

EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

Comitato scientifico:

Simonetta Bassi
Università di Pisa

Umberto Bottazzini
Università Statale di Milano

Michele Ciliberto
Scuola Normale Superiore di Pisa

Giuseppe Da Prato
Scuola Normale Superiore di Pisa

Paolo Freguglia
Università di L'Aquila

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore di Pisa, Centro di ricerca matematica "Ennio De Giorgi", Presidente

Angelo Guerreggio
Università Bocconi di Milano

Michele Marini
Fourweb Service srl

Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore di Pisa, tesoriere

Massimo Mugnai
Scuola Normale Superiore di Pisa

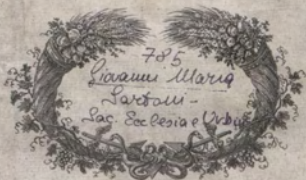
Pietro Nastasi
Università di Palermo

Luigi Pepe
Università di Ferrara

1871
 1872
 1873
 1874
 1875
 1876
 1877
 1878
 1879
 1880
 1881
 1882
 1883
 1884
 1885
 1886
 1887
 1888
 1889
 1890
 1891
 1892
 1893
 1894
 1895
 1896
 1897
 1898
 1899
 1900

$$\begin{array}{r} 9 \\ 16 \overline{) 144} \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$$

Aug: 10th 1811



PCSAFI

3-97

$\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$

$6 \frac{1}{2}$

$60 \frac{1}{2}$

54

404

4

1925

1034

300

49

12

A. G. P. M. L. G. A.
A. G. P. M. L. G. A.
A. G. P. M. L. G. A. B. M. L. G. A.

ALGE

$$\frac{£2}{482} 4 \frac{1}{2}$$



1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31

$$\begin{array}{r} 34 \frac{1}{4} \\ 32 \frac{1}{4} \\ 12 \frac{1}{4} \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \frac{1}{2} \\ 12 \frac{1}{2} \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \frac{1}{2} \\ 12 \frac{1}{2} \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \frac{1}{2} \\ 12 \frac{1}{2} \\ \hline 25 \end{array}$$

$$46 \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 34 \frac{1}{4} \\ 32 \frac{1}{4} \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \frac{1}{4} \\ 32 \frac{1}{4} \\ \hline 2 \end{array}$$

$$42 \frac{1}{2}$$

Lucas Fantì Sac. Theo. Doct.
Primus Presbyter
Ecclesiæ Venetæ S. Mariæ Jubenitorum
D. D.
orate pro me.

ALGEBRA
CHRISTOPHORI
CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV.



ROMAE,
Apud Bartholomæum Zannettum.
Anno M. DC. VIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

ALGEBRA
CHRISTOPHORI
CLAVDIVS AQUAVIVA
Societatis Iesu Præpositus Generalis.

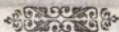
Cum opus hoc, cui titulus est Algebra, P. Christophori Clauij Bambergensis, Tres eiusdem Societatis Theologi, quibus id commisit, recognouerint, ac in lucem edi posse probauerint; facultatem damus, vt typis mandetur, si Reuerendissimo D. Vicegerenti; & Reuerendissimo P. Magistro Sacri Palatii ita videbitur. In cuius rei fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ Kalendis Octobris 1607.

Claudius Aquauina.

Imprimatur si videbitur R.P.M. Sac. Palatii Apostolici.
Cesar Fidelis Vicefg.

Imprimatur
Frater Augustinus Galaminus Sac. Pal. Apost. Magister.

ILL.^{MO} ET EXCELL.^{MO} D.
DON IOANNI
DE GVEVARA
DVCI BOVINI
REGNI NEAPOLITANI
MAGNO SENISCALLO.



Christophorus Clavius è Societate IESV.

S. P. D.



PLENDIDA sunt, & magnificis amplificata titulis, Dux Excellentissime, quæ de animorū nostrorum nobilitate, ac præstantia circumferuntur: sed nullum profecto luculentius, nullum, si naturam spectes, ad utilitatem, vel ad voluptatem iucundius, ab uniuersitatis artifice mortales obtinere beneficium, quàm quod sibi bonarum artium, ac disciplinarum ad rerum naturam pertinentiū ornamenta comparare possunt. Has inter facultates, quarū

praecipua laus in veri vestigatione consistit, non
postremae notae Mathematicas esse is neget, qui
nullum sibi putet esse cum veritate commercium.
Ex Mathematicis vero, quae quasi in patritias di-
stributae familias, aliae aliò euasere, Arithmetica
tanto caeteris praestat, quanto eius natura syn-
cerior, veritas explicatiores esse iudicatur. Quid
enim illa vel ad ingenij subtilitatem acutius, vel
ad certitudinem firmitus excogitari potest? quid
est, quod Arithmetice, & illis quidem pauculis
notis, addendo, subtrahendo, multiplicando, di-
uidendoque numeros progressionum Geometri-
carum ab vnitae incipientium (quam artem pa-
trio vocabulo Algebram Arabes nominarunt)
confici non possit? Quoties huius disciplinae ar-
tificio exterriti etiam acutiores ita sunt, ut nullum
putarent tacitum pectoris arcanum esse, quod
numerorum iudicium effugiat, fallat Arithme-
ticorum ingenia. Huius in facultatis sinum, ta-
met si semper, in hac tamen extrema senectute
mea quasi contento cursu, tamquam in portum
ita me recepi, ut in eius placidissimo complexu
omne imbecillae aetatis fastidium leuauerim, atque
ob incredibilem eius varietatem, voluptatemque
molestias omnes temperauerim. Quamuis vero

extiterint non pauci tum ex antiquis, tum ex recentioribus, qui aliqua cum laude huius disciplinae excoluerunt cognitionē, operae tamen pretium fore iudicaui, si quae illi obscurè, implicatè, confusè scripserunt, aperirem ipse, enodarè, suis locis exactè digererem. Itaque spissum sane, & densum opus, summisque difficultatibus inuolutum sum senex aggressus, ut eorum utilitati consulerem, quorum ingenia, dummodo prius non leuiter Arithmeticis sint regulis exercitata, absolutam Algebrae cognitionem affectant. Libellum itaque hunc, qua potui diligentia, conscripsi, quem iam improbae lucis iudicium subeuntem cuius potius clientelae committerè, Dux Illustrissime, quàm tuae, cuius generis amplissimi nobilitatem non longam solum auorum series tot magnificis nobilitata monumentis, sed propria etiam laus omni virtutum genere spectabilis commendat? Accedit ad hoc incredibile tua in me humanitas, qua me tunc adeo complexus es, cum te Romae, ac Illustrissimum Parentem tuū Innicum alloquutus sum, qui praeclarissimo ad imitationem, admirationemque posteritatis exemplo, rebus omnibus humanis, honoribus, potentia, opibus, studio paupertatis

cum

cum religiosae vitae conditione commutatis, eo
velificauit, vbi ne leuis quidem ambitiosae glo-
riolae aura animi fluctus commouente, ea conse-
qui potest, quae nulla temporum volubilitate la-
befactantur. Quod si aliquid huic addendū est,
hoc addam (mitto tua in me, ac Mathematicos
omnes, tum beneuolentiam, tum liberalitatem)
quod nimirum hoc grati animi monumentum
tua sibi vindicat in nostrum ordinē vniuersum
munificentia, qua Bouini ad adolescentium ex-
colenda, qua ad pietatem, qua ad litterarum
studia, ingenia, Collegium à fundamentis exci-
tasti. Complectere igitur qua soles clementia ac
humanitate tenue hoc munusculum, in quo si
rei amplitudinem, ac praestantiam, certe animi
voluntatem non desiderabis. Ipse vero eam tibi
à Deo Optimo Maximo precabor foelicitatem,
quae votis tuis, nostrisque ex omni parte re-
spondeat. Vale.

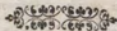
ROMAE IDIBVS MARTII. M. DC. VIII.

I N D E X

CAPITVM ET RERVM,

Q V A E I N I I S

CONTINENTVR.



PROOEMIUM DE ALGEBRAE praestantia .

Scopus Algebrae .

pag. 1

CAPVT I.

De Inuentore Algebrae , ac nomine .



<i>ARIA nomina Algebrae .</i>	<i>4</i>
<i>Intentio auctoris .</i>	<i>5</i>
<i>Algorithmus quid .</i>	<i>6</i>
<i>Tria genera numerorum in Algebrae tractatorum .</i>	<i>Ibidem .</i>

CAPVT II.

De Numeris Cossicis, siue Denominatis .

<i>Numeri Cossici qui sint .</i>	<i>7</i>
<i>Cur numeros proportionis Geometrica dicamus Cossicos .</i>	<i>Ibid .</i>
<i>Explicatio characterum Cossicorum .</i>	<i>Ibid .</i>
<i>Quomodo series naturalis numerorum numeros Cossicos progressionis Geometrica exponat .</i>	<i>9</i>
<i>Quae proportionales inter unitatem , & quilibet numerum progressionis Geometricae intercipiantur .</i>	<i>Ibid .</i>
<i>Cuius characteris exponent signatur ex mutua multiplicatione, diuisioneque duorum exponentium .</i>	<i>10</i>
<i>Definitio cuiusvisq. numeri Cossici .</i>	<i>Ibid .</i>

Additio, & subtractio idem faciunt in serie naturalis numerorum, quod multiplicatio, & diuisio in progressionis Geometricae .

11

Quomodo omnes numeri progressionis Geometricae sint denominandi .

12

Numerum compositum in suas partes incompositas resolueret, quae ipsam mutua sua multiplicatione producant .

Ibid .

Quem locum progressionis Geometricae occupet quilibet numerus Cossicus .

14

Quomodo alij numero progressionis Geometricae denominent .

Ibid .

CAPVT III.

De Numeratione Cossicorum numerorum .

<i>Explicatio signorum + & — .</i>	<i>15</i>
<i>Numeri Cossici compositi , Diminuti, & mixti quae .</i>	<i>Ibid .</i>
<i>Radices surda quo pacto signentur .</i>	<i>16</i>
<i>Signum radicale quid .</i>	<i>Ibid .</i>

CAPVT IIII.

De Additione , & Subtractione numerorum Cossicorum .

<i>Additio Cossicorum numerorum diuersarum denominationum .</i>	<i>16</i>
<i>Additio numerorum Cossicorum eiusdem appellationis .</i>	<i>Ibid .</i>
<i>Sub .</i>	

I N D E X.

