4. radix nimirum zensica numeri 4. qui fit ex diuisione quadrati 12. per quadratum 3. Item sicut ex diuisione √ß 30. per √ß 5. fit Quotiens √ß 6. radix videlicet surdesolida numeri 6. ex diuisione surdesolidi 30. per surdesolidum 5. procreati.

SIT diuidenda √ȥ (13 + √ȥ 7) per √ȥ 5. Quadrata numerorum sunt 13 + √ȥ 7. & 5. Ex diuisione 13. per 5. exeunt 2$\frac{3}{5}$. Et ex √ȥ 7. per 5. id est, per √ȥ 25. exeunt √ȥ $\frac{7}{25}$. Totus ergo Quotiens est √ȥ (2$\frac{3}{5}$ + √ȥ $\frac{7}{25}$.)

13 + √ȥ 7. (2$\frac{3}{5}$ + √ȥ $\frac{7}{25}$
5 √ȥ 25

SIT diuidenda √ȥ (432 + √ȥ 7776) per 6. Quadrata numerorum sunt 432 + √ȥ 7776. & 36. Diuisis 432. per 36. exeunt 12. & di-

& diuisa √ȝ 7776. per
36. id est, per √ȝ 1296.
exit √ȝ 6. Quotiens (12 + √ȝ 6.
ergo totus erit √ȝ (12
+ √ȝ 6.)

SIT diuidenda √ȝ (588 + √ȝ 34848.) per √ȝ (12 + √ȝ 8.) Quadrata numerorum sunt 588 + √ȝ 34848. & 12 + √ȝ 8. Quoniam diuisor est numerus compositus, multiplicandus erit per 12 — √ȝ 8. mutato signo + in —. vt supra cap. 13. dictum est: vt fiat nouus diuisor √ȝ 136. Quod si per eundem numerum 12 — √ȝ 8. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus √ȝ (6528 + √ȝ 332928.) Fit enim numerus productus √ȝ (7056 + √ȝ 5018112 — √ȝ 2765952 — √ȝ 278784) qui reducitur ad √ȝ (6528 + √ȝ 332928) quia radix numeri 278784. est 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta √ȝ 2765952. ex √ȝ 5018112. cum sint commensurabiles in proportione $\frac{49}{66}$. relinquit √ȝ 332928. cui apponendum est signum + maioris numeri. Itaq. si diuidatur nouus diuidendus √ȝ (6528 + √ȝ 332928) per nouum diuisorem 136. fiet Quotiens √ȝ (48 + √ȝ 18.) Diuisis namq. 6528. per 136. exeunt 48. Et diuisa √ȝ 332928. per 136. hoc est, per √ȝ 18496. exit √ȝ 18. atque adeo √ȝ (48 + √ȝ 18) Quotiens erit diuisionis propositæ.

HOC exemplum quia pulchrum est, & subobscurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur necesse est, numerum diuisum (√ȝ 588 + √ȝ 34848) redire, si Quotiens inuentus √ȝ (48 + √ȝ 18) in diuisorem √ȝ (12 + √ȝ 8) ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus √ȝ (576 + √ȝ 2592 + √ȝ 18432 + √ȝ 144) Quòd si √ȝ 144. addatur ad 576. fiet summa 588. Et si simul addantur √ȝ 2592. & √ȝ 18432. quæ commensurabiles sunt in proportione $\frac{1}{3}$. fiet √ȝ 34848.

DIVIDATVR item √ȝ 15. per √ȝ (3 + √ȝ 5) Vt simplex diuisor reperiatur, ducemus √ȝ (3 + √ȝ 5) in √ȝ (3 — √ȝ 5.) fietq. diuisor √ȝ 4. nouus. Quòd si diuidendus numerus √ȝ 15. ducatur quoque in √ȝ (3 — √ȝ 5.) gignemus nouum diuidendum √ȝ (45 — √ȝ 1125) Quadratum huius numeri diuidendi est 45 — √ȝ 1125. Noui vero diuisoris quadratum est 4. Si ergo partiamur 45. per 4. fit Quotiens 11 $\frac{1}{4}$. Et si diuidamus — √ȝ 1125. per 4. hoc est, per √ȝ 16. fit Quotiens — √ȝ 70 $\frac{5}{16}$. Totus igitur Quotiens est √ȝ (11 $\frac{1}{4}$ — √ȝ 70 $\frac{5}{16}$.)

DIVIDAMVS 20. per √ȝ (10 — √ȝ 5.) Multiplicetur vterque numerus per √ȝ (10 + √ȝ 5.) vt fiat nouus diuidendus √ȝ (4000 + √ȝ 800000) nouus autem diuisor √ȝ 95. Quadrata horum numerorum sunt 4000 + √ȝ 800000. & 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt 42 $\frac{2}{19}$. At ex diuisione √ȝ 800000. per 95. id est, per √ȝ 9025. prodit √ȝ 88 $\frac{232}{361}$. Quotiens ergo propositæ diuisionis est √ȝ (42 $\frac{2}{19}$ + √ȝ 88 $\frac{232}{361}$.)

DIVIDAMVS √ȝ (4 + √ȝ 25) per √ȝ (1 + √ȝ 9) hoc est, √ȝ 9. per √ȝ 4. siue 3. per 2. vbi Quotiens est 1 $\frac{1}{2}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuisor, per √ȝ (1 — √ȝ 9) vt fiat nouus diuidendus

√ȝ (4 + √ȝ 25 − √ȝ 144 − √ȝ 225.) & nouus diuisor √ȝ −8. Quadrata horum numerorũ sunt 4 + √ȝ 25 − √ȝ 144 − √ȝ 225. & −8. Ex diuisione 4. per −8. fit Quotiens −$\frac{1}{2}$. Et ex diuisione √ȝ 25. per −8. id est, per √ȝ −64. fit Quotiens √ȝ −$\frac{25}{64}$. vel (quod idem est) −√ȝ $\frac{25}{64}$. Et ex diuisione −√ȝ 144. per −8. id est, per −√ȝ 64. exit √ȝ + 2$\frac{16}{64}$. vel (quod idẽ est) + √ȝ 2$\frac{16}{64}$. Et ex diuisione −√ȝ 225. per −8. hoc est, per −√ȝ 64. fit Quotiens + √ȝ 3$\frac{33}{64}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis, erit totus Quotiens √ȝ (√ȝ 3$\frac{33}{64}$ + √ȝ 2$\frac{16}{64}$ − √ȝ $\frac{25}{64}$ − $\frac{1}{2}$) qui æquiualet √ȝ 2$\frac{1}{4}$. hoc est, 1$\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam √ȝ 3$\frac{33}{64}$. hoc est, √ȝ $\frac{225}{64}$. est $\frac{15}{8}$. & √ȝ 2$\frac{16}{64}$. siue √ȝ $\frac{144}{64}$. est $\frac{12}{8}$ quæ cum priori $\frac{15}{8}$ facit $\frac{27}{8}$. Deinde √ȝ $\frac{25}{64}$. est $\frac{5}{8}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. hoc est, cum $\frac{4}{8}$ facit $\frac{9}{8}$. atque $\frac{9}{8}$. ex $\frac{27}{8}$ relinquunt $\frac{18}{8}$. siue 2$\frac{1}{4}$. atque radix huius numeri est Quotiens supra inuentus, nimirum 1$\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuisione √ȝ (4 + √ȝ 25 − √ȝ 144 − √ȝ 225) per √ȝ −8. prouenire 1$\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifestum. Ex 4. & √ȝ 25. fiunt 9. Et ex −√ȝ 144 − √ȝ 225. fiunt −27. Faciunt autem −27. cum +9. numerum −18. Igitur numerus diuidendus est √ȝ −18. & diuisor √ȝ −8. vbi Quotiens fit √ȝ 2$\frac{1}{4}$. hoc est, 1$\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi potest; vt dicamus, diuidendam esse √ȝ (4 + √ȝ 25) per √ȝ (√ȝ 9 + 1) vbi iterum diuiduntur 3. per 2. Et si tam diuidendus, quam diuisor multiplicetur per √ȝ (√ȝ 9 − 1) fiet nouus diuidendus numerus √ȝ (√ȝ 144 + √ȝ 225 − 4 − √ȝ 25.) & nouus diuisor √ȝ 8. Quadrata horum numerorũ sunt √ȝ 144 + √ȝ 225 − 4 − √ȝ 25. & 8. Ex diuisione autem √ȝ 144. per 8. id est, per √ȝ 64. fit Quotiens √ȝ 2$\frac{16}{64}$. Et ex diuisione √ȝ 225. per 8. id est, per √ȝ 64. fit Quotiens √ȝ 3$\frac{33}{64}$. Et ex diuisionẽ −4. per 8. fit Quotiens −$\frac{1}{2}$. Et ex diuisione −√ȝ 25. per 8, id est, per √ȝ 64. fit Quotiens −√ȝ $\frac{25}{64}$. ita vt totus Quotiens fit idem omnino, qui prius, nimirum √ȝ (√ȝ 3$\frac{33}{64}$ + √ȝ 2$\frac{16}{64}$ − √ȝ $\frac{25}{64}$ − $\frac{1}{2}$. De industria autem interdum longior sum in exemplis expediendis, vt ex iis difficultates, quæ in radicibus numerorum compositorum occurrere solent, discas superare.

DIVIDAMVS quoque √cȝ (√cȝ 32768 + √cȝ 13824) per 2. Cubi numerorum sunt √cȝ 32768 + √cȝ 13824. & 8. Ex diuisione √cȝ 32768. per 8. hoc est, per √cȝ 512. fit Quotiens √ȝ 64. Et ex diuisione √cȝ 13824. per 8. id est, per √cȝ 512. fit Quotiens √cȝ 27. Totusq. Quotiens erit √cȝ (√cȝ 64 + √cȝ 27) hoc est, √cȝ 7.

DENIQVE sit diuidenda √ȝ (33 + √ȝ 9) per √ȝ (3 + √ȝ 1) hoc est, 6. per 2. vbi Quotiens est 3. Multiplicetur vterque numerus per √ȝ (3 − √ȝ 1) vt fiat nouus diuidendus √ȝ (99 + √ȝ 81 − √ȝ 1089 − √ȝ 9) & nouus diuisor √ȝ (9 − 1.) hoc est, √ȝ 8. Quadrata horum numerorum sunt 99 + √ȝ 81 − √ȝ 1089 − √ȝ 9. & 8. Ex diuisione 99. per 8. fit Quotiens 12$\frac{3}{8}$. Ex diuisione √ȝ 81. per 8. id est, per √ȝ 64. fit Quotiens √ȝ 1$\frac{17}{64}$. Ex diuisione −√ȝ 1089. per 8. id est, per √ȝ 64. fit Quotiens −√ȝ 17$\frac{1}{64}$. Ac tandem ex diuisione −√ȝ 9. per 8. hoc est, per √ȝ 64. fit Quotiens −√ȝ $\frac{9}{64}$. Eritq. to-

tus

tus Quotiens √ȝ (12 $\frac{3}{8}$ + √ȝ 1 $\frac{17}{64}$ — √ȝ 17 $\frac{1}{64}$ — √ȝ $\frac{9}{64}$.) hoc est, 3. Nam si ad 12 $\frac{3}{8}$. addatur √ȝ 1 $\frac{17}{64}$. hoc est, $\frac{9}{8}$. fient 13 $\frac{4}{8}$. ex quibus si tollantur √ȝ 17 $\frac{1}{64}$. & √ȝ $\frac{9}{64}$. hoc est, $\frac{33}{8}$. & $\frac{3}{8}$. relinquentur 9. Est ergo Quotiens √ȝ 9. id est, 3.

*Additio radicum numerorum compositorum.*

ADDITIO, & subtractio radicum numerorum compositorum commodè plerunque addi non possunt, vel vna ab altera subtrahi, nisi per interpositionem signi + vel —. vt cap. 22. annotauimus. Quando tamen addēda est huiusmodi radicū aliqua ad similē, mutato signo + in —. vel — in +. cōmodissimè inter se addentur, si illæ radices per signum + connectantur, & totum illud aggregatum in se ducatur, vt paulò ante monstratum est. Nam √ȝ huius producti erit summa duarum radicum propositarum. Vt si addendæ sint hæ duę radices, √ȝ (12 + √ȝ 6) & √ȝ (12 — √ȝ 6) ducemus hoc compositum √ȝ (12 + √ȝ 6) + √ȝ (12 — √ȝ 6) in seipsum, produceturq. numerus 24 + √ȝ 552. vt supra diximus. Huius ergo radix quadrata, nimirum √ȝ (24 + √ȝ 552.) erit summa duarum radicum propositarum.

Eodem modo supra, harum radicum, √ȝ (10 + √ȝ 36) & √ȝ (10 — √ȝ 36) summa inuenta fuit, √ȝ (20 + √ȝ 256) hoc est, √ȝ 36. id est, 6.

ITEM sint addendæ √ȝ (8 + √ȝ 32) & √ȝ (8 — √ȝ 32.) Sic stabit exēplum ad multiplicationem. Si ergo producto numero præfiges signū √ȝ. erit summa duarum radicum dictarum, √ȝ (16 + √ȝ 128.)

√ȝ (8 + √ȝ 32) + √ȝ (8 — √ȝ 32)<br>
√ȝ (8 + √ȝ 32) + √ȝ (8 — √ȝ 32)<br>
8 + √ȝ 32 + 8 — √ȝ 32<br>
√ȝ 32<br>
√ȝ 32<br>
√ȝ 128<br>
Productus. 16 + √ȝ 128.

ITEM sit addenda √ȝ (2 + √ȝ 3) ad √ȝ (2 — √ȝ 3.) Sic instituetur multiplicatio, fietq. productus, 4 + √ȝ 4. hoc est, 6. Igitur summa duarum radicum quæsita erit √ȝ 6.

√ȝ (2 + √ȝ 3) + √ȝ (2 — √ȝ 3)<br>
√ȝ (2 + √ȝ 3) + √ȝ (2 — √ȝ 3)<br>
2 + √ȝ 3 + 2 — √ȝ 3<br>
√ȝ 1<br>
√ȝ 1<br>
√ȝ 4<br>
Productus. 4 + √ȝ 4. hoc est, 6.

Huiusmodi radicum additio commodè etiā sic fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius. quod breuissimè fiet, si in alterutra radice, quadratum posterioris particulæ dematur ex quadrato particulæ prioris, & residui radix adijciatur ad priorem particulam, summaq. hæc duplicetur, id est, per 2. multiplicetur. Radix enim huius producti dabit summā quæsitam. Vt in primo exemplo, summa √ȝ (12 + √ȝ 6) & √ȝ (12 — √ȝ 6) ita fiet. Dempto quadrato 6. posterioris particulæ ex 144. quadrato particulæ prioris, superfunt 138. Si igitur addamus √ȝ 138.

12.

ad 12. priorem particulam, fiet ſumma 12 + √ȝ 138. quæ ducta in 2. faciet ſummam quæſitam √ȝ (24 + √ȝ 552) vt prius.

IN ſecundo autem exemplo, ſumma √ȝ (10 + √ȝ 36) & √ȝ (10 — √ȝ 36) ita nota fiet. Dempto quadrato 36. poſterioris particulæ ex 100. quadrato prioris particulæ, remanent 64. Si ergo √ȝ 64. addes ad priorem particulam 10. facies 10 + √ȝ 64. quæ ſumma ducta in 2. faciet ſummam deſideratam √ȝ (20 + √ȝ 256.) hoc eſt, √ȝ 36. hoc eſt, 6. veluti prius.

IN tertio denique exemplo, ſummam radicum √ȝ (2 + √ȝ 3) & √ȝ (2 — √ȝ 3) ſic cognoſcemus. Dempto quadrato 3. poſterioris particulæ ex 4. quadrato particulæ prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus √ȝ 1. ad 2. priorem particulam, faciemus 2 + √ȝ 1. hoc eſt, 3. Duplum eſt 6, Ergo √ȝ 6. eſt ſumma optata, eadem quæ prius.

QVANDO addendæ ſunt duæ radices numerorum compoſitorũ diſſimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales ſunt: addi poterunt nonnunquam per propoſ. 4. lib. 2. Eucl. tum ſcilicet, cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicata productus reduci poteſt ad ſimplicem numerum, vel ad numerum compoſitum duarum particularum. hoc ſcilicet modo. Sit addenda √ȝ (10 + √ȝ 36) ad √ȝ (11 + √ȝ 25) hoc eſt, 4. ad 4. vbi ſumma eſt 8. Quadrata duarum radicum per ſignum + connexa faciunt 10 + √ȝ 36 + 11 √ȝ 25. Productus numerus ex vna radice in alteram, (hoc eſt, ſi quadratum vnius in quadratum alterius ducatur, & producto præfigatur ſignum √ȝ. vt in multiplicatione radicum ſimplicium quadratarum fieri ſolet) eſt √ȝ (110 + √ȝ 4356 + √ȝ 2500 + √ȝ 900.) vt in ſubiecta formula apparet. cuius duplum (ſi nimirum per 2. multiplicetur) √ȝ (440 + √ȝ 69696 + √ȝ 40000 + √ȝ 14400) reducitur ad √ȝ 1024. hoc eſt, ad 32.

√ȝ (10 + √ȝ 36)
√ȝ (11 + √ȝ 25)

√ȝ 2500 + √ȝ 900
110 + √ȝ 4356

√ȝ (110 + √ȝ 4356 + √ȝ 2500 + √ȝ 900.)

Si igitur addantur 32. ad duo ſuperiora quadrata, erit tota ſumma √ȝ (10 + √ȝ 36 + √ȝ 11 + √ȝ 25 + 32.) hoc eſt, √ȝ 64. ſiue 8. vt ratio poſtulat.

SIT rurſum addenda √ȝ (12 + √ȝ 108) ad √ȝ (2 + √ȝ 3) Summa quadratorum eſt 12 + √ȝ 108 + 2 + √ȝ 3. Productus numerus ex vna radice in alteram eſt √ȝ (42 + √ȝ 1728) quæ radix eſt √ȝ 24 + √ȝ 18. (vt ex cap. 27. patebit.) cuius duplum, nimirum √ȝ 96 + √ȝ 72. additum ad prædicta duo quadrata 12 + √ȝ 108 + 2 + √ȝ 3. hoc eſt, ad 14 + √ȝ 108 + √ȝ 3. hoc eſt, ad 14 + √ȝ 147. (nã √ȝ 108. & √ȝ 3. ſunt commenſurabiles, conficiuntq. √ȝ 147.) fiet tota ſumma √ȝ (14 + √ȝ 147 + √ȝ 96 + √ȝ 72.)

SIT quoque addenda √ȝ (√ȝ 2 + 1) ad √ȝ (√ȝ 162 + 9.) Summa quadratorum eſt √ȝ 2 + 1 + √ȝ 162 + 9. Ex vna radice in alteram

fit √ȝ

fit √ȝ (27 + √ȝ 648) quæ radix valet 3 + √ȝ 18. (quo pacto autem ex hoc quadrato 27 + √ȝ 648. erui debeat radix, cap. 27. docebimus) cuius duplum 6 + √ȝ 72. additum ad prædictam quadratorum summam facit √ȝ 2 + 1 + √ȝ 162 + 9 + 6 + √ȝ 72. hoc est √ȝ 512 + 16. Nam √ȝ 162. & √ȝ 2. commensurabiles sunt, faciuntq. √ȝ 200. Item √ȝ 200. & √ȝ 72. commensurabiles quoque sunt, faciuntq. √ȝ 512. Summa ergo quæsita erit √ȝ (√ȝ 512 + 16.)

SED quando productus numerus ex vna radice in alteram non potest reduci ad numerum compositum, quando videlicet radicem, quæ sit vel radix simplex, vel numerus compositus, non habet, fieret hoc modo summa magis perplexa, & obscura. Quare commodius fiet tunc addito per signum + interpositum. V. g. si addenda sit √ȝ (2 + √ȝ 3) ad √ȝ (√ȝ 12 + 2) fit ex vna in alteram √ȝ (√ȝ 48 + √ȝ 36 + 4 + √ȝ 12) hoc est, √ȝ (√ȝ 108 + 10) propterea quod √ȝ 48. & √ȝ 12. commensurabiles sunt, conficiuntq. √ȝ 108. ac √ȝ 36. & 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus √ȝ 108 + 10. radicem habet √ȝ (√ȝ 27 + √ȝ 2) + √ȝ (√ȝ 27 — √ȝ 2.) vt ex cap. 27. constabit. quæ quidem composita est ex duabus radicibus duorum numerorum compositorum. Efficiunt autem hæ duæ radices summam √ȝ (√ȝ 27 + √ȝ 2 + √ȝ 27 — √ȝ 2 + 10. vt in hac formula apparet. Atque hæc summa reducitur ad hanc, √ȝ (√ȝ 108 + 10) erit hæc summa radix huius numeri √ȝ 108 + 10.

√ȝ (√ȝ 27 + √ȝ 2) + √ȝ (√ȝ 27 — √ȝ 2)
√ȝ (√ȝ 27 + √ȝ 2) + √ȝ (√ȝ 27 — √ȝ 2)
√ȝ 27 + √ȝ 2 + √ȝ 27 — √ȝ 2
√ȝ 25. hoc est, 5
√ȝ 25. hoc est, 5
√ȝ 100. id est, 10
√ȝ (√ȝ 27 + √ȝ 2 + √ȝ 27 — √ȝ 2 + 10.

quod patet, quia √ȝ (√ȝ 108 + 10) in se ducta facit √ȝ 108 + 10. Hæc autem radix √ȝ (√ȝ 108 + 10) duplicata, quod fiet, si eius quadratum √ȝ 108 + 10. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, inquã, radix duplicata facit √ȝ (√ȝ 1728 + 40) quæ cum duobus quadratis radicum propositarum, nimirum cum 2 + √ȝ 3. & √ȝ 12 + 2. faciet radicum summam √ȝ (√ȝ 1728 + 40) + 2 + √ȝ 3 + √ȝ 12 + 2) sed quia 2 + √ȝ 3 + √ȝ 12 + 2. faciunt 14 + √ȝ 27. erit summa √ȝ (√ȝ 1728 + 40) + √ȝ 27 + 14) quæ magis intricata est, quam si summa dicatur esse √ȝ (2 + √ȝ 3) + √ȝ (√ȝ 12 + 2.) Eadem illa summa intricata facilius reperietur, sine inuentione radicis numeri √ȝ 108 + 10. cuius radix, nimirum √ȝ (√ȝ 108 + 10.) producta fuit ex vna radice proposita in alteram. Nam duplum huius numeri, √ȝ (√ȝ 1728 + 40) cum duobus quadratis radicum propositarũ, conficiet ex propos. 4. lib. 2. Eucl. duarum radicum summam eandem √ȝ (√ȝ 1728 + 40) + √ȝ 27 + 14.)

QVANDO duæ huiusmodi radices sunt commensurabiles, poterunt inter se addi per regulam trium, veluti radices simplices. Vt si addenda proponatur √ȝ (2 + √ȝ 3) ad √ȝ (8 + √ȝ 48.) Diuisa

hac

hac per illam, (inuento videlicet nouo diuisore √ʒ 1. & nouo diuidendo √ʒ 4.) fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. siue $\frac{2}{1}$. Habẽt ergo illæ radices proportionem duplam: ac proinde si fiat, Vt 1. ad 3. ita √ʒ (2 + √ʒ 3) ad aliud, inuenietur summa √ʒ (18 + √ʒ 243.)

ITEM sit addenda √ʒ (4 + √ʒ 6) ad √ʒ (8 + √ʒ 24.) Diuisa hac per illam (inuento diuisore nouo √ʒ 10. & nouo diuidendo √ʒ 20) fit Quotiens √ʒ 2. qui licet irrationalis sit, ac proinde radices propositæ sint incommensurabiles, conabimur tamen eius beneficio illas simul addere, more radicum commensurabilium. Est ergo proportio vnius radicis ad alteram, quæ √ʒ 2. ad 1. ita vt denominator proportionis sit $\frac{\sqrt{ʒ}\,2}{1}$. Et denominator 1. huius fractionis additus ad √ʒ 2. denominatorẽ, facit √ʒ 2 + 1. Quare si fiat, Vt 1. ad √ʒ 2 + 1. ita √ʒ (4 + √ʒ 6) ad aliud, fit √ʒ (12 + √ʒ 128 + √ʒ 54 + √ʒ 48) pro summa duarum radicum propositarum. Nam vt in regula trium multiplicetur √ʒ 2 + 1. in √ʒ (4 + √ʒ 6) reducenda est √ʒ 2 + 1. ad quadratum 3 + √ʒ 8. hoc est, ducenda in se, atque hoc ducendum in 4 + √ʒ 6. quadratum radicis √ʒ (4 + √ʒ 6.) Productoq. 12 + √ʒ 128 — √ʒ 54 + √ʒ 48. præfigendum signum √ʒ.

SIT præterea addenda √ʒ (√ʒ 6 — √ʒ 2) ad √ʒ (√ʒ 96 — √ʒ 32.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √ʒ 4. & nouo diuidendo √ʒ 16.) fit Quotiens √ʒ 4. hoc est, 2. estq. proportio vnius radicis ad alteram dupla, cuius denominator est $\frac{2}{1}$. Si igitur fiat, Vt 1. ad 3. ita √ʒ (√ʒ 6 — √ʒ 2) ad aliud: reperietur summa quæsita √ʒ (√ʒ 486 — √ʒ 162.)

*Subtractio radicum numerorum compositorum.*

IAM vero si a radice numeri compositi detrahenda sit alia radix similis numeri diminuti, (quod sæpe contingit in Binomijs, ac Residuis, eorumq. radicibus) fiet id hoc modo. Sit subtrahenda V. g. √ʒ (12 — √ʒ 6) a √ʒ (12 + √ʒ 6) Certum est, residuum esse √ʒ (12 + √ʒ 6) — √ʒ (12 — √ʒ 6) Scribatur ergo hoc residuum bis, & in se multiplicetur, hoc est, iuxta propos. 4. lib. 2. Eucl. ad quadrata partium, 12 + √ʒ 6. & 12 — √ʒ 6. addatur duplum numeri — √ʒ 138. qui fit ex vna parte in alteram, videlicet — √ʒ 552. fietq. quadratum 24. — √ʒ 552. quia duo quadrata efficiunt 24. Radix igitur huius quadrati, nimirum √ʒ (24 — √ʒ 552) erit id, quod relinquitur ex detractione √ʒ (12 — √ʒ 6) a √ʒ (12 + √ʒ 6.) Detracto enim numero ex alio numero, si reliquus numerus ducatur in se, erit radix quadrata numeri producti, numerus ille reliquus. Ac proinde cum in dato exemplo numerus reliquus, √ʒ (12 + √ʒ 6) — √ʒ (12 — √ʒ 6) in se ductus faciat 24 — √ʒ 552. erit √ʒ (24 — √ʒ 552) numerus, qui relinquitur ex detractione √ʒ (12 — √ʒ 6) a √ʒ (12 + √ʒ 6.)

√ʒ (12 + √ʒ 6) — √ʒ (12 — √ʒ 6)
√ʒ (12 + √ʒ 6) — √ʒ (12 — √ʒ 6)
12 + √ʒ 6 + 12 — √ʒ 6
— √ʒ 138
— √ʒ 138
24 — √ʒ 552

ALIVD exemplum in numeris rationalibus. Sit subtrahenda

√ʒ

$\sqrt{z}\,(10 - \sqrt{z}\,36)$ ex $\sqrt{z}\,(10 + \sqrt{z}\,36)$ nimirum 2. ex 4. vbi perspicuum est, reliquum numerum esse 2. Scripto numero $\sqrt{z}\,(10 + \sqrt{z}\,36.) - \sqrt{z}\,(10 - \sqrt{z}\,36)$ qui nimirum relinquitur post detractionem $\sqrt{z}\,(10 - \sqrt{z}\,36)$ ex $\sqrt{z}\,(10 + \sqrt{z}\,36)$ atque eodem ducto in se, iuxta præscriptum propos. 4. lib. 2. Eucl. fiet productus numerus $20 - \sqrt{z}\,256.)$ Ergo residuum quæsitum erit $\sqrt{z}\,(20 - \sqrt{z}\,256)$ hoc est, $\sqrt{z}\,4.$ siue 2. quod est propositum.

$$\begin{array}{r}
\sqrt{z}\,(10 + \sqrt{z}\,36) - \sqrt{z}\,(10 - \sqrt{z}\,36) \\
\sqrt{z}\,(10 + \sqrt{z}\,36) - \sqrt{z}\,(10 - \sqrt{z}\,36) \\
\hline
10 + \sqrt{z}\,36. \quad \& \quad 10 - \sqrt{z}\,36 \\
- \sqrt{z}\,64 \qquad\qquad \\
- \sqrt{z}\,64 \qquad\qquad \\
\hline
20 - \sqrt{z}\,256. \qquad
\end{array}$$

QVANDO propositæ radices huiusmodi sunt diuersæ, poterit minor a maiore subtrahi, ex præscripto propos. 7. lib. 2. Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci potest ad numerum simplicem, vel compositum duarũ particularum, hac scilicet ratione. Sit subtrahenda $\sqrt{z}\,(8 - \sqrt{z}\,32)$ ex $\sqrt{z}\,(8 + \sqrt{z}\,32.)$ Quadrata duarum particularum sunt $8 - \sqrt{z}\,32.$ & $8 + \sqrt{z}\,32.$ quæ connexa per signum +, faciunt $8 - \sqrt{z}\,32 + 8 + \sqrt{z}\,32.$ hoc est, 16. Ex vna radice in alteram fit $\sqrt{z}\,32.$ cuius duplum $\sqrt{z}\,128.$ ablatum ex 16. summa quadratorum, relinquit $16 - \sqrt{z}\,128.$ Huius ergo numeri radix quadrata, nimirum $\sqrt{z}\,(16 - \sqrt{z}\,128)$ est residuum desideratum.

$$\begin{array}{c}
\sqrt{z}\,(8 + \sqrt{z}\,32) \\
\sqrt{z}\,(8 - \sqrt{z}\,32) \\
\hline
\sqrt{z}\,32
\end{array}$$

SIT rursus auferenda $\sqrt{z}\,(2 + \sqrt{z}\,3)$ ex $\sqrt{z}\,(12 + \sqrt{z}\,108.)$ Summa quadratorum est $2 + \sqrt{z}\,3 + 12 + \sqrt{z}\,108.$ hoc est, $14 + \sqrt{z}\,147.$ Nam $\sqrt{z}\,108.$ & $\sqrt{z}\,3.$ commensurabiles sunt, efficiuntq. $\sqrt{z}\,147.$ Ex vna radice in alteram fit $\sqrt{z}\,(42 + \sqrt{z}\,1728)$ quæ radix, vt ex cap. 28. constabit, est $\sqrt{z}\,24 + \sqrt{z}\,18.$ cuius duplum $\sqrt{z}\,96 + \sqrt{z}\,72.$ demptum ex prædicta quadratorum summa $14 + \sqrt{z}\,147.$ relinquit $14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,96.$ & $- \sqrt{z}\,72.$ & præposito signo $\sqrt{z}$. erit residuum subtractionis $\sqrt{z}\,(14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,96.$ & $- \sqrt{z}\,72.)$ quod idem est, ac $14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,96 + \sqrt{z}\,72.$ quia sensus est, ex $14 + \sqrt{z}\,147.$ detrahi aggregatum ex $\sqrt{z}\,96.$ & $\sqrt{z}\,72.$ vt rectè dictum sit, residuum esse $14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,96.$ & $- \sqrt{z}\,72.$ Est enim sensus, non solum subtrahi $\sqrt{z}\,96.$ sed insuper $\sqrt{z}\,72.$ subduci. Hoc autem perspicuè cernitur, si numerus rationalis detrahendus sit, vt $\sqrt{z}\,100 + \sqrt{z}\,4.$ ex $14 + \sqrt{z}\,147.$ vbi certum est, subtrahi $10 + 2.$ hoc est, 12. residuumq. esse $2 + \sqrt{z}\,147.$ quod æquiualet huic, $14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,100 + \sqrt{z}\,4.$ siue huic, $14 + \sqrt{z}\,147 - \sqrt{z}\,100.$ & $- \sqrt{z}\,4.$ vt perspicuum est.

$$\begin{array}{r}
12 + \sqrt{z}\,108 \\
2 + \sqrt{z}\,3 \\
\hline
+ \sqrt{}\,432 + \sqrt{z}\,324 \\
24 + \sqrt{}\,432 \qquad\quad \\
\hline
\sqrt{z}\,(42 + \sqrt{z}\,1728)
\end{array}$$

QVOD si productus numerus ex vna radice in alteram non habeat

beat radicem, numerum compositum duarum particularum, facienda est subtractio per signum —. Vt si subtrahenda sit √ȝ (2 + √ȝ 3) ex √ȝ (√ȝ 12 + 2.) Ex ductu vnius radicis in alteram fit √ȝ(√ȝ 108 + 19) quæ, vt ex cap. 28. patebit, æquiualet huic, √ȝ(√ȝ 27 + √ȝ 2) + √ȝ (√ȝ 27 — √ȝ 2.) Quare commodius dicetur residuum subtractionis esse √ȝ (√ȝ 12 + 2) — √ȝ (2 — √ȝ 3.)

QVANDO denique huiusmodi radices sunt commensurabiles, subtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus simplicibus diximus. Sit enim subtrahenda √ȝ (2 + √ȝ 3.) ex √ȝ (8 + √ȝ 48.) Diuisa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuisore √ȝ 1. & nouo diuidendo √ȝ 4.) fit Quotiens √ȝ 4. hoc est 2. ita vt proportio earum sit dupla, cuius denominator $\frac{2}{1}$. Si ergo fiat, vt 1. ad 1. ita √ȝ (2 + √ȝ 3) ad aliud, producetur √ȝ (2 + √ȝ 3) pro residuo subtractionis.

ITEM sit auferenda √ȝ (4 + √ȝ 6) ex √ȝ (8 + √ȝ 24.) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuisore √ȝ 10. & nouo diuidendo √ȝ 20.) fit Quotiens √ȝ 2. ita vt denominator proportionis maioris ad minorem sit √ȝ 2/1. Si ergo fiat, vt 1. ad √ȝ 2 — 1. ita √ȝ (4 + √ȝ 6) ad aliud, prodibit residuum subtractionis √ȝ (12 + √ȝ 54 — √ȝ 128 — √ȝ 48.) Nam vt in regula trium multiplicetur √ȝ (4 + √ȝ 6) per √ȝ 2 — 1. reducendus est prius hic numerus ad quadratum 3 — √ȝ 8 &c.

Postremo sit subducenda √ȝ(√ȝ 6 — √ȝ 2) a √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) Diuisa hac per illam, (inuento scilicet diuisore nouo √ȝ 4. nouoq. diuidendo √ȝ 36) fit Quotiens √ȝ 9. hoc est, 3. ita vt radices propositæ habeant proportionem triplam, cuius denominator $\frac{3}{1}$. Si igitur fiat, vt 1. ad 2. ita √ȝ (√ȝ 6 — √ȝ 2) ad aliud, prodibit residuum quæsitũ √ȝ (√ȝ 96 — √ȝ 32.) Vt enim in regula triũ secundus numerus in tertium multiplicetur, reducendi sunt ambo ad quadrata 4. & √ȝ 6 — √ȝ 2. & vnum in alterum ducendum, vt hic factum esse vides, & producto præfigendum signum √ȝ. vt residuum fiat √ȝ (√ȝ 96 — √ȝ 32.) Idem residuum reperietur, si fiat, vt 3. ad 2. ita √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) ad aliud. Nam reuocato secundo numero regulæ trium 2. & tertio √ȝ (√ȝ 486 — √ȝ 162) ad quadrata 4. & √ȝ 486 — √ȝ 162. si inter se multiplicentur, gignetur numerus √ȝ 7776 — √ȝ 2592. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo √ȝ 7776. diuidatur per 9. id est, per √ȝ 81. fiet Quotiens √ȝ 96. Et si — √ȝ 2592. diuidatur per 9. hoc est, per √ȝ 81. fiet Quotiens — √ȝ 32. &c.

| | |
|---|---|
| √ȝ 6 — √ȝ 2 | |
| | 4 |
| √ȝ 96 — √ȝ 32 | |

| | |
|---|---|
| √ȝ 486 — √ȝ 162 | |
| | 4 |
| √ȝ 7776 — √ȝ 2592 | |

# DE MINVTIIS NVMERORVM Irrationalium, ac de earundem Algorithmo. Cap. XXV.

*Numeratio minutiarum irrationaliũ.*

NVMERATIO harum minutiarum facilis est. Quando enim signum radicale ponitur ante medium minutiæ, refertur signum illud ad vtrumque terminum, tam scilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia √ȝ $\frac{9}{16}$. significat √ȝ 9. diuisam esse per √ȝ 16. æquiualetq. $\frac{3}{4}$. Sic √ce $\frac{8}{27}$. significat √ce 8. diuisam esse per √ce 27. æquiualetq. $\frac{2}{3}$. Ita quoque √ȝ $\frac{6}{8}$ denotat, √ȝ 6. esse diuisam per √ȝ 8.

QVANDO signum radicale ponitur ante numerum integrum cum fractione, reducendus est totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi possit. Vt √ce 1 $\frac{67}{125}$. reducitur ad √ce $\frac{192}{125}$. significatq. √ce 192. diuisam esse per √ce 125. hoc est, per 5. potestq. ita repræsentari $\frac{\sqrt{ce}\,192}{5}$, ita vt significet, √ce 192. esse diuisam per 5. Quòd si termini huius minutiæ √ce $\frac{192}{125}$. multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per √ce 192. producetur minutia √ce $\frac{36864}{24000}$ æquiualens minutiæ $\frac{192}{125}$. Et si rursus termini productæ minutiæ ducantur in eandem √ce 192. fiet minutia æquiualens √ce $\frac{7077888}{4608000}$. hoc est, $\frac{192}{\sqrt{ce}\,4608000}$. significatq. cubum 192. (qui videlicet producitur ex √ce 192. ducta in se cubicè) diuisum esse per √ce 4608000. quia radix cubica numeratoris 7077888. est 192. Rursus minutia √ȝ $\frac{16}{64}$. significat √ȝ 16. nimirum 4. diuisam esse per √ȝ 64. nimirum per 8. æquiualetq. minutiæ $\frac{1}{2}$. At minutia $\frac{\sqrt{ȝ}\,16}{64}$. significat √ȝ 16. id est, 4. diuisam esse per 64. æquiualetq. minutiæ $\frac{4}{64}$. vel $\frac{1}{16}$. Sic minutia $\frac{16}{\sqrt{ȝ}\,64}$. significat numerum 16. diuisum esse per √ȝ 64. id est, per 8. æquiualetq. numero 2.

QVANDO eadem est proportio numeratorum ad denominatores, minutiæ æquales sunt, quemadmodum in minutijs vulgaribus. Itaq. omnes hæ minutiæ $\frac{\sqrt{ȝ}\,64}{2}$. √ȝ $\frac{64}{4}$. $\frac{64}{\sqrt{ȝ}\,256}$. eiusdem sunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem seruat quadruplam, vt constat, si numeratores singuli per singulos denominatores diuidantur.

*Abbreuiatio minutiarum irrationaliũ.*

MINVTIAE irrationales reducuntur ad minimos terminos, quando reduci possunt, vt reduci solent minutiæ vulgares. Vt hæc minutia √ȝce $\frac{4}{8}$. reducitur ad hanc √ȝce $\frac{1}{2}$. & √ȝ $\frac{144}{576}$. ad √ȝ $\frac{1}{4}$. Possunt quoque nonnunquam reduci ad minora signa radicalia. Vt √ȝce $\frac{4}{8}$. reducitur ad $\frac{\sqrt{ce}\,2}{\sqrt{ȝ}\,2}$. quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. sed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. sed hæc quadratam non habet. Esse autem has minutias

$\sqrt{z}ce\ \frac{4}{8}$. & $\frac{\sqrt{z}ce\ 2}{\sqrt{z}\ 2}$. æquales, probari poteſt ex multiplicatione in crucem.

*Additio & ſubtractio minutiarum irrationalium.*

ADDITIO, atque ſubtractio fit in hunc modum. Si denominator eſt idem, adduntur denominatores, vt ſupra traditum eſt, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reſiduo communis denominator ſupponitur. Vt ex additione $\frac{\sqrt{z}\ 4}{7}$. ad $\sqrt{z}\ \frac{9}{7}$. fit ſumma $\frac{\sqrt{z}\ 25}{7}$. hoc eſt, $\frac{5}{7}$. At ſubtracta $\frac{\sqrt{z}\ 4}{7}$. ex $\frac{\sqrt{z}\ 9}{7}$. relinquitur $\frac{\sqrt{z}\ 1}{7}$. id eſt $\frac{1}{7}$.

| Additio | | Subtractio | |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{z}\ 4}{7}$. | $\frac{\sqrt{z}\ 9}{7}$. | $\frac{\sqrt{z}\ 4}{7}$. | $\frac{\sqrt{z}\ 9}{7}$. |
| $\frac{\sqrt{z}\ 25}{7}$. vel $\frac{5}{7}$. | | $\frac{\sqrt{z}\ 1}{7}$. vel $\frac{1}{7}$. | |

QVANDO autem denominatores ſunt diuerſi, fit reductio ad eundem denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodum in minutijs vulgaribus fieri conſueuit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter ſe, vel vnus ab altero ſubtrahitur, & ſummæ, vel reliquo numero idem denominator communis ſubſcribitur. Vt ſi addi debent $\sqrt{z}\ \frac{16}{49}$. ad $\sqrt{z}\ \frac{4}{9}$. vel illa ex hac auferenda, reducentur, vt formula appoſita monſtrat, ad $\frac{\sqrt{z}\ 144}{\sqrt{z}\ 441}$. & $\frac{\sqrt{z}\ 196}{\sqrt{z}\ 441}$.

Reductio

$$\frac{\sqrt{z}\ 144}{\frac{\sqrt{z}\ 16}{\sqrt{z}\ 49}} \qquad \frac{\sqrt{z}\ 196}{\frac{\sqrt{z}\ 4}{\sqrt{z}\ 9}}$$
$$\sqrt{z}\ 441$$

Additio

$$\frac{\sqrt{z}\ 144}{\sqrt{z}\ 441}. \qquad \frac{\sqrt{z}\ 196}{\sqrt{z}\ 441}.$$
$$\frac{26}{21}$$

fit autem ex additione ſumma $\frac{26}{21}$. hoc eſt, $1\frac{5}{21}$. Nam numeratores commenſurabiles ſunt in proportione $\frac{7}{6}$. efficiuntq. ſummam $\sqrt{z}$ 676. cui ſupponitur denominator communis $\sqrt{z}$ 441. vt fiat ſumma $\frac{\sqrt{z}\ 676}{\sqrt{z}\ 441}$. hoc eſt, $\frac{26}{21}$. id eſt, $1\frac{5}{21}$. At ſubtracta $\frac{\sqrt{z}\ 144}{\sqrt{z}\ 441}$. ex $\frac{\sqrt{z}\ 196}{\sqrt{z}\ 441}$. remanent $\frac{2}{21}$. Nam numerator $\sqrt{z}$ 144. ſubtractus a numeratore $\sqrt{z}$ 196. relinquit $\frac{\sqrt{z}\ 4}{\sqrt{z}\ 441}$. hoc eſt, $\frac{2}{21}$.

Eodem modo, ſi addendæ ſunt [illegible]. & [illegible]. reduco eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad [illegible]. & [illegible]. Additis deinde numeratoribus, ac ſuppoſito eodẽ denominatore 10. fit ſũma [illegible]. At vero ex ſubtractione minoris minutiæ ex maiore relinquitur [illegible]. quia $\sqrt{z}$ 200. ex $\sqrt{z}$ 200. nihil relinquit.

ITEM ſi addendæ ſunt $\frac{\sqrt{z}\ 4}{9}$. & $\frac{\sqrt{z}\ 49}{9}$. vel illa minutia ex hac detrahenda, non eſt opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus ſumma $\sqrt{z}$ 81. & ſuppoſito denominatore 9. fit ſumma ex duabus propoſitis minutijs $\frac{\sqrt{z}\ 81}{9}$. hoc eſt, 1. At detracto numeratore $\sqrt{z}$ 4. ex numeratore $\sqrt{z}$ 49. relinquitur $\sqrt{z}$ 25. Eſt ergo reſiduum $\frac{\sqrt{z}\ 25}{9}$. hoc eſt, $\frac{5}{9}$.

QVANDO numeratores ſunt incommenſurabiles, additio eorũ fit per interpoſitionem ſigni +, ſubtractio autem per interiectionem ſigni —. Vt ſumma ex $\sqrt{z}\ \frac{7}{8}$. & $\sqrt{z}\ \frac{5}{8}$. fit ſumma $\sqrt{z}\ \frac{7}{8} + \sqrt{z}\ \frac{5}{8}$. Et $\sqrt{z}\ \frac{5}{8}$. dempta ex $\sqrt{z}\ \frac{7}{8}$. reliquam facit $\sqrt{z}\ \frac{7}{8} - \sqrt{z}\ \frac{5}{8}$.

IN

IN multiplicatione, ac diuisione minutiarum irrationalium solum opus est reductione ad eadem signa radicalia. Reliqua enim perficiuntur, vt in minutijs vulgaribus traditum est. Vt si ducenda sit $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$ per $\frac{\sqrt{z}\,6}{7}$, fit $\frac{\sqrt{z}\,18}{28}$. At si prior per posteriorem diuidenda sit, inuersis terminis diuisoris, stabit exemplum, vt vides.

| Multiplicatio | Diuisio |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$ per $\frac{\sqrt{z}\,6}{7}$. | $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$ per $\frac{7}{\sqrt{z}\,6}$. |

Fit autem Quotiens $\frac{\sqrt{z}\,147}{\sqrt{z}\,96}$. hoc est $\sqrt{z}\,1\frac{51}{96}$. Nam ex $\sqrt{z}\,3$. in 7. fit $\sqrt{z}\,147$. & ex 4. in $\sqrt{z}\,6$. fit $\sqrt{z}\,96$. In diuisione tamen fieri potest reductio ad eandem denominationem, sed tunc, relicto denominatore, facienda est diuisio numeratoris per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutiæ $\frac{\sqrt{z}\,3}{4}$. & $\frac{\sqrt{z}\,6}{7}$. reducentur ad $\frac{\sqrt{z}\,147}{28}$. & $\frac{\sqrt{z}\,96}{28}$. Diuiso autem numeratore $\sqrt{z}\,147$. per numeratorem $\sqrt{z}\,96$. fit Quotiens $\sqrt{z}\,1\frac{51}{96}$, vt prius.

SINT quoq; multiplicanda inter se $\frac{\sqrt{z}\,800+\sqrt{ce}\,5184}{10}$ & $\frac{\sqrt{zce}\,1536}{10}$. Primùm reducenda sunt ad eadem signa radicalia, retento eodem denominatore cōmuni 10. Numeratores ergo $\sqrt{z}\,800$. & $\sqrt{ce}\,5184$. reducentur ad $\sqrt{zce}\,512000000$. & $\sqrt{zce}\,26873856$. Deinde si numerator $\sqrt{zce}\,1536$. multiplicetur Zensicè, reducetur ad $\sqrt{zce}\,2359296$. Itaq; sic stabunt minutiæ reductæ. Ex $\sqrt{zce}\,2359296$. in

$$\frac{\sqrt{zce}\,512000000+\sqrt{zce}\,26873856}{10}. \quad \frac{\sqrt{zce}\,2359296}{10}.$$

$\sqrt{zce}\,512000000$. hoc est, in $\sqrt{zce}\,512$. (Nam $\sqrt{zce}\,512$. & $\frac{\sqrt{zce}\,512000000}{10}$. idem prorsus sunt, cum idem numerus fiat ex $\sqrt{zce}\,512$. in 10. hoc est, in $\sqrt{zce}\,1000000$. qui ex 1. in $\sqrt{zce}\,512000000$) producitur $\sqrt{zce}\,1207959552$. Et ex $\sqrt{zce}\,2359296$. in $\sqrt{zce}\,26873856$. fit $\sqrt{zce}\,63403380965376$. hoc est, $\sqrt{ce}\,7962624$. cū hic numerus sit illius producti radix zensica. Et quoniam denominatores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

$$\frac{\sqrt{zce}\,1207959552+\sqrt{ce}\,7962624}{100}.$$

AD extremum sit diuidenda $\frac{\sqrt{zce}\,512000000+\sqrt{zce}\,26873856}{10}$. per $\frac{\sqrt{zce}\,2359296}{10}$. Quoniam eundem habent denominatorem, satis est, diuidere numeratores. Ex diuisione $\sqrt{zce}\,512000000$, per $\sqrt{zce}\,2359296$. fit Quotiens $\sqrt{zce}\,217\frac{1}{72}$. nimirum $\sqrt{zce}\,\frac{15625}{72}$. hoc est, $\frac{5}{\sqrt{zce}\,72}$. propterea quod numerator $\sqrt{zce}\,15625$. æquiualet numero 5. cum numeri 15625. radix Zensica sit 125. & huius radix cubica 5. Vel (quod idem est) quod numeri 15625. radix cubica sit 25. & huius radix Zensica 5. At ex diuisione $\sqrt{zce}\,26873856$. per $\sqrt{zce}\,2359296$. fit Quotiens $\sqrt{zce}\,11\frac{921600}{2359296}$. siue $\sqrt{zce}\,11\frac{25}{64}$. vel $\sqrt{zce}\,\frac{729}{64}$. hoc est, $\frac{3}{2}$. siue $1\frac{1}{2}$. Ex diuisione ergo proposita fit Quotiens $\sqrt{zce}\,217\frac{1}{72}+1\frac{1}{2}$. Vel $\frac{5}{\sqrt{zce}\,72}+1\frac{1}{2}$.

*Multiplicatio ac diuisio minutiarum irrationalium.*

# DE NVMERIS IRRATIONALIBVS Cossicis, siue denominatis, vna cum eorum Algorithmo.

## Cap. XXVI.

*Numeri Cossici irrationales, qui.*

NVMERI Cossici, siue denominati sunt irrationales, quando illis præfigitur signum aliquod radicale. Vt 20 ℞. fit irrationalis √ȝ 20 ℞. Item √ce 20 ℞. √ȝȝ 20 ℞. &c. Sensus autem est, vt sumatur radix zensica, vel cubica, vel zensizensica 20. radicum, quæ mille modis variari potest, pro varietate valoris vnius radicis, potestq. aliquando esse rationalis, & aliquando, vt plurimũ, irrationalis. Nam si 1 ℞. est 5. erunt 20 ℞. numerus 100. cuius √ȝ. est 10. atque ita √ȝ 20 ℞. est numerus rationalis, æquiualens 10. At √ce 20 ℞. erit irrationalis, cum 100. non habeant radicem cubicam. Sic etiam √ȝȝ 20 ℞. erit irrationalis, quod 100. non habeant radicem zensizensicam: æquiualet tamen √ȝ 10. quippe cum radix zensica 100. sit 10. & radix zensica 10. sit √ȝ 10. Quod si 1 ℞. sit 50. erit valor 20 ℞. 1000. quæ habent radicem cubicam 10. Erit igitur √ce 20 ℞. rationalis, æquiualens 10. At √ȝ 20 ℞. erit irrationalis, sicut & √ȝȝ 20 ℞. cum 1000. neque habeant radicem zensicam, neque zensizensicam. Vides ergo, non posse iudicari, an huiusmodi numeri sint rationales, vel irrationales, nisi prius constet æstimatio vnius radicis. Immo fieri potest, vt numerus aliquis Cossicus, sine signo radicali, inueniatur interdum esse irrationalis. Vt si æquatio reperiatur inter 1 ȝ. & 20 ℞. & vnius zensi pretium sit 18. necessario numerus 20 ℞. erit irrationalis, æquiualens √ȝ 7200. Nam quadrati 18. radix est √ȝ 18. atque adeo 20 ℞. erunt √ȝ 7200. qui numerus irrationalis est, cum 7200. careant radice quadrata.

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo conficitur, signorum radicalium, numerorum absolutorum, & signorum Cossicorum; neque admodum difficilis est, cum ipsa signa satis nos instruant, quid agere debeamus.

*Additio, & Subtractio numerorum Cossicorum irrationalium.*

Additio enim vt plurimum fit per interpositionem signi +. Subtractio vero per signum −. Vt ex additione √ȝ 36 ℞. ad √ȝ 12 ȝ. fit summa √ȝ 36 ℞ + √ȝ 12 ȝ. Vel √ȝ 12 ȝ + √ȝ 36 ℞. At demptis 36. ex √ȝ 36 ℞. fit reliquus numerus √ȝ 36 ℞ − 36. & sic de alijs.

QVANDO signa Cossica sunt eadem, & numeri irrationales, semotis signis Cossicis, sunt commensurabiles, tunc signa Cossica operationem non impediunt, sed numeri irrationales adduntur, ac subtrahuntur, quemadmodum radices surdæ, vt cap. 19. & 20. mon-

strarum

ſtratum eſt, ac poſt operationem idem ſignum Coſſicum apponitur. Vt ex √ȝ 8 ℞. ad √ȝ 18 ℞. fit ſumma √ȝ 50 ℞. quia √ȝ 8. & √ȝ 18. cōmenſurabiles ſunt, efficiuntq. √ȝ 50. quod conſtat ita eſſe, ſi 1 ℞ ſtatuatur 2. Erunt enim 8 ℞. 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18 ℞. facient 36. cuius numeri radix eſt 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liquet autem √ȝ 50 ℞. facere etiam 10. cum 50 ℞ faciant 100. cuius numeri radix eſt 10.

SIC ex √ȝ 8 ℞. ad √ȝ 32 ℞. fit √ȝ 72 ℞. quod per reſolutionem probari poteſt, poſita 1 ℞. 2. Nam √ȝ 8 ℞. erit 4. & √ȝ 32 ℞. erit 8. fit autem ex 4. & 8. ſumma 12. Vide iam, an ſumma collecta √ȝ 72 ℞. faciat etiam 12. Certum autem eſt, 72 ℞. facere 144. cuius radix eſt 12.

ITEM ex √ȝ 8 ȝ. ad √ȝ 32 ȝ. fit ſumma √ȝ 72 ȝ. Et ex √ȝ 16 ȝ. ad √ȝ 4 ȝ. fit √ȝ 36 ȝ. Nam ſi 1 ℞. ſtatuatur 2. vt 1 ȝ fit 4. erunt 16 ȝ. 64. cuius numeri radix eſt 8. At 4 ȝ. erunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Fiunt autem 12. ex 8. & 4. quantum nimirum valet √ȝ 36 ȝ. quippe cum 36 ȝ. ſint 144. cuius numeri radix eſt 12.

PRAETEREA ex √ȝ 8 ȝ. ad √ȝ 18 ȝ. fit √ȝ 50 ȝ. quod etiam perbellè examini quadrat, poſita 1 ℞ 2. vt 1 ȝ. ſit 4. Erunt enim 8 ȝ. 32. cuius numeri radix eſt √ȝ 32. Et 18 ȝ. ſunt 72. cuius radix eſt √ȝ 72. Fit autem ex √ȝ 32. & √ȝ 72. ſumma √ȝ 200. Ac tantundem facit √ȝ 50 ȝ. quippe cum 50 ȝ. ſint 200. cuius numeri radix eſt √ȝ 200.

EADEM ratione, dempta √ȝ 8 ℞. ex √ȝ 18 ℞. ſupereſt √ȝ 2 ℞. Atque ſubtracta √ȝ 8 ȝ. à √ȝ 18 ȝ. reliqua fit √ȝ 2 ȝ. Vtrumque exemplum per radicem 2. ſic examinabimus. 8 ℞. faciunt 16. cuius numeri radix eſt 4. Et 18 ℞ faciunt 36. cuius numeri radix eſt 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Ac tantundem facit √ȝ 2 ℞. cū 2. ℞ faciant 4. cuius numeri radix eſt 2. Rurſus 8 ȝ. faciunt 32. cuius numeri radix eſt √ȝ 32. Et 18 ȝ. faciunt 72. cuius numeri radix eſt √ȝ 72. Subtracta vero √ȝ 32. ex √ȝ 72. remanet √ȝ 8. quantum nimirum facit √ȝ 2 ȝ. propterea quod 2 ȝ. faciunt 8. cuius numeri radix eſt √ȝ 8.

VT autem numeri Coſſici irrationales inter ſe multiplicentur, aut diuidantur, reducenda prius ſunt ſigna radicalia ad idem ſignū, vt cap. 18. docuimus: ſi nimirum multiplicatio fiat in crucem. Vt √ce 4 ℞. & √ȝ 8 ℞. reducuntur ad √ȝce 16 ȝ. & √ȝce 512 ce. vt ex ſubiecta formula patet. Nam 4 ℞ ductæ in ſe zenſicè, faciunt 16 ȝ. & 8 ℞ multiplicatæ in ſe cubicè faciunt 512 ce. Exponentes vero ſignorum radicalium inter ſe multiplicati faciunt 6. exponentem ſigni √ȝce. Reductionem autem eſſe ritè peractam, hoc eſt, √ȝce 16 ȝ. æqualem eſſe √ce 4 ℞. & √ȝce 512 ce. æquiualere √ȝ 8 ℞. perſpicuum eſt. Nam poſita 1 ℞ 2. erunt 4 ℞ 8. cu-

*Reductio ſignorum radicalium in numeris Coſſicis irrationalibus*

| √ȝce 16 ȝ | | √ȝce 512 ce |
|---|---|---|
| 4 ℞ | X | 8 ℞ |
| √ce | | √ȝ |
| 3 | | 2 |
| | 6 | |

ius

ius numeri radix cubica est 2. Ac tantundem facit √ʒce 16 ʒ. ad quā reducta est √ce 4 2e. Nam 16 ʒ. faciunt 64. cuius numeri radix zensicubica est 2. Item 8 2e. erunt 16. cuius numeri radix zensica est 4. Atque tantundem quoque facit √ʒce 512 ce. ad quam √ʒ 8 2e. reuocata est. Nam 512 ce. faciunt 4096. cuius numeri radix zensicubica est 4.

Eodem modo √ʒ 8 2e. & √ce 16 ʒ. reducentur ad √ʒce 512 ce. & √ʒce 256 ʒʒ. vt hæc altera formula docet. Esse autem √ʒce 512 ce. æqualem √ʒ 8 2e. & √ʒce 256 ʒʒ. æquiualere √ce 16 ʒ. facile probabimus. Nimirum √ʒ 8 2e. hoc est, √ʒ 16. est 4. quantum videlicet facit √ʒce 512 ce. quippe cum 512 ce. faciant 4096. cuius numeri √ʒce est 4. Item √ce 16 ʒ. est quoque 4. quantum nimirum facit √ʒce 256 ʒʒ. cum 256 ʒʒ. faciant 4096. qui numerus radicem zensicubicā habet 4. Ex quo constat, tam √ʒ 8 2e. & √ce 16 ʒ. inter se, quam √ʒce 512 ce. & √ʒce 256 ʒʒ. inter se esse æquales.

| √ʒce 512 ce | | √ʒce 256 ʒʒ |
|---|---|---|
| 8 2e | X | 16 ʒ |
| √ʒ | | √ce |
| 2 | | 3 |
| | 6 | |

*Multiplicatio ac diuisio numerorum Cossicorum irrationalium.*

FACTA reductione, vt præcepimus, institui potest & multiplicatio, & diuisio. In priori ergo exemplo, ex multiplicatione √ʒce 512 ce. in √ʒce 16 ʒ. fit √ʒce 8192 ß. quod ita probatur. √ʒce 512 ce. facit 4. Et √ʒce 16 ʒ. facit 2. Atque ex 4. in 2. fiunt 8. quantum nimirum facit √ʒce 8192 ß. Quoniam videlicet 8192 ß. faciūt 262144. cuius √ʒce est 8. Item ante reductionem √ce 4 2e. est 2. & √ʒ 8 2e. est 4. vbi rursum vides, ex 2. in 4. gigni 8.

Item ex diuisione √ʒce 512 ce. per √ʒce 16 ʒ. fit Quotiens √ʒce 32 2e. hoc est, 2. cum 32 2e faciant 64. cuius numeri √ʒce est 2. quod probatur. Nam √ʒce 512 ce. est 4. & √ʒce 16 ʒ. est 2. vbi cernis, ex diuisione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante reductionem manifestum est: quippe cum √ʒ 8 2e. fit 4. & √ce 4 2e. fit 2. vbi iterum ex diuisione 4. per 2. fit Quotiens 2.

IN posteriori vero exemplo, ex multiplicatione √ʒce 512 ce. in √ʒce 256 ʒʒ. fit √ʒce 131072 Bß. hoc est 16. propterea quod 131072 Bß. faciunt 16777216. qui numerus radicem zensicubicam habet 16. Atque hoc ita esse, liquet. Nam tam √ʒce 512 ce. quam √ʒce 256 ʒʒ. est 4. Manifestum autem est, ex 4. in 4. fieri 16. quod etiam patet ante reductionem, cum tam √ʒ 8 2e. quam √ce 16 ʒ. fit 4. posita 1 2e 2. &c.

Item, ex diuisione √ʒce 256 ʒʒ. per √ʒce 512 ce. fit Quotiens √ʒce ½ 2e. hoc est, √ʒce 1. cum ½ 2e fit 1. posita 1 2e 2. ac proinde cum √ʒce 1. fit 1. erit Quotiens 1. vt ratio postulat. Cum enim √ʒce 256 ʒʒ. & √ʒce 512 ce. æquales sint, quod quælibet earum sit 4. vt dictum est, fiet ex diuisione vnius per alteram Quotiens 1. Pari ratione ex diuisione √ʒce 131072 Bß. per √ʒce 512 ce. fit Quotiens √ʒce 256 ʒʒ. vt probare potes.

SIC etiam, vt 1 ℞ ducatur in √ȝ 4. quadranda erit 1 ℞. & quadrato 1 ȝ, præponendum signum radicale √ȝ, vt fiat √ȝ 1 ȝ. atque ita ex √ȝ 1 ȝ in √ȝ 4. fit numerus √ȝ 4 ȝ. quod probatur, si 1 ℞, sit 2. Nam ex 2. in √ȝ 4. id est, in 2. fiunt 4. radix nimirum 4 ȝ. id est, numeri 16.

Ita quoque vt 3 ℞ ducantur in √ȝ 16. quadrandus erit numerus 3 ℞ vt fiant 9 ȝ. Deinde √ȝ 9 ȝ ducenda in √ȝ 16. gigneturq. numerus √ȝ 144 ȝ. quod eodem modo probabitur, sumpto binario pro 1. radice. Nam 3 ℞ facient 6. & √ȝ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix ȝ 144 ȝ. facit similiter 24. cum 144 ȝ faciant 576. cuius numeri radix est 24. &c.

Hi porrò numeri producti √ȝ 4 ȝ. & √ȝ 144 ȝ. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. constabit; quia videlicet prior productus est ex 1 ℞. in √ȝ 4. posterior autem ex 3 ℞. in √ȝ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 3. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter obseruandum est.

Atque hoc perinde est, ac si ducatur 1. in √ȝ 4. vel 3. in √ȝ 16. Producti enim numeri √ȝ 4. & √ȝ 144. sunt numeri vnitatum, quæ multiplicatæ sunt. Itaq. ex 1 ℞. in √ȝ 4. fit numerus radicum √ȝ 4 ȝ. nimirum √ȝ 4. zensorum. Et ex 3 ℞. in √ȝ 16. fit numerus radicum √ȝ 144 ȝ. id est, √ȝ 144. zensorum, atque ita de cæteris. quandoquidem in huiusmodi multiplicationibus seruata est regula multiplicationis radicum surdarum, quæ in cap. 18. tradita est. Verum hoc melius percipietur ex solutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

OBSERVANDVM autem hic est, rem non succedere, si signa Cossica, vt cap. 7. docui, abbreuientur. Nam in priori exemplo, in quo √ce 4 ℞. & √ȝ 8 ℞ reductæ sunt ad √ȝce 16 ȝ. & √ȝce 512 ce. vbi ex multiplicatione procreatus est numerus 8. si signa Cossica abbreuientur, stabit reductio in his terminis √ȝce 16. & √ȝce 512 ℞. Sed ex multiplicatione vnius in alteram fit √ȝce 8192 ℞. quæ valet √ce 128. propterea quod 8192 ℞. faciunt 16384. cuius numeri √ȝ. est 128. & huius √ce. est √ce 128. quæ æqualis non est priori numero producto 8. Solum quando huiusmodi numeri reducti æquales sunt, abbreuiari poterunt signa Cossica. Tunc enim manet adhuc æqualitas, vt cap. 12. diximus. Vt quia √ȝce 512 ce. & √ȝce 256 ȝȝ. æquales sunt, cum quælibet valeat 4. si abbreuientur signa Cossica, cernetur adhuc æqualitas inter √ȝce 512. & √ȝce 256 ℞. quippe cum 256 ℞ faciant 512. Constat autem √ȝce 512. & √ȝce 512. æquales esse. Hoc te monere volui, ne signa Cossica abbreuies, etiam post reductionem factam, nisi constet numerorum æqualitas. *Quando post reductionē signa Cossica abbreuiari possint, & quando non.*

DE minutiis porro horum numerorum non attinet quidquam dicere, cum suorum integrorum præcepta sequantur in omnibus.

CAETERVM si occurrat æquatio inter numerum Cossicum Irrationalem, & numerum absolutum, reducetur ea æquatio hoc modo. *Æquatio inter numerum*

 do.

*Cossicum Irrationale, & numerum absolutum.*

do. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti sumus, nos hoc loco docturos. Sit V. g. æquatio inter √ȝ 24 ℞. & 12. Quo posito, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 24 ℞. & 144. Diuisis ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnius radicis pretium 6. quod patet. quia 24 ℞ facient 144. cuius numeri radix quadrata est 12.

Item si sit æquatio inter √ȝ 10 ȝ. & 20. erit etiam æquatio inter eorum quadrata 10 ȝ. & 400. Diuisis igitur 400. per 10. reperietur 1 ȝ. valere 40. atque idcirco 1 ℞. valebit √ȝ 40. Nam 10 ȝ. erunt 400. cuius numeri radix quadrata est 20.

Denique si æquatio inueniatur inter √c℞ 12 ȝ. & 30. erit etiam æquatio inter eorum cubos 12 ȝ. & 27000. Diuisis ergo 27000. per 12. prodibit pretium 1 ȝ. 2250. ac propterea 12 ȝ. facient 27000. cuius numeri radix cubica est 30.

*Quando huiusmodi æquatio impossibilis sit.*

Quòd si quis proponat æquationem inter √c℞ 8. & 3. erit etiam æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod est impossibile. Itaq. in hisce æquationibus, necesse est, numerum absolutum esse radicem numeri, qui gerit signum radicale. qualis est æquatio inter √c℞ 8. & 2. Item inter √c℞ 64. & 4. Item inter √ȝ 81. & 9. &c. Alioquin impossibilis erit æquatio.

## DE BINOMIIS, ATQVE APOTOMIS, Residuisvè. Cap. XXVII.

*Binomiū, & Residuum: itē Trinomium, Quatrinomiū apud scriptores quid.*

SCRIPTORES Algebræ fermè omnes, duos numeros quosuis copulatos per signum +, Binomium appellare solent, vt √ȝ 12 + √ȝ 3. & √ȝ 18 + √ȝ 8. & 6 + √ȝ 9. Copulatos vero per signum —, Residuum, vel Apotomen, vt √ȝ 12 — √ȝ 3. & √ȝ 18 — √ȝ 8. & 6 — √ȝ 9. Plures autem numeros ita copulatos, dicere consueuerunt, trinomiū, quatrinomium, &c. vt √ȝ 17 + √ȝ 10 + √ȝ 3. vel √ȝ 17 — √ȝ 10 + √ȝ 3. dicunt Trinomium: At √ȝ 17 + √ȝ 10 + √ȝ 3 + √ȝ 2. Vel √ȝ 17 — √ȝ 10 + √ȝ 3 — √ȝ 2. Quatrinomium, &c. Euclides autem in lib. 10. propos. 37. & 74. tunc solum numeros binos copulatos per signum +. vel —, vocat Binomia, vel Residua, quando duo illi numeri copulati sunt Rationales solum potentia commensurabiles, quamuis alter eorum sit radix surda, vel vterque. Vt 6 + √ȝ 20. Item √ȝ 18 + 4. Item √ȝ 24 + √ȝ 18. vocat Binomia: At 6 — √ȝ 20. Et √ȝ 18 — 4. Et √ȝ 24 — √ȝ 18. appellat Residua, vel Apotomas. Nam quilibet duo numeri copulati sunt Rationales potentia tantum commensurabiles; cum eorum quadrata commensurabilia sint quadrato cuiusuis numeri Rationalis. Itaque neque √ȝȝ 10 + √ȝȝ 8. Binomium erit, neque √ȝȝ 10 — √ȝȝ 8. Residuum, quia eorum

*Binomium, et Residuum secundum Euclidem, quid.*

parti-

particulæ sunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata √ȝ 10. & √ȝ 8. sint incommensurabilia habentia proportionem, quã √ȝ $\frac{5}{4}$. ad 1. vt ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque 6 + √ȝ 9. neque 20 + 6. Binomia erunt, neque 6 — √ȝ 9. neque 20 — 6. Residua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum solum numerum rationalem, non autem duos. Nam 6 + √ȝ 9. æquiualent 9. & 20 + 6. æquiualent 26. Item 6 — √ȝ 9. æquiualent 3. Et 20—6. æquiualent 14. Ratio autem est, quod bini quilibet sunt Rationales longitudine commensurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos sit rationalis; Proportio enim 6. ad √ȝ 9. dupla est: si namq. per √ȝ 9. diuidantur 6. hoc est, √ȝ 36. exibit in Quotiente √ȝ 4. hoc est, 2. denominator proportionis. Si vero diuidantur 20. per 6. fiet Quotiens $3\frac{1}{3}$. ita vt 20. ad 6. habeant proportionem triplam sesquitertiam. Eadem ratione neque √ȝ 12 + √ȝ 3. Binomium erit, neque √ȝ 12—√ȝ 3. Residuũ, licet vterque numerus sit radix surda. quia numeri proportionem habent duplam, & priores duo efficiunt summam √ȝ 27. videlicet vnicum numerum: posteriores vero duo æquiualent √ȝ 3. vnico etiam numero. Eandemq. ob causam neque √ȝ 18+√ȝ 8. Binomiũ erit censendum, neque √ȝ 18 — √ȝ 8. Residuum, quamuis vterque numerus radix surda sit. quia numeri proportionem habent sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. ac priores duo conficiunt summam √ȝ 50. vnicum numerum: posteriores vero duo huic vnico numero √ȝ 8. æquiualent. Denique propositis duobus numeris rationalibus, hoc est, quorum quadrata commensurabilia sunt quadrato cuiusuis numeri rationalis, ita tamen, vt diuiso vno per alterum, Quotiens fiat rationalis, id est, numerus, qui radicem habeat, non constituetur ex illis Binomium, aut Residuum: quia eiusmodi numeri non sunt potentia tantum commensurabiles, sed etiam longitudine; ac proinde ex ipsis non fit numerus irrationalis, sed rationalis, licet nonnunquam efficiatur radix surda. Vt ex 3. & √ȝ 16. fit summa √ȝ 49. hoc est, 7. numerus rationalis, qui surdus non est: At ex √ȝ 8. & √ȝ 18. fit summa √ȝ 50. numerus rationalis surdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci, putantes omnem numerum, qui gerit signum √ȝ. & radicem non habet, esse irrationalem. quod verum non est, atque Euclidi manifeste repugnat. Solum quando numerus gerens signum √ȝ. refert superficiem aliquam, vel quadratũ, numerus ille irrationalis est a. qualis est superficies rectangula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commensurabilium. Vt si √ȝ 3. ducatur in √ȝ 10. producitur superficies √ȝ 30. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata est √ȝȝ 30. quæ vocatur linea Media. cum hæc in se quadratè ducta faciat √ȝȝ 900. hoc est, √ȝ 30. propterea quod radix zensica numeri 900. est 30. & huius radix zensica est √ȝ 30. Itaq. quando in superioribus numeros habentes præfixum signum √ȝ. vocauimus irrationales, id improprie dictum accipiendum est, quando numeri illi rationales sunt.

*Non omnem numerũ, qui gerit signum √ȝ. esse irrationalem.*

a 22. decimi.

*Superficies, & linea Media.*

S 2 Potest

Potest quidem omnis numerus gerens signum √ȝ. dici numerus irrationalis, si sumatur pro superficie Media, producta ex √ȝ 1. in ipsum numerum. Vt √ȝ 3. erit superficies Media, & irrationalis, si capiatur pro producto ex √ȝ 1. in √ȝ 3. eiusq. radix quadrata erit √ȝȝ 3. Nam hæc ducta in se zensicè facit √ȝȝ 9. hoc est √ȝ 3. quippe cum radix zensica numeri 9. sit 3. & huius radix zensica √ȝ 3. & sic de alijs.

*Sex Binomia, ac Residua.* CONSTITVIT Euclides sex genera Binomiorum, totidemq. Residuorum. Aut enim maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. Item vel maius nomen commensurabile est longitudine numero rationali exposito, vel minus, vel neutrum. Vtrumque enim nomen exposito numero rationali longitudine

a 12. decimi. commensurabile esse nequit [a]. quia & ipsa nomina essent numeri rationales longitudine commensurabiles. quod est absurdum, cum ponantur potentia tantum commensurabiles. Quibus positis, fient sex genera Binomiorum. quæ sic definiuntur.

*Binomium primum.* Binomium primum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsumq. maius nomen exposito numero rationali est commensurabile longitudine. Vt 6 + √ȝ 27. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. superat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine commensurabilis est maiori nomini 6. atque ipsum quoque maius nomen 6. commensurabile est longitudine exposito cuiuis numero rationali.

*Binomium secundum.* Binomium secundum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commensurabilis, ipsumq. minus nomen exposito numero rationali est longitudine commensurabile. Vt √ȝ 48 + 6. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. superat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet √ȝ 12. commensurabilis est longitudine maiori nomini; cum √ȝ 48. ad √ȝ 12. habeat proportionem duplam; propterea quod illa per hanc diuisa, fiat Quotiens √ȝ 4. hoc est, 2. Item minus nomen exposito cuilibet numero rationali commensurabile est longitudine.

*Binomium tertium.* Binomium tertium est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine commēsurabilis; sed neutrum nomen exposito numero rationali longitudine commensurabile existit. Vt √ȝ 24 + √ȝ 18. quia maioris nominis quadratum 24. superat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum √ȝ 6. commensurabilis est longitudine maiori nomini: cum √ȝ 24. ad √ȝ 6. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuisa per hanc, Quotiens fiat √ȝ 4. hoc est, 2. At neutrum nomen longitudine commensurabile est exposito numero rationali.

*Binomium quartum.* Binomium quartum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine incō-

mensu-

mensurabilis, ipsum vero maius nomen exposito numero rationali commensurabile est longitudine. Vt 4 + √℥ 10. quia maioris nominis quadratum 16. superat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum √℥ 6. longitudine incommensurabilis est maiori nomini 4. quippe cum maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum √℥ 6. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [a]: ac propterea eorum latera longitudine sint incommensurabilia. At maius nomen 4. longitudine commensurabile est numero exposito rationali. a 9. decimi.

*Binomium quintum.* Binomium quintum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, nomen vero minus exposito numero rationali longitudine est commensurabile. Vt √℥ 5 + 2. quia quadratum 5. maioris nominis superat 4. quadratum minoris nominis, quadrato 1. cuius radix, nimirum √℥ 1. longitudine incommensurabilis est maiori nomini: quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum √℥ 1. proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad numerum quadratum [b]: ac propterea latera eorum sint longitudine incommensurabilia. Est tamen minus nomen 2. longitudine commensurabile exposito numero rationali cuicunque. b 9. decimi.

*Binomium sextum.* Binomium denique sextum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommensurabilis est longitudine, sed neutrum nomen exposito numero rationali commensurabile longitudine. Vt √℥ 80 + √℥ 50. quia quadratum 80. maioris nominis superat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30. cuius radix, nimirum √℥ 30. longitudine incommensurabilis est maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum [c]; ideoq. eorum latera longitudine sint incommensurabilia longitudine. Neutrum quoque nomē longitudine commensurabile est exposito numero rationali. c 9. decimi.

SEX autem Residua, vel Apotome eodem modo se habent; cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome respondens, interposito signo — pro signo +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud est, quam id, quod relinquitur, si duobus numeris rationalibus potentia tantum commensurabilibus positis, minor de maiore detrahatur. quod quidem fit per interpositionem signi —.

*Sex genera Apotomarum.* Itaque ex primo Binomio 6 + √℥ 27. fit prima Apotome 6 — √℥ 27.

Ex secundo Binomio √℥ 48 + 6. fit Apotome secunda √℥ 48 — 6.

Ex tertio Binomio √℥ 24 + √℥ 18. fit Apotome tertia √℥ 24 — √℥ 18.

Ex quarto Binomio 4 + √℥ 10. fit quarta Apotome 4 — √℥ 10.

Ex quinto Binomio √℥ 5 + 2. fit quinta Apotome √℥ 5 — 2.

Ex sexto denique Binomio √℥ 80 + √℥ 50. fit sexta Apotome √℥ 80 —

80 — √ℨ 50. quæ omnia perspicua sunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM vero intelligentia decimi libri potissimum in cognitione Binomiorum, ac Residuorum consistit, libet paulò diutius in eorum tractatione immorari. Primo autem loco docebimus, qua ratione quoduis Binomium optatum, ac proinde & Residuum (cum hoc solum signo — ab illo differat) reperiatur: Deinde, qua arte ex quouis Binomio, aut Residuo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam Irrationalem, vel numerum compositum, diminutumve radix illa constituat: insistentes semper ijs, quæ ab Euclide demonstrata sunt.

*Binomij primi, & Apotoma prima inuentio.*

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primumq. Residuum.

5 4
A . . . . . C . . . . B

6 + √ℨ 20
6 — √ℨ 20

Quadratus quilibet numerus A B, nimirum 9. diuidatur in B C, quadratum numerum 4. & in A C, numerum non quadratū 5. assumaturq. numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. A B, ad numerum 5. A C, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri 6. ad aliud: inuenieturq. quadratus 20. Ergo 6 + √ℨ 20. erit primum Binomium. Et 6 — √ℨ 20. erit prima Apotome, vt constat ex propos. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

*Binomij secundi, & secunda Apotoma inuentio.*

Binomium verò secundum, atque Apotome secunda hoc modo reperietur. Diuiso quocunque numero quadrato A B, nimirum 9. in

5 4
A . . . . . C . . . . B

√ℨ 45 + 5
√ℨ 45 — 5

B C, quadratum 4. & in A C, non quadratum 5. assumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro secundo nomine: Fiat, vt numerus 5. A C, ad quadratum numerum 9. A B, ita 25. quadratus numerus numeri assumpti 5. ad aliud: inuenieturq. quadratus 45. Ergo Binomium secundum est √ℨ 45 + 5. Et √ℨ 45. — 5. Apotome secunda, vt manifestum est ex propos. 50. & 87. lib. 10. Eucl.

*Binomij tertij, & tertia Apotoma inuentio.*

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus sic. Diuiso quolibet numero quadrato A B, videlicet 9. in B C, quadratū

5 4
A . . . . . C . . . . B
D . . . . . .
12
√ℨ 216 + √ℨ 120
√ℨ 216 √ℨ — 120

4. & in A C, non quadratum 5. sumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam A C, 5. differetque D, ab A C, vel sola vnitate, vel binario. Vnitate quidem, quando A C, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratū: binario vero, quando vnitas addita ad AC, facit quadratū. Vt si A C, sit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At si A C, sit 5. vt in nostro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto deinde

de quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D, 6. ad quadratum numerum A B, 9. ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenieturq. quadratus 216. cuius radix, videlicet √ȝ 216. erit maius nomen. Quod si rursus fiat, vt 9. quadratus A B, ad numerum A C, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum √ȝ 120. erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum est √ȝ 216 + √ȝ 120. Et Apotome tertia √ȝ 216 — √ȝ 120. vt ex propos. 51. & 88. lib. 10. Eucl. liquet.

*Binomij quarti, & quarta Apotoma inuentio.*

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc modum. Diuiso quocunque quadrato numero A B, nimirum 9. in duos non quadratos A C, C B, vtpote in 6. & 3. sumptoq. numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine: Fiat, vt quadratus numerus A B, videlicet 9. ad A C, 6. non quadratum, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 6. ad aliud; reperieturq. quadratus 24. cuius radix, nimirum √ȝ 24. erit minus nomen. Est ergo quartum Binomium 6 + √ȝ 24. Et quarta Apotome 6 — √ȝ 24. vt ex propos. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

6 3
A . . . . . . C . . . B
6 + √ȝ 24
6 — √ȝ 24

*Binomij quinti, & Apotoma quinta inuentio.*

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuiso quolibet numero quadrato A B, nimirum 9. in duos A C, C B, non quadratos, vt in 6. & 3. sumptoque numero quouis rationali 2. pro minori nomine: Fiat, vt A C, numerus 6. ad quadratum A B, nimirum ad 9. ita 4. quadratus assumpti numeri rationalis 2. ad aliud, inuenieturq. quadratus 6. cuius radix, nimirum √ȝ 6. erit maius nomen. Erit ergo binomium quintum √ȝ 6 + 2. & Apotome quinta √ȝ 6 — 2. vt Euclides propos. 53. & 90. lib. 10. concludit.

6 3
A . . . . . . C . . . B
√ȝ 6 + 2
√ȝ 6 — 2

*Binomij sexti, & Apotoma sexta inuētio.*

Binomium denique sextum, & Apotomam sextam indagabimus hac arte. Diuiso quolibet numero 12. non quadrato A B, in duos non quadratos A C, C B, vt in 7. & 5. sumatur alius quadratus D, quicunque, nimirum 9. & insuper quilibet numerus rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum A B, ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud. Reperietur enim quadratus 192. cuius radix, nimirum √ȝ 192. erit maius nomen Binomij. Et si rursus fiat, vt numerus 12. A B, non quadratus ad 7. numerum A C, ita quadratus proximè inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum √ȝ 112. erit minus nomen: ita vt Binomium sextum sit √ȝ 192 + √ȝ 112. Apotome autem sexta

7 5
A . . . . . . . . C . . . . . B
D . . . . . . . . .
12
√ȝ 192 + √ȝ 112
√ȝ 192 — √ȝ 112

√ȝ 192

√ȝ 192 — √ȝ 112. vt ex propoſ. 54. & 91. lib. 10. Eucl. conſtat.

*Inuentio Binomij, vel Apotomæ cuiuſuis ſpeciei, ex dato Binomio, vel Apotoma eiuſdem ſpeciei.*

IAM verò, dato quouis Binomio, vel Apotoma, inueniemus ex eo, ſine magno labore, quotuis alia Binomia, & Apotomas eiuſdem ſpeciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, ita quiuis numerus rationalis aſſumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud, producetur minus nomen noui Binomij primi vel quarti. Pro ſecundo vero, ac quinto, ſi fiat, vt minus nomen ad maius, ita quiuis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, procreabitur maius nomen noui Binomij ſecundi, vel quinti. Pro tertio denique ac ſexto, ſi fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumque numerus ſurdus eſt) ita quiuis numerus ſurdus pro maiori nomine noui Binomij aſſumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel ſexti. Rationem huius rei, ſi quis deſideret, ſciat petendam eſſe ex propoſ. 15. lib. 10. Eucl. Cum enim per conſtructionem eadem ſit proportio inter nomina dati Binomij, quæ inter nomina producti Binomij: ſi maius nomen dati Binomij plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi commenſurabilis longitudine [a]; poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quam minus, quadrato radicis longitudine ſibi commenſurabilis: Et ſi maius nomen illius plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoque maius nomen huius plus, quam minus, quadrato radicis ſibi incommenſurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum ſunt inſtar linearum. Atque idcirco duo illa Binomia erunt eiuſdem generis, nimirum vtrumque erit vel primũ, vel ſecundum, vel tertium, &c. quippe cum vel maius nomen in vtroque, vel minus numerus ſit rationalis, vel ſurdus.

a 15. decimi.

Inuento porro Binomio nouo, iam noſti, fieri ex eo Reſiduum, vel Apotomam, ſi ſignum +. in — commutetur.

Exempli cauſa, ex Binomio primo 6 + √ȝ 27. fiet ſimile Binomium, cuius maius nomen ſit 400. ſi fiat, vt 6. ad √ȝ 27. ita 400. ad aliud. hoc eſt, ſi multiplicetur √ȝ 27. in 400. id eſt, in √ȝ 160000. & productus numerus √ȝ 4320000. per 6. id eſt, per √ȝ 36. diuidatur. Producetur enim √ȝ 120000. Eritq. nouum Binomium primum 400 + √ȝ 120000. Et noua Apotome prima 400 — √ȝ 120000. Quadratum enim 160000. maioris nominis ſuperat quadratum 120000. minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine cõmenſurabilis eſt maiori nomini, &c. Eademq. ratio eſt de cæteris.

RVRSVS ſi vtrumque nomen dati Binomij per eundem quemuis numerum multiplicetur, aut diuidatur, producetur [b] eadem de cauſa duo nomina alterius Binomij eiuſdem ſpeciei: quæ etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiuſdem ſpeciei [c]: propterea quod duo numeri procreati eandem inter ſe proportionem habent, quam duo nomina propoſiti Binomij. V.g. Dato Binomio ſecundo √ȝ 48 + 6. ſi vtrumque nomen per 3. multiplicetur, fiet alterum Binomium ſecundum √ȝ 432 + 18. & alia Apotome √ȝ 432 — 18. Et ſi vtrumque nomen eiuſdem dati Binomij ſecundi √ȝ 48 + 6. diuidatur per

b 15. decimi.
c 17. ſeptimi

nume-

numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium secundũ $\sqrt{z}\, 5\frac{1}{3} + 2$. & alia Apotome secunda $\sqrt{z}\, 5\frac{1}{3} - 2$. Quod si diuisio fiat per 2. gignetur nouum Binomium secundum $\sqrt{z}\, 12 + 3$. & noua Apotome secunda $\sqrt{z}\, 12 - 3$. & sic de alijs.

QVOD si quando indicandum sit de aliquo Binomio, vel Residuo proposito, quodnam sit ex prædictis sex speciebus, non erit id magni laboris. Nam si maius nomen fuerit numerus rationalis absolutus, erit Binomium vel primum, vel quartum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum nominis minoris, Quotiens fiat numerus quadratus, Binomium erit primum: Si vero Quotiens sit numerus non quadratus, Binomium erit quartum.

*Binomiũ, vel Residuũ propositum quodnam sit ex 6. speciebus, indicare.*

Si autem minus nomen fuerit absolutus numerus rationalis, erit Binomium vel secundum, vel quintum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Binomium erit secundum: Si verò Quotiens fiat numerus non quadratus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit absolutus numerus rationalis, sed surdus, erit Binomium vel tertium, vel sextum; Tertium quidem, quando diuiso maioris nominis quadrato per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiẽs proueniat numerus quadratus: si vero Quotiens gignatur numerus non quadratus, Binomium erit sextum. Idemq. dices de Apotoma quacunque.

POSTREMO est etiam scitu non iniucundum, omnia sex Binomia, ac proinde & Residua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quodam artificio intra circulum quemlibet descriptis. Sit enim circulus A B C D, cuius diameter B D, in tot æquales partes distribuatur, vt earum numerus tertiam, & quartam partem habeat, nimirũ in 12. Ex quarta parte diametri E, comprehendente scilicet B E, tres duodecimas diametri; atque ex tertia parte diametri F, complectente videlicet B F, quatuor duodecimas diametri, erigantur ad diametrum perpendiculares E A, F C, in diuersas partes; iunganturq. rectæ A B, B C, C D, D A. Harum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoscentur [a]. Quoniam A E, inter D E, E B, media est proportionalis; & C F, inter D F, F B [b]: erit tam quadratum ex A E, rectangulo sub D E, E B, quam quadratum ex C F, rectangulo sub D F, F B, æquale. Est autem rectangulum sub D E, E B, hoc est, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex A E, erit 27. ideoq. recta A E, $\sqrt{z}\, 27$. Rectangulum autem sub D F, F B, id est, ex 8. in 4. procreatum est 32. Igitur & quadratum ex C F, erit 32. & recta C F, $\sqrt{z}\, 32$.

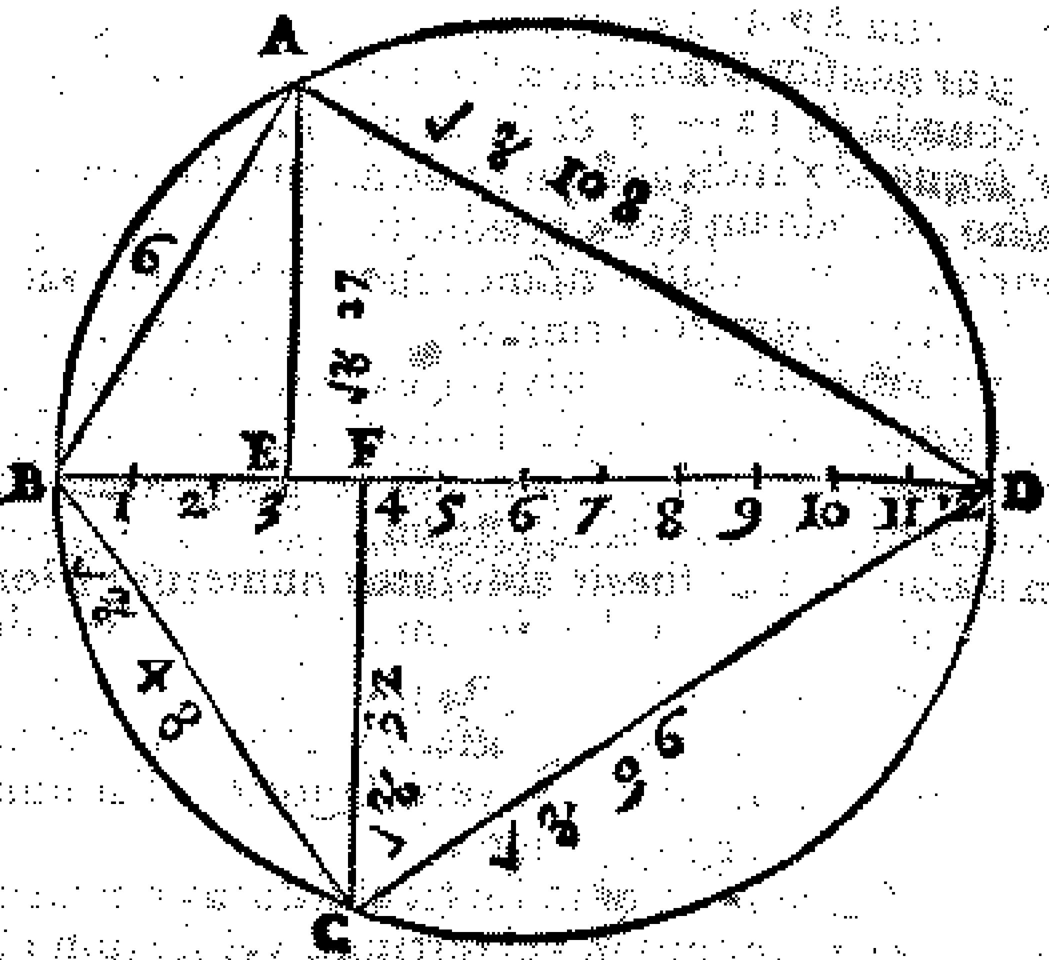
*Qua ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotomæ reperiãtur.*

a coroll. 13. sexti.
b 17. sexti.

Deinde quia quadrata ex B E, E A, nimirum 9. & 27. conficiunt 36. [c] quibus æquale est quadratum ex A B; erit quadratum ex A B, 36. & recta ipsa A B, $\sqrt{z}\, 36$. hoc est, 6.

c 47, primi.

Rursus quia quadrata ex B F, F C, nimirum 16. & 32. efficiunt




d 47. primi. 48. [d] quibus æquale est quadratum ex B C: erit hoc quadratum 48. & recta ipsa B C, √ȝ 48.

Item quia quadrata ex D F, F C, nimirum 64. & 32. conficiunt
e 47. primi. 96. [e] quibus quadratum ex CD, æquale est: erit hoc quadratum 96. & recta ipsa C D, √ȝ 96.

Denique quia quadrata ex D E, E A, nimirum 81. & 27. efficiunt
f 47. primi. 108. [f] quibus quadratum ex D A, æquale est; erit hoc quadratum 108. & recta ipsa DA, √ȝ 108.

IAM rectæ AB, AE, constituunt Binomium primum 6 + √ȝ 27. & Apotomam primam 6 — √ȝ 27.

Rectæ AD, DE, constituunt Binomium secundum √ȝ 108 + 9. & secundam Apotomam √ȝ 108 — 9.

Rectæ AD, DC, constituunt Binomium tertium √ȝ 108 + √ȝ 96. & Apotomam tertiam √ȝ 108 — √ȝ 96.

Rectæ BD, DC, constituunt Binomium quartum 12 + √ȝ 96. & quartam Apotomam 12 — √ȝ 96.

Rectæ DC, DF, constituunt Binomium quintum √ȝ 96 + 8. & quintam Apotomam √ȝ 96 — 8.

Rectæ denique BC, CF, constituunt sextum Binomium √ȝ 48 + √ȝ 32. & Apotomam sextam √ȝ 48 — √ȝ 32.

ESSE autem hæc 6. Binomia, ac Residua illa, quæ ab Euclide, definita sunt, examinare poteris per eorum definitiones. Nam in prioribus tribus, si maiora nomina diuidantur per excessus, quibus eorum quadrata superant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri quadrati, ac proinde maiora nomina plus possunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longi-

longitudine sunt commensurabiles. Si vero in posterioribus tribus maiora nomina diuidantur per excessus, quibus eorum quadrata superant quadrata minorum nominum, fiunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus possunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine sunt incommensurabiles. Cætera ex se manifesta sunt.

QVOD si diametrum BD, diuiseris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24. vel 36. vel 48. vel 60. vel 240. vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

## DE EXTRACTIONE RADICVM ex Binomijs, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat. Cap. XXVIII.

SVNT nonnulli, qui affirmant, ex solis prioribus tribus Binomijs, atque Apotomis radices quadratas elici posse. quod verum non est, & Euclidi omnino repugnat, vt mox ostendemus: neque scio, quo modo excusari possint, nisi dicatur, propterea eos posteriora tria Binomia, atque Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices sint valde perplexæ, & obscuriores, quam ipsamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum sint radices numerorum compositorum, quas Vniuersales vocant, vt in exemplis patebit. Habere aut omnia Binomia, atque Apotomas radices quadratas, quæ in se ductæ ipsa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propos. 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propositionibus demonstrat Euclides, quinam numeri in se multiplicati producant Binomia: (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in posterioribus autem 6. propositionibus ostendit, quinam numeri in se ducti Apotomas procreent. quod ita manifestum fiet. In propos. 55. ait, Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem nescit, si Rationalis illa sit vnitas, spatium illud comprehensum, esse Binomium primum, quippe cum vnitas multiplicans Binomium primũ, producat ipsummet Binomium primum? Numerus ergo potens Binomium primum, hoc est, radix Binomij primi, est Binomium, ex sententia Eucl. Eadem ratione ex sequentibus quinque propos. infertur,

*Cur nonnulli dicant, nõ omnia Binomia habere radices.*

*Omnia Binomia secundũ Eucl. habere radices.*

*Radices 6. Binomiorũ, quales linea, vel* *numeri Irrationales sint.* fertur, radicem Binomij secundi esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij esse lineam Irrationalem, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique sexti Binomij esse irrationalem lineam, quæ bina Media potens nominatur.

*Radices 6. Apotomarũ, quales lineæ Irrationales, vel numeri sint.* Non aliter ex propos. 92. & sequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ esse Apotomen. Radicem vero Apotomæ secundæ esse Mediæ Apotomen primam. Radicem deinde tertiæ Apotomæ esse Mediæ Apotomen secundam. Et radicẽ Apotomæ quartæ esse lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ esse lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem sextæ Apotomæ lineam esse Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non est igitur dubitandum, ex Euclidis sententia omnia Binomia, omnesq. Apotomas habere radices: cum tam perspicuè doceat, quo pacto cuiusque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod vt planius fiat, explicandæ sunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonstrat radices esse Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim solum Binomium eiusque sex species, solamq. Apotomen, eiusq. sex genera, Item lineam Mediam, superiori cap. exposuimus.

a 37. decimi

QVEMADMODVM ergo [a] Binomium apud Eucl. est linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita [b]: ita si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propos. 28.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij secundi.

b 38. decimi

*Ex binis Medijs prima.*

c 39. decimi

Et [c] si duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiantur, docuit propos. 29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Eamq. nobis præbebit radix tertij Binomij.

*Ex binis Medijs secunda.*

d 40. decimi

Et [d] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: (quas inuenire docet propos. 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti.