<i>Subtractio numerorum Cossicorum diuersarum appellationum.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Subtractio numerorum Cossicorum eiusdem denominationis.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Additio, & subtractio Cossicorum numerorum compositorum, &c.</i>	17
<i>Quid agendum, quando unus numerus habet signum +, & alter signum — in additione, & subtractione.</i>	18
<i>Quid agendum in subtractione, quando uterque numerus habet signum +, vel —, & numeri propositi ponuntur.</i>	20
<i>Dua regula observanda in additione, & subtractione.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Probatio additionis, & subtractionis.</i>	21

CAPVT V. De Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.

<i>Multiplicatio, & Diuisio numeri Cossici per absolutum.</i>	21
<i>Multiplicatio, & Diuisio numeri Cossici per Cossicum numerum.</i>	22
<i>Demonstratio multiplicationis, & diuisionis numerorum Cossicorum.</i>	23
<i>Multiplicatio, & Diuisio numeri Cossici compositi per absolutum, vel per Cossicum tam simplicem, quam compositum.</i>	24
<i>Regula in multiplicatione, & diuisione numerorum Cossicorum observanda.</i>	25
<i>Quando non possit fieri diuisio.</i>	26
<i>Probatio multiplicationis, & diuisionis.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Quod eadem signa producant signum +, diuersa autem signum —.</i>	27

CAPVT VI. De numeris fictis, siue minoribus, quam nihil.

<i>Numeri ficti, siue minores, quam nihil.</i>	28
<i>Vnum, & eundem numerum habere possent duas radices quadratas inaequales.</i>	30

CAPVT VII. De Fractionibus numerorum Cossicorum.

<i>Numeratio fractionum Cossicarum.</i>	31
<i>Abbreuiatio fractionum Cossicarum.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Demonstratio abbreuiationis fractionum Cossicarum.</i>	32
<i>Reductio fractionum Cossicarum.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Demonstratio reductionis fractionum Cossicarum.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Additio, subtractio, multiplicatio, & diuisio fractionum Cossicarum.</i>	33
<i>Compendia quadam fractionum.</i>	34

CAPVT VIII. De Regula Algebrae.

<i>Regula Algebrae.</i>	36
<i>In quo consistat artificium regulae Algebrae.</i>	37
<i>Aequatio quid.</i>	<i>ibid.</i>

CAPVT IX. De Aequationum varietate.

<i>Variae permutationes aequationum.</i>	40
<i>Praeceptum variandi quaecumque aequationem.</i>	<i>ibid.</i>

CAPVT X. De reductione Aequationum.

<i>Variae aequationes reducenda.</i>	41
<i>Aequationes ita reducenda sunt, ut maior character solitarius in una parte ponatur, &c.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Reductiones variarum aequationum.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Primum praeceptum reductionis.</i>	42
<i>Secundum praeceptum reductionis.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Summa reductionis.</i>	<i>ibid.</i>
<i>Securior est reductio sine duobus praeceptis praedictis.</i>	43
<i>Reductio aequationum inter minutias, & inter</i>	<i>inter</i>

IX NI DI EX.

inter numeros Cossicos irracionales, & numeros absolutos inuentarium, *ibid.*
 Demonstratio reductionis aequationum inter minutias. *ibid.*
 Characteres abbreviandi sunt, ut habeatur numerus absolutus in una parte aequationis. 44
 Reducenda est aequatio per diuisionem, ut numerus maioris characteris solitarius positus sit unitas. *ibid.*

CAPVT XI.

De diuisione, quam praecipit Regula Algebrae.

Explicatio plenior diuisionis, quam Regula Algebrae praecipit. 45

CAPVT XII.

De extractione radicum, cuius mentionem facit Regula Algebrae.

Quando Quotiens indicat pretium Radicis. 46
 Quando & quae radix sit extrahenda, quando aliter numerorum aequationis est numerus absolutus. 47
 Quenam radix sit extrahenda, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se aequantur, quorum neuter est numerus absolutus. *ibid.*
 Qualis radix sit extrahenda, etiam si characteres non abbreviuntur. *ibid.*
 Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus. *ibid.*
 Qui numeri Cossici compositi habeant radices. 48
 Qui numeri Cossici compositi non habeant radices. 49
 Extractio radicum quadrata ex Cossico numero composito, vel diminuto. 50
 Qui numeri Cossici habeant duplicem radicem. 51
 Quo pacto tum maior, tum minor radix inueniatur. *ibid.*

Demonstratio extractionis radicum ex Cossico numero composito, diminutis. 52
 Demonstratio alia extractionis radicum ex numeris Cossicis composito, diminutis. 53
 Alius modus extrahendi radicem quadratam ex numero Cossico composito, vel diminuto. 58
 Commoditas huius posterioris modi extractionis. 59
 Demonstratio alterius huiusmodi extractionis. *ibid.*
 Extractio radicum zenfinesica, zenfubica, &c. 61
 Exempla duo, in quibus occurrunt radices surda. 62
 Quando aliquando quaestio aliqua non soluitur, culpa in Arithmetico, non autem in Algebra transferenda est. 64

CAPVT XIII.

De multitudine Regularum Algebrae, quam alij auctores introducunt.

Inter quos numeros alij potissimum aequationes obseruant. 65
 Tres simplices aequationes. 66
 Tres compositae aequationes. *ibid.*
 Quando aequatio est inter x & $2x$. *ibid.*
 Quando aequatio est inter $2x$ & N . *ibid.*
 Quando aequatio est inter x & N . *ibid.*
 Quando aequatio est inter $x + 2x$ & N . *ibid.*
 Quando aequatio est inter x & $2x + N$. 67
 Quando aequatio est inter $x + N$ & $2x$. *ibid.*
 Quando in aequatione reperiuntur plures, paucioresve zenfi. *ibid.*
 Quo pacto alia aequationes ad 6. superiores regulas reuocentur. *ibid.*
 Praesentiorum esse unicam nostram regulam Algebrae sex aliorum regulas. 68
 Aequatio simplex, & composita. *ibid.*

Quadrata, & cubi radicum numerorum compositorum. *ibid.*

Multiplicatio radicum numeri compositi in se. *ibid.*

Multiplicatio radicum numerorum compositorum. *ibid.*

Multiplicatio radicum numeri compositi, una cum radice numeri diminuti similis in seipsum. *ibid.*

Summa ex radice numeri compositi, & radice numeri diminuti similis collecta. *ibid.*

Divisio radicum numerorum compositorum. *ibid.*

Additio radicum numerorum compositorum. *ibid.*

Subtractio radicum numerorum compositorum. *ibid.*

CAPVT XXV.

De minutijs numerorum Irrationalium, ac de eundem Algorithmo.

Numeratio minutiarum irrationalium. *ibid.*

Appreciatio minutiarum irrationalium. *ibid.*

Additio, & subtractio minutiarum irrationalium. *ibid.*

Multiplicatio, ac divisio minutiarum irrationalium. *ibid.*

CAPVT XXVI.

De numeris Irrationalibus Coficis, siue Denominatis, una cum eorum Algorithmo.

Numeri Cofici irrationales, qui. *ibid.*

Additio, & subtractio numerorum Coficorum irrationalium. *ibid.*

Reductio signorum radicalium in numeris Coficis irrationalibus. *ibid.*

Multiplicatio, & divisio numerorum Coficorum irrationalium. *ibid.*

Quando post reductionem signa Cofica abbreviari possint, & quando non. *ibid.*

Aequatio inter numerum Coficum irrationalem, & numerum absolutum. *ibid.*
Quando huiusmodi aequatio impossibilis est. *ibid.*

CAPVT XXVII.

De Binomijis, atque Apotomis, Residuivse.

Binomium, & Residuum: Item Trinomium, & Quatrinomium apud scriptores, quid. *ibid.*

Binomium, & Residuum secundum Euclidem, quid. *ibid.*

Non omnes numerum, qui gerit signum, esse irrationalem. *ibid.*

Superficies, & linea media. *ibid.*

Binomia sex, & eorum definitio. *ibid.*

Apotoma sex, & eorum generatio ex Binomijis. *ibid.*

Sex Binomiorum, & Apotomiarum inuentio. *ibid.*

Inuentio Binomij, vel Apotoma cuiusvis speciei, ex dato Binomio, vel Apotoma eiusdem speciei. *ibid.*

Binomium, vel Residuum propositum, quodnam sit ex 6. speciebus, indicare. *ibid.*

Qua ratione in circulo circuli 6. Binomia & Apotoma reperiantur. *ibid.*

CAPVT XXVIII.

De extractione radicum ex Binomijis, & Apotomis. Vbi obiter de alijs lineis irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat.

Cui nonnulli dicant, non omnia Binomia habere radices. *ibid.*

Omnia Binomia secundum Euclidem habere radices. *ibid.*

Radices sex Binomiorum quales linea, vel numeri irrationales sint. *ibid.*

Radices sex Apotomiarum quales linea, vel numeri irrationales sint. *ibid.*

Ex binis medijs primis. *ibid.*

Ex si-

IX NI DI EXI.

Ex Bini Medij secunda, *ibid.*

Linea maior. *ibid.*

Rationale, ac Medium potens. *ibid.*

Bina media potens. 149

Media Apotoma prima. *ibid.*

Media Apotoma secunda. *ibid.*

Linea Minor. *ibid.*

Reliqua cum Rationali Medium totum efficiens. *ibid.*

Reliqua cum Medio Medium totum efficiens. *ibid.*

Linea irrationales 23. apud Euclidē. 150

Extrahio radicit ex dato Binomio, aut Residuo, tribus modis. *ibid.*

Radix Binomij primi est Binomium: Et radix Residui primi est Residuum. *ibid.*

Radix Binomij secundi est Linea ex Bini Medij prima: Et radix Residui secundi est Media Apotoma prima. 151

Radix Binomij tertij est Linea ex Bini Medij secunda: Et radix Residui tertij est Media Apotoma secunda. *ibid.*

Radix Binomij quarti est Linea Maior: Et radix Residui quarti est Linea Minor. 152

Duo incommensurabilia facere possunt summam Rationalem. *ibid.*

Radix Binomij quinti est Linea Rationale, ac Medium potens: Et radix Residui quinti est Linea cum Rationali Medium totum efficiens. 153

Duo incommensurabilia inter se multiplicata facere possunt numerum Rationalem. *ibid.*

Radix Binomij sexti est Linea Bina Media: Et radix Residui sexti est Linea cum Medio Medium totum efficiens. 154

Differentia quadratorum nominum radicit exhibet Binomij, & Residui, quia. *ibid.*

Pulchra ratio multiplicandi Binomij, vel Residui in se. 155

mero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui dividendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri dividendi. 156

Alia via extrahenda radicit ex dato Binomio, vel Residuo. 157

SCHOLIUM.

Quordo servatur in enigmatibus per Algebram solvendis. 160

CAPVT XXIX.

Enigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur.

1 Datum numerum quemcumque dividere in duas partes se mutuo superantes dato excessu quocumque. 163

SCHOLIUM.