*Linea Maior.*

e 41. decimi

Et [e] si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Mediũ; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propos. 35.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonstrabit radix Binomij quinti.

*Rationale, ac Medium potens.*

f 42. decimi.

[f] Si denique duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediũ; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq. composito ex quadratis ipsarum, (qua ratione huiusmodi lineæ reperiantur,

riantur, docuit propoſ. 36.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eamq. nobis indicabit radix Binomij sexti.

*Bina Media potens.*

ITEM quemadmodum[a] Apotome apud Eucl. eſt linea Irrationalis, quæ reliqua eſt, ſi a Rationali auferatur Rationalis potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti[b]: Ita ſi a Media auferatur Media, potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæcum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propoſ. 28. reperit.) Reliqua linea Irrationalis eſt, quæ Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ ſecundæ.

a 74. decimi
b 75. decimi
*Media Apotome prima.*

Et[c] ſi a Media auferatur Media, potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propoſ. 29. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis eſt, quæ Mediæ Apotome ſecunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ.

c 76. decimi
*Media Apotome ſecunda.*

Et[d] ſi a recta linea, auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium; (quas lineas propoſ. 34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis eſt, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix eſt Apotomæ quartæ.

d 77. decimi
*Linea Maior.*

Et[e] ſi a recta linea auferatur recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; (quas lineas inuenit propoſ. 35.) Reliqua linea irrationalis eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis eſt radix Apotomæ quintæ.

e 78. decimi
*Reliqua cum Rationali Medium totum efficiens.*

Et[f] ſi tandem a recta detrahatur recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileq. compoſito ex ipſarum quadratis; (quæ lineæ propoſ. 36. inueniuntur.) Reliqua linea Irrationalis eſt, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix ſextæ Apotomæ.

f 79. decimi
*Reliqua cum Medio Mediũ totum efficiẽs.*

HAS porrò lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius, perfectiusq. declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter ſe differentes, de quibus potiſſimum in lib. 10. agitur. Sunt autem hæ.

| | |
|---|---|
| 1. *Media.* | 5. *Maior.* |
| 2. *Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuenta.* | 6. *Rationale ac Medium potens.* |
| 3. *Ex binis Medijs prima.* | 7. *Bina Media potens.* |
| 4. *Ex binis Medijs ſecunda.* | 8. *Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt inuenta.* |

9. Me-

### *Examen radicis inuentæ.*

$$\begin{array}{rl|rl}
 & \surd\mathfrak{zz}\,252 + \surd\mathfrak{zz}\,28 & & \surd\mathfrak{zz}\,252 - \surd\mathfrak{zz}\,28 \\
 & \surd\mathfrak{zz}\,252 + \surd\mathfrak{zz}\,28 & & \surd\mathfrak{zz}\,252 - \surd\mathfrak{zz}\,28 \\
\hline
 & + \surd\mathfrak{zz}\,7056 + \surd\mathfrak{z}\,28 & & - \surd\mathfrak{zz}\,7056 + \surd\mathfrak{z}\,28 \\
 & + \surd\mathfrak{z}\,252 + \surd\mathfrak{zz}\,7056 & & + \surd\mathfrak{z}\,252 - \surd\mathfrak{zz}\,7056 \\
\hline
\text{Summa} & \surd\mathfrak{z}\,448 + \surd\mathfrak{z}\,336 & \text{Summa} & \surd\mathfrak{z}\,448 - \surd\mathfrak{z}\,336
\end{array}$$

Sit Binomium quartum $24 + \surd\mathfrak{z}\,448$. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. est 128. cuius radicem, nimirum $\surd\mathfrak{z}\,128$. maiori nomini 24. adijcio, facioq. $24 + \surd\mathfrak{z}\,128$. Eandem $\surd\mathfrak{z}\,128$. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoq. $24 - \surd\mathfrak{z}\,128$. Semissis illius summæ $24 + \surd\mathfrak{z}\,128$. est $12 + \surd\mathfrak{z}\,32$. semissis vero illius numeri relicti $24 - \surd\mathfrak{z}\,128$. est $12 - \surd\mathfrak{z}\,32$. Radix ergo Binomij quarti propositi est $\surd\mathfrak{z}\,(12 + \surd\mathfrak{z}\,32) + \surd\mathfrak{z}\,(12 - \surd\mathfrak{z}\,32)$ Radix vero quarti huius Residui $24 - \surd\mathfrak{z}\,448$. est $\surd\mathfrak{z}\,(12 + \surd\mathfrak{z}\,32) - \surd\mathfrak{z}\,(12 - \surd\mathfrak{z}\,32)$. Illa iuxta propos. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propos. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq. ex præcepto propos. 40. & 77. lib. 10. $\surd\mathfrak{z}\,(12 + \surd\mathfrak{z}\,32)$ & $\surd\mathfrak{z}\,(12 - \surd\mathfrak{z}\,32)$ sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata $12 + \surd\mathfrak{z}\,32$. & $12 - \surd\mathfrak{z}\,32$. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet, cum conficiant simul sumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod sub ipsis cõtinetur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies $\surd\mathfrak{z}\,112$. Media: cuius radix est $\surd\mathfrak{zz}\,112$. linea Media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, qualia sunt quadrata $12 + \surd\mathfrak{z}\,32$. & $12 - \surd\mathfrak{z}\,32$. simul addita efficere summam 24. Rationalem.

*Radix Binomij quarti est Linea Maior: Et radix Residui quarti e Linea Minor.*

*Duo incõmensurabilia facere possũt sũmam Rationalem.*

### *Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.*

$$\begin{array}{c}
\surd\mathfrak{z}\,(12 + \surd\mathfrak{z}\,32) + \surd\mathfrak{z}\,(12 - \surd\mathfrak{z}\,32) \\
\surd\mathfrak{z}\,(12 + \surd\mathfrak{z}\,32) + \surd\mathfrak{z}\,(12 - \surd\mathfrak{z}\,32) \\
\hline
12 + \surd\mathfrak{z}\,32 \quad + \quad 12 - \surd\mathfrak{z}\,32 \\
\surd\mathfrak{z}\,112 \\
\surd\mathfrak{z}\,112 \\
\hline
\surd\mathfrak{z}\,448 \\
\hline
\text{Tota summa} \quad 24 + \surd\mathfrak{z}\,448. \quad \text{Binomium propositum.}
\end{array}$$

Sit

Sit Binomium quintum √ʒ 448 + 12. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt √ʒ 112. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, √ʒ 76. semissi √ʒ 112. maioris nominis addita facit √ʒ 112 + √ʒ 76. Ab eadem autem semisse detracta relinquit √ʒ 112 — √ʒ 76. Radix ergo propositi Binomij quinti est √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) + √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) Residui vero respondentis radix erit √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) Illa per propos. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propos. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq. ex doctrina propos. 41. & 78. lib. 10. √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76.) duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum ex ipsarum quadratis faciat Medium, perspicuum etiam est, cum earum quadrata √ʒ 112 + √ʒ 76. & √ʒ 112 — √ʒ 76. simul sumpta faciant √ʒ 448. superficiem Mediam, cuius radix est √ʒʒ 448. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum gignatur √ʒ 36. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76.) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum √ʒ 36. hoc est, 6.

*Radix Binomij quinti est linea Rationale ac Medium potens: Et radix Residui quinti est linea cum Rationali Mediũ totum efficiẽs.*

*Duo incõmensurabilia inter se multiplicata facere possunt numerũ Rationalẽ.*

## *Examen radicis inuentæ pro Residuo quinto.*

√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)
√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)

√ʒ 112 + √ʒ 76 — √ʒ 112 — √ʒ 76
— √ʒ 36. id est, — 6
— √ʒ 36. id est, — 6

— 12

Tota summa, √ʒ 448 — 12. Residuum quintum.

Sit denique Binomium sextum √ʒ 448 + √ʒ 352. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet √ʒ 24. addita ad semissem maioris nominis, nimirum ad √ʒ 112. facit summam √ʒ 112 + √ʒ 24. Ergo prior portio radicis quæsitæ est √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24.) Et si eandem summam √ʒ 112 + √ʒ 24. detrahas ex toto maiore nomine √ʒ 448. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. Nam √ʒ 112. dempta ex √ʒ 448. relinquit √ʒ 112. ex quo relicto si tollatur √ʒ 24. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. ideoq. posterior portio radicis quæsitæ est √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24.) totaq. radix Binomij sexti propositi, erit √ʒ (√ʒ

### *Examen radicis inuentæ.*

| | |
|---|---|
| √ℨℨ 252 + √ℨℨ 28 | √ℨℨ 252 — √ℨℨ 28 |
| √ℨℨ 252 + √ℨℨ 28 | √ℨℨ 252 — √ℨℨ 28 |
| + √ℨℨ 7056 + √ℨ 28 | — √ℨℨ 7056 + √ℨ 28 |
| + √ℨ 252 + √ℨℨ 7056 | + √ℨ 252 — √ℨℨ 7056 |
| Summa √ℨ 448 + √ℨ 336 | Summa √ℨ 448 — √ℨ 336 |

Sit Binomium quartum 24 + √ℨ 448. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. est 128. cuius radicem, nimirum √ℨ 128. maiori nomini 24. adijcio, facioq. 24 + √ℨ 128. Eandem √ℨ 128. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoq. 24 — √ℨ 128. Semissis illius summæ 24 + √ℨ 128. est 12 + √ℨ 32. semissis vero illius numeri relicti 24 — √ℨ 128. est 12 — √ℨ 32. Radix ergo Binomij quarti propositi est √ℨ (12 + √ℨ 32) + √ℨ (12 — √ℨ 32) Radix vero quarti huius Residui 24 — √ℨ 448. est √ℨ (12 + √ℨ 32) — √ℨ (12 — √ℨ 32). Illa iuxta propos. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propos. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq. ex præcepto propos. 40. & 77. lib. 10. √ℨ (12 + √ℨ 32) & √ℨ (12 — √ℨ 32) sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata 12 + √ℨ 32. & 12 — √ℨ 32. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet, cum conficiant simul sumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod sub ipsis cõtinetur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies √ℨ 112. Media: cuius radix est √ℨℨ 112. linea Media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, qualia sunt quadrata 12 + √ℨ 32. & 12 — √ℨ 32. simul addita efficere summam 24. Rationalem.

*Radix Binomij quarti est Linea Maior: Et radix Residui quarti est Linea Minor.*

*Duo incõmensurabilia facere possũt sũmam Rationalem.*

### *Examen radicis inuentæ pro Binomio quarto.*

√ℨ (12 + √ℨ 32) + √ℨ (12 — √ℨ 32)
√ℨ (12 + √ℨ 32) + √ℨ (12 — √ℨ 32)

12 + √ℨ 32 + 12 — √ℨ 32
√ℨ 112
√ℨ 112
√ℨ 448

Tota summa 24 + √ℨ 448. Binomium propositum.

Sit

Sit Binomium quintum √ʒ 448 + 12. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt √ʒ 112. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, √ʒ 76. semissi √ʒ 112. maioris nominis addita facit √ʒ 112 + √ʒ 76. Ab eadem autem semisse detracta relinquit √ʒ 112 — √ʒ 76. Radix ergo propositi Binomij quinti est √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) + √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) Residui vero respondentis radix erit √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) Illa per propos. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propos. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq. ex doctrina propos. 41. & 78. lib. 10. √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76.) duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum ex ipsarum quadratis faciat Medium, perspicuum etiam est, cum earum quadrata √ʒ 112 + √ʒ 76. & √ʒ 112 — √ʒ 76. simul sumpta faciant √ʒ 448. superficiem Mediam, cuius radix est √ʒʒ 448. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum gignatur √ʒ 36. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76.) & √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76) inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum √ʒ 36. hoc est, 6.

*Radix Binomy quinti est linea Rationale ac Medium potens: Et radix Residui quinti est linea cum Rationali Mediũ totum efficiens.*

*Duo incõmensurabilia inter se multiplicata facere possunt numerũ Rationalẽ.*

### *Examen radicis inuenta pro Residuo quinto.*

√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)
√ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 76) — √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 76)

√ʒ 112 + √ʒ 76 — √ʒ 112 — √ʒ 76
— √ʒ 36. id est, — 6
— √ʒ 36. id est, — 6

—12

Tota summa, √ʒ 448 — 12. Residuum quintum.

Sit denique Binomium sextum √ʒ 448 + √ʒ 352. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet √ʒ 24. addita ad semissem maioris nominis, nimirum ad √ʒ 112. facit summam √ʒ 112 + √ʒ 24. Ergo prior portio radicis quæsitæ est √ʒ (√ʒ 112 + √ʒ 24.) Et si eandem summam √ʒ 112 + √ʒ 24. detrahas ex toto maiore nomine √ʒ 448. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. Nam √ʒ 112. dempta ex √ʒ 448. relinquit √ʒ 112. ex quo relicto si tollatur √ʒ 24. relinquetur √ʒ 112 — √ʒ 24. ideoq. posterior portio radicis quæsitæ est √ʒ (√ʒ 112 — √ʒ 24.) totaq. radix Binomij sexti propositi, erit √ʒ (√ʒ

112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Residui vero sexti respondentis radix erit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) — √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Illa, concludente propos.60. lib.10. Irrationalis linea est, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero, vt demonstrat propos.97. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaq. ex demonstratione propos. 42. & 79. lib.10. duæ lineæ √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) & √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24) potentia incommensurabiles sunt, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq. composito ex quadratis ipsarum. Quod enim potentia incommensurabiles sint, docent earum quadrata, quæ incommensurabilia sunt. Quadrata autem simul facere Medium, constat, cum simul faciant √ȝ 448. superficiem Mediam, cuius radix est √ȝȝ 448. Denique ex ductu vnius in alteram procreari etiam Medium, liquidò constat, cum producant √ȝ 88. superficiem Mediam, cuius radix est √ȝȝ 88.

*Radix Binomij sexti est linea bina Media potens: Et radix Residui sexti est linea cum Medio Mediū totum efficiens.*

### *Examen radicis inuentæ pro Binomio sexto proposito.*

√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)
√ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24)

√ȝ 112 + √ȝ 24 + √ȝ 112 — √ȝ 24
√ȝ 88
√ȝ 88

352

Tota summa. √ȝ 448 + √ȝ 352. Binomium propositum.

*Differentia quadratorum nominū radicis cuiuslibet Binomij, & Residui, quæ.*

IN quolibet autem Binomio, aut Residuo animaduertes, radicem differentiæ quadratorum vtriusque nominis, esse differentiam inter quadrata nominum radicis ipsius Binomij, vel Residui. quod mirum cuipiam videri possit. quod in proximis 6. Binomijs experiri licet.

In primo Binomio 23 + √ȝ 448. cuius radix inuenta est 4 + √ȝ 7. Quadratum numeri 23. nimirum 529. superat quadratum 448. numero 81. cuius radix est 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter 16. & 7.

In Binomio secundo √ȝ 448 + 14. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ 343 + √ȝȝ 7. Quadratum 448. superat 196. quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum √ȝ 252. est differentia inter quadrata nominum radicis. Nam ea quadrata sunt √ȝ 343. & √ȝ 7. vt patet ex multiplicatione nominum √ȝȝ 343. & √ȝȝ 7. in se quadratè. Et si √ȝ 7. dematur ex √ȝ 343. reliqua fit √ȝ 252.

In tertio Binomio √ȝ 448 + √ȝ 336. cuius radix inuenta fuit √ȝȝ 252 + √ȝȝ 28. Quadratum 448. superat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet √ȝ 112. differentia est inter quadrata nominum radicis, quæ sunt √ȝ 252. & √ȝ 28. Constat autem √ȝ 28. demptam ex √ȝ 252. relinquere √ȝ 112.

In

In quarto Binomio 24 + √ȝ 448. cuius radix inuenta fuit √ȝ (12 + √ȝ 32) + √ȝ (12 — √ȝ 32.) Quadratum 576. numeri 24. superat quadratum 448. numero 128. cuius radix, nimirum √ȝ 128. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter 12 + √ȝ 32. & 12 — √ȝ 32. vt in hac formula subtractionis apparet. Nam 12. ex 12. nihil relinquũt: sed — √ȝ 32. ex + √ȝ 32. (cum diuersa signa mutẽt speciem) relinquit √ȝ 128. duplum scilicet √ȝ 32. cum signo + superioris numeri.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | + | √ȝ | 32 |
| 12 | — | √ȝ | 32 |
| 0 | + | √ȝ | 128 |

In Binomio quinto √ȝ 448 + 12. cuius radix inuenta fuit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 76) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 76.) Quadratum 448. superat 144. quadratum numeri 12. numero 304. cuius radix, nimirum √ȝ 304. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter √ȝ 112 + √ȝ 76. & √ȝ 112 — √ȝ 76. vt in hac apposita formula subtractionis apparet. Nã √ȝ 112. ex √ȝ 112. nil relinquit. At — √ȝ 76. ex + √ȝ 76. (cum diuersa signa mutent speciẽ) relinquit √ȝ 304. duplum videlicet √ȝ 76. cum signo + superioris numeri.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| √ȝ 112 | + | √ȝ | 76 | |
| √ȝ 112 | — | √ȝ | 76 | |
| 0 | + | √ȝ | 304 | |

In Binomio denique sexto √ȝ 448 + √ȝ 352. cuius radix inuenta fuit √ȝ (√ȝ 112 + √ȝ 24) + √ȝ (√ȝ 112 — √ȝ 24.) Quadratum 448. superat quadratum 352. numero 96. cuius radix, nimirum √ȝ 96. differentia est inter quadrata nominum radicis, hoc est, inter √ȝ 112 + √ȝ 24. & √ȝ 112 — √ȝ 24. vt in apposita formula subtractionis manifestum est. Nam √ȝ 112. ex √ȝ 112. nil relinquit. At — √ȝ 24. ex + √ȝ 24. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit √ȝ 96. duplum videlicet √ȝ 24. cum signo + numeri superioris.

| | | | |
|---|---|---|---|
| √ȝ 112 | + | √ȝ | 24 |
| √ȝ 112 | — | √ȝ | 24 |
| 0 | + | √ȝ | 96 |

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel Residuo, & eius radice.

*Pulchra ratio multiplicãdi Binomij, vel Residui in se.*

EX hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcunque Binomium, aut Residuum in se quadratè, quæ talis est. Proposito Binomio, vel Residuo, accipiatur summa quadratorum duarum particularum Binomij, vel Residui, pro prima portione numeri producti. Deinde a quadrato dictæ summæ detrahatur quadratum differentiæ quadratorum earundem particularum Binomij, vel Residui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium √ȝ 50 + 6. ductum in se, facit 86 + √ȝ 7200. Nam duo quadrata 50. & 36. faciunt 86. priorem particulam numeri producti. Et quadratum 7396. numeri inuenti 86. superat 196. quadratum numeri 14 nimirum differentiæ inter quadrata 50. & 36. numero 7200. cuius radix, nimirum √ȝ 7200. dabit posteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij √ȝ 50 + 6. fit 86 + √ȝ 7200. quandoquidem quadratum 7396. prioris portionis 86. superat 7200. quadratum posterioris

| | | |
|---|---|---|
| √ȝ 50 | + | 6 |
| 85 | + | √ȝ 7200 |

rioris portionis, numero 196. cuius radix 14. est differentia inter quadrata 50. & 96.

Eadem ratione quadratum Residui √ʒ 50 — 6. erit 86 — √ʒ 7200.

Ita quoque Binomium √ʒ 50 + √ʒ 6. ductum in se faciet 56 + √ʒ 1200. quia quadratum 3136. prioris portionis 56. superat 1200. quadratum 1200. portionis posterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia est quadratorum 50. & 6. Atque ita de cæteris.

√ʒ 50 + √ʒ 6
56 + √ʒ 1200

TRADITVR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruendæ radicis ex proposito Binomio, vel Residuo, quam visum est hoc loco explicare, si tamen prius Lemma sequens ostendero.

## *LEMMA.*

Lemma.

***DATVM numerum in duas partes secare, vt numerus, qui ex mutua earũ multiplicatione producitur, æqualis sit dato numero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui diuidendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.***

*SIT v.g. numerus 20. in duas partes secandus, quæ inter se multiplicata producant numerum 75. qui minor est quadrato 100. semissis numeri 20. propositi, vel minor, quam 100. quarta pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato semissis numeri diuidendi auferatur datus numerus producendus 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad semissem numeri propositi, nimirum ad 10. tum ab eadem semisse detrahatur. Nam summa confecta 15. & numerus reliquus 5. erunt quæsitæ partes numeri propositi 20. quæ inter se multiplicatæ procreant datum numerum 75. Huius*

A . . . . . . . . . . C . . . . D . . . . . B

*praxis hæc est demonstratio. Sit numerus 20. AB, propositus diuisus in partes AD, DB, sua multiplicatione producentes datum numerum 75. quæ partes ita fient cognitæ. Diuiso numero AB, bifariam in C; a erit productus ex AB, in DB, vna cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. semissis CB. Igitur si datus numerus 75. factus ex AD, in DB, dematur ex quadrato 100. semissis CB, reliquus erit quadratus ex CD, 25 cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita semissi AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex semisse CB, reliquam faciet partem minorem DB, 5.*

a 5. secundi.

*Sit rursus numerus √ʒ 80. diuidendus in duas partes, ita vt inter se multiplicatæ faciant 1. Semissis dati numeri est √ʒ 20. A quadrato cuius, nimirum a 20. detrahatur numerus 1. producendus. Ac reliqui numeri 19. radix, nimirum √ʒ 19. addatur, & dematur*

√ʒ 20 + √ʒ 19
√ʒ 20 — √ʒ 19
1

ex se-ex semisse ℨ√ 20. propositi numeri 1 fientq. partes quæsitæ √ℨ 20 + √ℨ 19. & √ℨ 20 — √ℨ 19. quæ inter se multiplicatæ gignũt 1. vt præcedens formula apparet: detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. vt cap. 23. ante exempla Diuisionis docuimus.

Item sit numerus √ℨ 80. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant √ℨ 5. Semissis numeri √ℨ 80. est √ℨ 20. a cuius quadrato 20. si subtrahatur √ℨ 5. remanebunt 20 — √ℨ 5. cuius radix, nimirum √ℨ (20 — √ℨ 5.) addita ad semissem √ℨ 20. dati numeri √ℨ 80. faciet maiorem partem √ℨ 20 + √ℨ (20 — √ℨ 5) dempta vero ex eadem semisse √ℨ 20. relinquet minorem partem √ℨ 20 — √ℨ (20 — √ℨ 5.) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt √ℨ 5. vt in hac formula apparet. Nam vt ex cap. 23. patet, multiplicatio fiet, si quadratum 20 — √ℨ 5. posterioris partis ex 20. quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20. nihil relinquunt, & vt — √ℨ 5. tollatur ex + √ℨ 0 mutatur species, fitq. additio cum signo +. superioris numeri √ℨ 0.

√ℨ 20 + √ℨ (20 — √ℨ 5)
√ℨ 20 — √ℨ (20 — √ℨ 5)
———————————
√ℨ 5

20 + √ℨ 0
20 — √ℨ 5
———————
0 + √ℨ 5

Postremo sit 1 ℨ. diuidendus in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 1 ℨ, hoc est, (& in idem recidit,) ita vt 1 ℨ sit medio loco proportionalis inter illas duas partes. Semissis 1 ℨ. est $\frac{1}{2}$ ℨ. cuius quadratum est $\frac{1}{4}$ ℨℨ. ex quo tollemus 1 ℨ. quẽ produci debet, remanebitq. $\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ. cuius radix, nimirum √ℨ ($\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ) addita ad semissem 1 ℨ. id est, ad $\frac{1}{2}$ ℨ faciet vnam partem quæsitam $\frac{1}{2}$ ℨ + √ℨ ($\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ.) Et ablata ex eadem semisse, reliquam faciet alteram partem $\frac{1}{2}$ ℨ — √ℨ ($\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ.) quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 1 ℨ. vt in hac formula apparet. Nam multiplicatio fiet, vt ex superioribus patet, si $\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ. quadratum posterioris portionis detrahatur ex $\frac{1}{4}$ ℨℨ quadrato portionis prioris. Detrahetur autem iuxta hanc alteram formulam. quia $\frac{1}{4}$ ℨℨ. ex $\frac{1}{4}$ ℨℨ. nil relinquit. Et vt — 1 ℨ. subtrahatur ex + 0 ℨ. mutatur species operationis, fitq. additio, cum signo + superioris numeri 0 ℨ. Hoc Lemma absoluemus etiam per Algebram ænigmate 23. capitis 30.

$\frac{1}{2}$ ℨ + √ℨ ($\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ)
$\frac{1}{2}$ ℨ — √ℨ ($\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ)
———————————
1 ℨ

$\frac{1}{4}$ ℨℨ + 0 ℨ
$\frac{1}{4}$ ℨℨ — 1 ℨ
———————
0 + 1 ℨ

DEMONSTRATO, & exemplis illustrato hoc Lemmate, eruemus radicem ex quolibet Binomio, Residuoue, hac facili via. Diuidatur per Lemma antecedens maius nomen in duas partes, quæ inter se multiplicatæ procreent numerum æqualem quartæ parti quadrati nominis minoris. Radices namq. harum partium copulatæ per signum + pro Binomio, vel per signum — pro Residuo, radicem quæsitam exhibebunt.

*Alia via extrahenda radicis ex dato Binomio, vel Residuo.*

Sit

Sit enim Binomium primum $20 + \sqrt{300}$. Secetur maius nomen 20. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 75. qui numerus quarta pars est quadrati 300. minoris nominis. Erit vna pars 15. & altera 5. Igitur $\sqrt{15} + \sqrt{5}$. radix est dati Binomij, quæ in se ducta (quod facile fiet ea ratione, quam ante Lemma præcedens explicauimus) producet Binomium datum $20 + \sqrt{300}$.

Sit rursus Binomium primum $38 + \sqrt{288}$. Maius nomen 38. secabitur in duas partes sua multiplicatione producentes 72. quartam partem quadrati 288. minoris nominis; hoc modo. Semissis maioris nominis est 19. a cuius quadrato 361. si detrahatur dicta quarta pars 72. reliquus fit numerus 289. cuius radix 17. addita semissi prædictæ 19. & ab eadem subtracta facit partes quæsitas 36. & 2. Ergo $\sqrt{36}$. hoc est, $6 + \sqrt{2}$. radix est Binomij propositi. quod ex eius ductu in se examinari potest. Quadrata enim 36. & 2. nominum faciunt 38. maius nomen. Et si ex eius quadrato 1444. dematur 1156. quadratum differentiæ quadratorum 36. & 2. nimirum quadratũ numeri 34. remanebit numerus 288. Ergo $\sqrt{288}$. erit nomen minus, ita vt Binomium sit $38 + \sqrt{288}$.

Sit præterea Residuum secundum $\sqrt{18} - 4$. Maius nomen $\sqrt{18}$. secetur in duas partes, quarum vna in alteram faciat 4. quartã partẽ quadrati minoris nominis $-4$. hoc modo. Semissis maioris nominis est $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. a cuius quadrato $4\frac{1}{2}$. si detrahatur dicta quarta pars 4. remanebit $\frac{1}{2}$. cuius radix, hoc est, $\sqrt{\frac{1}{2}}$. addita ad $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ facit $\sqrt{8}$. pro priori parte; ablata vero ex eadem semisse, relinquit $\sqrt{2}$. pro posteriore parte. Est ergo $\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}$. radix Residui propositi. vt hic probatum esse vides, per multiplicationẽ radicis in se quadratè. Nam in partialibus productis, $\sqrt{8}$. & $\sqrt{2}$. faciunt $\sqrt{18}$. Deinde $-\sqrt[4]{16}$. id est, $-2$. duplicata facit $-4$.

$$\begin{array}{r}
\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} \\
\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} \\
\hline
- \sqrt[4]{16} + \sqrt{2} \\
+ \sqrt{8} - \sqrt[4]{16} \qquad\quad \\
\hline
\sqrt{18} - 4
\end{array}$$

Detur quoque Binomium tertium $\sqrt{32} + \sqrt{24}$. Maius nomen $\sqrt{32}$. secabitur in duas partes producentes 6. quartam partem quadrati 24. minoris nominis, hoc modo. Semissis maioris nominis est $\sqrt{8}$. a cuius quadrato 8. detracta dicta quarta pars 6. relinquit 2. cuius radix, nimirum $\sqrt{2}$. addita, & subtracta a semisse prædicta $\sqrt{8}$. facit partes $\sqrt{18}$. & $\sqrt{2}$. Ergo radix Binomij est $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$. Hæc enim in se ducta quadratè, vt hic patet, producit Binomium $\sqrt{32} + \sqrt{24}$. Nam in partialibus productis $\sqrt{18}$. & $\sqrt{2}$. faciunt $\sqrt{32}$. & $\sqrt{6}$. duplicata facit $\sqrt{24}$.

$$\begin{array}{r}
\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2} \\
\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2} \\
\hline
+ \sqrt{6} + \sqrt{2} \\
\sqrt{18} + \sqrt{6} \qquad\quad \\
\hline
\sqrt{32} + \sqrt{24}
\end{array}$$

Sit rursus Binomium primum 72 + √ȝ 2880. Maius nomen 72. secabitur in duas partes producentes 720. quartam partem quadrati 2880. maioris nominis, hac ratione.

Semissis maioris nominis 72. est 36. a cuius quadrato 1296. detracta quarta pars prædicta 720. relinquit 576. cuius radix 24. addita ad semissem nominatam 36. & detracta ab eadem, facit partes quæsitas 60. & 12. Ergo radix Binomij est √ȝ 60 + √ȝ 12. quod hic probatum est per multiplicationem radicis in se quadratè.

√ȝ 60 + √ȝ 12
√ȝ 60 + √ȝ 12
+ √ȝ 720 + 12
60 + √ȝ 720
72 + √ȝ 2880

Sit quoque elicienda radix ex hoc residuo sexto √ȝ 60 — √ȝ 12. Maius nomen √ȝ 60. distribuetur in duas partes producētes 3. quartam partem quadrati 12. minoris nominis, hoc pacto. Semissis maioris nominis √ȝ 60. est √ȝ 15. a cuius quadrato 15. detracta nominata pars quarta 3. relinquit 12. cuius radix √ȝ 12. addita ad semissem √ȝ 15. prædictam, & ab eadem sublata facit partes √ȝ 15 + √ȝ 12. & √ȝ 15 — √ȝ 12. Ergo radix dicti Residui sexti est √ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12) quod hic probatum est.

√ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12)
√ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12)

Quadrata partium. √ȝ 15 + √ȝ 12 & √ȝ 15 — √ȝ 12
— √ȝ 3
— √ȝ 3

Summa. √ȝ 60 — √ȝ 12

Nam quadrata partium faciunt √ȝ 60. nimirum duplum √ȝ 15. Et ex vna parte √ȝ (√ȝ 15 + √ȝ 12) in alteram — √ȝ (√ȝ 15 — √ȝ 12) fit — √ȝ 3. quippe cum quadratum 12. ex quadrato 15. subductum relinquat 3. cui præponendum est signum √ȝ. cum signo —. propter Residuum. Duplum autem — √ȝ 3. facit — √ȝ 12.

## S C H O L I V M.

*EMERSIMVS tandem ex numerorum Cossicorum, & Irrationalium multiplici difficultate, & ingens eorum tractationis pelagus, si minus commoda, felici tamen (nisi mea me fallit opinio) velificatione vecti superauimus; & aliquando portum per tot difficultatum æstus ac turbines, per tam multarum rerum maria prolapsi tenemus; quodq; ad diuinam opem est referendum, integri atque incolumes tenemus. Iuuat nunc, veluti in otio & quiete, eorum meminisse, quæ paulò ante ferre pigebat. Alia enim nobis vndarum spatia sunt enauiganda, quorum tamen laborem, si quis erit, præteritorum iucunda commemoratio leuabit, vt spero, maximè. Iuuat, inquam, paululum in eorum numerorum, qui hactenus explicati sunt, Algorithmi*

*iucun-*

Qui ordo seruetur in ænigmatibus per Algebram soluendis.

*iucundissimo æquè, atque uberrimo fructu tantisper immorari. Quota enim eius pars, quota præteriti laboris ueluti merces periret, nisi in ipsius Algorithmi fructu exigendo operæ aliquid, ac temporis poneremus? Primo igitur ænigmata quædam, cap. nimirum 29. quod proximè sequitur, & 30. erunt soluenda, siue mauis, problemata quædam numerorum, quos uocant abstractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia sunt commercia, & mercatorum negotiationes, uel ad alias rerum aliarum quæstiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis scriptor, & de tota Algebra scientia, quam qui optime, meritus) & alij grauissimi scriptores iam ante præstiterunt. Hæc enim siue ænigmata, siue problemata placet appellare, ad speculatiuam Arithmeticam spectant: quæ quidem scientia quantum dignitate præstet inter reliquas, concors omnium uox non obscurè testatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abstractorum, quæ in ea demonstrantur, uarietate tam multiplex, multitudine tam copiosa est, ut huiusmodi ænigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & uerò perficiat etiam quodammodo eam scientiam, quæ de numeris est. Quàm multa enim ea problemata sunt, quæ ei suppeditat: quorum nulla esset cognitio penes nos, neque extrahi è tenebris unquam possent, nisi Algebræ institutio, ueluti lumen, accederet? At enim otiosa sunt, neque ullam habẽt huiuscemodi problemata utilitatem. Quid quod non utilitatem solum, sed & iucunditatem spectare aliquando, sapientis esse putamus, neque ab honestate alienum. Ista enim si uatis placet, cedo quid est, cur decem Iordani libros de numeris admittamus? Quid cur theoremata quã plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonstrata probemus, in ijs legendis insistamus, delectemur, eadem summa cum admiratione persequamur? Quis in illis tantus usus est, quæ tanta, tam spectata utilitas, quæ non tota insit & nostris? Quantum ista uox non de horum modo splendore ac dignitate, sed de omnium scientiarum honestate, si admittatur, detractura est? Inest enim profectò hoc disciplinis ijs omnibus, quæ quoniam nunquam in usum exeunt, totaq; in ueritatis contemplatione occupantur, speculatiuæ dicuntur, ut mentem sua honestate exornent, principem animi facultatem, nempe intelligendi uim, augeant, atque perficiant, delectent ipsa per sese, totumque, ut ita dicã, hominem mira quadam sui iucunditate perfundant. Verum enimuerò ne illud quidem dissimulandum est, quod suis locis fiet apertius, existere etiam horum problematum maximos fructus, & utilitates, non in Geometricis modo, sed in alijs quoque facultatibus, artibusq; permultis, quamquam non tantam utilitatis ducendam rationem putamus, ut si hæc desit, nulla continuò sit cuiusq; facultatis dignitas, & honestas. Hæc ideo te quam paucissimis monitũ uolui, amice Lector, ut remota omni suspicionum caligine, expeditos animos afferas ad ea, quæ duobus sequentibus cap. ænigmata proponentur, excussoq; procul metu omni, ac mærore abiecto, faciliorem te, & hilariorem his eoluendis nobis præstes. Post duorum capitum ænigmata, exempla uaria cap. 31. subijciemus, in ijs tamen numeris, qui ad materiam contracti sunt, ubi etiam quæstiones nonnullas, quæ ad secundas radices spectant, accipies. Capite demum 32. multiplices de rebus Geometricis quæstiones in mediũ afferemus. Facile autem ænigmatum multitudinem sustinebit is, cui, quam tandem ob causam producantur, constabit. Neque enim illud solum laboramus, ut pro-*

posita a nobis quæstiones dissoluantur, sed illud præterea curandum nobis esse duximus, ut alias quoque iis similes ab aliis quocunque tempore dissoluendi modus intelligatur: quem certè modum ex horum ænigmatum solutione quiuis uel nullo negotio colliget. Quare neque illud omisimus, ut ita ænigmata omnia, omnes quæstiones solutas daremus, ut studiosus Lector peculiare in iis enodandis Algebræ artificium facile dignosceret. Singulos enim operationes quasi oculis subiecimus, ne hæsitandum foret in singulis, aut superiora præcepta singulis interuallis repetenda. Quæ ratio est, quare Algebram ita obscuram, & tenebricosam plerique autument, ut ad paucos, aut etiam ad ferè neminem eius intelligendæ uim pertinere confirment. Id enim in plerisque eius scriptoribus desideratum animaduerti, quod mihi maximè curandum fuit, ut quam aptissimè omnia proferrentur: Neque, ut monuit olim Lyricus poeta, laboro breuis esse, dummodo obscurus ne sim: Et volens libensq. verbositatis notam subire me patiar, cæterum ut apertissima per me omnia fiant. Maior tamen ex ænigmatum sequentium explicatione voluptas ut deriuetur, præstabit ea, ueluti sese exercendi causa, ad quæstionum normam examinare perinde ac nulla eorum explicatio hactenus fuisset allata; interdum etiam numeros & exempla alia, quam ea, quæ ibi subiciuntur, eorum loco subrogando. Atque ut plurima ænigmata adscripsimus, quæ omnino, nisi per Algebram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de industria inseruisse voluimus, quæ etiam sine Algebra solui posse non inficiamur. Placuit tamen ea cæteris apponere, non ut aliis artibus sublata uellemus, sed ut expeditiorem, celeriorem, iucundioremq. ea indagandi Algebræ methodum agnosceremus. Etenim, quod in aliis fit, ut totidem fermè leges, totidemq. præcepta tradantur, quot sunt ænigmata cognoscenda, singulisq. ænigmatibus non nisi singulæ ac suæ leges aptentur, & una lex uni tantum ænigmati explicando respondeat; id longe facilius, aduocata Algebra, dabit effectum. Vna enim eademq. lege, uia, ac methodo uniuersa ferè semper soluta præstabit, eamq. nobis molestiam eximet, quam multiplex illa regularum uarietas non afferre non potest: Vt vel hac una laude, si cætera (quæ nec pauca sunt, nec leuia) desint, aliis omnibus Arithmeticæ regulis Algebra antecellat. Vix enim quæstione oblata, ipsa etiam ratio eam explicandi ex Algebra sese dat in conspectum, & pene ipsa quæstio uiam indicat, qua ipsam, ueluti duce insecuti, tandem assequamur. Quod quidem, si regulam falsi demas, nullius omnino est aliarum. Habet hoc igitur Algebra præ cæteris singulare, quod multas ipsa sola quæstiones suis legibus soluat, de quibus aliæ vel non laborant, vel si laborent, nihil efficiant. Et quod eas, quæ ab aliis quoque aliquando longis ambagibus, & ueluti in tenebris deprehenduntur, ipsa quasi per compendia, & luce clara perficiat. Cæterum illud ignorare nolo, studiose Lector, permulta a nobis afferri ænigmata, quibus si alii, atque alii subinde numeri supponantur, eorum habere solutio non possit. Non tamen in longum abibis, si non sentias solui quæ possint, quæq. non possint. Id reipsa eadem docebit operatio, quam ad aperiendam quæstionem adhibere oportebit. Vbi enim æquatio inter duos inæquales numeros [illegible] inciderit, eius quæstionis solutio nulla esse poterit. Quam nos esse rationem diximus, quare Algebræ regula tantopere uniuersis aliis Arithmeticæ præceptionibus præstet. Frequentissimum quippe est, ut huiusmodi aliqua quæstio, quæ inextricabiles omnino nodos habent si Algebræ *imperitia obijciatur, quam ille per summum laborem, summamq. & animi, & corporis contentionem soluere ne quicquam connititur: & repetito iterum, iterumq. studio, tempus æquè atque operam omnem suam pessum ire imprudens patitur. A quo certè procul aberit Algebræ studiosus, cui ipsa operatio, quæ possint, quæ vero non possint solui, quæstiones indicabit. Quantum igitur hoc est, quo Algebræ studiosus gloriari iure potest, vt obfirmato animo, constantiq. sententia, proposita quæstio solui queat, nec ne, nihil hesitans, nec dubia voce pronunciet?*

## AENIGMATA VARIA NVMERORVM abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur. Cap. XXIX.

IN hoc cap. afferemus ænigmata, in quibus occurrunt simplices æquationes: In sequenti vero ænigmata proponemus, in quibus compositæ æquationes reperiuntur. Quid porrò sit æquatio simplex, quid composita, ad finem cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

1. 1 *Datum numerum quemcumque diuidere in duas partes se mutuò superantes in dato excessu quocunque.*

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum excessus, vel differentia sit 40. Ponatur minor pars $1x$. ac proinde maior $100 - 1x$. Detracta $1x$. ex $100 - 1x$. remanent $100 - 2x$. vt hic vides. Eritq. inuenta æquatio inter $100 - 2x$. & 40. quippe cum dempta minore parte ex maiore, relinqui debeant 40. Additis vtrinque $2x$. erit æquatio inter 100. & $40 + 2x$. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. & $2x$. Si ergo ex præscripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2. inuenietur $1x$. esse 30. atque hæc est minor pars. Ergo maior erit 70. nimirum $100 - 30$. quæ maior pars etiam habebitur, si ad minorem 30. adijciatur differentia proposita 40. Vides ergo maiorem partem 70. superare minorem 30. numero 40. vt propositum est.

$$\begin{array}{r} 100 - 1x \\ +\ 1x \\ \hline 100 - 2x \end{array}$$

Quòd si statuamus, maiorem partem esse $1x$. & minorem $100 - 1x$. subtrahemus $100 - 1x$. ex $0 + 1x$, vt hic vides. rema-

nebuntq.

nebunto. — 100 + 2 ℞. hoc est, 2 ℞ — 100. Nam subtracta + 0. ex + 100. remanent — 100. quod præposterè positi sint numeri, ideoque ex + fiat —. &c. Hic ergo numerus reliquus 2 ℞ — 100. æqualis esse debet dato excessui 40. Additis igitur 100. vtrinque, erit æquatio inter 2 ℞. & 140. Et diuisis 140. (vt præcipit regula Algebræ) per 2, fiet 1 ℞. 70. quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

$$\begin{array}{r} 0 + 1\ ℞ \\ 100 - 1\ ℞ \\ \hline -100 + 2\ ℞ \end{array}$$

SOLVETVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor pars 1 ℞. ideoq. maior 1 ℞ + 40. superans nimirum minorem numero 40. Ambæ partes simul efficiunt 2 ℞ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 100. Demptis vtrinque 40. erit æquatio inter 2 ℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 2. erit 1 ℞. 30. minor scilicet pars, ideoq. maior 70. vt prius.

Quod si maior pars ponatur 1 ℞. ideoq. minor 1 ℞ — 40. vt illa hanc excedat numero 40. Ambæ partes simul efficient 2 ℞ — 40. quæ summa æqualis est dato numero 100. Additis 40. vtrinque, erit æqualitas inter 2 ℞. & 140. Diuisisq. 140. per 2. fiet 1 ℞. 70. pro maiore parte, ideoq. minor erit 30. vt supra.

## S C H O L I V M.

*Diuiſio numeri Coſſici in duas partes dati exceſſus.*

*VSV interdum uenit, ut numerus aliquis Coſſicus, nimirum 1 ℞. uel 10 ℞. uel 1 ʒ. uel 6 ʒ. &c. in duas partes diuidendus ſit, quæ ſe dato numero excedant: ut auigmatibus manifeſtum erit. Quare ſine Algebra (nam per Algebram uix fieri poteſt) hunc in modum perficietur. Ex dato numero Coſſico detrahatur datus numerus per ſignum —. Semiſſis namq. huius numeri diminuti erit minor pars, cui ſi per regulam additionis cap. 4. traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars.*

*Sit enim 1 ℞ diuidenda in duas partes, quarum maior minorem ſuperet 20. unitatibus. Deme 20. ex 1 ℞. & ad $\frac{1}{2}$ ℞ — 10. ſemiſſem reſidui 1 ℞ — 20. adde 20. facies q. $\frac{1}{2}$ ℞ + 10. ut in formula appoſita uides. Partes ſunt $\frac{1}{2}$ ℞ — 10. & $\frac{1}{2}$ ℞ + 10. quarum hæc illam ſuperat numero 20. & ambæ conficiunt 1 ℞.*

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\ ℞ - 10 \\ + 20 \\ \hline \frac{1}{2}\ ℞ + 10 \end{array}$$

*Sit rurſum numerus 10 ℞. diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 10 ℞. Nam reſidui 10 ℞ — 20. ſemiſſis 5 ℞ — 10. erit minor pars: ad quam ſi addes 20. facies 5 + 10. maiorem partem, quarum hæc illam ſuperat 20. unitatibus, & ambæ efficiunt 10 ℞.*

*Sit quoque 1 ʒ. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & reſidui 1 ʒ — 150. ſemiſſis $\frac{1}{2}$ ʒ — 75. erit minor pars, ad quam ſi adjicies 150. facies maiorem partem $\frac{1}{2}$ + 75. quæ ſimul faciunt 1 ʒ. & maior minorem ſuperat numero 150.*

*Sit denique numerus 6 ʒ. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem ſuperat 8. unitatibus. Deme 8. ex 6 ʒ. Nam reſidui 6 ʒ — 8. ſemiſ-*

*sis 3 ℨ — 4. erit prima pars: ad quam si addes 8. fiet maior pars 3 ℨ + 4. Atque ita de cæteris.*

Diuisio numeri absoluti in duas partes dati excessus, sine Algebra.

*IMMO hac eadem arte diuidemus propositum numerum absolutum in duas partes dati excessus, sine Algebra: Nam si excessum datum ex proposito numero detrahemus, erit reliqui numeri semissis minor pars, ad quam si eundem excessum adijciemus, conficiemus partem maiorem. Vt si numerus 100. distribuendus sit in duos, quorum differentia 40. Deme 40. ex 100. Reliqui enim numeri 60. semissis 30. erit minor pars: ad quam si addes 40. conflabis maiorem partem 70.*

*QVOD si Cossicus numerus diuidendus ita sit per Algebram, non inuenientur quidem partes numeri Cossici, sed pretium radicis reperietur, uel zensi, cuius partes respondebunt partibus per Algebram positis, quæstioniq. satisfacient. Vt si numerus 2 ℨ. secundus sit in duas partes, quarum maior superet minorem numero 40. Ponatur minor pars ½ ℨ. (minor scilicet numerus, quam semissis dati numeri 2 ℨ.) eritq. maior pars ½ ℨ + 40. superans illam numero 40. quæ simul efficiunt 1 ℨ + 40. qui numerus æqualis debet esse dato numero 2 ℨ. Dempto 1 ℨ. utrinque, erit æquatio inter 40. & 1 ℨ. Diuisisq. 40. per 1. fiet 1 ℨ. 40. & 2 ℨ. propositi 80. qui numerus diuidendus proponitur. Quoniam igitur minor pars posita est ½ ℨ. erit minor pars 20. semissis uidelicet unius zensi, cuius pretium inuenimus 40. ideoq. maior pars erit 60. nimirum ½ ℨ + 40. Vbi uides, 20. & 60. efficere 80. & maiorem partem superare minorem dato numero 40. Sic etiam si 2 ℞. distribuenda sint in duas partes, quarum differentia 40. inuenietur eodem modo 1 ℞. 40. ideoq. 2 ℞ 80. Eritq. ½ ℞. 20. & ½ ℞ + 40. erit 60. &c.*

II. 2 ***Duos numeros inuenire, quorum excessus sit datus quiuis numerus, & eorum summa conficiat quemlibet datum numerum.***

Sit datus excessus 40. & summa 100. Hoc ænigma a superiori non differt. Nam summa 100. distribuenda est in duas partes, quarum excessus sit 40.

III. 3 ***Datum numerum quemlibet in duas partes diuidere, quæ inter se multiplicata gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.***

Sit datus numerus 100. diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1 ℞. ideoq. maior 100 — 1 ℞. Ex vna in alteram procreatur numerus 100 ℞ — 1 ℨ. qui decuplus esse debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad 1 ℨ. hoc est, æqualis 10 ℨ. Est ergo æqualitas inter 100 ℞ — 1 ℨ. & 10 ℨ.

Et

Et addito 1 ʒ. vtrinque, inter 100 ℞. & 11. ʒ. Diuisis ergo 100. per 11. iuxta tenorem regulæ, prodibit 1 ℞. 9 $\frac{1}{11}$. pro minore parte: (quia numeri Cossici sunt collaterales.) qua ablata ex 100. reliqua erit maior pars 90 $\frac{10}{11}$.

100 — 1 ℞
\+ 1 ℞
100 ℞ — 1 ʒ

Hæ partes, nimirum $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. inter se multiplicatæ faciunt $\frac{100000}{121}$. hoc est, 826 $\frac{54}{121}$. qui numerus decuplus est ad quadratum minoris partis, videlicet ad $\frac{10000}{121}$. hoc est, ad 82 $\frac{78}{121}$. vt perspicuum est.

## SCHOLIVM.

*SCIENDVM autem est, duas partes numeri dati inuentas, eandem habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione habet ad quadratũ minoris partis. Ita vides partes inuentas 9 $\frac{1}{11}$. & 90 $\frac{10}{11}$. vel $\frac{100}{11}$. & $\frac{1000}{11}$. habere proportionem decuplam, quemadmodum productus numerus 826 $\frac{54}{121}$ ad 82 $\frac{78}{121}$. quadratũ minoris partis, siue $\frac{100000}{121}$ ad $\frac{10000}{121}$. Cuius rei ratio est, quod eadem pars minor multiplicet & seipsam, ut suum quadratum efficiat, & maiorem partem, ut productum numerũ gignat. [a] Hinc enim fit, ut producti eandem proportionem habeant, quam numeri multiplicati.* a 17. septimi

Itaque ænigma hoc ita proponi posset.

***Datum numerum in duos partiri in data proportione, qui inter se multiplicati gignant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat eandem datam.***

*Sit enim datus numerus 100. diuidendus in duos habentes quadruplam proportionem, ita ut numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quoque ad quadratum minoris proportionẽ quadruplam. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior 4 ℞. ut nimirum habeant proportionem quadruplam. Et quia duo hi numeri faciunt 5 ℞. erit æquatio inter 5 ℞. & 100. Diuisis ergo 100. per 5. fiet 1 ℞. 20. minor scilicet numerus. Maior ergo erit 80. cum positus sit 4 ℞. Vides ergo numerum 1600. productum ex 20. in 80. quadruplum esse quadrati 400. ex minore 20. descripti. Item maiorem 80. ad minorem 20. quadruplam quoque habere proportionem.*

***4 Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: simul vero additi conficiant summam propositam quamcunque.*** IIII.

*Sit summa proposita 100. & numerus ex uno numero inuento in alterum*

procrea-

*procreatus sit decuplus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam ænigma a superiori non differt. Nam summa 100. diuidenda est in duas partes, quæ inter se multiplicata producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.*

V. 5 ***Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior si subtrahatur a dato numero, & minor a minore alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri æquales: quando id fieri potest.***

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorum maiora detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri æquales. Debent autem duo propositi numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in nostro exemplo minor est proportio 30. ad 15. quam tripla.

Ponatur minor 1 ℞. ideoq. maior 3 ℞. triplo maior. Si 3 ℞ dematur ex 30. remanent 30 — 3 ℞. Et si 1 ℞ dematur ex 16. remanent 16 — 1 ℞. Est ergo inuenta æquatio inter 30 — 3 ℞. & 16 — 1 ℞. Addantur vtrinque 3 ℞. eritq. æquatio inter 30. & 16 + 2 ℞. propterea quod + 3 ℞. additæ ad — 1 ℞. faciant + 2 ℞. Et ablatis 16. vtrinque, erit æqualitas inter 14. & 2 ℞. Diuisisq. 14. per 2. prodibit 1 ℞. 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perspicuum autem est, si 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtrobique relinqui 9.

| | |
|---|---|
| + | 3 ℞ |
| — | 1 ℞ |
| + | 2 ℞ |

VI. 6 ***Duos numeros in proportione data inuenire, ita vt maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri potest.***

Sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6. & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior 5 ℞. quintuplo maior. Ex 5 ℞. & 6. fiunt 5 ℞ + 6. Et ex 1 ℞. & 4. fiunt 1 ℞ + 4. Eruntq. 5 ℞ + 6. in tripla proportione ad 1 ℞ + 4. hoc est, si triplicentur 1 ℞ + 4. æquatio fiet inter 5 ℞ + 6. & 3 ℞ + 12. Et ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 2 ℞ + 6. & 12. Et rursum ablatis vtrinque 6. inter 2 ℞. & 6. Diuisis ergo 6. per 2. proueniet 1 ℞. 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam si addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compositus numerus 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit æqualitas inter 5 ℞ + 6. & 4 ℞ + 16.

Et

Et ablatis 4 ℞. vtrinque, inter 1 ℞ + 6. & 16. Et rursum ablatis 6. vtrinque, inter 1 ℞. & 10. Diuisisq; 10. per 1. fiet 1 ℞. 10. minor scilicet numerus, ideoq; maior 50. illius videlicet quintuplus. Quod si 50. addantur ad 6. & 10. ad 4. fient numeri 56. & 14. in proportione quadrupla.

Et si compositus numerus 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. habere debeat proportionem duplam, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & 2 ℞ + 8. Et ablatis 2 ℞. vtrinque, inter 3 ℞ + 6. & 8. Et ablatis 6. vtrinque, inter 3 ℞ & 2. Diuisis autem 2. per 3. fiet 1 ℞, $\frac{2}{3}$. minor scilicet numerus, & maior $\frac{10}{3}$. illius quintuplus. Et si $\frac{10}{3}$. addantur ad 6. id est, ad $\frac{18}{3}$. & $\frac{2}{3}$. ad 4. id est, ad $\frac{12}{3}$. fient duo numeri $\frac{28}{3}$. & $\frac{14}{3}$. habentes proportionem duplam.

SED tam maior 5 ℞. quam minor 1 ℞. additus ad 6. efficere debeant duos numeros in proportione tripla. Inuenietur æquatio inter 5 ℞ + 6. & 3 ℞ + 18. & ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 2 ℞ + 6. & 18. Et rursum ablatis 6. vtrobique, inter 2 ℞. & 12. Diuisis ergo 12. per 2. fiet 1 ℞. 6. minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur vterque addatur ad 6. fient numeri 12. & 36. habentes proportionem triplam.

QVOD si quis velit, compositum numerum 5 ℞ + 6. ad 1 ℞ + 4. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem, aut sesquialteram, euadet ænigma inexplicabile, seu impossibile: quia incidemus in æquationem impossibilem. Vt si proportio inter 5 ℞ + 6. & 1 ℞ + 4. debeat esse quintupla, vel sextupla, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & 5 ℞ + 20. Vel inter 5 ℞ + 6. & 6 ℞ + 24. quarum vtraque impossibilis est.

At si proportio inter 5 ℞ + 6. & 1 ℞ + 4. debeat esse sesquialtera, erit æquatio inter 5 ℞ + 6. & 1 $\frac{1}{2}$ ℞ + 6. quæ etiam impossibilis est. Vbi clare perspicis, ex ipsa regula Algebræ cognosci posse, num ænigma propositum solui possit, nec ne: id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

*Numerum inuenire, qui additus ad quosuis duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportione, quæ minor sit proportione duorum numerorum propositorum.* VIII.

Sit inueniendus numerus, qui additus ad 100. & 20. faciat duos numeros in proportione tripla. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Fient ergo numeri 1 ℞ + 100. & 1 ℞ + 20. qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter 1 ℞ + 100. & 3 ℞ + 60. Ablata 1 ℞ vtrinque, remanebit æquatio inter 100. & 2 ℞ + 60. Et rursum demptis 60. vtrinque, inter 40. & 2 ℞. Diuisis autem 40. per 2. fiet 1 ℞. 20. numerus quæsitus. Numeri ergo compositi erunt 120. & 40. in proportione tripla.

DEBET autem proportio nominata minor esse proportione inter datos duos numeros, vt in nostro exemplo, minor, quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impossibilis. Ratio huius rei est, quod addito vno eodemq. numero ad duos inæquales, compositi minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

Sint namque duo numeri inæquales AB, maior, & CD, minor; quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD.

A . . . . . B . . . . E

C . . . . D . . . . F

Quoniam enim (vt ad defin. 20. lib. 7. Eucl. declarauimus) maior est proportio maioris numeri AE, ad BE, quam minoris CF, ad eundem BE, vel ad DF: a erit per conuersionem rationis, minor proportio AE, ad AB, quam CF, ad CD: Et permutando, minor AE, ad CF, quam AB, ad CD. quod est propositum.

a schol. 22. septimi.

Iisdem positis sit, data proportio super bipartiens quintas. Numeri compositi sunt 1 ℞ + 100. & 1 ℞ + 20. qui debeant habere proportionem super bipartientem quintas. Si ergo 1 ℞ + 20. multiplicetur per $1\frac{2}{5}$. denominatorem proportionis super bipartientis quintas, id est, per $\frac{7}{5}$. fiet numerus $\frac{7 ℞ + 140}{5}$. qui æqualis erit numero 1 ℞ + 100. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem, vt hic vides, reducitur ad æquationem inter 7 ℞ + 140. & 5 ℞ + 500. Et ablatis 140. vtrinque, erit æquatio inter 7 ℞. & 5 ℞ + 360. Et rursus ablatis 5 ℞ vtrinque inter 2 ℞. & 360.

7 ℞ + 140 5 ℞ + 500

$\frac{7 ℞ + 140}{5}$ $\frac{1 ℞ + 100}{1}$

Diuisis ergo 360. per 2. fiet 1 ℞. 180. numerus quæsitus. Hic enim cum 100. & 20. faciet numeros 280. & 200. qui habent proportionem superbipartientem quintas. Apposui hoc alterum exemplum, vt videas, quo pacto æquationes inter minutias sint reducendæ, quod ad finem cap. 10. docui.

VIII. 8. *Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportione, quæ maior sit proportione duorum numerorum propositorum.*

Sit inueniendus numerus, qui ablatus ex 100. & 50. relinquat duos numeros in proportione septupla. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Erunt ergo duo numeri reliqui 100 − 1 ℞. & 50 − 1 ℞. eritq. proportio illius ad hunc septupla. Quare æquatio erit inter 100 − 1 ℞. & 350 − 7 ℞. Additaq. 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 100. & 350 − 6 ℞. propterea quod + 1 ℞. & − 7 ℞. faciunt − 6 ℞. vt hic cernis. Et rursum additis vtrinque 6 ℞. erit æqualitas inter 100 + 6 ℞. & 350. Et ablatis vtrinque

$$\begin{array}{r} + 1 ℞ \\ - 7 ℞ \\ \hline - 6 ℞ \end{array}$$

100. in-

100. inter 6 ℞. & 250. Diuisis ergo 250. per 6. erit 1 ℞. $41\frac{2}{3}$. numerus quæsitus. Reliqui ergo numeri erunt $58\frac{1}{3}$. & $8\frac{1}{3}$. qui proportionem habent septuplam.

DEBET autem proportio data esse maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in proposito exemplo maior, quam dupla. Alias incidemus in æquationem impossibilem. Cuius rei ratio est, quod ablato vno eodemq. numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint enim inæquales duo numeri AB, maior, & CD, minor, a quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales EB, FD. Dico maiorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ex

A. . . . . . . . . E . . . . B
C. . . . . . . F . . . . D

defin. 20. lib. 7. Eucl. deduximus) maior est proportio maioris numeri AB, ad EB, quam minoris CD, ad eundem EB, vel ad FD: erit a schol. 22. septimi. quoque permutando maior proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD: nimirum totius ad totum, quam ablati ad ablatum: erit quoque maior proportio reliqui AE, ad reliquum CF, quam totius AB, ad totum CD. quod est propositum.

9 *Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere.* IX.

Sit numerus 100. diuidendus in duos in proportione decupla. Ponatur minor pars 1 ℞. Eritq. maior 10 ℞. decuplo videlicet maior. Ergo summa harum partium 11 ℞. æqualis erit 100. Diuisis igitur 100. per 11. fit 1 ℞. $9\frac{1}{11}$. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus $90\frac{10}{11}$. qui illius decuplus est.

Aliter. Posita 1 ℞. pro minore parte, erit maior pars 100 — 1 ℞. quæ illius decupla esse debet. Igitur 10 ℞. æquales erunt 100 — 1 ℞. Additaq. 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 11 ℞. & 100. vt supra. Quod si statuas maiorem partem esse 1 ℞. erit minor 100 — 1 ℞. qua decuplata, erit æqualitas inter 1 ℞. & 1000 — 10 ℞. Additisq. 10 ℞ vtrinque, æquatio erit inter 11 ℞. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet 1 ℞. $90\frac{10}{11}$. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars $9\frac{1}{11}$. vt prius.

10 *Propositum numerum in duas partes secare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contineat datum quemcunque numerum.* X.

Sit numerus 100. secandus in duas partes, quarum maior minoris sit tripla, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur 1 ℞. pro minore parte. Maior ergo erit 3 ℞ + 20. Summaq. 4 ℞ + 20. æqualis esse debet 100. Ablatis 20. vtrinque, erit æqualitas inter

4 ℞. & 80. Diuisisq. 80. per 4. fiet 1 ℞. 20. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars 80. quæ triplum numeri 20. continet, nimirum 60. & insuper 20.

Aliter. Posita 1 ℞. pro minore parte, erit maior 100 — 1 ℞. a qua si detrahantur 20. debet reliquus numerus 80 — 1 ℞. triplus esse minoris 1 ℞. hoc est, æquatio esse debet inter 3 ℞. & 80 — 1 ℞. Additaq. 1 ℞. vtrinque, æqualitas erit inter 4 ℞. & 80. Igitur vt supra, erit 1 ℞. 20. minor pars, & maior 80.

XI. 11 *Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data.*

Sit datus excessus 20. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus 1 ℞. Erit maior 5 ℞. nimirum illius quintuplus. Excessus eorum est 4 ℞. Est ergo æquatio inter 4 ℞. & 20. Diuisisq. 20. per 4. fiet 1 ℞. 5. pro minore numero. Maior autem erit 25. qui ipsius 5. quintuplus est, eundemq. excedit numero 20.

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportione supertripartiente septimas, quorum excessus sit 21. Ponantur duo numeri 7 ℞. 10 ℞ in proportione supertripartiente septimas. Horum differentia 3 ℞ æqualis esse debet numero 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet 1 ℞ 7. Igitur 7 ℞. erunt 49. & 10 ℞ facient 70. Est autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 21. habentq. proportionem supertripartientem septimas.

XII. 12 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt pars aliquota vnius data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui positus sit inter partes nominatas dati numeri diuidendi.*

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{5}$ posterioris efficiat 30. qui numerus positus est inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{5}$. dati numeri 100. nimirum inter 33 $\frac{1}{3}$. & 20. hoc est, minor est, quam 33 $\frac{1}{3}$. & maior, quam 20. Ponatur primus numerus 1 ℞. ideoq. secundus 100 — 1 ℞. Tertia pars primi est $\frac{1}{3}$ ℞. & quinta secundi 20 — $\frac{1}{5}$ ℞: quæ partes simul conficiunt 20 — $\frac{2}{15}$ ℞. quia vt addatur $\frac{1}{3}$ ℞ ad — $\frac{1}{5}$ ℞. fit subtractio, propter diuersa signa. Eritq. æquitio inter 20 + $\frac{2}{15}$ ℞. & 30. Ablatisq. 20. vtrinque, inter $\frac{2}{15}$ ℞. & 10. Diuisis autem 10. per $\frac{2}{15}$. prouenit 1 ℞. 75. pro primo numero: atque idcirco secundus erit 25. nimirum 100 — 1 ℞. Constat autem, tertiam partem prioris, nimirum 25. cum quinta parte posterioris, hoc est, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, 1 ℞. ideoq. totus primus 3 ℞. Igitur $\frac{1}{5}$ secundi erit 30 — 1 ℞. vt cũ $\frac{1}{3}$. primi,

primi, id est, cum 1 ℞. conficere possit 30. ideoq. totus secundus erit 150—5 ℞. qui cum primo, hoc est, cum 3 ℞. facere debet 100. Fit autem ex ipsis 150—2 ℞. Igitur æquatio erit inter 150—2 ℞. & 100. Additisq. vtrinque 2 ℞. inter 150. & 100+2 ℞. Ablatisq. 100 vtrinque inter 50. & 2 ℞. Diuisis ergo 50. per 2. fiet 1 ℞. 25. Et quia primus positus fuit 3 ℞. erit primus 75. atque idcirco secundus 25. quemadmodum prius.

QVOD si quis posceret numerum $33\frac{1}{3}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impossibilis, vt experiri poteris.

13 *Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliquota totius numero propositi, eiusdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.* XIII.

Sit diuidendus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem posterioris, numero 11. qui minor est, quinta parte diuidendi numeri 100. Ponatur prior numerus 1 ℞. ideoq. posterior 100—1 ℞. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}$ ℞. excedere debet quartam partem posterioris, nimirum 25—$\frac{1}{4}$ ℞. numero 11. hoc est, æquatio esse debet inter $\frac{1}{5}$ ℞. & 25—$\frac{1}{4}$ ℞+11. Addita $\frac{1}{4}$ ℞ vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{9}{20}$ ℞. & 25+11. siue 36. Diuisis ergo 36. per $\frac{9}{20}$. inuenietur 1 ℞. 80. pro priore numero. Ergo posterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 16. superat quartam partem posterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter sine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$. prioris numeri 1 ℞. ideoq. totus prior 5 ℞. Posterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit 1 ℞—11. vt 1 ℞ superet 1 ℞—11. numero 11. totusq. posterior numerus erit 4 ℞—44. Erit igitur æqualitas inter 9 ℞—44. & 100. quod ambo numeri 5 ℞. & 4 ℞—44. efficere debeant 100. Additis ergo 44. vtrinque, fiet æquatio inter 9 ℞. & 144. Diuisisq. 144. per 9. reperietur 1 ℞. 16. Et quia prior numerus positus fuit 5 ℞. erit numerus prior 80. ac proinde posterior 20. Et quinta pars prioris, nimirum 16. superat 5. quartam partem posterioris numero 11.

QVOD si excessus quintæ partis prioris numeri supra quartam posterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$. numeri 100. diuidendi, vel maior, quam 20. res non succederet. quia incideremus in absurdum aliquod. Nam si excessus debeat esse 20. reperies numerum priorem esse 100. ideoq. posteriorem 0. quod absurdũ est, &c.

14 *Numerum inuenire, a quo si auferantur duo dati numeri; residuum minoris ad maioris residuum datam habeat proportionem.* XIIII.

Sint a quæsito numero auferendi numeri 100. & 30. ita vt residuũ minoris ad residuum maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Eruntq. residui 1 ℞ — 100. & 1 ℞ — 30. Debet ergo proportio esse tripla 1 ℞ — 30. ad 1 ℞ — 100. hoc est, æquatio debet esse inter 1 ℞ — 30. & 3 ℞ — 300. Additis 30. vtrinque, erit æquatio inter 1 ℞. & 3 ℞ — 270. Et rursum additis 270. vtrinque, inter 1 ℞ + 270. & 3 ℞. & ablata 1 ℞. vtrinque, inter 270. & 2 ℞. Diuisis ergo 270. per 2. emerget 1 ℞. 135. numerus quæsitus. Nam si subtrahantur 100. & 30. reliqui fiunt 35. & 105. Ac 105. ad 35. triplam proportionem habent.

XV. 15 *Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto a maiore; summa ad residuũ, vel residuum ad summam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore; summa ad residuum proportionem habeat datam maiorẽ ea, quæ inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100. inueniendusq. sit primo numerus, quo addito ad 20. & subtracto a 100. summa ad residuum habeat proportionem quadruplam, quæ minor est, quam quintupla, quam habent 100. ad 20. Ponatur ille numerus 1 ℞. eritq. summa 1 ℞ + 20. & residuum 100 — 1 ℞. Vt igitur summa illa huius residui sit quadrupla; erit æquatio inter 1 ℞ + 20. & 400 — 4 ℞. Et additis 4 ℞. vtrinque, inter 5 ℞ + 20. & 400. Et ablatis 20. vtrinque, inter 5 ℞. & 380. Diuisis igitur 380. per 5. fiet 1 ℞. 76. numerus quæsitus. qui additus ad 20. facit 96. & detractus ex 100. relinquit 24. Perspicuum autem est, quadruplam proportionem esse 96. ad 24.

Sit deinde inueniendus numerus, quo addito ad 20. & subtracto a 100. residuum ad summam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille 1 ℞. eritq. vt prius, summa 1 ℞ + 20. & residuum 100 — 1 ℞. Vt igitur residuum istud illius summæ sit quadruplũ; erit æquatio inter 4 ℞ + 80. & 100 — 1 ℞. & addita 1 ℞ vtrinque. inter 5 ℞ + 80. & 100. Et ablatis 80. vtrinque, inter 5 ℞. & 20. Diuisis ergo 20. per 5. fiet 1 ℞. 4. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 20. facit 24. Et ablatus ex 100. relinquit 96. qui numerus numeri 24. quadruplus est.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100. & dempto ex 20. summa illa ad hoc residuum proportionem habeat septuplã, quæ maior est, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus 1 ℞. Fietq. summa 1 ℞ + 100. & residuum 20 — 1 ℞. Vt igitur summa illa sit septupla huius residui; erit æqualitas inter 1 ℞ + 100. & 140 — 7 ℞. Et additis 7 ℞. vtrinque, inter 8 ℞ + 100. & 140. Et ablatis 100. vtrinque, inter 8 ℞. & 40. Diuisis igitur 40.

per

per 8. fiet 12. 5. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 100. facit 105. detractus autem ex 20. relinquit 15. Habentq. 105. ad 15. proportionem septuplam.

Si proportio data in vltimo exemplo esset quadrupla, minor videlicet proportione inter 100. & 20. incideremus in æquationem impossibilem. quod experiri licebit.

16 *Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem si adijciatur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; summa ad residuum proportionem habeat datam.* XVI.

Dati numeri sint 100. & 20. inueniendusq. primo sit numerus, ad quem si addantur 100. & ab eodem tollantur 20. summa illa sit residui huius tripla. Ponatur numerus ille 1 2e. Fietq. summa 1 2e + 100. & residuum 1 2e — 20. Vt igitur summa illa sit huius residui tripla; erit æquatio inter 1 2e + 100. & 3 2e — 60. Et additis vtrinque 60. inter 1 2e + 160. & 3 2e. Et ablata 1 2e vtrinque, inter 160. & 2 2e. Diuisis ergo 160. per 2. reperietur 1 2e. 80. numerus quæsitus. Nam si ei addes 100. facies 180. & si demas 20. remanent 60. Estq. tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem si addantur 20. & ab eodem deducantur 100. summa illa residui huius sit tripla. Ponatur ille numerus 1 2e. Fiet summa 1 2e + 20. & residuum 1 2e — 100. Vt ergo illa huius sit tripla, erit æquatio inter 1 2e + 20. & 3 2e — 300. Et additis 300. vtrinque, inter 1 2e + 320. & 3 2e. Et ablata 1 2e vtrinque, inter 320. & 2 2e. Diuisis igitur 320. per 2. fiet 1 2e. 160. numerus quæsitus. Nam si ei addes 20. conficies 180. & si demes 100. relinques 60. Estq. inter 180. & 60. proportio tripla.

17 *Propositum numerum in duos diuidere bis, ita vt maior numerus primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat datam proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.* XVII.

Propositus numerus 100. diuidendus sit bis in duos numeros, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat proportionem triplam; maior vero secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3 2e. ideoq. minor 100 — 3 2e. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1 2e. Est enim tripla proportio 3 2e. ad 1 2e. ideoq. maior pars secundæ diuisionis erit 100 — 1 2e. Vt autem 100

— 1 2e.

— 1 ℞. habeant ad 100 — 3 ℞. proportionem decuplam, necesse est æquationẽ esse inter 100 — 1 ℞. & 1000 — 30 ℞. Igitur additis 30 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 100 + 29 ℞. & 1000. Ablatisq. 100. vtrinque, erit æqualitas inter 29 ℞. & 900. Diuisis igitur 900. per 29. deprehendetur 1 ℞. 31 $\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuisionis posita fuit 3 ℞. erit ipsa pars maior 93 $\frac{3}{29}$. ac proinde minor 6 $\frac{26}{29}$. Rursus quia minor pars secundæ diuisionis posita fuit 1 ℞. erit ipsa pars minor 31 $\frac{1}{29}$. ideoq. maior 68 $\frac{28}{29}$. Estq. numerus 93 $\frac{3}{29}$. ad 31 $\frac{1}{29}$. triplus: Et 68 $\frac{28}{29}$. ad 6 $\frac{26}{29}$. decuplus.

| | |
|---|---|
| 93 $\frac{3}{29}$ | 31 $\frac{1}{29}$ |
| 6 $\frac{26}{29}$ | 68 $\frac{28}{29}$ |

XVIII. 18 *Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuisionis ad minorem secundæ datam habeat proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ.*

Datus numerus 100. sit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ proportionem habeat triplam: Maior autem secundæ diuisionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ, proportionẽ quadruplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3 ℞.

| | | |
|---|---|---|
| 3 ℞ | 1 ℞ | 50 + $\frac{1}{2}$ ℞ |
| 100 — 3 ℞ | 100 — 1 ℞ | 50 — $\frac{1}{2}$ ℞ |

ideoq. minor 100 — 3 ℞. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1 ℞. quippe cum tripla sit proportio 3 ℞. ad 1 ℞. ideoq. maior pars secundæ diuisionis erit 100 — 1 ℞. quæ vt dupla sit minoris partis diuisionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuisionis 50 — $\frac{1}{2}$ ℞, atque idcirco maior 50 + $\frac{1}{2}$ ℞. Vt autem 50 + $\frac{1}{2}$ ℞. ad 100 — 3 ℞. minorem partem primæ diuisionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter 50 + $\frac{1}{2}$ ℞. & 400 — 12 ℞. Additisq. 12 ℞. vtrinque, æqualitas erit inter 50 + 12 $\frac{1}{2}$ ℞. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter 12 $\frac{1}{2}$ ℞. & 350. Diuisis igitur 350. per 12 $\frac{1}{2}$. fiet 1 ℞. 28. Maior ergo pars primæ diuisionis, quæ fuit posita 3 ℞. erit 84. & minor 16. At minor pars secundæ diuisionis, quam posuimus 1 ℞. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuisionis, quæ posita est 50 — $\frac{1}{2}$ ℞. erit 36. & maior 64. qui numeri satisfaciunt ænigmati proposito, quod experiri poteris.

| | | |
|---|---|---|
| 84 | 28 | 64 |
| 16 | 72 | 36 |

XIX. 19 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent*

*creent numerum in data proportione ad eorum summam.*

Sit productus ex multiplicatione ad summam triplus. Ponatur vnus numerus 1 ℞. alter vero quicunque numerus maior denominatore proportionis, V.g. 10. maior quam 3. Alias res non succedet. Ex 1 ℞. in 10. fiunt 10 ℞. Et summa ex 1 ℞ & 10. collecta est 1 ℞ + 10. Vt ergo ille productus ad hanc summam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter 10 ℞. & 3 ℞ + 30. Et ablatis 3 ℞. vtrinque, inter 7 ℞. & 30. Diuisis ergo 30. per 7. fiet 1 ℞. $4 \frac{2}{7}$. Sunt ergo duo numeri quæsiti $4 \frac{2}{7}$. & 10. Ex ductu vnius in alium fit numerus $42 \frac{6}{7}$. qui triplus est ad $14 \frac{2}{7}$. eorum summã.

SI vnus numerus ponatur 1 ℞. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12. & 4. Nam ex 1 ℞. in 4. fit numerus 4 ℞ triplus summæ 1 ℞ + 4. Ergo æquatio erit inter 4 ℞ & 3 ℞ + 12. Ablatisq. 3 ℞ vtrinque, inter 1 ℞. & 12. ac proinde 1 ℞ erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt posuimus.

20 *Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum summam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor sit.* XX.

Dato numero 20. inueniendus sit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad summam ex ipsis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor est dato numero 20. Alias res non succedet. Non differt hoc ænigma a præcedenti. Nam si numerus quæsitus ponatur 1 ℞. & alter numerus, 20. qui datus est, inuenietur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad summam, &c.

21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum summam.* XXI.

Hoc ænigma a 19. non differt, nisi quod hic datur proportio, quã inuenti numeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt inter se multiplicati faciant numerum duodecuplum summæ eorum. Ponantur duo numeri 4 ℞. & 6 ℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24 ʓ. eorumq. summa est 10 ℞. Vt ergo 24 ʓ. ad 10 ℞. proportionem habeant duodecuplam; erit

æqua-

æquatio inter 24 ℨ. & 120 ℞. Diuisis ergo 120. per 24. proueniet 1 ℞ 5. quia denominationes Cossicæ ℨ. & ℞. collaterales sunt. Cum ergo primus numerus positus sit 4 ℞ & secundus 6 ℞. erit primus 20. & secundus 30. qui multiplicati inter se faciunt 600. qui numerus duodecuplus est eorum summæ 50.

Si proportio inter numerum ex multiplicatione factum ad summam debeat esse sesquiquinta. Positis numeris 4 ℞ & 6 ℞ in proportione sesquialtera. Vt numerus 24 ℨ. ex multiplicatione factus ad summam 10 ℞ proportionem habeat sesquiquintam: erit æquatio inter 24 ℨ. & 12 ℞ quia 12 ℞ ad 10 ℞ habent etiam proportionem sesquiquintam: qui quidem numerus 12. procreatus est ex $1\frac{1}{5}$. denominatore proportionis sesquiquintæ in 10. Diuisis igitur 12. per 24. fiet 1 ℞ $\frac{1}{2}$. atque adeo cum numeri positi sint 4 ℞ & 6 ℞. erunt duo numeri quæsiti 2. & 3. qui multiplicati inter se faciunt 6. numerum ad eorum summam 5. sesquiquintam.

XXII. 22 ***Inuenire duos numeros, quorum summa sit datus quilibet numerus, & posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit datus etiam numerus quiuis.***

**VEL**

***Datum numerum in duos partiri, vt posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit quilibet numerus datus.***

Sit summa quæsitorum numerorum 100. & Quotiens 10. Sit primum prior numerus 1 ℞, atque idcirco posterior 100 — 1 ℞. Hoc diuiso per 1 ℞. fit Quotiens $\frac{100 - 1℞}{1℞}$. æqualis 10. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100 — 1 ℞. & 10 ℞. Addita 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 100. & 11 ℞. Diuisis autem 100. per 11. fit 1 ℞ $\frac{100}{11}$. hoc est, $9\frac{1}{11}$ prior numerus. Ergo posterior erit $90\frac{10}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$. Constat autem si $90\frac{10}{11}$ per $9\frac{1}{11}$ siue $\frac{1000}{11}$ per $\frac{100}{11}$ diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde posterior numerus 1 ℞. ideoq. prior 100 — 1 ℞. Illo per hunc diuiso, fit Quotiens $\frac{1℞}{100 - 1℞}$. æqualis 10. Quæ æquatio per multiplicationē in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ℞. & 1000 — 10 ℞. Et additis 10 ℞ vtrinque, erit æqualitas inter 11 ℞. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet Quotiens $\frac{1000}{11}$ siue $90\frac{10}{11}$. posterior numerus, priorq. erit $9\frac{1}{11}$. siue $\frac{100}{11}$. vt prius.

IAM si numerus datus 100. secundus sit in duos, vt posteriore per priorem diuiso, Quotiens sit 10. soluetur quæstio eodem modo ponendo 1 ℞. pro priore, vel posteriore, & pro altero 100 — 1 ℞. vt liquet.

DENIQVE sit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt posteriore per priorem diuisa, Quotiens sit $\frac{1}{2}$. Ponatur prior pars 1 ℞, & posterior 100 — 1 ℞. Hac diuisa per 1 ℞, fit Quotiens $\frac{100 - 1℞}{1℞}$. æqualis $\frac{1}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ℞, & 100 — 2 ℞. Additisq. 2 ℞ vtrobique, erit æqualitas inter 3 ℞, & 200. Diuisis ergo 200, per 3 fiet 1 ℞ $\frac{200}{3}$, siue 66 $\frac{2}{3}$. pro priore parte. Posterior autem erit 33 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{100}{3}$. Diuisis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$. fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt constat.

23 *DATVM numerum in quinque partes secare, vt secunda primam contineat quotiescunque libuerit, & præterea quotlibet vnitates: Tertia secundam quotiescunque etiam libuerit, ac præterea quotuis vnitates: Quarta tertiæ sit multiplex data, minus quotuis vnitatibus: Ac tandem quinta a multiplici data quarta deficiat quotlibet etiam vnitatibus; quando id fieri potest.* XXIII.

DATVS numerus sit 100. secandus in quinque partes, ita vt secunda primam contineat bis, & præterea 2. Tertia secundam ter, ac præterea 3. Quarta tertiæ sit dupla minus 4. Ac tandem quinta a dupla quartæ deficiat 13. vnitatibus. Ponatur prima pars 1 ℞. Eritq. secunda 2 ℞ + 2. Tertia 6 ℞ + 9. Quarta 12 ℞ + 14. Et quinta 24 ℞ + 15. Summa omnium partium est 45 ℞ + 40. quæ æqualis debet esse dato numero 100. Ablatis 40. vtrinque, erit æquatio inter 45 ℞. & 60. Diuisisq. 60. per 45. fiet 1 ℞. 1 $\frac{1}{3}$. prima pars. Ergo omnes quinque erunt 1 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$. 17. 30. 47.

Si numerus 100. secandus esset in quinque partes, vt secunda primam contineret ter, & præterea 4. Tertia secundam bis, & præterea 3. Quarta esset quintupla tertiæ, minus 6. Quinta denique esset quadrupla quartæ, minus 5. quæstio foret impossibilis. Nam posita prima parte 1 ℞ esset secunda 3 ℞ + 4. Tertia 6 ℞ + 11. Quarta 30 ℞ + 49. & quinta 120 ℞ + 191. quæ omnes partes faciunt 160 ℞ + 255. quæ summa æqualis deberet esse dato numero 100. totum parti, quod est absurdum. Propterea diximus in ænigmate [quando id fieri potest.]

24 *Datis duobus numeris, alium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.* XXIIII.

Sint dati duo numeri 20. & 30. inueniendusq. sit alius, qui cum 20. summam faciat æqualem summæ ex 30. & sexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus quæsitus 6 ℞. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem sine fractione. quod tamen opus non est.) Ergo 6 ℞ + 20. æquales sunt 1 ℞ + 30. Ablata 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 5 ℞ + 20. & 30. Ablatisq. rursum 20. vtrinque, inter 5 ℞ & 10. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 ℞ 2. Igitur

6 ℞ facient 12. numerum quæsitum. Hic enim cum 20. facit 32. & eius $\frac{1}{6}$. nimirum 2. cum 30. facit etiam 32.

XXV. 25 ***Inuenire duos numeros in data proportione, vt tantum fiat, minore detracto ex maiore, quantum maiore diuiso per minorem.***

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 ℞. & 10 ℞. Detracto minore 1 ℞. ex maiore 10 ℞. supersunt 9 ℞. Et diuiso maiore 10 ℞. per minorem 1 ℞. fit Quotiens 10. Est ergo æquatio inter 9 ℞ & 10. Et diuisis 10. per 9. fit 1 ℞. 1 $\frac{1}{9}$. siue $\frac{10}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit $\frac{100}{9}$. siue 11 $\frac{1}{9}$. Nam si demantur 1 $\frac{1}{9}$. ex 11 $\frac{1}{9}$. remanent 10. Et diuisis 11 $\frac{1}{9}$. per 1 $\frac{1}{9}$. hoc est, $\frac{100}{9}$. per $\frac{10}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

XXVI. 26 ***Inuenire duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione inter se producto.***

Sint inueniendi duo numeri in proportione decupla. Ponantur 1 ℞. & 10 ℞. Summa eorum est 11 ℞. Et ex vno in alterum fit numerus 10 ȝ. Eritq. æqualitas inter 11 ℞. & 10 ȝ. Diuisis ergo 11. per 10. fiet 1 ℞. 1 $\frac{1}{10}$. primus numerus: propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Alter ergo erit 11. Tam enim summa eorum, quam numerus ex vno in alterum productus est 12 $\frac{1}{10}$.

XXVII. 27 ***Duos numeros inuenire in dato excessu, ita vt eorum quadrati datum etiam habeant excessum, qui tamen maior sit quadrato dati excessus numerorum.***

Sint inueniendi duo numeri, quorum excessus 4. quadratorum vero excessus 144. qui maior est, quam 16. quadratus excessus 4. numerorum dati. Ponatur minor numerus 1 ℞. ideoq. maior 1 ℞ + 4 quorum excessus 4. Quadrati sunt 1 ȝ. & 1 ȝ + 8 ℞ + 16. Excessus eorum 8 ℞ + 16. qui æqualis debet esse numero 144. Ablatis 16. vtrinque, erit æquatio inter 8 ℞. & 128. Diuisis ergo 128. per 8. erit 1 ℞. 16. minor numerus. Maior ergo erit 20. vt excessus sit 4. Quadrati sunt 256. & 400. quorum excessus 144.

Si datus excessus numerorum sit 1. & quadratorum 31. inuenientur numeri 15. & 16. nimirum duo numeri proximi conficientes datum excessum quadratorum. Atque ita, quotiescunque excessus numerorum datur 1. & quadratorum numerus quiuis impar, erunt duo numeri quæsiti, duo proximi conficientes datum excessum quadratorum.

Quan-

Quando excessus numerorum est 5. & quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & 5 $\frac{1}{2}$.

Si numerorum excessus sit 10. & quadratorum 200. inuenies numeros 5. & 15.

Si excessus detur 2. inter numeros, & inter quadratos 22. erunt numeri quæsiti 4 $\frac{1}{2}$. & 6 $\frac{1}{2}$.

## *S C H O L I V M.*

*HOC problema sine Algebra solui etiam potest ( quod quidem percommodum interdum erit in numeris Cossicis ) hoc modo. Excessus datus quadratorum diuidatur per duplum excessus dati numerorum. Nam si ex Quotiente dematur semissis dati excessus numerorum, reliquus fiet minor numerus. qui ad datum excessum numerorum adiectus faciet numerum maiorem.*

*Sint enim inueniendi duo numeri, quorum excessus 6. & quadratorum excessus 1 2e. Diuidatur 1 2e. per 12. duplum scilicet numerum excessus 6. dati numerorum. Et ex Quotiente $\frac{1}{12}$ 2e. dematur numerus 3. semissis eiusdẽ excessus 6. numerorum. Nam reliquus numerus $\frac{1}{12}$ 2e — 3. erit minor numerus quæsitus : ad quem si adycies datum excessum 6. facies $\frac{1}{12}$ 2e + 3. maiorem numerum. Excessus enim horum duorum numerorum est 6. Et quadrati eorundem sunt $\frac{1}{144}$ ʒ — $\frac{1}{2}$ 2e + 9. & $\frac{1}{144}$ ʒ + $\frac{1}{2}$ 2e + 9. quorum excessus est 1 2e.*

28 ***Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.*** XXVIII.

Sint dati numeri 9. & 30. inueniendiq. duo numeri in proportione quadrupla, &c. Ponatur minor 1 2e. ideoq. maior 4 2e. Erit igitur æquatio inter 4 2e + 9. & 1 2e + 30. Ablata 1 2e. vtrinque, erit æquatio inter 3 2e + 9. & 30. Et ablatis 9. vtrinque, inter 3 2e. & 21. Diuisis ergo 21. per 3. fiet 1 2e 7. minor numerus. Maior ergo erit 28. Et tam ex 28. & 9. quam ex 7. & 30. fiunt 37.

29 ***Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus.*** XXIX

Datus numerus sit 30. Pone quæsitum esse 1 2e. qui ductus in 30. facit 30 2e. additus vero ad 30. facit 1 2e + 30. Eritq. æquatio inter 30 2e. & 1 2e + 30. Ablata vtrinque 1 2e. erit æquatio inter 29 2e. & 30. Diuisis autem 30. per 29. erit 1 2e. $\frac{30}{29}$. siue 1 $\frac{1}{29}$. Additis enim $1\frac{1}{29}$. ad 30. fiunt $31\frac{1}{29}$. quantum nimirum fit ex $1\frac{1}{29}$. in 30.

XXX. 30 *Dato numero, alium inuenire, vt eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.*

Sit datus numerus 60. & data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{3}$. Ponatur $\frac{1}{3}$ numeri inueniendi 1 ℞. ac proinde totus numerus 3 ℞. Ex 1 ℞. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri quæsiti in 60. fit numerus 60 ℞. At ex 3 ℞. toto scilicet numero quæsito, & 60. fit numerus 3 ℞ + 60. Eritq. æquatio inter 60 ℞. & 3 ℞ + 60. Ablatisq. 3 ℞. vtrinque, inter 57 ℞. & 60. Diuisis ergo 60. per 57. fiet 1 ℞. $1\frac{1}{19}$. tertia pars numeri quæsiti, ac proinde numerus quæsitus $3\frac{3}{19}$. Nam ex $1\frac{1}{19}$. id est, ex $\frac{1}{3}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus $63\frac{3}{19}$. æqualis summæ ex $3\frac{3}{19}$. & 60. collectæ.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos partiri, ita vt minor sit maioris pars aliquota data, vel partes aliquotæ datæ, & contineat insuper datum alium numerum, si placet.*

Sit datus numerus 40. distribuendus primum in duos, vt minor sit $\frac{1}{7}$. maioris. Ponatur minor 1 ℞. eritq. maior 7 ℞. qui æquales esse debent numero dato 40. Est igitur æquatio inter 8 ℞. & 40. Diuisisq. 40. per 8. prodibit 1 ℞. 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 7 ℞. Et manifestum est, 5. esse septimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. secandus in duos, vt minor constituat $\frac{3}{7}$. maioris. Ponatur minor 3 ℞. ideoq. maior 7 ℞. vt ille huius $\frac{3}{7}$ contineat. Summa amborum est 10 ℞. æqualis dato numero 40. Diuisis ergo 40. per 10. reperietur 1 ℞. 4. ac proinde cum minor numerus positus sit 3 ℞. & maior 7 ℞. erit minor 12. & maior 28. continetq. ille $\frac{3}{7}$. huius.

Sit datus numerus 84. secandus sit in duos, vt minor maioris contineat $\frac{3}{4}$. & præterea 7. vnitates. ponemus maiorem esse 4 ℞. vt continere possit $\frac{3}{4}$. sine fractione. Eritq. minor 3 ℞ + 7. Amborum summa est 7 ℞ + 7. æqualis dato numero 84. Ablatis 7. vtrinque, erit æquatio inter 7 ℞. & 77. Diuisisq. 77. per 7. exibit 1 ℞. 11. Cum igitur maiorem posuerimus 4 ℞. & minorem 3 ℞ + 7. erit maior 44. & minor 40. continetq. hic $\frac{3}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

XXXII. 32 *Duos numeros inuenire, ita vt si numerus productus*

ex

*ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicunque numerus.*

Inueniendi sint duo numeri, ita vt numerus ex eorum multiplicatione productus si diuidatur per eorum differentiam, Quotientē faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20. & maior ponatur 20 + 1 ℞. vt differentia eorum sit 1 ℞. Ex 20. in 20 + 1 ℞. fit numerus 400 + 20 ℞. quo diuiso per 1 ℞. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400 + 20 ℞}{1 ℞}$. æqualis proposito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in crucē reducitur ad æqualitatem inter 30 ℞. & 400 + 20 ℞. Ablatis ergo 20. ℞ vtrobique, æquatio erit inter 10 ℞. & 400. Diuisisq. 400. per 10. fiet 1 ℞. 40. pro differentia numerorum, qui quæruntur. Cum ergo minor sit 20. erit maior 60. nimirum 20 + 1 ℞. Iam vero ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiso per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

33 *Numerum inuenire, cuius duarum partium datarum quadrati summam conficiant, quæ ad aliam partem datam eiusdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quamcunque.* XXXIII.

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{6}$. quadratos efficiant, quorum summa partis $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri tripla sit. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Partes datæ sunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{6}$ ℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ ʒ. & $\frac{1}{36}$ ʒ. summam conficiunt $\frac{10}{36}$ ʒ. triplam ad $\frac{1}{4}$ ℞. hoc est, æqualem $\frac{3}{4}$ ℞. Diuisis ergo $\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet 1 ℞ $\frac{108}{40}$. id est, $\frac{27}{10}$. numerus quæsitus (propterea quod numeri Cossici collaterales sunt.) Huius enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ sunt $\frac{27}{20}$. & $\frac{27}{60}$. quarum quadrati $\frac{729}{400}$. & $\frac{729}{3600}$. faciūt summam $\frac{7290}{3600}$. quæ tripla est ad $\frac{27}{40}$. hoc est, ad $\frac{1}{4}$. inuenti numeri $\frac{27}{10}$.

34 *Numerum inuenire, qui in se ductus, & productus numerus in datum quemuis numerum faciat numerum in data proportione ad cubum ex inuento numero procreatum.* XXXIIII.

Sit datus numerus 20. inueniendusq. sit alius, qui primum in se, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quintuplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Ex 1 ℞ in se fit 1 ʒ. Et ex 1 ʒ. in 20. fit numerus 20 ʒ. Cubus autem 1 ℞. est 1 ce. ad quem 20 ʒ. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio est inter 20 ʒ. & 5 ce. Diuisis ergo

20.

20. per 5. fiet 1 ℞. 4. numerus quæsitus: quia numeri Cossici sunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in se facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus est numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

XXXV. 35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.*

Datus numerus 10. secandus sit primum in duos, vt productus numerus ex primo in 4. superet numerum productum ex secundo in 6. vnitate. Ponatur prima pars 1 ℞. ideoq. secunda 10—1 ℞. Ex 1 ℞ in 4. fiunt 4 ℞. Et ex 10—1 ℞ in 6. fiunt 60—6 ℞. Debetq. hūc productum numerus 4 ℞. excedere Vnitate. Ac propterea æquatio erit inter 4 ℞. & 61—6 ℞. Additisq. 6 ℞ vtrinque, inter 10 ℞. & 61. Diuisis igitur 61. per 10. fiet 1 ℞. 6 $\frac{1}{10}$. primus numerus. Secundus ergo erit 3 $\frac{9}{10}$. Ex primo in 4. fiunt 24 $\frac{4}{10}$. Et ex secundo in 6. fiunt 18 $\frac{54}{10}$. hoc est, 23 $\frac{4}{10}$. qui numerus vnitate superatur a 24 $\frac{4}{10}$.

Sit deinde idem numerus datus 10. secandus in duas partes, vt secunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitate superet productum ex prima parte in 6. Ponatur rursum prima pars 1 ℞. & secunda 10—1 ℞. Ex 10—1 ℞ in 4. fit numerus 40—4 ℞. Et ex 1 ℞ in 6. fiunt 6 ℞. Hunc numerum ille productus superare debet Vnitate. Igitur æquatio erit inter 40 — 4 ℞. & 6 ℞ + 1. Ablataq. Vnitate vtrinque, inter 39—4 ℞. & 6 ℞. Additisq. 4 ℞ vtrinque, inter 39. & 10 ℞. Diuisis ergo 39. per 10. fiet 1 ℞. 3 $\frac{9}{10}$. primus numerus. Secundus igitur erit 6 $\frac{1}{10}$. Ex 6 $\frac{1}{10}$. in 4. fit numerus 24 $\frac{4}{10}$. Et ex 3 $\frac{9}{10}$. in 6. fiunt 18 $\frac{54}{10}$. siue 23 $\frac{4}{10}$. Manifestum autem est, numerum 24 $\frac{4}{10}$. vnitate superare numerum 23 $\frac{4}{10}$.

QVOD si excessus debeat esse 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1 ℞. & secundus 10 — 1 ℞. Ex 1 ℞ in 4. fit numerus 4 ℞. & ex 10—1 ℞ in 6. fit numerus 60 — 6 ℞. quem primum ille superare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4 ℞. & 80 — 6 ℞. Additisq. 6 ℞ vtrinque, inter 10 ℞. & 80. Diuisis ergo 80. per 10. fiet 1 ℞. 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perspicuum autem est, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4. superare numerum 12. qui fit ex secundo 2. in 6. numero 20.

Sed iam numerus 40—4 ℞. factus ex secundo 10—1 ℞. in 4. superare debeat numero 20. numerum 6 ℞. factum ex primo 1 ℞. in 6. Erit ergo æquatio inter 40 — 4 ℞. & 6 ℞ + 20. Additisq. 4 ℞ vtrinque, inter 40. & 10 ℞ + 20. Ablatisq. vtrinque 20. inter 20. & 10 ℞. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1. ℞ 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum est, numerum 32. ex secundo 8. in 4. factum, superare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

36 Da-

36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipso progressionem Arithmeticam constituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus sit in duos, qui cum eodem numero 20. constituant tres numeros Arithmeticè proportionales. Sit minor pars 1 ℞. & maior 20 — 1 ℞. Vt igitur 1 ℞. 20 — 1 ℞. 20. sint Arithmeticè proportionales, erit idem excessus inter 1 ℞. & 20 — 1 ℞. qui inter 20 — 1 ℞. & 20. Sunt autem excessus 20 — 2 ℞. & 1 ℞. vt in hisce formulis subtractionum patet. Ergo æquatio erit inter 20 — 2 ℞. & 1 ℞. Et additis 2 ℞ vtrinque, inter 20. & 3 ℞. Diuisis ergo 20. per 3. fiet 1 ℞. $6\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit $13\frac{1}{3}$. Constituuntq. $6\frac{2}{3}$. $13\frac{1}{3}$. & 20. progressionem Arithmeticam, cum eundem excessum habeant $6\frac{2}{3}$.

| | |
|---|---|
| 20 — 1 ℞ | 20 + 0 |
| + 1 ℞ | 20 — 1 ℞ |
| 20 — 2 ℞ | 0 + 1 ℞ |

Aliter. Si 1 ℞. 20 — 1 ℞. 20. sunt Arithmeticè proportionales; erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmeticè proportionalium diximus) summa primi & tertij, nimirum 1 ℞ + 20. æqualis duplo medij, nimirum 40 — 2 ℞. Additis ergo 2 ℞ vtrinque, existet æquatio inter 3 ℞ + 20. & 40. Ablatisq. 20. vtrinque, inter 3 ℞. & 20. Ergo rursus 1 ℞ erit $6\frac{2}{3}$. vt prius.

37 *Inuenire duos numeros, qui inter se multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, sed illa minorem.* XXXVII.

Proportio producti ad minorem sit decupla, & ad maiorem sesquialtera. Ponatur productus 30 ℞. (Numerus enim 30 ℞ ad 3 ℞. habet proportionem decuplam, & ad 20 ℞. sesquialteram.) Erit minor numerus 3 ℞. & maior 20 ℞. qui inter se multiplicati debent facere 30 ℞. Faciunt autem 60 ȝ. Est ergo æquatio inter 30 ℞. & 60 ȝ. Diuisisq. 30. per 60. exibit 1 ℞ $\frac{1}{2}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Ergo minor numerus, quem posuimus 3 ℞. erit $1\frac{1}{2}$. Maior autem, qui positus est 20 ℞. erit 10. Atque ex $1\frac{1}{2}$. hoc est, ex $\frac{3}{2}$. in 10. fit numerus $\frac{30}{2}$. siue 15. qui ad $1\frac{1}{2}$. vel ad $\frac{3}{2}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. sesquialteram.

38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales diuidere, quarum differentia data sit: quando id fieri potest.* XXXVIII.

Datus numerus 120. diuidendus sit in sex partes, quæ ordine sese excedant binario. Ponatur prima pars 1 ℞. Erit secunda 1 ℞ + 2. Tertia 1 ℞ + 4. Quarta 1 ℞ + 6. Quinta 1 ℞ + 8. & sexta 1 ℞ + 10. quæ omnes simul faciunt summam 6 ℞ + 30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6 ℞. & 90. Diuisisq. 90. per 6. fiet 1 ℞. 15. prima pars. Sunt ergo sex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario se excedunt, & summam faciunt 120.

DEBET autem datus numerus maior esse summa terminorum totidem Arithmeticæ progressionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur distribui; quæ quidem a dato excessu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quàm summa 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non succedet, quia incideremus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque idcirco diximus in ænigmate, [quando id fieri potest.]

XXXIX. 39 ***Datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales partiri, quarum prima data sit: quando id fieri potest.***

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmeticam progressionem constituentes, cuius primus terminus sit 5. Pone differentiam progressionis 1 ℞. Erunt ergo 11. termini hi. 5. 5 + 1 ℞. 5 + 2 ℞. 5 + 3 ℞. 5 + 4 ℞. 5 + 5 ℞. 5 + 6 ℞. 5 + 7 ℞. 5 + 8 ℞. 5 + 9 ℞. 5 + 10 ℞. quorum summa 55 ℞ + 55. æqualis esse debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55 ℞. & 5. Diuisisq. 5. per 55. fiet 1 ℞. $\frac{1}{11}$. differentia progressionis. Erunt ergo 11. partes quæsitæ hæ. 5. 5 $\frac{1}{11}$. 5 $\frac{2}{11}$. 5 $\frac{3}{11}$. 5 $\frac{4}{11}$. 5 $\frac{5}{11}$. 5 $\frac{6}{11}$. 5 $\frac{7}{11}$. 5 $\frac{8}{11}$. 5 $\frac{9}{11}$. 5 $\frac{10}{11}$. quæ omnes simul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior esse numero, qui fit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quàm 55. qui numerus fit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob causam dictum est in ænigmate, [quando id fieri potest.]

XL. 40 ***Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero superet productum ex minore in minorem.***

Dati numeri sint 5. & 9. oporteatq. inuenire duos alios in proportione tripla, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui superet productum ex minore in 5. numero 110. Ponatur minor 1 ℞. ideoq. maior 3 ℞. Ex 3 ℞. in 9. fiunt 27 ℞. Et ex 1 ℞. in 5. fiunt 5 ℞. Superat autem numerus 27 ℞. numerum 5 ℞. numero 22 ℞.

qui

qui æqualis debet esse numero 110. Diuisis ergo 110. per 22 fiet 1 ℞ 5. primus numerus; ideoq. maior erit 15. Ex 15. in 9. fit numerus 135. qui superat 25. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

41 ***Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt productus ex maiore horum in minorem illorum superet dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit. Vel certè hic productus illum dato numero excedat.*** XLI.

Sint dati numeri 5. & 9. oporteatq. duos alios inuenire in dupla proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui 10. vnitatibus superet productũ ex minore in 9. Ponatur minor 1 ℞. ac propterea maior 2 ℞. (Debet autem hic maior in minorem datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum maiorem fit, vt nimirum ille hunc superare possit. Vnde si dati numeri forent 2. & 9. quæstio esset impossibilis; quippe cum ex 2 ℞. in 2. fiat numerus 4 ℞. minor numero 9 ℞. qui fit ex 1 ℞ in 9.) Ex 2 ℞ in 5. fit numerus 10 ℞. Et ex 1 ℞ in 9. fit numerus 9 ℞. quem ille superat 1 ℞. Est igitur æquatio inter 1 ℞. & 10. Diuisisq. 10. per 1. fit 1 ℞. 10. minor numerus, ac proinde maior erit 20. Vides ergo numerum 100. factum ex 20. in 5. superare 90. numerum ex 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

42 ***Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt summa quadratorum ex ipsis descriptorum ad eorum summam habeat datam proportionem.*** XLII.

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita vt summa quadratorum ex ipsis descriptorum, ad inuentorum numerorum summam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞. ideoq. maior 5 ℞. quadrati sunt 1 ʒ. & 25 ʒ. eorumq. summa 26 ʒ. decupla summæ eorum, quæ est 6 ℞. Erit ergo æquatio inter 26 ʒ. & 60 ℞. Diuisis autem 60 per 26. fiet 1 ℞. 2 $\frac{4}{13}$. siue $\frac{30}{13}$. minor numerus, (quod numeri Cossici collaterales sint.) atque adeo maior $\frac{150}{13}$. siue 11 $\frac{7}{13}$. Quadrati sunt $\frac{900}{169}$. & $\frac{22500}{169}$. quorum summa $\frac{23400}{169}$. decupla est ad $\frac{180}{13}$. summam inuentorum numerorum.

IISDEM positis, si proportio inuenienda sit æqualitatis, erit æquatio inter 26 ʒ. & 6 ℞. Diuisis ergo 6. per 26, fiet 1 ℞. $\frac{3}{13}$. minor numerus. (quia Cossici numeri sunt collaterales.) Maior autẽ erit $\frac{15}{13}$. Quadrati sunt $\frac{9}{169}$. & $\frac{225}{169}$. eorumq. summa $\frac{234}{169}$. æqualis summæ $\frac{18}{13}$. ex inuentis numeris collectæ.

Et si proportio inuenienda sit minoris inæqualitatis, vt subdupla, erit numerus 26 ʒ. subduplus numeri 6 ℞. hoc est, hic illius erit duplus.

duplus. Igitur erit æquatio inter 52 ʒ. & 6 ℞. Vel inter 26 ʒ. & 3 ℞. Diuisisq. 6. per 52. vel 3. per 26. fiet 1 ℞. $\frac{3}{26}$. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{6}{26}$. Quadrati sunt $\frac{9}{676}$. & $\frac{36}{676}$. eorumq. summa $\frac{45}{676}$. subdupla summæ $\frac{9}{26}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cum hæc illius sit dupla.

XLIII. 43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportione ad summam ex minoribus collectam. dummodo hæc secunda proportio data sit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.*

Sint dati numeri 10. & 12. oporteatq. inuenire alios duos in proportione quintupla, vt summa ex maiore, & 12, tripla sit ad summam ex minore, & 10. Est autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc est, maior, quam illa, & minor, quam hæc. Ponatur minor numerus 1 ℞. ideoq. maior 5 ℞. Ex 5 ℞. & 12. fit numerus 5 ℞ + 12. Et ex 1 ℞ & 10. numerus 1 ℞ + 10. cuius ille triplus esse debet. Ergo æquatio erit inter 5 ℞ + 12. & 3 ℞ + 30. Ablatisq. vtrinque 12. inter 5 ℞ & 3 ℞ + 18. Et rursum ablatis 3 ℞ vtrinque, inter 2 ℞. & 18. Diuisis igitur 18. per 2. fiet 1 ℞. 9. minor numerus, ideoq. maior 45. Ex 45. & 12. fit numerus 57. qui triplus est ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

XLIIII. 44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportione, vt subtracto minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quamcunque.*

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteatq. alios duos inuenire in proportione quintupla, vt minore ex 100. subtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportione quintupla, 1 ℞. 5 ℞. Dempta 1 ℞ ex 100. reliquus numerus est 100 — 1 ℞. Demptis autem 5 ℞ ex 60. remanent 60 — 5 ℞. eritq. numerus 100 — 1 ℞. ad 60 — 5 ℞. vigecuplus: hoc est, æquatio erit inter 100 — 1 ℞ & 1200 — 100 ℞. Additis 100 ℞ vtrinque, erit æqualitas inter 100 + 99 ℞. & 1200. Ablatisq. 100. vtrinque, inter 99 ℞. & 1100. Diuisis ergo 1100. per 99. fiet 1 ℞. 11 $\frac{11}{99}$. vel $\frac{1100}{99}$. minor

nor numerus, ac proinde maior $\frac{5500}{99}$. vel 55 $\frac{55}{99}$. Prior ex 100. detractus relinquit 88 $\frac{88}{99}$. posterior vero ex 60. subtractus relinquit 4 $\frac{44}{99}$. Habentq. 88 $\frac{88}{99}$. hoc est $\frac{8800}{99}$. ad 4 $\frac{44}{99}$. siue ad $\frac{440}{99}$. proportionem eandem, quam 20. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportione inuenire, ut maiore ex maiore detracto, & minore ex minore; numeri remaneant aequales.* XL.

Sint dati duo numeri 100. & 60. oporteatq. inuenire alios duos in septupla proportione, vt maiore detracto ex 100. & minore ex 60. numeri reliqui sint æquales. Ponantur numeri in proportione septupla, 1 ℞. 7 ℞. eruntq. reliqui numeri 100 — 7 ℞. & 60 — 1 ℞. æquales. Additis ergo vtrinque 7 ℞. erit æquatio inter 100. & 60 + 6 ℞. Et ablatis 60. vtrinque, inter 40. & 6 ℞. Diuisis autem 40. per 6. erit 1 ℞. 6 $\frac{2}{3}$. minor numerus, maior autem huius septuplus, 46 $\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui fiunt numeri æquales 53 $\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportione Geometrica continua inuenire, ut productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter se, aequalis sit reliquo, vel ad ipsum habeat quamlibet proportionem datam.* XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportione tripla, sitq. primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 1 ℞. 3 ℞. 9 ℞. Ex 1 ℞. in 3 ℞. fit numerus 3 ℥. æqualis 9 ℞. Diuisis ergo 9. per 3. fiet 1 ℞. 3. quia numeri Cossici collaterales sunt. Tres ergo numeri quæsiti sunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita vt productus 3 ℥. ad 9 ℞. proportionem habeat quadruplam, hoc est, æquatio fit inter 3 ℥. & 36 ℞. Diuisis ergo 36. per 3. fiet 1 ℞. 12. eruntq. tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rursum productus ad maximum subduplus, ita vt productus 3 ℥. ad 9 ℞. proportionem habeat subduplam: hoc est, æquatio fiat inter 6 ℥. & 9 ℞. Diuisis ergo 9. per 6. fiet 1 ℞ $\frac{3}{2}$. sunt ergo tres numeri tripli $\frac{3}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{27}{2}$. Et ex $\frac{3}{2}$. in $\frac{9}{2}$. fit numerus $\frac{27}{4}$. subduplus ad $\frac{27}{2}$.

IAM vero ex secundo 3 ℞. in tertium 9 ℞. fiat numerus 27 ℥. qui æqualis debeat esse primo, nimirum 1 ℞. Diuisa 1. per 27. fit 1 ℞. $\frac{1}{27}$. Tres ergo numeri tripli sunt $\frac{1}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{9}{27}$. Et ex $\frac{3}{27}$. in $\frac{9}{27}$. fit numerus $\frac{27}{729}$. æqualis primo $\frac{1}{27}$.

At si productus 27 ʒ. ex secundo in tertium debeat ad primum 1 ℞. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27 ʒ. & 3 ℞. Diuisis ergo 3. per 27. fiet 1 ℞. $\frac{1}{9}$. eruntq. tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. $\frac{3}{9}$. $\frac{9}{9}$. Et ex $\frac{3}{9}$. in $\frac{9}{9}$. hoc est, ex $\frac{1}{3}$. in 1. fit $\frac{1}{3}$. qui numerus triplus est primi $\frac{1}{9}$.

POSTREMO ex primo 1 ℞. in tertium 9 ℞. produci debeat numerus æqualis secundo 3 ℞. hoc est, æquatio esse debeat inter 9 ʒ. qui numerus fit ex primo in tertium, & 3 ℞. Diuisis ergo 3. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{1}{3}$. Eruntq. tres numeri tripli $\frac{1}{3}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{3}$. in tertium 3. fit 1. æqualis secundo 1.

Si vero productus ex primo 1 ℞. in tertium 9 ℞. id est, 9 ʒ. debeat habere ad secundum 3 ℞. proportionem sextuplam, erit æquatio inter 9 ʒ. & 18 ℞. Diuisis ergo 18. per 9. fiet 1 ℞. 2. Eruntq. tres numeri tripli, 2. 6. 18. Atque ex 2. in 18. fit numerus 36. sextuplus secundi numeri 6.

XLVII. 47 *Datum numerum partiri in duas partes, vt maiore diuisa per minorem, Quotiens sit datus idem numerus.*

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens item 40. Ponatur minor pars 1 ℞. & maior 40 — 1 ℞. Hac per illam diuisa, fit Quotiens $\frac{40 - 1℞}{1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 40 — 1 ℞. & 40 ℞. Additaq. 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 40. & 41 ℞. Diuisis ergo 40. per 41. fiet 1 ℞. $\frac{40}{41}$. minor pars. Maior proinde erit 39 $\frac{1}{41}$. Qua per illam diuisa, fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur 1 ℞. & minor 40 — 1 ℞. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\frac{1℞}{40 - 1℞}$. æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ℞. & 1600 — 40 ℞. Additisq. 40 ℞ vtrinque, inter 41 ℞. & 1600. Diuisis igitur 1600. per 41. fit maior pars 39 $\frac{1}{41}$. ac proinde minor $\frac{40}{41}$ vt prius.

XLVIII. 48 *Duos numeros inuenire, vt primus cum quolibet multiplici secundi faciat numerum æqualem ei, qui conflatur ex secundo & quouis multiplici primi. Vel vt primus cum data parte secundi tantum faciat, quantum secundus cum data parte primi. Vel denique, vt si primus sumat multiplicem quemcunque secundi, & secundus quemlibet multiplicem primi: Aut si primus accipiat partem datam secundi, & secundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportione.*

Debeat

Debeat primus cum triplo secundi facere tantum; quantum secundus cum quintuplo primi. Ponatur primus 1 ℞. & secundus quiuis numerus, videlicet 50. Ergo 1 ℞ + 150. & 50 + 5 ℞. æquales sunt. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 150. & 50 + 4 ℞. Et rursum ablatis 50. vtrinque, inter 100. & 4 ℞. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1 ℞. 25. Numeri ergo quæsiti sunt 25. & 50. Nam primus 25. cum triplo secundi, hoc est, cum 150. facit 175. quantum secundus 50. cum quintuplo primi, id est, cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundemq. numerum. Ponatur primus 3 ℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione: Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. sine fractione, nimirum 21. Primus igitur cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet 3 ℞ + 3. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 21 + 1 ℞. Est ergo æquatio inter 3 ℞ + 3. & 21 + 1 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 2 ℞ + 3. & 21. Ablatisq. rursum 3. vtrinque, inter 2 ℞. & 18. Diuisis ergo 18. per 2. fiet 1 ℞ 9. Primus igitur positus 3 ℞. erit 27. & secundus 21. vt posuimus. Nam & 27. cum $\frac{1}{7}$. numeri 21. & 21. cum $\frac{1}{3}$ numeri 27. facit 30.

SED iam primus cum quadruplo secundi, & secundus cum triplo primi facere debeant duos numeros in proportione dupla. Ponatur primus 1 ℞. & secundus quiuis numerus, videlicet 6. Primus igitur cum quadruplo secundi faciet 1 ℞ + 24. Secundus vero cum triplo primi faciet 6 + 3 ℞. Si ergo statues 1 ℞ + 24. maiorem, qui duplus debet esse ad 6 + 3 ℞. erit æquatio inter 1 ℞ + 24. & 12 + 6 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 24. & 12 + 5 ℞. Ablatisq. rursum 12. vtrinque, inter 12. & 5 ℞. Diuisis igitur 12. per 5. fiet 1 ℞. $\frac{12}{5}$. id est, 2 $\frac{2}{5}$. primus numerus: secundus vero erit 6. vt positum fuit. Iam primus cum quadruplo secundi facit 26 $\frac{2}{5}$. secundus autem cum triplo primi facit $\frac{66}{5}$. id est, 13 $\frac{1}{5}$. habetq. numerus 26 $\frac{2}{5}$. ad 13 $\frac{1}{5}$. proportionem duplam.

Si vero statues 6 + 3 ℞ maiorem, qui ad 1 ℞ + 24. duplus debet esse, erit æquatio inter 6 + 3 ℞. & 2 ℞ + 48. Et ablatis 2 ℞ vtrinque, inter 6 + 1 ℞ & 48. Ablatisq. rursum 6. vtrinque, inter 1 ℞. & 42. fietq. 1 ℞ 42. primus numerus, secundus autem erit 6. vt posuimus. Primus cum quadruplo secundi facit 66. at vero secundus cum triplo primi facit 132. qui numerus ad 66. proportionem habet duplam.

DENIQVE primus cum $\frac{1}{7}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere debeant duos numeros in sextupla proportione. Ponatur primus 3 ℞. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione, & secundus quilibet numerus habens $\frac{1}{7}$. sine fractione, nimirum 7. Primus ergo cum $\frac{1}{7}$. secundi faciet 3 ℞ + 1. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 7 + 1 ℞. Et quia hi duo numeri debent habere proportionem sextuplam, erit necessario 7 + 1 ℞ maior. Nam si ducatur in 6. vt fiat æqualis numero 3 ℞ + 1. producetur numerus 42 + 6 ℞. qui numero 3 ℞ + 1. æqualis esse nequit. Igitur æquatio erit inter 18 ℞ + 6. & 7 + 1 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 17. ℞ + 6. & 7. Ablatisq. rursum 6. vtrinque, inter

inter 17 ℞. & 1. Diuisa igitur 1. per 17. fiet 1 ℞. $\frac{1}{17}$. Et quia primus numerus positus fuit 3 ℞. erit primus numerus $\frac{3}{17}$. & secundus 7. vt positus fuit. Primus cum $\frac{1}{7}$. secundi facit 1 $\frac{3}{17}$. id est, $\frac{20}{17}$. Secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facit 7 $\frac{1}{17}$. hoc est, $\frac{120}{17}$. qui numerus ad $\frac{20}{17}$. proportionem habet sextuplam.

XLIX. 49 *Datum numerum distribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Sit datus numerus 4665. secandus in 5. numeros continuè sextuplos. Pone 5. numeros in sextupla proportione. 1 ℞. 6 ℞. 36 ℞. 216 ℞. 1296 ℞. Horum summa 1555 ℞. æqualis esse debet dato numero 4665. Diuisis ergo 4665. per 1555. fiet 1 ℞. 3. eruntq. quinque numeri in proportione sextupla continua. 3. 18. 108. 648. 3888. qui simul additi faciunt 4665.

Si secandus sit numerus 20. in tales quinque partes, inuenies 1555 ℞. æquales 20. Diuisisq. 20. per 1555. fiet 1 ℞. $\frac{4}{311}$. Eruntq. quinque partes in proportione sextupla. $\frac{4}{311}$. $\frac{24}{311}$. $\frac{144}{311}$. $\frac{864}{311}$. $\frac{5184}{311}$. facientes summam 20.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua, quorum summa dato cuicunque numero sit æqualis.*

Sint inueniendi 5. numeri in proportione continua sextupla, facientes 4665. vel 20. Hoc ænigma à proximè præcedenti non differt. Nam si summa data secetur in 5. numeros in sextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

LI. 51 *Datum numerum in tres numeros partiri, vt minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam datam.*

Sit datus numerus 445. & minorum differentia 10. & maiorum 20. Ponatur minimus numerus 1 ℞. eritq. medius 1 ℞ + 10. ac maximus 1 ℞ + 30. Horum summa 3 ℞ + 40. æqualis esse debet dato numero 445. Ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3 ℞. & 405. Diuisis igitur 405. per 3. inuenietur 1 ℞. 135. minimus numerus. atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati satisfaciunt, quod summam conficiant 445.

Si datus numerus sit 200. erunt 3 ℞ + 40. æquales 200. & ablatis vtrinque 40. erit æquatio inter 3 ℞. & 160. Diuisisq. 160. per 3. erit 1 ℞. 53 $\frac{1}{3}$. primus numerus, secundus erit 63 $\frac{1}{3}$. & tertius 83 $\frac{1}{3}$. qui habent datos excessus, & conficiunt 200.

Aliter.

Aliter. Ponatur medius 1 ℞. eritq. minimus 1 ℞ — 10. & maximus 1 ℞ + 10. quorum summa 3 ℞ + 10. æqualis esse debet dato numero 445. vel 200. Ablatis 10. vtrinque, erit æquatio inter 3 ℞. & 435. vel 190. Facta diuisione, erit 1 ℞. 145. vel $63\frac{1}{3}$. primus numerus: Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135. 145. 165. In secundo autem, $53\frac{1}{3}$. $63\frac{1}{3}$. $83\frac{1}{3}$. vt prius.

52 *Tres numeros inuenire, vt minorum differentia sit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum numerum conficiant.* LII.

Sit minorum differentia 10. & maiorum 20. eorumq. summa 445. vel 200. Hoc etiam problema non differt a proximè antecedenti. Si namq. data summa distribuatur in tres partes datorum excessuum, factum erit, quod præcipitur.

53 *Datum numerum partiri in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.* LIII.

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cũ medio ad tertium habeat proportionem triplam: tertius vero cum medio ad primum quadruplam. Ponatur primus 1 ℞. Eruntq. alij duo simul 4 ℞. vt ad primum possint habere proportionem quadruplam. Horum ergo summa 5 ℞. æqualis esse debet dato numero 100. Diuisis igitur 100. per 5. fiet 1 ℞. 20. primus numerus, ideoq. alij duo simul, 80. Ponatur deinde tertius 1 ℞. ideoq. medius 80 — 1 ℞. Igitur primus 20. cum medio 80 — 1 ℞. hoc est, 100 — 1 ℞. ad tertium 1 ℞. triplus est, atque idcirco æquatio erit inter 100. — 1 ℞. & 3 ℞. Additaq. vtrinque 1 ℞. inter 100. & 4 ℞. Diuisisq. 100. per 4. fiet 1 ℞. 25. tertius numerus. Medius ergo erit 55. qui relinquitur, detracto tertio 25. ex 80. Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui simul efficiunt 100. & primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25. At tertius cum medio facit 80. numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus sit numerus 60. secandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, sed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam si primus ponatur 1 ℞. erunt alij duo simul, 4 ℞. atque idcirco 5 ℞. æquales 60. dato numero. Diuisis ergo 60. per 5. fiet 1 ℞. 12. primus numerus; ideoq. alij duo facient 48. Rursum si tertius ponatur 1 ℞. facient alij duo simul 9 ℞, vt ad tertium habere possint proportionem noncuplam. Igitur 10 ℞. æquales erunt dato numero 60. Diuisisq. 60. per 10. fiet 1 ℞. 6. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, si tertius 6. ex 48. demeatur. Quo-

circa

circa tres numeri quæsiti erunt 12. 42. 6. qui simul conficiunt 60. Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus est. Tertius vero cum secundo facit 48. qui numerus ad primum 12. quadruplus est.

Sit deinde idem numerus 100. distribuendus in tres, vt tam primus cum secundo ad tertium, quam tertius cum secundo ad primum habeat proportionem triplam. Ponatur primus 1 ℞. & secundus, ac tertius 3 ℞. vt ad primum habeat proportionem triplam. Horum summa 4 ℞. æqualis est 100. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1 ℞. 25. primus numerus; ideoq. secundus, ac tertius facient 75. Ponatur deinde tertius 1 ℞, ideoq. secundus 75 — 1 ℞. Igitur primus cum secundo faciet summam 100 — 1 ℞. triplam ad tertium, id est, ad 1 ℞. siue æqualem 3 ℞. Addita 1 ℞. vtrobique, erit æqualitas inter 100. & 4 ℞. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 1 ℞. 25. tertius numerus, ac proinde secundus erit 50. nimirum 100 — 1 ℞. Itaq. tres numeri erunt 25. 50. 25. Et tam summa primi, & secundi ad tertium, quam summa tertij ac secundi ad primum, proportionem habet triplam.

Si vtraque proportio deberet esse quadrupla, reperirentur tres numeri 20. 60. 20.

LIIII. 54 *Inuenire tres numeros, ita vt primus cum secundo proportionem ad tertium habeat datam. Item tertius cum secundo ad primum datam proportionem habeat: Omnesq. tres conficiant summam datam.*

HOC ænigma a præcedenti diuersum non est. Nam si data summa diuidatur in tres numeros, vt iubetur, expeditum erit ænigma, non aliter, ac præcedens.

LV. 55 *Numerum inuenire, ita vt quadratus ex parte eius aliquota data descriptus, & quadratus alterius cuiusuis partis eius aliquota, conficiant ipsum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.*

Inueniendus sit numerus, ita vt quadratus ex eius semisse descriptus, & quadratus ex eiusdem parte sexta descriptus, efficiant ipsum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam supertripartientem quartas. Ponatur numerus esse 6 ℞. vt sine fractione habeat partes expressas. Eius semissis est 3 ℞. & sexta pars 1 ℞. Harum partium quadrati sunt 9 ℨ & 1 ℨ. qui faciunt 10 ℨ. numerum æqualem 6 ℞. Diuisis ergo 6. per 10. fiet 1 ℞. $\frac{3}{5}$. (quod numeri Cossici collaterales sint,) ac proinde 6 ℞. erunt $\frac{18}{5}$. numerus quæsitus. Semissis eius $\frac{9}{5}$. facit quadratum $\frac{81}{25}$. Et eius

sexta

sexta pars $\frac{1}{3}$. facit quadratum $\frac{1}{27}$. qui cum $\frac{11}{27}$. facit $\frac{12}{27}$. id est, $\frac{4}{9}$. numerum quæsitum.

SED iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam supertripartientem quartas. Ponatur numerus esse $1\,x$. Eius semissis est $\frac{1}{2}\,x$. & sexta pars $\frac{1}{6}\,x$. Quadrati harum partium sunt $\frac{1}{4}$ ʒ. & $\frac{1}{36}$ ʒ. qui simul faciunt $\frac{10}{36}$ ʒ. qui numerus ad $1\,x$. habere debet proportionem octuplam supertripartientem quartas, cuius videlicet denominator est $8\frac{3}{4}$. Hic autem ductus in $1\,x$. facit $8\frac{3}{4}\,x$. cui numero æqualis esse debet numerus $\frac{10}{36}$ ʒ. Diuisis ergo $8\frac{3}{4}$. per $\frac{10}{36}$. fiet $1\,x$. $31\frac{1}{2}$. siue $\frac{63}{2}$. numerus inuentus (quod numeri Cossici collaterales sint.) Eius enim semissis $\frac{63}{4}$. facit quadratum $\frac{3969}{16}$. Et eiusdem sexta pars $\frac{63}{12}$. facit quadratum $\frac{3969}{144}$. qui cum priori quadrato $\frac{3969}{16}$. id est, cum $\frac{35721}{144}$. facit numerum $\frac{39690}{144}$. qui ad inuentum $\frac{63}{2}$. proportionem habet octuplam supertripartientem quartas. quippe cum ille per hunc diuisus Quotientem faciat $8\frac{3}{4}$.

56 ***Datum numerum partiri in duos, vt data pars primi cum secundo tantum faciat, quantum secundi pars alia data cum primo efficit.*** LVI.

Numerus datus 44. secandus sit in duos, vt $\frac{1}{5}$. primi cum secundo, & $\frac{1}{3}$. secundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus $1\,x$, ideoq. secundus $44 - 1\,x$. Quinta pars primi, nimirum $\frac{1}{5}\,x$. cum secundo facit $44 - \frac{4}{5}\,x$. Et tertia pars secundi, nimirum $\frac{44 - 1x}{3}$. cum primo facit $1\,x + \frac{44 - 1x}{3}$. Est ergo æquatio inter $44 - \frac{4}{5}\,x$. & $1\,x + \frac{44 - 1x}{3}$. Ablata $1\,x$. vtrinque, erit æquatio inter $44 - \frac{9}{5}\,x$. & $\frac{44 - 1x}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æqualitatem inter $132 - \frac{27}{5}\,x$. & $44 - 1\,x$. Et additis $\frac{27}{5}\,x$. vtrinque, inter 132. & $44 + \frac{22}{5}\,x$. Ablatisq. 44. vtrinque inter 88. & $\frac{22}{5}\,x$. Diuisis igitur 88. per $\frac{22}{5}$. fiet $1\,x$. 20. primus numerus. Secundus vero erit 24. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum secundo facere 28. quantum scilicet facit tertia pars secundi, nimirum 8, cum primo.

57 ***Duos numeros inuenire, ita vt primus, accepto quolibet numero a secundo, faciat numerum, qui ad reliquum secundi proportionem habeat datam. Item secundus, accepto quolibet etiam numero a primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.*** LVII.

SINT inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. a secundo faciat numerum reliqui secundi quadruplum: At secundus accipiẽs

30. a primo faciat numerum residui primi noncuplum. Ponatur primus 1 ℞. Si igitur accipiat 40. a secundo, habebit 1 ℞ + 40. ac proindè secundo remanent $\frac{1}{4}$ ℞ + 10. vt nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam secundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{4}$ ℞ + 50. Ac proinde si accipiat 30. a primo, habebit $\frac{1}{4}$ ℞ + 80. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad 1 ℞ — 30. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{4}$ ℞ + 80. & 9 ℞ — 270. Additisq. 270. vtrinque, inter $\frac{1}{4}$ ℞ + 350. & 9 ℞. Ablataq. $\frac{1}{4}$ ℞. vtrinque, inter 350. & 8 $\frac{3}{4}$ ℞. Diuisis igitur 350. per 8 $\frac{3}{4}$. fiet 1 ℞. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{4}$ ℞ + 50. Primus igitur 40. accipiens 40. a secundo, habebit 80. qui numerus quadruplus est numeri 20. qui secundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. a primo habebit 90. qui numerus noncuplus est numeri 10. qui primo relinquitur, postquam 30. dederit secundo.

Si inueniendi sint duo numeri, vt primus accipiens 10. a secundo habeat numerũ quintuplũ reliqui secundi, at secundus accipiẽs 5. a primo, habeat numerũ duplũ reliqui primi: inuenies duos numeros 15. & 15. Nam posito primo 1 ℞. si accipiat 10. a secundo, habebit 1 ℞ + 10. qui numerus quintuplus est numeri $\frac{1}{5}$ ℞ + 2. atque hic secundo superest, postquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{5}$ ℞ + 12. Si igitur accipiat 5. a primo, habebit $\frac{1}{5}$ ℞ + 17. qui numerus duplus esse debet numeri 1 ℞ — 5. qui primo superest, postquam dederit 5. secundo. hoc est, æqualitas erit inter $\frac{1}{5}$ ℞ + 17. & 2 ℞ — 10. Additisq. 10. vtrobique, inter $\frac{1}{5}$ ℞ + 27. & 2 ℞. Et si auferatur $\frac{1}{5}$ ℞. vtrobique, inter 27. & 1 $\frac{4}{5}$ ℞. Diuisis igitur 27. per 1 $\frac{4}{5}$. hoc est, per $\frac{9}{5}$. fiet 1 ℞ 15. pro primo numero. Et quia secundus habebat $\frac{1}{5}$ ℞ + 12. erit quoque secundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. quæstioni satisfaciunt. Nam si primus accipiat 10. a secundo, habebit 25. qui numerus quintuplus est reliqui, qui secundo superest, nimirum numeri 5. Secundus vero accipiens 5. a primo, habebit 10. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo superest.

LVIII. 58 *Tres numeros inuenire, vt bini quique faciant tres numeros propositos, dummodo semissis summæ propositorum numerorũ maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus cum secundo efficere 20. secundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes simul faciunt numerum 90. cuius semissis 45. maior est quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod si tertius numerus effectus deberet esse 50. vel maior, res non succederet, quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius semissis esset vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Vt si tertius esset 51. vel 60. essent omnes tres 101. vel 110. cuius semissis 50 $\frac{1}{2}$. vel 55. minor esset tertio 51. vel 60. Sed operatio ipsa probe

probe te docebit, an quæstio possibilis sit, nec ne. Ponatur ergo summa trium numerorum quæsitorum esse 1 ℞. Et quia primus ac secundus conficiunt 20. erit tertius 1 ℞ — 20. Item quia secundus ac tertius faciunt 30. erit primus 1 ℞ — 30. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit secundus 1 ℞ — 40. Hi omnes tres simul cõficiunt 3 ℞ — 90. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quæ posita est 1 ℞. Est ergo æquatio inter 1 ℞. & 3 ℞ — 90. Additisq. 90. vtrinque, inter 1 ℞ + 90. & 3 ℞. Ablataq. 1 ℞. vtrinque, inter 90. & 2 ℞. Diuisis igitur 90 per 2. fiet 1 ℞. 45. summa omniũ trium quæsitorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit 1 ℞ — 30. erit ipse primus 15. Secundus autem erit 5. nimirum 1 ℞ — 40. Ac tertius 25. videlicet 1 ℞ — 20. Itaq. tres numeri ordine inuenti sunt 15. 5. 25. manifestumq. est, primum ac secundum efficere 20. secundum ac tertium 30. tertium denique ac primum 40.

Aliter. Ponatur primus 1 ℞. eritq. propterea secundus 20 — 1 ℞. vt cum primo, nimirum cum 1 ℞. facere possit 20. qui secundus numerus habebitur, si primus 1 ℞. ex 20. demátur. Tertius autem erit 10 + 1 ℞. vt cum secundo, id est, cum 20 — 1 ℞. facere possit 30, habebiturq. hic tertius, si secundus 20 — 1 ℞. dematur ex 30. Iam tertius 10 + 1 ℞. cum primo 1 ℞. facit 2 ℞ + 10. qui numerus æqualis debet esse 40. Demptis igitur 10. vtrinque, erit æquatio inter 2 ℞. & 30. Diuisisq. 30. per 2. fiet 1 ℞. 15. pro primo numero. Secundus ergo 20 — 1 ℞. erit 5. Et tertius 10 + 1 ℞. erit 25. vt prius.

59 *Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propositos; dummodo tertia pars summæ propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.* LIX.

DEBEAT primus, secundus, ac tertius facere 20. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & secundus 27. qui omnes quatuor faciunt 93. cuius numeri pars tertia 31. maior est quam 20. & quam 22. & quam 24. & quam 27. Quod si quartus deberet esse 40. res non succederet, quia omnes quatuor efficerent 106. cuius tertia pars 35 $\frac{1}{3}$. non maior est, quam 40. sed minor. Impossibilitatem porrò quæstionis ipsamet operatio indicabit. Ponatur summa omnium quatuor esse 1 ℞. Et quia primus secundus & tertius faciunt 20. erit quartus 1 ℞ — 20. Eadem ratione erit primus 1 ℞ — 22. Et secundus 1 ℞ — 24. Ac tertius denique 1 ℞ — 27. Hi omnes quatuor faciunt 4 ℞ — 93. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quam posuimus 1 ℞. Est igitur æquatio inter 1 ℞. & 4 ℞ — 93. Additisq. 93. vtrinque, inter 1 ℞ + 93. & 4 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 93. & 3 ℞. Diuisis igitur 93. per 3. fiet 1 ℞. 31. Et quoniam primus fuit inuentus 1 ℞ — 22. erit ipse primus 9. Eademq. de causa, secundus

cundus 7. Tertius 4. & quartus 11. qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo soluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

## SCHOLIVM.

*EADEM arte inuenientur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propositos; dummodo quarta pars summa propositorum numerorum singulis numeris propositis maior sit. Item sex numeri, si tamen quinta pars maior sit, &c. Et sic deinceps quotcunque numeri, si modo pars summa determinata à numero propositorum numerorum, vno minus, maior sit singulis numeris propositis.*

LX. **60** ***Tres numeros inuenire, vt bini quique simul sumpti excedant reliquum dato numero.***

STATVATVR primum & secundum superare tertium 20. vnitatibus: Excessum secundi ac tertij simul supra primum esse 30. vnitatum: Et denique excessum inter tertium ac primum simul, & secundum esse 40. vnitatum. Ponantur omnes tres esse 1 2e. Et quoniam primus & secundus superant tertium 20. vnitatibus; addito communi tertio, a superabunt quoque primus, secundus & tertius simul, tertium duplicatum eisdem 20. vnitatibus: ideoq. omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus cõpositus ex tertio duplicato, & 20. superat quoque tertium duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur a summa omnium trium, quam posuimus 1 2e. auferamus 20. remanebit tertius duplicatus 1 2e — 20. atque idcirco tertius simplex erit $\frac{1}{2}$ 2e — 10. Eadem ratione primus erit $\frac{1}{2}$ 2e — 15. & secundus $\frac{1}{2}$ 2e — 20. Summa ergo omnium trium $\frac{3}{2}$ 2e — 45. æqualis erit summæ omnium trium numerorum quæsitorum, quam posuimus esse 1 2e; ita vt æquatio sit inter 1 2e. & $\frac{3}{2}$ 2e — 45. Additisq. 45. vtrinque, inter 1 2e + 45. & $\frac{3}{2}$ 2e. Ablataq. 1 2e. vtrinque, inter 45. & $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 45. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e 90. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}$ 2e — 15. erit ipse primus 30. Eandemq. ob causam erit secundus 25. & tertius 35. qui tres numeri problema conficiunt.

a 16. pronũc. primi.

Aliter. Ponatur tertius 1 2e. Et quoniam primus ac secundus superant tertium 20. vnitatibus; erunt primus & secundus simul 1 2e + 20. cum hic numerus excedat quoque 1 2e. 20. vnitatibus. Ponatur deinde secundus 25. semissis videlicet summæ 50. ex 20. & 30. collectæ. Cum ergo primus & secundus simul inuenti sint esse 1 2e + 20. si dematur secundus 25. relinquetur primus 1 2e — 5. Quia vero tertius cum primo superare debet secundum 40. vnitatibus; Faciunt autem tertius 1 2e. & primus 1 2e — 5. numerum 2 2e — 5.

qui

qui æqualis erit numero 65. cum hic secundum 25. superet 40. vnitatibus: atque ita æquatio erit inter 2 ℞ — 5 & 65. Additisq. 5. vtrinque, inter 2 ℞. & 70. Diuisis igitur 70. per 2. fiet 1 ℞. 35. tertius numerus. Primus erit 30. nimirum 1 ℞ — 5. Et secundus 25. vt supra.

Aliter. Ponatur primus & secundus simul 1 ℞, eritq. propterea tertius 1 ℞ — 20. vt nimirum primus & secundus simul, id est, 1 ℞. superet tertium 20. vnitatibus: qui tertius habebitur, si ex primo 1 ℞. demantur 20. Ergo omnes tres erunt 2 ℞ — 20. Et quia secundus ac tertius superare debent primum numero 30. addito communi primo, superabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Demptis igitur 30. ex omnibus tribus, id est, ex 2 ℞ — 20. remanebit primus duplicatus 2 ℞ — 50. ideoq. simplex primus 1 ℞ — 25. Primus ergo 1 ℞ — 25. & tertius 1 ℞ — 20. faciunt summam 2 ℞ — 45. quæ ex omnibus tribus, id est, ex 2 ℞ — 20. subtracta relinquet secundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum est proxime, summam 2 ℞ — 45. quæ debet secundum 25. superare numero 40. Si secundus 25. subtrahatur a prædicta summa, relinquetur numerus 2 ℞ — 70. æqualis dicto excessui 40. Additis igitur 70. vtrinque, erit æquatio inter 2 ℞. & 110. Diuisisq. 110. per 2. fiet 1 ℞. 55. Primus ergo numerus 1 ℞ — 25. erit 30. Secundus vero est 25. & tertius 1 ℞ — 20. erit 35. vt prius.

61 *Quatuor numeros inuenire, vt terni quique simul sumpti excedant reliquum dato numero: dummodo semissis summa ex quatuor numeris postulatis collectæ maior sit singulis numeris datis.* LXI.

POSTVLETVR, vt primus, secundus, ac tertius simul excedant quartum 20. vnitatibus: Et secundus, tertius, ac quartus primum 30. vnitatibus: Et tertius, quartus, ac primus secundum 40. vnitatibus: Ac denique quartus, primus ac secundus tertium 50. vnitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri semissis 70. maior est singulis datis. Nam si conditio hæc non adsit, erit quæstio impossibilis. Vt si vltimus excessus detur 90. facient omnes excessus numerum 180. cuius semissis 90. maior non est dato excessu 90. quæstio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 1 ℞. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus; addito communi quarto, a superabunt quoque primus, secundus, tertius ac quartus quartum duplicatum iisdem 20. vnitatibus; ideoq. omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex quarto duplicato, & 20. superat quoque quartum duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur a summa omnium quatuor, quam posuimus 1 ℞. auferantur 20. remanebit quartus duplicatus 1 ℞ — 20. atque adeo quartus simplex erit $\frac{1}{2}$ ℞ — 10. Eadem ratione erit primus $\frac{1}{2}$ ℞ — 15.

a 16. pronūc. primi.

$\frac{1}{2}$ 2e — 15. Et ſecundus $\frac{1}{2}$ — 20. Et tertius $\frac{1}{2}$ 2e — 25. Summa ergo omnium quatuor 2 2e — 70. æqualis erit priori ſummæ omnium quatuor, quam poſuimus 1 2e. ita vt æquatio ſit inter 1 2e. & 2 2e — 70. Additisq. 70. vtrinque, inter 1 2e + 70. & 2 2e. Ablataq. 1 2e vtrinque, inter 70. & 1 2e. Erit igitur 1 2e 70. Cum ergo primus inuentus ſit $\frac{1}{2}$ 2e — 15. erit ipſe primus 20. Eandemq. ob cauſam ſecundus erit 15. Tertius 10. & quartus 25. qui omnes quæſtionem expediunt.

Aliter. Ponatur quartus 1 2e. Et quoniam primus, ſecundus, ac tertius excedunt quartum 20. vnitatibus: Erunt illi tres ſimul 1 2e + 20. cum hic numerus ſuperet 1 2e. ſimiliter 20. vnitatibus. Rurſus quia ſecundus, tertius, & quartus excedunt primum 30. vnitatibus; ponatur ſumma ſecundi ac tertij 25. ſemiſsis videlicet primorum duorum exceſſuum 20. & 30. ſimul. Quia igitur primus, ſecundus, ac tertius faciunt, vt diximus, 1 2e + 20. ſi auferatur ſecundus, ac tertius ſimul, nimirum 25. reliquus erit primus 1 2e — 5. exceditq. ſumma 1 2e + 25. ex ſecundo, tertio, & quarto collecta, primum 1 2e — 5. numero 30. vt patet, ſi primus 1 2e — 5. auferatur ex 1 2e + 25. ſumma ſecundi, tertij, & quarti. Rurſus, quia primus inuentus eſt 1 2e — 5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique poſitus eſt 1 2e. erunt omnes quatuor 2 2e + 20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant ſecundum numero 40. Addito
a 16. pronũc. primi. communi ſecundo, * excedent omnes quatuor ſecundum duplicatũ
eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex ſumma 2 2e + 20. omnium quatuor, relinquetur ſecundus duplicatus 2 2e — 20. ipſeq. ſecundus ſemel ſumptus erit 1 2e — 10. qui ſubtractus ex 25. ſumma ſecundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35 — 1 2e. Quoniam vero quartus, primus, & ſecundus faciunt 3 2e — 15. debentq. ſuperare tertium numero 50. ſuperant autem tertium 35 — 1 2e. numero 4 2e — 50. vt conſtat, ſi tertius 35 — 1 2e. detrahatur ex prædicta ſumma 3 2e — 15. Eſt ergo æquatio inter 4 2e — 50. & 50. Additisq. 50. vtrinque, inter 4 2e. & 100. Diuiſis ergo 100. per 4. fiet 1 2e. 25. Primus ergo 1 2e — 5. erit 20. Secundus 1 2e — 10. erit 15. Tertius 35 — 1 2e. erit 10. Et quartus 1 2e. erit 25. quemadmodum prius.

Aliter. Ponatur ſumma omnium 1 2e. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 1 2e. in duas partes, quarum maior minorem ſuperet numero 20. Maior enim pars erit ſumma priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuiſio autem hæc ita fiet, vt in ſcholio ænigmatis 1. tradidimus. Dematur numerus 20. ex 1 2e. vt reliquus ſit numerus 1 2e — 20. Huius enim ſemiſsis $\frac{1}{2}$ 2e — 10. erit minor pars. Et ſi ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars $\frac{1}{2}$ 2e + 10. Erit ergo quartus numerus $\frac{1}{2}$ 2e — 10. & priores quatuor $\frac{1}{2}$ 2e + 10. Pari ratione, quia ſecundus, tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 1 2e. Reliqui enim numeri 1 2e — 30. ſemiſsis $\frac{1}{2}$ 2e — 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quar-

tus,

tus, & primus superare debent secundum numero 40. si demantur 40. ex 1 ℞. erit reliqui numeri 1 ℞ — 40. semissis $\frac{1}{2}$ ℞ — 20. secūdus numerus. Denique quia quartus, primus, & secundus superare debent tertium numero 50. si tollantur 50. ex 1 ℞. erit reliqui numeri 1 ℞ — 50. semissis $\frac{1}{2}$ ℞ — 25. tertius numerus. Omnes 4. inuenti $\frac{1}{2}$ ℞ — 15. $\frac{1}{2}$ ℞ — 20. $\frac{1}{2}$ ℞ — 25. & $\frac{1}{2}$ ℞ — 10. faciunt summam 2 ℞ — 70. quæ æqualis esse debet summæ omnium, quam posuimus 1 ℞. Est ergo æquatio inter 1 ℞. & 2 ℞ — 70. Additisq. 70. vtrinque, inter 1 ℞ + 70. & 2 ℞. Ablataq. 1 ℞. vtrinque, inter 70. & 1 ℞. eritq. 1 ℞. 70. & $\frac{1}{2}$ ℞ 35. Primus ergo $\frac{1}{2}$ ℞ — 15. erit 20. Secundus $\frac{1}{2}$ ℞ — 20. erit 15. Tertius $\frac{1}{2}$ ℞ — 25. erit 10. Et quartus $\frac{1}{2}$ ℞ — 10. erit 25. veluti prius.

## SCHOLIVM.

*EODEM modo reperientur quinque numeri, vt quaterni quique superent reliquum dato numero; dummodo tertia pars summæ ex quinque postulatis excessibus maior sit singulis numeris. Pari ratione inuenientur sex, si tamen quarta pars maior sit, &c. Atque ita deinceps quotcunque numeri, si modo pars summæ denominata à numero datorum excessuum, minus duobus, maior sit singulis excessibus datis.*

62 *Tres numeros inuenire, quorum maximus medium superet data parte minimi: Medius quoque minimum superet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.* LXII.

SVPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia quoque parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10. vnitatibus. Ponatur minimus 1 ℞ + 10. & medius 3 ℞. Ita enim minimus tertiam medij partem superabit numero 10. Et quoniam medius minimum superare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 3 ℞. minimum 1 ℞ + 10. numero 2 ℞ — 10. vt patet, si subtractio fiat 1 ℞ + 10. ex 3 ℞. Igitur tertia pars maximi erit 2 ℞ — 10. atque idcirco maximus erit 6 ℞ — 30. Rursus quoniam maximus medium superare debet tertia parte minimi: Superat autem maximus 6 ℞ — 30. medium 3 ℞. numero 3 ℞ — 30. qui æqualis erit tertiæ parti minimi: ideoq. minimus erit 9 ℞ — 90. Fuit autem minimus positus 1 ℞ + 10. Est ergo æquatio inter 9 ℞ — 90. & 1 ℞ + 10. Additisq. 90. vtrinque, inter 9 ℞. & 1 ℞ + 100. Ablataq. 1 ℞. vtrinque, inter 8 ℞. & 100. Diuisis ergo 100. per 8. fiet 1 ℞. 12 $\frac{1}{2}$. Igitur minimus 1 ℞ + 10. erit 22 $\frac{1}{2}$. Medius 3 ℞. erit 37 $\frac{1}{2}$. Maximus denique 6 ℞ — 30. erit 45. Nam maximus 45. superat medium 37 $\frac{1}{2}$. numero 7 $\frac{1}{2}$. qui tertia pars est minimi 22 $\frac{1}{2}$. Medius vero 37 $\frac{1}{2}$. superat

rat

rat minimum $22\frac{1}{2}$. numero 15. qui tertia pars est maximi 45. Minimus denique $22\frac{1}{2}$. superat $12\frac{1}{2}$. tertiam partem medij $37\frac{1}{2}$. numero 10. vt propositum est.

QVOD si maximus medium superare debeat semisse minimi; medius minimum quarta parte maximi: Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 1 ℞ + 8. Et medius 3 ℞. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum superare ponitur quarta parte maximi: Superat autem medius 3 ℞. minimum 1 ℞ + 8. numero 2 ℞ — 8. Igitur quarta pars maximi erit 2 ℞ — 8. ac proinde maximus erit 8 ℞ — 32. Rursus quia maximus medium superare debet semisse minimi; Superat autem maximus 8 ℞ — 32. medium 3 ℞. numero 5 ℞ — 32. qui æqualis erit semissi minimi; proptereaq. minimus erit 10 ℞ — 64. Fuit autem idē positus 1 ℞ + 8. Est ergo æquatio inter 10 ℞ — 64. & 1 ℞ + 8. Additisq. 64. vtrinque, inter 10 ℞. & 1 ℞ + 72. Ablataq. 1 ℞. vtrinque,
* inter 9 ℞. & 72. Diuisis ergo 72. per 9. fiet 1 ℞. 8. Ac proinde minimus 1 ℞ + 8. erit 16. Medius vero 3 ℞. erit 24. Maximus denique 8 ℞ — 32. erit 32.

SI quis proponeret, maximum debere superare medium semisse minimi; Medium quoque minimum semisse maximi; Minimum denique semissem medij binario; quæstio esset impossibilis, vt ipsa operatio per Algebram abundè docebit. Ponatur enim minimus 1 ℞ + 2. Et quia debet superare semissem medij binario, erit medius 2 ℞. Quia vero minimum medius superare debet semisse maximi: Superat autem medius 2 ℞. minimum numero 1 ℞ — 2. qui semissis debet esse maximi. Maximus ergo erit 2 ℞ — 4. quod est absurdum, cum medius inuentus sit 2 ℞. maior quam 2 ℞ — 4.

LXIII. *63 Tres numeros inuenire, ita vt si quisque proximè sequenti det datam sui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.*

DET primus secundo tertiam sui partem; Secundus tertio quartam sui partem; Et tertius primo quintam sui partem; Et cum sibi mutuò dictas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 3 ℞. vt tertiam partem habeat sine fractione. Secundus autem, 4. vnitatum, vt quartam partem sine fractione habeat. Si ergo hic secundus 4. accipiat $\frac{1}{3}$. primi 3 ℞. nimirum 1 ℞. atque det $\frac{1}{4}$. nimirum 1. tertio, habebit ipse secundus 3 + 1 ℞. Ac tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur. At primus 3 ℞. si tertiam partem dederit 1 ℞. & acceperit 3 — 1 ℞. tum demum habebit 2 ℞ + 3. vel 3 + 1 ℞. vt patet, si addantur 3 — 1 ℞. ad 2 ℞. quod hæc formula docet. Inuenies autem 3 — 1 ℞. si reliquum primi, nimirum 2 ℞. dempseris ex 3 + 1 ℞. Ergo 3 — 1 ℞. erit quinta pars tertij:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 ℞ | + | 0 |
| — | 1 ℞ | + | 3 |
| + | 1 ℞ | + | 3 |

quan-

quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 2 ℞. facit 3 + 1 ℞. Igitur tertius erit 15 — 5 ℞. qui si dederit primo quintam sui partẽ, hoc est, 3 — 1 ℞. remanebunt illi 12 — 4 ℞. Et si a secundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13 — 4 ℞. qui numerus æqualis esse debet 3 + 1 ℞. quantum scilicet tam primus, quam secundus habet, vt dictum est. Est ergo æquatio inter 13 — 4 ℞. & 3 + 1 ℞. Additisq. 4 ℞. vtrinque, inter 13. & 3 + 5 ℞. Ablatisq. 3. vtrinque, inter 10. & 5 ℞. Diuisisq. 10. per 5. fiet 1 ℞. 2. Ac propterea primus numerus 3 ℞. erit 6. Secundus 4. vt posuimus, & tertius 15 — 5 ℞. erit 5. Si namq. primus 6. dederit tertiam sui partem 2. acceperitq. quintam partem tertij, videlicet 1. habebit 5. Ac tantundem habebit secundus 4. si dederit quartam sui partem 1. tertio, acceperitq. tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. si dederit primo quintam partem, id est, 1. acceperitq. a secundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod est propositum.

QVOD si primus secundo debeat dare $\frac{1}{2}$. Secundus tertio $\frac{1}{4}$. & tertius primo $\frac{1}{3}$. Ponatur primus 2 ℞. vt habeat $\frac{1}{2}$. sine fractione; Secundus autem 4. vt habeat $\frac{1}{4}$. sine fractione. Secundus igitur postquam dederit $\frac{1}{4}$. tertio, sumpseritq. $\frac{1}{2}$. a primo, habebit 1 ℞ + 3. Ac tantundem habere debet primus, postquam dederit $\frac{1}{2}$. secundo, acceperitq. $\frac{1}{3}$. a tertio. At primus, postquam dederit $\frac{1}{2}$. secundo, habebit 1 ℞. reliquam, quæ cum 3. facit 1 ℞ + 3. Est ergo 3. tertia pars tertij, ideoq. tertius erit 9. Reliquum est, vt tertius 9. postquã dederit $\frac{1}{3}$. primo, sumpseritq. $\frac{1}{4}$. a secundo, habeat quoque 1 ℞ + 3. Habebit autem, si imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas est inter 7. & 1 ℞ + 3. Ablatisq. 3. vtrinque, inter 4. & 1 ℞. Igitur 1 ℞. erit 4. ideoq. primus, quem posuimus 2 ℞. erit 8. Secundus 4. & tertius 9. Nam primus 8. si det $\frac{1}{2}$. accipiatq. $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 7. quemadmodum secundus, si det $\frac{1}{4}$. & accipiat $\frac{1}{2}$. primi. Nec non tertius, si det $\frac{1}{3}$. sumatq. $\frac{1}{4}$. secundi. Omnesq. tres numeri faciunt 21. triplum videlicet numeri 7. quem quisque facit. quemadmodum etiã in primo exemplo omnes tres numeri 6.4.5. faciunt 15. triplum scilicet numeri 5. quem quisque facit. In secundo porrò exemplo huius ænigmatis vides, non esse necessarium, vt partes datæ habeant denominatores, qui semper crescant ordine, vt in primo exemplo contigit.

64 *Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quiuis eorum proximè insequenti datam sui partem dederit, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.* LXIIII.

DET primus secundo tertiam sui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam: Et quartus primo sextam. Ac tandem, postquam dederint, acceperintq. dictas partes, fiant 4. numeri æquales. Ponatur primus 3 ꝛe. vt tertiam partem sine fractione habeat. Secundus autem 4. vnitatum, vt quartam partem habeat sine fractione. Si ergo hic secundus accipiat $\frac{1}{3}$. primi 3 ꝛe. nimirũ 1 ꝛe. atque det $\frac{1}{4}$. videlicet 1. tertio, habebit ipse 1 ꝛe + 3. Ac tantundem oportet habere primum, postquam secundo dederit $\frac{1}{3}$. nimirum 1 ꝛe. acceperitq; a quarto partem sextam. Sed si det $\frac{1}{3}$. videlicet 1 ꝛe. supersunt illi 2 ꝛe. quæ cum 3 — 1 ꝛe. constituunt 1 ꝛe + 3. vt ex hac formula colligitur.

| | |
|---|---|
| | 2 ꝛe + 0 |
| — | 1 ꝛe + 3 |
| + | 1 ꝛe + 3 |

Inuenies autem 3 — 1 ꝛe. si 2 ꝛe. tolles ex 1 ꝛe + 3. Ergo sexta pars quarti erit 3 — 1 ꝛe. Et ipse quartus erit 18 — 6 ꝛe. Hic quartus si det $\frac{1}{6}$. remanebunt illi 15 — 5 ꝛe. & si accipiat $\frac{1}{5}$. tertij, debet habere 1 ꝛe + 3. sicut tam primus, quam secundus. Sed si addantur 6 ꝛe — 12. ad 15 — 5 ꝛe. fit 1 ꝛe + 3. vt in hac formula apparet.

| | |
|---|---|
| | 15 — 5 ꝛe |
| — | 12 + 6 ꝛe |
| + | 3 + 1 ꝛe |

Inuenies autem 6 ꝛe — 12. si 15 — 5 ꝛe. demantur ex 1 ꝛe + 3. Igitur $\frac{1}{5}$. tertij erit 6 ꝛe — 12. ipseq; tertius erit 30 ꝛe — 60. Reliquum est iam, tertium hunc habere quoque 1 ꝛe + 3. postquam quarto dederit $\frac{1}{5}$. videlicet 6 ꝛe — 12. acceperitq; $\frac{1}{4}$. secundi 4. At si det $\frac{1}{5}$. supersunt illi 24 ꝛe — 48. Et si acceperit $\frac{1}{4}$. a secundo, nimirum 1. habebit 24 ꝛe — 47. qui numerus æqualis debet esse 1 ꝛe + 3. Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 24 ꝛe. & 1 ꝛe + 50. Ablataq; 1 ꝛe. vtrinque, inter 23 ꝛe. & 50. Diuisis ergo 50. per 23. fiet 1 ꝛe. $\frac{50}{23}$. Quocirca primus numerus 3 ꝛe erit $\frac{150}{23}$. Et secundus 4. siue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30 ꝛe — 60. erit $\frac{120}{23}$. Quartus deniq; 18 — 6 ꝛe. erit $\frac{114}{23}$. qui ænigma conficiunt. Et si abstuleris denominatores, erunt quatuor numeri quæsiti integri 150. 92. 120. 114. propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam ipsæ minutiæ, propter eundem denominatorem, vt ad finem lib. 9. Eucl. demonstrauimus. [a] Et partes in quæstione expressæ ita se habent ad numeros integros, vt ad dictas minutias, quia ita se habet V. g. $\frac{1}{3}$. numeri 12. ad 12. vt $\frac{1}{3}$. numeri 90. ad 90. &c. Itaque si primus 150. det $\frac{1}{3}$. nimirum 50. supererunt 100. & si accipiat $\frac{1}{6}$. quarti 114. nimirum 19. habebit 119. Item si secundus 92. det $\frac{1}{4}$. sui numeri nimirum 23. remanebunt 69. & si accipiat $\frac{1}{3}$. primi 150. nimirum 50. habebit similiter 119. Sic quoque si tertius 120. det $\frac{1}{5}$. sui numeri, hoc est, 24. remanebunt 96. & si accipiat $\frac{1}{4}$. secundi 92. nimirum 23. habebit 119. Denique eodem modo, si quartus 114. det $\frac{1}{6}$. sui numeri, videlicet 19. supererunt 95. & si accipiat $\frac{1}{5}$. tertij 120. nimirum 24. habebit 119.

a 15. quinti.

HIC etiam omnes 4. numeri inuenti 150. 92. 120. 114. efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnusquisque facit.

## SCHOLIVM.

EODEM modo inuenientur 5. numeri, vel plures, ita vt, postquam vnusquisque sequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri aequales, vel plures. Omnesq; simul facient semper summam, quae totius numerum, quem singuli faciunt, continebit, quot sunt ipsi numeri.

*Sint enim inueniendi 5. numeri, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. secundo, acceperitq. $\frac{1}{5}$. a quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{2}$. tertio, acceperitq. $\frac{1}{3}$. a primo: Item tertius dederit $\frac{1}{7}$. quarto, acceperitq. $\frac{1}{2}$. a secundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto, acceperitq. $\frac{1}{7}$. a tertio. Quintus denique dederit $\frac{1}{5}$. primo, acceperitq. $\frac{1}{6}$. a quarto; fiant tandem 5. numeri aequales. Ponatur primus 3 𝔵. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Secundus vero 2. vt habeat $\frac{1}{2}$. sine fractione. Si ergo secundus det $\frac{1}{2}$. tertio, id est, 1. remanebit illi 1. Et si accipiat $\frac{1}{3}$. a primo, numerum 1 𝔵. habebit 1 𝔵 + 1. quem numerum vnusquisque tandem habere debet. Primo autem, si det $\frac{1}{3}$. secundo, supererunt 2 𝔵. quae cum $\frac{1}{5}$. quinti facere debent 1 𝔵 + 1. At 2 𝔵. cum 1 — 1 𝔵. faciunt 1 𝔵 + 1. vt constat, si 2 𝔵. detrahantur ex 1 𝔵 + 1. Igitur quinta pars quinti erit 1 — 1 𝔵. & totus quintus 5 — 5 𝔵. Huic quinto, si det $\frac{1}{5}$. remanebunt 4 — 4 𝔵. quae cum $\frac{1}{6}$. quarti facere debent 1 𝔵 + 1. Faciunt autem 4 — 4 𝔵. cum 5 𝔵 — 3. numerum 1 𝔵 + 1. vt patet, si 4 — 4 𝔵. detrahantur ex 1 𝔵 + 1. Igitur $\frac{1}{6}$. quarti numeri erit 5 𝔵 — 3. totusq. quartus erit 30 𝔵 — 18. Huic quarto si det $\frac{1}{6}$. quinto, supererunt 25 𝔵 — 15. quae cum $\frac{1}{7}$. tertij facere debent 1 𝔵 + 1. Faciunt autem 25 𝔵 — 15. cum 16 — 24 𝔵. numerum 1 𝔵 + 1. vt patet, si 25 𝔵 — 15. demantur ex 1 𝔵 + 1. Igitur 16 — 24 𝔵. erunt $\frac{1}{7}$. tertij numeri, totusq. tertius erit 112 — 168 𝔵. Huic tertio, si det $\frac{1}{7}$. quarto, remanent 96 — 144 𝔵. quae cum $\frac{1}{2}$. secundi, id est, cum 1. facit 97 — 144 𝔵. quae aequalia debent esse 1 𝔵 + 1. Additis 144 𝔵. vtrinque, erit aequatio inter 97. & 145 𝔵 + 1. Ablataq. 1. vtrinque, inter 96. & 145 𝔵. Diuisis igitur 96. per 145. fiet 1 𝔵. $\frac{96}{145}$. Ergo primus numerus positus 3 𝔵. erit $\frac{288}{145}$. Secundus autem positus 2. erit $\frac{290}{145}$. Tertius deinde inuentus 112 — 168 𝔵. erit $\frac{112}{145}$. Quartus deinde, qui inuentus fuit 30 𝔵 — 18. erit $\frac{270}{145}$. Quintus denique inuentus 5 — 5 𝔵. erit $\frac{245}{145}$. Et deletis denominatoribus, erunt quinque numeri inuenti integri. 288. 290. 112. 270. 245. qui problemati satisfaciunt. Nam si datas partes dent, & recipiant, vnusquisque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. summam omnium quinque numerorum inuentorum.*

***65** Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt posterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.* LXV.

SIT numerus 60. distribuendus in duos, ita vt posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 48. Ponatur prior pars 5 𝔵. vt dare possit $\frac{1}{5}$. sine fractione:

ctione: eritq. posterior pars 60 — 5 ℞. quæ si acceperit $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 1 ℞. habebit 60 — 4 ℞. qui numerus æqualis debet esse dato numero 28. Additis igitur 4 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 4 ℞ + 28. Ablatisq. 28. vtrinque, inter 32. & 4 ℞. Diuisis ergo 32. per 4. fiet 1 ℞. 8. Ac propterea prior pars 5 ℞. erit 40. posterior vero 20. quæ si acceperit $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum 8. habebit 28.

## *SCHOLIVM.*

*HOC idem sine Algebra efficietur hoc modo. Dempto numero dato, qui effici debet, a numero dato, qui distribuendus est, diuidatur reliquus numerus per denominatorem partis datæ, minus vno. Quotiens namq. per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum, &c. Vt in dato exemplo, si datus numerus 28. demitur ex diuidendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerum videlicet vnitate minorem denominatore quintæ partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quintæ, producetur prior numerus 40. Posterior ergo erit 20.*

*Si idem numerus 60. secandus sit in duas, ita vt posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiso per 4. fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. facit $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Posterior ergo erit 58 $\frac{3}{4}$. Nam si huic addatur $\frac{1}{5}$. prioris, nimirum $\frac{1}{4}$. conflabitur datus numerus 59.*

LXVI. *66 Duos numeros inuenire, quorum summa æqualis sit dato numero, & posterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.*

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam si summa data secetur in duas partes, vt ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæsiti. Vt si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior numerus cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60. vt dictum est, eruntq. quæsiti numeri 40. & 20.

Si vero inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 59. erit prior numerus 1 $\frac{1}{4}$. posterior autem 58 $\frac{3}{4}$. vt in scholio præcedenti patuit.

LXVII. *67 Tres numeros inuenire, ita vt, cum vnusquisque a summa reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.*

FAC, vt si primus sumat a summa reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Secundus a summa reliquorum duorum $\frac{1}{4}$. Et tertius a summa duorum reliquorum $\frac{1}{5}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 ℞.

summa

summa vero reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Si igitur primus a duobus reliquis accipiat $\frac{1}{3}$. habebit 1 ꝛe + 1. Et quia secundus a summa reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{4}$. debet etiam facere 1 ꝛe + 1. diuidenda erit summa omnium trium, nimirum 1 ꝛe + 3. in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 ꝛe + 1. Posterior enim pars erit secundus numerus, & pars prior summa primi ac tertij. Diuisio autem hæc fiet, vt in scholio ænigmatis 65. docui, hoc modo. Dempto numero 1 ꝛe + 1. qui effici debet, ex summa 1 ꝛe + 3. omnium trium; diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{8}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex summa 1 ꝛe + 3. omnium trium, relinquet partem posteriorem 1 ꝛe + $\frac{1}{3}$. pro secundo numero. Huic enim si addatur $\frac{1}{4}$. prioris partis $\frac{8}{3}$. (quæ est summa primi ac tertij) nimirum $\frac{2}{3}$. fiet numerus 1 ꝛe + 1.

Rursus quia tertius sumens $\frac{1}{5}$. a summa primi & secundi debet etiam facere 1 ꝛe + 1. diuidenda erit summa 1 ꝛe + 3. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 ꝛe + 1. quod ita fiet. Dempto numero 1 ꝛe + 1. qui effici debet, ex summa 1 ꝛe + 3. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintæ, vno minus, hoc est, per 4. Et quotiens $\frac{2}{4}$. vel $\frac{1}{2}$. in denominatorem 5. ducatur. Productus enim numerus $\frac{5}{2}$. erit prior pars, summa videlicet primi ac secundi. quæ pars ablata ex summa 1 ꝛe + 3. omnium trium, reliquam faciet partem posteriorem 1 ꝛe + $\frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{5}$. summæ primi ac secundi, quæ fuit $\frac{5}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. faciet quoque 1 ꝛe + 1. Reliquum iam est, vt omnes tres numeri inuenti 1 ꝛe. 1 ꝛe + $\frac{1}{3}$. 1 ꝛe + $\frac{1}{2}$. conficiant summam 1 ꝛe + 3. omnium trium. Faciunt autem 3 ꝛe + $\frac{5}{6}$. Est ergo æquatio inter 1 ꝛe + 3. & 3 ꝛe + $\frac{5}{6}$. Et ablata 1 ꝛe vtrinque, inter 3. & 2 ꝛe + $\frac{5}{6}$. Ablatisq. $\frac{5}{6}$ vtrinque, inter $2\frac{1}{6}$. & 2 ꝛe. Diuisis igitur $2\frac{1}{6}$. per 2. fiet 1 ꝛe. $\frac{13}{12}$. pro primo numero quæsito, qui positus fuit 1 ꝛe. Secundus, qui inuentus fuit 1 ꝛe + $\frac{1}{3}$. erit $1\frac{5}{12}$. siue $\frac{17}{12}$. Tertius denique, quem inuenimus esse 1 ꝛe + $\frac{1}{2}$. erit $1\frac{7}{12}$. hoc est, $\frac{19}{12}$. Et si neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæsiti integri 13. 17. 19. problema propositum absoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{3}$. secundi & tertij, id est, cum 12. & secundus 17. cum $\frac{1}{4}$. primi & tertij, hoc est, cum 8. & tertius 19. cum $\frac{1}{5}$. primi & secundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem summa trium numerorum inuentorum 49. non est tripla numeri 25. quem vnusquisque facit, quemadmodum in ænigmate 63. fiebat.

68 *Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnusquisque a summa reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri æquales.* LXVIII.

STA-

STATVAMVS, vt si primus sumat $\frac{1}{3}$. summæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{4}$. summæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{5}$. summæ trium reliquorum: Quartus denique $\frac{1}{6}$. summæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1 ℞. & summa aliorum trium numerus 3. habens $\frac{1}{3}$. sine fractione. Primus igitur sumens $\frac{1}{3}$. huius summæ, videlicet 1. faciet 1 ℞ + 1. Et quia secundus cum $\frac{1}{4}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1 ℞ + 1. diuidenda erit summa 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. sicut in præcedenti problemate. Posterior enim pars erit secundus numerus, & prior summa primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in antecedenti problemate pars posterior 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. pro secundo numero.

DEINDE quia tertius sumens $\frac{1}{5}$. summæ primi, secundi, & quarti, debet similiter conficere 1 ℞ + 1. diuidenda rursum erit summa 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cũ $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. Inuenta fuit in præcedenti problemate posterior pars 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. pro tertio numero.

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{6}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1 ℞ + 1. diuidemus summam 1 ℞ + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{6}$. prioris faciat 1 ℞ + 1. quod per scholium ænigmatis 65. ita fiet. Dempto numero 1 ℞ + 1. qui effici debet, ex summa 1 ℞ + 3. omnium quatuor, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{6}$. vno minus, nimirum per 5. & quotiens $\frac{2}{5}$. in ipsum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{12}{5}$. erit prior pars, summa scilicet primi, secundi, ac tertij. quæ pars subtracta ex summa 1 ℞ + 3. omnium quatuor, reliquam faciet partem posteriorẽ 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. Hæc enim cum $\frac{1}{6}$. prioris, hoc est, cum $\frac{2}{5}$. faciet 1 ℞ + 1. Reliquum iam est, vt omnes 4. numeri inuenti 1 ℞. 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. integrent summam 1 ℞ + 3. omnium quatuor. Faciunt aũt 4 ℞ + $\frac{43}{30}$. Est igitur æqualitas inter 1 ℞ + 3. & 4 ℞ + $\frac{43}{30}$. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 3. & 3 ℞ + $\frac{43}{30}$. Ablatisq. $\frac{43}{30}$. vtrinque, inter 1 $\frac{17}{30}$. & 3 ℞. Diuisis ergo 1 $\frac{17}{30}$. siue $\frac{47}{30}$. per 3. fiet 1 ℞. $\frac{47}{90}$. pro primo numero quæsito, quem posuimus esse 1 ℞. Secundus inuentus 1 ℞ + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{231}{270}$. hoc est, $\frac{77}{90}$. Tertius autem inuentus 1 ℞ + $\frac{1}{2}$. erit $\frac{184}{180}$. id est, $\frac{92}{90}$. Quartus denique inuentus 1 ℞ + $\frac{3}{5}$. erit $\frac{505}{450}$. siue $\frac{101}{90}$. Et si abieceris denominatores, inuenti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæstioni satisfaciunt. Nam & primus 47. cum $\frac{1}{3}$. secundi, tertij, & quarti, id est, cum 90. & secundus 77. cum $\frac{1}{4}$. primi, tertij, & quarti, hoc est, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{5}$. primi, secundi, ac quarti, id est, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{6}$. primi, secundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137.

Hic etiam summa quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non est numeri 137. quem vnusquisque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

SCHO-

## SCHOLIVM.

*NON aliter inuenientur 5. numeri, vel 6. vel plures ita vt si vnusquisque a summa reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri æquales.*

***69 Tres numeros inuenire ea lege, vt si vnusquisque proximè insequenti det imperatam sui partem, postquam mutuò dederunt, & acceperunt, singuli habeant eundem numerum datum.*** LXIX.

SINT inueniendi tres numeri, vt si primus det $\frac{1}{3}$. secundo; secundus $\frac{1}{4}$. tertio, & tertius $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In ænigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, nisi quòd tres numeros æquales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, vt hic. Ergo inuentis, per ænigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi ænigmati satisfaciunt; vt inueniantur alij tres implentes conditiones huius ænigmatis: ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates sunt in tribus numeris inuentis, nimirum 6 ℞. 4 ℞. 5 ℞. Si ergo primus 6 ℞. det $\frac{1}{3}$. supererunt 4 ℞. & si a tertio 5 ℞. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5 ℞. qui numerus æqualis debet esse imperato numero 30. Quocirca diuisis 30. per 5. fiet 1 ℞. 6. ac proinde primus 6 ℞. erit 36. secundus 4 ℞. erit 24. & tertius 5 ℞. erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{3}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque secundus 24. dans $\frac{1}{4}$. habebit 18. & recipiens $\frac{1}{3}$. primi, nimirum 12. habebit 30. Ac tandem tertius 30. abijciens $\frac{1}{5}$. habebit 24. & resumens $\frac{1}{4}$. à secundo, nimirum 6. habebit quoque 30. vt alij.

Aliter. Quoniam singuli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæsiti 90. At tres numeri positi 6 ℞. 4 ℞. 5 ℞. faciunt 15 ℞. qui numerus æqualis esse debet numero 90. Diuisis ergo 90. per 15. fiet 1. ℞. 6. veluti prius.

## SCHOLIVM.

*AD eundem modum in ænigmate 64. 67. & 68. determinari poterit numerus, quem singuli conficere debent. Vt si in præcedenti problemate 68. quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inuenti fuerunt* 47. 77. 92. 101. *Ponemus 4. numeros esse* 47 ℞. 77 ℞. 92 ℞. 101 ℞. *facietq. primus cum* $\frac{1}{3}$. *reliquorum trium, nimirum cum* 90 ℞. *numerorum* 137 ℞. *qui æqualis esse debet imperato numero* 100. *Diuisis ergo* 100. *per* 137. *fiet* 1 ℞. $\frac{100}{137}$. *Igitur primus numerus* 47 ℞. *erit* $\frac{4700}{137}$. *Secundus* $\frac{7700}{137}$. *Tertius* $\frac{9200}{137}$. *& quartus* $\frac{10100}{137}$. *qui conditionem proble-*

matis

*matis implent, dummodo denominatores non abyciantur. Nam primus* $\frac{4200}{117}$. *cum* $\frac{1}{3}$. *reliquorum trium, id est, cum* $\frac{7500}{117}$. *facit* $\frac{11700}{117}$. *videlicet* 100. *Sic etiam secundus* $\frac{5700}{117}$. *cum* $\frac{1}{4}$. *reliquorum trium, id est, cum* $\frac{6000}{117}$. *facit* $\frac{11700}{117}$. *hoc est*, 100. *Eundem numerum* 100. *facit tam tertius cum* $\frac{1}{5}$. *reliquorum trium, quam quartus cum* $\frac{1}{6}$. *trium reliquorum.*

PORRO in ænigmate 68. & 67. si vnusquisque numerorum facere debeat certum qnendam numerum determinatum, locum non habebit secunda solutio præsentis ænigmatis 69. quia summa trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non est tripla, vel quadrupla numeri, quem quisque conficit, postquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum est: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt si primus dederit $\frac{1}{7}$. secundo, acceperitq. $\frac{1}{7}$. a quinto. Secundus vero dederit $\frac{1}{5}$. tertio, acceperitq. $\frac{1}{7}$. a primo: Tertius vero dederit $\frac{1}{4}$. quarto, sumpleritq. $\frac{1}{5}$. a secundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{6}$. quinto, acceperitq. $\frac{1}{4}$. a tertio: Quintus denique dederit $\frac{1}{3}$ primo, acceperitq. $\frac{1}{6}$. a quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quisque 1205. vnitates contineat. In scholio ænigmatis 64. inuenti sunt 5. numeri ea conditione, quam hic expressimus, 288. 290. 112. 270. 245. quorum vnusquisque, si imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponantur ergo quinque numeri, 288 ℞. 290 ℞. 112 ℞. 270 ℞. 245 ℞. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnusquisque 241 ℞. vt dictum est, qui numerus æqualis esse debet dato numero 1205. Diuisis igitur 1205. per 241. fiet 1 ℞. 5. Igitur primus numerus positus 288 ℞. erit 1440. Secundus positus 290 ℞. erit 1450. Tertius positus 112 ℞. erit 560. Quartus positus 270 ℞. erit 1350. Quintus denique positus 245 ℞. erit 1225. Nam si imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendes, vnumquemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnusquisque facere debet 1205. erit summa omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri positi 288 ℞. 290 ℞. 112 ℞. 270 ℞. 245 ℞. faciunt summam 1205 ℞. Diuisis igitur 6025. per 1205. fiet 1. ℞. 5. veluti prius.

LXX. 70 ***Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiri ea conditione, vt si quisque proximè sequenti det imperatam sui partem, postquam mutuò dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures æquales.***

HOC ænigma a præcedenti non differt. Nam si datus numerus in tot partes æquales distribuatur, quot in ænigmate exprimuntur;

inue-

inueniendi erunt per ænigma præcedens, eiusq. scholium, (adhibito tamen ænigmate 63. & 64. eiusq. scholio) totidem numeri, qui propositam conditionem seruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit distributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidendus est; quippe cum omnes simul faciant summam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnusquisque inuentorum facere debet, vt dictum est.

V. g. Si numerus 90. distribuendus sit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$. secundo; secundus $\frac{1}{4}$. tertio; & tertius $\frac{1}{5}$. primo; fiant tres numeri æquales: distribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30. 30. 30. ac per ænigma 69. reperiantur tres numeri, vt seruata conditione præscripta; vnusquisque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36. 24. 30. atque in hos distribuendus est datus numerus 90. Nam si præscriptam legem obseruent, faciet vnusquisque 30.

PARI ratione, si numerus 6025. distribuendus sit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{3}$. secundæ; secunda $\frac{1}{2}$. tertiæ; tertia $\frac{1}{7}$. quartæ; quarta $\frac{1}{6}$. quintæ; & quinta $\frac{1}{5}$. primæ, singuli habeãt eundem numerum: distribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1205. 1205. 1205. 1205. 1205. & per scholium præcedentis ænigmatis (adiuuante scholio ænigmatis 64.) inueniendi quinque numeri, vt seruata lege præscripta, vnusquisque faciat 1205. qui quidẽ sunt, vt in proximo scholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos distribuendus est datus numerus 6025.

71 *Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui vtrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem quadratum, minorem vero latus eius quadrati.* LXXI.

SINT dati duo numeri 200. & 5. sitq. numerus, quem quærimus, 1 ℞. Ex 1 ℞. in 200. fit numerus 200 ℞. Et ex 1 ℞ in 5. fit numerus 5 ℞. qui debet latus esse illius: atque adeo in se ductus faciet numerum æqualem 200 ℞. Facit autem numerus 5 ℞. in se 25 ʒ. Est ergo æquatio inter 200 ℞. & 25 ʒ. Diuisis igitur 200. per 25. fiet 1 ℞. 8. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus est numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati sint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{4}{45}$. Nam si ponatur numerus quæsitus 1 ℞. fiunt ex 1 ℞. in 20. & 15. numeri 20 ℞. & 15 ℞. Et ex 15 ℞. in se fit numerus 225 ʒ. qui æqualis debet esse quadrato 20 ℞. Diuisis igitur 20. per 225. fit 1 ℞. $\frac{20}{225}$. siue $\frac{4}{45}$. numerus quæsitus. Hic enim multiplicans 20. & 15. facit $\frac{80}{45}$. siue $\frac{16}{9}$. quadratum, cuius latus est numerus $\frac{60}{45}$. siue $\frac{4}{3}$. productus ex $\frac{4}{45}$. in 15.

LXXII. 72 *Duos numeros inuenire, ita vt summa ex ipsis confecta, & excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum excessus minor sit, quam datæ summæ quadratus.*

SIT eorum summa data 20. & excessus quadratorum datus 80. qui excessus minor est quadrato 400. datæ summæ 20.

Ponatur primus numerus 1 ℞. ideoq. secundus 20 — 1 ℞. vt eorum summa fit 20. Quadrati eorum 1 ℨ. & 400 — 40 ℞ + 1 ℨ. cum ex ductu 20 — 1 ℞. in 20 — 1 ℞. fiat numerus 400 — 40 ℞ + 1 ℨ. vt in hac formula apparet.

$$\begin{array}{r} 20 - 1\ ℞ \\ 20 - 1\ ℞ \\ \hline -\ 20\ ℞ + 1\ ℨ \\ 400 - 20\ ℞ \qquad \\ \hline 400 - 40\ ℞ + 1\ ℨ \end{array}$$

Detracto illo quadrato ex hoc, remanet excessus 400 — 40 ℞. æqualis 80. Additis 40 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 400. & 80 + 40 ℞. Ablatisq. 80. vtrinque, inter 320. & 40 ℞. Diuisis ergo 320. per 40. fiet 1 ℞. 8. primus numerus, secundus vero positus 20 — 1 ℞. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. est 20. & quadratorum 64. & 144. excessus 80.

QVOD si detur eadem summa numerorum 20. & excessus quadratorum 400. qui minor non est quadrato 400. qui ex summa fit: erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 1 ℞. & secundo 20 — 1 ℞. erunt rursus eorum quadrati 1 ℨ. & 400 — 40 ℞ + 1 ℨ. quorum excessus 400 — 40 ℞. æqualis debet esse numero 400. quod fieri non potest.

DETVR rursus summa numerorum 20. & excessus quadratorum item 20. Posito primo numero 1 ℞. & secundo 20 — 1 ℞. erit eorum summa 20. & excessus quadratorum 400 — 40 ℞. æqualis 20. Additis ergo vtrinque 40 ℞. erit æquatio inter 20 + 40 ℞. & 400. Ablatisq. 20. vtrinque, inter 380. & 40. ℞. Diuisis ergo 380. per 40. fiet 1 ℞. $9\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit $10\frac{1}{2}$. quorum summa 20. & excessus quadratorum $\frac{441}{4}$. $\frac{361}{4}$. numerus $\frac{80}{4}$. hoc est, 20.

LXXIII. 73 *Datum numerum in duos diuidere, vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, sit quilibet numerus minor quadrato dati numeri.*

SIT datus numerus 20. diuidendus in duos, vt excessus quadratorum ex ipsis factorum sit 80. Hoc ænigma a præcedenti diuersum non est. Nam si reperiantur duo numeri, quorum summa datus numerus 20. & excessus quadratorum ex ipsis factorum 80. erit summa data 20. in illos duos numeros distribuenda, &c.

***74 Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.*** LXXIIII.

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, & summa quadratorum ex ipsis procreatorum ad summam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞. maior 3 ℞. ad illum triplus. Excessus est 2 ℞. Et quadratorum 1 ℨ. 9 ℨ. summa 10 ℨ. decupla ad 2 ℞. Ergo æquatio est inter 10 ℨ. & 20 ℞. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1 ℞. 2. minor numerus, (quia numeri Cossici collaterales sunt) maiorq. erit 6. Excessus eorum est 4. & summa quadratorum 4. 36. est 40. qui numerus excessus 4. decuplus est.

***75 Duos numeros in data proportione reperire, ita vt excessus quadratorum ipsorum ad excessum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.*** LXXV.

NVMERI quæsiti habeant proportionem triplam, & ad eorum excessum habeat excessus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 1 ℞. maior 3 ℞. illius triplus. Excessus eorum est 2 ℞. Quadratorum 1 ℨ. & 9 ℨ. est 8 ℨ. duodecuplã habens proportionem ad 2 ℞. Igitur æquatio erit inter 8 ℨ. & 24 ℞. Diuisis ergo 24. per 8. fiet 1 ℞. 3. minor numerus (quod collaterales sint numeri Cossici) maiorq. erit 9. Excessus eorum est 6. Et quadratorum 9. & 81. excessus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

***76 Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum summam datam habeat proportionem.*** LXXVI.

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum summam, proportionẽ septuplam. Ponatur minor 1 ℞. maior 4 ℞. illius quadruplus. Summa eorum est 5 ℞. Et ex 1 ℞. in 4 ℞. fit numerus 4 ℨ. qui septuplam proportionem habere debet ad 5 ℞. Ergo æquatio erit inter 4 ℨ. & 35 ℞. Diuisisq. 35. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{35}{4}$. minor numerus quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit $\frac{140}{4}$. Summa eorum est $\frac{175}{4}$. Ex $\frac{35}{4}$. in $\frac{140}{4}$. fit numerus $\frac{4900}{16}$. qui ad $\frac{175}{4}$. proportionem habet septuplam.

LXXVII. 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt numerus ex vno in alterũ procreatus ad eorum excessum datam habeat proportionem.*

HABEANT quæsiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum excessum proportionem septuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 4 ℞. illius quadruplus. Excessus eorum est 3 ℞. Et productus ex 1 ℞. in 4 ℞. est 4 ʒ. qui septuplam habere debet proportionem ad 3 ℞. Ergo æquatio erit inter 4 ʒ. & 21 ℞. Diuisisq. 21. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{21}{4}$. minor numerus: quod numeri Cossici collaterales sint. Maior ergo erit $\frac{84}{4}$. Excessus eorũ est $\frac{63}{4}$. Ex $\frac{21}{4}$. in $\frac{84}{4}$ fit numerus $\frac{1764}{16}$. qui ad $\frac{63}{4}$. proportionem habet septuplam.

LXXVIII. 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita vt quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, sextuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus minoris est 1 ʒ. qui sextuplus esse debet maioris numeri 3 ℞. Ergo æquatio est inter 1 ʒ. & 18 ℞. Diuisisq. 18. per 1. fiet 1 ℞. 18. minor numerus, quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet sextuplam.

LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad Quotientem, si maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamcunque datam.*

HABEANT numeri quæsiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, duplam. Ponantur quæsiti numeri 1 ℞. 4 ℞. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 1 ʒ. quadratus minoris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio fit inter 1 ʒ. & 8. Diuisis 8. per 1. fit 1 ʒ. 8. & 1 ℞. √ʒ 8. minor numerus. Maior ergo erit √ʒ 128. ad √ʒ 8. quadruplus. Diuiso maiore per minorem, fit Quotiens √ʒ 16. id est, 4. ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam. Maior ergo erit 18. Quadratusq. minoris, nimirum 36. ad ipsum minorem 6. habet proportionem sexcuplam.

80 Duos

80 ***Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet.*** LXXX.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum summam. Ponatur minor 1 ℛ. & maior 3 ℛ. illius triplus. Quadratus minoris est 1 ℨ. qui sexcuplam proportionem habere debet ad 4 ℛ. summam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1 ℨ. & 24 ℛ. Diuisisq. 24. per 1. fiet 1 ℛ. 24. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt 24. 72. in proportione tripla. Et quadratus minoris 576. sexcuplam proportionem habet ad 96. summam ex ambobus collectam.

81 ***Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus minoris ad eorum excessum habeat datam proportionem.*** LXXXI.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris sexcuplam ad eorum excessum. Ponatur minor 1 ℛ. & maior 3 ℛ. illius triplus. Excessus illorum est 2 ℛ. ad quem quadratus 1 ℨ. minoris habere debet sexcuplam proportionem. Ita vt æquatio sit inter 1. ℨ. & 12 ℛ. Diuisis ergo 12. per 1. fiet 1 ℛ. 12. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Numeri igitur sunt quæsiti 12. 36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144. ad 24. excessum eorum sexcuplus est.

82 ***Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.*** LXXXII.

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, sexcuplam. Ponatur minor 1 ℛ. & maior 3 ℛ. illius triplus. Quadratus maioris 9 ℨ. ad minorem 1 ℛ. proportionem habere debet sexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9 ℨ. & 6 ℛ. Diuisisq. 6. per 9. fiet 1 ℛ. $\frac{6}{9}$. siue $\frac{2}{3}$. quod numeri Cossici sint collaterales. Numeri ergo quæsiti sunt $\frac{2}{3}$. $\frac{6}{3}$. proportionem habentes triplam. Et quadratus maioris, nimirum $\frac{36}{9}$. proportionem sexcuplam habet ad minorem $\frac{2}{3}$ siue ad $\frac{6}{9}$.

83 ***Duos numeros in data proportione inuenire, vt quadratus maioris ad Quotientem, diuiso maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.*** LXXXIII.

HA-

HABEANT quæſiti numeri proportionem quadruplam, at quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, duplā. Ponantur numeri quæſiti 1 ℞. 4 ℞. Diuiſo hoc per illum, fit Quotiens 4. ad quem 16 ℨ. quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita vt æquatio ſit inter 16 ℨ. & 8. Diuiſis 8. per 16. fit 1 ℨ. $\frac{1}{2}$. & 1 ℞. √ℨ $\frac{1}{2}$. minor numerus. Maior ergo erit √ℨ 8. illius quadruplus. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens √ℨ 16. id eſt, 4. ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

LXXXIIII. ***84 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum ſummam habeat datam proportionem.***

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Quadratus maioris 9 ℨ. ſexcuplus eſſe debet ad eorum ſummam 4 ℞. Eſt igitur æquatio inter 9 ℨ. & 24 ℞. Diuiſisq. 24. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{24}{9}$. vel $\frac{8}{3}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ac proinde numeri quæſiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{8}{3}$. $\frac{24}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{576}{9}$. ſexcuplus eſt ad $\frac{32}{3}$. eorum ſummam: hoc eſt, ad $\frac{96}{9}$.

LXXXV. ***85 Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt quadratus maioris ad eorum exceſſum habeat proportionem datam.***

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum exceſſum, decuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Exceſſus eorum eſt 2 ℞. ad quem quadratus maioris 9 ℨ. decuplus eſſe debet. Eſt igitur æquatio inter 9 ℨ. & 20 ℞. Diuiſisq. 20. per 9. fiet 1 ℞. $\frac{20}{9}$. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri ergo quæſiti ſunt $\frac{20}{9}$. $\frac{60}{9}$. in proportione tripla. Exceſſus eorum eſt $\frac{40}{9}$. ad quem decuplus eſt quadratus maioris $\frac{3600}{81}$. ſiue $\frac{400}{9}$.

LXXXVI. ***86 Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita vt omnium trium duo quicunque ſimul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros conſtituant in exceſſu æquali, hoc eſt, Arithmeticè proportionales.***

DATI duo numeri ſint 3. & 5. ponaturq. tertius inuentus 1 ℞. Hic cum 3. facit 1 ℞ + 3. quæ ſumma ducta in reliquum 5. facit 5 ℞ + 15. vnum numerum. Deinde 1 ℞. cum 5. facit 1 ℞ + 5. quæ

ſumma

summa ducta in reliquum 3 facit 3 ℞ + 15. alterum numerum. Denique ex 3. & 5. fit numerus 8. qui ductus in tertium 1 ℞. facit 8 ℞. tertium numerum. Opus est iam, hos tres numeros 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. & 8 ℞. esse Arithmeticè proportionales. quod tribus modis fieri potest. Aut enim maximus est 5 ℞ + 15. & medius 3 ℞ + 15. & minimus 8 ℞. Aut maximus erit 5 ℞ + 15. medius 8 ℞. & minimus 3 + 15 ℞. Aut denique maximus erit 8 ℞. medius 5 ℞ + 15. & minimus 3 ℞ + 15. neque enim maximus esse potest 3 ℞ + 15. cum minor sit, quam 5 ℞ + 15.

SINT primum 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. 8 ℞. Arithmeticè proportionales. Igitur (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmeticè proportionalium diximus) summa extremorum 13 ℞ + 15. aequalis erit duplo medij, hoc est, numero 6 ℞ + 30. Ablatisq. 6 ℞ vtrinque, aequatio erit inter 7 ℞ + 15 & 30. Ablatisq. rursum 15 vtrinque, inter 7 ℞, & 15. Diuisis ergo 15. per 7. fiet 1 ℞. $\frac{15}{7}$. numerus quaesitus. Vel si dicti tres numeri sunt Arithmeticè proportionales, habebunt eundem excessum. Sed 5 ℞ + 15. excedit 3 ℞ + 15. numero 2 ℞. Et 3 ℞ + 15. excedit 8 ℞ numero 15 — 5 ℞. vt ex regula subtractionis patet. Est ergo aequalitas inter 2 ℞ & 15 — 5 ℞. Additisq. 5 ℞ vtrinque, inter 7 ℞ & 15. fietq. rursus 1 ℞. $\frac{15}{7}$. Iam $\frac{15}{7}$. cum 3 faciunt 3 $\frac{15}{7}$. hoc est, $\frac{36}{7}$. qui numerus ductus in reliquum 5 facit $\frac{180}{7}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{7}$. & 5 fit summa 5 $\frac{15}{7}$. hoc est, $\frac{50}{7}$. quae ducta in 3. reliquum numerum facit $\frac{150}{7}$. numerum medium. Denique ex 3 & 5. fit summa 8. quae ducta in reliquum numerum $\frac{15}{7}$. facit $\frac{120}{7}$. tertium numerum. Habentq. hi tres numeri $\frac{180}{7}$. $\frac{150}{7}$. $\frac{120}{7}$. eundem excessum $\frac{30}{7}$. siue 4 $\frac{2}{7}$.

SINT deinde 5 ℞ + 15. 8 ℞. 3 ℞ + 15. Arithmeticè proportionales. Igitur summa extremorum 8 ℞ + 30. aequalis erit duplo medij, numero videlicet 16 ℞. Ablatisq. 8 ℞ vtrinque, aequatio erit inter 30. & 8 ℞. Diuisisq. 30 per 8. fiet 1 ℞. $\frac{30}{8}$. hoc est $\frac{15}{4}$. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 5 ℞ + 15. & 8 ℞. excessus 15 — 3 ℞. At inter 8 ℞. & 3 ℞ + 15. excessus est 5 ℞ — 15. Est ergo aequatio inter 15 — 3 ℞. & 5 ℞ — 15. Additisq. 15 vtrinque, inter 30 — 3 ℞. & 5 ℞. Additisq. rursum 3 ℞ vtrinque, inter 30 & 8 ℞. fietq. rursum 1 ℞. $\frac{30}{8}$. siue $\frac{15}{4}$. Iam ex $\frac{15}{4}$. & 3. fit summa 3 $\frac{15}{4}$. siue $\frac{27}{4}$. quae ducta in reliquū numerum 5 facit $\frac{135}{4}$. primum numerum. Deinde ex $\frac{15}{4}$. & 5 fit summa 5 $\frac{15}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. quae ducta in reliquum numerum 3 facit $\frac{105}{4}$. numerum tertium. Denique ex 3 & 5 fit summa 8. quae ducta in reliquum numerum $\frac{15}{4}$. facit $\frac{120}{4}$. medium numerum. Habentq. hi tres numeri, $\frac{135}{4}$. $\frac{120}{4}$. $\frac{105}{4}$. eundem excessum $\frac{15}{4}$. siue 3 $\frac{3}{4}$.