Disquis numeri Cossici in duas partes datum excessum habentes. 163

Disquis numeri absoluti in duas partes dato excessu sine Algebra. 164

2 Duos numeros invenire, quorum excessus sit datum quicquid numerus, & eorum summa constet quolibet numerum datum. *ibid.*

3 Datum numerum quemlibet in duas partes dividere, quæ inter se multiplicata signant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcumque. *ibid.*

SCHOLIUM.

Datum numerum in duas partes in data proportionē, quæ inter se multiplicata signant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionē habeat eandem datam. 165

4 Duos

LEMMA.

Datum numerum in duas partes secare, ut numerus, qui ex mutuo eorum multiplicatione produciatur, æqualis sit dato num-

4. Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati producant numerum, qui ad quadratum minoris numeri proportionem habeat datam: simul vero additi faciant summam propositam quamcumque. *ibid.*
5. Duos numeros inuenire in data proportionem, quorum maior si subtrahatur a dato numero, & minor a minore alio dato numero, reliqui fiant duo numeri aequales, quando id fieri potest. 166
6. Duos numeros in proportionem data inuenire, ita ut maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, efficiantur duo numeri in proportionem quacunque data, quando id fieri potest. *ibid.*
7. Numerum inuenire, qui additus ad quosvis duos numeros datos faciat duos numeros in quacunque proportionem, qua minor sit proportionem duorum numerorum propositorum. 167
8. Numerum inuenire, qui ablatns ex quibilibet duobus numeris datis relinquat duos numeros in quacunque proportionem, qua maior sit proportionem duorum numerorum propositorum. 168
9. Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere. 169
10. Propositum numerum in duas partes secare, ut maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contingat datum quocunque numerum. *ibid.*
11. Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data. 170
12. Datum numerum in duos partiti, ita ut pars aliqua totius data cum parte alia aliqua alterius data faciat datum quocunque numerum, qui positus sit inter partes nominatas dati numeri diuidendi. *ibid.*
13. Datum numerum in duos partiti, ita ut prior pars aliqua data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliqua totius numeri propositi eiusdem nominis cum parte aliqua prioris numeri. 171
14. Numerum inuenire, a quo si auferatur duo dati numeri, residuum minoris ad maioris residuum datum habeat proportionem. *ibid.*
15. Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto a maiore, summa ad residuum, vel residuum ad summam habeat proportionem datam minorem ea, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore, summa ad residuum proportionem habeat datam maiorem ea, qua inter datos numeros inuenitur. 172
16. Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem si adiciatur alter duorum, & ab eodem alter detrahatur, summa ad residuum proportionem habeat datam. 173
17. Propositum numerum in duos diuidere, ita ut maior numerus prima diuisione ad minorem secunda diuisione habeat datam proportionem: Item maior secunda diuisione ad minorem prima diuisione, datam quoque habeat proportionem quamcumque. *ibid.*
18. Datum numerum in duos diuidere, ita ut maior pars prima diuisione ad minorem secunda datam habeat proportionem: Item maior secunda diuisione ad minorem tertia: Ac denique, maior tertia diuisione ad minorem prima. 174
19. Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent numerum in data proportionem ad eorum summam. 175
20. Dato numero quolibet, inuenire alium, ita ut ex hoc in illum procreetur numerum in data proportionem ad eorum summam: ita tamen, ut denominator proportionis dato numero minor sit. *ibid.*
21. Inuenire duos numeros in data proportionem, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportionem ad eorum summam. *ibid.*
22. Inuenire duos numeros, quarum summa sit

fit datus quilibet numerus, & posteriore
diuiso per priorem, Quotiens datus sit
etiam numerus quilibet.

VEL

Datum numerum in duos partiri, & poste-
riore diuiso per priorem, Quotiens sit qui-
libet numerus datus. 176

23 Datum numerum in quinque partes
secare, & secunda primam contineat quo-
tiescunque libuerit, & praeerea quolibet
unitates: Tertia secundam, quotiescun-
que etiam libuerit, ac praeterea quotius
unitates: Quarta tertia sit multiplex
data, minus quotius unitates: Ac tan-
dem quinta a multiplici data quarta de-
ficiat quolibet etiam unitatibus, quan-
do id fieri potest. 177

24 Datis duobus numeris, alium inueni-
re, qui cum minore numerum faciat,
aquaalem ei, quem pars aliquota qua-
cunque inuenit numeri cum maiore effi-
cit. 178

25 Inuenire duos numeros in data pro-
portione, ut tantum fiat, minore detracto
ex maiore, quantum maiore diuiso per
minorem. 178

26 Inuenire duos numeros in data pro-
portione, quorum summa equalis sit nu-
mero ex eorum multiplicatione inter se
producto. 179

27 Duos numeros inuenire in dato excef-
su, ita ut eorum quadrati datum etiam
habeant excessum, qui tamen maior sit
quadrato dati excessus numerorum. 180

SCHOLIUM.

Idem enigma sine Algebra soluere, etiam si
excessus datus quadratorum sit quilibet
numerus Cosus datus. 179

28 Datis duobus numeris, alios duos in
data proportionem inuenire, quorum maior
ad minorem datorum additus tantum faciat,
quantum minor ad eundem additus. 180

29 Dato numero, alium inuenire, qui in
datum ductus tantum faciat, quantum
ad eundem additus. 181

30 Dato numero, alium inuenire, & eius
pars aliquota data in datum numerum
ducta tantum faciat, quantum totus nu-
merus inuentus ad eundem datum nu-
merum additus. 180

31 Datum numerum in duos partiri, ita
ut minor sit maioris pars aliquota data,
vel partes aliquota datae, & continet
in super datum alium numerum, se pla-
cet. 181

32 Duos numeros, inuenire, ita ut si nume-
rus productus ex eorum multiplicatione
diuidatur per eorundem differentiam,
Quotiens fiat datus quicunque nume-
rus. 181

33 Numerum inuenire, cuius duarum
partium datarum quadrati summam
constituant, quia ad aliam partem datam
eiusdem numeri inueniendi proportionem
habeat datam quancunque. 182

34 Numerum inuenire, qui in se ductus,
& productus numerus in datum quem-
vis numerum faciat numerum in data
proportionem ad cubum ex inuenito numero
procreatum. 182

35 Datum numerum in duos diuidere, &
alteruter eorum ductus in alium datum
numerum excedat dato numero quolibet
numeri productum ex altero numero in
quemvis alium datum numerum. 182

36 Datum numerum partiri in duas par-
tes, quae cum ipso progressionem Arith-
meticam constituent. 183

37 Inuenire duos numeros, qui inter se
multiplicati faciant numerum, qui ad
minorem habeat datam proportionem, &
ad maiorem quoque proportionem da-
tam, sed illa minorem. 183

38 Datum numerum in quatuor partes
Arithmetice proportionales diuidere,
quarum differentia data sit, quando id
fieri potest. 184

39 Datum numerum in quatuor partes
Arithmetice proportionales partiri, quarum
prima data sit, & quando id fieri po-
test. 184

40 Datis duobus numeris, inuenire alios
duos in data proportionem, & productus ex
maio-

- maior horum in minorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero super productum ex minore in minorem. *ibid.*
- 41 Datis duobus numeris, invenire alios duos in data proportionem, ut productum ex maiore horum in minorem illorum super dato numero eum, qui ex minore in maiorem fit: Vel certe hic productum illud dato numero excedat. *ibid.*
- 42 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut summa quadratorum ex ipsi descriptorum ad eorum summam habeat datam proportionem. *ibid.*
- 43 Datis duobus numeris, invenire alios duos in data proportionem, ut maior horum ad maiorem datam additus faciat numerum in data quacunque proportionem ad summam ex minoribus collectam: dummodo hæc secunda proportio data sit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam. *ibid.*
- 44 Datis duobus numeris, invenire alios duos in data proportionem, ut subtrahito minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detrahente maiore ex minore, proportionem habeat datam quancunque. *ibid.*
- 45 Datis duobus numeris, alios duos in data proportionem invenire, ut maiore ex maiore detrahente, & minore ex minore; numeri remaneant æquales. *ibid.*
- 46 Tres numeros in data proportionem Geometrica continui invenire, ut productum ex multiplicatione quorumcunque duorum inter se, æquali sit reliquo, vel ad ipsum habeat quancunque proportionem datam. *ibid.*
- 47 Datum numerum parti in duas partes, ut maiore divisa per minorem, Quotiens sit idem datus numerus. *ibid.*
- 48 Duos numeros invenire, ut primus cum quolibet multiplici secundi faciat numerum æqualem ei, qui constituitur ex secundo, & quous multiplici primi: Vel ut primus cum data parte secundi tantum faciat, quantum secundi cum data parte primi: Vel denique, ut si primus sumat multiplicem quencunque secundi, & secundus quencunque multiplicem primi: Aut si primus accipiat partem datam secundus, & secundus datam partem primi: Hæc duo numeri in data quancunque proportionem. *ibid.*
- 49 Datum numerum distribuere in quot-nis partes in data proportionem Geometrica continua. *ibid.*
- 50 I numeris quous numeros in data proportionem Geometrica continua, quorum summa dato quancunque numero sit æqualis. *ibid.*
- 51 Datum numerum in tres numeros parti, ut minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam datam. *ibid.*
- 52 Tres numeros invenire, ut minorum differentia sit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum consticiant numerum. *ibid.*
- 53 Datum numerum parti in tres, ut uterque extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam. *ibid.*
- 54 Invenire tres numeros, ita ut primus cum secundo proportionem ad tertium habeat datam: Item tertius cum secundo ad primum datam proportionem habeat; omnesq. tres consticiant summam datam. *ibid.*
- 55 Numerum invenire, ita ut quadratus ex parte eius aliquota data descriptus, & quadratus alterius cuiusvis partis eius aliquota, consticiant ipsum numerum, vel alium, qui ad inventum numerum proportionem habeat datam. *ibid.*
- 56 Datum numerum parti in duos, ut data pars primi cum secundo tantum faciat, quantum secundi pars alia data cum primo efficit. *ibid.*
- 57 Duos numeros invenire, ita ut primus, accepto quolibet numero a secundo faciat numerum, qui ad reliquum secundi proportionem habeat datam: Item secundus, accepto quolibet etiam numero a primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam. *ibid.*

IXND EXI

58 Tres numeros inuenire, ita vt bini quique faciant tres numeros propofitos, dummodo femiffis fummam propofitorum numerorum maior fit fingulis propofitis numeris.

194

59 Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propofitos; dummodo tertia pars fummam propofitorum numerorum maior fit fingulis propofitis numeris.

195

SCHOLIUM.

Eodem arte inueniuntur quinque numeri, vt quaterni quique efficiant quinque numeros propofitos; dummodo quarta pars fummam propofitorum numerorum fingulas numeros propofitos maior fit. Item fex numeri; fi tamen quinta pars maior fit, &c. Et fic deinceps, quocunque numeri; fi modo pars fummam denominata a numero propofitorum numerorum, toto minus, maior fit fingulis numeris propofitis.

196

60 Tres numeros inuenire, vt bini quique fimul fumpti excedant reliquum dato numero.

ibid.

61 Quatuor numeros inuenire, vt bini quique fimul fumpti excedant reliquum dato numero; dummodo fummam ex quatuor numeris pollularis collecta maior fit fingulis numeris datis.

197

SCHOLIUM.

Eodem modo reperiuntur quinque numeri, vt quaterni quique fuperent reliquum dato numero; dummodo tertia pars fummam ex quinque pollularis exceffibus maior fit fingulis numeris. Pari ratione inueniuntur fex, fi tamen quarta pars maior fit, &c. Atque ita deinceps quocunque numeri; fi modo pars fummam denominata a numero datorum exceffibus

fuum, minus duobus, maior fit fingulis exceffibus datis.

199

62 Tres numeros inuenire, quorum maximus medius fuperet data parte minimi; Medius quoque minimus fuperet data parte maximi; Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.

ibid.

63 Tres numeros inuenire, ita vt fi quis proximè fequenti det datam fui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur aequalitas.

200

64 Quatuor numeros inuenire ea lege, vt cum quis eorum proximè infequenti datam fui partem dederit, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur aequalitas.

201

SCHOLIUM.

Eodem modo inueniuntur 5. numeri, vel plures, ita vt poftquam unusquisque fequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri aequales, vel plures; omnesq. fimul faciant femper fummam, qua toties numerum, quem finguli faciunt, continebis, quot funt ipfi numeri.

203

65 Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt pofterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quolibet numerum.

ibid.

SCHOLIUM.

Idem anigma fine Algebra expedire.

204

66 Duos numeros inuenire, quorum fummam aequalis fit dato numero, & pofterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.

ibid.

67 Tres numeros inuenire, ita vt cum

c

vnus.

unusquisque a summa reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri aequales. *ibid.*

68 Quatuor numeros invenire ea conditione, ut unusquisque a summa reliquorum datam partem acceperit, fiant quatuor numeri aequales. 205

SCHOLIUM.

Non aliter inveniuntur 5. numeri, vel 6. vel plures, ita ut si unusquisque a summa reliquorum acceperit datam partem, fiant totidem numeri aequales. 207

69 Tres numeros invenire ea lege, ut si unusquisque proximè insequenti det imperatam sui partem, postquam mutuo dederunt, & acceperunt, singuli habeant eandem numerum datum. *ibid.*

SCHOLIUM.

Ad eundem modum in enigmate 64. 67. & 68. determinari poterit numerus, quod singuli conferre debent. *ibid.*

70 Datum numerum in tres, quatuor, vel plures partiiri ea conditione, ut si quisque proximè sequenti det imperatam sui partem, postquam mutuo dederint, & acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures aequales. 208

71 Datis duobus numeris, et alium quendam invenire, qui utrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem, quadratum, minorem vero, latus eius quadrati. 209

72 Duos numeros invenire, ita ut summa ex ipsis confecta, & excessus quadratorum, qui ex ipsis sunt, & datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum excessus minor sit, quam data summa quadratorum. 210

73 Datum numerum in duos dividere, ut excessus quadratorum, qui ex ipsis

fiant, sit quilibet numerus minor quadrato dati numeri. *ibid.*

74 Duos numeros invenire in data proportionem, ita ut summa quadratorum, qui ex ipsis sunt, ad excessum numerorum inventorum proportionem habeat datam. 211

75 Duos numeros in data proportionem reperire, ita ut excessus quadratorum ipsorum ad excessum inventorum numerorum proportionem habeat datam. *ibid.*

76 Duos numeros invenire in data proportionem, ita ut numerus ex uno in alterum procentus ad eorum summam datam habeat proportionem. *ibid.*

77 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut numerus ex uno in alterum procentus ad eorum excessum datam habeat proportionem. 212

78 Duos numeros invenire in data proportionem, ita ut quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam. *ibid.*

79 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut quadratus minoris ad Quotientem, si maior per minorem dividatur, proportionem habeat quancunque datam. *ibid.*

80 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet. 213

81 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut quadratus minoris ad eorum excessum habeat datam proportionem. *ibid.*

82 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam. *ibid.*

83 Duos numeros in data proportionem invenire, ut quadratus maioris ad Quotientem, diviso maiore per minorem, proportionem habeat datam quancunque. *ibid.*

84 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut quadratus maioris ad

IX N E D I E M X

eorum summam habent datam proportionem. 214

85 Duos numeros in data proportione invenire, ita ut quadratus maioris ad eorum excessum habeat proportionem datam. ibid.

86 Datis duobus numeris, alium tertium invenire, ita ut omnium trium duo quicunque simul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros constituent in excessu aequali, hoc est, Arithmetice proportionales. ibid.

87 Duos numeros in data proportione invenire, ita ut excessus quadratorum, qui ex ipsis sunt, ad eorum summam habeat proportionem datam. 216

88 Duos numeros in dato excessu invenire, ita ut excessus quadratorum, qui ex ipsis sunt, superet datum excessum quoti numero dato: dummodo quadratus excessus numerorum quasitorum dati minor sit summa ex eodem excessu, & postulato numero collecta. ibid.

89 Duos numeros in dato excessu invenire, ita ut excessus quadratorum, qui ex ipsis sunt, ad excessum datum datam habeat proportionem. & insuper contineat datum numerum: dummodo quadratus dati excessus minor sit summa, quae ex numero, qui ex ductu denominatis data proportionis in ipsum excessum fit, & ex dato numero colligitur. 217

90 Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos distribuere. 218

SCHOLIVM.

Datum numerum quadratum in quotvis numeros quadratos distribuere, etiam sine Algebra. ibid.

91 Datum numerum ex duobus quadratis compositum in alios duos quadratos dividere. 219

92 Duos numeros quadratos in dato excessu invenire. ibid.

93 Duos numeros invenire, quorum quadrati se excedant dato numero. 220

94 Duos numeros quadratos invenire, quorum summa quadratus sit numerus. ibid.

95 Duos numeros quadratos invenire, quorum excessus quadratus sit. ibid.

96 Tres numeros quadratos invenire, quorum summa sit numerus quadratus. 221

SCHOLIVM.

Quatuor numeros quadratos, vel etiam plures invenire, quorum summa sit quadratus numerus. ibid.

97 Duos numeros invenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus. ibid.

98 Duobus numeris datis, invenire alium, qui utrique seorsum additus faciat quadratum. 222

99 Duobus numeris datis, alium invenire, qui ab utroque seorsum subtrahitur, reliquat quadratum. 214

100 Datis duobus numeris, alium invenire, a quo utroque datorum detractus, quadratum reliquat. ibid.

101 Datum numerum in duos parti, & insuper quadratum numerum invenire, qui cum utraque parte seorsum quadratum efficiat. 225

102 Datum numerum in duos parti, & insuper numerum quadratum invenire, a quo utraque pars seorsum subtrahitur quadratum reliquat. ibid.

103 Tres numeros invenire, ita ut primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quancunque datam. Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum

IX N D E X I

- quorum habeat quoque datam quamvis proportionem. Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum suam proportionem quoque datam quamvisque. 226
- 104 Tres numeros invenire, ita ut primus cum data parte summa aliorum duorum faciat numerum datum. Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcumque numerum datum. Tertius denique cum quavis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum. 227
- 105 Datum numerum parti in duas partes, ut prior cum dato alio numero ad posteriorem cum quavis alio dato numero proportionem habeat datam quamvisque, si id fieri potest. 228
- 106 Numerum invenire, a quo detrahis quotvis partibus aliquotis, si reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus equalis ei, qui ex invento numero, & dato constatur. 229
- 107 Duos numeros in data proportionem invenire, ut ex uno in alterum signatur datus quivis numerus. 230
- 108 Duos numeros in qualibet proportionem datos equaliter minuire, ita ut reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamvisque proportionem, qua maior sit proportionem datorum numerorum. 231
- 109 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut qui sit ex uno in alterum cum summa quadratorum, qui ex ipsis sunt, efficiat numerum datum. 230
- 110 Invenire numerum, qui in se ductus, & productus in datum quemvis numerum faciat numerum, qui habeat ad numeri inventi cubum proportionem quamvisque datam. 231
- 111 Datum numerum in duas partes secare, ut prior multiplicata per quemvis numerum producat numerum, qui superet numerum productum ex parte posteriore in quemlibet alium numerum, numero data, quando id fieri potest. 232
- 112 Datum numerum in duas partes secare, ut prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportionem ad numerum factum ex posteriori parte in quemvis alium numerum multiplicata. 232
- 113 Datum numerum in duos distribuere, ut prior divisus per datum quemvis numerum faciat Quotientem in data proportionem ad Quotientem, qui sit ex posteriori numero per quemlibet numerum diviso. 233
- 114 Tres numeros in continua proportionem data invenire, ut numerus ex minore in medium productus habeat ad maiorem quamvisque proportionem datam. 233
- 115 Datum numerum in tres parti, ut singuli in tres singulos numeros datos, aut in unum eundem numerum datos multiplicati producant tres numeros in data proportionem continuam. 234
- 116 Datum numerum in tres partes dividere, ut singula per tres singulos numeros datos multiplicata producant eundem numerum: Vel ut tam priores dua per duos datos numeros ducta producant unum eundem numerum, quam posteriores dua per alios duos numeros datos multiplicata producant unum quodlibet eundem numerum. 234
- 117 Datum numerum in tres partes distribuere, ut prima parte divisa per quemvis numerum: Et secunda multiplicata per alium datum numerum: Ac tertia divisa per quemvisque etiam numerum promanant tres numeri equalis. 235
- 118 Datum numerum in tres partes secare, ut singula per singulos tres numeros datos divisa, faciant unum eundemque Quotientem. 235
- 119 Duos numeros in data proportionem invenire, ut qualibet pars aliquota minoris