POSTREMO sint 8 ℞. 5 ℞ + 15. 3 ℞ + 15. Arithmeticè proportionales. Igitur summa extremorum 11 ℞ + 15. aequalis erit duplo medij, hoc est, numero 10 ℞ + 30. Ablatisq. 10 ℞. vtrinque, aequatio erit inter 1 ℞ + 15. & 30. Ablatisq. rursum 15 vtrinque, inter 1 ℞. & 15. fietq. 1 ℞. 15. numerus quaesitus. Vel dicti

tres

tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 8 ℞. & 5 ℞ + 15. excessus 3 ℞ − 15. At inter 5 ℞ + 15. & 3 ℞ + 15. excessus est 2 ℞. Est ergo æqualitas inter 3 ℞ − 15. & 2 ℞. Additisq. 15. vtrinque, inter 3 ℞. & 2 ℞ + 15. Ablatisq. 2 ℞. vtrinque, inter 1 ℞. & 15. fietq. rursus 1 ℞. 15. numerus quæsitus. Iam ex 15. & 3. fit summa 18. quæ ducta in reliquum nummerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15. & 5. fit summa 20. quæ ducta in reliquum numerum 3. facit 60. tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum. Habentq. tres hi numeri 120. 90. 60. eundem excessum 30.

HOC quæsitum soluemus etiam in ænigmate 131. vbi dabuntur duo numeri, ita vt tres numeri producti non possint tribus modis esse proportionales Arithmeticè, vt hic, sed duobus tantum modis.

LXXXVII. 87 ***Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad eorum summam habeat proportionem datam.***

HABEANT quæsiti numeri proportionem triplam, & excessus quadratorum ad summam eorum, octuplam. Ponatur minor 1 ℞. & maior 3 ℞. illius triplus. Summa eorum est 4 ℞. & excessus quadratorum 1 ȝ. 9 ȝ. est 8 ȝ. qui ad 4 ℞. proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter 8 ȝ. & 32 ℞. Diuisisq. 32. per 8. fiet 1 ℞. 4. minor numerus: propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Maior autem erit 12. Excessus quadratorum 16. 144. est 128. qui ad 16. amborum summam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII. 88 ***Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, superet datum excessum quouis numero dato: dummodo quadratus excessus numerorum quæsitorum dati minor sit summa ex eodem excessu, & postulato numero collecta.***

SIT excessus numerorum quæsitorum 7. excessus autem quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, maior sit, quam 7. postulato numero 100. Ponatur minor numerus 1 ℞. maior 1 ℞ + 7. vt nimirum illum superet numero 7. Quadrati horum numerorum 1 ȝ. & 1 ȝ + 14 ℞ + 49. se mutuo excedunt numero 14 ℞ + 49. qui superare debet 7. numero 100. hoc est, æqualitas esse debet inter 14 ℞ + 49. & 107. Ablatisq. 49 vtrinque, inter 14 ℞. & 58. Diuisis ergo 58 per 14. fiet 1 ℞. 4 $\frac{1}{7}$. minor numerus; maior ergo erit 11 $\frac{1}{7}$. vt minorem superet numero 7. Quadrati numerorum

$\frac{841}{49}$. $\frac{6084}{49}$. se mutuo excedunt numero $\frac{5243}{49}$. qui datum numerorum excessum 7. superat numero 100. hoc est, æqualis est numero 107. cum 107. faciant $\frac{5243}{49}$.

HAEC quæstio solui potuit, quia quadratus dati excessus 7. nimirum numerus 49. minor est summa 107. ex dato excessu 7. & numero postulato 100. collecta. Quod si proponantur inueniendi duo numeri in dato excessu 7. ita vt excessus quadratorum ipsorum maior sit, quam 7. numero 10. quæstio erit impossibilis. quod optime ex ipsa operatione disces. Posito enim minore numero 1 ℞. & maiore 1 ℞ + 7. vt se mutuò superent septenario. Quadrati horum numerorum rursum se excedunt numero 14 ℞ + 49. qui superare debet 7. numero 10. quod est absurdum, cum illum superet numero 14 ℞ + 42. qui maior est, quam 7. Causa est, quia quadratus 49. excessus 7. minor non est summa 17.

*89 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum datum datam habeat proportionem, & insuper contineat datum numerum, dummodo quadratus dati excessus minor sit summa, quæ ex numero, qui ex ductu denominatoris datæ proportionis in ipsum excessum fit, & ex dato numero colligitur.* LXXXIX.

DATVS excessus sit 4. & excessus quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, ad 4. habeat proportionem quintuplam, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior 1 ℞ + 4. vt illum quaternario superet. Quadratorum 1 ℨ. & 1 ℨ + 8 ℞ + 16. est 8 ℞ + 16. qui quinquies continere debet datum excessum 4. & præterea 20. Quintuplum autem excessus 4. cum 20, facit 40. cui numero æqualis esse debet excessus quadratorum 8 ℞ + 16. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & 8 ℞. Diuisisq. 24. per 8. fiet 1 ℞. 3. minor numerus. maior ergo erit 7. Eorum excessus 4. Quadratorum 9. 49. excessus 40. continet excessum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HAEC etiam quæstio solui potuit, quia quadratus 16. dati excessus 4. minor est summa ex quintuplo excessus 4. & numero 20. collecta. Quòd si excessus detur 4. & proportio tripla, & insuper 3. vnitates. quæstio fiet impossibilis. quod facile ex ipsa operatione cognoscetur. Posito enim minore numero 1 ℞. & maiore 1 ℞ + 4. erit excessus quadratorum 8 ℞ + 16. qui æqualis debet esse summæ ex triplo excessus 4. & numero 3. collecta, hoc est, numero 15. quod est absurdum. Causa est, quia quadratus 16. excessus 4. non est minor numero 15.

XC. 90 ***Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos distribuere.***

HOC ænigma sine Algebra soluimus lib. 8. nostræ Geometriæ practicæ, propos. 9. vbi propositum quadratum numerum non in duos solum, sed in quotuis numeros quadratos partiti sumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus 1 ℨ. ac proinde secundus 16 — 1 ℨ. Finge huius latus esse quotcunque radices, minus tot vnitatibus, quot sunt in latere dati quadrati, nimirum 2 ℞ — 4. Huius quadratum 4 ℨ + 16 — 16 ℞. æquale debet esse quadrato 16 — 1 ℨ. Addito 1 ℨ. vtrinque, erit æquatio inter 5 ℨ + 16 — 16 ℞. & 16. Additisq. rursum 16 ℞. inter 5 ℨ + 16. & 16 ℞ + 16. Ablatisq. 16 vtrinque, inter 5 ℨ & 16 ℞. Diuisis igitur 16 per 5. fiet 1 ℞. $\frac{16}{5}$. quia numeri Cossici collaterales sunt. Huius radicis quadratus $\frac{256}{25}$. erit primus, quem posuimus 1 ℨ. Secundus autem 16 — 1 ℨ. erit $\frac{144}{25}$. cuius radix $\frac{12}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{25}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati esse 1 ℞. Latus vero secundi quadrati quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum 5 ℞ — 4. Quadrati numeri horum laterum 1 ℨ. & 25 ℨ + 16 — 40 ℞. simul æquales debent esse dato quadrato 16. Additis 40 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 26 ℨ + 16. & 40 ℞ + 16. Ablatisq. 16. vtrinque, inter 26 ℨ. & 40 ℞. Diuisis ergo 40. per 26. fiet 1 ℞ $\frac{20}{13}$. (quod numeri Cossici sint collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{169}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{2704}{169}$. qui relinquitur, si ille ex 16. detrahatur. Eius latus est $\frac{48}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{2704}{169}$. hoc est, 16.

## *S C H O L I V M.*

*QVOD si minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuisus erit datus quadratus in tres. Et si minimus rursum secetur in duos, sectus erit datus in quatuor. Atque ita deinceps in infinitum. Vides ergo propositum quadratum diuidi posse per Algebram in duos quadratos varijs modis: ita vt semper fiant diuersi duo quadrati.*

*HOC problema solui etiam potest sine Algebra, hoc modo. Proposito quadrato, ducatur eius latus in quemcunque numerum, & duplum producti numeri diuidatur per eiusdem illius numeri quadratum auctum vnitate. Quotientis enim quadratus erit vnus quadratus quæsitus, quo ablato ex proposito quadrato, relinquetur alter quadratus.*

*Vt si propositus sit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiusdem numeri 3. auctum*

*vnitate,*

*vnitate, nimirum per 10. Quotientis enim $\frac{36}{10}$. siue $\frac{18}{5}$, quadratus $\frac{324}{25}$. id est, 12 $\frac{24}{25}$. erit vnus quadratus, quo ablato ex 36. erit alter 23 $\frac{1}{25}$. cuius latus $\frac{24}{5}$. siue 4 $\frac{4}{5}$. & ambo quadrati 12 $\frac{24}{25}$. & 23 $\frac{1}{25}$. faciunt 36.*

*Nota tamen, latus propositi quadrati non esse ducendum per 1. quia duo quadrati essent propositus quadratus, & 0. quod est ineptum. Vt si 6. latus propositi quadrati 36. duceretur in 1. vt fiant 6. & huius producti numeri duplum 12. divideretur per 2. nimirum per quadratum vnitatis auctum vnitate, fieret Quotiens 6. cuius quadratum est 36. numerus propositus, &c.*

## 91 *Datum numerum ex duobus quadratis compositum in alios duos quadratos diuidere.* XCI.

SIT numerus 34. siue quadratus, siue non quadratus, compositus ex duobus quadratis 9. & 25. diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3. & 5. ponaturq́; latus primi quadrati quæsiti 1 ꝛ + 3. nimirum vna radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero secundi quadrati quæsiti, quotcunque radices minus latere secundi quadrati dati, nimirum 2 ꝛ — 5. Quadrati horum laterum 1 ʒ + 6 ꝛ + 9. & 4 ʒ — 20 ꝛ + 25. faciunt summam 5 ʒ + 34 — 14 ꝛ. æqualem dato numero 34. Additis ergo 14 ꝛ vtrinque, erit æquatio inter 5 ʒ + 34. & 14 ꝛ + 34. Ablatisq; 34 vtrinque, inter 5 ʒ. & 14. ꝛ. Diuisis igitur 14. per 5. fiet 1 ꝛ. $\frac{14}{5}$. propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Ergo latus primi quadrati quæsiti, quod posuimus 1 ꝛ + 3. erit $\frac{29}{5}$. Secundi vero quadrati latus, quod posuimus 2 ꝛ — 5. erit $\frac{28}{5}$ — 5. hoc est, $\frac{3}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{841}{25}$. $\frac{9}{25}$. faciunt $\frac{850}{25}$. hoc est, numerum 34. datum.

## 92 *Duos numeros quadratos in dato excessu inuenire.* XCII.

DETVR excessus 70. Ponatur latus vnius quadrati 1 ꝛ. alterius vero latus 1 ꝛ. plus quotlibet vnitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipsis descriptus minor sit dato excessu, nimirum 1 ꝛ + 8. Quadrati horum laterum 1 ʒ. & 1 ʒ + 16 ꝛ + 64. excessum habent 16 ꝛ + 64. qui æqualis esse debet dato excessui 70. Ablatis vtrobique 64. erit æquatio inter 16 ꝛ. & 6. Diuisis ergo 6. per 16. fiet 1 ꝛ $\frac{3}{8}$. latus vnius quadrati. Latus alterius positum 1 ꝛ + 8. erit 8 $\frac{3}{8}$. siue $\frac{67}{8}$. Quadrati horum laterum inuentorum sunt $\frac{9}{64}$. & $\frac{4489}{64}$. quorum excessus $\frac{4480}{64}$. hoc est, 70.

MANIFESTVM autem est, alios atque alios duos numeros quadratos posse reperiri in dato eodem excessu, prout numerus absolutus in secundi quadrati radice alius atque alius assumetur. Vt dato eodem excessu 70. si latus primi quadrati ponatur 1 ꝛ. & secundi 1 ꝛ + 1. erunt quadrati 1 ʒ. & 1 ʒ + 2 ꝛ + 1. & eorum excessus 2 ꝛ + 1. qui æqualis debet esse dato excessui 70. Ablata 1.

vtrinque, erit æqualitas inter 2 ℞. & 69. Diuisis igitur 69. per 2. fiet 1 ℞. $34\frac{1}{2}$. siue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus est $\frac{4761}{4}$. siue $1190\frac{1}{4}$. Latus autem secundi quadrati, quod posuimus 1 ℞ + 1. erit $35\frac{1}{2}$. siue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus est $\frac{5041}{4}$. siue $1260\frac{1}{4}$. qui priorem $1190\frac{1}{4}$. superat numero 70.

SI excessus detur 100. ponaturq. latus primi quadrati 1 ℞. & latus secundi 1 ℞ + 10. vbi quadratus numeri 10. non est minor excessu dato 100. sed æqualis, erit quæstio impossibilis. Nam quadrati 1 ʒ. & 1 ʒ + 20 ℞ + 100. excessum habent 20 ℞ + 100. qui æqualis debet esse dato excessui 100. quod absurdũ est, cum sit maior.

XCIII. *93 Duos numeros inuenire, quorum quadrati se excedant dato numero.*

HOC ænigma soluitur, vt præcedens. Positis enim duobus lateribus, vt in præcedenti, inuenientur duo latera, quorum quadrati datum excessum habebunt.

XCIIII. *94 Duos numeros quadratos inuenire, quorum summa quadratus sit numerus.*

ASSVMATVR quilibet quadratus pro vno quæsitorum, nimirũ 16. Et per problema 92. inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus 16. quadratus assumptus. Nam minor quadratus inuentus cum assumpto 16. faciet alterum quadratum inuentum maiorem. Ponatur ergo vt in dicto problemate factum est, latus vnius quadrati 1 ℞. & alterius 1 ℞ + 3. (vt nimirum quadratus numeri 3. minor sit dato excessu 16.) Quadrati horũ laterum 1 ʒ. & 1 ʒ + 6 ℞ + 9. excessum habent 6 ℞ + 9. qui æqualis esse debet dato excessui 16. Ablatis 9. vtrobique, erit æquatio inter 6 ℞. & 7. Diuisis ergo 7. per 6. fiet 1 ℞ $\frac{7}{6}$. latus minoris quadrati quæsiti. Latus maioris, quod posuimus 1 ℞ + 3. erit $3\frac{7}{6}$. id est, $\frac{25}{6}$. Quadrati laterũ $\frac{7}{6}$. & $\frac{25}{6}$. sunt $\frac{49}{36}$. & $\frac{625}{36}$. quorum excessus $\frac{576}{36}$. hoc est, 16. Duo ergo quadrati quæsiti sunt 16. siue $\frac{576}{36}$. & $\frac{49}{36}$. quorum summa $\frac{625}{36}$. quadratus numerus est, latus habens $\frac{25}{6}$.

Abiectis denominatoribus, erunt inuenti duo quadrati integri 576. & 49. facientes quadratum 625. cuius latus 25.

XCV. *95 Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus quadratus sit.*

HOC ænigma non aliter soluetur, ac problema 92. Si namq. inueniantur per illud duo quadrati, quorum excessus datus sit numerus quadratus, factum erit, quod hic iubetur.

*96 Tres*

96 *Tres numeros quadratos inuenire, quorum summa sit numerus quadratus.* XCVI.

PER problema 94. inueniantur primum duo quadrati, quorum summa sit quadratus numerus, sintq. V.g. hi 576. 49. facientes quadratum 625. Deinde per problema 95. inueniantur alij duo quadrati, quorum excessus sit quadratus effectus 625. Nam minor inuentus cum quadrato 625. hoc est, cum duobus quadratis 576. 49. faciet maiorem quadratum. V.g. Dato excessu quadrato 625. inuenientur duo quadrati in illo excessu, hoc modo. Ponatur latus vnius 1 ℞ & alterius 1 ℞ + 10. (vt nimirum quadratus 10. vnitatũ minor sit dato excessu 625.) Quadrati horum laterum 1 ʒ. & 1 ʒ + 20 ℞ + 100. excessum habent 20 ℞ + 100. qui æqualis esse debet dato excessui 625. Ablatis ergo 100. vtrobique, erit æquatio inter 20 ℞. & 525. Diuisisq. 525. per 20. fiet 1 ℞ 26 $\frac{1}{4}$. Latus minoris quadrati. Maioris vero latus, quod positum fuit 1 ℞ + 10. erit 36 $\frac{1}{4}$. Horum laterum quadrati $\frac{11025}{16}$. $\frac{21025}{16}$. excessum habent $\frac{10000}{16}$. hoc est, 625. quadratum. Hic igitur excessus, nimirum $\frac{10000}{16}$. ex duobus quadratis 576. 49. conflatus cum minore quadrato $\frac{11025}{16}$. componet maiorem quadratum $\frac{21025}{16}$. Atque ita tres quadrati quæsiti sunt 576. 49. $\frac{11025}{16}$. siue $\frac{9216}{16}$. $\frac{784}{16}$. $\frac{11025}{16}$. qui simul efficiunt quadratum $\frac{21025}{16}$. cuius latus est $\frac{145}{4}$.

Si abijciantur denominatores, erunt inuenti tres quadrati integri 9216. 784. 11025. quorum summa quadratus numerus est 21025. cuius latus 145.

## SCHOLIVM.

*ATQVE eadem arte inuenientur 4. quadrati efficientes numerum quadratum, si prius per hoc problema inueniantur tres. Deinde per problema 95. duo habentes excessum, illum quadratum ex tribus quadratis confectum. Pari ratione inuenientur 5. 6. 7. & quotquot quis voluerit, si videlicet prius inueniantur 4. vel 5. vel 6. &c.*

97 *Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.* XCVII.

PONATVR latus quadrati ex duobus numeris quæsitis conflati, vna radix, plus quotcunque vnitatibus, nimirum 1 ℞ + 4. cuius quadratum 1 ʒ + 8 ℞ + 16. æquale debet esse duobus numeris quæsitis. Si ergo vnus numerorum ponatur $\frac{1}{2}$ ʒ. erit alter $\frac{1}{2}$ ʒ + 8 ℞ + 16. qui duo simul faciunt dictum quadratum 1 ʒ + 8 ℞ + 16. Reliquum est, vt $\frac{1}{2}$ ʒ. subtractus ex $\frac{1}{2}$ ʒ + 8 ℞ + 16. relinquat

etiam

etiam numerum quadratum. Ergo reliquus numerus 8 ꝝ + 16. æqualis erit alicui quadrato, qui V.g. sit 36. maior, quam 16. numerus absolutus. Ablatis igitur 16. vtrobique, erit æqualitas inter 8 ꝝ. & 20. Diuisisq. 20. per 8. fit 1 ꝝ. $\frac{20}{8}$. siue $\frac{5}{2}$. cuius quadratus est $\frac{25}{4}$. Cum ergo vnus numerorum, qui quæruntur, positus sit 1 ʒ. erit is $\frac{25}{4}$. primus numerus quæsitus. Secundus numerus, qui positus fuit 1 ʒ + 8 ꝝ + 16. erit $\frac{25}{4}$. plus $\frac{40}{2}$. siue 20. & insuper 16. hoc est $\frac{25}{4}$. & 36. siue $\frac{169}{4}$. qui duo numeri $\frac{25}{4}$. & $\frac{169}{4}$. faciunt [illegible]. Ad hunc enim si adijciatur primus $\frac{25}{4}$. fit summa [illegible]. id est, [illegible]. numerus quadratus, cuius latus [illegible]. Et si ab eodem secundo [illegible]. demãtur primus $\frac{25}{4}$. remanet numerus [illegible]. siue [illegible]. quadratus etiam, cuius latus $\frac{24}{4}$. siue 6.

XCVIII. 98 *Duobus numeris datis, inuenire alium, qui vtrique seorsum additus faciat quadratum.*

SINT dati duo numeri 4. & 7. Ponatur, qui quæritur, 1 ꝝ. qui cum datis facit duos 1 ꝝ + 4. & 1 ꝝ + 7. qui quadrati debent esse. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum excessus 3. quæranturq. duo numeri, qui inter se multiplicati producant hunc eundem excessum 3. ita tamen, vt quadratum semissis excessus ipsorum maius sit minore numero dato 4. atque adeo æqualis esse possit minori numero composito 1 ꝝ + 4. & quadratum semissis summæ eorundem maius sit maiore numero dato 7. atque adeo æqualis esse possit maiori numero composito 1 ꝝ + 7. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter se multiplicati producunt 3. Et excessus eorum est 5 $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{11}{2}$. cuius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. hoc est, 7 $\frac{9}{16}$. maius est, quam 4. Summa vero eorundem est 6 $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{13}{2}$. cuius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc est, 10 $\frac{9}{16}$. maius est, quam 7. Inuenti autem sunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6. sumpta ad libitum fractione $\frac{1}{2}$. cuius numerator vnitas, vnus numerorum. Nam si eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui produci debet, fiet alter numerus 6. Quòd si dati numeri forent 20. 23. habentes eundem excessum 3. non satisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare sumenda esset alia fractio, nimirum $\frac{1}{10}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{10}$. in 30. fit numerus 3. Et excessus eorum est 29 $\frac{9}{10}$. hoc est, $\frac{299}{10}$. cuius semissis $\frac{299}{20}$. quadratum $\frac{89401}{400}$. siue 223 $\frac{201}{400}$. maius est, quam 20. Item summa eorundem numerorum est 30 $\frac{1}{10}$. hoc est, $\frac{301}{10}$. cuius semissis $\frac{301}{20}$. quadratum $\frac{90601}{400}$. siue 226 $\frac{201}{400}$. maius est, quam 23. Atque ita, si hi numeri $\frac{1}{10}$. & 30. non satisfacerent, accipienda esset alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur proposito satisfacientes.

NOS rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in proposito exemplo. quorum excessus 5 $\frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum

$\frac{121}{16}$.

$\frac{121}{16}$. siue 7 $\frac{9}{16}$. æquale erit minori numero composito 1 ℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, erit æquatio inter 3 $\frac{9}{16}$. & 1 ℞. atque idcirco 1 ℞ erit 3 $\frac{9}{16}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorũ $\frac{1}{2}$. & 6. est 6 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{13}{2}$. & huius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. siue 10 $\frac{9}{16}$. æquale erit maiori numero cõposito 1 ℞ + 7. Ablatis ergo 7. vtrobique, fiet æquatio inter 3 $\frac{9}{16}$. & 1 ℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est 3 $\frac{9}{16}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos 7 $\frac{9}{16}$. & 10 $\frac{9}{16}$. siue $\frac{121}{16}$. & $\frac{169}{16}$. quorũ latera $\frac{11}{4}$. & $\frac{13}{4}$.

QVOD si sumatur fractio $\frac{1}{3}$. & denominator 3. ducatur in excessum 3. producetur numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{3}$. & 9. multiplicati inter se facient 3. Eorum excessus est 8 $\frac{2}{3}$. siue $\frac{26}{3}$. & huius semissis $\frac{13}{3}$. quadratum $\frac{169}{9}$. siue 18 $\frac{7}{9}$. æquale erit minori numero composito 1 ℞ + 4. Ablatis ergo 4. vtrobique, æquatio erit inter 1 ℞. & 14 $\frac{7}{9}$. ideoq. 1 ℞. erit 14 $\frac{7}{9}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{3}$. & 9. est 9 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{28}{3}$. Huius semissis $\frac{14}{3}$. quadratum $\frac{196}{9}$. siue 21 $\frac{7}{9}$. æquale erit maiori numero composito 1 ℞ + 7. Ablatis igitur 7. vtrinque, erit æquatio inter 14 $\frac{7}{9}$. & 1 ℞. vt prius. Numerus igitur quæsitus est 14 $\frac{7}{9}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos 18 $\frac{7}{9}$. & 21 $\frac{7}{9}$. siue $\frac{169}{9}$. & $\frac{196}{9}$. quorum latera $\frac{13}{3}$. & $\frac{14}{3}$.

EX ipsa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes excessum datorum numerorum, quales diximus. Nam nisi quadratum semissis eorum excessus maius esset minore numero 4. non fieret æquatio inter ipsum, & minorem numerum compositum, vt patet, &c. Item constat, varios numeros inueniri posse, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipientur, qui dictũ excessum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos esse duos numeros 3 $\frac{9}{16}$. & 14 $\frac{7}{9}$.

SED experiamur idem in datis numeris 20. & 23. Addita 1 ℞. vtrique, fient quadrati 1 ℞ + 20. & 1 ℞ + 23. fietq. æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{10}$. & 30. qui excessum 3. producant) inter 223 $\frac{201}{400}$. & 1 ℞ + 20. Item inter 226 $\frac{201}{400}$. & 1 ℞ + 23. Inuenieturq. per vtramque æquationem 1 ℞. esse 203 $\frac{201}{400}$. qui numerus additus ad 20. & 23. facit quadratos 223 $\frac{201}{400}$. & 226 $\frac{201}{400}$. siue $\frac{89401}{400}$. & $\frac{90601}{400}$. quorum latera $\frac{299}{20}$. & $\frac{301}{20}$.

Aliter. Sint rursus dati duo numeri 4. & 7. Ponatur numerus quæsitus 1 ℨ — 4. Huic enim si addantur 4. fit 1 ℨ. quadratus. Et si eidem numero 1 ℨ — 4. addantur 7. fit alius quadratus 1 ℨ + 3. cuius latus statuatur 1 ℞. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 4. nimirum 1 ℞ — 5. cuius quadratum 1 ℨ — 10 ℞ + 25. æquale esse debet quadrato 1 ℨ + 3. Additis 10 ℞ vtrobique, erit æqualitas inter 1 ℨ + 25. & 1 ℨ + 10 ℞ + 3. Et si auferatur 1 ℨ. vtrobique, inter 25. & 10 ℞ + 3. Ablatisq. 3. vtrobique, inter 22. & 10 ℞. Diuisis igitur 22. per 10. fiet 1 ℞. $\frac{22}{10}$. siue $\frac{11}{5}$. a cuius quadrato $\frac{121}{25}$. si auferantur 4. (quia numerus quæsitus fuit positus 1 ℨ — 4.) hoc est $\frac{100}{25}$. reliquus erit numerus quæsitus $\frac{21}{25}$. Hic enim addi-

additus ad 4. & 7. facit quadratos 4 $\frac{21}{25}$. & 7 $\frac{21}{25}$. siue $\frac{121}{25}$. & $\frac{196}{25}$. quorum latera $\frac{11}{5}$. & $\frac{14}{5}$.

SI numeri dati sint 20. & 23. ponendus erit numerus quæsitus 1 ȝ — 20. vt additus ad 20. faciat quadratum 1 ȝ. Et si eidem numero 1 ȝ — 20. addantur 23. fiet alius quadratus 1 ȝ + 3. cuius latus statuatur 1 ꝛ. minus quotlibet vnitatibus, quæ superent 20. nimirum 1 ꝛ — 21. cuius quadratum 1 ȝ — 42 ꝛ + 441. æquale debet esse quadrato 1 ȝ + 3. Additis 42 ꝛ vtrobique, erit æqualitas inter 1 ȝ + 441. & 1 ȝ + 42 ꝛ + 3. & si dematur 1 ȝ. vtrobique, inter 441. & 42 ꝛ + 3. Ablatisq. 3. vtrobique, inter 438. & 42 ꝛ. Diuisis ergo 438. per 42. fiet 1 ꝛ. 10 $\frac{3}{7}$. siue $\frac{73}{7}$. a cuius quadrato $\frac{5329}{49}$. si auferantur 20. (quia numerus quæsitus positus fuit 1 ȝ — 20.) hoc est, $\frac{980}{49}$. reliquus fiet numerus quæsitus $\frac{4349}{49}$. siue 88 $\frac{37}{49}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos 108 $\frac{37}{49}$. & 111 $\frac{37}{49}$. hoc est $\frac{5329}{49}$. & $\frac{5476}{49}$. quorum latera $\frac{73}{7}$. & $\frac{74}{7}$.

XCIX. 99 ***Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab vtroque seorsum subtractus, relinquat quadratum.***

SINT dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæsitus 9 — 1 ȝ. Hic namq. ex 9. subtractus relinquit quadratum 1 ȝ. vt in hac formula apparet.

9 + 0 ȝ
9 — 1 ȝ
+ 1 ȝ

Idem autem numerus 9 — 1 ȝ. detractus ex 21. relinquit 12 + 1 ȝ. vt in hac altera formula

21 + 0 ȝ
9 — 1 ȝ
12 + 1 ȝ

liquet, qui numerus debet etiam esse quadratus. Statuatur eius latus 1 ꝛ. minus quotuis vnitatibus, ita tamen, vt earum quadratus superet 12. nimirum 1 ꝛ — 4. Huius quadratum 1 ȝ — 8 ꝛ + 16. æquale debet esse quadrato 12 + 1 ȝ. Additis 8 ꝛ. vtrinque, erit æquatio inter 1 ȝ + 16. & 1 ȝ + 8 ꝛ + 12. Et si vtrobique auferatur 1 ȝ. inter 16. & 8 ꝛ + 12. Ablatisq. 12. vtrinque, inter 4. & 8 ꝛ. Diuisis ergo 4. per 8. fiet 1 ꝛ. $\frac{4}{8}$. siue $\frac{1}{2}$. cuius quadratum $\frac{1}{4}$. si ex 9. auferatur, (propterea quod numerus positus fuit 9 — 1 ȝ.) hoc est ex $\frac{36}{4}$. reliquus erit numerus quæsitus 8 $\frac{3}{4}$. siue $\frac{35}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{1}{4}$. & 12 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. & $\frac{49}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{7}{2}$.

C. 100 ***Datis duobus numeris, alium inuenire, a quo vterque datorum detractus, quadratum relinquat.***

SINT dati duo numeri 20. & 30. Ponatur numerus quæsitus 1 ȝ + 20. vt detractis 20. remaneat quadratus 1 ȝ. Reliquum est, vt 1 ȝ — 10. (qui numerus relinquitur, subductis 30. ex 1 ȝ + 20.

vt in

vt in formula apposita manifestum est, ) sit etiam quadratus. Statuatur latus numeri 1 ℨ − 10. vna radix, minus quotcunque vnitatibus, nimirum 1 ℞ − 2. Huius quadratum 1 ℨ − 4 ℞ + 4. æquale debet esse quadrato 1 ℨ − 10. Additis 4 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 1 ℨ + 4. & 1 ℨ − 10 + 4 ℞. Et rursum additis 10. vtrinque, inter 1 ℨ + 14. & 1 ℨ + 4 ℞. Et si auferatur 1 ℨ. vtrobique, inter 14. & 4 ℞. Diuisis ergo 14. per 4. fiet 1 ℞. $\frac{14}{4}$. siue $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. si addantur 20. ( quia numerus positus fuit 1 ℨ + 20) hoc est, $\frac{80}{4}$. fiet numerus quæsitus $\frac{129}{4}$. hoc est, $32\frac{1}{4}$. a quo si demantur dati numeri 20. & 30. reliqui erunt quadrati $12\frac{1}{4}$. & $2\frac{1}{4}$. siue $\frac{49}{4}$. & $\frac{9}{4}$. quorum latera $\frac{7}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

$$\begin{array}{r} 1\ ℨ + 20 \\ + 30 \\ \hline 1\ ℨ - 10 \end{array}$$

101 ***Datum numerum in duos partiri, & insuper quadratum numerum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.*** CI.

SIT numerus datus 40. Cape duos numeros, quorum quadrati simul minorem numerum efficiant, quam 40. nimirum 2. & 4. Vnicuique addita 1 ℞. fiunt numeri 1 ℞ + 2. & 1 ℞ + 4. quorum quadrata sunt 1 ℨ + 4 ℞ + 4. & 1 ℨ + 8 ℞ + 16. Et si ab vtroque dematur 1 ℨ. remanebunt 4 ℞ + 4. & 8 ℞ + 16. partes numeri 40. diuidendi: quippe cum quilibet horum numerorum cum 1 ℨ. faciat quadratū. Reliquum ergo est, vt duæ istæ partes efficiant 40. Efficiunt autem 12 ℞ + 20. qui numerus æqualis esse debet numero 40. Ablatis igitur 20. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 20. Diuisisq. 20. per 12. fiet 1 ℞. $\frac{20}{12}$. siue $\frac{5}{3}$. cuius quadratus $\frac{25}{9}$. siue $2\frac{7}{9}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40. videlicet 4 ℞ + 4. & 8 ℞ + 16. erunt $10\frac{2}{3}$. & $29\frac{1}{3}$. quæ simul efficiunt 40. Et vterque cum quadrato inuento $2\frac{7}{9}$. quadratum numerum efficit. Nam $2\frac{7}{9}$. cū $10\frac{2}{3}$. siue cum $10\frac{6}{9}$. facit $13\frac{4}{9}$. hoc est, $\frac{121}{9}$. quadratum, cuius latus $\frac{11}{3}$. Et idem quadratus $2\frac{7}{9}$. cum $29\frac{1}{3}$. siue cum $29\frac{3}{9}$. facit quadratum $32\frac{1}{9}$. siue $\frac{289}{9}$. cuius latus $\frac{17}{3}$.

102 ***Datum numerum in duos partiri, & insuper numerum quadratum inuenire, a quo vtraque pars seorsum subtracta quadratum relinquat.*** CII.

SIT idem datus numerus 40. Latus quadrati quæsiti ponatur 1 ℞. plus tot vnitatibus, vt earum quadratum minus sit numero 40. nimirum 1 ℞ + 5. cuius quadratus 1 ℨ + 10 ℞ + 25. a quo detractus numerus 10 ℞ + 25. relinquit quadratum 1 ℨ. Vnus ergo numerorum, in quos diuidendus est 40. sit 10 ℞ + 25. quandoquidem detractus ex 1 ʒ + 10 ℞ + 25. relinquit quadratum 1 ʒ.

Sumatur deinde alterius cuiusdam quadrati latus 1 ℞ + 4. ita vt numerus eius absolutus 4. minor sit numero absoluto 5. prioris lateris: Quadratus huius secundi lateris est 1 ʒ + 8 ℞ + 16. qui detractus a priori quadrato 1 ʒ + 10 ℞ + 25. relinquit 2 ℞ + 9. alterum numerorum, in quos diuidendus est 40. Atque ita quadratus, quem quærimus, est 1 ʒ + 10 ℞ + 25. & partes numeri 40. sunt 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. Nam prior ex illo quadrato subductus relinquit quadratum 1 ʒ. At posterior ex eodem quadrato sublatus relinquit 1 ʒ + 8 ℞ + 16. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit 2 ℞ + 9. quod etiam hæc formula docet,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 ʒ | + | 10 ℞ | + | 25 | |
| 0 ʒ | + | 2 ℞ | + | 9 | |
| 1 ʒ | + | 8 ℞ | + | 16 | |

qui numerus 1 ʒ + 8 ℞ + 16. similiter quadratus est lateris 1 ℞ + 4. vt paulò ante patuit. Reliquum est, vt duæ hæ partes 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. efficiant datum numerum 40. Efficiunt autem 12 ℞ + 34. qui numerus æqualis debet esse numero 40. Ablatis ergo 34. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 6. Diuisisq. 6. per 12. fiet 1 ℞. $\frac{1}{2}$. Cum ergo latus quadrati quæsiti positum sit 1 ℞ + 5. erit ipsum latus 5 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{11}{2}$. & quadratus quæsitus $\frac{121}{4}$. siue 30 $\frac{1}{4}$. Partes autem numeri 40. quas posuimus 10 ℞ + 25. & 2 ℞ + 9. erunt 30. & 10. quæ simul faciunt numerum datum 40. & detractæ ex quadrato inuento 30 $\frac{1}{4}$. relinquunt quadratos numeros $\frac{1}{4}$. & 20 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{81}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{9}{2}$.

CIII. 103 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum summam proportionem quoque datam quamcunque.*

SIT datus numerus 73. inueniendiq. sint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorum summam habeat proportionem duplam: Secundus cum 73. ad reliquorum summam proportionem triplam: Tertius denique cum 73. ad summam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur summa omnium trium 1 ℞. Ergo primus erit $\frac{2}{3}$ ℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{2}{3}$ ℞. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{3}$ ℞. summam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{3}{4}$ ℞ — 73. vt cum 73. habeat $\frac{3}{4}$ ℞. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{4}$ ℞. summam reliquorum. Tertius denique erit $\frac{4}{5}$ ℞ — 73. vt acceptis 73. habeat $\frac{4}{5}$ ℞. numerum scilicet quadruplum ad $\frac{1}{5}$ ℞. summam

reli-

reliquorum. Quibus positis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{2}{3}$ 2e. qui duplus esse debet summæ reliquorum duorum. Facit autem secundus $\frac{3}{4}$ 2e — 73. cum tertio $\frac{4}{5}$ 2e — 73. summam $\frac{31}{20}$ 2e — 146. ad quam duplus esse debet numerus $\frac{2}{3}$ 2e. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{62}{20}$ 2e — 292. duplus prædictæ summæ $\frac{31}{20}$ 2e — 146. æqualis erit numero $\frac{2}{3}$ 2e. Additis igitur 292. vtrobique, æquatio erit inter $\frac{62}{20}$ 2e. & $\frac{2}{3}$ 2e + 292. Ablatisq. $\frac{2}{3}$ 2e. vtrobique, inter $\frac{146}{60}$ 2e. & 292. Diuisis igitur 292. per $\frac{146}{60}$. fiet 1 2e. 120. Ergo primus numerus $\frac{2}{3}$ 2e — 73. erit 7. propterea quod $\frac{2}{3}$. numeri 120. sunt 80. a quibus si auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{3}{4}$ 2e — 73. erit 17. quia $\frac{3}{4}$. numeri 120. sunt 90. a quibus si deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{4}{5}$ 2e — 73. erit 23. quippe cum $\frac{4}{5}$. numeri 120. sint 96. a quibus si tollantur 73. supersint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati satisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus est summæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus est summæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus est summæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

104 *Tres numeros inuenire, ita vt primus cum data parte summæ aliorum duorum faciat numerum datum? Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quauis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum.* CIIII.

DEBEAT primus cum $\frac{1}{2}$. secundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{4}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, 39. Ponatur primus 1 2e. Erit ergo semissis aliorum duorum 42 — 1 2e. Ita enim primus cum hac semisse faciet 42. Ac proinde duplum huius semissis, nimirum 84 — 2 2e. erit summa secundi ac tertij.

ET quia secundus cum $\frac{1}{4}$. primi & tertij facere debet 36. si auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$ 2e. ex 36. reliqua erit quarta pars tertij, vnà cum secundo, numerus scilicet 36 — $\frac{1}{4}$ 2e. quem si detrahemus ex 84 — 2 2e. hoc est, ex summa secundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48 — 1 $\frac{3}{4}$ 2e. tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16 — $\frac{7}{12}$ 2e. erit quarta pars tertij, quæ cum tribus quartis prædictis, hoc est, cum 48 — 1 $\frac{3}{4}$ 2e. faciet totum tertium numerum 64 — $\frac{28}{12}$ 2e. siue 64 — 2 $\frac{1}{3}$ 2e.

HVNC tertium si subducemus ex 84 — 2 2e. summa secundi ac tertij, reliquus fiet secundus 20 + $\frac{1}{3}$ 2e.

QVIA vero tertius cum $\frac{1}{12}$. primi ac secundi, id est, cum $\frac{1}{12}$ 2e.

& $1\frac{2}{3} + \frac{1}{18}$ ℞. (quæ simul faciunt $1\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ ℞.) debet facere 39. Facit autem tertius $64 - 2\frac{1}{3}$ ℞. cum $1\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ ℞. numerum $65\frac{2}{3} - 2\frac{2}{9}$ ℞. Nam $-2\frac{1}{3}$. cum $+\frac{1}{9}$. facit $-2\frac{2}{9}$. vt in hac formula apparet.

$$\begin{array}{r} -2\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{9} \\ \hline -2\frac{2}{9} \end{array}$$

qui numerus $65\frac{2}{3} - 2\frac{2}{9}$ ℞. æqualis debet esse numero 39. Additis ergo $2\frac{2}{9}$ ℞. vtrobique, erit æqualitas inter $65\frac{2}{3}$. & $39 + 2\frac{2}{9}$ ℞. Ablatisq. 39. vtrobique, inter $26\frac{2}{3}$. siue $\frac{80}{3}$. & $\frac{20}{9}$ ℞. Diuisis ergo $\frac{80}{3}$. per $\frac{20}{9}$. fiet 1 ℞. 12. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus est $20 + \frac{1}{3}$ ℞. erit 24. Tertius autem inuentus $64 - 2\frac{1}{3}$ ℞. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36. problema absoluunt. Facienda autem semper est æquatio cum numero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in nostro exemplo cum 39. factum est.

CV. 105 *Datum numerum partiri in duas partes, vt prior cum dato alio numero ad posteriorem cum quouis alio dato numero proportionem habeat datam quãcunque, si id fieri potest.*

DATVS numerus 100. secandus sit in duas partes, vt prior cum 10. faciat numerum triplum numeri, quem posterior pars cum 20. efficit. Ponatur prior pars 1 ℞. ac proinde posterior $100 - 1$ ℞. Prior cum 10. facit 1 ℞ $+ 10$. & posterior cũ 20. facit $120 - 1$ ℞. Vt ergo ille huius sit triplus, necessario erit æquatio inter 1 ℞ $+ 10$. & $360 - 3$ ℞. Additisq. 3 ℞ vtrobique, inter 4 ℞ $+ 10$. & 360. Ablatisq. 10 vtrobique, inter 4 ℞. & 350. Diuisis igitur 350 per 4 fiet 1 ℞. $87\frac{1}{2}$. prior pars. Posterior autem $100 - 1$ ℞. erit $12\frac{1}{2}$. Prior cum 10. facit $97\frac{1}{2}$. numerum triplum numeri $32\frac{1}{2}$. ex posteriori parte, & 20. conflati.

ADDITVM est in ænigmate, [si id fieri potest] quia sæpe erit quæstio impossibilis. quod optime æquatio monebit. V.g. si datus numerus 100. diuidendus sit in duos, vt prior cum 10. faciat numerum septuplum numeri ex posteriori, & 20. conflati; fieri id nullo modo poterit. Posita enim priori parte 1 ℞. & posteriori $100 - 1$ ℞. prior cum 10. faciet 1 ℞ $+ 10$ posterior aũt cum 20 faciet $120 - 1$ ℞. cuius ille non potest esse septuplus. Nam fieret æquatio inter 1 ℞ $+ 10$. & $840 - 7$ ℞. Et additis 7 ℞. vtrobique, inter 8 ℞ $+ 10$. & 840. Ablatisq. 10. vtrobique, inter 8 ℞. & 830. Diuisis autem 830. per 8. fieret 1 ℞. $103\frac{3}{4}$. prior pars. quod est absurdum, cum maior sit dato numero 100.

VIDES igitur, quam expeditè operatio ipsa nos instruat, quando quæstio proposita solui possit, & quando non. id quod ad initium huius lib. monuimus.

106 *Numerum inuenire, a quo detractis quotuis partibus aliquotis, si reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus æqualis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.* CVI.

SIT inueniendus numerus, a quo detractis $\frac{4}{7}$. si reliquus numerus $\frac{3}{7}$. multiplicetur per 10. tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Detractis $\frac{4}{7}$. remanent $\frac{3}{7}$ ℞. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{30}{7}$ ℞. id est, $4\frac{2}{7}$ ℞. Et si ad positum numerum 1 ℞. addantur 10. fit numerus 1 ℞ + 10. æqualis $4\frac{2}{7}$ ℞. Ablata ergo 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 10. & $3\frac{2}{7}$ ℞. Diuisisq. 10. per $3\frac{2}{7}$. hoc est, per $\frac{23}{7}$. fiet 1 ℞. $\frac{70}{23}$. siue $3\frac{1}{23}$. numerus quæsitus. Subductis enim $\frac{4}{7}$. inuenti numeri $\frac{70}{23}$. nimirum $\frac{40}{23}$. si reliquus numerus $\frac{30}{23}$. nimirum $\frac{3}{7}$. eiusdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{300}{23}$. siue $13\frac{1}{23}$. Et si ad inuentum numerum $\frac{70}{23}$. addatur idem numerus datus 10. hoc est, $\frac{230}{23}$. fiet quoque numerus $\frac{300}{23}$. siue $13\frac{1}{23}$.

Hoc ænigma idem est, quod trigesimum, sed variata nonnihil pronunciatione.

107 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt ex vno in alterum gignatur datus quiuis numerus.* CVII.

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri 2 ℞. 3 ℞. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6 ʒ. æqualis 40. Diuisis ergo 40. per 6. fit 1 ʒ. $\frac{40}{6}$. Et √ʒ $\frac{40}{6}$. erit valor vnius radicis. Et quia primus numerus positus fuit 2 ℞. & secundus 3 ℞. erit primus numerus √ʒ $\frac{160}{6}$. & secundus √ʒ $\frac{360}{6}$. Ex vno in alterum fit numerus √ʒ $\frac{57600}{36}$. hoc est $\frac{240}{6}$. siue 40.

SINT rursum inueniendi duo numeri in eadem proportione sesquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Positis rursum duobus numeris 2 ℞. 3 ℞. in proportione sesquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus 6 ʒ. æqualis 294. Diuisisq. 294. per 6. fit 1 ʒ. 49. cuius radix est 7. Ergo primus numerus 2 ℞. erit 14. & secundus 3 ℞. erit 21. Atque ex 14. in 21. fit propositus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæsitos esse surdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in posteriori.

108 *Duos numeros in qualibet proportione datos æqualiter minuere, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, quæ maior sit proportione datorum numerorum.* CVIII.

HOC

HOC ænigma idem eſt, quod octauum, alijs tamen verbis propoſitum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquat duos numeros in data proportione. Libuit tamen idipſum hoc tenore proponere, & aliter ſoluere, quam ænigma octauum ſolutum fuit, vt diſcas aliorum quoque ænigmatum ſolutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportione ſeſquialtera minuendi æqualiter, hoc eſt, ab ipſis vnus idemq. numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuiſſe vſque ad 1 ℞. ac proinde maiorem vſque ad 20 ℞. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus 20 ℞. remanebit numerus 3 — 20 ℞. qui auferendus eſt ex 3. vt relinquantur 20 ℞. vt in hac formula apparet.

3 + 0 ℞
3 — 20 ℞
―――――――
0 + 20 ℞

Item ſi ex minore 2. detrahemus 1 ℞. reliquus erit numerus 2 — 1 ℞. qui ex 2. auferendus eſt, vt relinquatur 1 ℞. Quia vero ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc eſt, ex vtroque idem numerus ablatus ponitur, erit æquatio inter 3 — 20 ℞. & 2 — 1 ℞. Additisq. 20 ℞ vtrobique, inter 3 & 2 + 19 ℞. Ablatisq. 2 vtrinque, inter 1. & 19 ℞. Eritq. 1 ℞. $\frac{1}{19}$. Cum igitur ex 3. auferenda ſint 3 — 20 ℞. & 2 — 1 ℞. ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus 1 $\frac{18}{19}$. eruntq. reliqui numeri $\frac{20}{19}$. & $\frac{1}{19}$. qui habent proportionem vigecuplam propoſitam.

CIX. 109 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum ſumma quadratorum, qui ex ipſis fiunt, efficiat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipſorum efficiat 100. Ponantur numeri quæſiti 3 ℞. 2 ℞. in proportione ſeſquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6 ʓ. & eorum quadrati ſunt 9 ʓ. & 4 ʓ. qui cum 6 ʓ. faciunt 19 ʓ. æquales 100. Diuiſis igitur 100. per 19. fit 1 ʓ. $\frac{100}{19}$. ergo 1 ℞. erit √ʓ $\frac{100}{19}$. & 3 ℞. erunt √ʓ $\frac{900}{19}$. pro primo numero, quem poſuimus 3 ℞. & ſecundus numerus, qui poſitus fuit 2 ℞. erit √ʓ $\frac{400}{19}$. ad quem √ʓ $\frac{900}{19}$. proportionem habet ſeſquialteram. Ex vno in alterum fit numerus √ʓ $\frac{360000}{361}$. hoc eſt, $\frac{600}{19}$. & ſumma quadratorum $\frac{900}{19}$. & $\frac{400}{19}$. eſt $\frac{1300}{19}$. quæ cum $\frac{600}{19}$. facit $\frac{1900}{19}$. hoc eſt, 100.

SINT rurſus inueniendi duo numeri in proportione ſeſquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum ſumma quadratorum, qui ex ipſis fiunt, faciat ſummam 2736. Repetita eadem operatione, erunt 19 ʓ. æquales 2736. Diuiſis ergo 2736. per 19. fiet 1 ʓ. 144. & 1 ℞ 12. Igitur primus numerus poſitus 3 ℞. erit 36. & ſecundus, quem poſuimus 2 ℞. erit 24. Ex 36. in 24. fiunt 864. quæ

cum

cum quadratis 576. 1296. faciunt 1736. ipsiq. numeri inuenti 36. & 24. proportionem habent sesquialteram.

110 *Inuenire numerum, qui in se ductus, & productus in datum quemuis numerum, faciat numerum, qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem quamcunque datam.* CX.

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & hic productus in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri cubum, hoc est, qui quinquies eius cubum contineat. Ponatur quæsitus numerus 1 x. Hic in se ductus facit 1 ʒ. & 1 ʒ. in 10. facit 10 ʒ. qui numerus debet esse quintuplus cubi ex 1 x. procreati. Est autem cubus numeri 1 x. 1 ce. qui quinquies sumptus facit 5 ce. æquales 10 ʒ. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 x 2. numerus quæsitus. propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Nam ex 2. in 2. fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8. ex 2. procreati.

SI numerus ductus in se, & productus in 10. debet habere proportionem sesquialterā ad cubum, erit æquatio inter 10 ʒ. & 1 $\frac{1}{2}$ ce. Diuisis igitur 10. per 1 $\frac{1}{2}$. siue per $\frac{3}{2}$. fiet 1 x $\frac{20}{3}$. qui numerus in se ductus facit $\frac{400}{9}$. & hic in 10. facit $\frac{4000}{9}$. Cubus autem numeri $\frac{20}{3}$. est $\frac{8000}{27}$. ad quem numerus $\frac{4000}{9}$. hoc est $\frac{12000}{27}$. proportionem habet sesquialteram.

SIC si numerus ductus in se, & productus in 10. debet ad cubum habere proportionem subduplam; Posito numero 1 x. fiet ex 1 x in se numerus 1 ʒ. & ex 1 ʒ. in 10. numerus 10 ʒ. qui subduplus esse debet 1 ce. qui fit ex 1 x in se cubicè. Igitur æquatio erit inter 10 ʒ. & 1 ce. eritq. 1 x 20. Nam ex 20. in se, fit 400. & ex 400. in 10. fit 4000. qui subduplus est cubi 8000. qui fit ex 20. in se cubicè.

111 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior multiplicata per quemuis numerum producat numerum, qui superet numerum productum ex parte posteriore in quemlibet alium numerum, numero dato, quando id fieri potest.* CXI.

SIT numerus 30. diuidendus in duas partes, vt prior ducta in 10. procreet numerum, qui numero 20. superet numerum, quem posterior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars 1 x. ideoq. posterior 30 — 1 x. Ex 1 x. in 10. fit numerus 10 x. & ex 30 — 1 x. in 40. fit numerus 1200 — 40 x. quem prior productus superare debet numero 20. Ergo si posteriori addentur 20. fiet æqualitas

litas inter 10 ꝝ. & 1220 — 40 ꝝ. Additisq. 40 ꝝ. vtrinque, inter 50 ꝝ. & 1220. Diuisis ergo 1220. per 50. fiet 1 ꝝ. 24 $\frac{2}{5}$. prior pars, ideoq. posterior erit 5 $\frac{3}{5}$. Prior in 10. ducta facit 244. posterior in 40. facit 224. qui ab illo superatur numero 20.

DIXIMVS in ænigmate, [ quando id fieri potest ] quia non semper quæstio solui potest. vt si prior productus superare debeat posteriorem productũ, numero 300. reperietur æqualitas inter 1500 — 40 ꝝ. & 10 ꝝ. Additisq. 40 ꝝ. vtrinque, inter 1500. & 50 ꝝ. Diuisisq. 1500. per 50. fiet 1 ꝝ. 30. vna pars dati numeri 30. quod est ineptum. Vbi etiam vides, ex ipsa operatione per regulam Algebræ cognosci posse, num quæstio solui possit, nec ne.

CXII. 112 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportione ad numerum factum ex posteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata.*

SIT numerus 40. secandus in duas partes, vt ex priore in 10. fiat numerus in proportione subdupla ad numerum factum ex parte posteriore in 30. Ponatur prior pars 1 ꝝ. ideoq. posterior 40 — 1 ꝝ. Ex 1 ꝝ. in 10. fit numerus 10 ꝝ. qui subduplus esse debet numeri 1200 — 30 ꝝ. producti ex 40 — 1 ꝝ. in 30. hoc est, æquatio fiet inter 20 ꝝ. & 1200 — 30 ꝝ. Additisq. 30 ꝝ. vtrobique, inter 50 ꝝ. & 1200. Diuisis ergo 1200. per 50. fiet 1 ꝝ. 24. prior pars, ac proinde posterior erit 16. Ex 24. in 10. fit 240. qui numerus subduplus est numeri 480. facti ex 16. in 30.

CXIII. 113 *Datum numerum in duos distribuere, vt prior diuisus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportione ad Quotientem, qui fit ex posteriori numero per quemlibet numerum diuiso.*

SIT numerus 100. tribuendus in duos, vt prior diuisus per 10. faciat Quotientem in proportione sextupla ad Quotientem, quem facit posterior numerus diuisus per 20. Ponatur prior 1 ꝝ, ac proinde posterior 100 — 1 ꝝ. Diuiso priore per 10. fit Quotiens $\frac{1}{10}$ ꝝ. Diuiso autem posteriore per 20. fit Quotiens 5 — $\frac{1}{20}$ ꝝ. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem sextuplam; erit æquatio inter $\frac{1}{10}$ ꝝ. & 30 — $\frac{6}{20}$ ꝝ. Et additis $\frac{6}{20}$ ꝝ. vel $\frac{3}{10}$ ꝝ vtrobique, inter $\frac{4}{10}$ ꝝ. & 30. Diuisis ergo 30. per $\frac{4}{10}$. fiet 1 ꝝ. 75. prior numerus. Posterior ergo erit 25. Diuisis 75. per 10. fit Quotiens $\frac{75}{10}$. Diuisis vero 25. per 20. fit Quotiens $\frac{25}{20}$. ad quem ille Quotiens $\frac{75}{10}$. vel $\frac{150}{20}$. proportionem habet sextuplam.

114 Tres

114 *Tres numeros in continua proportione data inuenire, vt numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamcunque proportionem datam.* CXIIII.

INVENIENDI sint tres numeri in continua proportione sesquitertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in proportione quintupla. Ponantur quæsiti tres numeri 9 x. 12 x. 16 x. in proportione sesquitertia. Ex 9 x. in 12 x. fit numerus 108 ʒ. qui debet esse quintuplus tertij 16 x. Ergo æquatio erit inter 108 ʒ. & 80 x. Diuisisq. 80. per 108. fiet 1 x. $\frac{80}{108}$. siue $\frac{20}{27}$. propterea quod numeri Cossici collaterales sunt. Primus ergo numerus positus 9 x. erit $\frac{180}{27}$. Secundus positus 12 x. erit $\frac{240}{27}$. & tertius positus 16 x. erit $\frac{320}{27}$. Ex primo in secundum fit numerus $\frac{43200}{729}$. qui quintuplus est ad $\frac{320}{27}$. siue ad $\frac{8640}{729}$.

SI productus numerus ex primo in secundum debet esse æqualis tertio, erit æquatio inter 108 ʒ. & 16 x. Diuisis ergo 16 per 108. fiet 1 x. $\frac{4}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{36}{27}$. $\frac{48}{27}$. $\frac{64}{27}$. siue $1\frac{1}{3}$. $1\frac{7}{9}$. $2\frac{10}{27}$.

SI productus ex primo in secundum debet esse semissis tertij, erit æquatio inter 216 ʒ. & 16 x. Diuisis igitur 16. per 216. fiet 1 x. $\frac{16}{216}$. siue $\frac{2}{27}$. ac proinde tres numeri quæsiti erunt $\frac{18}{27}$. $\frac{24}{27}$. $\frac{32}{27}$. hoc est $\frac{2}{3}$. $\frac{8}{9}$. $1\frac{5}{27}$. Atque ex $\frac{2}{3}$. in $\frac{8}{9}$. fit numerus $\frac{16}{27}$. qui semissis est tertij $1\frac{5}{27}$.

115 *Datum numerum in tres partiri, vt singuli in tres singulos numeros datos, vel in vnum eundemq. numerum datum multiplicati, producant tres numeros in data proportione continua.* CXV.

SIT numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4. & secundo in 3. & tertio in 7. producantur tres numeri in continua proportione quadrupla. Ponatur prima pars 1 x. quæ ducta in 4. facit 4 x. Et quia secunda pars ducta in 3. debet gignere numerum 16 x. quadruplum videlicet numeri 4 x. quærendus erit numerus, qui in 3. ductus producat 16 x. Is erit Quotiens, si 16 x. diuidantur per 3. nimirum $\frac{16}{3}$ x. eritq. secunda pars $\frac{16}{3}$ x. Rursus quia tertia pars ducta in 7. debet procreare numerum 64 x. quadruplũ videlicet numeri 16 x. quærendus erit numerus, qui in 7. ductus faciat 64 x. Is erit $\frac{64}{7}$ x. Quotiens videlicet, si 64 x. per 7. diuidantur. Atque ita tres partes quæsitæ sunt 1 x. $\frac{16}{3}$ x. $\frac{64}{7}$ x. quæ ordine in 4. 3. & 7. ductæ procreant 4 x. 16 x. & 64 x. in data proportione quadrupla continua. Reliquum iam est, vt prædictæ tres partes in vnam summam collectæ faciant 80. numerum datum.

Faciunt autem 15 $\frac{10}{21}$ ℞. siue $\frac{325}{21}$ ℞. Est ergo æquatio inter $\frac{325}{21}$ ℞. & 80. Diuisis ergo 80. per $\frac{325}{21}$. fiet 1 ℞. $\frac{1680}{325}$. prima pars, quæ posita fuit 1 ℞. Quoniam autem secunda pars inuenta fuit $\frac{16}{3}$ ℞. si $\frac{1680}{325}$ valor vnius radicis ducatur in $\frac{16}{3}$ ℞. producetur secunda pars $\frac{26880}{975}$. Eadem ratione, cum tertia pars inuenta sit $\frac{64}{7}$ ℞. si vnius radicis valor $\frac{1680}{325}$. ducatur in $\frac{64}{7}$ ℞. producetur tertia pars $\frac{107520}{2275}$. Atque hæ tres partes $\frac{1680}{325}$. $\frac{26880}{975}$. $\frac{107520}{2275}$. hoc est, 5 $\frac{11}{65}$. 27 $\frac{555}{975}$. 47 $\frac{595}{2275}$. in vnum collectæ faciunt 80. numerum datum & multiplicatæ ordinatim per 4.3.7. procreant tres numeros $\frac{6720}{325}$. $\frac{80640}{975}$. $\frac{752640}{2275}$. in continua proportione quadrupla.

QVANDO datus numerus 80. tribuendus est in tres, vt singulis partibus per eundem numerum quemcunque, vt per 5. multiplicatis, gignantur tres numeri in continua proportione quadrupla, fiet id facili negotio. Nam si per ænigma 49. diuidatur numerus datus 80. in tres partes continuè quadruplas, videlicet in $\frac{80}{21}$. $\frac{320}{21}$. $\frac{1280}{21}$. & singulæ per propositum numerum 5. multiplicentur, producentur tres numeri in eadẽ proportione quadrupla, $\frac{400}{21}$. $\frac{1600}{21}$. $\frac{6400}{21}$. id est, 19 $\frac{1}{21}$. 76 $\frac{4}{21}$. 304 $\frac{16}{21}$. (a schol. 18. septimi.)

CXVI. **116** ***Datum numerum in tres partes diuidere, vt singula per tres singulos numeros datos multiplicata producant eundem numerum: Vel vt tam priores duæ per duos datos numeros ducta producant vnũ eundemq. numerum, quam posteriores duæ per alios duos numeros datos multiplicata producant vnum quoque & eundem numerum.***

SIT datus numerus 100. diuidendus in tres, vt primo ducto in 5. secundo in 2. & tertio in 6. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 ℞. quo ducto in 5. fiunt 5 ℞. Et quia tantundem debet facere secundus ductus in 2. diuidemus 5 ℞. per 2. Nam Quotiens $\frac{5}{2}$ ℞. erit secundus numerus, cum in 2. ductus faciat 5 ℞. Et quoniam tantundem facere debet tertius in 6. ductus, diuidemus 5 ℞ per 6. Quotiens enim $\frac{5}{6}$ ℞. erit tertius numerus, cum in 6. ductus faciat 5 ℞. Reliquum iam est, vt omnes tres partes 1 ℞. 2 $\frac{1}{2}$ ℞. $\frac{5}{6}$ ℞. faciant datum numerum 100. Faciunt autem 4 $\frac{1}{3}$ ℞. Est ergo æquatio inter 4 $\frac{1}{3}$ ℞. & 100. diuisisq. 100. per 4 $\frac{1}{3}$. hoc est, per $\frac{13}{3}$. fiet 1 ℞. 23 $\frac{1}{13}$. quæ dat primum numerum, quem posuimus 1 ℞. Secundus ergo inuentus 2 $\frac{1}{2}$ ℞. erit 57 $\frac{9}{13}$. Et tertius inuentus $\frac{5}{6}$ ℞. erit 19 $\frac{3}{13}$. Atque hi tres numeri 23 $\frac{1}{13}$. 57 $\frac{9}{13}$. 19 $\frac{3}{13}$. faciunt datum numerum 100. Et ducti in 5.2. & 6. producunt tres numeros æquales 115 $\frac{5}{13}$. 115 $\frac{5}{13}$. 115 $\frac{5}{13}$.

SED iam tam priores duo numeri multiplicati per 6. & 7. debeant producere duos numeros æquales, quam posteriores duo ducti in 5. & 8. Ponatur rursum primus 1 ℞. Ex 1 ℞ in 6. fiunt 6 ℞.

Et

Et quia tantundem facere debet secundus ductus in 3. diuidemus 6 x per 3. Quotiens enim 2 x. dabit secundum numerum, cum ductus in 3 faciat 6 x. Deinde ex secundo hoc 2 x in 5 fiunt 10 x. Et quoniam tantundem debet facere tertius ductus in 8. diuidemus 10 x per 8. Nam Quotiens $1\frac{1}{4}$. erit tertius numerus, cum ductus in 8. gignat 10 x. Reliquum nunc est, vt tres hi numeri 1 x. 2 x. $1\frac{1}{4}$ x faciant numerum datum 100. Faciunt autem $4\frac{1}{4}$ x. qui numerus æqualis esse debet 100. Diuisis ergo 100. per $4\frac{1}{4}$. id est, per $\frac{17}{4}$. fiet 1 x. $23\frac{9}{17}$. primus numerus, qui positus fuit 1 x. Secundus igitur inuentus 2 x. erit $47\frac{1}{17}$. Et tertius inuentus $1\frac{1}{4}$ x. erit $29\frac{7}{17}$. Atque hi tres numeri $23\frac{9}{17}$. $47\frac{1}{17}$. $29\frac{7}{17}$. faciunt simul 100. Et priores duo ducti in 6. & 3. generant eundem numerum $141\frac{3}{17}$. Posteriores vero duo ducti in 5. & 8. procreant eundem numerum $235\frac{5}{17}$.

117 ***Datum numerum in tres partes distribuere, vt prima parte diuisa per quemuis numerum. Et secunda multiplicata per alium datum numerum. Ac tertia diuisa per quemcunque etiam numerum, proueniant tres numeri æquales.*** CXVII.

SIT datus numerus 178. diuidendus in tres partes, vt tantum fiat ex diuisione primæ partis per 5. quantum ex multiplicatione secundæ per 8. & quantum ex diuisione tertiæ per 6. Ponatur prima pars 1 x qua diuisa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$ x. Et quia tantundem fieri debet ex secunda ducta in 8. diuidemus $\frac{1}{5}$ x per 8. Nam Quotiens $\frac{1}{40}$ x. erit secunda pars, quæ multiplicata per 8. facit $\frac{1}{5}$ x. Et quia tantundem facere debet tertia diuisa per 6. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ x per 6. Productus enim numerus $\frac{6}{5}$ x erit tertia pars, quæ diuisa per 6. Quotiens fit $\frac{1}{5}$ x. Reliquum iam est, vt tres hæ partes 1 x. $\frac{1}{40}$ x. $\frac{6}{5}$ x. faciant datum numerum 178. Faciunt autem $2\frac{9}{40}$ x. Igitur æquatio erit inter 178. & $2\frac{9}{40}$ x. Et si diuidantur 178 per $2\frac{9}{40}$. siue per $\frac{89}{40}$. fiet 1 x. 80. prima pars, quam posuimus 1 x. Secunda autem erit 2. quæ habetur, si radix inuenta 80. multiplicetur per $\frac{1}{40}$. propterea quod secunda pars inuenta fuit $\frac{1}{40}$ x. Tertia denique erit 96. quæ quidem producetur, si eadem radix inuenta 80 multiplicetur per $\frac{6}{5}$. propterea quod tertia pars inuenta fuit $\frac{6}{5}$ x. Atque hæ tres partes 80. 2. 96. conficiunt 178. numerum datum. Et siue prima per 5 diuidatur, siue secunda ducatur in 8. siue denique tertia diuidatur per 6 producetur semper idem numerus 16.

118 ***Datum numerum in tres partes secare; vt singula per singulos tres numeros datos diuisa, faciant unum eundemq. Quotientem.*** CXVIII.

SIT datus numerus 240. tribuendus in tres partes, vt prima diuisa per 5. Et secunda per 3. Et tertia per 7. procreetur semper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1 ℞ qua diuisa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$ ℞. Et quia tantundem fieri debet ex secunda parte diuisa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ ℞ per 3. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$ ℞ erit secunda pars, quæ diuisa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{5}$ ℞. Quoniam autem ex diuisione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{5}$ ℞. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ ℞ per 7. Numerus enim productus $\frac{7}{5}$ ℞ erit tertia pars, qua diuisa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{5}$ ℞. Restat, vt tres hæ partes 1 ℞. $\frac{3}{5}$ ℞. $\frac{7}{5}$ ℞. simul sumptæ sint 240. Faciunt autem 3 ℞. Igitur æquatio erit inter 3 ℞. & 240. Diuisisq. 240. per 3 fiet 1 ℞. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, si inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$, cum secunda pars inuenta sit $\frac{3}{5}$ ℞. Tertia denique erit 112. quæ habetur, si eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{7}{5}$. quandoquidem tertia pars inuenta fuit $\frac{7}{5}$ ℞. Atque omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 240. numerum propositum. Et tam prima diuisa per 5. quam secunda per 3. & tertia per 7. fit, idem semper Quotiens 16.

CXIX. 119 *Duos numeros in data proportione inuenire, vt quælibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, vt $\frac{1}{4}$. minoris in $\frac{1}{2}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1 ℞ & maior 3 ℞, vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$ ℞. in semissem maioris, id est, in $\frac{3}{2}$ ℞ fit numerus $\frac{3}{8}$ ʓ. æqualis 90. Diuisis ergo 90. per $\frac{3}{8}$. fiet 1 ʓ. 240. Et 1 ℞ erit √ʓ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus √ʓ 2160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet √ʓ 15. ducta in $\frac{1}{2}$. maioris, nimirum in √ʓ 540. facit √ʓ 8100. hoc est, numerum datum 90.

CXX. 120 *Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiso alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem.*

SIT inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiso numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat sesquialteram. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Hoc ducto in 5 fiunt 5 ℞. Diuisis autem 60. per 5 ℞. fit Quotiens $\frac{60}{5 ℞}$. qui sesquialteram proportionem habere debet ad 1 ℞. Habet autem & numerus 1 $\frac{1}{2}$ ℞. hoc est, $\frac{3 ℞}{2}$. (qui producitur ex 1 ℞. in 1 $\frac{1}{2}$. siue in $\frac{3}{2}$.) ad 1 ℞. proportionem sesquialteram. Est ergo æqua-

æquatio inter $\frac{60}{5\,\text{ꝛe}}$. & $\frac{3\,\text{ꝛe}}{2}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 120. & 15 ꝫ. Diuisis igitur 120 per 15. fiet 1 ꝫ. 8. Et 1 ꝛe erit √ꝫ 8. numerus, quem quærimus. Nam ex √ꝫ 8 in 5 fit √ꝫ 200. per quem numerum si diuidantur 60. fit Quotiens √ꝫ 18. qui ad √ꝫ 8. sesquialteram proportionem habet: quippe cum √ꝫ 8. ducta in 1 $\frac{1}{2}$. faciat √ꝫ 18.

$$\frac{60}{5\,\text{ꝛe}} \times \frac{3\,\text{ꝛe}}{2} \qquad 120 \quad 15\,\text{ꝫ}$$

121 *Tres numeros inuenire Arithmeticè proportionales, ita vt eorum summa sit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter se producitur. Vel (quod idem est) vt numerus ex ipsorum multiplicatione productus ad eorundem summam proportionem habeat datam.* CXXI.

DEBEAT summa inuentorum numerorum esse $\frac{1}{5}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc est, numerus productus ad summam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæsiti 1 ꝛe. 2 ꝛe. 3 ꝛe. qui æqualiter se excedunt numero 1 ꝛe. Eorum summa est 6 ꝛe. At numerus ex multiplicatione productus 6 ce. Nam ex 1 ꝛe. in 2 ꝛe. fit numerus 2 ꝫ. Et ex 2 ꝫ. in 3 ꝛe. fit numerus 6 ce. Et quoniam summa 6 ꝛe. debet esse $\frac{1}{5}$. numeri 6 ce. erit æquatio inter 30 ꝛe. & 6 ce. Diuisis igitur 30 per 6. fiet 1 ꝫ. 5. (propterea quod inter ꝛe. & ce. vna denominatio, nimirum ꝫ, est interposita) ideoq. 1 ꝛe. erit √ꝫ 5. & 2 ꝛe. erunt √ꝫ 20. & 3 ꝛe erunt √ꝫ 45. Itaque tres numeri inuenti sunt √ꝫ 5. √ꝫ 20. √ꝫ 45. qui se æqualiter excedunt numero √ꝫ 5. vt patet, si primus a secundo, & secundus a tertio subtrahatur. Summa eorum est √ꝫ 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus √ꝫ 4500. Constat autem √ꝫ 180. esse $\frac{1}{5}$. numeri √ꝫ 4500. hoc est, √ꝫ 4500. ad √ꝫ 180. proportionem habere quintuplam, cum numerus √ꝫ 180. ductus in 5. faciat √ꝫ 4500.

DEBEAT deinde numerus productus ad summam habere proportionem, quam 24. ad 1. hoc est, summa debeat esse $\frac{1}{24}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmeticè, 2 ꝛe. 3 ꝛe. 4 ꝛe. quorum summa 9 ꝛe. & numerus productus 24 ce. Et quia 9 ꝛe. debent esse $\frac{1}{24}$. numeri 24 ce. hoc est, hic numerus ad illum habere debet proportionem, quam 24. ad 1. si 9 ꝛe. multiplicentur per 24. fiet æqualitas inter 216 ꝛe. & 24 ce. Diuisis igitur 216. per 24. fiet 1 ꝫ. 9. & 1 ꝛe. 3. Erunt igitur tres numeri quæsiti 6. 9. 12. quod positi sint 2 ꝛe. 3 ꝛe. 4 ꝛe. Summa eorum 27. est $\frac{1}{24}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti; propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

122 Tres

CXXII. **122** *Tres numeros inuenire in continua proportione data, vt ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus.*

SINT tres numeri inueniendi continuè quadrupli, vt inter se multiplicati procreent numerum 27. Ponantur quæsiti numeri 1 ℞. 4 ℞. 16 ℞. in continua proportione quadrupla. Ex 1 ℞ in 4 ℞. fit numerus 4 ʒ. & ex 4 ʒ in 16 ℞. fit numerus 64 cε. æqualis 27. Diuisis ergo 27. per 64. fit 1 cε. $\frac{27}{64}$. & 1 ℞ $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quæsiti $\frac{3}{4}$. $\frac{12}{4}$. $\frac{48}{4}$. hoc est, $\frac{3}{4}$. 3. 12. quadrupli, qui inter se multiplicati producunt 27.

SINT rursum inueniendi tres numeri sesquialteri, qui inter se multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri sesquialteri 1 ℞. 1 $\frac{1}{2}$ ℞. 2 $\frac{1}{4}$ ℞. hoc est, 1 ℞. $\frac{3}{2}$ ℞. $\frac{9}{4}$ ℞. Ex 1 ℞ in $\frac{3}{2}$ ℞. fit numerus $\frac{3}{2}$ ʒ. Et ex $\frac{3}{2}$ ʒ. in $\frac{9}{4}$ ℞. fit numerus $\frac{27}{8}$ cε. hoc est, 3 $\frac{3}{8}$ cε. æqualis 12. Diuisis ergo 12 per $\frac{27}{8}$. fiet 1 cε. 3 $\frac{5}{9}$. & 1 ℞. √cε 3 $\frac{5}{9}$. primus numerus, quem posuimus 1 ℞. Secundus ergo positus 1 $\frac{1}{2}$ ℞. erit √cε 12. Et tertius positus 2 $\frac{1}{4}$ ℞. erit √cε 40 $\frac{1}{2}$. propterea quod ex 1 $\frac{1}{2}$. in √cε 3 $\frac{5}{9}$. fit √cε 12. & ex 2 $\frac{1}{4}$. in √cε 3 $\frac{5}{9}$. fit √cε 40 $\frac{1}{2}$. Iam ex √cε 3 $\frac{5}{9}$. in √cε 12. fit numerus √cε 42 $\frac{2}{3}$. Et ex √cε 42 $\frac{2}{3}$. in √cε 40 $\frac{1}{2}$. fit numerus √cε 1728. hoc est, 12.

CXXIII. **123** *Numerum inuenire, qui ductus in suam radicem quadratam producat datum numerum.*

SIT inueniendus numerus, qui in suam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quæsitus 1 ʒ. Hic ductus in 1 ℞ suam radicem quadratam facit 1 cε. æqualem 4. Diuisis ergo 4 per 1. fiet 1 cε 4. eiusq. radix cubica √cε 4. cuius quadratum est √cε 16. numerus quæsitus, quem posuimus 1 ʒ. Hic enim ductus in √cε 4. suam radicem quadratam facit √cε 64. hoc est, 4.

SIT deinde producendus numerus 15 $\frac{5}{8}$. inuenieturq. æqualitas inter 1 cε. & 15 $\frac{5}{8}$. Diuisis ergo 15 $\frac{5}{8}$. per 1. fiet 1 cε. 15 $\frac{5}{8}$. hoc est, $\frac{125}{8}$. cuius radix cubica $\frac{5}{2}$. & huius quadratum $\frac{25}{4}$. numerus quæsitus, quem posuimus 1 ʒ. Atque hic in suam radicem $\frac{5}{2}$. ductus facit $\frac{125}{8}$. hoc est, 15 $\frac{5}{8}$.

CXXIIII. **124** *Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat datam proportionem.*

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat proportionem sesquialteram. Ponaturque quæsitus numerus 1 ʒ cε. vt nimirum habeat vtramque radicem propositam.

ſitam. Radix eius quadrata eſt 1 ce. & radix cubica 1 ℨ, vt ex ipſo conſtat, quæ ad initium cap. 12. docuimus. quia 1 ce in ſe quadratè facit 1 ℨ ſe, & 1 ℨ in ſe cubicè ſimiliter facit 1 ℨ ce. Reliquum eſt, vt 1 ce. ad 1 ℨ, proportionem habeat ſeſquialteram, hoc eſt, æquatio fit inter 1 ce. & 1 $\frac{1}{2}$ ℨ. quod 1 $\frac{1}{2}$ ℨ ad 1 ℨ, habeat quoque ſeſquialteram proportionem. Diuiſis igitur 1 $\frac{1}{2}$. per 1, fiet 1 2e 1 $\frac{1}{2}$. (quia numeri Coſſici ſunt collaterales) cuius ℨ ce. eſt $\frac{729}{64}$. ſiue 11 $\frac{25}{64}$. Huius radix quadrata eſt $\frac{27}{8}$. hoc eſt, 3 $\frac{3}{8}$. Radix autem cubica $\frac{9}{4}$. ſiue 2 $\frac{1}{4}$. Conſtat autem 3 $\frac{3}{8}$. ad 2 $\frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{27}{8}$. ad $\frac{18}{8}$. habere proportionem ſeſquialteram.

SI proportio proponatur tripla, reperietur eodem diſcurſu æquatio inter 1 ce. & 3 ℨ. Diuiſiſq. 3. per 1. fiet 1 2e. 3. cuius zenſicubus eſt 729. atque huius radix quadrata 27. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

125 *Duos numeros inuenire, vt ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportiones datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.* CXXV.

SINT inueniendi duo numeri, vt ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam ſeſquialteram, & ad maiorem, duplam. Ponatur numerus productus 1 2e. Ergo minor numerus quæſitus erit $\frac{2}{7}$ 2e. & maior $\frac{1}{2}$ 2e. quippe cum 1 2e ad $\frac{2}{7}$ 2e habeat proportionem triplam ſeſquialteram, & duplam ad $\frac{1}{2}$ 2e. Ex $\frac{2}{7}$ 2e in $\frac{1}{2}$ 2e fit numerus $\frac{2}{14}$ ℨ. ſiue $\frac{1}{7}$ ℨ. æqualis poſito producto 1 2e. Diuiſa ergo 1 per $\frac{1}{7}$, fiet 1 2e. 7. numerus ſcilicet qui produci debet: cum numeri Coſſici ſint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit $\frac{2}{7}$ 2e. erit minor 2. & maior 3 $\frac{1}{2}$. qui inuentus fuit $\frac{1}{2}$ 2e. Manifeſtum autem eſt, 7. habere ad 2, proportionem triplam ſeſquialteram, & ad 3 $\frac{1}{2}$. duplam.

126 *Duos numeros inuenire datam ſummam efficientes, ita vt alterius cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor ſit, quam data ſumma, & maior data parte, vel partibus datis eiuſdem ſummæ datæ.* CXXVI.

SINT inueniendi duo numeri, quorum ſumma 60. ita vt prior numerus cum $\frac{1}{4}$ poſterioris faciat 50. Ponatur prior 1 2e. ideoq. poſterior 60 — 1 2e. Huius $\frac{1}{4}$ ſunt 15 — $\frac{1}{4}$ 2e. quæ cum 1 2e. faciunt $\frac{3}{4}$ 2e + 15 numerum æqualem 50. quia vt — $\frac{1}{4}$ 2e addantur ad 1 2e. debent ſubtrahi $\frac{1}{4}$ 2e ex 1 2e. atque ita remanent $\frac{3}{4}$ 2e. cum

ſigno

signo + vt supra in subtractione dictum est. Ablatis 25 $\frac{5}{7}$ vtrobique, erit aequatio inter $\frac{4}{7}$ ℞. & 24 $\frac{2}{7}$. Diuisis ergo 24 $\frac{2}{7}$. per $\frac{4}{7}$. fiet 1 ℞. 42 $\frac{1}{2}$. prior numerus: posterior autem erit 17 $\frac{1}{2}$. cuius $\frac{3}{7}$. sunt 7 $\frac{1}{2}$. quae cum priori parte faciunt 50.

SI prior numerus cum $\frac{3}{7}$ posterioris deberet facere 25. fieri id non posset; quia numerus 25. minor est, quam $\frac{3}{7}$. datae summae 60. vt experiri poteris. At si prior numerus cum $\frac{3}{7}$ posterioris debeat facere 26. fieri id poterit, eritq. prior numerus $\frac{1}{2}$. & posterior 59 $\frac{1}{2}$. Huius $\frac{3}{7}$. sunt 25 $\frac{1}{2}$. quae cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto soluetur aenigma, si posterior numerus cum $\frac{3}{7}$ prioris facere debeat datum numerum: si nimirum posterior numerus ponatur 1 ℞. &c.

CXXVII. 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomodolibet sumpti sine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars summae propositorum quinque numerorum maior sit singulis numeris postulatis.*

INVENIENDI sint quinque numeri, ita vt quatuor sine primo faciant 127. Et quatuor sine secundo, 119. Et quatuor sine tertio, 109. Et quatuor sine quarto, 104. Et quatuor sine quinto, 97. Vbi vides, quartam partem summae 556. ex datis numeris 119. 109. 104. 97. collectae esse 139. numerum singulis illis numeris maiorem. Quoniam ergo summa omnium quatuor sine quinto est minima omnium, nimirum 97. erit necessario quintus numerus omnium maximus, quandoquidem quintus cum quibuslibet alijs tribus facit maiorem summam, quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 1 ℞. ac proinde cum alij quatuor sine quinto faciant 97. erunt omnes quinque numeri simul 97 + 1 ℞. Et quia quatuor sine quarto faciunt 104. Si ex summa omnium 97 + 1 ℞. detrahantur 104. reliquus erit quartus 1 ℞ — 7. Deinde quia quatuor sine tertio faciunt 109. si ex eadem summa 97 + 1 ℞. demantur 109. remanebit tertius 1 ℞ — 12. Rursus quoniam quatuor sine secundo faciunt 119. si 119. subducantur ex eadem summa 97 + 1 ℞. relinquetur secundus 1 ℞ — 22. Denique quia quatuor sine primo faciunt 127. si 127. ex eadem summa 97 + 1 ℞. auferatur, remanebit primus 1 ℞ — 30. Reliquum iam est, vt omnes hi quinque numeri inuenti faciant simul summam omnium 97 + 1 ℞. Faciunt autem 5 ℞ — 71. Igitur aequatio erit inter 97 + 1 ℞. & 5 ℞ — 71. Additisq. 71. vtrobique, inter 168 + 1 ℞. & 5 ℞. Ablataq. 1 ℞. vtrinque, inter 168. & 4 ℞. Diuisis ergo 168. per 4. fiet 1 ℞. 42. quintus numerus, quem posuimus esse 1 ℞. Ergo quartus inuentus 1 ℞ — 7. erit 35. Et tertius inuentus 1 ℞ — 12. erit 30. Secundus autem inuentus 1 ℞ — 22. erit 20. Primus denique, qui inuentus fuit 1 ℞ — 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quaesiti

sint

sunt ordine 12. 20. 30. 35. 42. qui ænigma propositum expediunt.

Hoc ænigma aliter solutum fuit in quatuor numeris in ænigmate 59.

128 *Numerum inuenire, ita vt tres quadrati ex eius tribus partibus datis descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum, vel alium quemcunque datum.* CXXVIII.

SIT primum inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti, & in vnam summam collecti, efficiant ipsum numerum inuentum. Ponatur ille numerus 1 ℞. cuius $\frac{2}{3}$. erunt $\frac{2}{3}$ ℞. & $\frac{3}{5}$. erunt $\frac{3}{5}$ ℞. & $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$ ℞. Quadrati harum partium, $\frac{4}{9}$ ȝ. $\frac{9}{25}$ ȝ. $\frac{1}{4}$ ȝ. simul efficiunt $\frac{949}{900}$ ȝ. numerum æqualem numero posito 1 ℞. Diuisa igitur 1. per $\frac{949}{900}$. fiet 1 ℞. $\frac{900}{949}$. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Huius $\frac{2}{3}$. sunt $\frac{1800}{2847}$. & huius quadratus $\frac{3240000}{8105409}$. Et $\frac{3}{5}$. sunt $\frac{2700}{4745}$. cuius quadratus $\frac{7290000}{22515025}$. Et $\frac{1}{2}$. est $\frac{900}{1898}$. cuius quadratus $\frac{810000}{3602404}$. qui tres quadrati faciunt summam $\frac{623470746493596690000}{657415264913803620900}$. quæ æqualis est numero inuento $\frac{900}{949}$. Nam idem numerus producitur ex huius numeratore in illius denominatorem, & ex denominatore in numeratorem, nimirum numerus 591673738422423258810000.

SIT deinde numerus inueniendus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. descripti faciant numerum 3796. Erunt, vt prius, tres quadrati in vnam summam collecti, $\frac{949}{900}$ ȝ. qui numerus æqualis esse debet numero 3796. Diuisis ergo 3796. per $\frac{949}{900}$. fiet 1 ȝ. 3600. & 1 ℞. 60. numerus quæsitus. Huius enim $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$. & $\frac{1}{2}$. sunt 40. 36. & 30. & quadrati horum numerorum 1600. 1296. 900. faciunt summam 3796.

SIT denique inueniendus numerus, ita vt tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. descripti summam faciant 20. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Eius partes datæ sunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{1}{9}$ ℞. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ ȝ. $\frac{1}{9}$ ȝ. & $\frac{1}{81}$ ȝ. faciunt summam $\frac{121}{324}$ ȝ. æqualem numero 20. Diuisis ergo 20. per $\frac{121}{324}$. fiet 1 ȝ. $\frac{6480}{121}$. & 1 ℞. √ȝ $\frac{6480}{121}$. numerus quæsitus. Huius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{9}$. sunt √ȝ $\frac{6480}{484}$. √ȝ $\frac{6480}{1089}$. & √ȝ $\frac{6480}{9801}$. quarum partium quadrati $\frac{6480}{484}$. $\frac{6480}{1089}$. & $\frac{6480}{9801}$. efficiunt summam $\frac{103317437520}{5165871876}$. hoc est, 20.

129 *Datum numerum in quotlibet numeros partiri, ita vt quilibet sequens superet præcedentem dato numero.* CXXIX.

DATVS numerus 200. tribuendus sit in sex, vt secundus superet primum numero 5. tertius secundum numero 2. quartus tertium numero 10. quintus quartum vnitate. Et sextus quintum numero 15. Ponatur primus 1 ℞. Erit igitur secundus 1 ℞ + 5. Tertius 1 ℞

+ 7. Quartus 1 ℞ + 17. Quintus 1 ℞ + 18. Et sextus 1 ℞ + 33. Hi omnes faciunt 6 ℞ + 80. quæ summa æqualis esse debet dato numero 200. Ablatis ergo 80. vtrinque, erit æquatio inter 6 ℞. & 120. Diuisisq. 120. per 6. fiet 1 ℞. 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38. & sextus 53. qui simul faciunt 200. & problema absoluunt.

DEBET autem datus numerus maior esse summa, quæ ex datis excessibus colligitur, si sequens quilibet excessus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, si primus numerus foret 5. secundus esset 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33. qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem esse, quàm 80. nimirum 81. vel 82. vel 200. vel 300. &c. Id quod ipsa operatio docebit. Si enim datus numerus esset 79. fieret æquatio inter 6 ℞ + 80. & 79. quod fieri nequit.

CXXX. 130 *Duos numeros inuenire in proportione data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcumque datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione tripla, ita vt alteruter ipsorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 1 ℞. ideoq. maior 3 ℞. Ex maiore 3 ℞ in 1 𝔷 quadratum minoris fit numerus 3 ce æqualis 192. Diuisis igitur 192 per 3 fiet 1 ce. 64. & 1 ℞. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12. in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

RVRSVS ex minore 1 ℞. in 9 𝔷. quadratum maioris fit numerus 9 ce. æqualis 192. Diuisis ergo 192. per 9. fiet 1 ce. 21 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{64}{3}$. & 1 ℞. $\sqrt{ce}\,\frac{64}{3}$. primus numerus; secundus vero huius triplus erit $\sqrt{ce}\,\frac{1728}{3}$. In huius quadratum $\sqrt{ce}\,\frac{2985984}{9}$. si ducatur primus $\sqrt{ce}\,\frac{64}{3}$. fiet numerus $\sqrt{ce}\,\frac{191102976}{27}$. siue $\sqrt{ce}$ 7077888. hoc est 192.

CXXXI. 131 *Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, si in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmeticè proportionales.*

DATI sint numeri 10. & 30. inueniendusq. sit tertius, ita vt bini simul sumpti, & in tertium multiplicati producant tres numeros Arithmeticè proportionales. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Summa ex 1 ℞. & 10. est 1 ℞ + 10. quæ ducta in tertium 30. facit 30 ℞ + 300. Summa vero ex 1 ℞. & 30. est 1 ℞ + 30. quæ ducta in tertiũ 10 facit 10 ℞ + 300. Summa denique ex 10. & 30. est 40. quæ ducta in tertium 1 ℞. facit 40 ℞. ita vt tres numeri procreati sint 30 ℞ + 300. 10 ℞ + 30. & 40 ℞. qui eundem debent habere excessum.

Sed

Sed quia nondum constat, quis eorum sit maximus, & quis medius, & quis minimus: statuamus 30 ℞ + 300. esse maximum: 10 ℞ + 300. medium, & 40 ℞. minimum. Excessus priorum est 20 ℞. posteriorum 300 — 30 ℞. qui excessus aequales debent esse. Additis igitur 30 ℞ vtrinque, erit aequatio inter 50 ℞. & 300. Diuisisq. 300. per 50 fiet 1 ℞ 6. numerus quaesitus, ita vt tres numeri sint 6, 10. 30. Ex 6. & 10. fit summa 16. quae ducta in 30 facit 480. Et ex 6. & 30. fit summa 36. quae ducta in 10. facit 360. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quae ducta in 6. facit 240. Sunt autem hi tres producti 480. 360. 240. Arithmeticè proportionales, cũ eorũ excessus sit 120.

QVOD si statuemus maximum 30 ℞ + 300. medium 40 ℞. & minimum 10 ℞ + 300. erit priorum excessus 300 — 10 ℞. & posteriorum 30 ℞ — 300. qui illi aequalis esse debet. Additis ergo 300. vtrobique, erit aequatio inter 600 — 10 ℞. & 30 ℞. Additisq. rursum 10 ℞ vtrinque, inter 600. & 40 ℞. Diuisis igitur 600. per 40. fiet 1 ℞. 15. numerus quaesitus, eruntq. tres numeri, 15. 10. 30. Nam ex 15. & 10. fit summa 25. quae ducta in 30. facit 750. At ex 15. & 30. fit summa 45. quae ducta in 10 facit 450. Denique ex 10. & 30. fit summa 40. quae ducta in 15. facit 600. Atque hi tres numeri producti 750. 600. 450. habent eundem excessum 150.

NEQVE vero maximus esse potest 40 ℞. & medius 30 ℞ + 300. & minimus 10 ℞ + 300. Nam inter priores esset excessus 10 ℞ — 300. & inter posteriores 20 ℞. qui aequalis esse non potest priori excessui, cum sit maior. Est ergo maximus 30 ℞ + 300. cum etiam maior sit, quam 10 ℞ + 300. Et vterque aliorum potest esse medius, vel minimus, vt patuit.

HOC problema solutũ etiam fuit in aenigmate 86. vbi dati sunt duo numeri, ita vt tres numeri producti tribus modis possint esse proportionales Arithmeticè.

132 *Tres numeros inuenire, ita vt primus ac secundus cum data parte tertij. Item secundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant vnum eundemq. numerum datum.* CXXXII.

TAM primus ac secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij, quam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam tertius ac primus cum $\frac{1}{3}$. secundi debeant facere 100. Ponatur tertius 1 ℞. cuius $\frac{1}{4}$ ℞. cum primo & secundo debent facere 100. ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{4}$ ℞ a tertio, habuerunt 100 — $\frac{1}{4}$ ℞. Et quia secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$ primi debent quoque facere 100. si ex 100. demamus tertium, nimirum 1 ℞. erit reliquus numerus 100 — 1 ℞. solus secundus vnà cum $\frac{1}{2}$ primi. Quoniam autem secundus, ac totus primus fecerunt 100 — $\frac{1}{4}$ ℞. Et hi duo simul superant secundum, ac $\frac{1}{2}$ primi, semisse eiusdem primi: si ex 100 — $\frac{1}{4}$ ℞. summa primi & secundi, auferemus 100 — 1 ℞. valorem solius secundi cum $\frac{1}{2}$. primi, erit reliquus numerus $\frac{3}{4}$ 2e. ſemiſſis primi, ac proinde totus primus erit $1\frac{1}{2}$ 2e, hoc eſt $\frac{6}{4}$ 2e. Deinde quia primus ac ſecundus ſimul cum $\frac{1}{3}$ tertij faciunt 100. Et ſolus primus facit $1\frac{1}{2}$ 2e. & $\frac{1}{3}$. tertij eſt $\frac{1}{3}$ 2e. ſi $\frac{1}{3}$ 2e hoc eſt, $1\frac{5}{6}$ 2e ſummam ex $1\frac{1}{2}$ 2e. & $\frac{1}{3}$ 2e. collectam detrahemus ex 100. erit reliquus numerus $100 - 1\frac{5}{6}$ 2e. ſolus ſecundus, cuius $\frac{1}{3}$. eſt $33\frac{1}{3} - \frac{11}{18}$ 2e. cum qua tertius ac primus, nimirum 1 2e. & $1\frac{1}{2}$ 2e. hoc eſt, $2\frac{1}{2}$ 2e. facere debet 100. Fit aũt ex $33\frac{1}{3} - \frac{11}{18}$ 2e. & $2\frac{1}{2}$ 2e (hoc eſt, ex $\frac{1}{3}$. ſecundi, & ſumma tertij ac primi) numerus $33\frac{1}{3} + 1\frac{17}{18}$ 2e. qui æqualis debet eſſe numero 100. Ablatis ergo vtrinque $33\frac{1}{3}$. erit æqualitas inter $66\frac{2}{3}$. & $1\frac{17}{18}$ 2e. Diuiſisq. $66\frac{2}{3}$. per $1\frac{17}{18}$. fiet 1 2e. $34\frac{2}{7}$. ſiue $\frac{240}{7}$. tertius videlicet numerus, qui poſitus fuit 1 2e. igitur ſecundus inuentus $100 - 1\frac{5}{6}$ 2e. erit $\frac{260}{7}$. Et primus, quem inuenimus $1\frac{1}{2}$ 2e. erit $\frac{360}{7}$. Atque hi tres ænigmati propoſito ſatisfaciunt.

CXXXIII. 133 ***Datum numerum partiri in tres partes continuè proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in ſecundam habeat datam proportionem.***

SIT datus numerus 30. tribuendus in tres partes continuè proportionales, ita vt numerus ex prima in tertiam productus habeat ad productum ex prima in ſecundam proportionem quadruplam. Ponatur ſecunda pars, ſiue media 1 2e. ac propterea ſumma primæ a 10. ſeptimi ac tertiæ $30 - 1$ 2e. Et quia ex media 1 2e in ſe fit 1 ʒ. fiet etiam 1 ʒ. ex prima in tertiam. Cum ergo hic productus debeat habere quadruplam proportionem ad productum ex prima in ſecundam; producetur $\frac{1}{4}$ ʒ. ex prima in ſecundam, nimirum in 1 2e. Si igitur partiemur $\frac{1}{4}$ ʒ. per 1 2e, fiet Quotiens $\frac{1}{4}$ 2e. qui ductus in 1 2e, numerum diuidentem, facit $\frac{1}{4}$ ʒ. numerum diuiſum: ac proinde prima pars erit $\frac{1}{4}$ 2e. quæ cum ſecunda faciet $1\frac{1}{4}$ 2e. quæ ſumma ablata ex numero dato 30. relinquet tertiam partem $30 - 1\frac{1}{4}$ 2e. Reliquum iam eſt, ex prima parte $\frac{1}{4}$ 2e. in tertiam modo inuentam $30 - 1\frac{1}{4}$ 2e. gigni numerum 1 ʒ, qui ex media parte 1 2e in ſe producitur. Fit autem ex $\frac{1}{4}$ 2e. in $30 - 1\frac{1}{4}$ 2e. numerus $7\frac{1}{2}$ 2e $- \frac{5}{16}$ ʒ. qui æqualis debet eſſe 1 ʒ. Additis ergo $\frac{5}{16}$ ʒ. vtrobique, erit æquatio inter $7\frac{1}{2}$ 2e. & $1\frac{5}{16}$ ʒ. Diuiſisq. $7\frac{1}{2}$ per $1\frac{5}{16}$. hoc eſt, $\frac{15}{2}$. per $\frac{21}{16}$. fiet 1 2e. $5\frac{5}{7}$. media, vel ſecunda pars, nimirum $\frac{40}{7}$. Ergo prima pars, quam inuenimus eſſe $\frac{1}{4}$ 2e. erit $\frac{10}{7}$. ſiue $1\frac{3}{7}$. Et tertia, quæ fuit inuenta $30 - 1\frac{1}{4}$ 2e. erit $\frac{160}{7}$. ſiue $22\frac{6}{7}$. Atque hæ tres partes $1\frac{3}{7}$. $5\frac{5}{7}$. $22\frac{6}{7}$. faciunt datum numerum 30. Et ex $1\frac{3}{7}$. in $22\frac{6}{7}$. hoc eſt, ex prima parte in tertiam, fit numerus $32\frac{32}{49}$. qui quadruplus eſt numeri $8\frac{8}{49}$. facti ex prima parte $1\frac{3}{7}$. in ſecundam $5\frac{5}{7}$. Eſſe autem tres partes continuè proportionales, liquet: quippe cum idem numerus gignatur ex prima in tertiam, qui ex media in ſe, nimirum $32\frac{32}{49}$.

ALI-

ALITER institui poterit æquatio, postquam inuentæ fuerint partes $\frac{1}{4}$ 2e. 1 2e. 30 — 1 $\frac{1}{4}$ 2e. hoc scilicet modo. Quoniam ex prima in tertiam fieri debet 1 ℥. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex media in se. si diuidemus 1 ℥. per primam, id est, per $\frac{1}{4}$ 2e. fiet Quotiens 4 2e. qui ductus in $\frac{1}{4}$ 2e producit 1 ℥. Ac proinde tertia pars erit 4 2e. æqualis nimirum alteri parti tertiæ inuentæ 30 — 1 $\frac{1}{4}$ 2e. Additis ergo 1 $\frac{1}{4}$ 2e vtrobique, erit æqualitas inter 5 $\frac{1}{4}$ 2e. & 30. Diuisisq. 30. per 5 $\frac{1}{4}$. fiet 1 2e. 5 $\frac{5}{7}$. vt prius.

Aenigma hoc soluemus quoque in aenigmate 171. sed alio exemplo proposito.

*134 Tres numeros inuenire, ita vt primus cum datis quotlibet vnitatibus secundi numerum faciat æqualem ei, qui secundo superest. Item secundus cum quotcunque vnitatibus tertij faciat alium numerum æqualem ei, qui tertio superest. Tertius denique, acceptis quotuis vnitatibus a primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam.* CXXXIIII.

SVMAT primus a secundo 40. vnitates: secundus a tertio 56. vnitates: tertius denique a primo 72. vnitates, ita vt primus faciat numerum æqualem reliquo secundi: secundus item æqualem ei, qui tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius, qui primo superest. Ponatur primus 1 2e. Ergo acceptis 40. a secundo, habebit 1 2e + 40. Ac tantundem etiam superesse debet secundo. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 1 2e + 80. qui postquam acceperit 56. a tertio, habebit 1 2e + 136. Ac tantundem superesse nunc debet tertio, ideoq. antequam daret 56. secundo, habuit 1 2e + 192. qui si a primo accipiat 72. habebit 1 2e + 264. qui numerus debet esse quintuplus numeri 1 2e — 72. qui primo, postquam dederit 72. superest. Ergo numerus huius quintuplus 5 2e — 360. æqualis erit numero 1 2e + 264. quem tertius confecit. Additis autem 360. vtrinque, erit æquatio inter 5 2e. & 1 2e + 624. Et ablata 1 2e vtrobique, inter 4 2e & 624. Diuisis ergo 624. per 4. fiet 1 2e. 156. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuentus fuit 1 2e + 80. erit 236. Tertius vero, quem inuenimus esse 1 2e + 192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt, vt probare potes.

## *SCHOLIVM.*

*IN similibus quæstionibus proponitur aliquando problema, quod dissolui nequit. id quod æquatio inuenta praeclare monebit. Vt si in proposito problemate*

*blemate quis diceret, tertium accepisse 72. a primo, & habere quoque numerum tali quo primi æqualem, fieret quæstio impossibilis. Nam tertius tunc haberet, ut dictum est, 1 ℞ + 264. qui æqualis nullo modo esse posset numero 1 ℞ − 72. quo primo superest.*

CXXXV. 135 *Duos numeros in data proportione inuenire, ut utroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes summam quamcunque datam.*

INVENIENDI sint duo numeri in proportione quintupla, ut minore multiplicato per 8. & maiore per 5. procreentur duo numeri, quorum summa sit 100. Ponantur quæsiti numeri 1 ℞. & 5 ℞. in proportione quintupla. Ex 1 ℞. in 8. fiunt 8 ℞. & ex 5 ℞ in 5. fiũt 25 ℞. Summa productorum est 33 ℞. æqualis 100. Diuisis igitur 100. per 33. fiet 1 ℞. $\frac{100}{33}$. siue 3 $\frac{1}{33}$. primus numerus. Secundus ergo erit $\frac{500}{33}$. siue 15 $\frac{5}{33}$. Ex 3 $\frac{1}{33}$. hoc est, ex $\frac{100}{33}$. in 8. fiunt $\frac{800}{33}$. siue 24 $\frac{8}{33}$. Et ex 15 $\frac{5}{33}$. id est, ex $\frac{500}{33}$. in 5. fiunt $\frac{2500}{33}$. siue 75 $\frac{25}{33}$. Atque hi duo producti 24 $\frac{8}{33}$. & 75 $\frac{25}{33}$. faciunt summam datã 100.

CXXXVI. 136 *Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.*

PONATVR summa duorum numerus quadratus, cuius latus sit vna radix, plus quotcunque vnitatibus; nimirum quadratus 1 ȝ + 10 ℞ + 25. procreatus ex latere assumpto quocunque 1 ℞ + 5. Nam si minor numerus quæsitus statuatur $\frac{1}{2}$ ȝ. erit maior $\frac{1}{2}$ ȝ + 10 ℞ + 25. Horum enim summa 1 ȝ + 10 ℞ + 25. quadratus numerus est, ex hypothesi. Reliquum est, vt eorundem numerorum $\frac{1}{2}$ ȝ. & $\frac{1}{2}$ ȝ + 10 ℞ + 25. excessus 10 ℞ + 25. sit etiam quadratus; hoc est, æqualis cuicunque quadrato maiori, quam 25. nimirum 100. Ablatis ergo 25 vtrobique, erit æquatio inter 10 ℞. & 75. Diuisisq. 75. per 10. fiet 1 ℞. 7 $\frac{1}{2}$. & 1 ȝ. $\frac{225}{4}$. hoc est, 56 $\frac{1}{4}$. Igitur minor numerus, qui fuit $\frac{1}{2}$ ȝ. erit 28 $\frac{1}{8}$. Maior autẽ, qui fuit $\frac{1}{2}$ ȝ + 10 ℞ + 25. erit 128 $\frac{1}{8}$. Nam summa horum numerorum 156 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1250}{8}$. siue $\frac{625}{4}$. numerus quadratus est, cuius latus $\frac{25}{2}$. Item excessus eorundem 100. quadratus quoque est, cuius latus 10.

SI prædictum excessum 10 ℞ + 25. pones æqualem quadrato 36. vel alij cuicunque, qui non sit 100. inuenies aliam æstimationem vnius radicis, vt experiri potes.

CXXXVII. 137 *Dato quadrato, inuenire numerum, quo & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus.*

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius scholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum scholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. ducatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri producti 100. diuidatur per quadratum numeri 5. assumpti auctum vnitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{50}{13}$. quadratus $\frac{2500}{169}$. siue 14 $\frac{134}{169}$. erit vnus quadratus. quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus 85 $\frac{35}{169}$. qui duo quadrati efficiunt 100. Latera autem eorum $\frac{50}{13}$. & $\frac{120}{13}$. inter se multiplicata faciunt $\frac{6000}{169}$. siue 35 $\frac{85}{169}$. cuius producti numeri duplum $\frac{12000}{169}$. siue 71 $\frac{1}{169}$. erit numerus, qui quæritur. Is enim adiectus ad 100. facit 171 $\frac{1}{169}$. siue $\frac{28900}{169}$. quadratum, cuius latus $\frac{170}{13}$. siue 13 $\frac{1}{13}$. Idem numerus 71 $\frac{1}{169}$. demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit 28 $\frac{168}{169}$. siue $\frac{4900}{169}$. numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{70}{13}$. siue 5 $\frac{5}{13}$.

RATIO huius operationis hæc est. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorum quadratorum, si ad lineas contrahantur, * constituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus descripta, æqualia sunt dato quadrato. Igitur, vt in Lemmate sequenti demonstrabimus, rectangulum bis comprehensum sub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale est: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus est duorum illorum laterum differentia.

a 48. primi.

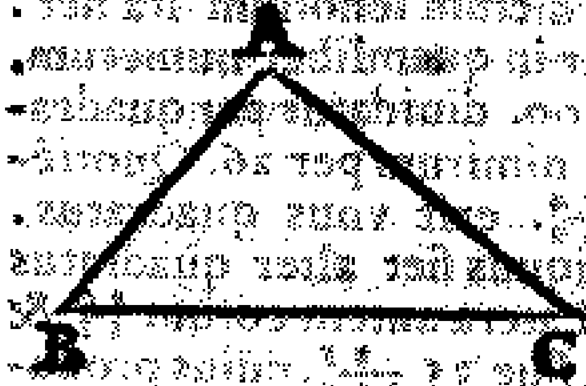
SI idem quadratus 100. distribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorum latera 6. & 8. inter se multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is, quem quærimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

## LEMMA.

*IN omni triangulo rectangulo, rectangulum bis sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, vna cum quadrato lateris recto angulo oppositi, æquale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur. Idem vero rectangulum bis sub lateribus prædictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia est prædictorum duorum laterum.* Lemma.

*SIT triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato, cuius latus æquale sit duobus lateribus AB, AC, simul. Et si idem rectangulum bis detrahatur*

trahatur



*trahatur ex quadrato rectæ B C, relinqui quadratum, cuius latus æquale sit differentiæ inter A B, A C. Quoniam enim si concipiatur linea vna ex A B, A C, composita,* a 4. secundi. *ª rectangulum sub A B, A C, bis comprehensum, vnà cum quadratis ex A B, A C, æquale est quadrato rectæ ex A B, A C, compositæ:* b 47. primi. *ᵇ Sunt autem quadrata ex A B, A C, quadrato ex B C, æqualia; erit quoque rectangulum bis comprehensum sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, æquale quadrato rectæ ex A B, A C, compositæ, quod est primum.*

c Lemma 39 decimi. *DEINDE ᶜ quia duo quadrata ex A B, A C, (hoc est quadratum ex B C,) maiora sunt rectangulo bis sub A B, A C, comprehenso, quadrato eius lineæ, quæ differentia est inter A B, A C, manifestum est, si illud rectangulum bis sub A B, A C, comprehensum demattur ex quadratis rectarum A B, A C, hoc est, ex quadrato rectæ B C, remanere quadratum, cuius latus æquale est differentiæ inter A B, A C, quod est secundum.*

CXXXVIII. 138 ***Numerum inuenire, qui in quemuis datum numerum ductus, faciat numerum, qui cum quouis alio dato numero numerum efficiat æqualem ei, qui fit ex quæsito numero in quemuis alium datum numerum, maiorem tamen priore dato, multiplicato.***

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 7. faciat numerum, qui adiectus ad 60. faciat summam æqualem numero, qui fit ex inuento numero in 8. multiplicato. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Et 1 ℞. in 7. fit numerus 7 ℞. quo addito ad 60. fit numerus 7 ℞ + 60. æqualis numero 8 ℞. qui fit ex 1 ℞. in 8. Ablatis ergo 7 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 60. & 1 ℞. Diuisisq. 60 per 1. fiet 1 ℞. 60. numerus quæsitus. Hic enim ductus in 7. facit 420. additisq. 60. fit numerus 480. quem nimirum facit numerus inuentus 60. in 8. ductus.

CXXXIX. 139 ***Datum numerum in duas partes diuidere, & insuper quadratum inuenire, qui cum vtraque parte seorsum quadratum efficiat.***

SIT datus numerus 64. secandus in duas partes, & insuper quadratus inueniendus, cum quo quælibet illarū partium efficiat quadratum.

dratum. Ponantur duo numeri quicunque, quorum quilibet compositus sit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum 1 ℞+3. & 1 ℞+5. Quadrati horum sunt 1 ȝ+6 ℞+9. & 1 ȝ+10 ℞+25. Igitur si numerus 6 ℞ +9. addatur ad 1 ȝ. qui numerus quadratus est, fit quadratus 1 ȝ+6 ℞+9. Et si numerus 10 ℞+25. addatur ad eundem 1 ȝ. fit quadratus 1 ȝ + 10 ℞ +25. Ergo si minor pars numeri dati ponatur 6 ℞+9. & maior 10 ℞ + 25. satisfactum erit problemati, si hæ partes conficiant datum numerum 65. Faciunt autẽ summam 16 ℞+34. quæ æqualis debet esse 65. Demptis 34. vtrobique, manebit æqualitas inter 16 ℞. & 31. Diuisis igitur 31. per 16. fiet 1 ℞ $\frac{31}{16}$ siue 1 $\frac{15}{16}$. cuius quadratus $\frac{961}{256}$ siue 3 $\frac{193}{256}$. erit is, qui quæritur. Minor autem pars numeri dati, quam posuimus 6 ℞+9. erit $\frac{330}{16}$ siue 20 $\frac{5}{8}$. Maior vero, quæ posita fuit 10 ℞ +25. erit $\frac{710}{16}$ siue 44 $\frac{3}{8}$. quæ duæ partes simul efficiunt datum numerum 65. Et prima addita ad quadratum inuentum $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{6241}{256}$. cuius latus $\frac{79}{16}$. Secunda autem cum eodem quadrato $\frac{961}{256}$. facit quadratum $\frac{12321}{256}$. cuius latus $\frac{111}{16}$.

## *SCHOLIVM.*

*HOC ænigma plures solutiones admittit, pro varietate numerorum in principio assumptorum. Nam si numeri ponantur 1 ℞+1. & 1 ℞+2. erunt eorum quadrati 1 ȝ+2 ℞+1. & 1 ȝ+4 ℞+4. Atque si minor pars numeri dati 65. ponatur numerus 2 ℞+1. maior verò 4 ℞+4. satisfactum erit problemati, cum vterque numerus cum 1 ȝ. faciat quadratum. Faciunt iidem duo numeri summam 6 ℞+5. quæ æqualis esse debet 65. Ablatis igitur 5. vtrobique, remanebit æqualitas inter 6 ℞. & 60. Diuisisq. 60. per 6. fiet 1 ℞. 10. cuius quadratus 100. erit is, qui quæritur, positusq. fuit 1 ȝ. Minor vero pars numeri dati 65. quam posuimus 2 ℞ + 1. erit 21. Maior autem posita 4 ℞ + 4. erit 44. quæ duæ partes faciunt 65. Et prima addita quadrato inuento 100. facit quadratum 121. cuius latus 11. Secunda autem cum eodem quadrato 100. facit quadratum 144. cuius latus 12.*

*Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in alias, atque alias partes, si alij atque alij numeri assumantur compositi ex 1 ℞. & aliquot vnitatibus.*

140 ***Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum inuenire, a quo si duæ partes inuentæ subducantur, reliqui fiant duo quadrati.*** CXL.

SIT diuidendus numerus 65. in duas partes, & inueniendus quadratus, a quo si inuentæ duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtcunque, vnus compositus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter vero ex vna radice minus totidem vnitatibus, nimirum 1 ℞ + 2. & 1 ℞ − 2. Quadrati horum erunt 1 ʒ + 4 ℞ + 4. & 1 ʒ − 4 ℞ + 4. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, 1 ʒ + 4 ℞ + 4. a quo si auferatur numerus 4 ℞ + 4. relinquetur quadratus 1 ʒ. Quòd si posterior quadratus a priore subducatur, remanebunt 8 ℞. Ac vicissim si 8 ℞. detrahantur ex eodem priori quadrato 1 ʒ + 4 ℞ + 4. relinquetur posterior quadratus 1 ʒ − 4 ℞ + 4. Ergo si minor pars numeri diuidendi ponatur 4 ℞ + 4. Et maior 8 ℞. satisfactum erit ænigmati; quippe cum minor dempta ex quadrato 1 ʒ + 4 ℞ + 4. relinquat quadratum 1 ʒ. Et maior ex eodem quadrato subducta relinquat quadratum 1 ʒ − 4 ℞ + 4. Reliquum iam est, vt hæ duæ partes 4 ℞ + 4. & 8 ℞. faciant numerum datum 65. faciunt autem summam 12 ℞ + 4. æqualem 65. Ablatis ergo 4. vtrinque, erit æquatio inter 12 ℞. & 61. Diuisisq. 61. per 12. fiet 1 ℞. $\frac{61}{12}$. Ac propterea quadratus quæsitus, quem posuimus 1 ʒ + 4 ℞ + 4. erit $\frac{7225}{144}$. cuius latus $\frac{85}{12}$. Minor autem pars numeri diuidendi posita 4 ℞ + 4. erit $\frac{292}{12}$. siue $\frac{3504}{144}$. Maior autem posita 8 ℞. erit $\frac{488}{12}$. vel $\frac{5856}{144}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{7225}{144}$. subducta relinquit quadratum $\frac{3721}{144}$. cuius latus $\frac{61}{12}$. Posterior autem ex eodem quadrato $\frac{7225}{144}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{1369}{144}$. cuius latus $\frac{37}{12}$.

HOC etiam ænigma plures admittit solutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri assumpti fuerint pro numeris 1 ℞ + 2. & 1 ℞ − 2. &c.

CXLI. 141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.*

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati. Ponatur prima pars numerus cōpositus ex 1 ℞. & semisse dati numeri, nimirum 1 ℞ + 5. Secunda pars, semissis eiusdem numeri dati, minus 1 ℞, nimirum 5 − 1 ℞. Ita enim duæ hæ partes numerum datum 10. conficient. Cubi earum sunt 1 ce + 15 ʒ + 75 ℞ + 125. & 125 − 75 ℞ + 15 ʒ − 1 ce. Summa eorum 30 ʒ + 250. nam + 1 ce, & − 1 ce. Item + 75 ℞. & − 75 ℞. se mutuò interimunt: & ex 15 ʒ. & 15 ʒ. fiunt 30 ʒ. atque 125. 125. faciunt 250. Hæc ergo summa 30 ʒ + 250. æqualis esse debet 370. Ablatis 250 vtrinque, remanebit æqualitas inter 30 ʒ. & 120. Diuisis igitur 120. per 30. fiet 1 ʒ. 4. & 1 ℞ 2. Prima igitur pars posita 1 ℞ + 5. erit 7. Secunda vero, quam posuimus 5 − 1 ℞. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 sunt 343. & 27 efficiuntq. 370.

SI eodem numero 10. dato, summa cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter 30 ʒ + 250. & 400. Ablatisq. 250.

vtrin-

vtrinque, inter 30 ȝ. & 150. Diuisis igitur 150. per 30. fiet 1 ȝ. 5. & 1 ℞. √ȝ 5. Ergo prima pars posita 1 ℞ + 5. erit √ȝ 5 + 5. Secunda vero posita 5 — 1 ℞. erit 5 — √ȝ 5. quæ simul faciunt 10. Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda sunt) sunt 200 + √ȝ 32000. & 200 — √ȝ 32000. quorum summa est 400. cum + √ȝ 32000. & — √ȝ 32000. se mutuo interimant.

## *SCHOLIVM.*

*SINE Algebra idem ænigma soluetur hoc pacto. Datus numerus 20. secandus sit in duas partes, quarum cubi facere debeant summam 2960. quæ maior est, quam 2000. quarta pars cubi ex 20. generati. Dematur $\frac{1}{4}$. cubi ex dato numero 20. descripti, nimirum 2000. ex 2960. summa proposita. Et reliquus numerus 960. diuidatur per 60. triplum dati numeri 20. Quotientis namq. 16. radix quadrata 4. addita, & ablata ex 10. semisse dati numeri 20. dabit partes quæsitas 14. & 6. quæ simul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744. & 216. faciunt 2960.*

*HOC etiam ænigma in ænigmate 1. sequentis capitis soluemus per æquationem compositam, in qua scilicet tres numeri occurrunt, quorum vnus alijs duobus est æqualis.*

142 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.* CXLII.

HOC problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubemur, nisi summam laterum datam distribuere in duas partes, quarum cubi datum efficiant numerum, qui maior sit quarta parte cubi ex summa laterum data procreati. Vt si datus numerus 2960. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes, quarũ cubi faciant 2960. vt in præcedenti problemate factum est. Nam ita numerus 2960. diuisus erit in duos cubos 2744. & 216. quorum latera 14. & 6. datam summam 20. conficiunt.

SIC etiam si datus numerus 400. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda sunt) 200 + √ȝ 32000. & 200 — √ȝ 32000. quorum latera sunt √ȝ 5 + 5. & 5 — √ȝ 5. si nimirum summa laterum 10. diuidatur in duas partes, vt in præcedenti ænigmate, vel scholio eiusdem factum est. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 *Numerum inuenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus constituat datam partem, vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati.* CXLIII.

SIT primum inueniendus numerus, cuius quadratus cõstituat $\frac{1}{9}$. cubi ex inuento numero procreati. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus est 1 ℨ. & cubus 1 ce. Vt ergo 1 ℨ. constituat $\frac{1}{9}$ numeri 1 ce, necesse est, æqualitaté esse inter 1 ℨ. & $\frac{1}{9}$ ce. Diuisa igitur 1. per $\frac{1}{9}$. fiet 1 ℞. 9. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Huius enim quadratus 81. nonam partem constituit eiusdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus cõstituat $\frac{5}{7}$. cubi. Iisdem positis, erit æquatio inter $\frac{5}{7}$ ce. & 1 ℨ. Diuisa ergo 1. per $\frac{5}{7}$. fiet 1 ℞. $\frac{7}{5}$. vel 1 $\frac{2}{5}$. numerus quæsitus. Huius enim quadratus $\frac{49}{25}$. constituit $\frac{5}{7}$. cubi $\frac{343}{125}$.

RVRSVS sit inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{1}{7}$ cubi ipsius. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratus 1 ℨ. & cubus 1 ce. Ergo æqualitas erit inter 5 ℨ. & $\frac{1}{7}$ ce. Diuisis ergo 5. per $\frac{1}{7}$. fiet 1 ℞. 35. numerus quæsitus. Huius enim quadratus est 1225. & eius quincuplum 6125. constituit $\frac{1}{7}$. cubi 42875. ex 35. procreati.

POSTREMO inueniendus sit numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{9}{10}$. cubi ipsius. Positis iisdem, erit æquatio inter 5 ℨ. & $\frac{9}{10}$ ce. Diuisis igitur 5. per $\frac{9}{10}$. fiet 1 ℞. $\frac{50}{9}$. hoc est, 5 $\frac{5}{9}$. numerus quæsitus. Eius enim quadratus est $\frac{2500}{81}$. cuius quintuplum $\frac{12500}{81}$. constituit $\frac{9}{10}$. cubi $\frac{125000}{729}$.

CXLIIII. 144 *Numerum inuenire, qui sui cubi constituat datam partem, vel partes.*

SIT primum inueniendus numerus, qui constituat $\frac{1}{12}$. sui cubi. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce. Est ergo æqualitas inter 1 ℞. & $\frac{1}{12}$ ce. Diuisaq. 1 per $\frac{1}{12}$. fiet 1 ℨ. 12. (quod inter ce, & ℞, interiecta sit denominatio ℨ.) & eius radix quadrata, nimirum √ℨ 12. erit precium 1 ℞. Numerus ergo quæsitus est √ℨ 12. Hic enim constituit $\frac{1}{12}$. sui cubi √ℨ 1728.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui constituat $\frac{4}{9}$. sui cubi. Positis iisdem, fiet æquatio inter 1 ℞. & $\frac{4}{9}$ ce. Diuisa igitur 1 per $\frac{4}{9}$. fiet 1 ℨ. $\frac{9}{4}$. & 1 ℞. $\frac{3}{2}$. numerus quæsitus. Eius enim cubus est $\frac{27}{8}$. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{3}{2}$.

CXLV. 145 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita vt minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.*

SINT inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, ita vt minore in quadratum maioris ducto, gignatur numerus 4860. Ponantur numeri quæsiti 5 ℞. & 6 ℞. in proportione sesquiquinta. Minore 5 ℞. ducto in 36 ℨ. quadratum maioris 6 ℞, fit numerus 180 ce.

180 ce. æqualis 4860. Diuisis ergo 4860. per 180. fiet 1 ce. 27. cuius radix cubica est 3. quia inter characteres ce. & N. duo medij sunt ꝫ. & ℞. Ergo minor numerus positus 5 ℞. erit 15. & maior positus 6 ℞. erit 18. Atque ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18. fit numerus 4860.

SINT rursus in eadem proportione sesquiquinta inueniendi duo numeri, ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 1. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter 170 ce. & 1. Diuisa ergo 1. per 180. fiet 1 ce. $\frac{1}{180}$. & radix cubica √ce $\frac{1}{180}$. Ergo minor numerus positus 5 ℞. faciet √ce $\frac{125}{180}$. hoc est, √ce $\frac{25}{36}$. Maior autem positus 6 ℞. erit √ce $\frac{216}{180}$. siue √ce $\frac{6}{5}$. Atque ex minore √ce $\frac{25}{36}$. in √ce $\frac{36}{25}$. quadratum maioris √ce $\frac{6}{5}$. producitur √ce $\frac{900}{900}$. hoc est, 1. Quando enim numerator fractionis æqualis est denominatori, fractio illa vnitati æquiualet.

### 146 *Numerum inuenire, qui inter duos sit medius, superetq. minorem numero dato, & superetur à maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunque.* CXLVI.

HOC ænigma simile est ænigmati 51. & 52. sed aliter propositũ, atque aliter dissolutum. Inueniendus enim sit numerus medius inter duos summam efficientes 100. ita vt minorem superet numero 15. & a maiore superetur numero 9. Quoniam maior ponitur superare medium quæsitum, numero 9. Et hic medius minorem, numero 15. liquido constat maiorem superare minorem numero 24. Si ergo data summa 100. diuidatur in duas partes, quarum excessus 24. & ad minorem addantur 15. fiet medius quæsitus. Ponatur ergo minor pars 1 ℞. & maior 100 — 1 ℞. quæ illam superare debet numero 24. Detracta 1 ℞. ex 100 — 1 ℞. reliquus fit numerus 100 — 2 ℞. æqualis 24. Additis ergo 2 ℞. vtrinque, fiet æqualitas inter 100. & 24 + 2 ℞. Et ablatis 24. vtrobique, inter 76. & 2 ℞. Diuisis igitur 76. per 2. fiet 1 ℞. 38. minor pars, ideoq. maior erit 62. Et additis 15. ad minorem 38. fiet medius quæsitus 53. Hic enim superat minorem partem numero 15. & a maiore superatur numero 9.

### 147 *Datum numerum in quotlibet partes distribuere, ita vt vnaquæque ad sequentem habeat datam proportionem.* CXLVII.

SIT datus numerus 10000. diuidendus in sex partes, ita vt prima ad secundam habeat proportionem æqualitatis: secunda ad tertiam duplam: tertia ad quartam triplam: quarta ad quintam proportionem æqualitatis: & quinta ad sextam proportionem quo-numerus quæſitus 1 2e. qui cum $\frac{1}{4}$. faciet 1 $\frac{1}{4}$ 2e. quæ ſumma ſuperare debet 100. eodem numero, quo 100. ſuperant 1 2e. Ergo demptis 100. ex 1 $\frac{1}{4}$ 2e. & 1 2e. ex 100. remanebunt exceſſus æquales: hoc eſt, erit æquatio inter 1 $\frac{1}{4}$ 2e — 100. & 100 — 1 2e. Et addita 1 2e. vtrobique, inter 2 $\frac{1}{4}$ 2e — 100. & 100. Rurſumq. additis 100. vtrinque, inter 2 $\frac{1}{4}$ 2e. & 200. Diuiſis ergo 200. per 2 $\frac{1}{4}$. fiet 1 2e. 88 $\frac{8}{9}$. numerus quæſitus. Nam ſi ad ipſum addatur eius $\frac{1}{4}$. nimirum numerus 22 $\frac{2}{9}$. fiet ſumma 111 $\frac{1}{9}$. quæ ſuperat 100. numero 11 $\frac{1}{9}$. quo videlicet 100. inuentum numerum 88 $\frac{8}{9}$. ſuperant.

SIT deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{2}{3}$. ſui ipſius ſuperet 100. eodem numero, quo 140. ipſum numerum inuentum ſuperant. Ponatur numerus quæſitus 1 2e. Ergo æquatio erit inter 1 $\frac{2}{3}$ 2e — 100 & 140 — 1 2e. Et addita 1 2e vtrinque, inter 2 $\frac{2}{3}$ 2e — 100. & 140. Additisq. rurſum 100 vtrobique, inter 2 $\frac{2}{3}$ 2e. & 240. Diuiſis ergo 240. per 2 $\frac{2}{3}$. fiet 1 2e. 90. numerus quæſitus. Nam ſi addantur eius $\frac{2}{3}$. nimirum 60. fiet ſumma 150. quæ ſuperant 100. numero 50. quo videlicet 140. numerum inuentum 90. ſuperant.

SIT denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$ ipſius faciat ſummam, quæ eodem numero ſuperet 40. quo numerus 10. inuentum numerum ſuperat. Ponatur numerus quæſitus 1 2e. Ergo æquatio erit inter 1 $\frac{1}{2}$ 2e — 40. & 10 — 1 2e. Additaq. 1 2e vtrobique, inter 2 $\frac{1}{2}$ 2e — 40. & 10. Additisq. rurſum 40. vtrinque, inter 2 $\frac{1}{2}$ 2e. & 50. Diuiſis ergo 50 per 2 $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 20. quæſitus numerus, qui cum ipſius $\frac{1}{2}$. facit ſummam 30. quæ numerum 40. ſuperat numero — 10. vt patet in hac formula, vbi 40. ſubducta ſunt a 30. Atque eodem numero — 10. ſuperat numerus 10. inuentum numerum 20. vt conſtat, ſi 20. ex 10. ſubtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rurſum vides mirabilem vim Algorithmi ſignorum + & —. quamuis dici poſſit, hoc exemplum non poſſe expediri, propterea quod numerus 20. inuentus cum $\frac{1}{2}$ id eſt, cum 10. facit minorem ſummam, quam 40.

$$\begin{array}{r} +\ 30 \\ +\ 40 \\ \hline -\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 10 \\ +\ 20 \\ \hline -\ 10 \end{array}$$

CLI. 151 *Numerum inuenire, à quo ſi ſubtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipſe inuentus numerus eundem datum numerum datum ſuperat.*

SIT inueniendus numerus, ita vt ſubtracta $\frac{1}{5}$ ipſius, reliquus ſit numerus tanto minor quam 100. quanto ipſe numerus inuentus maior eſt, quam 100. Ponatur quæſitus numerus 1 2e. a quo ſubtracta $\frac{1}{5}$. reliquæ fiunt $\frac{4}{5}$ 2e. quæ detractæ ex 100. relinquunt 100 — $\frac{4}{5}$ 2e. Et ſi ex 1 2e demantur 100. relinquuntur 1 2e — 100. Et quia exceſſus ponuntur æquales, erit æquatio inter 100 — $\frac{4}{5}$ 2e. & 1 2e. — 100.

— 100. Additisq. $\frac{4}{5}$ ℞ vtrinque, inter 100. & 1 $\frac{4}{5}$ ℞ — 100. Et rursus additis 100. vtrinque, inter 200. & 1 $\frac{4}{5}$ ℞. Diuisis ergo 200. per 1 $\frac{4}{5}$. id est, per $\frac{9}{5}$. fiet 1 ℞. 111 $\frac{1}{9}$. numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{5}$. facit 22 $\frac{2}{9}$. id est, $\frac{200}{9}$. qui numerus demptus ex 111 $\frac{1}{9}$. id est, ex $\frac{1000}{9}$. relinquit $\frac{800}{9}$. hoc est, 88 $\frac{8}{9}$. qui numerus superatur a 100. numero 11 $\frac{1}{9}$. quo videlicet inuentus numerus 111 $\frac{1}{9}$. numerum 100. superat.

SIT præterea inueniendus numerus, ita vt subtractis $\frac{2}{5}$ ipsius, reliquus numerus tanto minor sit, quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Deptis $\frac{2}{5}$. remanent $\frac{3}{5}$ ℞. Eritq. æquatio inter 100 — $\frac{3}{5}$ ℞. & 1 ℞ — 100. Additisq. $\frac{3}{5}$ ℞ vtrobique, inter 100. & 1 $\frac{3}{5}$ ℞ — 100. Et rursum additis 100. vtrinque, inter 200. & 1 $\frac{3}{5}$ ℞. Diuisis igitur 200. per 1 $\frac{3}{5}$. fiet 1 ℞. 125. numerus quæsitus. Nam si ex eo tollantur $\frac{2}{5}$ ipsius, nimirum 50. remanent 75. qui a 100. superantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125. superat 100.

152 ***Numerum inuenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, a quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicunque numerus datus.*** CLII.

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & productus in 10. faciat numerũ, a quo si demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. quo ducto in se, fit 1 ʒ. & hoc ducto in 10. fit numerus 10 ʒ. a quo si demantur 100. remanet numerus 10 ʒ — 100. qui æqualis debet esse numero 300. Additis 100. vtrobique, erit æquatio inter 10 ʒ. & 400. Diuisisq. 400. per 10. fiet 1 ʒ. 40. Ergo √ʒ 40. est numerus, quem quærimus. Nam in se multiplicatus facit 40. Et ex 40. in 10. fit numerus 400. a quo si subtrahantur 100. remanent 300.

153 ***Progressionem Arithmeticam constituere, cuius primus, & vltimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.*** CLIII.

SIT primus terminus 5. & vltimus 10. summa vero omnium terminorum 105. Hic duo oportet inuestigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progressionis. Ponatur numerus terminorum 1 ℞. Et quia summa ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum summæ progressionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progressionum Arithmeticarum docuimus; si summam ex primo, & vltimo termino collectam, nimirum 15. ducamus in numerum terminorum, id est, in 1 ℞. faciemus 15 ℞. cuius semissis

$\frac{15}{2}$ ℞. est summa progressionis, æqualis summæ datæ 105. Diuisis igitur 105. per $\frac{15}{2}$. fiet 1 ℞. 14. numerus terminorum, quem posuimus esse 1 ℞.

IAM intermedij 12. termini debent facere summam 90. nimirum 105. dempto primo termino 5. & vltimo 10. Ponatur differentia progressionis 1 ℞. eruntq. 12. termini hi sequentes.

5+1 ℞. 5+2 ℞. 5+3 ℞. 5+4 ℞. 5+5 ℞. 5+6 ℞. 5+7 ℞. 5+8 ℞. 5+9 ℞. 5+10 ℞. 5+11 ℞. 5+12 ℞.
qui omnes summam faciunt 60+78 ℞. æqualem numero 90. Demptis ergo 60. vtrinque, erit æqualitas inter 78 ℞. & 30. Diuisisq. 30. per 78. fiet 1 ℞. $\frac{5}{13}$. differentia progressionis. Est ergo hæc progressio.

5. 5 $\frac{5}{13}$. 5 $\frac{10}{13}$. 6 $\frac{2}{13}$. 6 $\frac{7}{13}$. 6 $\frac{12}{13}$. 7 $\frac{4}{13}$. 7 $\frac{9}{13}$. 8 $\frac{1}{13}$. 8 $\frac{6}{13}$. 8 $\frac{11}{13}$. 9 $\frac{3}{13}$. 9 $\frac{8}{13}$. 10.
quippe cum constituat 14. terminos, quorum summa est 105.

QVANDO in priori operatione reperitur numerus terminorum non integer, quæstio erit impossibilis: quia dari non potest talis progressio, in qua primus, atque vltimus terminus sint illi, qui dati sunt, & summa progressionis illa, quæ proponitur. Vt si in eodem exemplo summa progressionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter $\frac{15}{2}$ ℞. & 100. Diuisisq. 100. per $\frac{15}{2}$. fieret 1 ℞. 13 $\frac{1}{3}$. numerus terminorum, quod fieri nequit. Nam nulla est progressio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus sit 5. & vltimus 10. summaq. progressionis 100.

ITAQVE ænigma propositum intelligendum est, quando vere talis est progressio, in qua dati numeri sint primus, & vltimus terminus, & summa progressionis. Neque vero parui æstimandum est, reperire huiusmodi progressionem per præcepta Algebræ. Nam si proponeretur hæc quæstio. Est progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 5. & vltimus 32. summa vero progressionis 185. quis eam facile inueniet sine Algebra? quam tamen sine magno labore reperiemus, ea via, quam in ænigmate præscripsimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progressionis 3. ita vt progressio quæsita sit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

CLIIII. 154 *Progressionem Geometricam in data proportione constituere, cuius vltimus terminus datus sit, vna cum summa progressionis.*

SIT constituenda progressio in proportione sesquialtera, cuius vlti-

vltimus terminus 19683. & summa totius progressionis 55593. Ponatur primus terminus 1 ℞. Et quia si primus terminus ab vltimo subtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem vltimus terminus adijciatur, fit totius progressionis summa, vt in Arithmetica practica in prima regula progressionum Geometricarum scripsimus: detrahatur 1 ℞ id est, primus terminus, ab vltimo 19683. & residuum 19683—1 ℞. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc est, per denominatorem proportionis 1 $\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem 39366—2 ℞. adijciatur vltimus terminus 19683. fietq. tota summa progressionis 59049—2 ℞. æqualis datæ summæ 55593. Additis ergo 2 ℞. vtrinque, erit æqualitas inter 59049. & 55593+2 ℞. Et ablatis vtrobique 55593. inter 3456. & 2 ℞. Diuisis igitur 3456. per 2. fiet 1 ℞. 1728. primus videlicet terminus progressionis in proportione sesquialtera. Quocirca constituetur hæc progressio septem terminorum, qui omnes faciunt datam summam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

155 *Progressionem Geometricam in data proportione constituere, cuius primus terminus datus sit, vnà cum progressionis summa.* CLV.

SIT datus primus terminus proportionis sesquialteræ 1728. & summa progressionis 55593. Ponatur vltimus terminus 1 ℞. a quo si primus dematur, remanet numerus 1 ℞—1728. quo diuiso per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens 2 ℞—3456. Addito ergo vltimo termino 1 ℞. fit summa progressionis 3 ℞ — 3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ summæ 55593. Additisq; 3456. vtrobique, erit æquatio inter 3 ℞. & 59049. Diuisis ergo 59049. per 3. fiet 1 ℞. 19683. vltimus terminus, totaq. progressio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

HAEC etiam duo proxima ænigmata intelligenda sunt, si verè in rerum natura tales progressiones Geometricæ existant, in quibus vltimus terminus, vel primus sint illi, qui proponuntur, & summa progressionis sit quoque illa, quæ datur. Vnde si quæreretur progressio in proportione sesquialtera, cuius summa 1000. & vltimus terminus 500. foret quæstio inexplicabilis, cum nulla talis progressio existat. quod experiri poteris. Sed si quæratur progressio Geometrica in proportione sesquialtera, cuius vltimus terminus sit 68 $\frac{11}{32}$. & summa progressionis 197 $\frac{1}{32}$. quia talis progressio in rerum natura existit, ponemus primum terminum 1 ℞. qui demptus ex vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$. relinquit 68 $\frac{11}{32}$ — 1 ℞. quo numero diuiso per $\frac{1}{2}$. id est, per denominatorem proportionis minus vno, fit

Quotiens $\frac{4374}{32}$. — 2 ℞. & addito vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$. siue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ — 2 ℞. æqualis summæ progressionis 197 $\frac{1}{32}$. siue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur 2 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 2 ℞ + $\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatisq. $\frac{6305}{32}$ vtrinque, inter 2 ℞. & $\frac{256}{32}$. Diuisis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet 1 ℞. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

4. 6. 9. 13 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{4}$. 30 $\frac{3}{8}$. 45 $\frac{9}{16}$. 68 $\frac{11}{32}$.

SIC etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportione sesquialtera, inuenietur vltimus terminus 68 $\frac{11}{32}$. Atque ita, si a 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino 68 $\frac{11}{32}$. &c. Et sane præclarum est, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamsi intermedij nondum sint cogniti.

CLVI. 156 *Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, sumptus sit multiplex datus secundi aliquoties, vt libet, sumpti: Vel vt secundus aliquoties, vt libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, vt libet sumpti.*

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus 1 ℞. & secundus 40 — 1 ℞. Triplum primi 3 ℞. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri 160 — 4 ℞. Erit ergo æquatio inter 3 ℞. & 320 — 8 ℞. Additisq. 8 ℞ vtrinque, inter 11 ℞ & 320. Diuisis ergo 320 per 11 fiet 1 ℞. 29 $\frac{1}{11}$ primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{10}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{7}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4 ℞. duplus erit primi ter sumpti, id est, 3 ℞. hoc est, æqualis erit 6 ℞. Additis ergo 4 ℞ vtrobique, æquatio erit inter 160. & 10 ℞. Diuisisq. 160 per 10. fiet 1 ℞. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius, nimirum 48.

CLVII. 157 *Tres numeros in Arithmetica progressione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

SINT

SINT inueniendi tres numeri Arithmeticam constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsiti, 1 ℞. 2 ℞. 3 ℞. habentes eundem excessum 1 ℞. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6 ce. triplus summæ eorum 6 ℞. hoc est, æqualis 18 ℞. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 1 ζ. 3. propterea quod inter ce. & ℞. medius est character ζ. ac propterea 1 ℞. erit √ζ 3. & 2 ℞. erunt √ζ 12. & 3 ℞. erunt √ζ 27. ita vt tres numeri quæsiti sint √ζ 3. √ζ 12. √ζ 27. habentes eundem excessum √ζ 3. qui inter se multiplicati faciunt √ζ 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet √ζ 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt ijsdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6 ce. & 54 ℞. Diuisis igitur 54 per 6. fiet 1 ζ 9. & 1 ℞. 3. atque tres numeri quæsiti erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

158 *Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerũ æqualem residuo primi, minus dato numero.* CLVIII.

CAPIAT primus a secundo 4. & secundus a tertio 3. & tertius a primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3 ℞ + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. a tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3 ℞ + 2. habebitq. tunc primus 6 ℞ + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6 ℞. Deinde secundus, acceptis 3. a tertio, habebit 3 ℞ + 9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 1 ℞ + 3. & antequam daret 3. habuit 1 ℞ + 6. qui si accipiat 10. a primo, habebit 1 ℞ + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 1 ℞ + 30. numerum æqualem residuo primi 6 ℞ — 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1 ℞ + 40. & 6 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrobique, inter 40. & 5 ℞. Diuisis ergo 40 per 5. fiet 1 ℞. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus

6 ℞.

Quotiens $\frac{4374}{32}$. — 2 ℞. & addito vltimo termino 68 $\frac{11}{32}$. siue $\frac{2187}{32}$. fit numerus $\frac{6561}{32}$ — 2 ℞. æqualis summæ progressionis 197 $\frac{1}{32}$. siue $\frac{6305}{32}$. Additis igitur 2 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 2 ℞ + $\frac{6305}{32}$. & $\frac{6561}{32}$. Ablatisq. $\frac{6305}{32}$ vtrinque, inter 2 ℞. & $\frac{256}{32}$. Diuisis igitur $\frac{256}{32}$. per 2. fiet 1 ℞. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

4. 6. 9. 13 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{4}$. 30 $\frac{3}{8}$. 45 $\frac{9}{16}$. 68 $\frac{11}{32}$.

SIC etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportione sesquialtera, inuenietur vltimus terminus 68 $\frac{11}{32}$. Atque ita, si a 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino 68 $\frac{11}{32}$. &c. Et sane præclarum est, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiamsi intermedij nondum sint cogniti.

CLVI. 156 ***Datum numerum in duos partiri, vt primus aliquoties, vt libet, sumptus sit multiplex datus secundi aliquoties, vt libet, sumpti: Vel vt secundus aliquoties, vt libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, vt libet sumpti.***

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus 1 ℞. & secundus 40 — 1 ℞. Triplum primi 3 ℞. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri 160 — 4 ℞. Erit ergo æquatio inter 3 ℞. & 320 — 8 ℞. Additisq. 8 ℞ vtrinque, inter 11 ℞ & 320. Diuisis ergo 320 per 11 fiet 1 ℞. 29 $\frac{1}{11}$ primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{10}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{7}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4 ℞. duplus erit primi ter sumpti, id est, 3 ℞. hoc est, æqualis erit 6 ℞. Additis ergo 4 ℞ vtrobique, æquatio erit inter 160. & 10 ℞. Diuisisq. 160 per 10. fiet 1 ℞. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius, nimirum 48.

CLVII. 157 ***Tres numeros in Arithmetica progressione inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.***

SINT

SINT inueniendi tres numeri Arithmeticam constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsiti, 1 2e. 2 2e. 3 2e. habentes eundem excessum 1 2e. Ex multiplicatione eorum fit numerus 6 ce. triplus summæ eorum 6 2e. hoc est, æqualis 18 2e. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 1 ȝ. 3. propterea quod inter ce. & 2e. medius est character ȝ. ac propterea 1 2e. erit √ȝ 3. & 2 2e. erunt √ȝ 12. & 3 2e. erunt √ȝ 27. ita vt tres numeri quæsiti sint √ȝ 3. √ȝ 12. √ȝ 27. habentes eundem excessum √ȝ 3. qui inter se multiplicati faciunt √ȝ 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet √ȝ 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt iisdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6 ce. & 54 2e. Diuisis igitur 54 per 6. fiet 1 ȝ 9. & 1 2e. 3. atque tres numeri quæsiti erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gignunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

158 *Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet vnitatibus à secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis vnitatibus à tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet vnitatibus à primo, faciat numerũ æqualem residuo primi, minus dato numero.* CLVIII.

CAPIAT primus à secundo 4. & secundus à tertio 3. & tertius à primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3 2e + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. à tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3 2e + 2. habebitq. tunc primus 6 2e + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6 2e. Deinde secundus, acceptis 3. à tertio, habebit 3 2e + 9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 1 2e + 3. & antequam daret 3. habuit 1 2e + 6. qui si accipiat 10. à primo, habebit 1 2e + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio vnitates 14. tum demum faciet 1 2e + 30. numerum æqualem residuo primi 6 2e — 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1 2e + 40. & 6 2e. Ablataq. 1 2e vtrobique, inter 40. & 5 2e. Diuisis ergo 40 per 5. fiet 1 2e. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus

6 2e.

6 ℞. erit 48. Secundus vero positus 3 ℞ + 6. erit 30. Tertius denique positus 1 ℞+6. erit 14. Nam primus, acceptis 4. a secundo, habebit 52. qui numerus duplus est 26. qui secundo superest. Secundus autem, sumptis 3. a tertio, habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio superest. Tertius denique, acceptis 10. a primo, habebit 24. qui numerus æqualis est residuo primi 38. — 14.

QVOD si tertius, acceptis 10. a primo, debeat habere numerum præcise æqualem residuo primi, inuenietur 1 ℞. 5 $\frac{1}{7}$. Et tres numeri erunt 31 $\frac{4}{7}$. 21 $\frac{3}{7}$. 11 $\frac{1}{7}$. Aequatio porro inuenta docebit, quando quæstio est impossibilis.

CLIX. 159 ***Duos numeros inuenire, ita vt primus, acceptis quotlibet vnitatibus a secundo, superet residuum secundi dato numero: At secundus acceptis quotuis vnitatibus a primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.***

CAPIAT primus a secundo 20. Secundus vero 3. a primo: faciatq. primus numerum, qui residuum secundi superet numero 9. Secundus vero numerum faciat triplum residui primi, & insuper contineat 9. vnitates. Ponatur primus 1 ℞. qui acceptis 20. a secundo, habebit 1 ℞ + 20. qui numerus residuum secundi superare debet numero 9. Ergo secundo remanent 1 ℞+11. ac proinde antequam primo daret 20. habuit 1 ℞+31. Hic acceptis 3. a primo, habebit 1 ℞+34. qui numerus triplus esse debet residui primi, & insuper continere 9. Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus 1 ℞ + 25. triplus residui primi. Est autem residuum primi 1 ℞ — 3. Igitur æquatio erit inter 1 ℞+25. & 3 ℞—9. Additisq. 9. vtrinque, inter 1 ℞+34. & 3 ℞. Ablataq. 1 ℞. vtrobique, inter 34. & 2 ℞. Diuisis ergo 34. per 2. fiet 1 ℞. 17. primus numerus. Secundus ergo erit 48. nimirum 1 ℞ + 31. Ac primus 17. acceptis 20. a secundo, habebit 37. qui numerus residuum secundi 28. superat numero 9. Secundus autem 48. acceptis 3. a primo, habebit 51. qui numerus triplum residui primi 14. superat numero 9.

CLX. 160 ***Numerum inuenire, per quem si datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerũ tantum fiat, quantum ex inuento numero in alium quemuis numerum datum.***

SIT datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita vt Quotiens in 24. ductus tantum faciat, quantum numerus inuentus in 54. ductus facit. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. per quem si diuisi diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{36}{1\text{℞}}$. qui ductus in 24. facit $\frac{864}{1\text{℞}}$. numerum æqualem numero 54 ℞. qui fit ex posito numero 1 ℞. in 54. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 864. & 54 ʒ. Diuisis igitur 864. per 54. fiet 1 ʒ. 16. & 1 ℞. 4. numerus quæsitus. Diuiso enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 4. in 54.

Item inueniendus sit numerus, per quem si diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens, qui ductus in 8. tantum faciat, quantum inuentus numerus facit in 50. ductus. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. per quem si diuidatur numerus 40. fit Quotiens $\frac{40}{1\text{℞}}$. qui ductus in 8. facit $\frac{320}{1\text{℞}}$ numerum æqualem numero 50 ℞. qui fit ex posito numero 1 ℞. in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 320. & 50 ʒ. Diuisis ergo 320 per 50. fiet 1 ʒ. $6\frac{2}{5}$. siue $\frac{32}{5}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{32}{5}$. numerus quæsitus. per quem si diuidatur datus numerus 40. hoc est, √ʒ 1600. fit Quotiens √ʒ $\frac{8000}{32}$. qui ductus in 8. hoc est, in √ʒ 64. producit numerum √ʒ $\frac{512000}{32}$. qui æqualis est numero √ʒ $\frac{80000}{5}$. qui fit ex numero inuento √ʒ $\frac{32}{5}$. in 50. id est, in √ʒ 2500. Quod enim æquales sint numeri √ʒ $\frac{512000}{32}$. & √ʒ $\frac{80000}{5}$. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum √ʒ 2560000.

161 *Tres numeros continuè proportionales in data proportione inuenire, quorum quadrati in unam summã collecti faciant datum numerum.* CLXI.

SINT inueniendi tres numeri continuè sesquitertij, quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæsiti numeri 9 ℞. 12 ℞. 16 ℞. in proportione sesquitertia. Eorum quadrati 81 ʒ. 144 ʒ. 256 ʒ. faciunt summam 481 ʒ. æqualem 4329. Diuisis ergo 4329. per 481. fiet 1 ʒ. 9. & 1 ℞. 3. Ergo primus numerus positus 9 ℞. est 27. secundus 36. & tertius 48. quorum quadrati 729. 1296. 2304. faciunt summam 4329.

SINT rursus inueniendi tres numeri continuè dupli, quorum quadrati faciant 6000. Ponantur tres quæsiti numeri 1 ℞. 2 ℞. 4 ℞. Horum quadrati 1 ʒ. 4 ʒ. 16 ʒ. faciunt summam 21 ʒ. æqualem 6000. Diuisis ergo 6000. per 21. fiet 1 ʒ $\frac{2000}{7}$. & 1 ℞. √ʒ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæsiti in proportione dupla sunt √ʒ $\frac{2000}{7}$. √ʒ $\frac{8000}{7}$. √ʒ $\frac{32000}{7}$. quorum quadrati $\frac{2000}{7}$. $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. faciunt $\frac{42000}{7}$. hoc est, 6000.

162 *Tres numeros continuè proportionales in data proportione inuenire, ita vt parte data maximi numeri in partem datam medij multiplicata, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.* CLXII.

SINT

SINT inueniendi tres numeri continuè sesquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in semissem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato, fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæsiti sesquialteri, 4 x. 6 x. 9 x. Ex $\frac{1}{3}$. maximi id est, ex 3 x. in semissem medij, id est, in 3 x. fit numerus 9 ȝ. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 1 x. fit numerus 9 ce. æqualis 576. Diuisis ergo 576. per 9. fiet 1 ce 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæsiti, cum positi sint 4 x. 6 x. 9 x. erunt 16. 24. 36. Atque ex tertia parte maximi, id est, ex 12. in semissem medij, id est, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 4. fit 576.

CLXIII. 163 *Numerum inuenire, cuius datæ duæ partes inter se multiplicatæ producant numerum, quo diuiso per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radicis quadratæ numeri inuenti.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ faciant numerum, quo diuiso per 27. exeant $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1 x. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id est, ex $\frac{1\,x}{3}$. in $\frac{1\,x}{4}$. fit numerus $\frac{1\,ȝ}{12}$. quo diuiso per 27. fit numerus $\frac{1\,ȝ}{324}$. æqualis duabus tertijs radicis quadratæ numeri inuenti 1 x. hoc est, duabus tertijs numeri √ȝ 1 x. hoc est, numero √ȝ $\frac{4\,x}{9}$. qui facit $\frac{2}{3}$. numeri √ȝ 1 x. produciturq. ex ductu √ȝ 1 x. in $\frac{2}{3}$. id est, in √ȝ $\frac{4}{9}$. Itaque æquatio inuenta est inter √ȝ $\frac{4\,x}{9}$. & $\frac{1\,ȝ}{324}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{4\,x}{9}$. & $\frac{1\,ȝȝ}{104976}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 419904 x. & 9 ȝȝ. Diuisis ergo 419904. per 9. fiet 1 ce 46656. (quia inter x. & ȝȝ. medij sunt duo characteres ȝ. & ce.) & 1 x. 36. numerus quæsitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiso per 27. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{2}{3}$. radicis quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix est 6.

CLXIIII. 164 *Numerum inuenire, cuius pars data in se multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.*

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. in se faciat numerum, qui ductus in $\frac{1}{3}$. eiusdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1 x. Huius $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{1\,x}{3}$. ducta in se facit $\frac{1\,ȝ}{9}$. qui numerus ductus in $\frac{1\,x}{3}$. facit numerum $\frac{1\,ce}{27}$. æqualem quadrato numeri positi 1 x, hoc est, numero 1 ȝ. ita vt æquatio sit inter $\frac{1\,ce}{27}$. & 1 ȝ. quæ per multiplicationem in crucem

redu-

reducitur ad hanc inter 1 ℨ. & 75 ꝛe. Diuisis ergo 75. per 1 fiet 1 ꝛe. 75. (quod Cossici numeri collaterales sint) numerus quaesitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in se facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiusdem numeri 75. facit 5625. quadratum inuenti numeri 75.

165 *Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.* CLXV.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. ducta in $\frac{1}{6}$. faciat 384. Ponatur quaesitus numerus 1 ꝛe. Ex $\frac{1\,ꝛe}{4}$. in $\frac{1\,ꝛe}{6}$. fit numerus $\frac{1\,ℨ}{24}$. aequalis 384. Haec aequatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 ℨ. & 9216. Diuisis igitur 9216 per 1 fiet 1 ℨ. 9216. & 1 ꝛe. 96. numerus quaesitus. Nam ex 24. quarta eius parte, in 16. eiusdem partem sextam fit numerus 384. datus.

ITEM sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{6}$. ducta faciat 100. Ponatur numerus quaesitus 1 ꝛe. Ex $\frac{1\,ꝛe}{4}$. in $\frac{1\,ꝛe}{6}$. fit numerus $\frac{1\,ℨ}{24}$. aequalis 100. Haec aequatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 ℨ. & 2400. Diuisis ergo 2400. per 1. fiet 1 ℨ. 2400, cuius radix quadrata, √ℨ 2400. erit numerus quaesitus. Nam eius $\frac{1}{4}$. est √ℨ 150. & $\frac{1}{6}$. √ℨ $\frac{200}{3}$. quae partes inter se multiplicatae procreant √ℨ $\frac{10000}{1}$. hoc est, √ℨ 10000. siue 100.

## SCHOLIVM.

*SINE Algebra soluetur hoc problema hac ratione. Denominatores partium inter se multiplicentur, & productus numerus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quaesitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quaesitum.*

*QVOD si proponantur tres partes inter se multiplicandae, ita vt producant numerum datum, multiplicandi erunt partium denominatores inter se, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quaesitum. Vt si quaeratur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatae producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter se, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quaesitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum 60. 40. 30. inter se multiplicatae faciunt 72000.*

*EODEM modo progrediendum est, si quatuor partes aliquotae proponantur inter se multiplicandae: sed ex vltimo producto extrahenda est radix zensizensica. Et si quinque proponantur, eruenda est radix surdesolida. Et sic de alijs in infinitum. Nam ex vltimo producto semper extrahenda est radix, cuius exponens aequalis est numero partium aliquotarum. Vt si dentur 10. partes aliquotae, extrahenda erit radix zensurdesolida. Et si dentur 12.*

*radix zenfizenficubica &c. Quæ de re consule, quæ cap. 2. scripsimus de progressionibus numerorum Cossicorum.*

CLXVI. **166** ***Tres numeros inuenire, vt bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros.***

EX primo in secundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex secundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus 1 ℞. Per quem si diuidatur numerus 240. productus ex primo in secundum, fiet secundus $\frac{240}{1 ℞}$. Nam hic Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producit diuisum 240. Eadem ratione erit tertius $\frac{660}{1 ℞}$. Quotiens videlicet diuisionis numeri 660. per 1 ℞. Iam vero ex secundo $\frac{240}{1 ℞}$. in tertium $\frac{660}{1 ℞}$. fit numerus $\frac{158400}{1 ʒ}$. æqualis 1380. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 158400. & 1380 ʒ. Diuisis ergo 158400. per 1380. fiet 1 ʒ. 114 $\frac{18}{23}$. (quod inter N. & ʒ. medius sit vnus character ℞) & 1 ℞. erit √ʒ 114 $\frac{18}{23}$. primus scilicet numerus, qui positus fuit 1 ℞. Et si per hunc primũ, id est, per √ʒ $\frac{2640}{23}$. diuidatur primus numerus productus 240. hoc est, √ʒ 57600. fiet Quotiens √ʒ 501 $\frac{9}{11}$. secundus videlicet numerus. Et si per eundem primum numerum √ʒ $\frac{2640}{23}$. diuidatur secundus numerus productus 660. hoc est, √ʒ 435600. dabit Quotiens √ʒ 3795. tertium numerum. Ex primo √ʒ 114 $\frac{18}{23}$. in secundum √ʒ 501 $\frac{9}{11}$. fit √ʒ 57600. hoc est, 240. Et ex eodẽ primo √ʒ 114 $\frac{18}{23}$. in tertium √ʒ 3795. fit √ʒ 435600. id est, 660. Ac tandem ex secundo √ʒ 501 $\frac{9}{11}$. in tertium √ʒ 3795. fit √ʒ 1904400. id est, 1380.

CLXVII. **167** ***Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit.***

DATI sint duo numeri 12. & 20. inueniendusq. sit alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{3}{7}$. cum 20. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Igitur 12 + 1 ℞. æqualia erunt 20 + $\frac{3}{7}$ ℞. Ablatis $\frac{3}{7}$ ℞ vtrinque, erit æquatio inter 12 + $\frac{4}{7}$ ℞. & 20. Et ablatis 12. vtrobique, inter $\frac{4}{7}$ ℞. & 8. Diuisis ergo 8 per $\frac{4}{7}$. fiet 1 ℞. 14. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 26. & eius $\frac{3}{7}$. nimirum 6. cum 20. faciunt similiter 26.

CLXVIII. **168** ***Numerum inuenire, ita vt quadrati quotcunque partium ipsius simul sumpti conficiant summam inuento numero æqualem, vel ipsius multiplicem.***

SIT primum inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. descripti summam faciant inuento numero æqualem. Ponatur

numerus

numerus quæsitus 1 ℞. cuius partes nominatæ sunt $\frac{1}{2}$ ℞. $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{1}{4}$ ℞. & earum quadrati $\frac{1}{4}$ ℨ. $\frac{1}{9}$ ℨ. $\frac{1}{16}$ ℨ. qui simul faciunt $\frac{61}{144}$ ℨ. quæ summa æqualis est 1 ℞. Diuisa ergo 1. per $\frac{61}{144}$. fiet 1 ℞. $\frac{144}{61}$. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. est $\frac{72}{61}$. eiusq. quadratus $\frac{5184}{3721}$. & $\frac{1}{3}$. est $\frac{48}{61}$. eiusq. quadratus $\frac{2304}{3721}$. & $\frac{1}{4}$ est $\frac{36}{61}$. eiusq. quadratus $\frac{1296}{3721}$. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{8784}{3721}$. numerum æqualem inuento numero $\frac{144}{61}$. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius, quantum ex numeratore in denominatorem.

SIT deinde inueniendus numerus, ita vt quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. procreati faciant numerum decuplum numeri inuenti. Ponatur numerus 1 ℞. cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. sunt $\frac{1}{2}$ ℞. & $\frac{1}{4}$ ℞. & quadrati $\frac{1}{4}$ ℨ. & $\frac{1}{16}$ ℨ. qui simul faciunt summam $\frac{5}{16}$ ℨ. æqualem 10 ℞. Diuisis ergo 10. per $\frac{5}{16}$. fiet 1 ℞. 32. numerus quæsitus. Nam quadrati 256. & 64. ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. descripti faciunt summam 320. decuplam numeri inuenti 32.

169 *Numerum inuenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcunque.* CLXIX.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in $\frac{1}{4}$. ipsius producat 90. Ponatur inuentus numerus 1 ℞. Ex 1 ℞. in $\frac{1}{4}$ ℞. fit numerus $\frac{1}{4}$ ℨ. æqualis 90. Diuisis igitur 90. per $\frac{1}{4}$. fiet 1 ℨ. 360. & 1 ℞. √ℨ 360. numerus quæsitus. Eius $\frac{1}{4}$. sunt √ℨ $\frac{360}{16}$. vt patet, si √ℨ 360. ducatur in $\frac{1}{4}$. hoc est, in √ℨ $\frac{1}{16}$. Iam ex √ℨ 360. in √ℨ $\frac{360}{16}$. fit √ℨ $\frac{129600}{16}$. hoc est, √ℨ 8100. hoc est, 90.

170 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* CLXX.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui semissis est quadrati ex 40. procreati, & minorem quam 1600. qui quadratus est eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 20 — 1 ℞. & alter 20 + 1 ℞. vt cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum 400 — 40 ℞ + 1 ℨ. & 400 + 40 ℞ + 1 ℨ. faciunt 2 ℨ + 800. numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800 vtrobique, erit æquatio inter 2 ℨ. & 128. Diuisisq. 128 per 2 fiet 1 ℨ. 64. & 1 ℞. 8. Ergo primus numerus positus 20 — 1 ℞. erit 12. & alter, quem posuimus 20 + 1 ℞. erit 28. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144. & 784. faciunt 928.

Hoc ænigma soluemus etiam per compositã æquationem in ænigmate 35. sequentis cap. 30.

CLXXI.

171 *Datum numerum in tres partes continuè proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam.*

HOC ænigma solutum fuit etiam in problemate 133. sed pro alio exemplo.

SIT datus numerus 39. diuidendus in tres continuè proportionales, ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in secundum factum proportionem duplam sesquialteram. Ponatur secundus 1 ℞. ideoq. primus ac tertius simul 39 — 1 ℞. Ex secundo 1 ℞. in se fit 1 ℨ. a quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet esse duplus sesquialter ad eum, qui fit ex primo in secundum 1 ℞. fiet ex primo in secundum numerus $\frac{2ℨ}{5}$ (quod 1 ℨ. ad $\frac{2ℨ}{5}$ proportionem habeat duplam sesquialteram, vt constat, si 1 ℨ. diuidatur per $2\frac{1}{2}$. denominatorem proportionis duplæ sesquialteræ.) Quo diuiso per secundum 1 ℞. fit Quotiens $\frac{2ℨ}{5℞}$ siue $\frac{2℞}{5}$. qui ductus in diuisorem, id est, in 1 ℞. producit $\frac{2ℨ}{5}$. ac proinde primus numerus erit $\frac{2℞}{5}$. quo ablato ex summa primi ac tertij, id est, ex 39 — 1 ℞. reliquus erit tertius numerus $\frac{195 — 7℞}{5}$. in quem si ducatur primus $\frac{2℞}{5}$. producetur numerus $\frac{390℞ — 14ℨ}{25}$. æqualis numero 1 ℨ. qui fit ex medio 1 ℞. in se. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 25 ℨ. & 390 ℞ — 14 ℨ. Et additis 14 ℨ vtrinque, erit æquatio inter 390 ℞. & 39 ℨ. Diuisis igitur 390. per 39. fiet 1 ℞ 10. (quod numeri Cossici sint collaterales.) numerus scilicet medius. Primus ergo positus $\frac{2℞}{5}$. nimirum 2 ℞. diuisæ per 5. erit 4. Et tertius, qui inuentus est $\frac{195 — 7℞}{5}$. hoc est, 195 — 7 ℞. diuisæ per 5. erit 25. ita vt tres partes numeri 39. sint 4. 10. 25. continuè proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex secundo in se, nimirum 100. proportionem habet duplam sesquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in secundum.

QVONIAM vero, datis tribus numeris continuè proportionalibus, b numerus, qui fit ex medio in se, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans se, & primum producit duos illos productos; soluetur hoc ænigma propositum facilius, si per ænigma 49. datus numerus secetur in tres numeros continuè proportionales in proportione data. Ita enim numerus factus ex primo in tertium, hoc est, ex secundo in se, habebit ad factum ex primo in secundum proportionem datam, eandem nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, secandus erit datus numerus 39. in tres numeros continuè duplos sesquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua dupla sesquialtera 1 ℞.

$2\frac{1}{2}$ ℞.

a 20. septimi

b 17. septimi

2 $\frac{1}{2}$ 2e. 6 $\frac{1}{4}$ 2e. quorum summa 9 $\frac{3}{4}$ 2e. æqualis esse debet dato numero 39. Diuisis ergo 39. per 9 $\frac{3}{4}$. fiet 1 2e. 4. primus numerus, qui positus fuit 1 2e. Secundus ergo positus 2 $\frac{1}{2}$ 2e. erit 10. & tertius, quem posuimus 6 $\frac{1}{4}$ 2e. erit 25.

172 ***Datum numerum in duos partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex dato primo numero procreati; hoc est, ita vt radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.*** CLXXII.

SIT datus numerus 10. distribuendus in duos, inter quos √ȝ 1. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars 5 — 1 2e. & maior 5 + 1 2e. vt earum summa sit 10. Ex vna in alteram fit numerus 25 — 1 ȝ. vt in hac formula apparet, æqualis 1. Addito 1 ȝ. vtrobique, fiet æquatio inter 25 & 1 ȝ + 1. Ablataq; 1 vtrobique, inter 24 & 1 ȝ. Diuisis ergo 24. per 1 fiet 1 ȝ. 24. & 1 2e. √ȝ 24. Ergo minor pars posita 5 — 1 2e. erit 5 — √ȝ 24. Maior autem posita 5 + 1 2e. erit 5 + √ȝ 24.

5 — 1 2e
5 + 1 2e
\+ 5 2e — 1 ȝ
25 — 5 2e
25 — 1 ȝ

Atque hæ duæ partes inter se multiplicatæ faciunt 1. vt hic cernitur. Fiet enim multiplicatio, si 24. quadratus posterioris particulæ subtrahetur ex 25. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. a Igitur √ȝ 1. medio loco proportionalis est inter 5 — √ȝ 24. & 5 + √ȝ 24. cum tam hi duo inter se multiplicati, quam ille √ȝ 1. in se, faciat 1. a 20. septimi

5 — √ȝ 24
5 + √ȝ 24
1

PORRO hoc idem ænigma soluemus per compositam quoque æquationem in sequenti cap. ænigmate 38.

173 ***Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*** CLXXIII.

SIT datus numerus 8. diuidendus in duos, vt summa ex eorum quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multiplicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus 4 — 1 2e. & maior 4 + 1 2e. vt simul faciant 8. Quadrati sunt 1 ȝ + 16 — 8 2e. & 1 ȝ + 16 + 8 2e. facientes summam 2 ȝ + 32. cum — 8 2e. & + 8 2e. se

mutuò

mutuò tollant. Hæc summa excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Est autem hic productus 16 — 1 ʒ. vt in apposita formula apparet qui cum 20. faciet numerum 36 — 1 ʒ. æqualem quadratorum summæ 2 ʒ + 32. Addito ergo 1 ʒ. vtrinque, erit æqualitas inter 3 ʒ + 32. & 36. Ablatisq. 32. vtrobique, inter 3 ʒ. & 4. Diuisis ergo 4. per 3. fiet 1 ʒ. $\frac{4}{3}$. & 1 𝔵. √ʒ $\frac{4}{3}$. Cum ergo minor numerus sit positus 4 — 1 𝔵. erit ipse numerus minor 4 — √ʒ $\frac{4}{3}$. Maior autem positus 4 + 1 𝔵. erit 4 + √ʒ $\frac{4}{3}$. qui duo numeri faciunt 8. & quadrati sunt 17 $\frac{1}{3}$ — √ʒ $\frac{256}{3}$. & 17 $\frac{1}{3}$ + √ʒ $\frac{256}{3}$. vt in hisce formulis apparet. quorum summa est 34 $\frac{2}{3}$. quæ superat

4 — 1 𝔵
4 + 1 𝔵
———————
+ 4 𝔵 — 1 ʒ
16 — 4 𝔵
———————
16 — 1 ʒ

4 — √ʒ $\frac{4}{3}$
4 — √ʒ $\frac{4}{3}$
———————
— √ʒ $\frac{64}{3}$ + $\frac{4}{3}$
16 — √ʒ $\frac{64}{3}$
———————
17 $\frac{1}{3}$ — √ʒ $\frac{256}{3}$

4 + √ʒ $\frac{4}{3}$
4 + √ʒ $\frac{4}{3}$
———————
+ √ʒ $\frac{64}{3}$ + $\frac{4}{3}$
16 + √ʒ $\frac{64}{3}$
———————
17 $\frac{1}{3}$ + √ʒ $\frac{256}{3}$

productum 14 $\frac{2}{3}$. ex vno in alterum, numero dato 20. Productus autem hic 14 $\frac{2}{3}$. habetur, si $\frac{4}{3}$. quadratus posterioris particulæ dematur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum est, & altera hæc formula indicat.

4 — √ʒ $\frac{4}{3}$
4 + √ʒ $\frac{4}{3}$
———————
14 $\frac{2}{3}$

SIT rursus datus numerus 40. distribuendus in duos, quorum quadrati summam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum superet numero 403. Ponatur minor numerus 20 — 1 𝔵. & maior 20 + 1 𝔵. facientes summam 40. Quadrati sunt 1 ʒ + 400 — 40 𝔵. & 1 ʒ + 400 + 40 𝔵. quorum summa 2 ʒ + 800. superans numero 403 numerum 400 — 1 ʒ. productũ ex vno in alterum. qui productus habetur, si quadratus 1 ʒ. posterioris particulæ dematur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditumq. est cap. 23. Itaq. si ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter 2 ʒ + 800. summam quadratorum, & 803 — 1 ʒ. Additoq. 1 ʒ. vtrobique, inter 3 ʒ + 800. & 803. Ablatisq. 800. vtrinque, inter 3 ʒ. & 3. Diuisis igitur 3. per 3. fiet 1 ʒ. 1. & 1 𝔵. 1. Erit ergo minor numerus, quem posuimus 20 — 1 𝔵. 19. & maior positus 20 + 1 𝔵. erit 21. qui problema conficiunt.

20 — 1 𝔵
20 + 1 𝔵
———————
400 — 1 ʒ

HOC etiam problema soluemus per compositam æquationem in ænigmate 39. sequentis cap.

SI numerus proponeretur 20. diuidendus in duos, vt summa quadratorum superet numerum ex partium multiplicatione productum

ductum numero 30. foret problema impossibile, vt ex ipsa solutione disces.

174 ***Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.*** CLXXIIII.

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, si ducatur in eundem quadratum mulctatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Eius quadratus auctus octonario erit 1 ʒ + 8. mulctatus vero eodem octonario, 1 ʒ — 8. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 1 ʒʒ — 64. vt hic vides, si 64. quadratus posterioris particulæ, dematur ex 1 ʒʒ. particulæ prioris. qui prodectus æqualis esse debet dato numero 6497. Additis ergo 64. vtrobique, æquatio erit inter 1 ʒʒ. & 6561. Diuisisq. 6561. per 1. fiet 1 ʒʒ. 6561. & radix eius zenfizensica 9. numerus quæsitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus octonario, 73. fitq. numerus 6497. ex 89. in 73.

1 ʒ + 8
1 ʒ — 8
1 ʒʒ — 64

SI iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1 ʒʒ. & 74. Diuisis ergo 74. per 1. fiet 1 ʒʒ. 74. & radix Zenfizensica √ʒʒ 74. numerus quæsitus. Eius enim quadratus √ʒʒ 5476. auctus octonario est √ʒʒ 5476 + 8. & mulctatus octonario, √ʒʒ 5476 — 8. qui duo numeri æquiualent his duobus √ʒ 74 + 8. & √ʒ 74 — 8. atque hi duo inter se multiplicati producunt 10. vt hic vides: quippe cum 64. quadratus posterioris particulæ detractus ex 74. quadrato particulæ prioris relinquat 10.

√ʒ 74 + 8
√ʒ 74 — 8
10

## SCHOLIVM.

*ATQVE hæc dicta sint de ænigmatibus, quæ per simplicem æquationem enodantur. Ad similitudinem enim horum studiosus Lector alia, quotquot voluerit, formare poterit. Quare nunc alia ænigmata proponemus, in quibus soluendis occurrunt æquationes compositæ.*

AENIG-

# AENIGMATA VARIA NVMERORVM abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.

## Cap. XXX.

1. 1 *Datum numerum in duas partes distribuere, vt earum cubi datam summam, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.*

HOC ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. soluemus hic aliter, nimirum per æquationem compositam, in qua vnus numerus Cossicus duobus Cossicis numeris reperitur æqualis: & in qua eruenda est radix ex numero composito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum est. Id quod etiam fiet in alijs huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant summam 370. quæ maior est, quam 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars 1 𝔵. & secunda 10 — 1 𝔵. Cubi harum partium sunt 1 𝔠𝔢. & 1000 — 300 𝔵 + 30 𝔷 — 1 𝔠𝔢. quorum summa 1000 — 300 𝔵 + 30 𝔷. (Nam + 1 𝔠𝔢. & — 1 𝔠𝔢. se mutuò interimunt) æqualis esse debet 370. Additis 300 𝔵 vtrobique, fiet æquatio inter 1000 + 30 𝔷. & 300 𝔵 + 370. Et ablatis 370. vtrinque, inter 630 + 30 𝔷. & 300 𝔵. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30 𝔷. & 300 𝔵 — 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerum maioris characteris Cossici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter 1 𝔷. & 10 𝔵 — 21. quam sic resolues ex doctrina cap. 12. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. a quo demptis 21. propter signum — remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiusmodi enim numeri, in quibus numerus absolutus affectus est signo —. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. summam datam 370. efficiunt, vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum est.

SI eodem numero dato, cuborum summa proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter 1 𝔷. & 10 𝔵 — 20. quam ita resol-

resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. a quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata $\surd\zeta\,5$. addita ad 5. semissem numeri radicum dabit maiorem radicem $\surd\zeta\,5 + 5$. Et eadem radix $\surd\zeta\,5$. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem $5 - \surd\zeta\,5$. vt in eodem ænigmate 141. antecedẽtis cap. inuenimus.

QVO pacto autem ænigma hoc sine Algebra soluendum sit, dictum est supra in ænigmate 141. præcedentis cap.

2 ***Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summæ minor sit dato numero.*** II.

HOC problema cum antecedenti coincidit, vt in ænigmate 142. cap. præcedentis diximus.

3 ***Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat.*** III.

DATVS numerus sit 156. oporteatq. inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipsius numeri inuenti. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratum 1 ζ. cui æqualis debet esse 1 ℞ + 156. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facioq. 156 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{625}{4}$. ad cuius radicẽ $\frac{25}{2}$. hoc est, ad 12 $\frac{1}{2}$. addo semissem numeri radicum, nimirũ $\frac{1}{2}$. efficioq. pretium 1 ℞. 13. qui est numerus quæsitus. Nam 13. cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rursus inueniendus numerus, qui cum 50. faciat suum quadratum. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratum 1 ζ. cui æqualis debet esse 1 ℞ + 50. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facioq. 50 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc est, ad $\surd\zeta\,\frac{201}{4}$. addo semissem numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioq. pretium 1 ℞. $\surd\zeta\,\frac{201}{4} + \frac{1}{2}$. numerum scilicet quæsitum. Huius enim quadratus est $\surd\zeta\,\frac{804}{16} + \frac{202}{4}$. vt in hac formula apparet, hoc est, $\surd\zeta\,\frac{201}{4} + 50\,\frac{1}{2}$. quantum videlicet fit ex numero inuento $\surd\zeta\,\frac{201}{4} + \frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Conflatur enim etiam numerus $\surd\zeta\,\frac{201}{4} + 50\,\frac{1}{2}$. Apposui formulam multiplicationis numeri inuenti $\surd\zeta\,\frac{201}{4} + \frac{1}{2}$. in se quadratè, vt videas, quo pacto quadratus sit productus.

$$\begin{array}{r}
\surd\zeta\,\frac{201}{4} + \frac{1}{2} \\
\surd\zeta\,\frac{201}{4} + \frac{1}{2} \\
\hline
+ \surd\zeta\,\frac{201}{16} + \frac{1}{4} \\
\frac{201}{4} + \surd\zeta\,\frac{201}{16} \qquad \\
\hline
\frac{201}{4} + \surd\zeta\,\frac{804}{16} + \frac{1}{4}
\end{array}$$

IIII. 4 *Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero conficiat ipsius numeri inuenti Zenfizenfum, siue quadrati quadratum.*

SIT datus numerus 83232. oporteatq. inuenire numerum, qui cum 83232. efficiat quadratiquadratum ipsius. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. & quadrati quadratus est 1 ʒʒ. æqualis 1 ʒ + 83232. Semissis numeri zenforum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo numerum 83232. efficioq. 83232 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{332929}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{577}{2}$. addo semissem numeri zenforum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioq. $\frac{578}{2}$. hoc est, 289. quadratum, cuius radix 17. est numerus quæsitus, vt prope finem cap. 12. declaratum est. Nam characteres Cossici ʒʒ. ʒ. N. non sunt collaterales, sed inter quosuis duos medius est vnus: propterea primo loco inuenitur valor vnius quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert numerum, quem inquirimus. Atque ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232. efficit quadrati quadratum 83521. numeri inuenti 17.

V. 5 *Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero conficiat sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum.*

SIT datus numerus 7526792. inueniendusq. alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem est) quadrati cubum. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce. & zenficubus 1 ʒce. æqualis 1 ce + 7526792. atque ex hoc numero composito eruenda est radix zenficubica, hoc modo. Semissis numeri medij characteris ce, nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792. fit numerus 7526792 $\frac{1}{4}$. vel 30107169. ad cuius radicem quadratam $\frac{5487}{2}$. addo semissem prædictam $\frac{1}{2}$ numeri medij characteris ce. facioq. $\frac{5488}{2}$. id est, 2744. radicē quadratam huius numeri 1 ce + 7526792. propter characterem ʒ. qui in maximo charactere Cossico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem ce, in maximo charactere positum, dabit numerum quæsitum, vt cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. conflat suum zenficubum, vel quadrati cubum 7529536.

VI. 6 *Inuenire duos numeros constantes datum numerum, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur alius quiuis datus numerus.*

DATA

DATA summa sit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1 ℞. ideoq. alter 25 — 1 ℞. qui simul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum fit numerus 25 ℞ — 1 ʒ. æqualis 84. Addito 1 ʒ. vtrobique, erit æqualitas inter 25 ℞. & 1 ʒ + 84. Ablatisq. 84. vtrinque, inter 25 ℞ — 84. & 1 ʒ. atque ex numero 25 ℞ — 84. elicienda est radix zensica, hac ratione. Semissis numeri radicũ $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc est, $\frac{336}{4}$. propter signum —, remanet numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. addo prædictam semissem numeri radicum, videlicet $\frac{25}{2}$. efficioq. $\frac{42}{2}$. hoc est 21. vnum ex numeris quæsitis. alter ergo erit 4. qui etiam inuenietur, si vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta semisse numeri radicum, nimirum ex $\frac{25}{2}$. Nam numerus 25 ℞ — 84. duplicem radicem habet, propter signum —, quo absolutus numerus 84. afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt summam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

7 ***Numerum inuenire, cuius zensizensus cum dato numero efficiat numerum in data proportione ad quadratum numeri inuenti.*** VII.

DATVS numerus sit 1183. inueniendusq. sit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius zensizensus 1 ʒʒ. & quadratus, siue zensus 1 ʒ. Erit ergo æquatio inter 1 ʒʒ + 1183. & 176 ʒ. quandoquidem vnus zensizensus cum 1183. debet ad 1 ʒ. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc est, æqualis esse 176 ʒ. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒʒ. & 176 ʒ — 1183. Ex numero hoc 176 ʒ — 1183. sic radicem zensizensicam eruemus. Semissis numeri medij characteris ʒ. est 88. ex cuius quadrato 7744. si tollantur 1183. propter signum —, remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. si addatur prædicta semissis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæsitum. Nam eius zensizensus 28561. cum dato numero 1183. facit numerum 29744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

SED quoniam numerus 176 ʒ — 1183. duplicem habet radicem zensizensicam, maiorem scilicet & minorem, vt cap. 12. traditum est, maior est inuenta 13. quæ problemati satisfacit. Minor autem habebitur, si 81. radicem quadratam residui 6561. subtrahemus ex prædicta semisse 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum √ʒ 7. erit minor radix zensizensica, numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus est 7. & zensizensus 49. qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176. ad 1.

VIII. 8 *Numerum inuenire, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad suum cubum proportionem habeat datam.*

SIT datus numerus 1068664111. inueniendusq. sit alius numerus, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ℭ. & zensicubus 1 ʓℭ. Erit ergo æqualitas inter 1 ʓℭ + 1068664111. & 100000 ℭ. quandoquidem 1 ʓℭ + 1068664111. ad 1 ℭ, proportionem habere debet eandem, quam 100000. ad 1. Ablatis igitur 1068664111. vtrobique, remanebit æqualitas inter 1 ʓℭ. & 100000 ℭ — 1068664111. atque adeo ex 100000 ℭ — 1068664111. eruenda erit radix zensicubica hoc modo. Semissis numeri cuborum est 50000. a cuius quadrato 2500000000. si dematur numerus propositus, propter signum —, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. si addatur semissis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica √ℭ 87833. dabit numerum quæsitum, iuxta doctrinam cap. 12. Nam eius cubus est 87833. & zensicubus 7714635889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833. proportionem habet eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 100000 ℭ — 1068664111. duplicem habet radicem zensicubicam, quarum maior inuenta est √ℭ 87833. satisfaciens ænigmati proposito. Minor ita reperietur. Vltima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta semisse 50000. numeri cuborum detrahatur. Residui namq. 12167. radix cubica 23. erit minor radix satisfaciens quoque ænigmati proposito. Nam eius cubus est 12167. & zensicubus 148035889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

IX. 9 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt ex ductu vnius in alterum gignatur numerus datus quicumque.*

SIT datus excessus 6. & numerus datus 475. Ponatur minor numerus 1 ℞. & maior idcirco 1 ℞ + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1 ʓ + 6 ℞. æqualis 475. Ablatis ergo 6 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 1 ʓ. & 475 — 6 ℞. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9. ad quod adijcio numerum 475. qui intelligitur affectus signo +. Et ex conflato numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam semissem 3. numeri radicum, propter signum —. Reliquus enim numerus 19. erit pretium 1 ℞. Ergo 1 ℞ + 6. valebit 25. Atque

que hi duo numeri 19. & 25. sunt quæsiti. Habent enim excessum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rursus datus excessus 6. & datus numerus 500. Iisdem positis, erit productus numerus 1 ʒ + 6 ℞. æqualis 500. Et ablatis 6 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ. & 500 — 6 ℞. Semissis numeri radicum 3. facit quadratum 9. quod additum ad 500. facit 509. a cuius radice quadrata √ʒ 509. si dematur prædicta semissis 3. fiet minor numerus quæsitus √ʒ 509 — 3. Addito dato excessu 6. fiet maior √ʒ 509 + 3. Ex minore in maiorem fit numerus 509 — 9. vt in hac formula apparet, id est, 500. quia — √ʒ 4581. & + √ʒ 4581. se mutuo interimunt. Vel certe, quia vt cap. 23. traditum est, si 9. quadratum posterioris particulæ auferatur ex 509. quadrato prioris particulæ, remanet numerus productus 500.

| | |
|---|---|
| √ʒ 509 | + 3 |
| √ʒ 509 | — 3 |
| — √ʒ 4581 | — 9 |
| 509 + √ʒ 4581 | |
| 509 | — 9 |

10 *Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet vna cum eiusdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.* X.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum vna cum eiusdem quadrati quadrato efficiat 535086. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. quinquies sumptus facit 5 ʒ. qui numerus vna cum eiusdem numeri 1 ℞. Zensizenso, id est, cum 1 ʒʒ. æqualis esse debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio est inter 5 ʒ + 1 ʒʒ. & 535086. Ablatis 5 ʒ. vtrinque, remanebit æquatio inter 1 ʒʒ. & 535086 — 5 ʒ. atque ex 535086 — 5 ʒ. eliciendа est radix Zensizensica, hunc in modum. Semissis numeri Zensorum $\frac{5}{2}$. facit quadratum $\frac{25}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit 535086 $\frac{25}{4}$. hoc est, $\frac{2140369}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{1463}{2}$. si prædicta semissis $\frac{5}{2}$. dematur, propter signum —, remanebit radix quadrata $\frac{1458}{2}$. hoc est, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zensizensica numeri 535086 — 5 ʒ. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eius quadratus 729. quinquies sumptus facit 3645. qui numerus cum 531441. Zensizenso inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 *Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiusdem zensicubo faciat datum numerum.* XI.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiusdem Zensicubo faciat 1291503906. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius cubus 1 ce, & Zensicubus 1 ʒce. Oportet ergo existere æquationem inter 1 ce + 1 ʒce. & 1291503906. ablatoq. 1 ce vtrinque, inter 1 ʒce.

&

& 1291503906 — 1 ℭ. Ex quo numero eruenda est radix Zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij Cossici est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{5166015625}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{71875}{2}$. si demátur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zensica $\frac{71874}{2}$. id est, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zensicubica numeri 1291503906 — 1 ℭ. nimirum numerus, qui quæritur. Nam eius cubus 35937. cum eiusdem Zensicubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 *Datum numerum in duas partes diuidere, vt maiore per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data.*

NVMERVS 100. diuidendus sit in duas partes, vt maiore diuisa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant summam 2 $\frac{36}{91}$. Ponatur vna pars 1 ℞. & altera 100 — 1 ℞. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100 - 1 ℞}{1 ℞}$. Et illa per hanc diuisa, Quotiens fit $\frac{1 ℞}{100 - 1 ℞}$. quorum Quotientum summa $\frac{10000 - 200 ℞ + 2 ℨ}{100 ℞ - 1 ℨ}$. æqualis esse debet numero 2 $\frac{36}{91}$. siue $\frac{218}{91}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 21800 ℞ — 218 ℨ. & 910000 — 18200 ℞ + 182 ℨ. Additis autem 218 ℨ vtrinque, fiet æquatio inter 21800 ℞. & 910000 — 18200 ℞ + 400 ℨ. Et additis 18200 ℞ vtrobique, inter 40000 ℞. & 910000 + 400 ℨ. Et ablatis 910000. vtrobique, inter 40000 ℞ — 910000. & 400 ℨ. Et diuisis singulis numeris per numerum signo ℨ affectum, id est, per 400. æqualitas erit inter 100 ℞ — 2275. & 1 ℨ. Radix ergo quadrata ita eruetur: Semissis numeri radicum est 50. a cuius quadrato 2500. si detrahantur 2275. propter signum — reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. si addatur prædicta semissis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propositus 100 ℞ — 2275. duplicem radicem habet) si radix quadrata 15. proximè inuenta, auferatur ex prædicta semisse 50. Itaque partes quæsitæ sunt 65. & 35. Et diuisa illa per hanc, & hac per illam, fiunt Quotientes 1 $\frac{6}{7}$. & $\frac{7}{13}$. quæ summam faciunt 2 $\frac{36}{91}$.

XIII. 13 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.*

SIT inueniendus numerus, ad quem quadratus ipsius mulctatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ℨ. si prius ab eo subducantur 264. ad 1 ℞. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio sit

inter

inter 10 ℞. & 1 ʒ — 264. Et additis 264. vtrinque, inter 10 ℞ + 264. & 1 ʒ. quæ ita expedietur. Semissis numeri radicum 5. quadratum facit 25. & additis 264. fit numerus 289. ad cuius radicem quadratam 17. si prædicta semissis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus 484. si amiserit 264. fiet 220. qui numerus decuplus est numeri 22.

14 *Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam.* XIIII.

SIT inueniendus numerus, ad quem ipsius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. cuius quadratus 1 ʒ. si ei addentur 110. ad 1 ℞ proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1. ita vt æquatio fit inter 1 ʒ + 110. & 27 ℞. Ablatisq. 110. vtrinque, inter 1 ʒ. & 27 ℞ — 110. quam ita resolues. Semissis numeri radicum $\frac{27}{2}$. quadratum facit $\frac{729}{4}$. a quo si auferantur 110. id est, $\frac{440}{4}$. reliquus fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addetur prædicta semissis $\frac{27}{2}$. fiet maior radix $\frac{44}{2}$. id est, 22. Et si proxime inuenta radix $\frac{17}{2}$. auferetur a prædicta semisse $\frac{27}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 5. problemati proposito satisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22. eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 25. numeri 5. auctus numero 110. fit 135. qui numerus ad 5. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

15 *Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam summam conficiant: & ijdem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum summa habeat proportionem datam.* X V.

SVMMA quadratorum data sit 180. quæ ad productum numerum proportionem habeat duplam sesquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam sesquialteram, productus numerus ex vno in alterum fit 72. qui numerus 72. habetur, si 180. diuidantur per 2 $\frac{1}{2}$. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæsitus 1 ℞. & alter $\frac{72}{1 ℞}$. vt ex vno in alterum fiant 72. qui numerus $\frac{72}{1 ℞}$. habetur per diuisionem 72. per 1 ℞. quemadmodum si inueniendus sit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. si diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati positorum numerorum 1 ℞. & $\frac{72}{1 ℞}$. sunt 1 ʒ. & $\frac{5184}{1 ʒ}$. quorum summa $\frac{1 ʒʒ + 5184}{1 ʒ}$. æqualis esse debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 ʒʒ + 5184. & 180 ʒ. Ablatisq. 5184. vtrinque, erit æquatio in-

ter

ter 1 ℨℨ. & 180 ℨ — 5184. cuius radicem ita inuenies. Semiſsis numeri medij, qui gerit characterem ℨ. eſt 90. a cuius quadrato 8100. ſi demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916. ad cuius radicem 54. ſi addatur ſemiſsis prædicta 90. fiet ſumma 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap. 12. erit maior radix. Et ſi proxime inuentam radicem 54. demes ex ſemiſſe prædicta 90. reliquus erit numerus 36. cuius radix 6. dabit minorem radicem. quæ etiam habetur, ſi 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12. Itaq. duo quæſiti numeri ſunt 12. & 6. qui inter ſe multiplicati faciunt 72. ad quem numerum ſumma data quadratorum ex ipſis procreatorum, qui ſunt 144. & 36. nimirum 180. proportionem habet duplam ſeſquialteram, quemadmodum propoſitum eſt.

XVI. 16 *Datum numerum in tres numeros continuè proportionales diuidere, ita vt productus ex primo in ſecundũ, cum producto ex ſecundo in tertium, vnà cum eo, qui fit ex tertio in primum faciat quemlibet numerum datum.*

SIT datus numerus 76. diuidendus, ita vt tres producti efficiant 1824. Quoniam datis tribus numeris continuè proportionalibus, [a] qui fit ex medio in ſummam omnium, æqualis eſt eis, qui fiunt ex medio in primum, & ex medio in tertium, & ex medio in ſe, hoc eſt, ex tertio in primum, [b] cum hic æqualis ſit ei, qui fit ex medio in ſe: ſi datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cum Quotiens 24. ductus in diuiſorem 76. id eſt, in ſummam omnium trium, gignat numerum diuiſum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. ſumma omnium, reliqua fiet ſumma primi & tertij, 52. Ponatur ergo primus 1 ℞. eritq. propterea tertius 52 — 1 ℞. ita vt tres numeri proportionales ſint 1 ℞. 24. 52 — 1 ℞. [c] Igitur qui fit ex 1 ℞ in 52 — 1 ℞. id eſt, 52 ℞ — 1 ℨ. æqualis erit numero 576. qui ex medio 24. fit in ſe. Addito ergo 1 ℨ vtrinque, erit æquatio inter 52 ℞. & 1 ℨ + 576. Ablatisq. 576. vtrobique, inter 52 ℞ — 576. & 1 ℨ. quæ æquatio ita reſoluetur. Semiſsis numeri radicum eſt 26. a cuius quadrato 676. ſi demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. ſi addatur prædicta ſemiſsis 26. fiet pretium radicis 36. primus numerus. tertius autem erit 16. nimirum 52 — 1 ℞. ita vt tres numeri proportionales ſint, 36. 24. 16. facientes ſummam 76. & tres producti ex primo in ſecundum, & ex ſecundo in tertium, & ex tertio in primum efficiunt 1824.

Quoniam vero numerus 52 ℞ — 576. duplicem habet radicem, reperietur minor, ſi radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta ſemiſſe

Marginal notes: [a] 1. ſecundi. [b] 20. ſeptimi [c] 20. ſeptimi semisse 26. auferatur. Relinquetur enim pretium vnius radicis 16. primus numerus, tertius autem erit 36. nimirum 52 — 1 ℞. Eruntq. rursum tres numeri proportionales 16. 24. 36. qui prius, inuerso tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris siue æqualibus, siue inæqualibus, alium inuenire, qui vtrilibet eorum additus faciat summam, quæ ducta in additum, hoc est, in inuentum, producat quadratum alterius numeri.* XVII.

HOC problema soluimus in lineis, in scholio propos. 36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10. & 12. inueniendusq. sit alius, qui additus primum ad 10. faciat numerum, qui ductus in additum, procreet quadratum alterius 12. nimirum 144. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Addito numero 10. fit numerus 1 ℞ + 10. qui ductus in 1 ℞. facit 1 ȝ + 10 ℞. qui numerus æqualis esse debet 144. Ablatis 10 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ. & 144 — 10 ℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. & additis 144. fit numerus 169. a cuius radice quadrata 13. si prædicta semissis 5. auferatur, propter signum —, remanebit pretium radicis 8. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8. facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui additus ad 12. faciat numerum, qui ductus in additum producat 100. quadratum alterius numeri 10. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. qui cum 12. facit 1 ℞ + 12. Hic ductus in 1 ℞. facit numerum 1 ȝ + 12 ℞. æqualẽ 100. Ablatis 12 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ. & 100 — 12 ℞. quam ita resolues. Semissis numeri radicum 6. facit quadratum 36. additisq. 100. fit numerus 136. a cuius radice quadrata √ȝ 136. si detrahes semissem prædictam 6. relinquetur pretium radicis, √ȝ 136 — 6. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit √ȝ 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum √ȝ 136 — 6. producit numerum 100. quæ quidem multiplicatio perficietur, vt cap. 23. scripsimus, si quadratum posterioris particulæ 6. nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturq. inuentus 1 ℞. Ex 1 ℞. & 8. fit numerus 1 ℞ + 8. qui ductus in 1 ℞ facit 1 ȝ + 8 ℞. numerum æqualem 64. quadrato numeri 8. Ablatis 8 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ. & 64 — 8 ℞. Semissis numeri radicum est 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. a cuius radice quadrata √ȝ 80. si dematur prædicta semissis 4. remanet numerus √ȝ 80 — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8. facit summam √ȝ 80 + 4. quæ ducta in inuentum, vel additum √ȝ 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc sequens formula

√ℨ 80 — 4
√ℨ 80 + 4
64

docet. Nam 16. quadratus posterioris particulæ 4. ablatus ex 80. quadrato prioris particulæ √ℨ 80. relinquit 64.

XVIII. 18 *Numerum inuenire medium inter numerum quotlibet vnitatibus maiorem, & alium numerum quotuis vnitatibus minorem; ita vt extremi duo inter se multiplicati faciant datum quemcunque numerum.*

SIT inueniendus numerus medius inter numerum, qui ipsum nouenario superet, & alium numerum, quem ipse ternario superet; ita vt extremi inter se multiplicati faciant 133. Ponatur quæsitus numerus medius 1 ℞. inter 1 ℞ + 9. & 1 ℞ — 3. Ita enim à priore superatur nouenario, & posteriorem ternario superat. Hi duo extremi inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ + 6 ℞ — 27. æqualem 133. Additis 27 vtrobique, fiet æqualitas inter 1 ℨ + 6 ℞. & 160. Ablatisq. 6 ℞. vtrinque, inter 1 ℨ. & 160 — 6 ℞. quæ ita absoluetur. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 160. fit numerus 169. a cuius radice quadrata 13. si auferatur semissis prædicta 3. relinquetur pretium 1 ℞. 10. numerus scilicet medius quæsitus: eruntq. extremi 19. & 7. atque inter se multiplicati faciunt 133.