- noris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcumque datum. 236
- 120 Numerum invenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diviso alio numero dato, Quotiens ad inventum numerum datam habeat proportionem. ibid.
- 121 Tres numeros invenire Arithmetice proportionales, ita ut eorum summa sit data pars aliquota numeri, qui ex eorum multiplicatione inter se producitur. Vel (quod idem est) ut numerus ex ipsorum multiplicatione productus ad eorundem summam proportionem habeat datam. 237
- 122 Tres numeros invenire in continua proportionem data, ut ex eorum multiplicatione gignatur datus numerus. 238
- 123 Numerum invenire, qui ductus in suam radicem quadratam producat datum numerum. ibid.
- 124 Numerum invenire, cujus radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat datam proportionem. ibid.
- 125 Duos numeros invenire, ut ex uno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inventos habeant duas proportionem datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem. 239
- 126 Duos numeros invenire datam summam efficientes, ita ut unus cum data parte, vel partibus alterius faciat quemvis numerum datum: qui minor sit, quam summa data, & maior data parte, vel partibus datis eiusdem summa data. ibid.
- 127 Quinque numeros invenire, ita ut quatuor quomodolibet sumpti sine reliquo faciant quinque numeros datos: dummodo quarta pars summa propositorum quinque numerorum maior sit singulis numeris postulatis. 240
- 128 Numerum invenire, ita ut tres quadrati ex eius tribus partibus datis descripti, & in unam summam collecti, efficiant ipsum numerum inventum, vel alium quemcumque datum. 241
- 129 Datum numerum in quolibet numeros partiri, ita ut quilibet sequens superet precedentem dato numero. ibid.
- 130 Duos numeros invenire in proportionem data, ita ut alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcumque datum. 242
- 131 Duobus numeris datis, alium tertium invenire, ita ut tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, se in tertium doceantur, proceantur tres numeri Arithmetice proportionales. ibid.
- 132 Tres numeros invenire, ita ut primus ac secundus cum data parte terti: Item secundus & tertius cum parte data primi: nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant unum eundemque numerum datum. 243
- 133 Datum numerum partiri in tres partes continue proportionales, ita ut numerus ex prima in tertiam productus ad productum ex prima in secundam habeat datam proportionem. 244
- 134 Tres numeros invenire, ita ut primus cum datis quolibet unitatibus secundi numerum faciat aequalem ei, qui secundo superest: Item secundus cum quocunque unitatibus terti faciat alium numerum aequalem ei, qui tertio superest. Tertius denique, acceptis quocunque unitatibus a primo faciat numerum, qui ad reliquum primi habeat proportionem datam. 245
- 135 Duos numeros in data proportionem invenire, ut utroque per duos numeros datos multiplicato, producantur duo numeri facientes summam quemcumque datam. 246
- 136 Duos numeros invenire, quorum ad summam, quam excessus sit numerus quadratus. ibid.

- 137 Dato quadrato, invenire numerum, qui & ad datum quadratum adiecto, & ab eodem detracto, fiat numerus quadratus. *ibid.*

LEMMA.

In omni triangulo rectangulo, rectangulum bis sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, una cum quadrato lateris recto angulo oppositi, aequale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur. Idem verò rectangulum bis sub lateribus praedictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiat quadratum, cuius latus differentia est praedictorum duorum laterum. 247

- 138 Numerum invenire, qui in quovis datum numerum ductus faciat numerum, qui cum quovis alio dato numero numerum efficiat aequalem ei, qui sit ex quaesito numero in quovis alium datum numerum, maiorem tamen primo dato, multiplicato. 248

- 139 Datum numerum in duas partes dividere, & insuper quadratum invenire, qui cum utraque parte seorsum quadratum efficiat. *ibid.*

- 140 Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum invenire, a quo si duas partes inventa subducantur, reliqui fiant duo quadrati. 249

- 141 Datum numerum in duas partes dividere, ita ut eorum cubi faciant summam datam quamvisque, qua maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti. 250

SCHOLIUM.

Antecedens anigma sine Algebra solvere.

251

- 142 Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: duomodo quarta pars cubi longius summa minor sit dato numero. *ibid.*

- 143 Numerum invenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus constituat datam partem, vel partes cubi ex eodem invento numero procreati. *ibid.*

- 144 Numerum invenire, qui sui cubi constituat datam partem, vel partes 253

- 145 Duos numeros in data proportionem invenire, ita ut minor in qua datum maioris ductus producat numerum datum. *ibid.*

- 146 Numerum invenire, qui inter duos sit medius, superetq. minorem numero dato, & superetur a maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamvisque. 253

- 147 Datum numerum in quolibet partes distribuere, ita ut unaquaque ad sequentem habeat datam proportionem. *ibid.*

- 148 Numerum invenire, cuius partes data aequales sint parti aliquota data eiusdem aucta numero dato. 254

- 149 Duos numeros invenire, quorum summa data sit, ita ut priore per datum numerum divisa, fiat Quotient, qui cum data parte posterioris efficiat numerum datum. *ibid.*

- 150 Numerum invenire, qui cum data eius parte datum numerum quemcumque superet: tanto numero, quanto idem datus

I N D E X.

- datus numerus, vel alius datus ipsammet numerum inventum superat.*
 155
- 151** Numerum invenire, a quo si subtrahatur data pars, vel partes, reliquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipse inventus numerus eundem datum numerum superat.
 156
- 152** Numerum invenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, a quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicumque numerus datus.
 157
- 153** Progressionem Arithmeticam constituitur, cuius primus, & ultimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.
 ibid.
- 154** Progressionem Geometricam in data proportionem constituitur, cuius ultimus terminus datus sit, una cum summa progressionis.
 158
- 155** Progressionem Geometricam in data proportionem constituitur, cuius primus terminus datus sit, una cum progressionis summa.
 159
- 156** Datum numerum in duos partiti, ut primus aliquoties, ut libet, sumptus sit multiplex datus secundi aliquoties, ut libet, sumpti. Vel ut secundus aliquoties, ut libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, ut libet, sumpti.
 160
- 157** Tres numeros in Arithmetica progressionem invenire, ut numerus ex omnia eorum multiplicatione genitus, ad eundem summam habeat datam proportionem.
 ibid.
- 158** Tres numeros invenire, ut primus, acceptis quolibet unitatibus a secundo, faciat numeros multiplicem quemcumque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quovis unitatibus a tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcumque eius, qui tertio superest: Tertius denique, acceptis quolibet unitatibus a primo, faciat numerum aequalem residuo primi, minus dato numero.
 261
- 159** Duos numeros invenire, ita ut primus, acceptis quolibet unitatibus a secundo, superet residuum secundi dato numero: At secundus, acceptis quovis unitatibus a primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac praterea contineat datum numerum.
 262
- 160** Numerum invenire, per quem si datus numerus dividatur, ex Quotiente in quemvis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuito numero in alium quemvis numerum datum.
 ibid.
- 161** Tres numeros continuè proportionales in data proportionem invenire, quorum quadrati in eam summam collecti faciant datum numerum.
 263
- 162** Tres numeros continuè proportionales in data proportionem invenire, ita ut parte data maximi numeri in partem datam medij multiplicato, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.
 ibid.
- 163** Numerum invenire, cuius data dua partes inter se multiplicata producant numerum, quo diviso per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam, vel partes radices quadrata numeri inuito.
 264
- 164** Numerum invenire, cuius pars data in se multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inveni numeri.
 ibid.
- 165** Numerum invenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.
 265

I N D E X.

SCHOLIUM.

Præcipuum problema sine Algebra expedire, etiam si plures partes dentur.
ibid.

166 Tres numeros inuenire, ut bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros. 266

167 Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat aequalem ei, quem inuenti data pars cum maiore efficit. *ibid.*

168 Numerum inuenire, ita ut quadrati quotcumque partium ipsius simul sumpti constent summam inuento numero aequalem, vel ipsius multiplicem. *ibid.*

169 Numerum inuenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcumque. 267

170 Datum numerum in duos numeros parti, ut eorum quadrati summam datam constent, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri. *ibid.*

171 Datum numerum in tres partes continuè proportionales diuidere, ita ut productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam. 268

172 Datum numerum in duos numeros parti, ut ex uno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte, quadrati ex dato primo numero procreati: hoc est, ita ut radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos. 269

173 Datum numerum diuidere in duos, ut eorum quadrati summam faciant,

qua productum ex eorum multiplicatione superet dato numero. *ibid.*

174 Numerum inuenire, cuius quadratus ductus dato numero se ducat in eundem quadratum multiplicatum eodem dato numero, producat quemvis datum numerum. 271

CAPVT XXX.

Aenigmata varia numerorum abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrit: quæ quidem composita æquatio dicitur.

1 Datum numerum in duas partes distribuere, ut earum cubi datam summam, qua maior sit quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant. 272

2 Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summa minor sit dato numero. 273

3 Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat. *ibid.*

4 Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero constent ipsius numeri inuenti sensensum, siue quadrati quadratum. 274

5 Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero constent sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum. *ibid.*

6 Inuenire duos numeros constantes datum numerum, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur alius quouis numerus datus. *ibid.*

7 Numerum inuenire, cuius sensensum cum

I N D E X.

- cum dato numero efficiat numerum in data proportionis ad quadratum numeri inveni. 275
- 8 Numerum inuenire, cuius Tensibus cum dato numero faciat numerum, qui ad summi cuiusque proportionem habeat datam. 276
- 9 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur numerus datus quicumque. ibid.
- 10 Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quilibet, non cum eiusdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum. 277
- 11 Numerum inuenire, cuius cubus cum eiusdem Tensibus faciat datum numerum. ibid.
- 12 Datum numerum in duas partes diuidere, ut maiore per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data. 278
- 13 Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius multatus numero dato quicumque proportionem datam habeat. ibid.
- 14 Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam. 279
- 15 Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam summam conficiant: & eodem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadrato-rum summa habeat proportionem datam. ibid.
- 16 Datum numerum in tres numeros continuis proportionales diuidere, ita ut productus ex primo in secundum cum productio ex secundo in tertium, una cum eo, qui sit ex tertio in primum, faciat quemlibet numerum datam. 280
- 17 Datis duobus numeris siue aequalibus, siue inaequalibus, alium inuenire, qui cuiuslibet eorum additus faciat summam, qua ducta in additum, hoc est, in inuentum, producat quadratum alterius numeri. 281
- 18 Numerum inuenire medium inter numerum quolibet unitatis maiorem, & alium numerum quocumque unitatibus maiorem: ita ut extremi duo inter se multiplicati faciant datum quemcunque numerum. 282
- 19 Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita ut duo illi inter se multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat. 283
- 20 Numerum inuenire, quem alij duo excedant datis numeris, ita ut duo illi inter se multiplicati preceant numerum, qui datum multiplicem quadrati ex inuenito numero generi superet dato numero. 284
- 21 Numerum inuenire, cuius multiplex quicunque cum eiusdem numeri quadrato faciat datum numerum. ibid.
- 22 Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter se multiplicati producant datum ipsum numerum, & quadrati eorum trium faciant datam summam quocumque. 285
- 23 Duos numeros inuenire datam efficietes summam, & qui inter se multiplicati producant datum numerum, qui maior non sit quadrato ex semisse data summa descripto.