SIT rursum inquirendus numerus medius inter duos, vt prius; ita vt extremi inter se multiplicati faciant 40. Inuenientur rursus extremi 1 ℞ + 9. & 1 ℞ — 3. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℨ + 6 ℞ — 27. æqualem 40. Additis ergo 27. vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨ + 6 ℞. & 67. Ablatisq. 6 ℞. vtrinque, inter 1 ℨ. & 67 — 6 ℞. Semissis numeri radicũ est 3. ad cuius quadratum 9. addita 67. fit numerus 76. a cuius radice quadrata √ℨ 76. si demattur prædicta semissis 3. propter signum —. relinquetur pretium radicis √ℨ 76 — 3. numerus medius, qui quæritur: a quo si detrahantur 3. fiet minor extremus √ℨ 76 — 6. & si addantur 9. fiet maior extremus √ℨ 76 + 6. qui extremi inter se multiplicati faciunt 76 — 36. hoc est, 40. Nam + √ℨ 2736. & — √ℨ 2736. se mutuò interimunt, vt in apposita formula apparet. Vel etiam, quia 36. quadratum posterioris particulæ 6. demptum ex 76. quadrato prioris particulæ relinquit 40. vt cap. 23. docuimus.

√ℨ 76 — 6
√ℨ 76 + 6
+ √ℨ 2736 — 36
76 — √ℨ 2736
76 — 36

HOC problema soluimus etiam cap. præcedenti ænigmate 206. per simplicem æquationem.

19 *Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita vt duo illi inter se multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat.* XIX.

SIT quærendus numerus, qui duos alios superet numeris 8. & 6. ita vt illi duo inter se multiplicati procreent numerum quaternario maiorem numero inuento. Ponatur numerus, qui quæritur 1 ℞. Duo ergo illi minores erunt 1 ℞ — 8. & 1 ℞ — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ʒ — 14 ℞ + 48. æqualem 1 ℞ + 4. vt nimirum positum 1 ℞. superet quaternario. Ablatis 4 vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ — 14 ℞ + 44. & 1 ℞. Et additis 14 ℞ vtrobique, inter 1 ʒ + 44. & 15 ℞. Et ablatis 44 vtrinque, inter 1 ʒ. & 15 ℞ — 44. Semissis numeri radicum est $\frac{15}{2}$. a cuius quadrato $\frac{225}{4}$. ablatis 44. siue $\frac{176}{4}$. propter signum — remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si prædicta semissis $\frac{15}{2}$. addatur, fiet pretium radicis $\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Ergo duo numeri minores erunt 3. & 5. qui inter se multiplicati faciunt 15. hoc est, 11 + 4.

QVIA vero numerus hic 15 ℞ — 44. duplicem radicem habet, si radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{7}{2}$. dematur ex prædicta semisse $\frac{15}{2}$. reliqua fiet minor radix $\frac{8}{2}$. hoc est, 4. numerus quæsitus. a quo si auferes 8. & 6. erunt duo alij numeri minores — 4. & — 2. qui inter se multiplicati faciunt + 8. qui numerus inuentum numerum 4. superat quaternario. Vbi vides, numeros etiam absurdos, siue fictos, hoc est, minores nihilo, satisfacere ænigmati proposito. quod alicui fortassis mirum videri possit.

## SCHOLIVM.

*IN ænigmatibus huic similibus accidit nonnunquam, æquationem inueniri simplicem: tunc nimirum, quando in numero producto ex multiplicatione duorum numerorũ Cossicorum reperitur numerus absolutus æqualis excessui dato; quia tunc aufertur ille numerus absolutus, remanetq. æquatio inter ʒ. & ℞. quod studiosum Lectorem monitum volo, ne turbetur, cum viderit aliquando occurrere æquationem duplicem, & aliquando simplicem, in varijs exemplis eiusdem ænigmatis. Sit enim quærendus numerus, qui alios duos superet numeris 8. & 6. ita vt duo illi inter se multiplicati procreent numerum, qui inuentum numerum excedat numero 48. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Duo ergo illi minores erunt 1 ℞ — 8. & 1 ℞ — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 1 ʒ — 14 ℞ + 48. æqualem 1 ℞ + 48. Ablatis 48. vtrinque, erit æqualitas inter 1 ʒ — 14 ℞. & 1 ℞. additisq. 14 ℞. vtrobique, inter 1 ʒ. & 15 ℞. quæ æquatio simplex est. Diuisis ergo 15. per 1. fiet 1 ℞ 15. (quod numeri Cossici ʒ. & ℞. collaterales sint) ni-*

*mirum numerus quæsitus. Igitur alij duo minores erunt 7. & 9. qui inter se multiplicati producunt numerum 63. qui inuentum 15. excedit numero 48.*

XX. 20 ***Numerum inuenire, quem alij duo excedant datis numeris, ita vt duo illi inter se multiplicati procreent numerum, qui datum multiplicem quadrati ex inuento numero geniti, superet dato numero.***

SIT inueniendus numerus, quem alij duo superent numeris 7. & 19. qui inter se multiplicati excedant triplum quadrati ex inuento numero procreati, numero 73. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Ergo duo alij maiores erunt 1 ℞ + 7. & 1 ℞ + 19. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 1 ʒ + 26 ℞ + 133. æqualem 3 ʒ + 73. Nam ita superabit triplum quadrati ex 1 ℞. descripti numero 73. Ablatis 73. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ + 26 ℞ + 60. & 3 ʒ. Ablatoq. 1 ʒ vtrobique, inter 26 ℞ + 60. & 2 ʒ. Diuisisq. omnibus numeris per numerum zensorum, id est, per 2. erit æquatio inter 13 ℞ + 30. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est $\frac{13}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{169}{4}$. additis 30. siue $\frac{120}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{17}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{13}{2}$. fiet 1 ℞ $\frac{30}{2}$. id est, 15. numerus, qui quæritur. Ergo duo numeri maiores erunt 22. & 34. qui inter se multiplicati faciunt numerum 748. qui triplū quadrati 225. ex inuento numero 15. procreati, nimirum numerum 675. superat numero 73.

XXI. 21 ***Numerum inuenire, cuius multiplex quiuis cum eiusdem numeri quadrato faciat datum numerum.***

SIT inueniendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 400. Ponatur numerus, quem quærimus, 1 ℞. Huius quadruplum 4 ℞. cum eiusdem quadrato 1 ʒ. facit numerum 1 ʒ + 4 ℞. æqualem 400. Subtractis 4 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ. & 400 — 4 ℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 400. fit numerus 404. a cuius radice quadrata √ʒ 404. si prædicta semissis 2. dematur, fiet 1 ℞. √ʒ 404 — 2. numerus quæsitus. Eius quadruplum √ʒ 6464 — 8. vnà cum eius quadrato, quod est 404 — √ʒ 6464 + 4. (vt in apposita formula liquet)

| | |
|---|---|
| √ʒ 404 — 2 | |
| √ʒ 404 — 2 | |
| — √ʒ 1616 + 4 | 404 — √ʒ 6464 + 4 |
| 404 — √ʒ 1616 | + √ʒ 6464 — 8 |
| 404 — 6464 + 4 | 404 — — 4 |

facit

facit numerum 404 — 4. hoc est, 400. quia — √ℨ 6464. & + 6464. se mutuò interimunt, vt altera formula monstrat.

ITEM sit inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 780. Posita 1 ℞ erit eius quadruplum 4 ℞ vna cum eius quadrato 1 ℨ numerus 1 ℨ + 4 ℞. æqualis 780. Subtractisq. 4 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 1 ℨ. & 780 — 4 ℞. Semissis numeri radicum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. a cuius radice quadrata 28. si tollatur prædicta semissis 2. fiet 1 ℞. 26. numerus, quem inquirimus. Eius quadruplum 104. vna cum eiusdem quadrato 676. facit 780.

22 *Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter se multiplicati producant datum ipsum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam summam quamcunque.* XXII.

SIT datus numerus 8. inueniendiq. sint alij duo, qui inter se multiplicati faciant ipsum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 $\frac{7}{9}$. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 $\frac{7}{9}$. vt patet, si dati numeri 8. quadratus 64. detrahatur ex 101 $\frac{7}{9}$. summa omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui quæritur 1 ℞. Et quia alter in hunc ductus debet facere 8. si 8. diuidantur per 1 ℞, erit Quotiens $\frac{8}{1 ℞}$. alter numerus. Nam ductus in diuisorem 1 ℞. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1 ℞ & $\frac{8}{1 ℞}$. sunt 1 ℨ. & $\frac{64}{1 ℨ}$. qui summam faciunt $\frac{1 ℨℨ + 64}{1 ℨ}$. æquale 37 $\frac{7}{9}$. siue $\frac{340}{9}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 9 ℨℨ + 576. & 340 ℨ. Ablatisq. 576. vtrobique, erit æquatio inter 9 ℨℨ. & 340 ℨ — 576. Diuisis omnibus numeris per numerum 9. charactere maximo ℨℨ. insignitum, fiet æquatio inter 1 ℨℨ. & $\frac{340}{9}$ ℨ — 64. Semissis numeri Zensorum est $\frac{170}{9}$. a cuius quadrato $\frac{28900}{81}$. hoc est, a 356 $\frac{64}{81}$. Si demantur 64. remanent 292 $\frac{64}{81}$. hoc est, $\frac{23716}{81}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{154}{9}$. si addatur prædicta semissis Zensorum $\frac{170}{9}$. fiet 1 ℨ $\frac{324}{9}$. (quia inter Cossicos numeros binos medij sunt singuli) hoc est, 36. cuius radix quadrata 6. erit vnus numerorum, quem posuimus 1 ℞. ac proinde alter numerus, quem posuimus $\frac{8}{1 ℞}$. hoc est, 8. diuisa per 1 ℞ nimirum per 6. erit 1 $\frac{1}{3}$. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus $\frac{340}{9}$ ℨ — 64. duplicem habet radicem, si radix quadrata $\frac{154}{9}$. vltimo loco inuẽta tollatur ex prædicta semisse $\frac{170}{9}$. reliquus erit alter Zensus $\frac{16}{9}$. siue $\frac{16}{9}$. cuius radix quadrata $\frac{4}{3}$. siue 1 $\frac{1}{3}$. efficeret alterum numerum. Itaq. duo numeri quæsiti sunt 6. & 1 $\frac{1}{3}$. qui inter se multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36. & $\frac{16}{9}$. siue 1 $\frac{7}{9}$. faciunt 37 $\frac{7}{9}$. ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 $\frac{1}{3}$. faciunt summam 101 $\frac{7}{9}$.

XXIII. *23 Duos numeros inuenire datam efficientes summam, & qui inter se multiplicati producant datum numerum, qui maior non sit quadrato ex semisse datæ summæ descripto.*

VEL

*Datum numerum in duos distribuere, vt ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri.*

QVAERENDI sint duo numeri conficientes summam 100. Vel (quod idem est.) Datus numerus 100. secandus sit in duos, qui inter se multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 1 ℞. ideoq. alter 100 — 1 ℞. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 100 ℞ — 1 ʒ. æqualem 10. Addito 1 ʒ. vtrinque, erit æqualitas inter 100 ℞. & 10 + 1 ʒ. Ablatisq. 10. vtrobique, inter 100 ℞ — 10. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est 50. a cuius quadrato 2500. ablatis 10 remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam √ʒ 2490. si addatur prædicta semissis 50. fiet 1 ℞. √ʒ 2490 + 50. vnus numerorum, quem posuimus 1 ℞. Alter ergo erit 100 — √ʒ 2490 + 50. hoc est, 100. demptis √ʒ 2490 + 50. qui numerus est 50 — √ʒ 2490 Nam ablatis √ʒ 2490 + 50. ex √ʒ 0 + 100. remanent — √ʒ 2490 + 50. hoc est, 50 — √ʒ 2490. vt hæc formula indicat.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ʒ}\ 0 + 100 \\ \sqrt{ʒ}\ 2490 + 50 \\ \hline -\sqrt{ʒ}\ 2490 + 50 \end{array}$$

Itaq. duo numeri quæsiti sunt √ʒ 2490 + 50. & 50 — √ʒ 2490. qui faciunt summam 100. quippe cum + √ʒ 2490. & — √ʒ 2490. se mutuò destruant. Et ex vno in alterum, hoc est, ex 50 + √ʒ 2490. in 50 — √ʒ 2490. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, si quadratum 2490. posterioris particulæ dematur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum est.

$$\begin{array}{r} 50 + \sqrt{ʒ}\ 2490 \\ 50 - \sqrt{ʒ}\ 2490 \\ \hline 10 \end{array}$$

QVONIAM vero æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eosdem numeros per alteram radicem minorem. Si namq. radix quadrata √ʒ 2490 vltimo loco inuenta dematur ex prædicta semisse 50. fiet 1 ℞. 50 — √ʒ 2490. vnus videlicet numerorum, quos quærimus: alter erit 50 + √ʒ 2490. qui nimirum remanet, si numerus 50 — √ʒ 2490. detrahatur ex 100. vt in hac formula vides.

$$\begin{array}{r} 100 + \sqrt{ʒ}\ 0 \\ 50 - \sqrt{ʒ}\ 2490 \\ \hline 50 + \sqrt{ʒ}\ 2490 \end{array}$$

Atque ita inuenti sunt ijdem numeri 50 — √ʒ 2490. & 50 + √ʒ 2490. ordine tamen inuerso.

DEBET autem numerus productus datus non maior esse quadrato, qui ex semisse datæ summæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus

dratus semissis maior est, numero, qui ex partibus inaequalibus producitur, cum hic vna cum quadrato intermediae sectionis aequalis sit illi quadrato. Vnde numerus 12. diuidi non potest in duas partes, vt ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Id quod pulchrè nos docet aequatio. Posita enim vna parte 1 ℞. & altera 12 — 1 ℞. fiet aequatio inter 1 ȝ. & 12 ℞ — 40. Et quia ex 36. quadrato semissis numeri radicum auferri nequit numerus absolutus 40. pronunciabis, quaestionem esse impossibilem. a schol. 14. noni.

24 *Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero superetur dato numero, & alium excedat alio numero dato, vt extremi inter se multiplicati producant datum quemlibet numerum.* XXIIII.

QVAERENDVS sit numerus, cuius quadratus superetur quinario ab alio numero, & alium quendam superet binario, & duo extremi inter se multiplicati faciant 2538. Ponatur numerus ille 1 ℞. cuius quadratus 1 ȝ. Maior ergo erit 1 ȝ + 5. & minor 1 ȝ — 2. qui duo inter se multiplicati gignunt numerum 1 ȝȝ + 3 ȝ — 10. aequalem 2538. Additisq. 10. vtrobique, erit aequatio inter 1 ȝȝ + 3 ȝ. & 2548. Et ablatis 3 ȝ vtrinque, inter 1 ȝȝ. & 2548 — 3 ȝ. Quaerenda ergo est radix Zensizensica, hoc modo. Semissis numeri Zensorum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$ addito 2548. siue $\frac{10192}{4}$ fit numerus $\frac{10201}{4}$ cuius radice quadrata $\frac{101}{2}$ subtracta praedicta semissis $\frac{3}{2}$, remanet numerus $\frac{98}{2}$ hoc est 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum quaesitum. Huius enim quadratus 49. est inter 54. quinario maiorem, & 47. binario minorem, fitq. ex 47. in 54. numerus datus 2538.

25 *Numerum inuenire, a cuius quadrato quadrati subtracti quotuis quadrati eiusdem numeri, relinquant datum numerum quemcunque.* XXV.

QVAERENDVS sit numerus, cuius quatuor quadrati subtracti ab eiusdem quadrato quadrati relinquant 2205. Ponatur numerus 1 ℞. cuius quadratus 1 ȝ. & quatuor quadrati 4 ȝ. detracti ex 1 ȝȝ. nimirum ex quadrati quadrato positi numeri 1 ℞. relinquunt numerum 1 ȝȝ — 4 ȝ. aequalem 2205. Additisq. 4 ȝ. vtrobique, erit aequatio inter 1 ȝȝ. & 4 ȝ + 2205. Quaerenda ergo est radix zensizensica hoc modo. Semissis numeri zensorum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 2205. fit numerus 2209. ad cuius radicem quadratam 47. addita praedicta semisse 2. fit numerus 49. cuius radix quadrata 7. dabit numerum, qui quaeritur. Eius enim quatuor quadrati 196. dempti ex eiusdem zensizensio 2401. relinquunt 2205. numerum datum.

XXVI. 26 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati gignant numerum datum, & summa quadratorum ex eiusdem numeris procreatorum sit etiam data.*

DVO numeri inueniri faciant inter se multiplicati 78. & eorum quadrati summam 205. Quoniam, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri se multiplicantes producunt numerum medio loco proportionalem inter quadratos eorundem numerorum; si minor quadratus ponatur 1 ʒ, ideoq. maior 205 — 1 ʒ. erit numerus 78. medio loco proportionalis inter quadratos 1 ʒ. & 205 — 1 ʒ.
a 20. septimi ac proinde numerus 205 ʒ — 1 ʒʒ, productus ex 1 ʒ in 205 — 1 ʒ. aequalis erit quadrato numeri medii 78. hoc est, numero 6084. Addito ergo 1 ʒʒ vtrinque, erit aequatio inter 1 ʒʒ + 6084. & 205 ʒ. Ablatisq. 6084. vtrobique, inter 1 ʒʒ. & 205 ʒ — 6084. Eruenda ergo est radix Zensizensica, quod ita fiet. Semissis numeri Zensorum est $\frac{205}{2}$, ex cuius quadrato $\frac{42025}{4}$, ablatis 6084. siue $\frac{24336}{4}$, remanent $\frac{17689}{4}$, ad cuius numeri radicem quadratam $\frac{133}{2}$, si addatur predicta semissis $\frac{205}{2}$, fiet numerus $\frac{338}{2}$, hoc est, 169. vnus quadratus, cuius radix 13. dabit vnum numerorum, nimirum maiorem. Et quia numerus 205 ʒ — 6084. duplicem habet radicem, inuenietur altera radix, si radicem vltimo loco inuentam $\frac{133}{2}$, detrahemus ex predicta semisse $\frac{205}{2}$. Reliquus enim numerus $\frac{72}{2}$, id est, 36. dabit minorem quadratum, cuius radix 6. dabit alterum numerorum. Sunt ergo duo numeri inuenti 6. & 13. qui inter se multiplicati faciunt 78. & eorum quadrati 36. & 169. faciunt summam 205.

IN numeris irrationalibus idem hoc problema expedietur, si duo numeri inueniendi sint, qui inter se multiplicati faciant 100. & summa quadratorum sit 300. Posito enim vno quadrato 1 ʒ. erit alter 300 — 1 ʒ. inter quos numerus 100. erit medius proportionalis, vt ex sequenti Lemmate constabit. Ex 1 ʒ. in 300 — 1 ʒ. fit
b 20. septimi numerus 300 ʒ — 1 ʒʒ. b aequalis numero 10000. qui fit ex medio 100. in se. Addito ergo 1 ʒʒ. vtrinque, erit aequatio inter 1 ʒʒ + 10000. & 300 ʒ. Et ablatis 10000. vtrobique, inter 1 ʒʒ. & 300 ʒ — 10000. Eruenda ergo hic etiam erit duplex radix Zensizensica, hoc videlicet modo. Semissis numeri Zensorum est 150. a cuius quadrato 22500. demptis 10000. remanet numerus 12500. ad cuius radicem quadratam √ʒ 12500. si addatur predicta semissis 150. fiet maior quadratus √ʒ 12500 + 150. cuius radix quadrata, nimirum √ʒ (√ʒ 12500 + 150.) dabit maiorem numerum. Et si radix illa √ʒ 12500. tolletur ex semisse predicta 150. reliquus erit minor quadratus 150 — √ʒ 12500. cuius radix quadrata √ʒ (150 — √ʒ 12500) dabit minorem numerum quaesitum. Nam ex maiore radice √ʒ (√ʒ 12500 + 150) in minorem radicem √ʒ (150 — √ʒ 12500) si nimirum earum quadrata inter se multiplicentur, vt

cap.

cap. 24. dictum est, & in hac formula apparet, fit numerus

| | |
|---|---|
| | √ℨ (√ℨ 12500 + 150) |
| | √ℨ (150 — √ℨ 12500) |
| | — 12500 — √ℨ 281250000 |
| + √ℨ 281250000 + 22500 | |
| Productus. √ℨ 10000 | |

√ℨ 10000. hoc est, datus numerus 100. Item quadrati √ℨ 12500 + 150. & 150 — √ℨ 12500. faciunt summam 300. vt manifestum est.

PRAEDICTA autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quæ cap. 22. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita constituantur. Nam si 12500. quadratum posterioris particulæ dematur ex 22500. quadrato particulæ prioris 150. remanebit numerus 10000. Præposito ergo signo √ℨ. fiet productus numerus √ℨ 10000.

| |
|---|
| √ℨ (150 + √ℨ 12500) |
| √ℨ (150 — √ℨ 12500) |
| √ℨ 10000 |

## L E M M A.

*DVO numeri inter se multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportione ipsorum numerorum.*

*SINT enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in se, fiat quadratus D, & ex B, in se quadratus E.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. 3. | B. 4. | | | | |
| D. 9. | C. 12. | E. 16. | | | |

*Dico C, medium proportionalem esse inter D, & E; id est, E, C, D, esse continuè proportionales in proportione B, ad A. Quoniam enim A, multiplicans B, & A, fecit C, & D; [a] erit C, ad D, vt B, ad A. Item quia B, multiplicans B, & A, fecit E, & C; [b] erit quoque E, ad C, vt B, ad A. Igitur E, C, D, continuè proportionales sunt in proportione B, ad A. quod est propositum.* a 17. septimi b 17. septimi

## C O R O L L A R I V M.

HINC fit, si duo numeri se mutuò multiplicantes producunt aliquem numerum, quadratos ipsorum numerorum se mutuò multiplicantes producere quadratũ numeri producti. Cũ enim numerus 12 ex 3. in 4. productus sit medio loco proportionalis inter eorũ quadratos 9. & 16. [c] fiet ex 9. in 16. quadratus numeri 12. c 20. septimi

## SCHOLIVM.

*IDEM hoc ænigma 26. soluetur sine præcedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo unus numerorum 1 ℞. ideoq. alter erit $\frac{78}{1 ℞}$. ut ex mutua eorum multiplicatione producatur numerus 78. Quadrati eorum 1 ℨ. & $\frac{6084}{1 ℨ}$. faciunt summam $\frac{1 ℨℨ + 6084}{1 ℨ}$. æqualem 205. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ℨℨ + 6084. & 205 ℨ. Ablatisq. 6084. utrinque, erit æquatio inter 1 ℨℨ. & 205 ℨ — 6084. ut prius.*

*RVRSVS in posteriori exemplo ponatur unus numerorum 1 ℞. eritq. alter $\frac{100}{1 ℞}$. ut eorum multiplicatio faciat 100. Quadrati eorum 1 ℨ. & $\frac{10000}{1 ℨ}$. faciunt summam $\frac{1 ℨℨ + 10000}{1 ℨ}$. æqualem 300. quæ æquatio per multiplicationẽ in crucem reducetur ad hanc inter 1 ℨℨ + 10000. & 300 ℨ. Ablatisq. 10000. utrobique, erit æquatio inter 1 ℨℨ. & 300 ℨ — 10000. ut supra.*

XXVII. **27 *Duos numeros inuenire facientes summam datam, quorum quadrati faciant quoque datam summam.***

SIT summa numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 1 ℞. ideoq. secundus 19 — 1 ℞. Quadrati eorum 1 ℨ. & 361 — 38 ℞ + 1 ℨ. faciunt summam 361 — 38 ℞ + 2 ℨ. æqualem 205. Additis 38 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 361 + 2 ℨ. & 38 ℞ + 205. Et ablatis 205. vtrinque, inter 156 + 2 ℨ. & 38 ℞. Et rursum ablatis 156. vtrinque, inter 2 ℨ. & 38 ℞ — 156. Diuisisq. omnibus per 2. numerum zensorum, erit æquatio inter 1 ℨ. & 19 ℞ — 78. quam ita resolues. Semissis numeri radicum est $\frac{19}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{361}{4}$. detractis 78. hoc est, $\frac{312}{4}$. remanet numerus $\frac{49}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{2}$. si addatur prædicta semissis $\frac{19}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Cossicus duas radices habet) $\frac{26}{2}$. id est, 13. primus numerus quæsitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 1 ℞. qui numerus 6. erit quoque minor radix, quæ habebitur, si vltima radix inuenta $\frac{7}{2}$. ex prædicta semisse $\frac{19}{2}$. detrahatur; remanet enim numerus $\frac{12}{2}$. siue 6. Numeri ergo qui quæruntur, sunt 13. & 6. quorum summa 19. & summa quadratorum 205.

RVRSVM summa numerorum sit 30. & quadratorum 600. Posito, primo numero 1 ℞. & secundo 30 — 1 ℞. facient quadrati summam 900 — 60 ℞ + 2 ℨ. æqualem 600. Additis 60 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 900 + 2 ℨ. & 60 ℞ + 600. Et ablatis 600. vtrobique, inter 300 + 2 ℨ. & 60 ℞. Et rursum ablatis 300. vtrinque, inter 2 ℨ. & 60 ℞ — 300. Diuisisq. omnibus numeris per 2. numerum Zensorum, æquatio erit inter 1 ℨ. & 30 ℞ — 150. cuius radix ita nota fiet. Semissis numeri radicum est 15. a cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicem quadratam

√ℨ 75.

√ȝ 75. si addetur prædicta semissis 15. fiet maior radix √ȝ 75 + 15. prior numerus, qui positus est 1 ℞. Et si eadem radix quadrata √ȝ 75 tolletur ex prædicta semisse 15. reliqua fiet minor radix 15 — √ȝ 75. qui numerus æqualis est posteriori numero 30 — 1 ℞. Nam si ex 30. detrahatur radix inuenta √ȝ 75 + 15. remanebit numerus 15 — √ȝ 75. vt hæc formula docet. Eruntq. duo numeri quæsiti √ȝ 75 + 15. & 15 — √ȝ 75. quorum summa est 30. & quadratorum summa 600. vt duæ hæ formulæ indicant.

| |
|---|
| 30 + √ȝ 0 |
| 15 + √ȝ 75 |
| 15 — √ȝ 75 |

| | |
|---|---|
| √ȝ 75 + 15 | 15 — √ȝ 75 |
| √ȝ 75 + 15 | 15 — √ȝ 75 |
| + √ȝ 16875 + 225 | — √ȝ 16875 + 75 |
| 75 + √ȝ 16875 | 225 — √ȝ 16875 |
| 300 + √ȝ 67500 | 300 — √ȝ 67500 |

DEBET autem summa quadratorum esse maior semisse quadrati, qui ex data summa numerorum gignitur, & minor quadrato eiusdem summæ. Itaq. si summa numerorum proponeretur 30. & quadratorum 400. foret quæstio impossibilis. Nam summa quadratorum maior non est semisse quadrati 900. ex data summa 30. producti. Atque ita occurreret vltima æquatio inter 1 ȝ. & 30 ℞ — 250 quæ resolui nequit. Nam ex 225 quadrato semissis numeri radicum auferri non possunt 250. &c.

QVOD si quadratorum summa sit maior quadrato summę numerorum propositorum, solui etiam non poterit problema, nisi concedamus, vnum numerum esse maiorem ipsa summa; & alterum minorem nihilo. Vt si summa detur 40. & summa quadratorum 1602. Ponemus vnum numerum 1 ℞. & alterum 40 — 1 ℞. Quadrati eorum 1 ȝ. & 1600 — 80 ℞ + 1 ȝ. faciunt summam 1600 — 80 ℞ + 2 ȝ. æqualem 1602. Additis 80 ℞. vtrobique, erit æquatio inter 1600 + 2 ȝ. & 80 ℞ + 1602. Et ablatis 1600. vtrinque, inter 2 ȝ. & 80 ℞ + 2. Diuisisq. omnibus per 2. numerum Zensorum, inter 1 ȝ. & 40 ℞ + 1. Iam semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. si addatur 1. fiunt 401. Et si ad √ȝ 401. addatur prædicta semissis 20. fiet 1 ℞. 20 + √ȝ 401. prior numerus, quem posuimus 1 ℞. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus posterior 20 — √ȝ 401. vt in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + √ȝ 401. maiorem esse, quam 40. cum √ȝ 401. maior sit, quam 20. posteriorẽ verò 20 — √ȝ 401. minorem esse nihilo, nimirum 20. — 20$\frac{1}{41}$. quorum vtrumque ineptum est. Et tamen quæstioni satisfaciunt. Nam simul efficiunt summam 40. cum + √ȝ 401. & — √ȝ 401. se mutuò interimant: & eorum quadrati 801 + √ȝ 641600. & 801 —

| |
|---|
| 40 + √ȝ 0 |
| 20 + √ȝ 401 |
| 20 — √ȝ 401 |

√ȝ 641600. summam faciant 1602. Simile quid habuisti in ænigmate 149. superioris capitis. Vides ergo, numeros minores nihilo non esse frustra excogitatos: quippe cum per illos ænigmata quoque dissoluantur.

XXVIII. 28 *Datum numerum in duos partiri, vt eorum quadrati datam summam efficiant.*

HIC nihil aliud quæritur, nisi vt duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita vt eorum quadrati efficiant quoque datam summam, quod in antecedente ænigmate factum est.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continuè proportionales partiri, quorum medius datus sit; cuius tamen quadratus maior non sit quadrato semissis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

SIT numerus 283. diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 78. Ponatur primus numerus 1 ℞. ac proinde tertius 205 — 1 ℞. vt duo hi faciant simul 205. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78. ex dato numero 283. Ex primo 1 ℞.
a 20. septimi in tertium 205 — 1 ℞. fit numerus 205 ℞ — 1 ȝ. qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 6084. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æquatio inter 205 ℞. & 1 ȝ + 6084. Et ablatis 6084. vtrinque, inter 205 ℞ — 6084. & 1 ȝ. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicum est $\frac{205}{2}$. a cuius quadrato $\frac{42025}{4}$. si demantur 6084. hoc est, $\frac{24336}{4}$. remanebit numerus $\frac{17689}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{133}{2}$. si addatur semissis prædicta $\frac{205}{2}$. fiet maior radix $\frac{338}{2}$. hoc est, 169. Et si prædicta radix $\frac{133}{2}$. tollatur ex prædicta semisse $\frac{205}{2}$. relinquetur minor radix $\frac{72}{2}$. id est 36. Sunt ergo tres numeri continuè proportionales 36. 78. 169.

SIT rursum datus numerus 100. diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 30. Ponatur primus 1 ℞. ac proinde tertius 70 — 1 ℞. vt duo hi faciant simul 70. qui numerus relinquitur, detracto dato medio 30. ex dato numero 100. Ex primo
b 20. septimi 1 ℞. in tertium 70 — 1 ℞. fit numerus 70 ℞ — 1 ȝ. qui æqualis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æqualitas inter 70 ℞. & 1 ȝ + 900. Ablatisq. 900. vtrinque, inter 70 ℞ — 900. & 1 ȝ. quam æquationem ita expedies. Semissis numeri radicum est 35. a cuius quadrato 1225. dempris 900. remanet numerus 325. ad cuius radicem quadratam addita prædicta semisse, 35. fiet maior radix √ȝ 325 + 35. Et si eadem radix √ȝ 325. demantur ex semisse prædicta 35. relinquetur minor

radix

radix 35 — √ʒ 325. Itaque tres numeri quæsiti sunt 35 — √ʒ 325. 30. √ʒ 325 + 35. continuè proportionales facientes summam 100. Et qui fit ex primo in tertium, æqualis est quadrato medij, numero videlicet 900. vt hæc formula indicat.

| |
|---|
| √ʒ 325 + 35 |
| 35 — √ʒ 325 |
| — 325 — √ʒ 398125 |
| + √ʒ 398125 + 1225 |
| 900 |

Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita ordinentur, vt hæc altera formula monstrat. Nam si 325. quadratum posterioris particulæ tolletur ex 1225. quadrato prioris particulæ 35. reliquus fiet numerus 900.

| |
|---|
| 35 + √ʒ 325 |
| 35 — √ʒ 325 |
| 900 |

SI in eodem exemplo medius numerus detur 40. erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 1 ℞. & tertio 60 — 1 ℞. fiet ex primo in tertium numerus 60 ℞ — 1 ʒ. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600. Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 1 ʒ. & 60 ℞ — 1600. quod fieri nequit. Nam semissis numeri radicum est 30. a cuius quadrato 900. detrahi non possunt 1600. &c. Ratio est, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior est quadrato 900. semissis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

*30 Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.* XXX.

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est quarta parte cubi ex 10. descripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 1 ℞. & secunda 10 — 1 ℞. Cubi harum partium sunt 1 ce. & 1000 — 300 ℞ + 30 ʒ — 1 ce, quorum summa 1000 — 300 ℞ + 30 ʒ. æqualis esse debet numero 370. Additis 300 ℞ vtrinque, fiet æquatio inter 1000 + 30 ʒ. & 300 ℞ + 370. Et ablatis 370. vtrobique, inter 630 + 30 ʒ. & 300 ℞. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30 ʒ. & 300 ℞ — 630. Diuisis autem singulis hisce numeris per numerũ Zensorum, id est, per 30. erit æquatio inter 1 ʒ. & 10 ℞ — 21. quam sic resolues. Semissis numeri radicum 5. facit quadratum 25. a quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta semisse 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex semisse prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. faciunt summam 370.

HOC

HOC idem ænigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, sed solutum aliter, quam hic, nimirum per simplicem æquationem, quæ occurrit propter variam numerorum positionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto ænigma hoc solui possit sine Algebra.

XXXI. 31 *Datum numerum in duos numeros distribuere, vt idem sit excessus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.*

SIT datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 1 ℞. & minor 30 — 1 ℞. Tres quadrati sunt 900. 1 ʒ. & 900 — 60 ℞ + 1 ʒ. Excessus 900. supra 1 ʒ. est 900 — 1 ʒ. Excessus 1 ʒ. supra 900 — 60 ℞ + 1 ʒ. est 60 ℞ — 900. vt in hac formula subtractionis manifestum est.

| | | |
|---|---|---|
| + 0 | + 0 ℞ | + 1 ʒ |
| + 900 | — 60 ℞ | + 1 ʒ |
| — 900 | + 60 ℞ | + 0 ʒ |

Est igitur æquatio inter hos excessus, id est, inter 900 — 1 ʒ. & 60 ℞ — 900. Additisq. 900. vtrobique, inter 1800 — 1 ʒ. & 60 ℞. Et rursum addito 1 ʒ. vtrinque, inter 1800. & 1 ʒ + 60 ℞. Ablatisq. 60 ℞ vtrobique, inter 1800 — 60 ℞. & 1 ʒ. Radix ita inuenietur. Semissis numeri radicum est 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. a cuius radice quadrata √ʒ 2700. si prædicta semissis 30. dematur, remanebit pretium vnius radicis √ʒ 2700 — 30. maior scilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 — √ʒ 2700. vt in hac formula subtractionis apparet.

| | |
|---|---|
| + √ʒ 0 | + 30 |
| + √ʒ 2700 | — 30 |
| — √ʒ 2700 | + 60 |

Iam tres quadrati sunt 900, 3600 — √ʒ 9720000. & 6300 — √ʒ 38880000. qui se mutuo excedunt hoc eodem numero √ʒ 9720000 — 2700. vt in hisce formulis subtractionum perspicuum est.

| | |
|---|---|
| + 900 | + √ʒ 0 |
| + 3600 | — √ʒ 9720000 |
| — 2700 | + √ʒ 9720000 |

| | |
|---|---|
| + 3600 | — √ʒ 9720000 |
| + 6300 | — √ʒ 38880000 |
| — 2700 | + √ʒ 9720000 |

IN posteriori formula, quoniam √ʒ 9720000. & √ʒ 38880000. commensurabiles sunt, cum maiore per minorem diuisa fiat Quotiens rationalis √ʒ 4. hoc est, 2. si minor a maiore subtrahatur, reliquus erit numerus √ʒ 9720000. Hæc omnia clara sunt, si considerentur ea, quæ de subtractione signorum + & —. & de subtractione radicum surdarum dicta sunt.

32 Da-

32 *Datum numerum in duas partes distribuere, vt maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.* XXXII.

SIT diuidendus datus numerus 10. in duas partes, vt quadratus maioris partis cum parte minore faciat 73 $\frac{1}{4}$. Ponatur maior pars 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. Quadratus maioris partis est 1 ℨ. qui cum minore parte facit summam 1 ℨ + 10 — 1 ℞. æqualem numero 73 $\frac{1}{4}$. Ablatis 10. vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨ — 1 ℞. & 63 $\frac{1}{4}$. Additaq. 1 ℞ vtrinque, inter 1 ℨ. & 1 ℞ + 63 $\frac{1}{4}$. Radix ita eruetur. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 63 $\frac{1}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. si addatur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis 8 $\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit 1 $\frac{1}{2}$. Nam quadratum maioris partis 8 $\frac{1}{2}$. est 72 $\frac{1}{4}$. & addita minore parte 1 $\frac{1}{2}$. fit numerus 73 $\frac{1}{4}$.

QVOD si minor pars statuatur 1 ℞. & maior 10 — 1 ℞. erit quadratus maioris partis 100 — 20 ℞ + 1 ℨ. Addita vero minore parte 1 ℞. fit summa 100 — 19 ℞ + 1 ℨ. æqualis numero 73 $\frac{1}{4}$. Additis ergo 19 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ℨ + 100. & 19 ℞ + 73 $\frac{1}{4}$. Ablatisq. 73 $\frac{1}{4}$. vtrinque, inter 1 ℨ + 26 $\frac{3}{4}$. & 19 ℞. Ablatisq. rursum 26 $\frac{3}{4}$. vtrobique, inter 1 ℨ. & 19 ℞ — 26 $\frac{3}{4}$. Semissis numeri radicum est $\frac{19}{2}$. a cuius quadrato $\frac{361}{4}$. ablatis 26 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{256}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{16}{2}$. addita ad prædictam semissem $\frac{19}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{35}{2}$. id est, 17 $\frac{1}{2}$. quæ inutilis est, cum non possit esse pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Cossicus 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema soluet. quæ reperietur, si radix quadrata vltimo loco inuenta $\frac{16}{2}$. dematur ex prædicta semisse $\frac{19}{2}$. Reliquus enim numerus 1 $\frac{1}{2}$. erit minor radix, offerens minorem partem numeri 10. maiorq. propterea erit 8 $\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non semper vtramque radicem, quam Cossicus numerus habet, assumi posse, ad problematis propositi solutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{35}{2}$. quamuis ad problema propositum non pertineat, optime tamen respondet huic æquationi inter 1 ℨ. & 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus est $\frac{1225}{4}$. æqualis 19 ℞ — 26 $\frac{1}{4}$. cum 19 ℞. faciant $\frac{665}{2}$. siue $\frac{1330}{4}$. a quibus si demantur 26 $\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{105}{4}$. remanet numerus $\frac{1225}{4}$.

33 *Datum numerum extrema, ac media ratione secare.* XXXIII.

SIT datus numerus 10. ita secandus, vt proponitur: hoc est, vt minor pars, & maior, ac datus numerus 10. sint continuè proportionales,

tionales, siue (quod idem est) vt quadratus maioris partis æqualis sit numero, qui ex minore parte in datum numerum producitur. Ponatur maior pars 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. Quadratus maioris partis est 1 ʒ. æqualis numero 100 — 10 ℞. qui fit ex minore parte 10 — 1 ℞. in 10. Semissis numeri radicum est 5. ad cuius quadratũ 25. additis 100. fit numerus 125. a cuius radice quadrata √ʒ 125. si tollatur prædicta semissis 5. reliqua fiet radix √ʒ 125 — 5. maior pars. qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars 15 — √ʒ 125. vt in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis est 150 — √ʒ 12500. ac tantundem fit ex minore parte in 10. vt duæ hæ formulæ multiplicationum demonstrant.

| |
|---|
| √ʒ 0 + 10 |
| √ʒ 125 — 5 |
| — √ʒ 125 + 15 |

| | |
|---|---|
| √ʒ 125 — 5 | 15 — √ʒ 125 |
| √ʒ 125 — 5 | + 10 |
| — √ʒ 3125 + 25 | 150 — √ʒ 12500 |
| 125 — √ʒ 3125 | |
| 150 — √ʒ 12500 | |

## SCHOLIVM.

*SINE Algebra diuidetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adiciatur eiusdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati demantur semissis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hac praxis colligitur tum ex solutione huius problematis, tum ex figura propos. 11 lib. 2. Eucl.*

XXXIIII. 34 *Datum numerum in duos numeros partiri, ita vt quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datam.*

SIT numerus 30. secandus in duos, vt maioris quadratus ad quadratum minoris proportionem habeat duplam sesquiquartam. Ponatur maior 1 ℞. & minor 30 — 1 ℞. Quadratus illius est 1 ʒ. duplus sesquiquartus ad quadratum huius, nimirum ad 900 — 60 ℞ + 1 ʒ. Si ergo hic quadratus multiplicetur per 2 $\frac{1}{4}$. erit æquatio inter 1 ʒ. & 8100 — 540 ℞ + 9 ʒ. quæ per multiplicationem in crucẽ reducetur ad hanc inter 4 ʒ. & 8100 — 540 ℞ + 9 ʒ. Additis igitur 540 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 4 ʒ + 540 ℞. & 8100 + 9 ʒ. Ablatisq. 4 ʒ. vtrinque, inter 540 ℞. & 8100 + 5 ʒ. Et rursum ablatis 8100. vtrinque, inter 5 ʒ. & 540 ℞ — 8100. Diuisisq. omnibus per 5. erit æqualitas inter 1 ʒ. & 108 ℞ — 1620, Semissis

numeri

numeri radicum est 54. a cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296. cuius radix quadrata 36. addita ad prædictam semissem 54. facit maiorem radicem 90. quæ ad ænigma soluendum apta non est, cum non possit esse pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36. dematur ex prædicta semisse 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæsitus. Minor ergo erit 12. Nam 324. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam sesquiquartam.

VBI etiam vides, quamuis Cossicus numerus duplicem radicem habeat, non tamen semper vtramque assumi posse. licet maior ad vnguem etiam respondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis est 108 2e — 1620. cum 108 2e efficiant 9720. a quibus si demantur 1620. relinquuntur 8100.

*35 Datum numerum in duos numeros partiri, vt eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.* XXXV.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior est, quam 800. semissis quadrati ex 40. procreati, & minor, quam 1600. quadratus eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 1 2e. & alter 40 — 1 2e. Quadrati sunt 1 ʒ. & 1600 — 80 2e + 1 ʒ. qui summam faciunt 2 ʒ + 1600 — 80 2e. æqualem 928. Additis 80 2e. vtrobique, erit æquatio inter 2 ʒ + 1600. & 80 2e + 928. Et ablatis 928. vtrinque, inter 2 ʒ + 672. & 80 2e. Et rursum ablatis 672. vtrobique, inter 2 ʒ. & 80 2e — 672. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1 ʒ. & 40 2e — 336. Semissis numeri radicum est 20. a cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam semissem 20. facit maiorem radicem 28. hoc est, maiorem numerum. Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam si quadrata radix inuenta 8. dematur ex prædicta semisse 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam summam 928.

HOC ænigma solutum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem simplicem.

*36 Duos numeros in dato excessu inuenire, quorum quadrati datam summam efficiant, quæ maior tamen sit quadrato dati excessus.* XXXVI.

SIT datus excessus 11. & summa quadratorum 281. quæ maior est quadrato 121. dati excessus 11. Ponatur minor numerus 1 2e. ideoq. maior 1 2e + 11. Quadrati 1 ʒ. & 1 ʒ + 22 2e + 121. faciunt summam 2 ȝ + 22 ℞ + 121. æqualem 281. Ablatis 121. vtrobique, erit æqualitas inter 2 ȝ + 22 ℞. & 160. Demptisq. rursum 22 ℞. vtrinque, inter 2 ȝ. & 160 — 22 ℞. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1 ȝ. & 80 — 11 ℞. Semissis numeri radicum est $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. additis 80. siue $\frac{320}{4}$. fit numerus $\frac{441}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{21}{2}$. ablata prædicta semisse $\frac{11}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

SIT rursum datus excessus 11. & summa quadratorum 122. maior quadrato 121. excessus dati 11. Ponatur minor numerus iterum 1 ℞. & maior 1 ℞ + 11. Quadrati horum numerorum faciunt, vt prius, summam 2 ȝ + 22 ℞ + 121. æqualem 122. Ablatis 121. vtrobique, erit æquatio inter 2 ȝ + 22 ℞. & 1. Et ablatis rursum 22 ℞ vtrinque, inter 2 ȝ. & 1 — 22 ℞. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1 ȝ. & $\frac{1}{2}$ — 11 ℞. Semissis numeri radicum est $\frac{11}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{121}{4}$. addita $\frac{1}{2}$. siue $\frac{2}{4}$. fit numerus $\frac{123}{4}$. a cuius radice quadrata √ȝ $\frac{123}{4}$. dempta prædicta semisse $\frac{11}{2}$. relinquetur precium vnius radicis √ȝ $\frac{123}{4}$ — $\frac{11}{2}$. minor numerus, & additis 11. siue, $\frac{22}{2}$. fiet maior numerus √ȝ $\frac{123}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Quadrati horum numerorum faciunt summam 122 vt hæ formulæ multiplicationum indicant.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{ȝ}\,\frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ & \sqrt{ȝ}\,\frac{123}{4} + \frac{11}{2} \\ \hline & + \sqrt{ȝ}\,\frac{14883}{16} + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & + \sqrt{ȝ}\,\frac{14883}{16} \\ \hline \frac{244}{4} & + \sqrt{ȝ}\,\frac{59532}{16} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \sqrt{ȝ}\,\frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ & \sqrt{ȝ}\,\frac{123}{4} - \frac{11}{2} \\ \hline & - \sqrt{ȝ}\,\frac{14883}{16} + \frac{121}{4} \\ \frac{123}{4} & - \sqrt{ȝ}\,\frac{14883}{16} \\ \hline \frac{244}{4} & - \sqrt{ȝ}\,\frac{59532}{16} \end{array}$$

Nam $\frac{244}{4}$. & $\frac{244}{4}$. faciunt $\frac{488}{4}$. hoc est, 122. & radices surdæ se mutuò destruunt.

XXXVII. 37 *Dato numero, alium inuenire, per quem si diuidatur datus numerus, fiat Quotiens superans inuentum numerum dato numero.*

SIT datus numerus 60. inueniendusq. sit alius, per quem si diuidatur 60. fiat Quotiens superans inuentum diuisorem numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, 1 ℞. Quotiens ergo erit $\frac{60}{1℞}$. qui superat diuisorem 1 ℞. numero $\frac{60 - 1ȝ}{1℞}$. (vt patet, si 1 ℞. detrahatur ex $\frac{60}{1℞}$.) qui æqualis debet esse dato numero 7. ita vt æquatio sit inter $\frac{60 - 1ȝ}{1℞}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 60 — 1 ȝ. & 7 ℞. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æquatio inter 60. & 1 ȝ + 7 ℞. Et ablatis 7 ℞ vtrinque, inter 1 ȝ. & 60 — 7 ℞. Semissis numeri radicum est $\frac{7}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{49}{4}$. additis 60. siue $\frac{240}{4}$. fit numerus $\frac{289}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{17}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{7}{2}$. remanebit precium vnius radicis

cis $\frac{10}{2}$. hoc est, 5. numerus quæsitus. Nam diuisis 60. per 5. fit Quotiens 12. qui diuisorem 5. numero 7. superat.

38 ***Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata dati numeri secundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.*** XXXVIII.

SIT datus numerus 10. diuidendus in duos, inter quos √ȝ 10. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex eorum multiplicatione producatur numerus 10. Ponatur vnus numerorum 1 ℞. & alter 10 — 1 ℞. Ex eorum multiplicatione fit numerus 10 ℞ — 1 ȝ. æqualis 10. Addito 1 ȝ. vtrobique, fiet æquatio inter 10 ℞. & 1 ȝ + 10. Et ablatis 10. vtrinque, inter 10 ℞ — 10. & 1 ȝ. Semissis numeri radicum est 5. a cuius quadrato 25. demptis 10. fit reliquus numerus 15. ad cuius radicem quadratam √ȝ 15. addita prædicta semissis 5. facit maiorem radicem √ȝ 15 + 5. eademq. radix quadrata detracta ex prædicta semisse 5. reliquam facit minorem radicem 5 — √ȝ 15. Atque hi duo numeri √ȝ 15 + 5. & 5 — √ȝ 15. faciunt summam 10. & ex vno in alterum fit quoque 10. vt in hac formula multiplicationis manifestum est. Nam — √ȝ 375. & + √ȝ 375. se mutuò interimunt: & ex additione + 25. & — 15. fit numerus 10.

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
|  |  | 5 — | √ȝ 15 |
|  | √ȝ 15 | + | 5 |
|  | + 25 | — | √ȝ 375 |
| + √ȝ 375 | — 15 |  |  |
|  | 10 |  |  |

HOC idem ænigma soluimus per simplicem æquationem in præcedenti cap. ænigmate 172.

MVLTIPLICATIO quoque prædicta numeri 5 — √ȝ 15. in 5 + √ȝ 15. perficietur, si 15. quadratus posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap. 23. declaratum est. Idem hoc ænigma solutum fuit in ænigmate 23. alio tamen exemplo proposito.

|  |
|---|
| 5 — √ȝ 15 |
| 5 + √ȝ 15 |
| 10 |

39 ***Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero.*** XXXIX.

SIT datus numerus 30. & excessus datus 228. Ponatur vnus numerorum 1 ℞. & alter 30 — 1 ℞. Quadrati sunt 1 ȝ. & 1 ȝ + 900 — 60 ℞.

— 60 𝔵. qui summam faciunt 2 ȝ + 900 — 60 𝔵. quæ superare debet numerum productum ex 1 𝔵. in 30 — 1 𝔵. hoc est, numerum 30 𝔵 — 1 ȝ. excessu 228. ita vt æqualitas sit inter 2 ȝ + 900 — 60 𝔵. & 30 𝔵 + 228 — 1 ȝ. Et addito 1 ȝ. vtrinque, inter 3 ȝ + 900 — 60 𝔵. & 30 𝔵 + 228. Et additis 60 𝔵 vtrobique, inter 3 ȝ + 900. & 90 𝔵 + 228. Et ablatis 228. vtrinque, inter 3 ȝ + 672. & 90 𝔵. Et rursum ablatis 672. vtrobique, inter 3 ȝ. & 90 𝔵 — 672. Diuisisq. omnibus per 3. inter 1 ȝ. & 30 𝔵 — 224. Semissis numeri radicum est 15. a cuius quadrato 225. demptis 224. superest 1. cuius radix quadrata 1. addita ad prædictam semissem 15. facit maiorem radicem 16. Eadem vero ex semisse prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14. Itaq. quæsitæ partes numeri 30. sunt 16. & 14. Quadrati enim earum 256. 196. summam faciunt 452. quæ numerum 224. factum ex ductu 16. in 14. superat numero 228.

HOC idem problema soluimus per simplicem æquationem in ænigmate 176. præcedentis capitis, proposito tamen alio exemplo.

SI numerus diuidendus proponeretur 20. & excessus 30. fieret problema impossibile, vt ipsa operatio docebit.

XL. 40 ***Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor sit numero dato.***

SIT datus numerus 30. diuidendus in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam 5. Ponatur minoris radix 1 𝔵. ideoq. maioris radix 1 𝔵 + 5. vt se excedant quinario. Quadrati harum radicum 1 ȝ. & 1 ȝ + 10 𝔵 + 25. faciunt summam 2 ȝ + 10 𝔵 + 25. æqualem 30. Ablatis 25. vtrobique, manebit æqualitas inter 2 ȝ + 10 𝔵. & 5. Ablatisq. rursum 10 𝔵 vtrinque, inter 2 ȝ. & 5 — 10 𝔵. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1 ȝ. & $\frac{5}{2}$ — 5 𝔵. Semissis numeri radicum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis $\frac{5}{2}$. siue $\frac{10}{4}$. fit numerus $\frac{35}{4}$. a cuius radice quadrata √ȝ $\frac{35}{4}$. dempta prædicta semisse $\frac{5}{2}$. fiet pretium radicis √ȝ $\frac{35}{4}$ — $\frac{5}{2}$. minoris scilicet numeri radix. Additis ergo 5. fiet maioris numeri radix √ȝ $\frac{35}{4}$ + $\frac{5}{2}$. quæ duæ radices se mutuo excedunt quinario. Et in se ductæ quadrate, faciunt numeros, qui quæruntur, 15 — √ȝ $\frac{3500}{16}$. & 15 + √ȝ $\frac{3500}{16}$. qui faciunt 30. numerum datum.

IDEM ænigma solui etiam potest per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur minoris numeri radix 1 𝔵 — $\frac{5}{2}$. & maioris 1 𝔵 + $\frac{5}{2}$. vt hæc illam superet quinario. Ambæ in se ductæ quadrate faciunt 1 ȝ — $\frac{5}{1}$ 𝔵 + $\frac{25}{4}$. & 1 ȝ + $\frac{5}{1}$ 𝔵 + $\frac{25}{4}$. quorum summa 2 ȝ + $\frac{50}{4}$. æqualis est 30. Ablatis $\frac{50}{4}$. hoc est, 12 $\frac{1}{2}$. vtrobique, manebit æquatio inter 2 ȝ. & 17 $\frac{1}{2}$. Diuisisq. 17 $\frac{1}{2}$ per 2. fiet 1 ȝ. $\frac{35}{4}$. & 1 𝔵. √ȝ $\frac{35}{4}$. Cum ergo minoris numeri radix posita sit 1 𝔵 — $\frac{5}{2}$. erit ipsa radix minoris numeri √ȝ $\frac{35}{4}$ — $\frac{5}{2}$. Et maioris numeri radix

√ȝ

√ʒ $\frac{25}{4}$ + $\frac{5}{2}$. cum posita sit 1 ℞ + $\frac{5}{2}$. Inuentæ ergo sunt eædem radices, quæ prius, &c.

**41** *Datum numerum diuidere in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant datum quemcunque numerum.* XLI.

SIT datus numerus 12. secandus in duos, quorum radices inter se multiplicatæ faciant 5. Ponatur vnus numerorum 1 ℞. & alter 12 — 1 ℞. Erunt eorum radices, √ʒ 1 ℞. & √ʒ (12 — 1 ℞.) Hæ inter se multiplicatæ faciunt √ʒ (12 ℞ — 1 ʒ) qui numerus æqualis esse debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 12 ℞ — 1 ʒ. & 25. æquales erunt. Additoq. 1 ʒ. vtrobique, erit æquatio inter 12 ℞. & 1 ʒ + 25. Et ablatis 25. vtrinque, inter 12 ℞ — 25. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est 6. a cuius quadrato 36. demptis 25. superest numerus 11. ad cuius radicem quadratam √ʒ 11. addita prædicta semisse 6. fiet maior radix √ʒ 11 + 6. siue 6 + √ʒ 11. id est, maior numerus quæsitus. Et si eadem √ʒ 11. tollatur ex semisse prædicta 6. reliqua fiet minor radix 6 — √ʒ 11. nimirum minor numerus quæsitus. Atque duo hi numeri 6 + √ʒ 11. & 6 — √ʒ 11. faciunt propositum numerum 12. & eorum radices sunt √ʒ (6 + √ʒ 11) & √ʒ (6 — √ʒ 11) quæ inter se multiplicatæ faciunt √ʒ 25. id est, 5. vt hæc formula monstrat. Nam si earum quadrata 6 + √ʒ 11. & 6 — √ʒ 11. inter se multiplicentur, (quod fiet, si 11. quadratum posterioris particulæ ex 36. quadrato particulæ prioris detrahatur, vt cap. 23. dictum est) fiet productus √ʒ 25. id est, 5.

√ʒ (6 + √ʒ 11)
√ʒ (6 — √ʒ 11)
―――――――
√ʒ 25

PER simplicem æquationem soluemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur vnus numerus 6 + 1 ℞. & alter 6 — 1 ℞. quorum radices √ʒ (6 + 1 ℞) & √ʒ (6 — 1 ℞) inter se multiplicatæ faciunt numerum √ʒ (36 — 1 ʒ) vt hæc formula indicat, æqualem numero 5. Igitur & eorum quadrati 36 — 1 ʒ. & 25. æquales erunt. Additoq. 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 36. & 1 ʒ + 25. Ablatisq. 25. vtrobique, inter 11. & 1 ʒ. Diuisis ergo 11. per 1. fiet 1 ʒ. 11. & 1 ℞. √ʒ 11. Et quia vnus numerorum positus fuit 6 + 1 ℞. erit ipse numerus 6 + √ʒ 11. Alter vero, quem posuimus 6 — 1 ℞. erit 6 — √ʒ 11. quemadmodum supra.

√ʒ (6 + 1 ℞)
√ʒ (6 — 1 ℞)
―――――――
— 6 ℞ — 1 ʒ
36 + 6 ℞
―――――――
√ʒ (36 — 1 ʒ)

**42** *Dato numero, inuenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inuenti.* XLII.

SIT

SIT datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 1 ℞. cuius
quadratus 1 ȝ. Ergo 1 ℞ + 40. æqualia sunt 1 ȝ. Semissis numeri
radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 40. fit numerus 40 $\frac{1}{4}$.
id est, $\frac{161}{4}$. ad cuius radicem quadratam √ȝ $\frac{161}{4}$. addita prædicta
semisse $\frac{1}{2}$. fiet pretium 1 ℞. √ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$. nimirum numerus quæsitus, qui cũ dato numero 40.
facit √ȝ $\frac{161}{4}$ + 40 $\frac{1}{2}$. qui numerus æqualis est quadrato
numeri inuenti √ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$.
Nam hic in se ductus (vt apposita formula docet) producit numerũ $\frac{162}{4}$ + √ȝ $\frac{644}{16}$.
hoc est, 40 $\frac{1}{2}$ + √ȝ $\frac{161}{4}$. propterea quod hæ minutiæ √ȝ $\frac{644}{16}$. & √ȝ $\frac{161}{4}$. æquales sunt.

√ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$
√ȝ $\frac{161}{4}$ + $\frac{1}{2}$
+ √ȝ $\frac{161}{16}$ + $\frac{1}{4}$
$\frac{161}{4}$ + √ȝ $\frac{161}{16}$
$\frac{162}{4}$ sive 40 $\frac{1}{2}$ + √ȝ $\frac{644}{16}$

SIT rursus datus numerus 110. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞.
Ergo 1 ℞ + 110. æqualia sunt 1 ȝ. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$.
ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 110. fit numerus 110 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{441}{4}$. ad
cuius radicem quadratam $\frac{21}{2}$. addita prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fit pretium
1 ℞. $\frac{22}{2}$. hoc est, 11. numerus quæsitus. Huius enim quadratus 121.
æqualis est numero conflato ex dato 110. & inuento 11.

HOC problema propositum etiam fuit in ænigmate 3. huius
cap. in alijs tamen numeris.

XLIII. 43 *Datum numerum in duos partiri, vt summa quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque.*

SIT datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto
ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 1 ℞.
& alter 20 — 1 ℞. Quadrati faciunt summam 2 ȝ + 400 — 40 ℞.
quæ cum producto ex vno in alterum, id est, cum 20 ℞ — 1 ȝ. facit
numerum 1 ȝ + 400 — 20 ℞. æqualem 309. Additis 20 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ȝ + 400. & 20 ℞ + 309. Et ablatis 309.
vtrinque, inter 1 ȝ + 91. & 20 ℞. Et rursum ablatis 91. vtrinque,
inter 1 ȝ. & 20 ℞ — 91. Semissis numeri radicum est 10. a cuius
quadrato 100. ablatis 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3.
addita prædicta semisse 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3.
dempta ex prædicta semisse 10. reliqua fiet minor radix 7. Duæ ergo partes numeri 20. sunt 13. & 7. Nam earum quadrati 169. & 49.
vna cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

IDEM exequemur per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10 + 1 ℞. & minor 10 — 1 ℞. vt simul conficiant
20. Quadrati sunt 1 ȝ + 20 ℞ + 100. & 1 ȝ — 20 ℞ + 100. facientes
summam 2 ȝ + 200. quæ cum producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100 — 1 ȝ (qui productus habetur, si 1 ȝ. id est, quadratus posterioris particulæ dematur ex 100. quadrato prioris particulæ,

vt hic

vt hic apparet) facit numerum 1 ʒ + 300. æqualem 309. Ablatis ergo 300. vtrobique, manebit æqualitas inter 1 ʒ, & 9. Diuisisq. 9. per 1. fiet 1 ʒ. 9. & 1 ℞. 3. Ergo maior pars posita 10 + 1 ℞ erit 13. Minor autem posita 10 — 1 ℞. erit 7. veluti prius.

| |
|---|
| 10 + 1 ℞ |
| 10 — 1 ℞ |
| 100 — 1 ʒ |

44 *Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex semisse dati numeri procreato facit.* XLIIII.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 10. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero scilicet minore, quam quadratus semissis numeri 10. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. qui ductus in 10. facit 10 ℞. æquales 1 ʒ + 20. nimirum quadrato ex 1 ℞. procreato, vna cum 20. Ablatis 20. vtrobique, manebit æqualitas inter 10 ℞ — 20. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est 5. a cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix √ʒ 5. addita prædictæ semissi 5. facit √ʒ 5 + 5. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5 — √ʒ 5. Atque vterque numerus √ʒ 5 + 5. & 5 — √ʒ 5. problema conficit. Nam multiplicatio √ʒ 5 + 5. in 10. facit 50 + √ʒ 500. quantum nimirum fit ex 30 + √ʒ 500. quadrato numeri √ʒ 5 + 5. vna cum 20. Item ex 5 — √ʒ 5. in 10. fit numerus 50 — √ʒ 500. æqualis quadrato 30 — √ʒ 500. numeri 5 — √ʒ 5. vna cum 20.

ITEM sit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Ex 1 ℞ in 20. fit numerus 20 ℞. æqualis 1 ʒ + 84. nimirum quadrato ex 1 ℞. procreato, vna cum 84. Ablatis 84. vtrobique, manebit æqualitas inter 20 ℞ — 84. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est 10. a cuius quadrato 100. demptis 84. superest numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam semissem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata vero ex eadem semisse reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema soluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

45 *Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat summam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.* XLV.

SIT inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, producatur numerus 189. Ponatur numerus quæsitus 1 ℞. Additis 12. fit numerus 1 ℞ + 12. qui ductus in inuentum, nimirum in 1 ℞. facit numerum 1 ʓ + 12 ℞. æqualem 189. Ablatis 12 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʓ. & 189 — 12 ℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. a cuius radice 15. ablata prædicta semisse 6. manet valor 1 ℞. 9. numerus videlicet quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 21. & ex 21. in 9. fit datus numerus 189.

ITEM sit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur 1 ℞. Additis 12. fit numerus 1 ℞ + 12. qui ductus in 1 ℞. facit numerum 1 ʓ + 12 ℞. æqualem 400. Ablatisq; 12 ℞ vtrobique, manet æqualitas inter 1 ʓ. & 400 — 12 ℞. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. a cuius radice, √ʓ 436. si dematur prædicta semissis 6. reliqua fiet æstimatio vnius radicis √ʓ 436 — 6. numerus videlicet, quem inquirimus. Nam si addatur ad 12. fiet numerus √ʓ 436 + 6. vt in hac formula vides. Hic autem numerus √ʓ 436 + 6. multiplicatus per inuentum numerũ √ʓ 436 — 6. facit numerum datum 400. vt hæc altera formula docet. quæ multiplicatio fiet, si 36. quadratus posterioris particulæ 6. subducatur a 436. quadrato prioris particulæ, vt cap. 13. declaratum fuit.

√ʓ 436 — 6<br>
+ 12<br>
———————<br>
√ʓ 436 + 6

√ʓ 436 + 6<br>
√ʓ 436 — 6<br>
———————<br>
400

XLVI. 46 *Datum numerum in duas partes secare, vt numerus procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

SIT numerus datus 20. secandus in duos, vt numerus ex eorum multiplicatione procreatus, si ducatur in 400, quadratum dati numeri, efficiat 300. Ponatur vnus numerus 1 ℞, & alter 20 — 1 ℞. Ex 1 ℞. in 20 — 1 ℞. fit numerus 20 ℞ — 1 ʓ. Et hic ductus in 400, facit 8000 ℞ — 400 ʓ. qui æqualis esse debet 300. Additis 400 ʓ vtrobique, erit æquatio inter 8000 ℞. & 300 + 400 ʓ. Et ablatis 300. vtrinque, inter 400 ʓ. & 8000 ℞ — 300. Diuisis omnibus per 400. erit æquatio inter 1 ʓ & 20 ℞ — $\frac{3}{4}$. Semissis radicum est 10. a cuius quadrato 100. siue $\frac{400}{4}$. demptis $\frac{3}{4}$. remanent $\frac{397}{4}$. addita semissi prædictæ 10. facit maiorem radicem 10 + √ʓ $\frac{397}{4}$. & ablata ex eadem semisse 10. relinquit radicem minorem 10 — √ʓ $\frac{397}{4}$. quæ sunt partes quæsitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus $\frac{3}{4}$. si nimirum posterioris particulæ quadratum $\frac{397}{4}$. dematur ex 100. siue ex $\frac{400}{4}$. quadrato prioris particulæ. At ex $\frac{3}{4}$. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus $\frac{1200}{4}$. hoc est 300.

47 Nu-

47 *Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum mulctatum alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.* XLVII.

INVENIENDVS sit numerus, cuius quadratus octonario auctus, si ducatur in eundem quadratum mulctatum ternario, producat 6942. Ponatur quæsitus numerus 1 ℞. Eius quadratus 1 ℨ. auctus octonario, erit 1 ℨ + 8. mulctatus vero ternario, 1 ℨ — 3. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 1 ℨℨ + 5 ℨ — 24. vt in hac formula vides. qui numerus æqualis esse debet numero 6942. Additis ergo 24. vtrobique, erit æqualitas inter 1 ℨℨ + 5 ℨ & 6966. Et ablatis 5 ℨ. vtrinque, inter 1 ℨℨ. & 6966 — 5 ℨ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 6966. hoc est, $\frac{27864}{4}$. fit summa $\frac{27889}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta semisse prædicta $\frac{5}{2}$. remanent $\frac{162}{2}$. hoc est, 81. vnus Zensus, cuius radix 9. dabit pretium vnius radicis pro numero quæsito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & mulctatus ternario, 78. fitq. ex 89. in 78. numerus datus 6942.

$$\begin{array}{rrrr} & 1\,ℨ & + & 8 \\ & 1\,ℨ & — & 3 \\ \hline & — 3\,ℨ & — & 24 \\ 1\,ℨℨ + & 8\,ℨ & & \\ \hline 1\,ℨℨ + & 5\,ℨ & — & 24 \end{array}$$

SI ijsdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 1 ℨℨ. & 34 — 5 ℨ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{5}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{25}{4}$. additis 34. hoc est, $\frac{136}{4}$. fit summa $\frac{161}{4}$. a cuius radice quadrata √ℨ $\frac{161}{4}$. detracta prædicta semisse $\frac{5}{2}$. fiet 1 ℨ. √ℨ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$. & huius radix quadrata, √ℨ ( √ℨ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$. ) numerus quæsitus. Nam ejus quadratus √ℨ $\frac{161}{4}$ — $\frac{5}{2}$. auctus octonario, siue $\frac{16}{2}$. facit √ℨ $\frac{161}{4}$ + $\frac{11}{2}$. Mulctatus vero ternario, siue $\frac{6}{2}$. facit √ℨ $\frac{161}{4}$ — $\frac{11}{2}$. qui duo numeri inter se multiplicati producunt numerum 10. vt hæc formula indicat. Nam si $\frac{121}{4}$. quadratus posterioris particulæ detrahatur ex $\frac{161}{4}$. quadrato particulæ prioris remanent $\frac{40}{4}$. hoc est, 10.

$$\begin{array}{rrr} √ℨ\,\frac{161}{4} & + & \frac{11}{2} \\ √ℨ\,\frac{161}{4} & — & \frac{11}{2} \\ \hline & \frac{40}{4}. & \text{siue } 10. \end{array}$$

# AENIGMATA VARIA NVMERORVM ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus. Cap. XXXI.

PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæstiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non solum per regulam Falsi, verum etiam per solam regulam Trium expediri possunt; vt præstantia regulæ Algebræ magis elucescat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

I. 1 *Summam pecuniæ, quam in sacculo habeo, existimat quidam astantium valere 600. aur. Cuius errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & a summa detraheretur $\frac{1}{12}$. eiusdem meæ pecuniæ, tunc haberem 600. aureos. Quæstio est, quanta sit mea pecunia.*

PONATVR esse 1 ℞ aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}$ ℞ $\frac{1}{3}$ ℞ $\frac{1}{4}$ ℞. quæ faciunt summam 1 $\frac{1}{12}$ ℞. fiet tota pecunia 2 $\frac{1}{12}$ ℞. Ablata autem $\frac{1}{12}$ ℞ reliquæ fient 2 ℞. æquales 600. Diuisis igitur 600. per 2. fiet 1 ℞ 300. Atque hæc est pecunia in meo sacculo. Nam si accedant partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet summa aur. 625. & dempta $\frac{1}{12}$. nimirum aur. 25. reliquus erit numerus 600.

II. 2 *Viator quidam conficit quotidie 9. milliaria. Alius decimo post die elapso idem iter instituit, ex eodem loco, conficitq. quotidie 14. milliaria. Quæritur, quoto die posterior priorem assequetur.*

PONATVR, ambos simul futuros in 1 ℞ dierum. Ergo prior vltra 90. milliaria, quæ in decem diebus absoluit, conficiet in 1 ℞ dierum, præterea 9 ℞. milliariorum, quandoquidem singulis diebus 9. milliaria conficit. Posterior autem conficiens quotidie 14. milliaria, conficiet in 1 ℞. dierum, 14 ℞ milliariorum. Et quia in 1 ℞ dierum tot milliaria prior necessario confecerit, vna cum 90. quæ in 10. diebus absoluit, quot posterior in 1 ℞ dierum; quandoquidem tunc simul futuri sunt: erit aequatio inter 9 ℞ + 90. & 14 ℞. Ablatisq. 9 ℞. vtrobique, inter 90. & 5 ℞. Diuisis ergo 90. per 5. fiet 1 ℞. 18. Igitur post 18. dies conuenient. Nam prior in 18. diebus absoluit milliaria 162. additisq. 90. quae in praecedentibus 10. diebus confecit, fient 252. milliaria, quot videlicet posterior in 18. diebus absoluit.

## *S C H O L I V M.*

*HAEC porrò quaestio in numeris abstractis ita proponeretur. Quaeratur numerus, qui ductus in 9. & ad productum addito 90. numerum efficiat aequalem ei, qui ex eodem numero in 14. multiplicato gignitur. Posito enim numero quaesito 1 ℞. erunt 9 ℞ + 90. aequales numero 14 ℞. Ablatis ergo 9 ℞ vtrobique, reperietur aequalitas inter 90. & 5 ℞. Diuisisq. 90. per 5. fiet 1 ℞. 18. numerus, quem quaerimus. Nam hic ductus in 9. facit 162. & additis 90. fit numerus 252. aequalis ei, qui fit ex 18. in 14.*

3 *Viator singulis diebus 9. milliaria conficit: alius vero decimo post die elapso idem iter ingreditur. Quaeritur quot milliaria absoluet hic, vt priorem assequatur in 18. diebus.* III.

PONATVR 1 ℞ milliariorum. Ergo in 18. diebus conficiet 18 ℞. milliariorum. Cum ergo prior singulis diebus conficiens 9. milliaria, absoluat in 18. diebus 162. milliaria, & additis 90. quae perambulauit in prioribus 10. diebus, sit manifestum, eum confecisse 252. milliaria. Est ergo aequatio inter 18 ℞. & 252. Diuisisq. 252. per 18. fiet 1. ℞ 14. atque tot milliaria conficere debet posterior, vt in 18. diebus priorem assequatur.

4 *Interrogatus quidam, quota sit hora diei; ita respondit. Dimidiata pars horarum a media nocte vsque ad hoc instans elapsarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quaeris. Quaeritur ergo, quota tunc sit hora.* IIII.

PONATVR 1 ℞ horarum à media nocte praeteritarum. Cum ergo ab vna media nocte ad aliam mediam noctem effluant horae 24 supererunt vsque ad mediam noctem insequentem horae 24 — 1 ℞. Huius numeri $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{72 - 3 ℞}{4}$. quibus si addatur $\frac{1}{2}$ ℞. horarum praeteritarum, siue $\frac{2}{4}$ ℞. fiet numerus $\frac{72 - 1 ℞}{4}$. aequalis 1 ℞. Quae aequatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter

4 ℞. & 72 — 1 ℞. Additaq. 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 72. & 5 ℞. Diuisis ergo 72. per 5. fiet 1 ℞. 14 $\frac{2}{5}$. numerus horarum, quæ a media nocte vsque ad horam quæstionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 2. & Min. 24. a meridie: cum 1. hora contineat 60. Min. quod ita probatur. Dimidiata pars horarum 14 $\frac{2}{5}$. a media nocte præteritarum facit horas 7 $\frac{1}{5}$. quibus si addantur $\frac{3}{4}$. horarum 9 $\frac{3}{5}$. quæ supersunt vsque ad mediam noctem, nimirum 7 $\frac{1}{5}$. fient horæ 14 $\frac{2}{5}$.

EODEM modo procedemus, si sermo sit de horis ab occasu Solis, more Italorum. Nam si quis responderit, eam tunc instare horam, quæ ex $\frac{3}{4}$. horarum a proximo Solis occasu elapsarum additis ad semissem horarum, quæ vsque ad alterum occasum Solis supersunt, conficitur: Ponemus 1 ℞. horarum a proximo occasu præteritarum. Cum ergo ab vno occasu ad alium occasum fluant horæ 24 superérunt vsque ad sequentem occasum horæ 24 — 1 ℞. Huius numeri semissis facit $\frac{24 - 1℞}{2}$. hoc est, $\frac{48 - 2℞}{4}$. quæ addita ad $\frac{3}{4}$ ℞ horarum elapsarum faciet $\frac{48 + 1℞}{4}$. qui numerus æqualis est 1 ℞. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4 ℞. & 48 + 1 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 48. & 3 ℞. Diuisisq. 48. per 3. fiet 1 ℞. 16. numerus horarum ab occasu præteritarum. quod ita probatur. Tres quartæ horarum 16. elapsarum faciunt 12. horas, quibus si addatur $\frac{1}{2}$. horarum 8. quæ vsque ad alterum occasum supersunt, nimirum 4. fient horæ 16.

V. 5 *Quidam habet duas mensuras vini, quarum vna valet 12. nummos, & altera 15. Vult autem ex vtroque vino miscere vnam mensuram, cuius pretium sit 13. nummorum. Quæritur, quantum vini de qualibet mensura recipiendum sit.*

PONE 1 ℞ partium mensuræ vilioris vini. Et pretiosioris vini mensuram 1 — 1 ℞. Tunc institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | mensura | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|---|
| Prioris vini | 1 | 12 | 1 ℞ ? | facit | 12 ℞. |
| Posterioris vini. | 1 | 15 | 1 — 1 ℞ ? | facit | 15 — 15 ℞. |

Nam si 1. mensura prioris vini valet 12. numm. 1 ℞ vnius mensuræ eiusdem vini valebit 12 ℞ numm. Et si 1. mensura posterioris vini valet 15 numm. 1 — 1 ℞ mens. eiusdem vini valebit 15 — 15 ℞ numm. Igitur 1 ℞ mens. prioris vini, & 1 — 1 ℞ mens. posterioris valebunt 15 — 3 ℞ numm. quod pretium æquiualebit 13 numm. Additis ergo 3 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 3 ℞ + 13. & 15. Ablatisq. 13 vtrinque, inter 3 ℞ & 2. Diuisis ergo 2 per 3 fiet 1 ℞. $\frac{2}{3}$. De

$\frac{2}{3}$. De viliori igitur vino recipiendæ sunt $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ, & de præstantiori $\frac{1}{3}$. vnius mensuræ quod sic probatur.

| | mens. | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|---|
| Prioris vini | 1 | 12 | $\frac{2}{3}$ ? | valent | 8 |
| Posterioris vini. | 1 | 15 | $\frac{1}{3}$ ? | valent | 5. |

Nam $\frac{2}{3}$. vnius mensuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{3}$. mensuræ vini posterioris, 5. numm. atque idcirco 1. mensura mixta 13. numm.

6 *Mensura vini valet* 10. *numm. Quantum ergo aquæ commiscendum est vni mensuræ, vt* 1. *mensura mixta valeat* 7. *numm.?* VI.

PONE 1 ℞ mensuræ aquæ. Deinde institue regulam Trium hoc modo.

| mens. vini. | | mens. aquæ | numm. | mens. mixta | | numm. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | 1 ℞ | 10 | 1 ? | valet | $\frac{10}{1+1\,\text{℞}}$. |

Nam si 1. mensura vini vnà cum 1 ℞ mensuræ aquæ valet 10 numm. 1. mensura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{1+1\,\text{℞}}$. Itaq. æquatio erit inter $\frac{10}{1+1\,\text{℞}}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7 + 7 ℞. Ablatisq. 7. vtrobique, æquatio erit inter 3 & 7 ℞. Diuisisq. 3 per 7. fiet 1 ℞. $\frac{3}{7}$. Ac tantum aquæ vnius mensuræ commiscendum est cum 1. mensura vini, vt 1. mensura mixta valeat 7. numm. quod ita probatur.

| mens. ex vino & aqua | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|
| $1\frac{3}{7}$. | 10 | 1 ? | valet | 7 |

Nam si 1 mensura vini cum $\frac{3}{7}$. vnius mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura sola mixta valebit 7. numm.

7. *Sunt in quodam vasculo* 20. *mensuræ vini, quarum qualibet valet* 12. *numm. Infunditur deinde vasculo illi aqua, donec vasculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc* 1. *mensura mixta valet* 10. *numm. Quæritur, quanta sit capacitas illius vasculi.* VII.

PONE mensuras 20 + 1 ℞ vnius mensuræ. Deinde institue regulam Trium sic.

mens.

| mens. vini | mens. aquæ | numm. | mens. mixta | | numm. |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 + | 1 ℞ | 240 | 1. ? | valet | $\frac{240}{20+1℞}$ |

Nam si 1 mensura vini valet 12 numm. mensuræ vini 20 + 1 ℞ mens. aquæ simul valebunt 240 numm. Igitur 1. mensura mixta valebit $\frac{240}{20+1℞}$. numm. atque ita inuenta est æquatio inter $\frac{240}{20+1℞}$. & 10. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 240. & 200 + 10 ℞. Et ablatis 200 vtrinque, manebit æqualitas inter 40. & 10 ℞. Diuisisq. 40. per 10. fiet 1 ℞. 4. atque tot mens. aquæ infusæ sunt illi vasculo, ita vt totum vasculum capiat 24. mensuras. quod probatur sic.

| mens. vini & aquæ | numm. | mens. | | numm. |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 240 | 1. ? | valet | 10. |

Nam si 24. mensuræ ex vino & aqua valent 240 numm. propterea quod 1 mens. vini valet 12 numm. valebit 1 mens. mixta 10 numm.

VIII. 8 *Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ 140. eodem die proficiscuntur, alter versus alterum. Vnus quolibet die conficit 8. Leucas, alter vero 6. Leucas. Quæstio est, quando conuenient, sibiq. mutuò occurrent.*

PONE in 1 ℞. dierum. & institue regulam Trium sic.

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1 ℞ ? | 8 ℞ |
| 1 | 6 | 1 ℞ ? | 6 ℞ |

Prior ergo in 1 ℞ dierum conficiet 8 ℞. Leucarũ. Et posterior 6 ℞. atque ambo simul emensi erunt 14 ℞ leucarum, hoc est, leucas 140. Est ergo æquatio inter 14 ℞. & 140. Diuisis igitur 140. per 14. fiet 1 ℞. 10. Atque decimo die peracto conuenient. quod sic probo.

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 10 ? | 80 |
| 1 | 6 | 10 ? | 60 |

Nam prior in 10. diebus conficiet 80 leucas, & posterior 60. quæ simul totum spatium intermedium leucarum 140. constituunt.

9 Qui-

9 *Quidam permutans 568. aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis monetæ 7. faciunt 1. aur. Secundi generis, 18. Tertij, 21. & quarti 28. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quæritur, quotnam monetas cuiuslibet generis accipiat.* IX.

PONATVR 1 ℞ monetæ cuiuslibet, & regula Trium instituatur quater sic.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 1 ℞ ? | $\frac{1}{7}$ ℞ |
| 18 | 1 | 1 ℞ ? | $\frac{1}{18}$ ℞ |
| 21 | 1 | 1 ℞ ? | $\frac{1}{21}$ ℞ |
| 28 | 1 | 1 ℞ ? | $\frac{1}{28}$ ℞ |

Nam si 7 mon. faciunt 1 aur. 1 ℞ mon. faciet $\frac{1}{7}$ ℞ aur. & sic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco descriptæ numerum $\frac{71}{252}$ ℞ aur. æqualem numero 568. aur. Diuisis ergo 568. per $\frac{71}{252}$. fiet 1 ℞. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod sic probo.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 2016 ? | 288 |
| 18 | 1 | 2016 ? | 112 |
| 21 | 1 | 2016 ? | 96 |
| 28 | 1 | 2016 ? | 72 |

Nam 2016. mon. primi generis faciunt 288 aur. Secundi autem generis, 112 aur. Tertij, 96 aur. & quarti 72 aur. qui omnes faciunt summam 568 aur.

10 *Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Constant autem 100. libræ lanæ 7. aur. & 100. lib. ceræ 14. aur. emitq. duplo plures lib. lanæ, quam ceræ. Quæstio est, quot lib. vtriusque rei emerit.* X.

PONE 1 ℞ librarum ceræ, & 2 ℞ librarum lanæ: & institue bis regulam Trium, hoc modo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 lanæ | 7 | 2 ℞ lib. lanæ ? | $\frac{14}{100}$ ℞ |
| 100 ceræ | 14 | 1 ℞ lib. ceræ ? | $\frac{14}{100}$ ℞ |

Erit

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{28}{100}$ ze aur. & 124 aur. Diuisisq. 124. per $\frac{28}{100}$. fiet 1 ze. 442 $\frac{6}{7}$. atque tot lib. ceræ emit, & lanæ lib. 885 $\frac{5}{7}$. quod ita probatur.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 lanæ | 7 | 885 $\frac{5}{7}$ ? | 62 |
| 100 ceræ | 14 | 442 $\frac{6}{7}$ ? | 62 |

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124. aur.

XI. 11 *Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vendidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratusq. est hac mercatura 100. aur. Quæritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.*

PONE 1 ze vlnarum, & institue regulam Trium bis.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 1 ze ? | $\frac{7}{5}$ ze |
| 7 | 11 | 1 ze ? | $\frac{11}{7}$ ze |

Vides, si $\frac{7}{5}$ ze aur. quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$ ze aur. quos recepit, relinqui $\frac{6}{35}$ ze aur. pro lucro. Est ergo æquatio inter $\frac{6}{35}$ ze aur. & 100. aur. Diuisisq. 100. per $\frac{6}{35}$. fiet 1 ze. 583 $\frac{1}{3}$. vln. atque tot fuerunt vlnæ emptæ, atque venditæ. quod sic probo.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 583 $\frac{1}{3}$ ? | 816 $\frac{2}{3}$. |
| 7 | 11 | 583 $\frac{1}{3}$ ? | 916 $\frac{2}{3}$. |

Vbi cernis, eum lucratum esse 100. aureos.

XII. 12 *Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactusq. est dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdiditq. in hac mercatura 100. aur. Quæritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.*

Pone 1 ze. vln. &c. vt prius. & institue regulã Triũ bis, hoc modo.

| vln. | aur. | vln. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | 1 ze ? | $\frac{11}{7}$ ze |
| 5 | 7 | 1 ze ? | $\frac{7}{5}$ ze |

Igitur

Igitur si $\frac{1}{5}$ ℞ aur. quos recepit, detrahatur ex $\frac{1}{7}$ ℞ aur. quos expendit, emerget damnum $\frac{2}{35}$ ℞ aur. eritq; æquatio inter $\frac{2}{35}$ ℞ aur. & 100. aur. Diuisis ergo 100. per $\frac{2}{35}$ fiet 1 ℞. 583 $\frac{1}{3}$. vln. atque tot vlnæ fuerunt emptæ, ac venditæ. quod sic probo.

| vln. | aur. | vln. | aur. |
|---|---|---|---|
| 7 | 21 | 583 $\frac{1}{3}$ ? | 916 $\frac{2}{3}$. |
| 5 | 7 | 583 $\frac{1}{3}$ ? | 816 $\frac{2}{3}$. |

Vides ergo cum damnum fecisse 100. aureorum.

13 *Libræ* 100. *ceræ emuntur* 17. *aureis. Quæritur, quot libræ vendendæ sint pro* 1. *aur. vt* 102. *aur. lucrentur* 18. *aur.* XIII.

Pone 1 ℞ librarum. & institue regulam Trium hic.

| aur. | lib. | aur. | lib. |
|---|---|---|---|
| 17 | 100 | 102 ? | 600 |
| 1 | 1 ℞ | 102 + 18 ? | 120 ℞ |

Nam 102. aur. dabunt 600. lib. ergo si pro 1. aur. datur 1 ℞. lib. dabuntur 120 ℞ lib. pro aur. 102 + 18. quæ 120 ℞. æquales sunt 600. lib. quia tota cera venditur.

Eritq; æquatio inter 120 ℞ lib. & 600. lib. Diuisis ergo 600. per 120. fiet 1 ℞. 5. lib. Atque tot libræ vendendæ sunt pro 1. aur. vt in 600. libris fiat lucrum 18. aur. pro 102. aur. quod sic probo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 | 17 | 600 ? | 102 |
| 5 | 1 | 600 ? | 120 |

Vbi in priori exemplo vides 600. lib. facere 102. aur. In posteriori vero 120. aur. id est, 102 + 18.

14 *Emit quidam* 100. *lib. ceræ pro* 17. *aur. in quibus vendendis fecit damnum* 18. *aur. pro* 102. *aur. Quæritur quot libras pro* 1. *aur. dederit.* XIIII.

Pone 1 ℞. librarum, &c.

| aur. | lib. | aur. | lib. |
|---|---|---|---|
| 17 | 100 | 102 ? | 600 |
| 1 | 1 ℞ | 102 — 18 ? | 84 ℞ |

Eritq. æquatio inter 84. ꝛe. lib. & 600. lib. Diuisis igitur 600. per 84. fiet 1. ꝛe. $7\frac{1}{7}$. lib. Atque tot lib. dedit pro 1. aur. vt damnum fecerit 18. aur. in 102. aur. & 600. libris. quod sic probo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 100 | 17 | 600 ? | 102 |
| $7\frac{1}{7}$ | 1 | 600 ? | 84 |

Vbi vides expensos fuisse 102. aur. pro 600. lib. Et pro eisdem receptos fuisse 84. aur. id est, 102 — 18.

XV. 15. *Tres mercatores ineunt societatem. Primus ponit 40. aur. per 2. menses. Secundus 20. aur. per 5. menses. Tertius summam quandam aur. per 3. menses. Lucrati sunt autem 3276. aur. de quibus primo obtigerunt 1040. aur. Secundo 1300. & tertio 936. Quaritur quot aureos tertius posuerit.*

Ponatur 1. ꝛe. aureorum.

| aur. | mens. | lucrum | aur. |
|---|---|---|---|
| 40 | 2 | 3276 | 1040 primi |
| 20 | 5 | 3276 | 1300 secundi |
| 1 ꝛe. | 3 | 3276 | 936 tertij |

Per multiplicationem aureorum in tempus, reducentur numeri ad regulam Trium hoc modo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 80 | 3276 ? | 1040 primi |
| | 100 | 3276 ? | 1300 secundi |
| 252 | 3 ꝛe. vel | 3276 ? | 936 tertij |
| | 72 | | |

VT autem inueniatur æquatio, & pretium 1 ꝛe. inueniendus est numerus primus in regula Trium, qui nimirum summa est trium numerorum 80. 100. & 3 ꝛe. hoc modo. Quoniam ita se habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. ª fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium. Si ergo 262080. productus ex secundo 80. in tertium 3276. diuidatur per quartum 1040. exhibit primus 252. Ex quo si dematur summa ex 80. & 100. collecta, nimirum 180. remanebit pretium 3 ꝛe. videlicet 72. Diuisis ergo 72. per 3. fiet 1 ꝛe 24. numerus aur. quos tertius posuit. quæ pecunia ducta in 3. menses facit 72. &c.

a 19. septimi

Pretium 1 ꝛe. hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 252. ᵇ erit numerus 235872. factus ex primo 252. in quartũ 936. æqualis

b 19. septimi

æqualis numero 9828 2e facto ex secundo 3 2e. in tertium 3276. Diuisis igitur 235872. per 9828. fiet 1 2e. 24. vt prius.

16 *Tres socij volunt inter se distribuere 455. aur. ea conditione, vt quoties primus recipit 2. toties secundus recipiat 3. Et quoties secundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. Quæritur, quot aureos quilibet recipiat ex illa summa 455. aureorum.* XVI.

PONE primum accipere 1 2e. Et secundum $1\frac{1}{2}$ 2e. vt habeat numerum sesquialterum ad primum. Tertium vero $1\frac{7}{8}$ 2e. vt habeat numerum sesquiquartum ad secundum. Erit ergo æquatio inter $4\frac{3}{8}$ 2e. & 455. Diuisis igitur 455 per $4\frac{3}{8}$. fiet 1 2e. 104. numerus primi. Secundus ergo accipiet 156. nimirum $1\frac{1}{2}$ 2e. Tertius vero 195. nimirum $1\frac{7}{8}$ 2e. quod sic probatur. Tres numeri 104. 156. 195 faciunt summam 455. diuidendam. Et quoties 2. sunt in 104. toties 3. sunt in 156. Et quoties 4. sunt in 156. toties 5. sunt in 195. cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104 per 2. & 156 per 3. Item diuidendo 156 per 4 & 195 per 5.

1 2e
$1\frac{1}{2}$ 2e
$1\frac{7}{8}$ 2e

EADEM via tenenda est, si plures socij fuerint: vt si fuerint quatuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponendæ erunt $2\frac{3}{16}$ 2e. pro quarto, vt habeat numerum sesquisextum ad tertium. Si igitur diuidendi sint aurei 21840. erit æquatio inter $6\frac{9}{16}$ 2e. & 21840. Diuisis igitur 21840. per $6\frac{9}{16}$. fiet 1 2e. 3328. portio primi, quem posuimus accipere 1 2e. Portio secundi erit $1\frac{1}{2}$ 2e. idest, 4992. Portio tertij erit $1\frac{7}{8}$ 2e nimirum 6240. Portio denique quarti erit $2\frac{3}{16}$ 2e, hoc est, 7280. quod probabis, vt prius. Nam omnes quatuor portiones faciunt summam diuidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3328. per 2. & 4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992 per 4. & 6240. per 5. Denique idem etiam, diuidendo 6240 per 6. & 7280 per 7.

1 2e
$1\frac{1}{2}$ 2e
$1\frac{7}{8}$ 2e
$2\frac{3}{16}$ 2e

17 *Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquiualent aureis 164. Et primum in valore duplum est secundi: secundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. Quæritur valor singulorum fragmentorum.* XVII.

PONE quartum, siue minimum 1 2e. aur. tertium 4 2e. secundum 12 2e. & primum 24 2e. Sunt ergo 41 2e. æquales 164 aur. Diuisisq; 164 per 41. fiet 1 2e. 4. atque tot aureis æquiualet minimum fragmentum, siue quartum; atque idcirco tertium valebit 16 aur. secundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt summam 168. & seruatur proportiones in quæstione expressas.

XVIII. 18 *Tres socij conferunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt* 100. *aur. Est autem pecunia primi subdupla pecuniæ secundi: & pecunia secundi subtripla pecuniæ tertij. Quæritur, quantum quisque contulerit.*

PONE primum contulisse 1 ℞. Secundum 2 ℞. & tertium 6 ℞. Eruntq. 9 ℞. æquales 100 aur. Diuisis igitur 100 per 9. fiet 1 ℞. 11 $\frac{1}{9}$. pecunia primi. Secundi pecunia idcirco erit 22 $\frac{2}{9}$. Et tertij 66 $\frac{2}{3}$. quæ tres summæ faciunt 100 aur. seruantq. proportiones in quæstione expressas.

XIX. 19 *Moriens quidam testamentum condit, relinquitq. 3000. aur. distribuendos inter vxorem, filiũ, & duas filias, hac conditione, vt portio filij sit dupla portionis matris, & portio matris dupla quoque proportionis vnius filiæ. Quæritur, quanta sit vniuscuiusque portio.*

PONATVR portio vnius filiæ 1 ℞. matris 2 ℞. & filij 4 ℞. Erunt ergo 8 ℞. æquales 3000. aur.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Portio | filiæ | 1 ℞. | id est, | 375 | aur. |
| | filiæ | 1 ℞. | | 375 | |
| | matris | 2 ℞. | | 750 | |
| | filij | 4 ℞. | | 1500 | |

Diuisisq. 3000. per 8. fiet 1 ℞. 375. portio vnius filiæ. atque idcirco portio matris 750. & filij 1500.

XX. 20 *Mercator quidam qualibet parte tertia suæ pecuniæ lucratur* $\frac{1}{20}$. *eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur* $\frac{1}{3}$. *lucri prioris. Et sic omnibus computatis, inuenit 864. aur. Quæritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.*

PONATVR 1 ℞ pecuniæ. Ergo primũ lucrum fuit $\frac{3}{20}$ ℞. quandoquidem qualibet $\frac{1}{3}$ ℞ lucrata est $\frac{1}{20}$ ℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{1}{3}$ ℞ prioris lucri $\frac{3}{20}$ ℞. nimirum $\frac{3}{60}$ ℞ hoc est, $\frac{1}{20}$ ℞. quandoquidem qualibet $\frac{1}{3}$ ℞ lucrata est $\frac{1}{3}$. prioris lucri. Iam 1 ℞. $\frac{3}{20}$ ℞. & $\frac{1}{20}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{1}{5}$ ℞. æqualem 864 aur. Diuisis ergo 864

per

per 1 $\frac{1}{5}$. fiet 1 ℞. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo lucrum primum $\frac{3}{20}$ ℞. fuit 108 aur. Et lucrum secundum $\frac{1}{20}$. fuit 36 aur. quæ duo lucra cum 720 aur. faciunt 864 aur.

21 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{20}$. eiusdem pecuniæ. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecuniæ lucratur $\frac{1}{10}$. summæ ex eadem pecunia, & lucro collectæ. Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 400. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.* XXI.

PONE pecuniam fuisse 1 ℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{20}$ ℞. hoc est, $\frac{1}{5}$ ℞. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{18}{50}$ ℞. siue $\frac{9}{25}$ ℞. nimirum $\frac{3}{10}$. summæ $\frac{6}{5}$ ℞. ex priori lucro, & 1 ℞ collectæ. Iam 1 ℞. $\frac{1}{5}$ ℞. & $\frac{9}{25}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{14}{25}$ ℞. æqualem 400. aur. Diuisis ergo 400 per 1 $\frac{14}{25}$. fiet 1 ℞. 256 $\frac{16}{39}$. aur. atque tot aur. habuit mercator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{5}$ ℞. fuit aur. 51 $\frac{11}{39}$. Secundum vero lucrum $\frac{9}{25}$ ℞. fuit 92 $\frac{4}{13}$. quæ duo lucra cum 256 $\frac{16}{39}$. faciunt 400. aur.

22 *Mercator quidam qualibet parte quarta suæ pecuniæ lucratur $\frac{1}{30}$. eiusdem pecuniæ. Deinde singulis partibus quintis eiusdem pecuniæ prioris lucratur $\frac{1}{27}$. eiusdem pecuniæ. Atque ita singulis computatis, inuenit 2136. aur. Quæritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum vtrumque lucrum.* XXII.

PONE pecuniam fuisse 1 ℞. Ergo primum lucrum fuit $\frac{4}{30}$ ℞. siue $\frac{2}{15}$ ℞. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. Iam 1 ℞. $\frac{2}{15}$ ℞. & $\frac{5}{27}$ ℞. faciunt summam 1 $\frac{43}{135}$ ℞. æqualem 2136 aur. Diuisis igitur 2136 per 1 $\frac{43}{135}$. fiet 1 ℞. 1620 aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrũ $\frac{2}{15}$ ℞. fuit 216 aur. Secundum vero $\frac{5}{27}$ ℞. fuit 300 aur. quæ duo lucra cum 1620 aur. faciunt summam 2136 aur.

23 *Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quæritur quot poma vendantur pro 572. denariolis.* XXIII.