V E L

- Datum numerum in duos distribuere, ut ex uno in alterum gignatur datus quicumque numerus, qui maior non sit quadrato semissi dati numeri. 286
- 24 Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero superetur dato numero, & alium excedat alio numero dato: ita ut extremi inter se multiplicati producant datum quemlibet numerum. 287
- 25 Numerum inuenire, a cuius quadrato quadrati subtracti quocumque quadrati eiusdem numeri, relinquunt datum numerum quemcunque. ibid.
- 26 Duos numeros inuenire, qui inter se
d
mul-

I N D E X.

*multiplacati gignant numerum datum,
& summa quadratorum ex eisdem num-
eris proccalorum sit etiam data.*

288

32 *Datum numerum in duas partes di-
stribuere, ut maiori partis quadratus
cum minore parte faciat datum nume-
rum quencumque, minorem tamen qua-
drato dati numeri.*

295

33 *Datum numerum extrema ac media
ratione secare.*

ibid.

LEMMA.

*Duo numeri inter se multiplicati procre-
ant numerum medium proportionalem
inter eorum quadratos, ut proportio
ipsum numerorum.*

289

COROLLARIUM.

*Si duo numeri se mutuo multiplicantes
producant aliquem numerum, quadrati
ipsorum numerorum se mutuo multipli-
cantes producant quadratum numeri
producti.*

ibid.

27 *Duos numeros invenire facientes si m-
nam datam, quorum quadrati faciant
quoque datam summam.*

290

28 *Datum numerum in duas parti, ut
eorum quadrati datam summam effi-
ciant.*

291

29 *Datum numerum in tres numeros con-
tinuè proportionales parti, quorum
medius datus sit, cuius tamen quadra-
tus maior non sit quadrato semis il-
lius numeri, qui relinquatur, detra-
cto dato medio ex dato numero.*

ibid.

30 *Datum numerum in duas partes di-
videre, ita ut eorum cubi faciant sum-
mam datam quencumque, qua maior
sit quarta parte cubi ex dato numero
descripti.*

293

31 *Datum numerum in duos numeros di-
stribuere, ut idem sit excessus inter qua-
dratum maiori, & quadratum mi-
noris, qui inter quadratum dati nu-
meri, & quadratum maiori partis.*

294

SCHOLIUM.

Præcedens problema sine Algebra solvere.

296

34 *Datum numerum in duos numeros
parti, ita ut quadrati maiori ad
quadratum minoris proportionem habeat
datam.*

ibid.

35 *Datum numerum in duos numeros
parti, ut eorum quadrati summam
datam efficiant, maiorem tamen se-
mis quadrati ex dato numero geniti,
& minorem quadrato eiusdem numeri.*

297

36 *Duos numeros in dato excessu inne-
nire, quorum quadrati datam summam
efficiant, qua maior sit quadrato dati
excessus.*

ibid.

37 *Dato numero, alium invenire, per
quem si dividatur datum numerus, fiat
duplex superans in eundem numerum
dato numero.*

298

38 *Datum numerum in duos numeros par-
ti, ut ex uno in alterum fiat alius
datus numerus, minor quarta parti
quadrati ex primo dato numero procre-
ati: hoc est, ita ut radix quadrata dati
numeri secundi minoris quarta parti
quadrati ex primo dato numero pro-
creati sit medio loco proportionalis in-
ter duos numeros inventos.*

299

39 *Datum numerum dividere in duas, ut
eorum quadrati summam faciant, qua
productum ex eorum multiplicatione su-
peret dato numero.*

ibid.

I N D E X.

- 40 Datum numerum parti in duos, quorum radices quadrata habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor sit numero dato. 300
- 41 Datum numerum dividere in duos, quorum radices inter se multiplicata faciant datum quencunque numerum. 301
- 42 Dato numero, invenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inveniendi. ibid.
- 43 Datum numerum in duos parti, ut summa quadratorum eorum producto ex uno in alterum faciat datum numerum quencunque. 301
- 44 Numerum invenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum aequalem ei, quem inveniendi numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex seipso dati numeri productus, facit. 303
- 45 Numerum invenire, qui ad quicumque datum numerum additus faciat summam, quae ducta in numerum inveniendum faciat numerum datum quencunque. ibid.
- 46 Datum numerum in duas partes scire, ut numerus procreatus ex una in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quencunque datum. 304
- 47 Numerum invenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum multatum alio numero dato, producat numerum quencunque. 305
- habeo, existimat quidam atlantibus valere 600. aur. Cuius errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accedant partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. & a summa detrahatur $\frac{1}{12}$ eiusdem mea pecunia, tunc habebim 600. aur. Quaesitum est, quanta sit mea pecunia. 306
- 2 Viator quidam conficit quotidie 9. miliaria. Alius decimo post die elapsa idem iter instituit ex eodem loco, conficitq. quotidie 14. miliaria. Quiritur, quoto die posterior priorem assequitur. ibid.
- 3 Viator singulis diebus 9. miliaria conficit: alius vero decimo post die elapsa idem iter ingreditur. Quiritur, quot miliaria absolvet hoc, ut priorem assequatur in 18. diebus. 307
- 4 Interrogatur quidam, quoto sit hora diei, ita respondit. Dimidiata pars horarum a media nocte usque ad hoc instanti elapsarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem indicabit numerum horarum, quem quiritur. Quiritur ergo, quoto tunc sit hora. Idemq. dicendum de horis ab occ. Solis. ibid.
- 5 Quidam habet duas mensuras vini, quarum una valet 12. nummos, & altera 15. Vult autem ex utroque vino misceat unam mensuram, cuius pretium sit 13. nummorum. Quiritur, quantam vinum de qualibet mensura recipiendum sit. 308
- 6 Mensura vini valet 10. nummos. Quiritur ergo aqua commiscendum est uni mensurae, ut 1. mensura mixta valeat 7. nummos. 309
- 7 Sunt in quodam vaseculo 20. mensurae vini, quarum qualibet valet 12. nummos. Infunditur decem vaseculo illi aqua, donec vaseculum vino illo, & aqua repleatur. Et tunc 1. mensura mixta valet 10. nummos. Quiritur, quante sit copiamus illius vaseculi. ibid.
- 8 Duo tabellarii ex duobus civitatibus, inter quas interscipiuntur leuca 140. eodem die profecti sunt, alter versus

1 Numerum pecunia, quous in saeculo

d 2 alte-

CAPVT XXXI.

Aenigmata varia numerorum ad res materiales contractionum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus.

I N D E X.

- alterum. Vt autem quolibet die conficit 8. leucas, aliter vero 6. leucas. *Quaestio est, quando convenienter subiq. mutuo occurrunt.* 310
- 9 Quidam permutans 168. aur. pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis moneta 7. faciunt 1. aur. Secundi generis 18. Tertij 21. & Quartij 18. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. *Quaritur, quotnam monetas cuiuslibet generis accipiat.* 311
- 10 Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Constant autem 100. lib. lana 7. aur. & 100. lib. cera 14. aur. emiq. duplo plures lib. lana, quam cera. *Quaestio est, quot lib. vtriusque rei emerit.* *ibid.*
- 11 Emit quidam aliquot ulnas panni, quas iterum vendidit. Emis autem 5. ulnas pro 7. aur. & vendidit 7. ulnas pro 11. aur. *Lucratumq. est hac mercatura 100. aur.* *Quaritur, quotnam fuerint illa ulnae.* 312
- 12 Emit quidam aliquot ulnas panni, expendens 11. aur. pro 7. ulnis. Et totum pannum iterum vendidit. *coactumq. est dare 9. ulnas pro 7. aur. perdiditq. in hac mercatura 100. aur.* *Quaritur, quot ulnas emerit, ac vendiderit.* *ibid.*
- 13 Libra 100. cera emittitur 17. aur. *Quaritur, quot librae vendenda sint pro 1. aur. et 101. aur. lucrantur 18. aur.* 313
- 14 Emit quidam 100. lib. cera pro 17. aur. in quibus vendendis fecit damnum 18. aur. pro 101. aur. *Quaritur, quot lib. pro 1. aur. dederit.* *ibid.*
- 15 Tres Mercatores inveniunt Societatem. Primi parit 40. aur. per 2. menses. Secundus 20. aur. per 5. menses. Tertius summam quandam aur. per 3. menses. *Lucrati sunt autem 1176. aur. de quibus primo obtigerunt 1040. aur. Secundo 1100. & Tertio 936. Quaritur quot aur. tertius posuerit.* 314
- 16 Tres socij volunt inter se distribuere 435. aur. ea conditione, ut quoties pri-

- mus recipit 2. toties secundus recipiat 3. & quoties secundus recipit 4. toties tertius recipiat 5. *Quaritur, quot aur. quilibet recipiat ex illa summa 455. aurorum.* 315
- 17 Habes quatuor auri fragmenta, quae aequivalent auriis 164. Et primum in valore duplum est secundi: secundum triplum tertij: & tertium quadruplum quarti. *Quaritur valor singulorum fragmentorum.* *ibid.*
- 18 Tres socij conserunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt 100. aur. Est autem pecunia primi subdupla, pecunia secundi, & pecunia secundi subtripla pecunia tertij. *Quaritur, quantum quisque contulerit.* 316
- 19 Moriens quidam testamentum condidit, relinquitq. 3000. aur. *Distribuendos inter uxorem, filium, & duas filias, hac conditione, ut portio filij sit dupla portioni matris: & portio matris dupla quoque portioni unius filiae.* *Quaritur, quanta sit cuiuscunque parte.* *ibid.*
- 20 Mercator quidam qualibet parte tertia sua pecunia lucratur $\frac{1}{3}$. eiusdem pecunia. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecunia lucratur $\frac{1}{4}$. lucri prioris: Et sic omnibus computatis, inueniunt 164. aur. *Quaritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum utrumque lucrum.* *ibid.*
- 21 Mercator quidam qualibet parte quarta sua pecunia lucratur $\frac{1}{4}$. eiusdem pecunia. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecunia lucratur $\frac{1}{5}$. summam ex eadem pecunia, & lucro collecta: Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 400. aur. *Quaritur, quanta fuerit illa pecunia, & quantum utrumque lucrum.* 317
- 22 Mercator quidam qualibet parte quarta sua pecunia lucratur $\frac{1}{4}$. eiusdem pecunia. Deinde singulis partibus quatuor eiusdem pecunia prioris lucratur $\frac{1}{5}$. eiusdem pecunia. Atque ita singulis computatis, inueniunt 1136. aur. *Quaritur,*

- ritur, quantita fuerit illa pecunia, & quantum utrumque lucrum. *ibid.*
- 23 Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Quiritur, quot poma vendantur pro 572. denariolis. *ibid.*
- 24 Libra 47. quarundam mercium constant aur. 30. Quiritur, quanti constabunt 100. libra. 318
- 25 Est massa quadam argenti pondus habens marcarum 7. quarum qualibet continet 5. seminuncias puri argenti, & 11. seminuncias cupri. Commiscetur autem massa illi liquata alia massa cupri puri, ponderis 21. marcarum. Quiritur, quantum argenti puri habitura sit qualibet marca illius massa noua 18. marcarum. *ibid.*
- 26 Quinque consultores singulis hebdomadis soluent 11. aur. quantum ergo soluent 18. consultores in 40. diebus? 319
- 27 Pro tribus ponderibus aequalibus vendendis per leucas 7. debentur veltori 11. grossi, quorum qualibet ualet denariolos 25. Quaro iam, quot similia pondera sint uendenda per 40. leucas pro 400. grossis. *ibid.*
- 28 Tres factores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot igitur diebus duo factores perficiunt 8. tunicas? 320
- 29 Seruo cuiusdam promissit quidam ciuis pro 12. mensibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Post 7. autem menses dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanto ergo attinenda est tunica illa? 321
- 30 Ciuis quidam seruo suo pigro ita mercedem 30. dierum constituit, ut laboranti singulis diebus dare uelit 7. grossos, ociantem uero nullum 5. grossis. Ratione autem inita post 30. dies, seruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermisit? *ibid.*
- 31 Mercator quidam uendit 10. libras partem croci, & partem zinziberis, aureis 43. Vendit autem 1. lib. croci aureis 3. & 1. lib. zinziberis $\frac{1}{2}$ aur. Quallio est, quot libra croci uendita sint, & quot zinziberis. 322
- 32 Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. qua aequivalent 160. aureis. Quadam illarum monetarum ualent $\frac{1}{2}$ aur. & reliquarum qualibet $\frac{1}{4}$ aur. Quiritur numerus priorum, ac posteriorum. *ibid.*
- 33 Quidam lanis boues emit, qui interrogatus, quanti unum emeris, respondit: Quento 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissim pluris 96. aureis. Quiritur de pretio. 323
- 34 Quando 7. ulnae cuiusdam panni emuntur 4 $\frac{1}{2}$ aur. emuntur eodem pretio 17. ulnae aur. 10. gross. 18 $\frac{1}{2}$. Quallio est, quot grossi faciant 1. aur. 324
- 35 Quidam recipit a mercatore crocum pro 10. aur. Deinde rursum ab eodem accipit 24. lib. croci. Tandem reddit mercatori 30. lib. croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quiritur pretium 1. lib. croci. *ibid.*
- 36 Ciuis quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suae: quibus 2. denariolis, quas in manu habet, septenos erogat denariolos. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quid si cuiuslibet dare uoluisset 9. defuissent illi 32. denarioli. Quiritur, quot pauperes fuerint, & quot denariolas ciuis ille habuerit in manu. 325
- 37 Pro 70. summis librarium quarundam mercium penditur negligal 1. summa — 32. aur. Et pro 200. summis penditur 1. summa + 20. aur. Quiritur, quanti 1. summa constet. *ibid.*
- 38 Vlne 10. panni rubri cum 4. ronis panni nigri constant aur. 28. atque eodem pretio 2. ulnae panni rubri cum 4. ulnis panni nigri constant aur. 32. Quallio est de pretio 1. ulnae. 326
- 39 Mercator in rebus nudinis eandem aurearum summam exponens lucratus

est in singulis $\frac{1}{2}$. sua summa aureorum. Deinde ad alias se conferens nondinas lucratus est $\frac{1}{2}$. eiusdem se a summa priori lucro anda. Atque ita deprehendit se habere 1287. aur. Quæritur summa aureorum, quæ initio habuit.

327
40 In exercitu Imperatoris præditum numerus celsio maior est numero equitum. In hoc distribuuntur aur. 392000. ita ut quini singulis peditibus; & 16. cuilibet equitis dentur. Quæritur, quot sint pedites, & quot equites.

328
41 Tres milites prædam quandam aureorum equaliter inter se dividere volebant. Sed oborta lite, ut sit, ad manus ventum est. & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum, acceptis 5. a secundo, habere numerum æqualem numero aureorum, qui secundo superfluit: Secundum vero, acceptis 7. a tertio, habere numerum æqualem residuo tertii: Tertium denique, acceptis 9. a primo, habere numerum triplum eius, qui tertio superest. Quæritur summa aureorum in illa præda reppererunt, & quantum quisque rapuerit.

ibid.
42 Quatuor facij marisupium innumerant aureis plenus, & quibus qualibet partem forte fortuna accepit. Sed cum singuli suos aureos numerarent, cognoverunt, primum, accepit 25. a secundo, habere numerum æqualem residuo secundi: Secundum vero, accepit 30. a tertio, habere numerum triplum residui tertii: Tertium autem, acceptis 40. a quarto, habere numerum duplum residui quarti: Quartum denique, acceptis 50. a primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum summa, & quot quisque accepit.

329
43 In exercitu Cæsareo ex Germanis, Vngaris, & Italis confiato, sunt qui-

dem Germani 25000. Vngari vero faciunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atque Italiani. Itali denique faciunt $\frac{1}{2}$. Germanorum, atque Vngarum. Quæritur numerus Vngarum, & Italianum, & quantum sit totus exercitus.

330
44 Sunt duo Ducis, quorum unus milites habet pauciores 40. quam alter. Et uterque suis militibus 1200. aur. distribuit. quo scilicet evenit, ut prioris Ducis milites singuli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis posterioris. Quæritur est, quot milites uterque Dux habeat, & quot aureos singuli milites accipiant.

ibid.
45 Dux Societates, quarum altera aliam 4. hominibus superat, parem aureorum summam viris dividunt. In singulos minoris Societatis cadunt 8. aur. amplius, quam in singulos maioris. Aureorum autem summa puerorum sociorum utriusque Societatis superat aureis 172. Quæritur summa aureorum, ac sociorum.

331
46 Mercator quidam ad nondinas ter profectus, prima negotiatione lucratus est summam æqualem sua pecunia, ita ut post primam negotiationem habuerit duplum sua pecunie. Deinde in secunda negotiatione lucratus est radicem quadratam eius dupli. ac præterea 2. aur. In tertia denique negotiatione lucratus est quadratum totius prioris summa, & usque 4. aur. Atque ita deprehendit se habere 520. aur. Quæritur summa pecunia, quam initio habuit.

ibid.
47 Quo pacto Archimedes deprehendit quantitatem argenti in corona aurea.

332
48 Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuunt, habita ratione pecunie, quam quisque ad negotiationem attulit, ut portio secundi superaret portionem primi aureis 12. portio vero tertii portionem secundi aureis 16. Quæritur, cuiusque portio quantitas fuerit.

49 Tres lufores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, ut statim primus lufcratus sit $\frac{1}{2}$, secundus Deinde secundus $\frac{1}{3}$, tertius Tertius denique $\frac{1}{4}$ primi. Atque ita contigit, ut singuli haberent 700. aur. Quaritur, quot quisque aureos ad ludam attulerit.

ibid.
50 Quidam habet duo nafa aurea, & unum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretium primi nafi facit pretium triplum pretij secundi nafi: additum vero idem operculum nafi secundo facit pretium aequale pretio primi nafi. Quæstio est de pretio utriusque nafi.

335
51 Quidam emat, nequeo quot, perdicei, ita ut si amiserit scorsum illarum $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$, & insuper 6. haberet 100. perdicei. Quaritur numerus perdiciem.

ibid.
52 Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de ætate sua, & amicorum suorum Ephelionis, & Clytistia, diffinit. Ego, inquit, Ephelionem meum duobus annis antecedit: At Clytus ambobus annos sua ætate comprehendit, & præterea annos 4. Cui Calisthones. Cui pater meus nuxerit annos 96. iucunda mihi sunt ista relatio & Rex. Nam ætatis trium nostrum ætas, eius præcisè habuit. Quaritur, quæ ætate Alexander colloquium illud habuerit, & quot annos iam Ephelion, quam Clytus tunc habuerit.

335
53 Nicanor ex pugna, qua interijt, occurrat Iuda Mathabao agmine quadrato, collecto ex Syrocorum auxiliariis militibus, atque 91, quot secam adduxerat. Cæsa sunt autem ex eo agmine 25000. Reliqui supra elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. ultra numerum auxiliariarum militum Syrocorum. Quæstio est, quot militibus oc-

ciderit Nicanor Mathabao, & quot habuerit milites auxiliarios, quot item secum adduxerit.

336
54 Quidam habet 4. massas ex argento, & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum qualibet constat ex 9. seminiuncis puri argenti, & 7. seminiuncis cupri puri: quia 1. marcam statimus comprehendere 16. seminiunc. Pondus secundæ massæ est 15. marcarum, quarum singula continent 7. seminiunc. argenti, & 9. seminiunc. cupri. Pondus teritiæ massæ habet 24. marcas, quarum singula continent 10. seminiunc. argenti, & 6. seminiunc. cupri. Pondus denique quartæ massæ est 136. marcarum, quarum singula continent 14. seminiunc. argenti, & 2. seminiunc. cupri. Vult autem ex hisce massis constare unam, additis aliquot marcis argenti, ita ut qualibet marca continent 18. seminiunc puri argenti, & 1. seminiunc. puri cupri. Quæstio iam est, quantum argenti puri adiuiscendum sit illis massis, & quot marcas massæ una si habitura.

ibid.
55 Duo Societatem inuenerunt, quorum secundus duplo plus pecuniæ secum asserit, quam primus, at præterea 5. aur. Lacerati sunt autem 960. aur. ex quibus primo obdormierunt aur. 300. & secundo 660. Quantum ergo singuli imposuerunt?

340
56 Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. simul, & pecuniæ secundæ densa per pecuniam primæ facit quoremcentum 18. Quæstio est, quantam quisque pecuniam habent.

ibid.
57 Septem Mercatantes debent euidam creditori pecuniam hæc modo. Sex excluso septimo, debent simul 994. aur. Deinde sex, excluso primo, debent 882. aur. Sex, excluso secundo, debent aur. 952. Sex, dempto tertio, debent aur. 896. Sex, excluso quarto, debent aur. 910. Sex, excluso quinto, debent aur. 849. Sex, dempto sexto,

que, excepto sexto, debent aur. 1036.

Quaritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.

341

58 Duo socij habent duos numeros aureorum. quorum summa a summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtrahita, relinquit 78. Addita vero ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quaritur, qui sint isti numeri.