HAEC quæstio per regulam Trium expedietur hoc modo.

| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 | 572? | 156 |

Per

Per Algebram vero soluetur, si pro quarto numero inueniendo in
a 19. septimi regula Trium ponatur 1 ℞. pomorum. Et quia tantum fit ex pri-

| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 | 572 ? | 1 ℞ |

mo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit numerus 11 ℞ productus ex primo in quartum, æqualis numero 1716. producto ex secundo in tertium. Diuisis ergo 1716. per 11. fiet 1 ℞. 156. numerus pomorum, quæ constant 572 denar. Vides ergo excellentiam Algebræ etiam in quæstionibus regulæ Trium, quod etiam in sequenti exemplo apparebit.

XXIIII. 24 *Libræ 47. quarundam mercium constant aur. 30. Quæritur, quanti constabunt 100. libræ.*

PONATVR 1 ℞. vt hic vides.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 47 | 30 | 100 ? | 1 ℞ |

Est ergo æquatio inter 47 ℞. & 3000. Diuisis ergo 3000 per 47 fiet 1 ℞. $63\frac{39}{47}$. aur.

XXV. 25 *Est massa quædam argenti pondus habens marcarum 7. quarum quælibet continet 5. semiuncias puri argenti, & 11. semiuncias cupri. Commiscetur autem massæ illi liquatæ alia massa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quæritur quantum argenti puri habitura sit quælibet marca illius massæ nouæ 28. marcarum.*

HIC certum est, pauciores semiuncias puri argenti contineri in 28. marcis, quam in 7. quippe cum semunciæ in his contentæ distributæ sint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponuntur 35. semiunciæ puri argenti, diuisis his per 28. reperientur in qualibet marca $1\frac{1}{4}$. semiunciæ puri argenti. Si igitur 1 marca pondus habet 16. semiunciarum, erunt in qualibet marca $14\frac{3}{4}$. semiunciæ cupri. Hoc autem ita esse, facile probabitur. Nam pondus 21. marcarum cupri puri, faciet 336. semiuncias cupri: Et si accedant 77 semiunciæ in prioribus 7 marcis contentæ, fient semiunciæ cupri 413. qui numerus etiam producitur ex $14\frac{3}{4}$. (quot nimirum semiuncias cupri in qualibet marca inesse diximus) in 28. marcas. Sed vt quæstio hæc soluatur per Algebram, sic stabit exemplum ad regulam Trium inuersam.

arg.

| | | | |
|---|---|---|---|
| arg. mix. | arg. pur. | arg. mix. | arg. pur. |
| 7. marc. | 5. semiunc. | 28. marc ? | semiun. 1 ℞. |

Et quoniam in regula Trium inuersa, numerus factus ex primo in secundum æqualis est numero facto ex tertio in quartum, propterea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria deberet tenere primum locum, vt in Arithmetica practica diximus: erit æquatio inter 35. & 28 ℞. Diuisisq; 35 per 28 fiet 1 ℞. puri argenti semiunciæ $1\frac{1}{4}$. vt prius.

26 *Quinque conuictores singulis hebdomadis soluunt 11. aur. quantum ergo soluent 18. conuictores in 40. diebus.* XXVI.

HAEC quæstio spectat ad regulam Trium compositam, quæ ad

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Conuict. | Dies | aur. | Conuict. | Dies | aur. |
| 5 | 7 | 11 | 18 | 40 ? | 1 ℞ |

regulam Trium simplicem reducitur per multiplicationem conuictorum in tempus, vt hic.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conuict. | aur. | Conuict. | aur. |
| 35 | 11 | 720 ? | 1 ℞ |

Nam tantum soluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno. Et tantum vnus in 35. diebus, quantum 5. in septem. atque hæc est ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Posito igitur quarto numero 1 ℞. erit æquatio inter 35 ℞. & 7920. Diuisis ergo 7920. per 35. fiet 1 ℞. 226 $\frac{2}{7}$. aur. quot nimirum 18. conuictores in 40. diebus soluent.

27 *Pro tribus ponderibus æqualibus vehendis per leucas 7. debentur vectori 11. grossi, quorum quilibet valet denariolos 25. Quæro iam, quot similia pondera sint vehenda per 40. leucas pro 400. grossis.* XXVII.

HAEC etiam quæstio ad regulam Trium compositam pertinet, vt hic vides.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grossi | Pond. | Leuc. | Grossi | Pond. | Leuc. |
| 11 | 3 | 7 | 400 ? | 1 ℞ | 40 |

Pone 1 ℞. Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Triũ ordi-

ordinariam per multiplicationem pond. in spatium itinerarium: quandoquidem tantum soluendum est pro 3. pondere per 7. Leucas, quantum pro 1 pond. per 21 Leucam: & tantum per 1 pond. per 21 Leuc. quantū pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductionē hic cernis.

| Grossi | Pond. | Grossi | Pond. |
| --- | --- | --- | --- |
| 11 | 21 | 400 ? | 40 ℞ |

Erit igitur aequatio inter 440 ℞. & 8400. Diuisis ergo 8400. per 440. fiet 1 ℞. 19 $\frac{1}{11}$. Pond. vehenda per 40 Leucas pro 400 grossis. Nam si pro 3. pond. per 7. Leucas soluuntur 11. grossi, pro 19 $\frac{1}{11}$. pond. per 7 Leucas soluentur 70 grossi, vt hic vides.

| Pond. | Grossi | Pond. | Grossi |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 11 | 19 $\frac{1}{11}$ ? | 70 |

Deinde si per 7 Leucas soluuntur 70 grossi, per 40 Leucas soluentur 400 grossi, vt hic vides.

| Leuc. | Grossi | Leuc. | Grossi |
| --- | --- | --- | --- |
| 7 | 70 | 40 ? | 400 |

XXVIII. 28 *Tres sartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo sartores perficient 8. tunicas?*

Pone 1 ℞. dierum.

| Sart. | Dies | Tunic. | Sart. | Dies | Tunic. |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 14 | 7 | 2 | 1 ℞ | 8 |

Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordinariam, vt hic.

| | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| 42 | 7 | 2 ℞ | 8 |

Erit aequatio inter 336. & 14 ℞. Diuisis ergo 336 per 14. fiet 1 ℞ 24. dies, in quibus duo sartores 8. tunicas perficient. Nam si 3. sartores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo sartores in 14. diebus, nimirum in eodem tempore, perficient 4 $\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

| Sart. | tunic. | Sart. | tunic. |
| --- | --- | --- | --- |
| 3 | 7 | 2 | 4 $\frac{2}{3}$. |

Deinde si tunicae 4 $\frac{2}{3}$. absoluuntur 14. diebus, tunicae 8. absoluentur diebus 24. vt hic constat.

| tunic. | Dies | tunic. | Dies |
| --- | --- | --- | --- |
| 4 $\frac{2}{3}$ | 14 | 8 | 24 |

29 Ter-

29 *Seruo cuidam promisit quidam ciuis pro 12. mensibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Post 7. autem menses dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanti ergo æstimata est tunica illa?* XXIX.

PONE eius pretium esse 1 ℞. aur. Et dic. Si 12. menses poscunt 1 ℞ + 10 aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesq. $\frac{1℞+10}{12}$ aur. Rursum dic. Si 7. menses poscunt 1 ℞ + 2 aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesq. $\frac{1℞+2}{7}$ aur. vt hic vides.

| Menses | Aurei | Mensis | Aurei |
|---|---|---|---|
| 12 | 1 ℞ + 10 | 1? | $\frac{1℞+10}{12}$ |
| 7 | 1 ℞ + 2 | 1? | $\frac{1℞+2}{7}$ |

Erit ergo æquatio inter $\frac{1℞+10}{12}$ & $\frac{1℞+2}{7}$. cum vterque numerus sit merces 1. mensis. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 7 ℞ + 70. & 12 ℞ + 24. Ablatis ergo 24 vtrinque, erit æquatio inter 7 ℞ + 46. & 12 ℞. Rursumq. ablatis 7 ℞. vtrobique, inter 46 & 5 ℞. Diuisis igitur 46 per 5. fiet 1 ℞. 9 $\frac{1}{5}$ aur. pro pretio tunicæ. Nam hac ratione merces 12. mensium erit 19 $\frac{1}{5}$ aur. nimirum 10 aur. & tunica. Igitur merces 7 mensium erit 11 $\frac{1}{5}$ aur. vt hic vides. nimirum 2. aur. & pretium tunicæ 9 $\frac{1}{5}$. aur.

| Menses | aur. | Menses | aur. |
|---|---|---|---|
| 12 | 19 $\frac{1}{5}$ | 7? | 11 $\frac{1}{5}$ |

30 *Ciuis quidam seruo suo pigro ita mercedem 30. dierum constituit, vt laboranti singulis diebus dare velit 7. grossos: ociantem vero mulctare 5. grossis. Ratione autem inita post 30. dies, seruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermisit?* XXX.

PONE 1 ℞. dierum laboris, ideoq. 30 — 1 ℞ dierum otij. Et institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | Dies | grossi | Dies | grossi |
|---|---|---|---|---|
| Laboris | 1 | 7 | 1 ℞? | 7 ℞ |
| Otij | 1 | 5 | 30—1 ℞? | 150—5 ℞ |

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 7 ℞. & 150 — 5 ℞. Additisq. 5 ℞ vtrobique, inter 12 ℞. & 150. Diuisis ergo 150 per 12. fiet 1 ℞. $12\frac{1}{2}$ dies laboris, & otij $17\frac{1}{2}$. quod ita probatur.

| | Dies | grossos | Dies | grossos |
|---|---|---|---|---|
| Laboris | 1 | 7 | $12\frac{1}{2}$ ? | $87\frac{1}{2}$ |
| Otij | 1 | 5 | $17\frac{1}{2}$ ? | $87\frac{1}{2}$ |

Vbi vides, tantam esse mercedem, quanta est mulcta.

XXXI. 31 *Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1 libram zinziberis $\frac{1}{2}$. aur. Quæstio est, quot libræ croci vendita sint, & quot zinziberis?*

PONE 1 ℞ librarum croci, ideoq. 20 — 1 ℞ librarum zinziberis, & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|---|
| Croci | 1 | 3 | 1 ℞ ? | 3 ℞ |
| Zinzib. | 1 | $\frac{1}{2}$ | 20 — 1 ℞ ? | $\frac{20-1℞}{2}$ |

Aequatio igitur est inter summam ex 3 ℞ aur. & $\frac{20-1℞}{2}$ aur. collectam, & 45 aur. Est autẽ illa summa 10 + $\frac{5}{2}$ ℞ aur. (Nam $\frac{20-1℞}{2}$ æquiualent numero 10 — $\frac{1}{2}$ ℞. cui si addantur 3 ℞ aur. fit summa 10 + $\frac{5}{2}$ ℞.) Igitur æquatio est inter aur. 10 + $\frac{5}{2}$ ℞ aur. & 45. aur. Ablatisq. 10 aur. vtrobique, inter $\frac{5}{2}$ ℞. & 35. Diuisis igitur 35 per $\frac{5}{2}$. fiet 1 ℞. 14. Atque tot lib. croci venditæ sunt, ac proinde 6 lib. zinziberis, quod ita probatur.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|---|
| Croci | 1 | 3 | 14 ? | 42 |
| Zinzib. | 1 | $\frac{1}{2}$ | 6 ? | 3 |

Vbi vides ex pretio 14 lib. croci, & 6. lib. zinziberis colligi 45. aureos.

XXXII. 32 *Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquiualent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent $\frac{1}{4}$. aur. & reliquarum quali-*

*qualibet $\frac{1}{4}$. aur. Quæritur numerus priorum, ac posteriorum.*

PONE 1 2e. priorum, & posteriorum 560 — 1 2e. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 1 2e ? | $\frac{1}{3}$ 2e |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 560 — 1 2e ? | $\frac{560 - 1 2e}{4}$ |

Quarti numeri inuenti æquiualent 160 aur. Summa illorum numerorum facit aur. 140 + $\frac{1}{12}$ 2e. ( Nam $\frac{560 - 1 2e}{4}$. æquiualent numero 140 — $\frac{1}{4}$ 2e. cui si addatur $\frac{1}{3}$ 2e. fit summa 140 + $\frac{1}{12}$ 2e. ) Est igitur æquatio inter aur. 140 + $\frac{1}{12}$ 2e. & 160 aur. Ablatisq. 140 vtrinque, inter $\frac{1}{12}$ 2e. & 20. Diuisis igitur 20 per $\frac{1}{12}$. fiet 1 2e. 240. atque tot monetæ sunt prioris generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{3}$. aur. posterioris autem generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{4}$. aur. sunt 320. quod ita probatur.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ | 240 ? | 80 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 320 ? | 80 |

Vbi cernis, numeros in quarto loco positos facere 160. aur.

33 *Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quanti vnum emerit, respondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissem pluris 96. aureis. Quæritur de pretio.* XXXIII.

HAEC quæstio soluetur per modum regulæ Algebræ sine numeris Cossicis, & sine positione 1 2e. quod sane peregregium videri possit. quod etiam in proximis tribus quæstionibus, quæ sequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40 aur. excessus est pretij 10. boum supra 40 aur. quippe cum dicat lanio, se amplius 40 aur. expendisse, quos non debuisset expendere. Item boues 18 — 96 aur. excessus est pretij 18. boum supra 96 aur. quos non debuisset expendere. atque hi duo excessus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisq. 96 aur. vtrobique, inter boues 10 + 56 aur. & boues 18. ( Nam ex 96. additis ad — 40. fit summa + 56 ) Et ablatis 10 bobus vtrinque, inter 56 aur. & 8 boues. Diuisis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisq. 40 aur.

 quos

quos vltra iustum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractisq. 96 aur. quos non debuerat expendere, remanent similiter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixisset lanio ille, se 10 boues tanto emisse pluris 40 aur. quanto emere potuisset 18 boues minoris 96 aur. existeret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96. — 18 bobus. quia ille esset excessus pretij 10 boum vltra 40 aur. hic autem excessus aur. 96. vltra pretium 18 boum. Additis igitur 18 bobus vtrinque, erit æquatio inter 28 boues — 40 aur. & 96 aur. Additisq. rursum 40 aur. vtrobique, inter 28 boues, & 136 aur. Diuisis ergo 136 per 28. fiet pretiũ 1 bouis aur. $4\frac{6}{7}$. quod probatur sic. Boues 10. valebunt aur. $48\frac{4}{7}$. & demptis 40 aur. remanent aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. $87\frac{3}{7}$. quibus demptis ex 96. remanent similiter aur. $8\frac{4}{7}$. pro pretio 18 boum.

Sic si dicas. Emi 4 grossis — 3 ouis, 41 oua. erit æquatio inter 4 grof. — 3 ouis, & 41 oua. Additisq. 3 ouis vtrobique, inter 4 grof. & 44 oua. Diuisis igitur 44 per 4. fiet Quotiens 11. atque tot oua ementur 1 grosso.

Item si dicas. 4 grossi — 3 denar. faciunt 97 denariolos, inuenies 1 grof. facere 25 denar.

Item si dicat quis, 4 aur. + 125 grof. facere aur. $10\frac{1}{4}$. Demptis 4 aur. vtrobique, erit æquatio inter 125 grof. & $6\frac{1}{4}$ aur. Diuisis ergo $6\frac{1}{4}$ aur. per 125 grof. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$ aur. valor 1 grossi. hoc est, 1 groff. facit $\frac{1}{20}$. vnius aurei. Quod si diuides 125 groff. per $6\frac{1}{4}$ aur. fiet Quotiens 20. atque tot grossi facient 1. aureum.

XXXIIII. 34 *Quando 7. vlnæ cuiusdã panni emuntur $4\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. groff. $18\frac{4}{7}$. Quæstio est, quot grossi faciant 1. aur.*

QVONIAM eadem est proportio 7 vln. ad $4\frac{1}{2}$ aur. quæ 17 vln. ad aur. 10 groff. $18\frac{4}{7}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. grof. |
|---|---|---|---|
| 7 | $4\frac{1}{2}$ | 17 | 10. $18\frac{4}{7}$ |

a 19. septimi [a] Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium; erit æquatio inter 70 aur. + 130 groff. & $\frac{153}{2}$ aur. siue $76\frac{1}{2}$ aur. Ablatisq. 70 aur. vtrobique, inter 130 groff. & $6\frac{1}{2}$ aur. Diuisis ergo 130 per $6\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot grossi æquiualent 1. aureo.

35 *Quidam recipit a mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rursum ab eodem accipit 24. lib. croci. Tandem*

reddit

*reddit mercatori 30. lib. croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quaeritur pretium 1. lib. croci.*

HIC vides 10 aur. + 24 lib. esse totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30 lib. — 14 aur. Est ergo æquatio inter 10 aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14 aur. Additisq. 14 aur. vtrobique, inter 24 aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatisq. 24. lib. vtrinque, inter 24 aur. & 6 lib. Diuisis igitur 24 per 6. fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod sic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ $2\frac{1}{2}$. atque ita emptor recepit a mercatore lib. $26\frac{1}{2}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori restituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. $3\frac{1}{2}$. cum hic solum receperit lib $26\frac{1}{2}$. Valent autem $3\frac{1}{2}$ lib. aur. 14. quos mercator emptori restituit.

36 *Ciuis quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suæ: quibus è denariolis, quos in manu habet, septenos erogat denariolos. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quòd si cuilibet dare voluisset 9. defuissent illi 32. denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint; & quot denariolos ciuis ille habuerit in manu.* XXXVI.

HIC vides, 7. summas denariolorum, quarum quælibet æqualis est numero pauperum, + 24 denar. æquales esse toti numero denariolorum; quos ciuis ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot sunt pauperes, vnam summam constituunt; ac proinde toties 7. denarioli, quot sunt pauperes, constituent 7. summas. Eodem modo 9. summæ denariolorum, quarum quælibet æqualis est eidem numero pauperum, — 32 denar. æquales erunt toti numero denariolorum, quos ille ciuis habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. summ. + 24. & 9. summ. — 32. Additisq. 32 vtrinque, inter 7. summ. + 56. & 9. summ. Ablatisq. 7. summ. ex 9. inter 56. & 2. summ. Diuisis ergo 56 per 2. fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam si cuilibet dentur 7. denar. erogati erunt 196 denar. Et quia tunc superfuerunt 24 denar. habuit ciuis ille in manu 220 denar. Quòd si cuilibet dare voluisset 9 denar. oportuisset illum habere in manu 252 denar. Defuissent ergo illi 32. denarioli.

37 *Pro 70. summis librarum quarundam mercium penditur vectigal 1. summa — 32. aur. Et pro 200. sum-* XXXVII.

*mis*

*mis penditur 1. summa + 20. aur. Quaeritur, quanti 1. summa constet.*

PONE 1 ℞ aur. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Summæ | aur. | Summa | aur. |
|---|---|---|---|
| 70 | 1 ℞ — 32 | 1 ? | $\frac{1℞ - 32}{70}$ |
| 200 | 1 ℞ + 20 | 1 ? | $\frac{1℞ + 20}{200}$ |

Nam si pro 70. summ. penditur vectigal 1 ℞ — 32 aur. pro 1. summa pendetur $\frac{1℞ - 32}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{1℞ - 32}{70}$ aur. & $\frac{1℞ + 20}{200}$ aur. cum vterque numerus sit vectigal 1. summæ. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 200 ℞ — 6400 aur. & 70 ℞ + 1400 aur. Additis igitur 6400. vtrobique, erit æquatio inter 200 ℞ & 70 ℞ + 7800. Ablatisq. 70 ℞ vtrinque, inter 130 ℞ & 7800. Diuisis ergo 7800 per 130. fiet 1 ℞. 60 aur. pro pretio vnius summæ. quod sic probatur. Pro 70 summis pendetur vectigal 28 aur. nimirum 1 ℞ — 32 aur. Et pro 200. summis pendetur vectigal 80 aur. nimirum 1 ℞ + 20 aur. vt hic apparet.

| Summæ | aur. | Summæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 70 | 28 | 200 ? | 80 |

XXXVIII. 38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlnæ panni rubri cum cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 32. Quæstio est de pretio 1. vlnæ.*

PONATVR 1 ℞ pretium 1. vlnæ panni rubri. Constabuntq. 10 vlnæ 10 ℞ ac proinde 4 vlnæ panni nigri cõstabunt 88 aur. — 10 ℞. Vlnæ vero 2. panni rubri constabunt 2 ℞, ideoq. 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. — 2 ℞. Erit ergo æquatio inter 88 aur. — 10 ℞ & 32 aur. — 2 ℞. cum vterque numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri. Additis igitur 10 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 88 aur. & 32 aur. + 8 ℞. Ablatisq. 32 aur. vtrinque, inter 56 aur. & 8 ℞. Diuisis ergo 56 per 8. fiet 1 ℞. 7 aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri. quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. proptereaq. 4. vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88 aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. 4 $\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD si 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri constent aur. 41. constabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 — 10 ℞.

10 ℞. Et 6. vlnæ panni nigri, aur. 41 — 2 ℞. si nimirum ponatur 1 ℞. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, vt prius. Sed non erit æquatio inter aur. 88 — 10 ℞. & aur. 41 — 2 ℞. cum prior numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri, posterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inuestigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

| Vlnæ | aur. | Vlnæ | aur. |
|---|---|---|---|
| 6 | 41 — 2 ℞ | 4 ? | $\frac{164 - 8 ℞}{6}$ |

Inuenieturq. 4 vlnarum pretium $\frac{164 - 8 ℞}{6}$ aur. atque ita inuenta, erit æquatio inter aur. 88 — 10 ℞ & aur. $\frac{164 - 8 ℞}{6}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter aur. 528 — 60 ℞. & aur. 164 — 8 ℞. Additisq. 60 ℞ vtrobique, inter 528 aur. & aur. 164 + 52 ℞. Et ablatis 164 aur. vtrinque, inter 52 ℞. & 364 aur. Diuisis ergo 364 per 52. fiet 1 ℞. 7 aur. pro pretio 1 vlnæ panni rubri, veluti prius.

ET si 10 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constarent 88 aur. vt prius, sed 2 vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valerent tantum 20 aur. inuenires pretium 1 ℞. 8 $\frac{1}{2}$ pro pretio 1 vlnæ panni rubri. quod probare potes. Nam 10 vlnæ panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnæ panni nigri, aur. 3. ideoq. 1 vlna $\frac{3}{4}$ aur. Atque ita 2 vlnæ panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

*39 Mercator in tribus nundinis eandem aureorum summam exponens, lucratus est in singulis $\frac{1}{8}$. suæ summæ aureorum. Deinde ad alias se conferens nundinas lucratus est $\frac{3}{10}$. eiusdem suæ summæ priori lucro auctæ. Atque ita deprehendit se habere 1287. aur. Quæritur summa aureorum, quos initio habuit.* XXXIX.

PONATVR 1 ℞. Et quia in singulis nundinis lucratus est $\frac{1}{8}$ ℞. habebit post illas tres nundinas aur. 1 $\frac{3}{8}$ ℞. hoc est, $\frac{11}{8}$ ℞. Deinde quia cum $\frac{11}{8}$ ℞ lucratus est $\frac{3}{10}$ ℞ id est, $\frac{33}{80}$ ℞. si hoc lucrum ad $\frac{11}{8}$ ℞ adijciatur, fiet summa $\frac{1144}{640}$ ℞. quam vltimo loco habuit. quæ æqualis est 1287 aur. Diuisis ergo 1287 per $\frac{1144}{640}$. fiet 1 ℞. 720 summa aureorum illius mercatoris. Nam eius $\frac{3}{8}$. quas in tribus nundinis est lucratus, sunt 270 aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus est $\frac{3}{10}$. nimirum $\frac{2970}{10}$. hoc est, 297 aur. qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abstractis proponeretur hæc quæstio hunc in modũ. Inuenire numerum, qui cum $\frac{3}{8}$. ipsius, & cum $\frac{3}{10}$. huius summæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

40 *In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior est numero equitum. In hos distribuuntur aur. 392000. ita vt quini singulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quæritur, quot sint pedites, & quot equites.*

PONATVR 1 ℞ equitum, ideoq. 8 ℞ peditum, instituaturq. regula Trium bis, hoc modo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eques 1 | aur. 16 | Equitum 1 ℞ ? | aur. 16 ℞ |
| Pedes 1 | 5 | 8 ℞ ? | 40 ℞ |

Erunt igitur 56 ℞ aur. æquales 392000 aur. Quare diuisis 392000 per 56. fiet 1 ℞. 7000. numerus equitum: ideoq. pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita distributi erunt equitibus aur. 112000. & peditibus aur. 280000. qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 *Tres milites prædam quandam aureorum æqualiter inter se diuidere volebant. Sed oborta lite, vt fit, ad manus ventum est, & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. a secundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui secundo supersunt: Secundum vero, acceptis 7. a tertio, habere numerum æqualem residuo tertij: Tertium denique, acceptis 9. a primo, habere numerum triplum eius, qui tertio superest. Quæritur summa aureorum in illa præda repertorum, & quantum quisque rapuerit.*

PONE primum rapuisse 1 ℞. Acceptis ergo 5. a secundo, habuit 1 ℞ + 5. qui numerus æqualis dicitur esse residuo secundi. Antequam secundus igitur dedit 5. primo, habuit 1 ℞ + 10. Acceptis autem 7. a tertio, habuit 1 ℞ + 17. ac tantundem fuit residuū tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. primo, habuit 1 ℞ + 24. Acceptis vero 9. a primo, habuit 1 ℞ + 33. qui numerus triplus esse dicitur eius, qui primo remanet, hoc est, 1 ℞ — 9. Ergo huius triplum 3 ℞ — 27. æquale est 1 ℞ + 33. Additisq. 27 vtrobique, erit æquatio inter 1 ℞ + 60. & 3 ℞. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 60. & 2 ℞.

& 2𝔵. Diuisis ergo 60 per 2. fiet 1𝔵. 30. numerus primi. Numerus autem secundi, qui inuentus est 1𝔵 + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus est, rapuisse 1𝔵 + 24. habuit 54. & summa aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. a secundo, habebit 35. quot nimirum secundo supersunt. Et secundus, acceptis 7. a tertio, habebit 47. quot videlicet tertio supersunt. Tertius denique, acceptis 9. a primo, habebit 63. qui numerus triplus est residui primi, nimirum 21. Summa si 124. aur. in tres æquales partes distribuantur, obuenient cuilibet militi $41\frac{1}{3}$. aur.

42 *Quatuor socij marsupium inuenerunt aureis plenum, è quibus quilibet partem forte fortuna accepit. Sed cum singuli suos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. a secundo, habere numerum æqualem residuo secundi; Secundum vero, acceptis 30. a tertio, habere numerum triplum residui tertij; Tertium autem, acceptis 40. a quarto, habere numerum duplum residui quarti; Quartum denique, acceptis 50. a primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum summa, & quot quisque acceperit.* XLII.

PONE primum accepisse 1𝔵. Acceptis ergo 25. a secundo, habebit 1𝔵 + 25. ac totidem superfuerunt secundo, ac proinde secundus, antequam dedit 25. primo, habuit 1𝔵 + 50. Acceptis autem 30. a tertio, habebit 1𝔵 + 80. Remanserunt ergo tertio $\frac{1}{3}$𝔵 + $26\frac{2}{3}$. vt ille numerus huius sit triplus: ac proinde tertius antequam dedit 30. secundo, habuit $\frac{1}{3}$𝔵 + $56\frac{2}{3}$. Acceptis autem 40. a quarto, habebit $\frac{1}{3}$𝔵 + $96\frac{2}{3}$. qui numerus duplus esse debet residui quarti; ac proinde quarto tunc superfuerunt $\frac{1}{6}$𝔵 + $48\frac{1}{3}$. Et antequam daret 40. tertio, habuit $\frac{1}{6}$𝔵 + $88\frac{1}{3}$. Hic denique, acceptis 50. a primo, habebit $\frac{1}{6}$𝔵 + $138\frac{1}{3}$. qui numerus, demptis 5. triplus esse debet numeri 1𝔵 − 50. qui primo superest. Ergo huius triplum 3𝔵 − 150. æquale est $\frac{1}{6}$𝔵 + $133\frac{1}{3}$. Additis ergo 150. vtrobique, erit æqualitas inter 3𝔵. & $\frac{1}{6}$𝔵 + $283\frac{1}{3}$. Ablatoq. $\frac{1}{6}$𝔵 vtrinque, inter $2\frac{5}{6}$𝔵. & $283\frac{1}{3}$. Diuisis igitur $283\frac{1}{3}$ per $2\frac{5}{6}$𝔵. fiet 1𝔵. 100. numerus primi. Ergo secundus 1𝔵 + 50. erit 150. Tertius autem $\frac{1}{3}$𝔵 + $56\frac{2}{3}$. erit 90. Quartus denique $\frac{1}{6}$𝔵 + $88\frac{1}{3}$. erit 105. Ita namque primus cum 25. secundi habebit 125. ac tantum etiam remanet secundo. Secundus vero cum 30. tertij habebit 180. numerum scilicet triplum numeri 60. qui tertio superest. Tertius deinde cum 40. quarti habebit 130. qui numerus duplus est numeri

| | |
|---|---|
| 100. | 1𝔵 |
| 150. | 1𝔵 + 50 |
| 90. | $\frac{1}{3}$𝔵 + $56\frac{2}{3}$ |
| 105. | $\frac{1}{6}$𝔵 + $88\frac{1}{3}$ |

65. qui quarto superest. Quartus denique cum 50. primi habebit 155. qui numerus, demptis 5. triplus est numeri 50. qui primo superest.

XLIII. 43 *In exercitu cæsareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conflato, sunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt $\frac{1}{2}$ Germanorum, atque Italorum. Itali denique faciunt $\frac{1}{8}$ Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italorum, & quantus sit totus exercitus.*

PONE pro Vngaris 1 $x$. Ergo Germani simul cum Italis erunt 2 $x$. & totus exercitus 3 $x$. Quia vero Itali faciunt $\frac{1}{8}$. Germanorũ vna cum Vngaris; sunt autem Vngari cum Germanis 1 $x$ + 25000. facient Itali $\frac{1}{8}$ $x$ + 3125. Quoniam igitur Germani sunt 25000. & Vngari 1 $x$. atque Itali $\frac{1}{8}$ $x$ + 3125. erit totus exercitus 1 $\frac{1}{8}$ $x$ + 28125. æqualis 3 $x$. Ablatis ergo 1 $\frac{1}{8}$ $x$. vtrobique, erit æquatio inter 28125. & 1 $\frac{7}{8}$ $x$. Diuisisq. 28125. per 1 $\frac{7}{8}$. fiet 1 $x$ 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum $\frac{1}{8}$. Germanorum, atque Vngarorum, qui simul faciunt 40000. totusq. exercitus erit 45000.

XLIIII. 44 *Sunt duo Duces, quorum vnus milites habet pauciores 40. quam alter. Et vterque suis militibus 1200. aur. distribuit, quo facto euenit, vt prioris Ducis milites singuli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis posterioris. Quæstio est, quot milites vterque Dux habeat, & quot aureos singuli milites accipiant.*

PONATVR 1 $x$ militum pauciorum, & 1 $x$ + 40. plurium. Si per hos milites diuidantur 1200 aur. fient Quotientes $\frac{1200}{1x}$. & $\frac{1200}{1x+40}$. numeri videlicet aureorum, qui singulis obuenerunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam posteriorum quilibet; si posteriori Quotienti addantur 5. fiet summa $\frac{5x+1400}{1x+40}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{1200}{1x}$. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc

$$\begin{array}{cc} 1200 & 5x+200 \\ \hline \frac{1200}{1x+40} & \frac{5}{1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1x+40} \end{array}$$

inter 1200 $x$ + 48000. & 5 ʒ + 1400 $x$. Ablatisq. 1200 $x$ vtrinque, inter 48000. & 5 ʒ + 200 $x$. Et rursum ablatis 200 $x$ vtrobique, inter 48000 — 200 $x$. & 5 ʒ. Diuisisq. omnibus per 5. inter 9600 — 40 $x$. & 1 ʒ. Semissis numeri radicum est 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. a cuius radice quadrata 100.

ta 100. si auferatur prædicta semissis 20. remanet pretium 1 ℞. 80. numerus scilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur. quia diuisis 1200 per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos singuli militum 80. accipiunt. Diuisis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus videlicet aureorum, quos singuli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet posteriorum.

45 *Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus superat, parem aureorum summam viritim diuidunt. In singulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in singulos maioris. Aureorum autem summa numerum sociorum vtriusque societatis superat aureis 172. Quæritur summa aureorum, ac Sociorum.* XLV.

PONATVR pro minore Societate, 1 ℞ hominum, ac propterea pro maiore, 1 ℞ + 4. Eritq. summa aureorum 2 ℞ + 176. quæ summa diuisa per 1 ℞ & per 1 ℞ + 4. facit Quotientes $\frac{2℞+176}{1℞}$. & $\frac{2℞+176}{1℞+4}$. numeros scilicet aureorum, qui cuilibet obueniunt. Et quia prior Quotiens superat posteriorem 8 aureis: si ad posteriorem addantur 8 aur. fiet summa $\frac{10℞+208}{1℞+4}$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{2℞+176}{1℞}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10 ℨ + 208 ℞ & 2 ℨ + 184 ℞ + 704.

$$\begin{array}{c} \underline{2℞+176 \qquad 8℞+32} \\ \frac{2℞+176}{1℞+4} \qquad \frac{8}{1} \\ \hline 1℞+4 \end{array}$$

Ablatis autem 2 ℨ. vtrobique, erit æquatio inter 8 ℨ + 208 ℞. & 184 ℞ + 704. Et rursum ablatis 184 ℞ vtrinque, inter 8 ℨ + 24 ℞. & 704. Et ablatis rursum 24 ℞ vtrobique, inter 8 ℨ. & 704 − 24 ℞. Diuisisq. omnibus per 8. inter 1 ℨ. & 88 − 3 ℞. Semissis numeri radicum est $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. additis 88, siue $\frac{352}{4}$ fit numerus $\frac{361}{4}$ a cuius radice quadrata $\frac{19}{2}$, si dematur prædicta semissis $\frac{3}{2}$. superit pretium 1 ℞. $\frac{16}{2}$. hoc est, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12. nimirum 1 ℞ + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 2 ℞ + 176. quod probatur. Nam diuisis aureis 192. per 8. & 12. fiunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc superat 8. aureis.

46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus est summam æqualem suæ pecuniæ, ita vt post primam negotiationem habuerit duplum suæ pecuniæ. Deinde in secunda negotiatione* XLVI.

*lucratus est radicem quadratam eius dupli, ac praeterea 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucratus est quadratum totius prioris summae, & insuper 4. aureos. Atque ita deprehendit se habere 510. aureos. Quaeritur summa pecuniae, quam initio habuit.*

PONE illum post secundam negotiationem habuisse 1 ℞, cum qua lucratus est in tertia negotiatione eius quadratum, ac praeterea 4 aur. ita ut lucrum hoc fuerit 1 ʒ + 4. Igitur post tertiam negotiationem habuit summam 1 ʒ + 1 ℞ + 4. aequalem 510. aur. Ablatis 4. utrinque, erit aequatio inter 1 ʒ + 1 ℞. & 506. Ablataq. rursus 1 ℞ utrobique, inter 1 ʒ & 506 — 1 ℞. Semissis numeri radicũ est $\frac{1}{2}$, ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$, additis 506. fit numerus 506 $\frac{1}{4}$, hoc est $\frac{2025}{4}$, a cuius radice quadrata $\frac{45}{2}$, si tollatur praedicta semissis $\frac{1}{2}$, remanet pretium 1 ℞, $\frac{44}{2}$, hoc est, 22. Atque tot aureos post secundam negotiationem habuit. Et quia hoc fuit lucrum radicis pecuniae, quam post primam negotiationem habuit, praeterea 2 aurei: demptis 2 supererunt 20, nimirum lucrum radicis pecuniae, quam habuit post negotiationem primam. Ergo illa pecunia ponatur 1 ʒ, cuius radix quadrata 1 ℞. Eritq. lucrum post secundam negotiationem, 1 ʒ + 1 ℞ aequale 20. Ablata autem 1 ℞ utrobique, erit aequatio inter 1 ʒ, & 20 — 1 ℞. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$, ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$, additis 20, hoc est, $\frac{80}{4}$. fit numerus $\frac{81}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{9}{2}$, dempta praedicta semisse $\frac{1}{2}$. superierit pretium 1 ℞. $\frac{8}{2}$ hoc est, 4. Atque tantum fuit lucrum secundae negotiationis, + 2. Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam post secundam negotiationem habuit) supersunt 16. ac tantum habuit post primam negotiationem, quae pecuniae dicitur esse dupla illius, quam ad nundinas attulit: ac proinde initio habuit 8 aur. quod probatur. Nam post primam negotiationem habuit 16 aur. & post secundam 22. nimirum radicem numeri 16, & praeterea 2, hoc est 6. quae cum 16 faciunt 22. Cum his lucratus est quadratum, nimirum 484. ac praeterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur summa 510 aur.

XLVII. *47 Visum est hoc loco artificium, quo Archimedes argenti quantitatem aureae coronae permixtam deprehendit, per regulam Algebrae explicare.*

CAPIANTVR igitur duae massae, auri una, & altera argenti, aequalis ponderis cum corona. Deinde vas aeneum affabre factum aqua impleatur, & immissa corona, 100 librarum, ponamus eiecisse 65 lib. aquae. Repleto postea vase iterum aqua, immissam massam auri puri 100. librarum eiecisse 60. libras aquae. Denique iterum repleto vase aqua, immissam massam puri argenti eiecisse 90 lib. aquae. Ponatur 1 ℞ lib. argenti contineri in corona, ac proinde lib.

de lib. auri 100 — 1 ℞. & instituatur regula Trium bis, hoc modo,

| | lib. | aquæ | lib. | lib. |
|---|---|---|---|---|
| Auri | 100 | 60 | 100 — 1 ℞ ? | $\frac{6000 - 60 ℞}{100}$ |
| Argẽti | 100 | 90 | 1 ℞ ? | $\frac{90 ℞}{100}$ |

Reperies enim libras auri 100 — 1 ℞ eijcere libras aquæ $\frac{6000-60℞}{100}$ si 100 lib. auri eijciunt 60 lib. At 1 ℞ lib. argenti eijcere libras aquæ $\frac{90℞}{100}$, si 100 lib. argenti eijciunt 90 lib. aquæ. Hæ libræ aquæ eiectæ faciunt $\frac{6000+30℞}{100}$ lib. aquæ (Quoniã fractiones $\frac{6000-60℞}{100}$ & $\frac{90℞}{100}$ eundem habent denominatorem, satis est addere numeratores, & summæ conflatæ 600 + 30 ℞. supponere eundem denominatorem 100) æquales 65 lib. quas corona eijcit. Hæc æquatio inter $\frac{6000+30℞}{100}$. & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 6000 + 30 ℞. & 6500. Ablatisq. 6000. vtrinque, erit æquatio inter 30 ℞, & 500. Diuisis ergo 500 per 30. fiet 1 ℞. 16 $\frac{2}{3}$. atque tot libræ argenti in corona permixtæ fuerunt; ac propterea solum 83 $\frac{1}{3}$. libræ auri in eadem reperiuntur. quod probatur, vt hic vides.

| | lib. | aquæ | lib. | aquæ |
|---|---|---|---|---|
| Argẽti | 100 | 90 | 16 $\frac{2}{3}$ ? | 15 |
| Auri | 100 | 60 | 83 $\frac{1}{3}$ ? | 50 |

Reperies enim libras argenti 16 $\frac{2}{3}$. eijcere lib. aquæ 15. & libras auri 83 $\frac{1}{3}$. eijcere lib. aquæ 50 quæ cum 15 faciunt 65 quot videlicet libræ aquæ effluunt, si corona in aquam imponatur.

## SCHOLIVM.

*EODEM modo soluetur hæc quæstio. Sunt tres massæ eiusdem ponderis, nimirum 10. librarum: Vna auri puri, altera argenti puri, & tertia ex auro argentoque mixta. Prima autem eijcit $\frac{1}{30}$. lib. aquæ: Secunda $\frac{3}{4}$. lib. aquæ: ac tertia $\frac{1}{8}$. lib. aquæ. Nam sic instituetur regula trium bis, si in tertia massa ponatur 1 ℞. lib. argenti, ac proinde auri lib. 10 — 1 ℞.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Auri | lib. 10 | aquæ lib. $\frac{1}{30}$ | 10 — 1 ℞ lib. auri ? | aq. lib. $\frac{10-1℞}{300}$ |
| Argẽti | lib. 10 | aquæ lib. $\frac{3}{4}$ | 1 ℞ lib. argẽti. | aq. lib. $\frac{3℞}{40}$ |

*Nam duo numeri in quarto loco faciunt summã $\frac{400+860℞}{12000}$. lib. aquæ æqualem $\frac{1}{8}$. lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 12000. & 3200 + 6880 ℞. Et ablatis 3200. vtrobique, erit æquatio inter 8800. & 6880 ℞. Diuisis igitur 8800 per 6880. fiet 1 ℞. 1 $\frac{12}{43}$. atque tot lib. argenti sunt in tertia massa, ac proinde in eadem erunt lib. 8 $\frac{31}{43}$. auri, quod probatur, ut hic vides.*

Argenti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Argẽti lib. 10 | aq. lib. $\frac{1}{4}$ | arg. lib. 1 $\frac{13}{47}$ ? | aq. lib. $\frac{165}{1739}$ |
| Auri lib. 10 | aq. lib. $\frac{1}{20}$ | aur. lib. 8 $\frac{34}{47}$ ? | aq. lib. $\frac{???}{11?00}$ |

*Inuenies argenti lib. 1 $\frac{13}{47}$. eijcere aquæ lib. $\frac{165}{1?20}$. & auri lib. 8. $\frac{34}{47}$. eijcere aquæ lib. $\frac{325}{11?00}$. quæ cum illis faciunt $\frac{1}{?}$. libr. aquæ.*

*QVOD si quis desideret magis accuratam rationem deprehendendi quantitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia massa proximè dicta, is legat eruditissimum libellum Marini Ghetaldi Patritij Ragusini, qui inscribitur Promotus Archimedes. Vbi in propos. 17. varias causas errorum, qui in prædicto Archimedis artificio, committi possunt, enumerat. Deinde in propos. 18. magis accuratum artificium demonstrat.*

XLVIII. ***48 Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuerunt, habita ratione pecuniæ, quam quisque ad negotiationem attulit, vt portio secundi superarit portionem primi aureis 12. portio vero tertij portionẽ secundi aureis 16, Quæritur, cuiusque portio quanta fuit.***

PONATVR portio primi 1 ℞. eritq. propterea portio secundi 1 ℞ + 12. & tertij 1 ℞ + 28. Hæ tres portiones simul faciunt 3 ℞ + 40. æquales 700. Ablatis 40 vtrobique, erit æquatio inter 3 ℞. & 660. Diuisis igitur 660 per 3. fiet 1 ℞. 220. portio primi. Portio autem secundi erit 232. & tertij 248. quæ omnes simul faciunt 700.

XLIX. ***49 Tres lusores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, vt statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. secundi: Deinde secundus $\frac{1}{3}$. tertij: tertius denique $\frac{1}{4}$. primi. Atque ita contigit, vt singuli haberent 700. aur. Quæritur, quot quisque aureos ad ludum attulerit.***

PONATVR pecunia primi 1 ℞. qui si det $\frac{1}{4}$ ℞ tertio, supererunt ei $\frac{3}{4}$ ℞, quæ cum $\frac{1}{2}$. secundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$. secundi est 700 — $\frac{3}{4}$ ℞. atque idcirco huius duplum attulit, nimirum 1400 — 1 $\frac{1}{2}$ ℞. Nam ita, postquam perdiderit $\frac{1}{3}$. remanebunt illi 700 — $\frac{3}{4}$ ℞ qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertij debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertij est $\frac{3}{4}$ ℞; ideoq. ad ludum attulit 2 $\frac{1}{4}$ ℞, siue $\frac{9}{4}$ ℞. qui si amiserit $\frac{1}{3}$. supererunt ei $\frac{6}{4}$ ℞ quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}$ ℞. habebit $\frac{7}{4}$ ℞ æquales 700. Diuisis igitur 700 per $\frac{7}{4}$. fiet 1 ℞. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde secundus, qui inuentus est attulisse 1400 — 1 $\frac{1}{2}$ ℞. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum 2 $\frac{1}{4}$ ℞.

quod

quod probatur. Nam si primus amittat $\frac{1}{4}$. superfuerunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{2}$. aureorum 800. quos secundus attulit, faciunt 700 aur. Item $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{3}$. tertij, id est, cum 300. facit similiter 700 aur. Ac denique $\frac{2}{3}$. tertij, postquam amiserit $\frac{1}{3}$. nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cum 100. facit quoque 700. aureos.

50 *Quidam habet duo vasa aurea, & vnum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretiũ primi vasis facit pretium triplum pretij secundi vasis. Additum vero idem operculum vasi secundo facit pretium æquale pretio primi vasis. Quæstio est de pretio vtriusque vasis.* L.

PONATVR pretium primi 1 ℞. Ergo 1 ℞ + 150. tripla sunt pretij secundi vasis, ideoq. eius æstimatio est $\frac{1}{3}$ ℞ + 50 aur. Cui si accedat operculum 150 aur. erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}$ ℞ + 200 aur. æquale 1 ℞. nimirum pretio primi vasis. Ablata $\frac{1}{3}$ ℞. vtrinque, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ ℞. & 200. Diuisis igitur 200 per $\frac{2}{3}$. fiet 1 ℞. 300 aur. pretium scilicet primi vasis. Secundi autem vasis pretium, quod inuentum est $\frac{1}{3}$ ℞ + 50 erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc est, pretium primi vasis, cum pretio operculi, id est, cum 150. faciunt summam 450. triplam pretij secundi vasis, nimirũ 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet secundi vasis, cum operculo, siue cum 150 aur. faciunt summam 300 aur. æqualem pretio primi vasis.

51 *Quidam emit, nescio quot, perdices, ita vt si emisset seorsum illarum $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. & insuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.* LI.

PONATVR 1 ℞, cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{5}$. faciunt $\frac{47}{60}$ ℞, quæ cum 6. faciunt $\frac{47}{60}$ ℞ + 6. æqualia 100. Ablatis 6 vtrobique, erit æquatio inter $\frac{47}{60}$. & 94. Diuisis igitur 94 per $\frac{47}{60}$. fiet 1 ℞. 120. numerus videlicet perdicum emptarum. Nam eius $\frac{1}{3}$. est 40. & $\frac{1}{4}$. est 30. & $\frac{1}{5}$. est 24. quæ omnes partes cum 6. faciunt summam 100 perdicum.

52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de ætate sua, & amicorum suorum Ephestionis, & Clyti, ita disseruit. Ego, inquit, Ephestionem meum duobus annis antecedo: At Clytus amborum annos sua ætate comprehen-* LII.

dit,

*dit, & præterea annos quatuor. Cui Calisthenes. Cum pater meus vixerit annos 96. iucunda mihi fuit ista relatio, ô Rex. Nam annos trium vestrum ætas eius precisè habuit. Quæritur, qua ætate Alexander colloquium istud habuerit, & quot annos tam Ephestio, quam Clytus tunc habuerit.*

PONATVR pro annis Ephestionis 1 ℨ. Igitur anni Alexandri fuerunt 1 ℨ + 2. & Clyti 2 ℨ + 6. qui omnes faciunt annos 4 ℨ + 8 æquales 96. Ablatis 8 vtrobique, erit æquatio inter 4 ℨ & 88. Diuisis igitur 88 per 4. fiet 1 ℨ. 22. anni nimirum Ephestionis. Alexander igitur habuit 24. annos. Clytus vero 50. qui anni in vnam collecti summam faciunt 96 annos.

LIII. 53 *Nicanor ea pugna, qua interijt, occurrit Iudæ Machabeo, agmine quadrato collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atque ijs, quos secum adduxerat. Cæsa sunt autē ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. vltra numerum auxiliariorum militum Syrorum. Quæstio est, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item secum adduxerit.*

PONATVR pro agmine illo quadrato 1 ℥. in quo computati sunt milites cæsi 35000. Item numerus fuga seruatorum 156. & numerus militum auxiliariorum incognitus. Ponatur hic numerus 1 ℨ cui si addantur milites cæsi 35000. & 156. fuga seruati, conflabitur summa 1 ℨ + 35156. æqualis 1 ℥. nimirum toti agmini quadrato. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratū $\frac{1}{4}$. additis 35156. hoc est, $\frac{140624}{4}$ conficietur numerus $\frac{140625}{4}$ ad cuius radicem quadratam $\frac{375}{2}$. si addatur prædicta semissis numeri radicum, nimirum $\frac{1}{2}$. fiet 1 ℨ. $\frac{376}{2}$. hoc est, 188. numerus videlicet auxiliariorum militum, ipse vero secum adduxit 35156. atque idcirco totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus est habens radicem 188.

LIIII. 54 *Quidam habet 4. massas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum qualibet conflatur ex 9. semiuncijs puri argenti, & 7. semiunc. cupri puri: quia 1. marcam statuimus comprehendere 16. semiuncias. Pondus secundæ massæ est 15. marca-*

*rum.*

*rum, quarum singulæ continent 7. semiunc. argenti, & 9. semiunc. cupri. Pondus tertiæ massæ habet 24. marcas, quarum singulæ constant 10. semiunc. argenti, & 6. semiunc. cupri. Pondus denique quartæ massæ est 136. marcarum, quarum singulæ continent 14. semiunc. argenti, & 2. semiunc. cupri. Vult autem ex hisce massis constare vnam, additis aliquot marcis argenti, ita vt quælibet marca contineat 15. semiunc. puri argenti, & 1. semiunc. puri cupri. Quæstio iam est, quantum argenti puri admiscendum sit illis massis, & quot marcas massa noua sit habitura.*

PONATVR 1 ℞. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam vero omnes marcæ mixtæ in illis 4. massis contentæ sunt 186. & omnes semiunciæ puri argenti 2348. & cupri 628. vt hic vides.

| Marcæ mixtæ | Semiunciæ puri arg. | Semiunc. puri cupri. |
|---|---|---|
| 11 | 99 | 77 |
| 15 | 105 | 135 |
| 24 | 240 | 144 |
| 136 | 1904 | 272 |
| 186 | 2348 | 628 |

Cum enim prima massa marcarum 11. quælibet marca contineat 9 semiunc. argenti puri, & cupri 7 semiunc. erunt in tota illa massa 99 semiunc. argenti puri, & 77 semiunc. puri cupri, &c. instituenda erit regula trium hoc modo.

| Marcæ mixtæ | Mar. pu. arg. | Semiun. cupri. | Mar. mix. | Semiun. cup. |
|---|---|---|---|---|
| 186 + 1 ℞. | | 628. | 1 ? | $\frac{628}{186+1 ℞}$ |

Hoc est, Marcæ mixtæ 186 + 1 ℞. marcarum puri arg. continent 628 semiunc. cupri, (quia in massa conflanda comprehenduntur 628 semiunc. cupri; quot videlicet in 4 massis compositis continentur, cum nulla noua semiunc. cupri accedat) quot ergo semiunc. cupri continebit 1 marca noua mixta? Inuenies enim $\frac{628}{186+1 ℞}$. semiunc. cupri, quæ fractio æquiualet 1 semiunc. cupri: propterea quod in vna marca noua mixta contineatur tantum 1 semiunc. cupri ex hypothesi. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 628. & 186 + 1 ℞. Ablatisque 186. vtrobique, erit æquatio inter 442. & 1 ℞. Erit ergo 1 ℞. 442. atque tot marcæ argenti puri admiscendæ sunt, vt singulæ marcæ comprehendant 15 semiunc. puri arg. & 1 semiunc. cupri. quod sic probatur. Quoniam in 4 illis massis propositis continentur 186 marcæ mixtæ, si addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, fient marcæ mixtæ 628. atque idcirco quælibet habebit 1 semiunc. cupri, quòd in omnibus simul sint 628 semiunc. cupri.

ET quia vna marca posita est 16 semiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. semiuncias 7072. quibus si addantur semiunciæ 2348 puri argenti, quæ in 4 massis propositis reperiuntur, fient 9420. semiunc. puri argenti. quæ distributæ in 628 marcas nouæ massæ conflatæ, dabunt cuilibet marcæ 15 semiuncias argenti puri.

HAEC eadem quæstio facile etiam expedietur sine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 massis propositis habentur 628 semiunciæ cupri, necesse est, vt massa noua conflanda sit totidem marcarũ, vt nimirum cuilibet 1 semiuncia cupri possit assignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ massæ continent, detrahantur ex 628. supererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua massa conflata comprehensarum.

QVOD si massa ex 4. propositis conflanda sit cum argento addito, vt singulæ marcæ contineant 13 semiuncias puri arg. & 3 semiunc. cupri: Diuisis 628 semiuncijs cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua massa, $209\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 semiunc. cupri continebit. Si igitur ex $209\frac{1}{3}$. demantur marcæ 186. in 4. primis massis contentæ, reliquus fiet numerus $23\frac{1}{3}$. marcarum puri arg. addendarum: conflabiturq. numerus $209\frac{1}{3}$. marcarum in massa noua comprehensarum: quarum quælibet 13 semiunc. arg. puri comprehendet. Nam in marcis $209\frac{1}{3}$. continentur semiunciæ $\frac{10048}{3}$. ex quibus si demantur 628. siue $\frac{1884}{3}$ semiunc. cupri puri in massa noua contentæ, remanebunt $\frac{8164}{3}$ semiunc. argenti puri; quibus in $209\frac{1}{3}$ marcas distributis, prouenient cuilibet marcæ 13 semiunc. puri argenti.

SI verò massa ex eisdem 4 massis conflanda sit, cum cupro addito, vt singulæ marcæ contineant 12 semiunc. argenti puri, & 4 semiunc. cupri puri: erit cuprum adijciendum, non autem argentum, quia distributis 2348 semiunc. argenti, quæ in 4. illis massis existũt, in 186 marcas, reperientur in qualibet marca plures semiunciæ argenti, quam 12. nimirum $12\frac{116}{186}$. Diuisis igitur 2348 semiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua massa, $195\frac{2}{3}$. Sic enim quælibet marca continebit 12 semiunc. argenti puri. Demptis autem marcis 186. quas illæ 4. massæ complectuntur, remanebunt $9\frac{2}{3}$ marcæ cupri addendæ, vt confletur noua massa marcarum $195\frac{2}{3}$. quarum quælibet 4 semiunc. cupri continebit. Nam in marcis $195\frac{2}{3}$. continentur $\frac{9392}{3}$ semiunciæ. E quibus si demantur 2348 semiunc. argenti, hoc est, $\frac{7044}{3}$. relinquentur $\frac{2348}{3}$ semiunc. cupri, quibus distributis in $195\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcæ 4 semiunc. cupri.

IAM verò si quæratur, quantum cupri addendum sit quatuor illis massis, vt in qualibet marca nouæ massæ conflatæ reperiantur 15 semiunc. puri cupri, & 1 argenti: instituenda erit regula Trium hoc modo, posita 1 2e marcarum puri cupri.

Marcæ

| Marcæ mix. | Marcæ pu.cup. | Semiun. arg. | Mar. mix. | Sem.arg.pu. |
|---|---|---|---|---|
| 186 + | 1 ℞ | 2348 | 1 | $\frac{2348}{186+1 ℞}$ |

Eritq. quartus numerus æqualis 1 semiunciæ argenti puri: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & 186 + 1 ℞. Ablatisq. 186 vtrobique, erit æquatio inter 2162 & 1 ℞. Erit ergo 1 ℞ 2162. numerus videlicet marcarum cupri admiscendarum, vt singulæ marcæ contineant 15 semiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis massis existunt 186. marcæ, additis proximè inuentis 2162. fiet numerus marcarum 2348. ac proinde quælibet habebit 1 semiunc. argenti: quippe cum in omnibus simul sint 2348 semiunc. argenti. Et quia 2162 marcæ puri cupri comprehendunt semiunc. 34592. si addantur 628 semiunc. cupri in quatuor prioribus massis contentæ, fient 34592 semiunc. quibus distributis in 2348 marcas nouæ massæ conflatæ, congruent cuilibet marcæ 15 semiunciæ cupri.

SI autem quæstio sit, quantum argenti contineat 1 marca, si 4. illæ massæ conflentur, & nihil eis addatur: sic stabit regula Trium.

| Marcæ | Semiunc.arg. | Marca | Semiunc.arg. |
|---|---|---|---|
| 186 | 2348 | 1 | $12\frac{58}{93}$ |

Continebit ergo 1 marca semiunc. arg. $12\frac{58}{93}$. & proinde semiunc. cupri $3\frac{35}{93}$.

SIC si quæratur, quantum cupri contineat 1 marca, sic stabit regula.

| Marcæ | Semiunc.cupri | Marca | Semiunc. cupri |
|---|---|---|---|
| 186 | 628 | 1 | $3\frac{35}{93}$ |

Continebit enim 1 marca semiunc. cupri puri $3\frac{35}{93}$, ideoq. $12\frac{58}{93}$. semiuncias puri argenti.

ET si quæstio sit, cuius ponderis massa continens in qualibet marca 3 semiunc. argenti, & 13 cupri, commiscenda sit illis 4 massis, vt singulæ marcæ nouæ massæ conflatæ contineant 5 semiunc. argenti, & 11 cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum 1 ℞ & pro numero semiun. argenti in illa massa contentarum, 3 ℞. quia numerus semiunciarum in illa massa triplus est numeri marcarum, quandoquidem quælibet marca comprehendere dicitur 3 semiunc. argenti. Sic igitur stabit regula Trium.

| Mar.mix. | Mar.mix. nouæ | Semiunc.arg. | Sem.arg. nouæ | Marca noua | Sem.arg. |
|---|---|---|---|---|---|
| 186 + | 1 ℞ | 2348 + | 3 ℞ | 1 | $\frac{2348+3 ℞}{186+1 ℞}$ |

Quartus enim numerus æquabitur 5 semiuncijs argenti, quot nimirum 1 marca massæ nouæ includere debet. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter $2348 + 3x$. & $930 + 5x$. Ablatisq. 930 vtrobique, erit æquatio inter $1418 + 3x$ & $5x$. Ablatisq. rursum $3x$ vtrinque, inter 1418. & $2x$. Diuisis igitur 1418 per 2. fiet $1x$. 709. numerus marcarum, quas massa quinta commiscenda continebit. Additis igitur 186 marcis quatuor priorum massarum, fiet noua massa marcarum 895. quarum quælibet continet 5 semiunc. argenti, & 11 cupri. quod sic probatur. Duc 895. marcas in 16 semiunc. faciesq. 14320. semiuncias partim argenti, & partim cupri in massa noua marcarum 895. contentas. Deinde duc easdem marcas 895. in 5. semiunc. argenti, quas quælibet marca continere debet, faciesq. semiunc. argenti 4475. in noua illa massa contentas. Denique duc easdem marcas 895. in 11. semiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficiesq. 9845. semiunc. cupri quæ cum 4475 semiunc. argenti faciunt 14320 quot nimirum semunciæ in vniuersum continentur in 895. marcis.

LV. 55 *Duo Societatem ineunt: quorum secundus duplo plus pecuniæ secum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucrati sunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & secundo 660. Quantum ergo singuli imposuerunt.*

PONE pro primo $1x$. ideoq. pro secundo $2x + 5$. Summa amborum est $3x + 5$. qua lucrati sunt 960. aur. Institue ergo regulam Trium sic.

$3x+5 \quad 960 \quad 1x? \quad \frac{960x}{3x+5}$

Inuenies enim primum, qui posuit $1x$. lucrari $\frac{960x}{3x+5}$. qui numerus æqualis est 300 aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $960x$. & $900x + 1500$. Ablatis igitur $900x$ vtrobique, remanebit æquatio inter $60x$. & 1500. Diuisis igitur 1500 per 60. fiet $1x$. 25. pro aureis, quos primus posuit. Ergo secundus posuit 55. aur. quod probatur. Amborum enim summa est 80 aur. Ergo regula Trium sic stabit bis.

80 960 25? 300     80 960 55? 660

LVI. 56 *Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. simul, & pecunia secundi diuisa per pecuniam primi facit Quotientem $2\frac{1}{2}$. Quæstio est, quantam quisque pecuniam habeat.*

HAEC quæstio cum sequentibus ad secundas radices pertinet. Ponatur pro primo 1 ℞, & pro secundo 1 A. Resoluenda ergo est secunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 200. aur. erit æquatio inter 1 ℞ + 1 A, & 200. Ablataq. 1 ℞ vtrinque, inter 1 A, & 200 — 1 ℞. Erit igitur 1 A, resoluta in 200 — 1 ℞. Quare pono denuò numerum primi 1 ℞, & secundi 200 — 1 ℞. qui simul faciunt 200. aur. Diuiso iam numero secundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{200 - 1 ℞}{1 ℞}$. æqualis $1\frac{1}{2}$. hoc est $\frac{3}{2}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 2 ℞, & 3 ℞. Additisq. 2 ℞ vtrobique, erit æquatio inter 400. & 5 ℞. Diuisis ergo 400 per 5. fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo secundus habebit 120, nimirum 200 — 1 ℞. quo numero diuiso per 80. fit Quotiens $1\frac{1}{2}$.

Aliter. Ponatur numerus secundi 1 ℞, & primi 1 A. Ergo iterũ erit æquatio inter 1 ℞ + 1 A, & 200. aur. Ablataq. 1 ℞ vtrobique, inter 1 A, & 200 — 1 ℞. atque ita 1 A, resoluta est in 200 — 1 ℞. Pono ergo denuo pro secundo 1 ℞, & pro primo 200 — 1 ℞. Diuiso illo per hunc fit Quotiens $\frac{1 ℞}{200 - 1 ℞}$. æqualis $\frac{3}{2}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 2 ℞. & 600 — 3 ℞. Additisq. 3 ℞ vtrinque, erit æquatio inter 5 ℞ & 600. Diuisis ergo 600 per 5. fiet 1 ℞. 120. pro numero secundi. Primus ergo habet 80. nimirum 200 — 1 ℞. vt prius.

57 *Septem mercatores debent cuidam creditori pecuniam hoc modo, Sex, excluso septimo, debent simul 994. aur.* LVII.

*Deinde sex, secluso primo, debent 882. aur.*

*Sex, secluso secundo, debent aur. 952.*

*Sex, dempto tertio, debent aur. 896.*

*Sex, excluso quarto, debent aur. 910.*

*Sex, secluso quinto, debent aur. 840.*

*Sex denique, excepto sexto, debent aur. 1036.*

*Quæritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.*

PRIMVM quia excluditur debitum septimi a tota summa: si pro debito septimi ponatur 1 ℞. erit summa totius debiti 994 + 1 ℞. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi; si pro eo ponatur 1 A, erit summa totius debiti aur. 882 + 1 A.

Tertio quia excluditur debitum secundi, pone pro eo 1 B, aur. eritq. summa totius debiti aur. 952 + 1 B.

Quarto quia eximitur debitum tertij, si pro eo ponatur 1 C, aur. erit summa totius debiti aur. 896 + 1 C.

Quin-

Quinto quia subticetur debitum quarti, si pro eo ponatur 1 D, aur. erit totius debiti summa aur. 910 + 1 D.

Sexto quia supprimitur debitum quinti, si pro eo ponatur 1 E, aur. habebitur summa totius debiti 840 + 1 E, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum sexti, si pro eo ponatur 1 F, aur. erit summa totius debiti 1036 + 1 F, aur.

| |
|---|
| 994 + 1 ℞ |
| 882 + 1 A |
| 952 + 1 B |
| 896 + 1 C |
| 910 + 1 D |
| 840 + 1 E |
| 1036 + 1 F |

Quia igitur summa omnium, hoc est, totum debitum septies ponitur, vt hic vides; habebimus sex æquationes, si superiorem cum singulis inferioribus conferemus; propterea quod quodlibet totum sibiipsi est æquale. Videlicet.

Primum 994 + 1 ℞. æqualia sunt 882 + 1 A. Igitur ablatis 882. vtrobique, erit æquatio inter 112 + 1 ℞, & 1 A. Cum ergo pro debito primi posita sit 1 A; erit debitum primi aur. 112 + 1 ℞.

Deinde eodem modo æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 952 + 1 B. Ablatisq. 952 vtrinque, inter 42 + 1 ℞. & 1 B, ac proinde debitum secundi 42 + 1 ℞.

Tertio similiter æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 896 + 1 C. Ablatisq. 896 vtrinque, inter 98 + 1 ℞, & 1 C: ideoq. debitum tertij erit 98 + 1 ℞.

Quarto pari ratione erit æquatio inter 994 + 1 ℞, & 910 + 1 D. Ablatisq. 910 vtrobique, inter 84 + 1 ℞, & 1 D. Debitumq. quarti erit aur. 84 + 1 ℞.

Quinto non secus erit æquatio inter 994 + 1 ℞, & 840 + 1 E. Ablatisq. 840 vtrobique, inter 154 + 1 ℞, & 1 E: propterea q. debitum quinti erit aur. 154 + 1 ℞.

Sexto non aliter æquatio erit inter 994 + 1 ℞, & 1036 + 1 F. Ablatisq. 994 vtrobique, inter 1 ℞, & 42 + 1 F. Rursumq. ablatis 42 vtrinque, inter 1 ℞ — 42. & 1 F. ideoq. debitum sexti erit aur. 1 ℞ — 42.

Et quia pro debito septimi posita fuit 1 ℞. erunt omnium debita hæc, quæ faciunt summam 7 ℞ + 448. aur. æqualem 994 + 1 ℞. cum hic etiam numerus toti debito æqualis sit, vt paulò ante diximus. Ablata ergo 1 ℞. vtrinque, erit æquatio inter 6 ℞ + 448. & 994. Ablatisq. rursum 448 vtrobique, inter 6 ℞, & 546. Diuisis igitur 546 per 6. fiet 1 ℞. 91. debitum septimi, quod fuit 1 ℞. Hinc facile debita aliorum elicies. Quoniam enim debitum primi fuit 112 + 1 ℞. erit ipsum debitum 203. summa nimirum ex 91. & 112. conflata. Sic etiam debitum sexti

| | |
|---|---|
| Debitum primi | 112 + 1 ℞ |
| Secundi | 42 + 1 ℞ |
| Tertij | 98 + 1 ℞ |
| Quarti | 84 + 1 ℞ |
| Quinti | 154 + 1 ℞ |
| Sexti | 1 ℞ — 42 |
| Septimi | 1 ℞ |

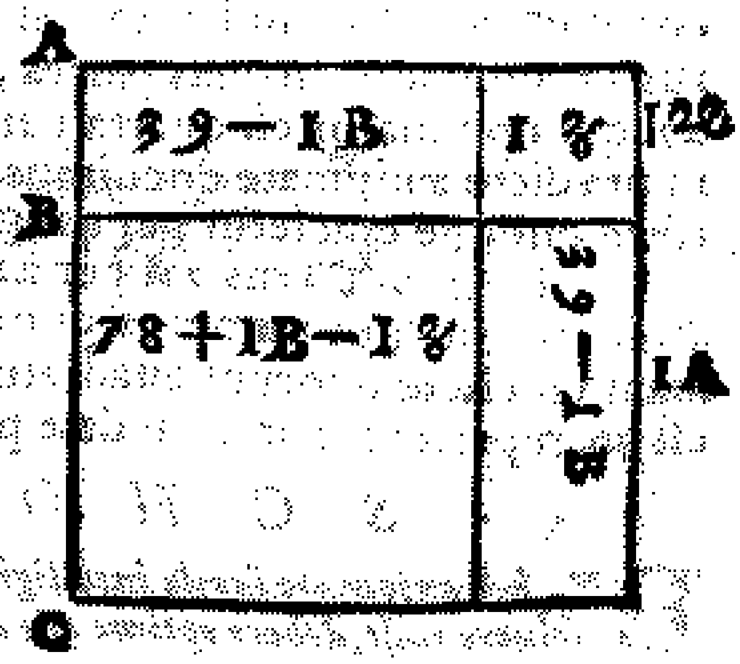
sexti erit 49. nimirum 1 ℞ — 42. & sic de cæteris, vt hic cernis.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Debitum | Primi | 203 | aur. | Summa omnium, seu totum debitum. | 1085. aur. |
| | Secundi | 133 | | | |
| | Tertij | 189 | | | |
| | Quarti | 175 | | | |
| | Quinti | 245 | | | |
| | Sexti | 49 | | | |
| | Septimi | 91 | | | |

Probatio. Dempto debito septimi ex toto debito. debebunt 6. alij aur. 994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto, debebunt 6. alij, aur. 882. & sic de cæteris.

58 *Duo socij habent duos numeros aureorum, quorum summa à summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtracta, relinquit 78. Addita verò ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quæritur, qui sint isti numeri.* LVIII.

HANC quæstionem per sequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ AC, diuisum est in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale est, vt in Lemmate propos. 54. lib. 10. Eucl. demonstrauimus, & supra quoque in numeris in Lemmate ænigmatis 26. cap. 30. ostendimus. Ponatur ergo minor numerus 1 ℞; nimirum linea AB, & maior 1 A, nimirum linea BC. Summa autem ex ipsis conflata, nimirum linea AC, ponatur 1 B. Eritq. quadratum rectæ AB, 1 ℨ. Et quoniam summa numerorum 1 B, subtracta ex duobus quadratis rectarum AB, BC, relinquit 78. facient duo illa quadrata 78 + 1 B. Ita enim si ex illis demetur 1 B, relinquentur 78. Igitur quadratum rectæ BC, erit 78 + 1 B, — 1 ℨ. Si enim duo quadrata faciunt 78 + 1 B, vt diximus, erit solum quadratum rectæ BC, 78 + 1 B — 1 ℨ.




Deinde quia summa numerorum AB, BC, nimirum 1 B, addita ad productum ex eorum multiplicatione, id est, ad complementum AD, facit 39. erit complementum hoc 39 — 1 B. Ita namq. si addatur 1 B, fiet ipsum complementum 39.

Quia

Quia vero quadratum rectæ A C, quæ valet 1 B, conftat ex duobus quadratis rectarum AB, BC, id eft, ex 78 + 1 B, & ex duobus complementis, hoc eft, ex 78 — 2 B, eftq. quadratum rectæ AC, ex 1 B, procreatum 1 B ℨ. erit æquatio inter 1 B ℨ. & 156 — 1 B, qui numerus conflatur ex 78 + 1 B, id eft, ex duobus quadratis, & ex duobus complementis, hoc eft, ex 78 — 2 B. Huius autem numeri 156 — 1 B, radix non aliter inueftigabitur, quam ex numero 156 — 1 ℞, ac fi hic æqualis effet 1 ℨ. nimirum hoc pacto. Semiffis numeri radicum eft $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 156. hoc eft, $\frac{624}{4}$. fit numerus $\frac{625}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{25}{2}$. fi dematur prædicta femiffis $\frac{1}{2}$. remanebit pretium 1 ℞. $\frac{24}{2}$. hoc eft 12. ac tantum valet recta AC, hoc eft, 1 B, fumma numerorum 1 ℞. & 1 A.

Quoniam igitur 1 B, eft 12. complementum 39 — 1 B, erit 27. & quadratum maius 78 + 1 B — 1 ℨ. erit 90 — 1 ℨ. eftq. complementum 27. medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1 ℨ. & quadratum minus 1 ℨ. vt initio diximus: fi ducatur 90 — 1 ℨ. in 1 ℨ. fiet numerus 90 ℨ — 1 ℨℨ. * æqualis quadrato ex 27. defcripto, nimirum numero 729. Addito ergo 1 ℨℨ. vtrobique, erit æquatio inter 90 ℨ. & 729 + 1 ℨℨ. & ablatis 729. vtrobique, inter 90 ℨ — 729. & 1 ℨℨ. Huius numeri 90 ℨ — 729. radicem Zenfizenficam ita inueniemus. Semiffis numeri Zenforum eft 45. a cuius quadrato 2025. fi demantur 729. remanet numerus 1296. ad cuius radicem 36. fi addatur prædicta femiffis 45. fit 1 ℨ. 81. maior, minor autem erit 9. fi nimirum ex prædicta femiffe 45. dematur inuenta radix 36. Zenforum autem 81. & 9. radices quadratæ funt 9. & 3. numeri quæfiti. Nam eorum quadrati funt 81. & 9. a quorum fumma 90. fi ipforum numerorum fumma 12. detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et fi eadem fumma 12. addatur ad 27. numerum ex eorum multiplicatione productum, fit fumma 39.

* a 20. feptimi

PORRO poftquam inuentum fuit, 1 B, fummam numerorum 1 ℞, & 1 A, effe 12. facilius inueniemus vtrumque numerorum 1 ℞, & 1 A, feorfum, per ænigma 172. cap. 29. Quoniam enim complementum, quod fit ex AB, in CB, inuentum eft 27. fi numerus 12. diuidatur in duas partes, vt ex vna in alteram fiat numerus 27. qui non maior eft quarta parte quadrati ex numero 12. facti, vt in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3. & altera 9. Idem quoque efficietur per ænigma 38. cap. 30.

VEL, fi numerus 12. per ænigma 170. cap. 29. vel 35. cap. 30. diuidatur in duos numeros, quorum quadrati fimul faciant 90. fummam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta eft 90. reperientur iterum duæ partes 3. & 9.

## SCHOLIVM.

*EX hoc ænigmate facile intelligitur, eum, qui quæftiones per Algebram foluere vult, debere optime effe exercitatum in Geometria fcientia, vt cap. 1. diximus. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometriam ignorat, vix, aut nullo modo foluetur, vt patet.*

59 Duo

59 *Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreati faciunt 340. Sed ipsæ summæ inter se multiplicatæ faciunt $\frac{6}{7}$. maioris quadrati. Quæstio est, quantæ sint istæ summæ.* LIX.

PONATVR maior summa 1 ℞, & minor 1 A. Quadrati sunt 1 ʒ. & 1 A ʒ. qui simul facere debent 340. Igitur 1 ʒ. erit 340 — 1 A ʒ. & 1 A ʒ, erit 340 — 1 ʒ. Duo vero numeri inter se multiplicati faciunt numerum 1 ℞ A, æqualem $\frac{6}{7}$ ʒ. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati, qui est 1 ʒ. Si igitur æquatio est inter 1 ℞ A, & $\frac{6}{7}$ ʒ. erit quoque æquatio inter horum numerorum quadrata, nimirum inter 1 ʒ A ʒ. & $\frac{36}{49}$ ʒʒ. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 49 ʒ A ʒ, & 36 ʒʒ. Et per depressionem signi ʒ, primæ radicis, erit æquatio inter 49 A ʒ, & 36 ʒ. Ac per regulam Trium, si 36 ʒ. æquiualent 49 A ʒ. æquiualebit 1 ʒ. numero $\frac{49 A ʒ}{36}$. vt hic vides, abiecto signo ʒ. in primo ac tertio numero.

36 49 A ʒ 1 ʒ $\frac{49 A ʒ}{36}$.

Et quoniam 1 A ʒ. fuit æqualis numero 340 — 1 ʒ. erit quoque æquatio inter 1 A ʒ. & 340 — $\frac{49 A ʒ}{36}$. quandoquidem 1 ʒ. inuentus fuit æqualis numero $\frac{49 A ʒ}{36}$. Additis igitur $\frac{49 A ʒ}{36}$. vtrobique, erit æquatio inter 1 A ʒ + $\frac{49 A ʒ}{36}$. & 340. Cum ergo 1 A ʒ. faciat $\frac{36}{36}$ A ʒ. (quod $\frac{36}{36}$. & 1. equales sint numeri.) erit equatio inter $\frac{85}{36}$ A ʒ. & 340. Diuisis ergo 340. per $\frac{85}{36}$. fiet 1 A ʒ. 144. cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum summa pecunię minor, pro qua posuimus 1 A, cuius quadratum 1 A ʒ. Quia vero quadratum maioris summę fuit 340 — 1 A ʒ. Si pretium 1 A ʒ. nimirum 144. dematur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris summæ 196. cuius radix est 14. alter numerorum, nimirum maior summa, quam posuimus 1 ℞. Itaq. primus habet 14 aur. & secundus 12. Quadrati enim horum numerorum 196. 144. faciunt 340. & ex 14. in 12. fit numerus 168. hoc est, $\frac{6}{7}$. maioris quadrati 196.

60 *Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tuæ pecunie, haberem 100. aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tuæ pecuniæ, haberem 100. aur. Quæritur, quantum quisque eorum habeat.* LX.

PONATVR primi pecunia 1 ℞. aur. secundi 1 A, aur. & tertij 1 B, aur. Primus ergo cum $\frac{1}{2}$. secundi habebit 1 ℞ + $\frac{1}{2}$ A, qui numerus æqualis est 100. aur. Dempta ergo 1 ℞ vtrinque, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A. & 100 aur. — 1 ℞. ideoq. & inter dupla, nimirum inter 1 A, & 200 aur. — 2 ℞. Atque ita pro secundo, loco 1 A, pono 200 aur. — 2 ℞. qui secundus cum $\frac{1}{3}$. tertij, habebit 200 aur. — 2 ℞ + $\frac{1}{3}$ B, qui numerus etiam æqualis est 100 aur. Additis ergo 2 ℞ vtrobique, erit æqualitas inter 200 aur. + $\frac{1}{3}$ B, & 100 aur. + 2 ℞. Et ablatis 100 vtrobique, inter 100 aur. + $\frac{1}{3}$ B, & 2 ℞. Et rursum ablatis 100 vtrinque, inter $\frac{1}{3}$ B, & 2 ℞ — 100. ideoq. & inter tripla, nimirum inter 1 B, & 6 ℞ — 300 aur. Atque ita pro tertio loco 1 B, pono 6 ℞ — 300 aur. Hic tertius cum $\frac{1}{4}$. primi, id est, cũ $\frac{1}{4}$ ℞. habebit 6 $\frac{1}{4}$ ℞ — 300. numerum etiam æqualem 100 aur. Additis igitur 300 vtrobique, erit æquatio inter 6 $\frac{1}{4}$ ℞. & 400. Diuisis ergo 400 per 6 $\frac{1}{4}$. fiet 1 ℞. 64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem, qui inuentus est habere 200 — 2 ℞ habet aur. 72. Tertius denique, qui deprehensus est habere aur. 6 ℞ — 300. habet 84 aur. Ita enim tam primus 64. cum $\frac{1}{2}$. secundi 72. id est, cum 36. quam secundus 72. cum $\frac{1}{3}$. tertij 84. id est, cum 28. quam tertius 84. cum $\frac{1}{4}$. primi 64. id est, cum 16. habebit 100 aur.

LXI. 61 ***Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. dupla mea summa. Secundus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. meæ summæ tripla. Tertius reliquis dicit, si adhuc haberetis 100. aur. summa vestrorum aur. esset summæ meæ quadrupla. Quæritur, quantum quisque habeat.***

PONATVR primi pecunia 1 ℞, & aliorum duorum simul 1 A. Hi duo cum 100 aur. habebunt summam duplam pecuniæ primi. Ergo æquatio erit inter 2 ℞. & 1 A + 100. Et ablatis 100 vtrobique, inter 2 ℞ — 100. & 1 A. ac proinde secundus, ac tertius, qui ponuntur habere 1 A, habebunt 2 ℞ — 100. Et si addatur summa primi, quæ est 1 ℞, erit summa omnium trium 3 ℞ — 100.

Ponatur deinde summa secundi 1 B. habebuntq. propterea primus ac tertius 3 ℞ — 100 — 1 B, quandoquidem omnes tres habent 3 ℞ — 100. Et quia summa primi ac tertij, vnà cum 100 aur. tripla est summæ secundi; erit æquatio inter 3 ℞ — 1 B. (Nam si addantur 100. ad 3 ℞ — 100 — 1 B, fit summa 3 ℞ — 1 B) & 3 B. Addita igitur 1 B, vtrinque, erit æqualitas inter 3 ℞ & 4 B: atque idcirco & inter subquadrupla, hoc est, inter $\frac{3}{4}$ ℞. & 1 B. ac proinde secundus, qui habet 1 B, habebit $\frac{3}{4}$ ℞.

Denique pro summa tertij ponatur 1 C. habebuntq. propterea reliqui duo 3 ℞ — 100 — 1 C, quandoquidem omnes tres habent 3 ℞ — 100 aur. Et quoniam summa primi ac secundi, vnà cum 100 aur.

aur. quadrupla est summæ tertij, erit æquatio inter 3 ℞ — 1 C. (Nam si addantur 100. ad 3 ℞ — 100 — 1 C, fit summa 3 ℞ — 1 C.) & 4 C. Additaq. 1 C, vtrinque, erit æquatio inter 3 ℞. & 5 C. ideoq. & inter subquintupla, hoc est, inter $\frac{3}{5}$ ℞. & 1 C. ac proinde tertius habebit $\frac{3}{5}$ ℞.

Itaque cum primus habeat 1 ℞. secundus $\frac{3}{4}$ ℞, & tertius $\frac{3}{5}$ ℞, habebunt omnes tres simul 1 $\frac{27}{20}$ ℞. siue $\frac{47}{20}$ ℞. Habebant autem omnes tres simul etiam 3 ℞ — 100. Est igitur æquatio inter $\frac{47}{20}$ ℞. siue 2 $\frac{7}{20}$ ℞. & 3 ℞ — 100. Additisq. 100 vtrinque, inter 2 $\frac{7}{20}$ ℞ + 100. & 3 ℞. Ablatisq. 2 $\frac{7}{20}$ ℞ vtrobique, inter 100. & $\frac{13}{20}$ ℞. Diuisis igitur 100 per $\frac{13}{20}$. fiet 1 ℞. 153 $\frac{11}{13}$ aur. pecunia primi. Secundus autem habens $\frac{3}{4}$ ℞. habebit 115 $\frac{5}{13}$. Et tertius habens $\frac{3}{5}$ ℞ habebit 92 $\frac{4}{13}$. Nam secundus ac tertius vnà cum 100. habebunt 307 $\frac{9}{13}$. qui numerus duplus est numeri 153 $\frac{11}{13}$. quem habet primus. Item primus ac tertius vnà cum 100. habebunt 346 $\frac{2}{13}$. qui numerus triplus est numeri 115 $\frac{5}{13}$. quem habet secundus. Secundus denique ac primus, vnà cum 100. habebunt 369 $\frac{3}{13}$ aur. qui numerus quadruplus est numeri 92 $\frac{4}{13}$. quem habet tertius.

62 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si adhuc haberem 100. aur. fieret mea summa æqualis duabus summis vestris. Secundus reliquis dicit, si haberem adhuc 100. aur. summa mea esset vestræ summæ dupla. Tertius denique ait ad reliquos, si adhuc haberem 100. aur. summa mea fieret summa vestra tripla. Quæritur, quantum quisque habeat.* LXII.

PONATVR primi summa 1 ℞. Ergo cum 100. habebit 1 ℞ + 100 ac tanta erit summa secundi & tertij, omnesq. tres habebunt 2 ℞ + 100. Ponatur summa secundi 1 A. Ergo cum 100. habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summæ primi ac tertij, quæ est 2 ℞ + 100 — 1 A, (quia cum omnes tres habeant 2 ℞ + 100. si tollatur 1 A, summa videlicet secundi, remanebit summa primi ac tertij 2 ℞ + 100 — 1 A.) Ac proinde æquatio erit inter 1 A + 100. & 4 ℞ + 200 — 2 A. Additisq. 2 A, vtrobique, inter 3 A + 100. & 4 ℞ + 200. Et ablatis 100. vtrinque, inter 3 A, & 4 ℞ + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Ac proinde cum secundus positus sit habere 1 A, erit eius summa $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Ponatur denique summa tertij 1 B. Ergo cum 100. habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summæ primi ac secundi, quæ est $\frac{7}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. conflata ex 1 ℞ summa primi, & $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. summa secundi. Igitur æquatio erit inter 1 B + 100. & $\frac{21}{3}$ ℞ + $\frac{300}{3}$. hoc est, inter 1 B, + 100. & 7 ℞ + 100. Ablatisq. 100. vtrobique, inter 1 B, & 7 ℞. Ac proinde tertij summa, quæ posita fuit 1 B, erit 7 ℞.

Itaq. cum primus habeat 1 ℞. secundus $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & tertius 7 ℞. habebunt omnes tres 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Habebant autem omnes tres etiam 2 ℞ + 100. Est igitur æquatio inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & 2 ℞ + 100. Ablatisq. 2 ℞ vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. & 100. Ablatisq. rursum $\frac{100}{3}$. hoc est, 33 $\frac{1}{3}$. vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞. & 66 $\frac{2}{3}$. Diuisis igitur 66 $\frac{2}{3}$. per 7 $\frac{1}{3}$. fiet 1 ℞ 9 $\frac{1}{11}$. summa primi. Secundus autem habens 1 $\frac{1}{3}$ ℞ + 33 $\frac{1}{3}$. habebit 45 $\frac{5}{11}$. Tertius denique habens 7 ℞. habebit 63 $\frac{7}{11}$. Ita namq. primus cum 100. faciet 109 $\frac{1}{11}$. summam æqualem summæ secundi ac tertij. Secundus vero cum 100. faciet summam 145 $\frac{5}{11}$. duplam summæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100. faciet 163 $\frac{7}{11}$. summam triplam summæ primi ac secundi.

LXIII. 63 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis* 100. *aur. haberem summam æqualem reliquæ vestræ summæ. Secundus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis* 100. *aur. esset mea summa reliquæ vestræ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si de vestra summa remoueretis* 100. *aur. mea summa esset reliquæ vestræ summæ tripla. Quæritur vnius cuiusque summa.*

PONATVR primi pecunia 1 ℞. Ergo reliqui duo simul habebũt 1 ℞ + 100. vt amotis 100. habeant reliquam summam æqualem summæ primi. Omnesq. tres simul habebunt 2 ℞ + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A. quæ dupla est pecuniæ primi ac tertij, si remoueant 100. aur. Habent autem primus ac tertius 2 ℞ + 100 — 1 A. (cum enim omnes tres habeant 2 ℞ + 100. si dematur 1 A, summa secundi, reliqua fiet summa primi ac tertij 2 ℞ + 100 — 1 A) & amotis 100. habebunt 2 ℞ — 1 A. cuius numeri dupla est 1 A, summa secundi. Ergo æquatio erit inter 4 ℞ — 2 A, & 1 A. Et additis 2 A, vtrinque, inter 4 ℞, & 3 A. Et omnibus diuisis per 3. inter $\frac{4}{3}$ ℞. & 1 A. Ac proinde summa secundi, quem posuimus habere 1 A, erit $\frac{4}{3}$ ℞.

Ponatur denique summa tertij 1 B, quæ tripla est summæ primi ac secundi, si remoueant 100. aur. Habent autem primus & secundus $\frac{7}{3}$ ℞, & amotis 100. habebunt $\frac{7}{3}$ ℞ — 100. cuius numeri triplum $\frac{21}{3}$ ℞ — 300. æquale erit summæ tertij 1 B. Ergo tertius habet 7 ℞ — 300.

Itaq. cum primus habeat 1 ℞, secundus $\frac{4}{3}$ ℞, & tertius 7 ℞ — 300 habebunt omnes tres simul 9 $\frac{1}{3}$ ℞ — 300. Habebant autem omnes tres quoque simul 2 ℞ + 100. Aequatio ergo est inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞ — 300 & 2 ℞ + 100. Additisq. 300. vtrinque inter 9 $\frac{1}{3}$ ℞, & 2 ℞ + 400. Ablatisq. 2 ℞. vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ℞, & 400. Diuisis ergo 400. per 7 $\frac{1}{3}$. fiet 1 ℞. 54 $\frac{6}{11}$. pecunia primi. Secundus vero habens $\frac{4}{3}$ ℞

habe-

habebit 72 $\frac{8}{11}$. Et tertius habens 7 ℞ — 300. habebit 81 $\frac{9}{11}$. quod probatur. Nam si ex 154 $\frac{6}{11}$. summa secundi ac tertij reijciantur 100. remanebit summa 54 $\frac{6}{11}$. æqualis summæ primi. Et si ex 136 $\frac{4}{11}$ summa primi ac tertij, abijciantur 100. reliqua erit summa 36 $\frac{4}{11}$. subdupla summæ secundi 72 $\frac{8}{11}$. Si denique ex 127 $\frac{3}{11}$. summa primi ac secundi remoueantur 100. remanebit summa 27 $\frac{3}{11}$. subtripla summæ tertij 81 $\frac{9}{11}$.

64 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100. aur. summa vestra esset reliquæ meæ summæ quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abijcerem 100. aur. vestra summa esset reliquæ meæ summæ tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa auferrem 100. aur. esset vestra summa reliquæ meæ summæ dupla. Quæritur uniuscuiusque summa.* LXIIII.

PONATVR pecunia primi 1 ℞ + 100. Ergo secundus ac tertius habebunt 4 ℞. vt hæc summa quadrupla sit summæ primi, si prius abiecerit 100. aur. omnesq. tres habebunt 5 ℞ + 100.

Ponatur deinde pecunia secundi 1 A + 100. vt abiectis 100. reliqua summa 1 A, sit subtripla summæ primi ac tertij: quæ est 5 ℞ + 100 — 1 A + 100. ita vt æquatio sit inter 3 A. & 5 ℞ + 100 — 1 A + 100. Et addita 1 A + 100. vtrinque, inter 4 A + 100. & 5 ℞ + 100. Ablatisq. 100 vtrobique, inter 4 A, & 5 ℞. Diuisisq. his duobus numeris per 4. erit æquatio inter 1 A, & $\frac{5}{4}$ ℞. Cum ergo secundus positus sit habere 1 A + 100. habebit $\frac{5}{4}$ ℞ + 100.

Ponatur denique summa tertij 1 B + 100. vt abiectis 100. reliqua summa sit subdupla summæ primi ac secundi: quæ est 2 $\frac{1}{4}$ ℞ + 200. ita vt æquatio sit inter 2 B, & 2 $\frac{1}{4}$ ℞ + 200. Diuisis ergo omnibus per 2. erit 1 B, æqualis $\frac{9}{8}$ ℞ + 100. Cum ergo tertius positus sit habere 1 B + 100. habebit $\frac{9}{8}$ ℞ + 200.

Itaque cum primus habeat 1 ℞ + 100. Secundus $\frac{5}{4}$ ℞ + 100. & tertius $\frac{9}{8}$ ℞ + 200. habebunt omnes tres simul 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 400. Habebant autem omnes tres etiam simul 5 ℞ + 100. Aequatio igitur est inter 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 400. & 5 ℞ + 100. Ablatisq. 100 vtrobique, inter 3 $\frac{3}{8}$ ℞ + 300. & 5 ℞. Et rursum ablatis 3 $\frac{3}{8}$ ℞ vtrinque, inter 300. & 1 $\frac{5}{8}$ ℞. Diuisis igitur 300. per 1 $\frac{5}{8}$. fiet 1 ℞. 184 $\frac{8}{13}$. Primus ergo qui positus est habere 1 ℞ + 100. habebit 284 $\frac{8}{13}$. aur. Secundus vero habens $\frac{5}{4}$ ℞ + 100. habebit 330 $\frac{10}{13}$. aur. Tertius denique habens $\frac{9}{8}$ ℞ + 200. habebit 407 $\frac{9}{13}$ aur. quod probatur. Nam si primus remoueat 100. de sua summa, erit reliquus numerus 184 $\frac{8}{13}$. subquadruplus summæ secundi ac tertij, quæ est 738 $\frac{6}{13}$. Et si secundus de summa abijciat 100. erit reliquus numerus 230 $\frac{10}{13}$. subtriplus summæ primi ac tertij, quæ est 692 $\frac{4}{13}$. Denique si tertius de

sua

ſua ſumma remoueat 100. erit reliquus numerus 307 $\frac{8}{11}$. ſubduplus ſummæ primi ac ſecundi, quæ eſt 615 $\frac{5}{11}$.

LXV. 65 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, ſi vobis darem 100. aur. faceretis ſummam mea reliqua ſummæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, ſi vobis darem 100. aur. fieret veſtra ſumma reliqua mea ſumma ſextupla. Tertius denique reliquis dicit, ſi vobis darem 100. aur. faceretis ſummam reliqua mea ſumma ſeptuplam. Quæritur vniuſcuiuſque ſumma.*

PONATVR pecunia primi 1 ℞ + 100. Ergo reliqui duo habebunt 5 ℞ — 100. vt ſi primus eis det 100. habeant 5 ℞. numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omneſq. tres ſimul habebunt 6 ℞.

Ponatur ſecundi pecunia 1 A + 100. vt poſtquam alijs duobus dederit 100. reliqua 1 A, ſit ſubſeſcupla ſummæ aliorum cum illis 100. aur. quos a ſecundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius 6 ℞ — 1 A + 100. ac propterea cum 100. aur. ſecundi habebunt 6 ℞ + 100 — 1 A + 100. qui numerus ſeſcuplus eſt 1 A, hoc eſt æqualis 6 A. Additis ergo 1 A + 100. vtrobique erit æquatio inter 6 ℞ + 100. & 7 A + 100. Ablatiſq. 100. vtrobique, inter 6 ℞. & 7 A. Diuiſiſq. duobus hiſce numeris per 7. erunt $\frac{6}{7}$ ℞. æquales 1 A. Ergo ſecundus, quem poſuimus habere 1 A + 100. habebit $\frac{6}{7}$ ℞ + 100.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B + 100. vt poſtquam alijs duobus dederit 100. aur. reliqua 1 B, ſit ſubſeptupla ſummæ primi, ac ſecundi vna cum 100. aur. quos a tertio acceperunt. Habent autem primus ac ſecundus $\frac{13}{7}$ ℞. + 200. ideoq. cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{13}{7}$ ℞. + 300. qui numerus ſeptuplus eſt 1 B, hoc eſt, æqualis 7 B. Diuiſiſque $\frac{13}{7}$ ℞. + 300. & 7 B, per 7. erit æquatio inter $\frac{13}{49}$ ℞ + $\frac{300}{7}$. & 1 B. Ergo tertius, quem poſuimus habere 1 B + 100. habebit $\frac{13}{49}$ ℞ + $\frac{1000}{7}$.

Itaque cum primus habeat 1 ℞ + 100. Secundus $\frac{6}{7}$ ℞ + 100. & tertius $\frac{13}{49}$ ℞ + $\frac{1000}{7}$. habebunt omnes tres ſimul 2 $\frac{6}{49}$ ℞ + $\frac{2400}{7}$. Habebant autem & omnes tres ſimul 6 ℞. Eſt igitur æqualitas inter 2 $\frac{6}{49}$ ℞ + $\frac{2400}{7}$. & 6 ℞. Ablatiſq. 2 $\frac{6}{49}$ ℞ vtrinque inter $\frac{2400}{7}$. & 3 $\frac{43}{49}$ ℞. Diuiſis igitur $\frac{2400}{7}$ per 3 $\frac{43}{49}$. fiet 1 ℞. 88 $\frac{8}{19}$. Primus ergo, cui dedimus 1 ℞ + 100. habebit 188 $\frac{8}{19}$. Secundus autem, qui inuentus eſt habere $\frac{6}{7}$ ℞ + 100. habebit 177 $\frac{15}{19}$. Tertius denique habens $\frac{13}{49}$ ℞ + $\frac{1000}{7}$. habebit 166 $\frac{6}{19}$. quod probatur. Nam ſi primus det 100. aur. alijs duobus, habebunt alij duo 442 $\frac{2}{19}$. qui numerus quintuplus eſt reliquæ ſummæ primi 88 $\frac{8}{19}$. Et ſi ſecundus alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo 454 $\frac{14}{19}$. qui nume-

numerus sextuplus est summæ reliquæ secundi 75 $\frac{11}{14}$. Deniq; si tertius alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo 464 $\frac{4}{14}$. qui numerus septuplus est reliquæ summæ tertij 66 $\frac{6}{14}$.

66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si vos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestra summa reliquæ æqualis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestræ summæ reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliqua vestra summa tripla. Quæritur uniuscuiusque summa.* LXVI.

PONATVR pecunia primi 1 ꝛe. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus habebit 1 ꝛe + 100. ac tantundem habebunt tunc alij duo, atque idcirco antequam dederunt 100. aur. habuerunt 1 ꝛe + 200. Omnesq. tres habebunt 2 ꝛe + 200.

Ponatur pecunia secundi 1 A. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summæ reliquæ primi, ac tertij, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est 2 ꝛe + 200 — 1 A. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt 2 ꝛe + 100 — 1 A. Huius ergo duplum 4 ꝛe + 100 — 2 A, æquale erit 1 A + 100. Et additis 2 A, vtrobique, æquatio erit inter 4 ꝛe + 200. & 3 A. + 100. Et ablatis 100. vtrinque, inter 4 ꝛe + 100. & 3 A. Diuisisq. duobus hisce numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}$ ꝛe + $\frac{100}{3}$. & 1 A. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}$ ꝛe + $\frac{100}{3}$. quoniam posuimus eum habere 1 A.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B, qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summæ reliquæ primi ac secundi, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est $\frac{7}{3}$ ꝛe + $\frac{100}{3}$. & postquam dederint 100 aur. alijs duobus, habebunt $\frac{7}{3}$ ꝛe — $\frac{200}{3}$. Huius ergo triplum 7 ꝛe — 200. æquale est 1 B + 100. Et additis 200. vtrinque, æqualitas erit inter 7 ꝛe, & 1 B + 300. Ablatisq. 300 vtrobique, inter 7 ꝛe — 300. & 1 B. Tertius igitur, quem posuimus habere 1 B, habebit 7 ꝛe — 300.

Itaq. cum primus habeat 1 ꝛe. Secundus $\frac{4}{3}$ ꝛe + $\frac{100}{3}$. & tertius 7 ꝛe — 300. habebunt omnes tres simul 9 $\frac{1}{3}$ ꝛe — $\frac{800}{3}$. Habebant autem & omnes simul 2 ꝛe + 200. Est ergo æqualitas inter 9 $\frac{1}{3}$ ꝛe — $\frac{800}{3}$. & 2 ꝛe + 200. Ablatisq. 2 ꝛe vtrobique, inter 7 $\frac{1}{3}$ ꝛe — $\frac{800}{3}$. & 200. Additisq. $\frac{800}{3}$ vtrinque, inter 7 $\frac{1}{3}$ ꝛe, & $\frac{1400}{3}$. Diuisis igitur $\frac{1400}{3}$ per 7 $\frac{1}{3}$. fiet 1 ꝛe. 63 $\frac{7}{11}$. pecunia primi. Secundus vero, qui inuentus est habere $\frac{4}{3}$ ꝛe + $\frac{100}{3}$. habebit 118 $\frac{2}{11}$. Tertius denique, quem inuenimus habere 7 ꝛe — 300. habebit 145 $\frac{5}{11}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit summam 163 $\frac{7}{11}$. æqualem summæ reliquorum, si prius dederint 100. aur. Secundus vero cum 100. faciet summam 218 $\frac{2}{11}$. duplam reliquorum summæ, post-

quam

quam 100. aur. dederint. Tertius denique cum 100. faciet summam 245 $\frac{4}{11}$. triplam summæ reliquorum, postquam dederint 100. aur.

LXVII. *67 Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis. Si mihi daretis $\frac{1}{2}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{3}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si mihi daretis $\frac{1}{4}$. vestræ summæ, haberem 100. aur. Quæritur pecunia uniuscuiusque.*

PONATVR pecunia primi 100 — 1 ℞. Ergo reliqui duo habebunt 2 ℞. Ita enim si dent $\frac{1}{2}$. nimirum 1 ℞, primo, habebit primus 100. aur. Omnesq. tres simul habebunt 100 + 1 ℞.

Ponatur secundi pecunia 1 A, habebuntq. primus ac tertius 100 + 1 ℞ — 1 A, qui si secundo dent $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ — $\frac{1}{3}$ A. habebit secundus 1 A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ — $\frac{1}{3}$ A, hoc est, $\frac{2}{3}$ A + $\frac{100}{3}$ + $\frac{1}{3}$ ℞ qui numerus æqualis est 100. aur. Si ergo auferantur $\frac{100}{3}$. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{2}{3}$ A + $\frac{1}{3}$ ℞. & $\frac{200}{3}$. Ablatisq. $\frac{1}{3}$ ℞ vtrinque, inter $\frac{2}{3}$ A, & $\frac{200}{3}$ — $\frac{1}{3}$ ℞. Diuisisq. duobus hisce numeris per $\frac{2}{3}$. erit æqualitas inter 1 A, & 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. Secundus ergo habebit 100 — $\frac{1}{2}$ ℞.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quia primus ac secundus habent 200 — $\frac{3}{2}$ ℞. si tertio dent $\frac{1}{4}$. nimirum 50 — $\frac{3}{8}$ ℞. habebit tertius 1 B + 50 — $\frac{3}{8}$ ℞, qui numerus æqualis est 100. aur. Ablatisq. 50. vtrinque, erit æqualitas inter 1 B — $\frac{3}{8}$ ℞, & 50. Additisq. $\frac{3}{8}$ ℞ vtrobique, inter 1 B, & 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. Tertius igitur habebit 50 + $\frac{3}{8}$ ℞.

Itaq. cum primus habeat 100 — 1 ℞. Secundus 100 — $\frac{1}{2}$ ℞. & tertius 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebunt omnes tres simul 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. Habebant autem omnes tres simul etiam 100 + 1 ℞. Est igitur æquatio inter 250 — $\frac{9}{8}$ ℞. & 100 + 1 ℞. Additisq. $\frac{9}{8}$ ℞ vtrobique, inter 250. & 100 + 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Ablatisq. 100 vtrinque, inter 150. & 2 $\frac{1}{8}$ ℞. Diuisis igitur 150. per 2 $\frac{1}{8}$. fiet 1 ℞. 70 $\frac{10}{17}$. Primus igitur habens 100 — 1 ℞, habebit 29 $\frac{7}{17}$. Secundus autem habens 100 — $\frac{1}{2}$ ℞, habebit 64 $\frac{12}{17}$. Tertius denique habens 50 + $\frac{3}{8}$ ℞. habebit 76 $\frac{8}{17}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{2}$. summæ reliquorum duorum, quam secundus cum $\frac{1}{3}$. summæ aliorum duorum, & quam tertius cum $\frac{1}{4}$. summæ aliorum duorum habet 100. aur.

LXVIII. *68 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. meæ summæ, haberetis 100. aur. Secundus vero reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{3}$. meæ summæ, haberetis 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{4}$. meæ pecuniæ, haberetis 100. aur.*

VEL

V E L

***Secundus, ac tertius dicunt primo, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tua pecuniæ, haberemus 100. aur. At primus, ac tertius dicunt secundo, si nobis dares $\frac{1}{3}$. tua pecuniæ, haberemus 100. aur. Denique primus, ac secundus dicunt tertio, si nobis dares $\frac{1}{4}$. tua pecuniæ, haberemus 100. aur. Quæritur uniuscuiusque summa.***

PONATVR pecunia primi 1 2e. Ergo reliqui duo habebunt 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. vt accipientes $\frac{1}{2}$. primi, nimirum $\frac{1}{2}$ 2e. habeant 100. Omnesq. tres habebunt $\frac{1}{2}$ 2e + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A, eritq. summa primi ac tertij $\frac{1}{2}$ 2e + 100 — 1 A. Et si acceperint $\frac{1}{3}$. secundi, nimirum $\frac{1}{3}$ A, habebunt $\frac{1}{2}$ 2e + 100 — 1 A + $\frac{1}{3}$ A, qui numerus æqualis est 100. Addito ergo 1 A, vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ 2e + 100 + $\frac{1}{3}$ A, & 100 + 1 A. Ablatisq. 100 vtrinque, inter $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{3}$ A. & 1 A. Et rursum ablata $\frac{1}{3}$ A, vtrobique, inter $\frac{1}{2}$ 2e, & $\frac{2}{3}$ A. Diuisoq. vtroque numero per $\frac{2}{3}$. inter $\frac{3}{4}$ 2e. & 1 A. Habet ergo secundus $\frac{3}{4}$ 2e.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quoniam primus & secundus habent $\frac{7}{4}$ 2e. Si acceperint $\frac{1}{4}$. tertij, habebunt $\frac{7}{4}$ 2e + $\frac{1}{4}$ B. summam æqualem 100 aur. Ablatisq. $\frac{7}{4}$ 2e vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ B. & 100 — $\frac{7}{4}$ 2e. Diuiso ergo vtroque numero per $\frac{1}{4}$. erit 1 B, æqualis 400 — 7 2e. Tertius ergo habet 400 — 7 2e.

Itaq. cum primus habeat 1 2e. secundus $\frac{3}{4}$ 2e, & tertius 400 — 7 2e. habebunt omnes tres 400 — $\frac{21}{4}$ 2e. Habebant autem & omnes simul $\frac{1}{2}$ 2e + 100. Si igitur vtrinque addantur $\frac{21}{4}$ 2e. erit æqualitas inter 400. & $\frac{23}{4}$ 2e + 100. Ablatisq. 100 vtrobique, inter $\frac{23}{4}$ 2e. & 300. Diuisis igitur 300 per $\frac{23}{4}$. fiet 1 2e. 52 $\frac{4}{23}$. pecunia primi. Secundi pecunia, qui inuentus est habere $\frac{3}{4}$ 2e. erit 39 $\frac{3}{23}$. aur. Tertius denique habens 400 — 7 2e. habebit 34 $\frac{18}{23}$ aur. quod probatur: quia tam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam primus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. secundi, & quam primus & secundus cum $\frac{1}{4}$. tertij habent 100. aur.

***69 Tres mercatores Societatem ineunt per 12. menses. Primus imponit 100. aur. Secundus 200. aur. & tertius 300. aur. Post menses autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cuius 3. libræ valent 1. aur. Et post menses quatuor secundus imponit massam argenti, cuius 1. marca valet 7. aur. Transactis 12. mensibus, recipit primus ex lucro 50. aur. secundus 110. aur. & tertius 90. aur. ita vt totum lucrum fuerit*** LXIX.

*250. aur. Quaeritur, quot libras piperis primus imposuerit, & quot marcas argenti secundus.*

PONE primum imposuisse 1 2e librarum piperis: Et secundum 1 A, marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1 aur. valebit 1 2e lib. aur. $\frac{1}{3}$ 2e. Et cum 1. marca argenti valeat 7 aur. valebit 1 A marcarum aur. 7 A. vt hic vides.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 2e ? | $\frac{1}{3}$ 2e |
| Marca | aur. | Marc. | aur. |
| 1 | 7 | 1 A ? | 7 A |

Et quia pecunia cuiusque multiplicanda est in tempus, si 100. aur. primi ducantur in 12. mens. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. secundi in 12. mens. fiet numerus 2400. & ex 300. aur. tertij in 12. mens. fiet numerus 3600. Rursus ex $\frac{1}{3}$ 2e. primi in 10. mens. quibus in Societate stetit, (nam post duos menses imposuit $\frac{1}{3}$ 2e. aur. hoc est, 1. lib. piperis) fit numerus $\frac{10}{3}$ 2e. aur. Et ex 7 A, in 8. mens. quibus in commercio steterunt, (nam post 4. mens. imposuit 1 A, marc. quæ valet 7 A) fit numerus 56 A marc. Igitur numerus primi est 1200 + $\frac{10}{3}$ 2e. Secundi 2400 + 56 A marc. & tertij 3600. qui tres numeri faciunt 7200 + $\frac{10}{3}$ 2e + 56 A. Vnde sic stabit exemplum ad regulam Trium ter repetitam.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7200 + $\frac{10}{3}$ 2e + 56 A | 250 | 1200 + $\frac{10}{3}$ 2e ? | 50 |
| | | 2400 + 56 A ? | 110 |
| | | 3600 ? | 90 |

hoc est, si 7200 + $\frac{10}{3}$ 2e + 56 A, lucrantur 250. aur. quid lucrabuntur aur. 1200 + $\frac{10}{3}$ 2e. & quid aur. 2400 + 56 A. & quid aur. 3600? Erunt autem lucra aur. 50. 110. & 90. vt in quæstione positũ est.[a] Ergo tantum fiet ex primo numero in quartos, quantum ex secundo in tertios. Fit autem ex primo in quartum 90. numerus 648000 + 300 2e + 5040 A. qui æqualis erit numero 900000. qui fit ex secundo 250. in tertium 3600. Ablatis igitur 648000. vtrobique, erit æquatio inter 300 2e + 5040 A. & 252000. Et ablatis 300 2e vtrinque, inter 5040 A, & 252000 — 300 2e. Diuisisq. duobus hisce numeris per 5040. fiet 1 A, 50 — $\frac{5}{84}$ 2e. Ac proinde 56 A facient 2800 — 3 $\frac{1}{3}$ 2e. quibus additis ad 7200 + $\frac{10}{3}$ 2e. siue + 3 $\frac{1}{3}$ 2e. fiet numerus 10000. qui primum locum obtinebit in regula trium, pro numero 7200 + $\frac{10}{3}$ 2e + 56 A. vt alios etiam numeros Cossicos resoluere possis, vt hic cernis.

a 19. septimi

$$10000 \qquad 250 \begin{cases} 1200 + \frac{10}{3}\,ꝛ\,? & 50 \\ 2400 + 56\,A\,? & 110 \\ 3600\,? & 90 \end{cases}$$

Nam ex 10000. in 110. fit numerus 1100000. æqualis numero 600000 + 14000 A, facto ex 250. in 2400 + 56 A. Ablatis ergo 600000. vtrinque, erit æqualitas inter 500000. & 14000 A. Diuisisq. duobus hisce numeris per 14000. fiet 1 A, 35 $\frac{5}{7}$ marc. argenti. Denique ex 10000. in 50. fit numerus 500000. æqualis numero 300000 + $\frac{2500}{3}$ ꝛ. facto ex 250. in 1200 + $\frac{10}{3}$ ꝛ. Ablatis ergo 300000. vtrobique, erit æqualitas inter 200000. & $\frac{2500}{3}$ ꝛ. Diuisisq. 200000. per $\frac{2500}{3}$ ꝛ. fiet 1 ꝛ. 240. libræ piperis. quod probatur sic. 35 $\frac{5}{7}$. mar. argenti valebunt aur. 250. & 240. lib. piperis aur. 80. vt hic vides.

| Marca | aur. | Marc. | aur. |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 35 $\frac{5}{7}$ ? | 250 |
| Lib. | aur. | Lib. | aur. |
| 3 | 1 | 240 ? | 80 |

Et quia aurei 250. steterunt in commercio 8. menses: ductis 250 in 8. fit numerus 2000. qui addendus est ad 2400. loco 56. A. vt numerus tertius in medio sit 4400. Item quia aur. 80. steterunt in commercio 10. menses: ductis 80. in 10. fit numerus 800. qui ad 1200. addendus est loco $\frac{10}{3}$ ꝛ. vt numerus tertius in supremo loco sit 2000. Vnde sic denuò stabit exemplum.

$$10000 \qquad 250 \begin{cases} 2000\,? & 50 \\ 4400\,? & 110 \\ 3600\,? & 90 \end{cases}$$

Vbi vides, tres numeros tertios facere 10000. primum numerum regulæ Trium: eosdemq. lucrifacere 50. 110. & 90. &c.

70 *Tres mercatores ineunt Societatem. Primus imponit 35. aur. amplius, quam secundus. At secundus, ac tertius simul imponunt 84. aur. Lucrum commune est 66. aur. ex quibus tertius pro parte sui lucri recipit aur. 21. Quæstio est, quantum quisque imposuerit, & quantum tam primus, quam secundus de lucro receperit.* LXX.

PONE, primum imposuisse 1 ꝛ + 35. aur. Secundum 1 ꝛ.

aur. vt primus vltra huius summam imposuerit præterea 35. aur. Et tertium aur. 84 — 1 ℞. vt summa secundi ac tertij faciat 84. aur. Deinde ponatur lucrum primi 1 A; & secundi 1 B. Et quoniam lucrum tertij est 21. aur. sic stabit exemplum.

$$119 + 1\,℞. \qquad 66 \begin{cases} 1\,℞ + 35 ? & 1\ A \\ 1\,℞ ? & 1\ B \\ 84 - 1\,℞ ? & 21 \end{cases}$$

a 19. septimi * Et quoniam tantum fit ex primo numero in quartum, quantum ex secundo in tertium: Fit autem numerus 2499 + 21 ℞. ex primo 119 + 1 ℞ in quartum infimum: Et ex secundo 66. in tertium infimum 84 — 1 ℞. fit numerus 5544 — 66 ℞. qui illi æqualis est. Additis igitur 66 ℞ vtrinque, fiet æquatio inter 2499 + 87 ℞. & 5544. Et ablatis 2499. vtrobique, inter 87 ℞. & 3045. Diuisis ergo 3045. per 87. fiet 1 ℞. 35. ac proinde primus imposuit 70. aur. nimirum 1 ℞ + 35. Et secundus 35. nimirum 1 ℞. Et tertius 49. nimirum 84 — 1 ℞. Et primus numerus regulæ erit 154. Ergo iam ita stabit exemplum.

$$154 \qquad 66 \begin{cases} 70 ? & 1\ A \\ 35 ? & 1\ B \\ 49 ? & 21 \end{cases}$$

Ex 154. in 1 A, fit numerus 154 A, æqualis numero 4620. facto ex 66. in 70. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 A, 30. Item ex 154. in 1 B, fit numerus 154 B, æqualis numero 2310. facto ex 66. in 35. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 B, 15. Recepit ergo primus de lucro 30. aur. & secundus 15. aur. quod ita probatur.

$$154 \qquad 66 \begin{cases} 70 ? & 30 \\ 35 ? & 15 \\ 49 ? & 21 \end{cases}$$

AENIG-

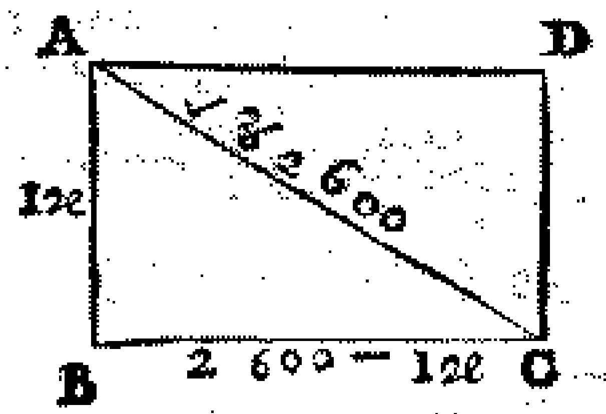
# AENIGMATA VARIA ad figuras Geometricas pertinentia. Cap. XXXII.

IN extremo hoc cap. reducentur ad vsum omnia ferè illa, quæ de numeris Irrationalibus præcepta sunt: quippe cum ænigmata proponenda sint varia de figuris Geometricis, in quibus plerunque latera, diametri, atque areæ per numeros surdos explicari solent. Horum ænigmatum primum sit hoc.

1 *Est rectangulum quoddam altera parte longius ABCD, cuius area continet palmos* 120. *diameter vero palm.* √ʒ 2600. *Quaeruntur latera.* I.

ᵃ QVONIAM quadrata laterum AB, BC, æqualia sunt quadrato diametri AC. quod est 2600. si quadratum lateris AB, ponatur 1 ꝛe, erit quadratum lateris BC, 2600 — 1 ꝛe. Ergo latera ipsa erunt √ʒ. 1 ꝛe, & √ʒ (2600 — 1 ꝛe) quæ inter se multiplicata producent aream BD, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. pract. diximus, atque idcirco quadrata laterum 1 ꝛe, & 2600 — 1 ꝛe. inter se multiplicata producent quadratum areæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex 1 ꝛe. in 2600 — 1 ꝛe fiat 2600 ꝛe — 1 ʒ. erit æquatio inter 14400. & 2600 ꝛe — 1 ʒ. Additoq. 1 ʒ. vtrinque, inter 1 ʒ + 14400. & 2600 ꝛe. Ablatisq. 14400. vtrobique, inter 1 ʒ. & 2600 ꝛe — 14400. Iam sic. Semissis numeri radicum est 1300. a cuius quadrato 1690000. subtractis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ʒ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1 ꝛe. 1300 + √ʒ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300 — √ʒ 1675600. (quia hæc æquatio duplicem habet radicẽ, propter signum — quo numerus absolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ʒ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratum erit 1300 + √ʒ 1675600. quod etiam relinquitur, si quadratum 1300 — √ʒ 1675600. lateris AB, detrahatur ex 2600.

ᵃ 47. primi.



2600 + √ȝ 0
1300 — √ȝ 1675600
1300 + √ȝ 1675600

2600. quadrato diametri AC, vt in hac formula apparet. Vides ergo duo quadrata 1300 — √ȝ 1675600. & 1300 + √ȝ 1675600. simul facere 2600. quadratum diametri. Et si eorum latera √ȝ (1300 — √ȝ 1675600.) & √ȝ (1300 + √ȝ 1675600) inter se multiplicentur, produci aream rectanguli √ȝ 14400. hoc est, 120. palm. quæ multiplicatio fiet, si quadratum posterioris particulæ 1675600. demat ex 1690000 quadrato prioris particulæ, & reliquo numero signũ √ȝ, præfigatur. vt ex ijs constat, quæ cap. 23. & 24. scripsimus, atque in hac formula apparet.

√ȝ (1300 — √ȝ 1675600)
√ȝ (1300 + √ȝ 1675600)
√ȝ 14400

ALITER. Posito quadrato minoris lateris AB, 1 2e. & idcirco quadrato maioris lateris 2600 — 1 2e. erunt ipsa latera √ȝ 1 2e, & √ȝ (2600 — 1 2e) quæ inter se multiplicata facient aream 120. palm. Faciunt autem √ȝ (2600 2e — 1 ȝ) vt hic vides. quæ multiplicatio fiet, si ipsa quadrata 2600 — 1 2e. & 1 2e. inter se multiplicentur, & producto numero signum √ȝ. præfigatur. Est igitur æquatio inter 120. & √ȝ (2600 2e — 1 ȝ) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 2600 2e — 1 ȝ. vt supra, &c.

√ȝ (2600 — 1 2e)
1 2e
√ȝ (2600 2e — 1 ȝ)

ALITER. Ponatur minus latus AB, 1 2e. ideoq. eius quadratum 1 ȝ. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 2600 — 1 ȝ. & ipsum latus BC, √ȝ (2600 — 1 ȝ.) Ducatur AB, 1 2e. in BC, √ȝ (2600 — 1 ȝ.) quod fiet, vt cap. 26. dictum est, si 1 2e. reducatur ad quadratum 1 ȝ, præponaturq. signum √ȝ. Nam si √ȝ 1 ȝ. ducatur in √ȝ (2600 — 1 ȝ) quod fiet, si eorum quadrata 1 ȝ. & 2600 — 1 ȝ. inter se multiplicentur, vt cap. 26. dictum est, producetur numerus √ȝ (2600 ȝ — 1 ȝȝ) pro area rectanguli 120. Ergo æquatio erit inter √ȝ (2600 ȝ — 1 ȝȝ) & 120. ac proinde & inter eorum quadrata 2600 ȝ — 1 ȝȝ. & 14400. Et addito 1 ȝȝ. vtrobique, inter 2600 ȝ. & 1 ȝȝ + 14400. Ablatisq. 14400. vtrinque, inter 2600 ȝ — 14400. & 1 ȝȝ. Iam sic radicem Zensizensicam eruemus. Semissis numeri Zensorum est 1300. a cuius quadrato 1690000. demptis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam √ȝ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1 ȝ. 1300 + √ȝ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse dematur, relinquetur minus quadratum 1300 — √ȝ 1675600. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + √ȝ 1675600. & minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — √ȝ 1675600. & radix maior erit √ȝ (1300 + √ȝ 1675600) & minor, √ȝ (1300 — √ȝ 1675600) vt supra, &c.

a 47. primi. ALITER. [a] Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 2600.

& ex

& ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erunt per ænigma 26. cap. 30. duo numeri, qui inter se multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 2600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 1 ℨ. & maior 2600 — 1 ℨ. Et quoniam per Lemma ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem latera quadratorum 1 ℨ. & 2600 — 1 ℨ. producunt, medio loco proportionalis est inter ipsa quadrata; [a] erit numerus 2600 ℨ — 1 ℨℨ. factus ex 1 ℨ in 2600 — 1 ℨ. æqualis quadrato numeri 120. hoc est, numero 14400. Est ergo æquatio inter 2600 ℨ — 1 ℨℨ. & 14400. Additoq. 1 ℨℨ. vtrobique, inter 2600 ℨ. & 1 ℨℨ + 14400. Et ablatis 14400. vtrinque, inter 2600 ℨ — 14400. & 1 ℨℨ. vt supra, &c.

[a] 20. septimi

2 *Campus altera parte longior habet latera in proportione septupla: & eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quæruntur latera, area, & diameter.* II.

PONATVR minus latus 1 ℞, & maius 7 ℞, quorum summa 8 ℞ & quadrata 1 ℨ. 49 ℨ. summam faciunt 50 ℨ. centuplam summæ 8 ℞. Igitur æquatio est inter 50 ℨ. & 800 ℞. Diuisis ergo 800. per 50. fiet 1 ℞. 16. minus latus. Maius erit 112. in proportione septupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit √ℨ 12800. Hoc est, quadrata laterum 256. & 12544. facient summam 12800. centuplam summæ laterum 16. & 112. quæ est 128. at quadratum diametri erit 12800. summa duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter √ℨ 12800.

3 *Est rectangulum* 4500. *palmorum, & longitudo tripla est latitudinis. Quæruntur latera, & diameter.* III.

PONATVR latitudo 1 ℞. & longitudo 3 ℞. Hæc latera inter se multiplicata producunt aream 3 ℨ. æqualem 4500. Diuisis ergo 4500 per 3. fiet 1 ℨ. 1500. & 1 ℞. √ℨ 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum √ℨ 13500. erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area √ℨ 20250000. hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipsa diameter erit √ℨ 15000.

4 *Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palmorum* 3375. *Altitudo ad longitudinem basis, & hæc longitudo ad latitudinem basis proportionem habet sesquialteram. Quæruntur mensuræ.* IIII.

PONA-

PONATVR altitudo 9 ℞. longitudo 6 ℞. & latitudo 4 ℞. in continua proportione sesquialtera. Latitudo in longitudinem facit basem 24 ʒ. & hæc in altitudinē facit aream parallelepipedi 216 ce. æqualem 3375. Diuisis igitur 3375 per 216. fiet 1 ce. 15 $\frac{135}{216}$. & 1 ℞. cubica 2 $\frac{1}{2}$. Ergo 9 ℞. facient 22 $\frac{1}{2}$. altitudinem: Et 6 ℞. facient 15. longitudinem basis: Et 4 ℞. facient 10. latitudinem basis. quæ mensuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

V. 5 *Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subdecuplum est altitudinis parallelepipedi, cuius area continet 6780. palmos. Quæritur basis, & altitudo.*

PONATVR latus basis 1 ℞ ideoq. altitudo parallelepipedi 10 ℞. Ex 1 ℞. in se fit 1 ʒ, nimirum basis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id est, in 10 ℞. facit 10 ce. area scilicet parallelepipedi æqualem 6780. Diuisis igitur 6780. per 10. fiet 1 ce. 678. & 1 ℞. √ce 678. latus basis. quod in se ductum facit √ce 459684. aream basis. Altitudo vero ad latus decuplam habens proportionem erit √ce 678000. quæ ducta in areā basis, id est, in √ce 459684. facit √ce 311665752000. aream totius parallelepipedi, nimirum 6780.

VI. 6 *Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Quæruntur latera.*

PONATVR minus 1 ℞, & maius 4 ℞. Hæc inter se multiplicata producunt 4 ʒ. aream rectanguli æqualem 576. Diuisis ergo 576 per 4. fiet 1 ʒ. 144. & 1 ℞ 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

VII. 7 *Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera proportionem habent sesquitertiam, & altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam superbipartientem tertias: soliditas denique columnæ continet palm. 93312. Quæruntur dimensiones singulæ.*

PONATVR latus minus basis 3 ℞, & maius 4 ℞, altitudo vero 10 $\frac{2}{3}$ ℞. vt ad maius latus 4 ℞, habeat proportionem duplam superbipartientem tertias, & maius latus ad minus sesquitertiam. Hi tres numeri inter se multiplicati producunt 128 ce. soliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuisis igitur 93312 per 128. fiet 1 ce. 729. & 1 ℞. 9. Ergo latus minus basis, quod posuimus 3 ℞

erit

erit 27. & maius 4 2e, erit 36. altitudo vero 10 $\frac{2}{3}$ 2e. erit 96. Atque tres hæ dimensiones inter se multiplicatæ faciunt aream 93312.

8 *Sunt duæ turres inæquales supra duas bases quadratas erectæ. Latera basium proportionem habent sesquitertiam, qualem etiam habent & altitudines & soliditates: ipsaque altitudines permutatim sunt laterum basium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium simul complectuntur palm. 21000. Quæruntur dimensiones singulæ.* VIII.

PONATVR latus minoris basis 3 2e, & maioris 4 2e, vt hoc ad illud proportionem habeat sesquitertiam sine fractione. Eritq. minor basis 9 ȝ. & maior 16 ȝ. Et quia altitudines laterum basium sunt permutatim duplæ. hoc est, altitudo turris maioris basis dupla est lateris basis minoris, & altitudo turris minoris basis dupla est lateris maioris basis; erit illa 6 2e, & hæc 8 2e, habebuntq. proportionem sesquitertiam, [a] eandem nimirum, quam latera basium habent, eritq. turris minoris basis altior, quam turris maioris basis. Quoniam verò, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producunt duos numeros in eadem cum illis proportione: [b] habentq. bases duplicatam proportionem laterum basium, ideoq. & altitudinum: fit vt maior altitudo 8 2e. ducta in minorem basem 9 ȝ. producat 72 ce, turrim minoris basis, & minor altitudo 6 2e, ducta in maiorem basem 16 ȝ, producat 96 ce turrim maioris basis; quæ per prædictum Lemma sequens habebunt eandem proportionem sesquitertiam, quam ipsæ altitudines, vel latera basium habent: eritq. propterea turris maioris basis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris basis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres simul conficiunt 168. ce. summã æqualem 21000. Diuisis ergo 21000 per 168. fiet 1. ce. 125. & 1 2e. 5. Ideoq. latus maioris turris, quod positum est 4 2e, erit 20. palm. Et latus minoris turris positum 3 2e, erit 15. palm. Et reliquæ dimensiones erunt, vt in hac formula positæ sunt. Vbi vides, & latera basium, & altitudines, soliditatesq. turrium habere proportionem sesquitertiam, & bases ipsas proportionem superseptupartientem nonas, duplicatam scilicet pro-

a 15. quinti.

b 20. sexti.

8 2e X 16 ȝ — 96 ce
6 2e X 9 ȝ — 72 ce

| | |
|---|---|
| *Latus basis turris minoris.* | 15. |
| *Latus basis turris maioris.* | 20. |
| *Basis minoris turris.* | 225. |
| *Basis maioris turris.* | 400. |
| *Altitudo minoris turris.* | 40. |
| *Altitudo maioris turris.* | 30. |
| *Soliditas minoris turris.* | 9000. |
| *Soliditas maioris turris.* | 12000. |

 portio-

portionis fesquitertiæ. Soliditates denique ambarum turrium conficere palm. 21000. vt ænigma proponit.

## LEMMA.

***SI duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem.***

*SINT duo numeri quicunque 8. & 6. proportionem sesquitertiam habentes: & alij duo 16. & 9 habentes proportionem duplicatam proportionis sesquitertiæ, nimirum superseptupartientem nonas, vt hic apparet 16. 12. 9. Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96. ex 6. in 16.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | X | 16 | 96 |
| | | 12 | |
| 6 | | 9 | 72 |

*Dico esse 96. ad 72. vt 8. ad 6. Cũ enim 16. & 9. habeant proportionem duplicatam proportionis 8. ad 6. cadet inter illos medius proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac proinde cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12:*
a 19.septimi *a fiet idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex secundo 6. in tertium 16. nimirum 96. Item cum sit, vt primus 8. ad secundum 6. ita tertius 12.*
b 19.septimi *ad quartum 9. b fiet idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9. qui ex secundo 6. in tertium 12. Quo circa cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12.*
c 17.septimi *in 6. c erit eadem proportio 96. ad 72. quæ 8. ad 6.*

*HINC fit, minorem altitudinem ducendam esse in maiorem basem, & maiorem altitudinem in minorem basem, vt soliditates procreatæ eandem habeant proportionem, quam altitudines; ac propterea maiorem turrem habere minorem altitudinem: minorem vero turrem altitudinem maiorem. Propter hanc causam dictum est in ænigmate, altitudines esse permutatim duplas laterum basium.*

IX. ***9 Est triangulum rectangulum, cuius basis (voco basem, latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. Latera autem proportionem habent duplam superbipartientem quintas. Quæruntur duo latera.***

PONATVR minus 5 ℞, & maius 12 ℞, vt sine fractione proportionem habeant duplam superbipartientem quintas: Quadrata laterum sunt 25 ℥, & 144 ℥, quæ simul faciunt summam 169 ℥,
d 47. primi. d æqualẽ quadrato basis, numero scilicet 2704. Diuisis igitur 2704 per 169. fiet 1 ℥, 16. & 1 ℞, 4. Minus ergo latus 5 ℞, erit 20. palm. & maius 12 ℞, erit 48 palm. quod probatur. Nam duo quadrata laterum 400. & 2304. faciunt 2704. quadratum basis.

10 Est

10 *Est altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo latera simul faciunt 100. palm. Quæruntur latera.* X.

PONATVR vnum 1 ℞, & alterum 100 — 1 ℞. Hæc multiplicata inter se faciunt 100 ℞ — 1 ʒ. aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 100 ℞, & 1 ʒ + 500. Ablatisq. 500. vtrobique, inter 100 ℞ — 500. & 1 ʒ. Ita autem radix Zensica eruetur. Semissis numeri radicum est 50. a cuius quadrato 2500. demptis 500. remanet numerus 2000. ad cuius radicē √ʒ 2000 si addatur prædicta semissis 50. fiet maior radix 50 + √ʒ 2000. Et si eadem radix √ʒ 2000. ex prædicta semisse dematur, reliqua fiet minor radix, 50 — √ʒ 2000. Est igitur maius latus 50 + √ʒ 2000. minus autem 50 — √ʒ 2000. quod etiam habebitur, si maius detrahatur ex 100. summa laterum, vt hic vides. quod probatur, quia duo latera 50 + √ʒ 2000. & 50 — √ʒ 2000. faciunt 100. & inter se multiplicata producunt aream 500. quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum est, si 2000. quadratum posterioris particulæ subducatur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt apposita formula indicat.

| |
|---|
| 100 + √ʒ 0 |
| 50 + √ʒ 2000 |
| 50 — √ʒ 2000 |

| |
|---|
| 50 + √ʒ 2000 |
| 50 — √ʒ 2000 |
| 500 |

11 *Est rectangulum, cuius diameter √ʒ 180. & maius latus ad minus proportionem habet triplam. Quæruntur latera, & area.* XI.

PONATVR minus latus 1 ℞, & maius 3 ℞, quorum quadrata 1 ʒ, & 9 ʒ, faciunt summam 10 ʒ, [a] æqualem quadrato diametri, hoc est, numero 180. Diuisis ergo 180. per 10. fiet 1 ʒ 18. & 1 ℞, √ʒ 18. latus minus. Maius ergo erit √ʒ 162. illius triplum. Area autem erit √ʒ 2916. id est, 54. a 47. primi.

12 *Est triangulum rectangulum, cuius vnum latus est √ʒ 18 + 3. Alterum autem latus, & basis simul faciunt √ʒ 162 + 9. Quæruntur singula latera.* XII.

PONATVR alterum latus incognitum 1 ℞, eritq. propterea basis √ʒ 162 + 9 — 1 ℞. Quadrata laterum sunt 1 ʒ, & 27 + √ʒ 648. [b] quæ simul æqualia sunt quadrato basis, nimirum numero 243 — 18 ℞ + 1 ʒ + √ʒ 52488 — √ʒ 648 ℞ b 47. primi.

| |
|---|
| √ʒ 18 + 3 |
| √ʒ 18 + 3 |
| + √ʒ 162 + 9 |
| + 18 + √ʒ 162 |
| 27 + √ʒ 648. |

√ȝ 162 + 9 — 1 ℞
√ȝ 162 + 9 — 1 ℞

— √ȝ 162 ȝ — 9 ℞ + 1 ȝ
+ √ȝ 13122 + 81 — 9 ℞
+ 162 + √ȝ 13122 — √ȝ 162 ȝ

+ 243 — 18 ℞ + 1 ȝ + √ȝ 52488 — √ȝ 648 ȝ

vt duæ propositæ formulæ multiplicationis quadratæ indicant. Si ergo vtrinque auferatur √ȝ 648. erit æquatio inter 1 ȝ + 27. & 243 — 18 ℞ + 1 ȝ + √ȝ 41472 — √ȝ 648 ȝ. Nam si auferatur √ȝ 648. a √ȝ 52488 (quæ commensurabiles sunt, habentes proportionem noncuplam, propterea quod, si √ȝ 52488. diuidatur per √ȝ 648. Quotiens fit √ȝ 81. id est, 9.) reliqua fiet √ȝ 41472. Ablatoq. 1 ȝ vtrinque, inter 27. & 243 — 18 ℞ + √ȝ 41472 — √ȝ 648 ȝ. Ablatisq. rursum 27. vtrobique, inter 0. & 216 — 18 ℞ + √ȝ 41472 — √ȝ 648 ȝ. Et additis vtrobique 18 ℞. & √ȝ 648 ȝ. inter 18 ℞ + √ȝ 648 ȝ. hoc est, inter √ȝ 648 ȝ + 18 ℞. & 216 + √ȝ 41472. Diuiso ergo hoc numero per illum, (abiectis signis Cossicis ℞, & ȝ, ex diuisore. quia totum hoc aggregatum √ȝ 648 ȝ + 18 ℞, est numerus radicum, quod in creatione numeri quadrati basis, numerus √ȝ 648 ȝ. factus sit ex 1 ℞, in √ȝ 162. bis; ac propterea numerus √ȝ 648 ȝ. censeri debeat pro numero radicum. Consule ea, quæ prope finem cap. 26. scripsimus. Abijciuntur autem signa Cossica ℞, & √ȝ, ex diuisore. quemadmodum si æquatio sit inter 20. & 5 ℞. vt diuidantur 20. per 5. abijcitur signum ℞, propterea quod 5 ℞. est numerus radicum; sicuti √ȝ 648 ȝ + 18 ℞) proueniet æstimatio 1 ℞, nimirum alterius lateris trianguli, quod positum fuit 1 ℞.

VT autem hæc diuisio fiat, multiplicandus est tam diuisor √ȝ 648 + 18. quam numerus diuidendus per √ȝ 648 — 18, vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuisor 324. & nouus diuidendus √ȝ 3359232 + 1296. quæ multiplicationes hic cernuntur.

√ȝ 648 + 18
√ȝ 648 — 18

324

216 + √ȝ 41472
√ȝ 648 — 18

— 3888 — √ȝ 13436928
+ √ȝ 30233088 + √ȝ 26873856

√ȝ 3359232 + 1296

IN priori multiplicatione aufertur quadratum 324. posterioris particulæ 18. ex 648. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. docuimus. In posteriori vero detraximus √ȝ 13436928. ex √ȝ 30233088. (quia commensurabiles sunt, habetq. posterior numerus ad priorem proportionem sesquialteram) factusq. est residuus numerus √ȝ 3359232. Item ex √ȝ 26873856. id est, ex 5184. dempsimus 3888.

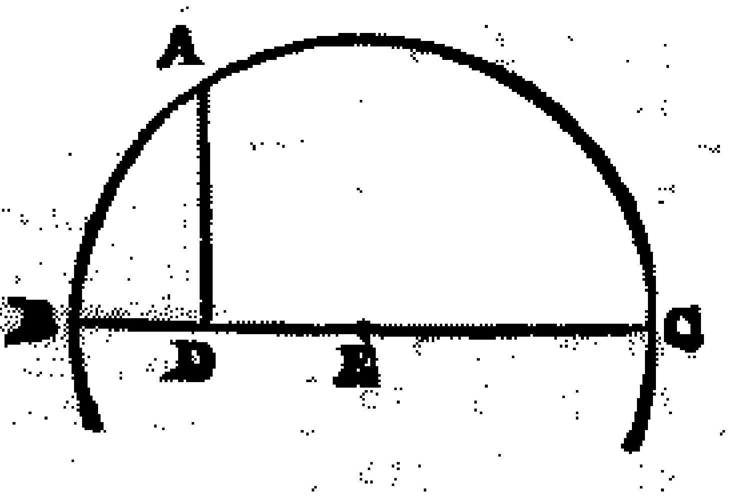
factusq.

factusq. est totus productus √ȝ 3359232 + 1296.

Iam vero si diuidatur √ȝ 3359232. per 324. hoc est, per √ȝ 104976. fiet Quotiens √ȝ 32. Et diuisis 1296. per 324. fit Quotiens 4. Pretium ergo 1 ℞. est √ȝ 32 + 4. atque tantum est alterum latus trianguli quæsitum, quod posuimus esse 1 ℞. Basis vero angulo recto opposita, quam statuimus √ȝ 162+5—1 ℞. erit √ȝ 50+5. qui numerus relinquitur, si radix inuenta √ȝ 32+4. detrahatur ex √ȝ 162+9. nimirum ex summa lateris quæsiti, ac basis. quod etiam patet, quia quadrata laterum simul sumpta faciunt 75 + √ȝ 5000. quadratum basis inuentæ √ȝ 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + √ȝ 648. & 48 + √ȝ 2048.

ALIVD exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & summa alterius lateris cum base sit 8. Ponatur alterum latus incognitum 1 ℞. ac proinde basis 8—1 ℞. Quadrata duorum laterum 16. & 1 ȝ. [a] sunt a 47. primi.
simul sumpta æqualia quadrato basis, numero videlicet 64 — 16 ℞ + 1 ȝ. Ablato ergo 1 ȝ vtrinque, erit æquatio inter 16. & 64—16 ℞. Additisq. 16 ℞ vtrobique, inter 16 + 16 ℞. & 64. Ablatisq. 16. vtrinque, inter 16 ℞. & 48. Diuisis ergo 48. per 16. fiet 1 ℞. 3. pro altero latere. Ac proinde diameter 8 — 1 ℞. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum 16. & 9. æqualia sint quadrato 25. basis. Area vero trianguli erit 6. semissis nimirum numeri 12. producti ex vno latere in aliud.

13 *Est circulus, cuius diameter* 120. *& ex quodam puncto circumferentiæ demissa perpendicularis ad diametrum est* √ȝ (2925 — √ȝ 405000.) *Quæruntur partes diametri.* XIII.




PONATVR minor pars BD, 1 ℞. ideoq. maior CD, 120—1 ℞. Et quia, ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl. AD, est media proportionalis inter BD, CD; [b] erit rectangulum sub BD, CD, æquale quadrato ex AD. b 17. sexti.
Fit autem ex BD, 1 ℞, in CD, 120 — 1 ℞. numerus 120 ℞—1 ȝ. Hic ergo æqualis est quadrato rectæ AD, nimirum numero 2925 — √ȝ 405000. Addito ergo 1 ȝ. vtrobique, erit æquatio inter 120 ℞, & 1 ȝ + 2925 — √ȝ 405000. Ablatisq. 2925 — √ȝ 405000. vtrinque, inter 1 ȝ, & 120 ℞—2925—√ȝ 405000. Ex hoc ergo numero sic radicem quadratam eruemus. Semissis numeri radicum est 60. è cuius quadrato 3600. demptis 2925—√ȝ 405000. remanet numerus 675 + √ȝ 405000. vt in hac formula vides, ad cuius radicem quadratã, quæ

est

| |
|---|
| 3600 + √ʒ 0 |
| 2925 — √ʒ 405000 |
| 675 + √ʒ 405000 |

est √ʒ ( 675 + √ʒ 405000 ) si addatur prædicta semissis 60. fit maior radix 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) atque tanta est portio CD. Et si eadem √ʒ ( 675 + √ʒ 405000 ) detrahatur ex eadem semisse 60. remanebit minor radix 60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000) pro minore portione BD. quæ etiam habebitur, si ex tota diametro 120. detrahes portionem CD, nimirum 60 + √ʒ ( 675 + √ʒ 405000 ) vt hic vides.

| |
|---|
| 120 + √ʒ 0 |
| 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) |
| 60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000) |

IAM vero vt æstimationem vtriusque portionis 60 + √ʒ (675 + √ʒ 405000) & 60 — √ʒ (675 + √ʒ 405000) inuenias, eruenda est radix ex hoc Binomio 675 + √ʒ 405000. vt ad finem cap. 28. docuimus, hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ √ʒ 405000. quod ita fiet. Semissis numeri diuidendi 675. est $\frac{675}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{455625}{4}$. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ est $\frac{405000}{4}$. remanet numerus $\frac{50625}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{225}{2}$. addita semissi prædictæ $\frac{675}{2}$. facit $\frac{900}{2}$. hoc est, 450. maiorem partem: Et eadem radix $\frac{225}{2}$. dempta ex eadem semisse $\frac{675}{2}$. relinquit $\frac{450}{2}$. hoc est, 225. minorem partem. Atque hæ duæ partes 450. 225. inter se multiplicatæ producunt 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ √ʒ 405000. Radices autem partium 225. & 450. copulatæ per signum +, hoc modo. √ʒ 225 + √ʒ 450. hoc est, 15 + √ʒ 450. dabunt radicem Binomij 675 + √ʒ 405000. ad quam radicem si addatur numerus 60. semissis nimirum numeri radicum, fiet maior radix 75 + √ʒ 450. pro maiore portione CD. Et si ex eadem semisse 60. dematur eadem radix, remanebit minor portio BD, 45 — √ʒ 450. vt prior hæc formula monstrat, quæ etiam habebitur, si maior portio 75 + √ʒ 450. subtrahatur ex tota diametro 120. vt secunda hæc formula indicat. Vides ergo, quam laboriosa fuerit extractio radicis ex hoc numero Cossico, 120 ℞ — 2925 — √ʒ 405000. quæ difficultas orta est ex numero irrationali composito ( — 2925 — √ʒ 405000. ) Quare proponemus aliud exemplum facilius in materia Sinuum.

| |
|---|
| 60 + √ʒ 0 |
| 15 + √ʒ 450 |
| 45 — √ʒ 450 |

| |
|---|
| 120 + √ʒ 0 |
| 75 + √ʒ 450 |
| 45 — √ʒ 450 |

SIT igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt sinus totus sit 1000. Et AD, sit sinus grad. 20. nimirum 342. Quæruntur sinus versi arcuum AB, AC, & sinus complementi DE. Pro BD, ponatur 1 ℞, eritq. propterea CD, 2000 — 1 ℞. Et quoniam AD, est media
a 17. sexti. proportionalis inter BD, CD ex scholio propos. 13. lib. 6. Eucl.* erit numerus 2000 ℞ — 1 ʒ. factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex

AD,

AD, nimirum numero 116964. Additoq. 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 2000 ℞. & 1 ʒ + 116964. Ablatisq. 116964. vtrobique, inter 1 ʒ. & 2000 ℞ — 116964.

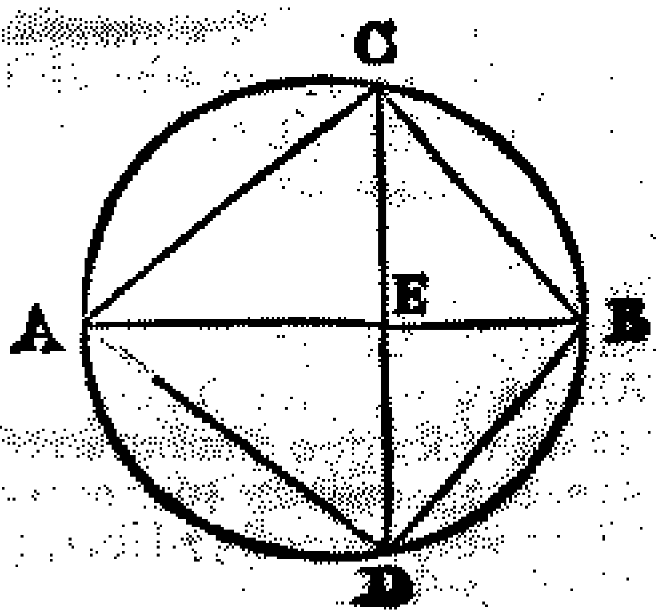
IAM sic. Semissis numeri radicum est 1000. è cuius quadrato 1000000. demptis 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam √ʒ 883036. si prædicta semissis 1000. addatur, fiet maior radix 1000 + √ʒ 883036. pro maiori portione CD. Et si eadem radix ex eadẽ semisse 1000 demeatur, reliqua fiet minor radix 1000 — √ʒ 883036. pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, si maior portio ex tota diametro 2000. subtrahatur, vt in hac formula vides. Itaq; si omnia hæc in numeris absolutis desiderentur, cum numeri 883036. maior radix sit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61 maior, quam vera. Quòd si auferatur semidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur sinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

| |
|---|
| 2000 + √ʒ 0 |
| 1000 + √ʒ 883036 |
| 1000 — √ʒ 883036 |

INVENTIS porro segmentis BD, CD, si ducantur rectæ AB, AC, inuenientur ipsæ chordæ, ex propos. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD, &c. In priori exẽplo reperietur chorda AB, √ʒ (5400 — √ʒ 6480000) & chorda AC, √ʒ (9000 + √ʒ 6480000) &c.

14 *Est circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & vna è duabus chordis minoribus est 150 — √ʒ 4500. Quæstio est, quanta sit diameter, & quantæ eius portiones, & reliqua linea.* XIIII.

PONATVR EB, minor pars diametri AB, 1 ℞. Et quia AB, secta est in E, extrema ac media ratione, estq. maius segmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: [a] Est autem & BC, media proportionalis inter easdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales sunt. Ponitur autem BC, 150 — √ʒ 4500. Igitur & AE, est 150 — √ʒ 4500. [b] Cum ergo CE, sit media proportionalis inter AE, EB; [c] erit numerus 150 ℞ — √ʒ 4500 ʒ. factus ex AE, in EB, æqualis quadrato ex CE; ideoq. recta CE,




a coroll. 8. sexti.

b coroll. 8. sexti.

c 17. sexti.

CE, erit √ʒ (150 ℞ — √ʒ 4500 ʒ.) Est autem eadem CE, √ʒ (27000 — √ʒ 405000000 — 1 ʒ) propterea quod 1 ʒ, quadratum rectæ
a 47. primi. EB, demptum ex 27000 — √ʒ 405000000. quadrato rectæ BC, [a] reliquum facit 27000 — √ʒ 405000000 — 1 ʒ. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia sunt duo quadrata 150 ℞ — √ʒ 4500 ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 1 ʒ. quippe cum vtrumque quadrato rectæ CE, ostensum sit æquale. Addito ergo 1 ʒ. vtrinque, erit æquatio inter 1 ʒ + 150 ℞ — √ʒ 4500 ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000. Et ablatis 150 ℞ vtrobique, inter 1 ʒ — √ʒ 4500 ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150 ℞. Et si addatur √ʒ 4500 ʒ. vtrobique inter 1 ʒ. & 27000 — √ʒ 405000000 — 150 ℞ + √ʒ 4500 ʒ. Ex hoc numero Cossico ita eliciemus pretium 1 ℞. Totus numerus est instar numeri Cossici diminuti, cuius portio 27000 — √ʒ 405000000. pro numero absoluto habetur, & altera portio — 150 ℞ + √ʒ 4500 ʒ. pro numero radicum. Nam √ʒ 4500 ʒ. est etiam numerus radicum, vt in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap. 26. docuimus. Itaq. dimidium numeri radicum erit — 75 + √ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750 — √ʒ 25312500. si addantur 27000 — √ʒ 405000000. fit numerus 33750 — √ʒ 632812500. a cuius radice quadrata auferenda est semissis numeri radicum, quæ fuit — 75 + √ʒ 1125. vt habeatur valor 1 ℞.

ITA autem ex Residuo hoc 33750 — √ʒ 632812500. radicem quadratam eruemus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars est 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap. 28. Ex 284765625. quadrato semissis maioris nominis 33750. detrahatur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detrahatur ex 16875. semisse numeri 33750. Nam numeri producti 28125. 5625. erunt partes quæsitæ, quæ inter se multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per signum — dabunt radicẽ propositi Residui, præposito tamen signo √ʒ. vtrique parti, hoc modo √ʒ 28125 — √ʒ 5625. vt ad finem cap. 28. tradidimus: hoc est, √ʒ 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum est dimidium numeri radicum 75 + √ʒ 1125. propter signum — quo numerus radicum afficiebatur. Fietq. numerus reliquus √ʒ 40500 — 150. pro pretio 1 ℞, hoc est, pro linea EB. Cum ergo AE, ipsi CB, æqualis, sit 150 — √ʒ 4500. erit tota diameter √ʒ 18000. quia √ʒ 40500; & √ʒ 4500. commensurabiles sunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore subducta, relinquitur √ʒ 18000. At CE, erit √ʒ (√ʒ 1620000000 — 36000) numerus videlicet factus ex AE, in EB, Denique AC, erit √ʒ (√ʒ 405000000 — 9000) cum eius quadratum æquale sit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis est AD, & CE, ipsi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarũ AC, BC, nimirũ √ʒ 405000000 — 9000. & 27000 — √ʒ 405000000. facere 18000. quadratum diame-
b 31. tertij. tri AB, vt vult propos. 47. lib. 1. Eucl. [b] cum angulus ACB, in semicirculo sit rectus.

ALI-

ALITER. Quoniam maius segmentum AE, æquale ipsi CB, est 150—√ʒ 4500. si ponatur EB, 1 ꝛ. erit tota diameter AB, 150—√ʒ 4500+1 ꝛ. Atque ita quadrato maioris segmenti AE, 27000—√ʒ 405000000. æqualis erit numerus 150 ꝛ—√ʒ 4500 ʒ+1 ʒ. factus ex EB, id est, ex 1 ꝛ. in totam AB, id est, in 150—√ʒ 4500+1 ꝛ. Et transpositis particulis huius æquationis, vt supra, reperietur iterum æquatio inter 1 ʒ. & 27000—√ʒ 405000000—150 ꝛ+√ʒ 4500 ʒ, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1 ꝛ, eritq. minus segmentum EB, 1 ꝛ—150—√ʒ 4500. [a] Atque ita numerus 1 ʒ—150 ꝛ— a 17. sexti.
√ʒ 4500 ʒ. factus ex 1 ꝛ, id est, ex AB, in 1 ꝛ—150—√ʒ 4500. id est, in EB, æqualis erit quadrato 27000—√ʒ 405000000. rectæ AE. Et additis vtrobique 150 ꝛ—√ʒ 4500 ʒ. æquatio erit inter 1 ʒ. & 27000—√ʒ 405000000+150 ꝛ—√ʒ 4500 ʒ. Ex hoc ergo numero Cossico ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compositus ex duabus particulis, quarum prior 27000—√ʒ 405000000. est instar numeri absoluti, & posterior +150 ꝛ—√ʒ 4500 ʒ. instar numeri radicum. Dimidium numeri radicum est 75—√ʒ 1125. ad cuius quadratum 6750—√ʒ 25312500. si addantur 27000—√ʒ 405000000. fit numerus 33750—√ʒ 632812500. ad cuius radicem quadratam √ʒ 28125—75. (quæ inuenietur, vt supra) si addatur semissis numeri radicum 75—√ʒ 1125. fiet 1 ꝛ. √ʒ 18000. pro diametro AB, quantam videlicet supra inuenimus, &c.

## *SCHOLIVM.*

*IN prima solutione huius ænigmatis, quando ex √ʒ 28125—75. radice huius Residui 33750—√ʒ 632812500. detraximus 75+√ʒ 1125. dimidium numeri radicum, diximus relinqui numerum √ʒ 40500—150. quod mirum non est. Nam totum illud dimidium 75+√ʒ 1125. affici intelligendum est signo —. propterea non solum 75. detracta a —75. faciunt —150. sed etiam √ʒ 1125. addita ad √ʒ 28125. facit √ʒ 40500. quia cum numeri √ʒ 28125. & —√ʒ 1125. habeant signa contraria, ille nimirũ signum +, hic vero intelligatur habere signum —. loco subtractionis fieri debet additio, vt cap. 4. docuimus. Et quidem recte hoc modo factam esse detractionem, clarissime testatur solutio ænigmatis, quippe cum omnes lineæ inuentæ respondeant experientiæ. Quod etiam hoc exemplo perspicuum fiet. Sit enim √ʒ 100—6. radix alicuius residui, a qua detrahendum sit dimidium numeri radicum 4+√ʒ 9. quod affectum erat signo —. ita vt +√ʒ 9. intelligatur esse —√ʒ 9. Vides ergo, ex detractione 4. ex —6. relinqui —10. & ex subtractione —√ʒ 9. a √ʒ 100. relinqui 13. ita vt totum residuum sit 13—10, hoc est, 3. Nam √ʒ 100—6. facit 4. & 4—√ʒ 9. facit 1. Constat autem ex detractione 1. a 4. relinqui 3.*

$$\begin{array}{r} \surd ʒ\ 100 - 6 \\ 4 + \surd ʒ\ 9 \\ \hline 13 - 10 \end{array}$$

*IN hoc eodem ænigmate vides, quando numerus radicum est compositus,*

 *affe-*

*affectusq. signo —, dimidio numeri radicum præponendum esse signum —, ut quadratæ multiplicetur, quod etiam fieri intelligitur in alijs æquationibus, vbi numerus radicum simplex est, affectusq. signo —. Vt si numerus radicum est — 10 ℞. eius semissis est — 5. quæ in se ducta facit 25. ac si non haberet præfixum signum —. Atque hæc causa fuit, cur in superioribus non affixum fuerit dimidio numeri radicum signum —, etiamsi numerus radicum illo affectus fuerit: quia nimirum semper producitur quadratus cum signo +, siue dimidio numeri radicum præponatus signum —, siue non.*

XV. 15 ***Est quadratum, cuius latus est 7. Quæritur diameter.***

a schol. 47. primi. QVADRATVM lateris est 49.[a] cuius duplum est quadratum diametri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipsa diameter √ʒ 98.

XVI. 16 ***Est quadratum, cuius diameter est √ʒ 98. Quæritur latus.***

b schol. 47. primi. [b] QVONIAM quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ipsum √ʒ 49. hoc est, 7.

XVII. 17 ***Est quadratum, cuius diameter & latus faciunt summam 6. Quæruntur diameter ac latus.***

c schol. 47. primi. PONATVR latus 1 ℞. ac proinde diameter 6 — 1 ℞. [c] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: Estq. quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 36 — 12 ℞ + 1 ʒ. erit æquatio inter 2 ʒ, & 36 — 12 ℞ + 1 ʒ. Ablatoq. 1 ʒ. vtrinque, inter 1 ʒ. & 36 — 12 ℞.

Iam sic. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36. si addantur 36. fit numerus 72. a cuius radice √ʒ 72. si prædicta semissis 6. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 ℞. √ʒ 72 — 6. atque tantum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam faciet diametrum 12 — √ʒ 72. vt in hac formula vides. quod probatur. quia quadratum diametri 216 — √ʒ 41472. duplum est quadrati lateris 108 — √ʒ 10368. Et diameter ac latus faciunt summam 6.

| | |
|---|---|
| √ʒ | 0 + 6 |
| √ʒ | 72 — 6 |
| 12 — √ʒ 72 | |

XVIII. 18 ***Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæruntur latus ac diameter.***

PONATVR latus 1 ℞. ideoq. diameter $\frac{10}{1\,℞}$. Nam ex 1 ℞ in $\frac{10}{1\,℞}$. fiunt 10. qui numerus $\frac{10}{1\,℞}$ est Quotiens, si 10. per 1 ℞. diuidantur.

Ita

Ita enim Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producit numerum diuisum 10. [a] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri $\frac{100}{1ʒ}$. erit aequalitas inter 2 ʒ. & $\frac{100}{1ʒ}$. quae per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2 ʒʒ. & 100. Diuisis ergo 100. per 2. fiet 1 ʒʒ. 50. & 1 ℞. √ʒʒ 50. pro latere. Quia vero diameter posita fuit $\frac{10}{1℞}$. hoc est, 10. diuisa per 1 ℞. si diuidantur 10. per √ʒʒ 50. nimirum per pretium 1 ℞. fiet Quotiens √ʒʒ 200. pro diametro, quod probatur. Nam ex latere √ʒʒ 50. in diametrum √ʒʒ 200. fit numerus √ʒʒ 10000. id est, 10. Et √ʒʒ 40000. quadratum diametri duplum est quadrati lateris √ʒʒ 2500.

a schol. 47. primi.

XIX.

*19 Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quaeruntur latus, ac diameter.*

PONATVR latus 1 ℞. ideoq. diameter 1 ℞ + 3. [b] Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri 1 ʒ + 6 ℞ + 9. erit aequatio inter 2 ʒ. & 1 ʒ + 6 ℞ + 9. Ablatoq. 1 ʒ vtrinque, inter 1 ʒ, & 6 ℞ + 9. Semissis numeri radicum est 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem √ʒ 18. si addatur praedicta semissis 3. fiet 1 ℞. √ʒ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit √ʒ 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + √ʒ 2592. duplum est quadrati lateris 27 + √ʒ 648. Et diameter latus superat numero 3.

b schol. 47. primi.

XX.

*20 Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 5. Quaeruntur diameter ac latus.*

PONATVR latus 1 ℞. ac propterea differentia inter diametrum ac latus $\frac{15}{1℞}$. quae habetur ex diuisione 15. per 1 ℞. vt nimirũ Quotiens ductus in diuisorem 1 ℞. producat numerum diuisum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 1 ℞ + $\frac{15}{1℞}$. [c] Quoniam autem quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 1 ʒ. & quadratum diametri $\frac{1ʒʒ + 30ʒ + 225}{1ʒ}$. erit aequatio inter 2 ʒ & $\frac{1ʒʒ + 30ʒ + 225}{1ʒ}$. quae per multiplicationem in crucem reducetur ad aequationẽ inter 2 ʒʒ. & 1 ʒʒ + 30 ʒ + 225. Ablato ergo 1 ʒʒ. vtrinque, erit aequatio inter 1 ʒʒ. & 30 ʒ + 225. Ex hoc numero radicem Zensizensicam sic eruemus. Semissis numeri Zensorum est 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450. ad cuius radicem quadratam √ʒ 450. si addatur praedicta semissis 15. fiet 1 ʒ. √ʒ 450 + 15. & 1 ℞. √ʒ (√ʒ 450 + 15) vt ad finẽ cap. 12. traditum est, atque tantum est latus: cuius quadrati √ʒ 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri √ʒ 1800 + 30. ac proinde diameter erit √ʒ (√ʒ 1800 + 30) quod probatur. Nam si latus ex

c schol. 47. primi.

diametro subtrahatur, remanebit differentia √ʒ (√ʒ 1800 + 30) — √ʒ (√ʒ 450 + 15) quæ ducta in latus √ʒ (√ʒ 450 + 15) producit numerũ 15. Consule caput 24. vbi hæc multiplicatio expresse habetur.

XXI. **21** ***Est rectangulum, cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quæruntur latera, & diameter.***

PONATVR minus latus 2 ℞. ideoq. maius 3 ℞. sesquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter se, fit numerus 6 ʒ. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1 ʒ. 5. & 1 ℞. √ʒ 5. Et quia minus latus posuimus esse 2 ℞. erit minus latus √ʒ 20. numerus videlicet duplus radicis, numeri scilicet √ʒ 5. Cum ergo maius latus positum sit 3 ℞. erit maius latus √ʒ 45. numerus scilicet triplus vnius radicis, quæ fuit √ʒ 5. *Quia vero quadrata laterum 20. & 45. simul æqualia sunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipsa diameter √ʒ 65. quod probatur, quia ex latere √ʒ 20. in latus √ʒ 45. fit numerus √ʒ 900. hoc est, 30. quantam videlicet posuimus aream rectanguli.

a schol. 47. primi.

XXII. **22** ***Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæruntur latera, ac diameter.***

PONATVR minus latus 1 ℞. ideoq. maius 1 ℞ + 2. Hæc latera inter se multiplicata faciunt aream 1 ʒ + 2 ℞. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 2 ℞. vtrobique, erit æqualitas inter 1 ʒ. & 80 — 2 ℞. Semissis numeri radicum est 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. a cuius radice 9. si prædicta semissis 1. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 ℞. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area proposita 80. Duo vero quadrata laterũ 64. & 100. æqualia sunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipsaq. diameter √ʒ 164.

XXIII. **23** ***Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quæruntur latera, & diameter.***

PONATVR vnum latus 1 ℞. ideoq. alterum 20 — 1 ℞. Hæc inter se multiplicata faciunt aream 20 ℞ — 1 ʒ. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1 ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒ + 80. & 20 ℞. Ablatisq. 80. vtrinque, inter 1 ʒ. & 20 ℞ — 80. Semissis numeri radicum est 10. a cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicem √ʒ 20. addita prædicta semisse 10. fiet 1 ℞. √ʒ 20 + 10. maior pro vno latere. Atque eadem radix √ʒ 20. dempta ex prædicta semisse 10. reliquam faciet minorem radicem 10 — √ʒ 20. quæ etiam habebitur, si latus inuentum √ʒ 20 + 10. detrahatur ex 20.

summa

summa laterum, vt hic vides. Latera inuenta 10 + √ȝ 20. & 10 — √ȝ 20. inter se multiplicata producunt aream 80. propositã. quæ multiplicatio facile fiet, si per doctrinam cap. 23. 20. quadratum particulæ posterioris detrahatur ex 100. quadrato particulæ maioris, vt in secunda hac formula vides. Iam quadrata laterum 120 + √ȝ 8000. & 120 — √ȝ 8000. [a] æqualia sunt quadrato diametri: ideoq. quadratum diametri erit 240. & ipsa diameter √ȝ 240.

| | |
|---|---|
| √ȝ 20 + 10 | |
| √ȝ 20 + 10 | |
| — √ȝ 20 + 10 | |

| | |
|---|---|
| 10 + √ȝ 20 | |
| 10 — √ȝ 20 | |
| 80 | a 47. primi. |

*24 Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa laterum 42. Quæruntur latera, & area.* XXIIII.

PONATVR vnum latus 1 ℞. ac proinde alterum 42 — 1 ℞. Horum quadrata 1 ȝ. & 1764 — 84 ℞ + 1 ȝ. [b] æqualia sunt quadrato diametri: atque idcirco æquatio erit inter 2 ȝ + 1764 — 84 ℞. & 900. Et additis 84 ℞ vtrobique, inter 84 ℞ + 900. & 2 ȝ + 1764. Ablatisq. 900 vtrinque, inter 84 ℞. & 2 ȝ + 864. Et rursum ablatis 864. vtrinque, inter 2 ȝ. & 84 ℞ — 864. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1 ȝ. & 42 ℞ — 432. Semissis numeri radicum est 21. a cuius quadrato 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita prædicta semisse 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Eademq. radix 3. dempta ex prædicta semisse 21. relinquet minorem radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, si latus maius inuentum 24. subtrahatur ex 42. summa laterum. Iam ex 24. in 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. efficere 900. quadratum diametri propositæ 30. b 47. primi.

*25 Est rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. & differentia laterum est √ȝ 5. Quæruntur latera, diameter, & area.* XXV.

PONATVR minus latus 1 ℞ — √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. (qui numerus √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. est semissis datæ differentiæ √ȝ 5.) & maius 1 ℞ + √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. Ita enim hoc excedet illud differentia √ȝ 5. cum minus a maiore subductum relinquat √ȝ 5. vt in hac formula vides. Nam √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. & √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. debent addi, propter diuersa signa + & —. quæ additio fit, si √ȝ 1 $\frac{1}{4}$ duplicetur, & duplato numero √ȝ $\frac{20}{4}$. hoc est, √ȝ 5. superioris numeri signum + intelligatur præpositum, vt cap. 4. diximus. Ex latere 1 ℞ — √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. in latus 1 ℞ + √ȝ 1 $\frac{1}{4}$. fit area 1 ȝ — 1 $\frac{1}{4}$. Et quia area cum diametro facit 15. Si ex hac summa detrahatur dicta area 1 ȝ — 1 $\frac{1}{4}$. remanebit diameter

| |
|---|
| 1 ℞ + √ȝ 1 $\frac{1}{4}$ |
| 1 ℞ — √ȝ 1 $\frac{1}{4}$ |
| √ȝ 5 |

meter

meter 16 $\frac{1}{4}$ — 1 ʒ. cuius quadratum erit 1 ʒʒ + 264 $\frac{1}{16}$ — 32 $\frac{1}{2}$ ʒ. quod serua.

Quia vero quadratum lateris minoris 1 ℞ — √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. est 1 ʒ — √ʒ 5 ʒ + 1 $\frac{1}{4}$. Et quadratum lateris maioris 1 ℞ + √ʒ 1 $\frac{1}{4}$. est 1 ʒ + √ʒ 5 ʒ
a 47. primi. + 1 $\frac{1}{4}$. quæ duo quadrata conficiunt 2 ʒ + 2 $\frac{1}{2}$. a qui numerus æqualis erit quadrato diametri supra seruato, numero videlicet, 1 ʒʒ + 264 $\frac{1}{16}$ — 32 $\frac{1}{2}$ ʒ. Additis ergo 32 $\frac{1}{2}$ ʒ vtrinque, erit æqualitas inter 34 $\frac{1}{2}$ ʒ + 2 $\frac{1}{2}$. & 1 ʒʒ + 264 $\frac{1}{16}$. Et ablatis 2 $\frac{1}{2}$ vtrobique, inter 34 $\frac{1}{2}$ ʒ & 1 ʒʒ + 261 $\frac{9}{16}$. Et rursum ablatis 261 $\frac{9}{16}$. vtrinque, inter 34 $\frac{1}{2}$ ʒ — 261 $\frac{9}{16}$. & 1 ʒʒ. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est 17 $\frac{1}{4}$. a cuius quadrato 297 $\frac{9}{16}$. demptis 261 $\frac{9}{16}$. remanet numerus 36. cuius radix 6. dempta ex prædicta semisse 17 $\frac{1}{4}$. relinquit minorem Zensum 11 $\frac{1}{4}$. & minorem radicem √ʒ 11 $\frac{1}{4}$. Ergo minus latus positum 1 ℞ — √ʒ $\frac{5}{4}$. erit √ʒ 11 $\frac{1}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$. Maius vero, quod posuimus 1 ℞ + √ʒ $\frac{5}{4}$. erit √ʒ 11 $\frac{1}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$. quæ duo latera se mutuo excedunt numero √ʒ 5. vt in hac formula subtractionis videre licet, id est √ʒ 5.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ʒ}\ 11\tfrac{1}{4} + \sqrt{ʒ}\ \tfrac{5}{4} \\ \sqrt{ʒ}\ 11\tfrac{1}{4} - \sqrt{ʒ}\ \tfrac{5}{4} \\ \hline 0 + \sqrt{ʒ}\ \tfrac{20}{4} \end{array}$$

Atque eadem duo latera inter se multiplicata faciunt 10. pro area, vt hic vides. Nam + √ʒ $\frac{225}{16}$. & — √ʒ $\frac{225}{16}$. se mutuò tollunt, & $\frac{45}{4}$ — $\frac{5}{4}$. faciunt $\frac{40}{4}$. hoc est, 10.

$$\begin{array}{r} \sqrt{ʒ}\ \tfrac{45}{4} - \sqrt{ʒ}\ \tfrac{5}{4} \\ \sqrt{ʒ}\ \tfrac{45}{4} + \sqrt{ʒ}\ \tfrac{5}{4} \\ \hline + \sqrt{ʒ}\ \tfrac{225}{16} - \tfrac{5}{4} \\ \tfrac{45}{4} - \sqrt{ʒ}\ \tfrac{225}{16} \\ \hline \tfrac{40}{4}.\ \text{id est, } 10. \end{array}$$

DEINDE quadrata laterum sunt $\frac{50}{4}$ — √ʒ $\frac{100}{4}$. & $\frac{50}{4}$ + √ʒ $\frac{100}{4}$.
b 47. primi. quæ faciunt summam 25. b æquale quadrato diametri, (quia — √ʒ $\frac{100}{4}$. & + √ʒ $\frac{100}{4}$. se mutuò tollunt, & ex $\frac{50}{4}$. & $\frac{50}{4}$. fiunt $\frac{100}{4}$. id est, 25.) Quare √ʒ 25. nimirum 5. erit diameter, quæ cum area inuenta 10. facit summam 15. propositam.

QVAMVIS autem numerus hic Cossicus 34 $\frac{1}{2}$ ʒ — 261 $\frac{9}{16}$. habeat duplicem radicem, vt cap. 12. ostendimus: tamen cum maiore radice, quæ est √ʒ 23 $\frac{1}{4}$. (quæque reperitur, si radix 6. supra inuenta addatur ad prædictam semissem 17 $\frac{1}{4}$. Numerus enim conflatus 23 $\frac{1}{4}$. erit maior Zensus, & √ʒ 23 $\frac{1}{4}$. maior radix.) hic nihil efficies. quia latera essent √ʒ 23 $\frac{1}{4}$ — √ʒ $\frac{5}{4}$. & √ʒ 23 $\frac{1}{4}$ + √ʒ $\frac{5}{4}$. quæ inter se multiplicata facient maiorem aream, quam 10. inuenieturq. maior diameter, quam 5. Quare summa ex area, & diametro conflata maior erit summa proposita 15. Vides ergo hic mirum quid, non posse videlicet semper assumi vtramque radicem æquationis: quod quidem rarò contingit. Itaq. si examen institutum per alteram radicum non respondet ænigmati, assumenda est altera radix. Vt in proposito ænigmate, quia examen per radicem maiorem non successit, propterea minor radix assumpta est.

ALIVD exemplum simile. Sit differentia laterum 2. & area cum diametro faciat 58. Quæruntur rursum latera, diameter, & area.

Pona-

Ponatur minus latus 1 x — 1. (Est autem 1. semissis differentiæ laterum.) & maius 1 x + 1. Ita enim hoc excedet illud binario, cũ minus a maiore sublatum relinquat 2. vt hic vides.

1 x + 1
1 x — 1
———
0 + 2

Quadrata laterum sunt 1 ʒ — 2 x + 1. & 1 ʒ + 2 x + 1. quæ faciunt summam 2 ʒ + 2. [a] æqualem quadrato diametri. Ex 1 x — 1, in 1 x + 1. fit area 1 ʒ — 1. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59 — 1 ʒ. cuius quadratum est 1 ʒʒ + 3481 — 118 ʒ. Et quia paulò ante idem quadratum inuentum est 2 ʒ + 2. erunt duo hæc quadrata inter se æqualia. Additis ergo 118 ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒʒ + 3481. & 120 ʒ + 2. Ablatisq. 2 vtrinque, inter 1 ʒʒ + 3479. & 120 ʒ, & rursum ablatis 3479 vtrobique, inter 1 ʒʒ, & 120 ʒ — 3479. Semissis numeri Zensorum est 60. a cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta a prædicta semisse 60. relinquit 49. minorem Zensum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus positum sit 1 x — 1. & maius 1 x + 1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia est 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, si laterum quadrata 36 & 64 in vnam summam 100 colligantur,[b] quæ æqualis erit quadrato diametri, ideoq. diameter erit √ʒ 100, id est, 10. — a 47. primi. / b 47. primi.

HIC etiam cum maiore radice, quæ est √ʒ 71. (quia superior radix 11. addita ad prædictam semissem 60 facit 71. maiorem Zensum, maior propterea radix erit √ʒ 71.) nihil efficies. nam latera erunt √ʒ 71 — 1. & √ʒ 71 + 1, maiora quam 6 & 8. ideoq. maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri constituent, quam 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atque idcirco area cum diametro maiorem summam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non posse semper assumi vtramque radicem ad problematis solutionem, vt paulò ante diximus.

*26 Est rectangulum, cuius vnum latus est 6. & quod fit ex altero latere in diametrum est 80. Quæruntur alterum latus, ac diameter, vnà cum area.* XXVI.

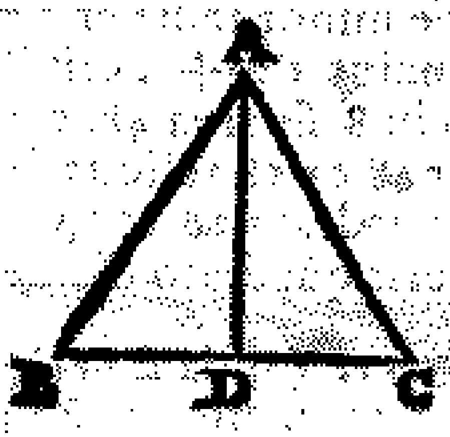
PONATVR alterum latus 1 x. Quadrata laterum 6. & 1 x, sunt 36 & 1 ʒ, quorum summa 1 ʒ + 36. [c] æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. si 80 diuidantur per 1 x latus ignotum, fiet Quotiens $\frac{80}{1 x}$ ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc $\frac{80}{1 x}$ in 1 x, diuisorem producatur numerus diuisus 80. ideoq. quadratum diametri erit $\frac{6400}{1 ʒ}$ æquale priori quadrato eiusdem diametri inuento 1 ʒ + 36. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 1 ʒʒ + 36 ʒ, & 6400. Ablatis ergo 36 ʒ vtrobique, erit æquatio inter 1 ʒʒ, & 6400 — 36 ʒ. Semissis numeri Zensorum est 18. ad cuius — c 47. primi.

quadra-

quadratum 324. additis 6400. fit numerus 6724. a cuius radice 82. si prædicta semissis 18. tollatur, relinquetur pretium 1 ℨ. 64. Ergo 1 ℞ erit 8. latus quæsitum. Nam ex latere 6. in latus 8. fit area 48. Et quadrata laterum 36. & 64. faciunt quadratum diametri 100. ideoq. diameter erit 10. Vbi vides, ex latere 8. inuento in diametrum 10. fieri 80.

XXVII. *27 Est triangulum æquilaterum ABC, cuius area 60. Quæruntur latus BC, ac perpendicularis AD.*

a schol. 26. primi. b 47. primi. a QVONIAM AD, secat BC, bifariam, ponatur BD, 1 ℞, & quodlibet laterum 2 ℞. eritq. quadratum BD, 1 ℨ, & quadratum lateris AB, 4 ℨ. b Cum ergo duo quadrata BD, AD, æqualia sint quadrato AB, erit quadratum AD, 3 ℨ, & ipsa AD, √ℨ 3 ℨ. Ex BD, 1 ℞, in AD √ℨ 3 ℨ. fit area trianguli ABC, vt cap. 2. lib. 4. Geom. Pract. demonstrauimus, nimirum √ℨ 3 ℨℨ, vt hic apparet: quia 1 ℞. quadranda est, & quadrato 1 ℨ. præponendum signum √ℨ. atque ita √ℨ 3. ℨ multiplicanda in √ℨ 1 ℨ. vt ad finem cap. 26. scripsimus. Et quia area posita est 60. erit æquatio inter 60. & √ℨ 3 ℨℨ.



√ℨ 3 ℨ
1 ℞
√ℨ 3 ℨℨ

ideoq. & inter eorum quadrata 3600. & 3 ℨℨ. Diuisis ergo 3600. per 3. fiet 1 ℨℨ. 1200. & √ℨℨ 1200 erit pretium 1 ℞, hoc est, lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit √ℨℨ 19200. nimirum duplum √ℨℨ 1200. Vt enim dupletur √ℨℨ 1200. ducenda est per Zensizensum binarij, nimirum per 16. Quoniam autem area 60. producitur ex BD, √ℨℨ 1200. in AD, si 60, hoc est, radix √ℨℨ 12960000. diuidatur per √ℨℨ 1200. fiet Quotiens √ℨℨ 10800. pro perpendiculari AD. quod probatur. Nam ex √ℨℨ 1200. in √ℨℨ 10800. fit √ℨℨ 12960000. hoc est, 60. area proposita.

ALIVD exemplum. Sit area trianguli √ℨ 243. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter √ℨ 243. & √ℨ 3 ℨℨ. ac proinde & inter eorum quadrata 243. & 3 ℨℨ. Diuisis ergo 243. per 3. fiet 1 ℨℨ. 81. cuius √ℨℨ, est 3. quantitas lineæ BD, ac proinde totum latus BC, erit 6. Quod si diuidatur area √ℨ 243. per BD, quæ est 3. hoc est, per √ℨ 9. fiet Quotiens √ℨ 27. pro perpendiculari AD. quod probatur. quia ex BD, 3. id est, ex √ℨ 9. in AD, √ℨ 27. fit √ℨ 243. area proposita.

XXVIII. *28 Est triangulum æquilaterum ABC, cuius perpendicularis AD, est 6. Quæruntur latus BC, & area.*

PONA-

PONATVR BD, 1 ℞, inuenieturq. AD, √ȝ 3 ȝ, vt in præcedenti ænigmate. Et quia eadem AD, posita est 6. erit æquatio inter 6. & √ȝ 3 ȝ. Si ergo diuidantur 6. per √ȝ 3. numerum maioris characteris ȝ. fiet 1 ℞. √ȝ 12. pro recta BD, quia vt ad finem cap. 26. diximus, numerus √ȝ 3 ȝ, est numerus radicum, & non Zensorum.

Vel sic. Quoniam æquatio est inter 6. & √ȝ 3 ȝ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 36. & 3 ȝ. Diuisis ergo 36 per 3. fiet 1 ȝ. 12. & 1 ℞. √ȝ 12. pro linea BD. Atque idcirco totum latus BC, erit √ȝ 48. duplum videlicet √ȝ 12. Area autem erit √ȝ 432. numerus scilicet productus ex BD, √ȝ 12. in AD, 6. id est, in √ȝ 36.

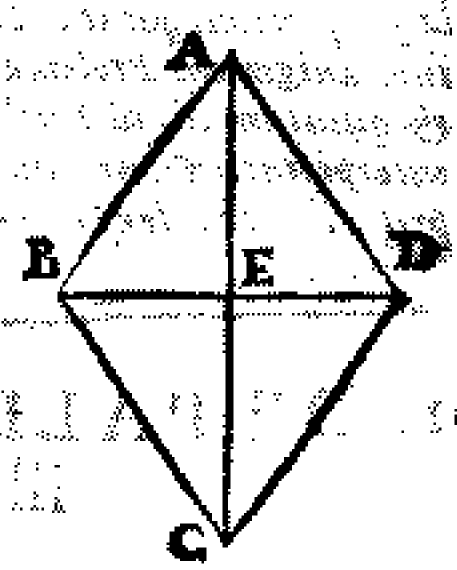
ALIVD exemplum. Sit perpendicularis AD, 3.

Positis iisdem, reperietur æquatio inter 3. & √ȝ 3 ȝ. Diuisis igitur 3. per √ȝ 3. qui est numerus radicum, vt dictum est, fiet 1 ℞, √ȝ 3. pro recta BD, totumq. latus BC, erit √ȝ 12.

Vel sic, quia æquatio est inter 3. & √ȝ 3 ȝ, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9. & 3 ȝ. Diuisis ergo 9. per 3. fiet 1 ȝ 3. & 1 ℞, √ȝ 3. pro recta BD, totumq. latus BC, erit √ȝ 12. Area autem erit √ȝ 27. numerus videlicet productus ex BD, √ȝ 3. in AD, 3. id est, in √ȝ 9. quod verum esse, liquido constat, cum quadratum lateris, nimirum 12. ad quadratum perpendicularis, id est, ad 9. proportionem habeat sesquitertiam, vt vult Eucl. propos. 12. lib. 13.

29 *Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & proportio diametrorum AC, BD, sesquiquarta. Quæruntur latus, & diametri.* XXIX.

PONATVR maior diameter AC, 5 ℞, ideoq. minor BD, 4 ℞. Quia igitur diametri in Rhombo se mutuo diuidunt bifariam, atque angulos etiã bifariam; [a] erit AE, diuidens in Isoscele ABD, angulum A, bifariam, ad BD, perpendicularis. Igitur cum area trianguli ABD, producatur ex AE, in BE, vt propos. 2. lib. 4. Geom. Pract. ostendimus; & area trianguli CBD, ex CE, hoc est, ex AE, in DE; producetur tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemq. modo eadem area producetur ex BE, in AC. Fit autem ex BE, 2 ℞. in AC, 5 ℞, numerus 10 ȝ. Igitur æquatio erit inter 60. & 10 ȝ, quod vterque numerus sit area Rhombi. Diuisis ergo 60. per 10. fiet 1 ȝ, 6. & 1 ℞, √ȝ 6. Igitur AC, posita 5 ℞, erit √ȝ 150. Et BD, posita 4 ℞, erit √ȝ 96. quod probatur, quia ex BE, √ȝ 24. (semisse diametri BD, √ȝ 96) in AC, √ȝ 150. fit area Rhombi √ȝ 3600. id est, 60. Atque ita cognita est vtraque diameter.




a schol. 34. primi.

b schol. 26. primi.

c 1. secundi.

Deinde quia AE, EB, sunt √ȝ 37 ½. & √ȝ 24. & earum quadrata a 47. primi. $37\frac{1}{2}$. & 24. quæ simul faciunt $61\frac{1}{2}$. summam[a] æqualem quadrato lateris AB; erit latus AB, √℥ $61\frac{1}{2}$.

XXX. *30 Est Rhombus ABCD, cuius area 60. & diuisa maiore diametro AC, per minorem BD, Quotiens est $1\frac{1}{4}$. Quæruntur diametri, & latus.*

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diameter BD, 1 ℞, ideoq. maior diameter AC, $1\frac{1}{4}$ ℞. vt diuisa per BD, faciat Quotientem $1\frac{1}{4}$. Ex BD, 1 ℞, in AC, $1\frac{1}{4}$ ℞, fit numerus $\frac{5}{4}$ ℥. qui æqualis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas inter 5 ℥, & 480. Diuisis igitur 480. per 5. fiet 1 ℥, 96. & 1 ℞, √℥ 96. pro diametro BD, quæ posita fuit 1 ℞. At vero AC, posita $1\frac{1}{4}$ ℞. erit √℥ 150. quia √℥ 96. multiplicata per $\frac{5}{4}$. id est, per √℥ $\frac{25}{16}$. facit √℥ 150. Vel etiam, si ad √℥ 96. adijciatur $\frac{1}{4}$. nimirum √℥ 6. fit summa √℥ 150. Atque ita inuentæ sunt diametri BD, AC, √℥ 96. & √℥ 150. quod probatur. quia ex √℥ 24. semisse diametri BD, in √℥ 150. diametrum AC, fit area Rhombi √℥ 3600. hoc est, 60. Deinde quia AE, EB, sunt √℥ $37\frac{1}{2}$. & √℥ 24.[b] facient earum quadrata $37\frac{1}{2}$. & 24. summam $61\frac{1}{2}$. æqualem quadrato lateris AB: proptereaq. latus AB, erit √℥ $61\frac{1}{2}$.

b 47. primi.

## *APPENDIX.*

*HAEC sunt, studiose Lector, quæ de regula Algebræ, eiusque explicatione scribenda mihi visa sunt: qui plura requirit, ab alijs huius regulæ scriptoribus petat. Non grauabor tamen appendicis loco subiungere quatuor ænigmata Ptolemæi ex libro primo Epigrammatum græcorum desumpta, & quintum aliud Euclidis, ascriptis ipsis Epigrammatibus græcis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, sed vt res clarior fieret, expresso illorum sensu dumtaxat. Aenigmata Ptolemæi, sunt hæc.*

---

I. **1. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM illa auri talenta appendat.**

Πρῶτον.

Παλλὰς ἐγὼ τελέθω σφυρήλατος, αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δῶρον ἀοιδοπόλων.
Ἥμισυ μὲν χρυσοῖο χαρίσιος, ὀγδοάτην δὲ
Θέσπις, καὶ δεκάτην μοῖραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστὴν Θεμίσων, τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἐννέα, καὶ τέχνη, δῶρον Ἀριστοδίκου.

*PALLAS ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio versantur Poetices. Dimidium quidem auri partem contulit Charisius: Octauam vero Thespis: Decimam dehinc Solon: Et vigesimam Themison: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quæ artifici debebatur, contulit Aristodicus.*

*Quæritur de toto pondere statuæ, & quot quisque talenta contulerit.*

PONATVR pondus statuæ 1 ℞ talentorum auri. Ergo Charisius contulit $\frac{1}{2}$ ℞ tal. Thespis $\frac{1}{8}$ ℞. Solon $\frac{1}{10}$ ℞. Themison $\frac{1}{20}$ ℞, & Aristodicus 9. talenta, quæ omnes partes conficiunt $\frac{31}{40}$ ℞ + 9. summam æqualem 1 ℞. Ablatis igitur $\frac{31}{40}$ ℞ vtrinque, æqualitas erit inter 9. & $\frac{9}{40}$ ℞. Diuisis igitur 9 per $\frac{9}{40}$, fiet 1 ℞. 40. Atque tot talentorum fuit statua. Charisius ergo contulit 20. talenta, nimirum semissem totius ponderis. Thespis 5. talenta, octauam scilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem decimam. Themison denique 2. talenta, partem videlicet vigesimam. quæ omnes partes cum 9. talentis, quæ contulit Aristodicus, conficiunt 40. talenta.

---

## 2. DE AVGEAE ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint. II.

Ἀδέσποτον.

Αὐγείην ἐρέεινε μέγα σθένος Ἀλκείδαο,
Πληθὺν βουκολίων διζήμενος, ὃς δ' ἀπάμειπτο,
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ τῶνδε,
Μοίρῃ δ' ὀγδοάτῃ πάγχον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτῃ δ' ἀπάνευθε Ταραξίπποιο παρ' ὅρον,
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἤλιδα δῖαν ἐεικοστῇ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τριηκοστὴν προλέλοιπα,
Λοιπὰς δ' αὖ λεύσσεις ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

*AVGEAM interrogauit generosus Hercules de multitudine armentorum, cui ille respondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pascitur: octaua autem circa Saturni collem: cæterum duodecima procul hinc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigesima eorum* *pars circa Elidem pascitur: trigesimam vero in Arcadia ego reliqui: Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipse.*

*Quaestio est de numero boum, & quotnam in singulis locis fuerint.*

PONATVR numerus boum 1 ℞. Ergo iuxta fluuium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}$ ℞ boum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{8}$ ℞. At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{12}$ ℞. Circa vero Elidem montem $\frac{1}{20}$ ℞. Et in Arcadia $\frac{1}{30}$ ℞: & apud Augeam 50. boues. quae omnes partes conficiunt $\frac{19}{24}$ ℞ + 50. summam aequalem 1 ℞. Ablatis igitur $\frac{19}{24}$ ℞ vtrobique, aequalitas erit inter 50. & $\frac{5}{24}$ ℞. Diuisis ergo 50. per $\frac{5}{24}$. fiet 1 ℞. 240. pro numero omnium boum. quorum semissis 120. fuit circa fluuium Alpheum: & 30. boues nimirum $\frac{1}{8}$. circa collem Saturni: Et $\frac{1}{12}$. nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$. in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{30}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

---

III. 3. LEONIS AENEI CANALES.

Τρίτον.

Χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιά
Καὶ στόμα σὺν δὲ θέναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει δὲ κρητῆρα δύ' ἤμασι δεξιὸν ὄμμα,
Καὶ λαιὸν τρισσοῖς, καὶ πισύροισι θέναρ.
Ἄρκιον ἓξ ὥραις πλῆσαι στόμα, σὺν δ' ἅμα πάντα,
Καὶ στόμα, καὶ γλῆναι, καὶ θέναρ, εἰπὲ πόσον;

*AENEVS ego sum Leo: canales vero mihi sunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: sinister vero tribus: Et palma quatuor diebus: Porro sex horis os implere eum potest. Haec igitur simul omnia & os, & oculi, & palma, dic quanto tempore eundem craterem impleant?*

PONATVR pro tempore 1 ℞, horarum. atque dicatur.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|---|---|---|---|
| 48, 72, 96, 6 | 1 | 1 ℞? | $\frac{1}{48}$ ℞, $\frac{1}{72}$ ℞, $\frac{1}{96}$ ℞, $\frac{1}{6}$ ℞ |

Si 48.

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 1℞ horarum implebitur $\frac{1}{48}$ ℞ Crateris: & sic de reliquis, vt in regula trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{61}{288}$ ℞. vnius Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{61}{288}$. fiet 1℞. $\frac{288}{61}$. hoc est, Horæ 4 $\frac{44}{61}$. quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|---|---|---|---|
| 48 <br> 72 <br> 96 <br> 6 | 1 | 4 $\frac{44}{61}$? | $\frac{6}{61}$ <br> $\frac{4}{61}$ <br> $\frac{3}{61}$ <br> $\frac{48}{61}$ |

Nam si oculus dexter 48. horis implet 1. Craterem, horis 4 $\frac{44}{61}$. implebunt $\frac{6}{61}$. Crateris vnius, &c. atque omnes istæ partes Crateris conficiunt vnam craterem.

## 4. DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, ac matris ipsorum Antiopes. IIII.

Τέταρτον.

Ἀμφω μὲν ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἕλκομεν,
Ζῆθός τε χ᾽ ὡ ξύναιμος, ἢν δ᾽ ἐμοῦ λάβῃς
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τοῦδ᾽ Ἀμφίονος
Ἑξ πάντ᾽ ἀνευρὼν μητρὸς εὑρήσεις σταθμόν.

*AMBO quidem nos viginti minas appendimus, Zethus pariter, & meus consanguineus. At si de meis minis tertiam partem: minarum vero Amphionis quartam sumpseris, sex in summa inuentis, matris pondus reperies. Quæstio est, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius consanguineus appenderit.*

PONE pro Zetho 1℞ minarum: ideoq. pro Amphione minas 20 — 1℞. faciesq. tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$ ℞, & quartam partem Amphionis 5 — $\frac{1}{4}$ ℞, quæ summam faciunt 5 + $\frac{1}{12}$ ℞, æqualem 6. Ablatis igitur 5. vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{12}$ ℞. & 1. Diuisa ergo 1. per $\frac{1}{12}$, fiet 1℞. 12. atque tot minarum fuit statua Zethi. Amphionis vero 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

5. EV-

## V. 5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Εὐκλείδου Γεωμετρικόν.

Ἡμίονος καὶ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον·
Αὐτὰρ ὄνος στενάχιζεν ἐπ' ἄχθεϊ φορτίου οἴου.
Τὴν δὲ βαρυστενάχουσαν ἰδοῦσ' ἐρέεινεν ἐκείνη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι ἠΰτε κούρη:
Εἰ μέτρον ἓν μοι δοίης: διπλάσιον σέθεν ἦρα.
Εἰ δ' ἓν ἀντιλάβοις, πάντως ἰσότητα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέτρον ἄριστε Γεωμετρίης ἐπίστορ.

*IBANT Mulus, & Asina vinum portantes: Asina autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re visa, Mulus grauiter ingemiscentem Asinam sic interrogauit. Mater cur ita lamentaris, cur puellæ instar lacrimas fundis? Mensuram mihi vnam si dederis, duplo, quam tu, plus sustulero: sin vero tu à me vnam acceperis, idem planè, quod ego, pondus feres. Mensuram itaque peritissime Geometer dicas volo.*

### Alia versio.

*Mula, Asinæque duos imponit seruulus vtres*
*Impletos vino, segnemque vt vidit Asellam*
*Pondere defessam vestigia figere tarda.*
*Mula rogat: Quid chara parens cunctare, gemisque?*
*Vnam ex vtre tuo mensuram si mihi reddas,*
*Duplum oneris tunc ipsa feram: Sed si tibi tradam*
*Vnam mensuram, fient æqualia vtrique*
*Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.*

### Alia versio.

*Mulus portabat vinum comitatus Asella.*
*Hæc oneris quæritur pondera vasta sui.*
*Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,*
*Cur adeo lacbrymis lumina mæsta fluunt?*

Molli-

*Mollities teneras, mater, decet illa puellas,*
*Quas premit insuetus, debilitatque labor.*
*Unam mensuram, si nostros fundis in utres,*
*Ipse tui vini pondera dupla feram:*
*Sin unam contra nostro de fasce leuabis*
*Partem, tunc æquum pondus uterque feret.*
*Dic mihi mensuras, ô docte Geometer istas,*
*Non aliter Phœbi nomine dignus eris.*

PONE pro mensuris muli 1 ℞. ac proinde pro mensuris asinæ $\frac{1}{2}$ ℞ + 1 $\frac{1}{2}$. Ita enim si mulo dederit 1. mensuram, habebit mulus 1 ℞ + 1. quod pondus duplum erit reliquo ponderi asinæ, nimirum $\frac{1}{2}$ ℞ + $\frac{1}{2}$. At si mulus asinæ det 1. mensuram, erit reliquum pondus muli 1 ℞ — 1. æquale ponderi asinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}$ ℞ + 2 $\frac{1}{2}$. Addatur 1. vtrobique, fietq. æquatio inter 1 ℞. & $\frac{1}{2}$ ℞ + 3 $\frac{1}{2}$. Ablataq. $\frac{1}{2}$ ℞. vtrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}$ ℞. & 3 $\frac{1}{2}$. Diuisis igitur 3 $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 ℞ $\frac{14}{2}$. hoc est, 7. pro mensuris muli. Asina ergo habens $\frac{1}{2}$ ℞ + 1 $\frac{1}{2}$. portabit mensuras 3 $\frac{1}{2}$. & 1 $\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod probatur. Nam si mulo det asina 1. mensuram, habebit mulus 8. mensuras, quæ duplæ sunt 4. mensurarum, quæ asinæ supersunt. At si mulus det asinæ mensuram 1. portabit vterque 6. mensuras.

FINIS.

# REGISTRVM.

a b c d.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R
S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll
Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx
Yy Zz.

Aaa Bbb.

Omnes ſunt Duerniones, præter
d, Ternionem.

ROMÆ, Apud Bartholomæum Zannettum.
Anno M. DC. VIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

... caricato il lavoro ogni giorno fa ... 19 ...

... giorni ... 

... il primo.

giorni 4 $\frac{1}{3}$

Parma

[illegible]

o 3 $\frac{1}{3}$

o ^ $\frac{1}{3}$

67 | 10

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1369990000

[illegible]

[illegible]