343

59 Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreati faciunt 340. sed ipsa summa inter se multiplicata faciunt 7. maioris quadrati. Quid sit est, quanta sint ista summa.

345

60 Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberem 100. aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tua pecunia, haberem 100 aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tua pecunia, haberem 100. aur. Quaritur, quantum quisque eorum habeat.

ibid.

61 Tres habent pecunias. Primus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa uestrorum aur. dupla mea summa. Secundus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa uestrorum aur. mea summa tripla. Tertius reliquis dicit, si adhuc haberetis 100. aur. summa uestrorum aur. esset summa mea quadrupla. Quaritur quantum quisque habeat.

346

62 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si adhuc haberem 100. aur. fieret mea summa aequalis duobus summis uestris. Secundus reliquis dicit, si haberem adhuc 100. aur. summa mea esset summa uestra dupla. Tertius denique, ait ad reliquos, si adhuc haberem 100. aur. summa mea fieret summa uestra tripla. Quaritur, quantum quisque ha-

beat.

347

63 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de uestra summa remoueretur 100. aur. haberem summam aequalem reliqua uestra summa. Secundus reliquis dicit, si de uestra summa remoueretur 100. aur. esset mea summa reliqua uestra summa dupla. Tertius denique dicit reliquis, si de uestra summa remoueretur 100. aur. mea summa esset reliqua uestra summa tripla. Quaritur uniuscuiusque summa.

348

64 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100. aur. summa uestra esset reliqua mea summa quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abicerem 100. aur. uestra summa esset reliqua mea summa tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa auferrem 100. aur. esset uestra summa reliqua mea summa dupla. Quaritur uniuscuiusque summa.

349

65 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si uobis darem 100. aur. faceretis summam meam reliqua summa quintuplam. Secundus dicit reliquis, si uobis darem 100. aur. fieret uestra summa reliqua mea summa sextupla. Tertius denique reliquis dicit, si uobis darem 100. aur. faceretis summam reliqua mea summa septuplam. Quaritur uniuscuiusque summa.

350

66 Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si uos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa uestra summa reliqua aequalis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa uestra summa reliqua dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliqua uestra summa tripla. Quaritur uniuscuiusque summa.

351

67 Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{2}$. uestra

Ita summa, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{2}$. vestra summa, haberem 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si mihi daretis $\frac{1}{3}$. vestra summa, haberem 100. aur. Quæritur pecunia cuiusque.

351

68 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. mea summa, haberetis 100. aur. Secundus vero reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{3}$. mea summa, haberetis 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{4}$. mea pecunia, haberetis 100. aur.

ibid.

V E L

Secundus ac tertius dicunt primo, si nobis daret $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. At primus ac tertius dicunt secundo, si nobis daret $\frac{1}{3}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. Denique primus ac secundus dicunt tertio, si nobis daret $\frac{1}{4}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. Quæritur cuiusque summa.

383

69 Tres Mercatores Societatem inveniunt per 12. menses. Primus imponit 100. aur. Secundus 100. aur. Et tertius 300. aur. Post menses autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cuius 3 lib. valent 1. aur. Et post menses 4. secundus imponit messum argenti, cuius 1. marca valet 7. aur. Transactis 12. mensibus, recipit primus ex lucro 50. aur. secundus 110. aur. Et tertius 90. aur. ita ut totum lucrum fuerit 150. aur. Quæritur, quot lib. piperis primus imposuerit, Et quot marcas argenti secundus.

354

70 Tres Mercatores inveniunt Societatem. Primus imponit 35. aur. amplius, quam secundus. At secundus ac tertius simul imponunt 84. aur. Lucrum commune est 66. aur. ex quibus tertius pro parte sua lucri recipit aur. 21. Quæritur

est, quantum quisque imposuerit. Et quantum tam primus, quam secundus de lucro receperit.

355

CAPVT XXXII.

Enigmata varia ad figuras Geometricas pertinentia.

1 Est rectangulum quoddam altera parte longius, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. 38. 2600. Quæritur latera.

357

2 Campus altera parte longior habet latera in proportionem septupla: Et eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quæritur latera, area, Et diameter.

319

3 Est rectangulum 4500. palm. Et longitudo tripla est latitudini. Quæritur latera, Et diameter. ibid.

4 Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palm. 3375. Altitudo ad longitudinem basis proportionem habet sesquialteram. Quæritur mensura.

ibid.

5 Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subduplum est altitudinis parallelepipedi, cuius area continet 6720. palm. Quæritur basis, Et altitudo.

360

6 Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, Et aream 376. Quæritur latera.

ibid.

7 Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera perperam habent sesquiterciam, Et altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam superbi partientem tertias: Soliditas denique columna continet palm. 93312. Quæritur dimensiones singula: ibid.

8 Sum

IX N D I E X I

8 Sunt duae turres inaequales supra duas bases quadratas erectae. Lateralium basium proportionem habent sesquiterciam, qualem etiam habent & altitudines, & soliditates. 2 ipsaz. altitudines permutatas sunt lateralium basium dupla. Soliditates denique amborum turrium simul complectantur palm. 21000. Quæritur singula dimensiones. 361

tur per lineam perpendiculararem ad diametrum extrema ac media ratione, & una & duabus chordis minoribus est 170 — 28 4500. Quæstio est. quanta sit diameter, & quanta eius portiones, & reliqua linea. 367

SCHOLIUM.

In prima solutione ænigmatiz, quando
Et. 369

LEMMA.

Si duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per eandem multiplicentur: habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem. 362

9 Est triangulum rectangulum, cuius basis (Voco basem latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. Lateralium autem proportionem habent duplam superbi-partientem quintas. Quæritur duo latera. ibid.

10 Est altera parte longius, cuius area 400. palm. & duo latera simul faciunt 100. palm. Quæritur latera. 363

11 Est rectangulum, cuius diameter 28 180. & maior latus ad minus proportionem habet triplicam. Quæritur latera, & area. ibid.

12 Est triangulum rectangulum, cuius unum latus est 28 18 + 3. Alterum autem latus, & basis simul faciunt 28 162 + 9. Quæritur singula latera. ibid.

13 Est circularis, cuius diameter 120. & ex quodam puncto circumferentia dimissa perpendiculariter ad diametrum est 28 162 + 3 405000. Quæritur paries diametri. ibid.

14 Est circularis, cuius diameter dividi-

15 Est quadratum, cuius latus est 7. Quæritur diameter. 370

16 Est quadratum, cuius diameter 28 93. Quæritur latus. ibid.

17 Est quadratum, cuius diameter, & latus faciunt summam 6. Quæritur diameter ac latus. ibid.

18 Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit 10. Quæritur latus ac diameter. ibid.

19 Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quæritur latus, ac diameter. 371

20 Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum, & latus facit 15. Quæritur diameter, ac latus. ibid.

21 Est rectangulum, cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quæritur latera, & diameter. 372

22 Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quæritur latera, ac diameter. ibid.

23 Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quæritur latera, & diameter. ibid.

24 Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa laterum 42. Quæritur latera, & area. 373

25 Est rectangulum, cuius area eam diametri, scilicet 15. & differentia laterum est

INDEX.

- est 1/2 s. Quærentur latera, diameter,
& area. *ibid.*
26 Est rectangulum, cuius unus latus
est 6, & quod sit ex altero latere
diameter, est 80. Quærentur alterum
latus, ac diameter, una cum area.
375
27 Est triangulum æquilaterum, cuius
area 60. Quærentur latus, ac perpendi-
cularis. 376
28 Est triangulum æquilaterum, cuius
perpendicularis est 6. Quærentur latus,
& area. *ibid.*
29 Est Rhombus, cuius area 60. & pro-
portio diametrorum sesquiquarta. Qua-
rentur latus, & diametri. 377
30 Est Rhombus, cuius area 60. & di-
uisa maiore diametro per minorem,
Quotiens est 1 1/2. Quærentur diametri,
& latus. 378

EPIGRAMMATA QUINQUE

Græcæ.

- 1 De Palladis statua, quotnam illa auri
valenta appendat. 378
2 De Augæ armentis, quotnam boues
fuerint. 379
3 De Lepnis auei canalibus, quanto tem-
pore eundem craterem impleant. 380
4 De statuis Zethi, Amphionis, ac ma-
tris ipsorum Antiope. 381
5 Euclidis Geometricum, de mulo, & affi-
na. 382

Finis Indicis Capitum, & rerum.

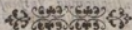


ERRATORVM CORRECTIO.

Pag.	Linea	Errata	Corrections.
233	24	curandum	verendum
236	in margine	visitatorum,	visitatorum.
244	1	græ siue	græ exclusiue
246	21	partes addendæ	partes addendas
246	24	perfectiorem huius	perfectiorem huius
247	8	regulas	regulas interfit
247	16	absolutum	absolutus
247	21	Geometricæ	Geometriæ
248	27	radicem	radicem
248	28	radicem	radicem
249	in margine legatur	[linea minor] pro	[linea maior]
260	17	problemata sunt	problemata sunt
261	6	singulos enim	singulas enim
261	7	quali oculis	quali oculis
264	13	secundus fit	secundus fit
265	11	dati inuentus	dati inuentas
266	10	maiore	maiore
266	15	dematur	demantur
271	14	totius numero	totius numeri
272	10 a fine	Diuisis ergo 10.	Diuisis ergo 20.
276	15	sesquiquintam	sesquiquintum
276	8 a fine	secundus fit	secundus fit
285	19	fit 1 26 10.	fit 1 26 10.
289	20	datur quibus	datur quibus
293	6 a fine	habeat datam	habeat datam
296	7 a fine	numerus datum superat.	numerus superat.
271	24	qui productus	qui productus
316	1	& seruat	& seruant
316	15	portionis vnus.	portionis vnus.
317	6	summa ex	summa ex
316	22	cum cum 4. vlnis	cum 4. vlnis

P R O E M I V M

DE ALGEBRAE PRAESTANTIA.



*I*n dignitate summa, & amplissimarum laudum praconis nulli postrema ea ars est, quam recepto vocabulo Algebrae nostrates appellarunt: siue enim eius veluti natiuam originem inquiras, inde usque ab Arabum felicibus ingenij repetenda est: siue honestatem, inter Mathematicarum or-

dinis primas versatur: siue amplitudinem, nullis numerorum statis finibus, nulla magnitudinum mole, nullis gentium priuatis, publicis, priscis, recentibus, cultis, barbaris insitutis, non vlllo terrarum, vasto licet, ambitu continetur. Propositum siue scopus eius est, ut certam aliquam a sensuum cognitione, ac sensu secretam quantitatem explores, & tandem inter duos aliquos numeros aequalitate, siue aequatione comperta, deprehendat, atque demonstret. Venatica canis instar, quae, si quando diuturna venatione fatigata, & fame exagitata delitescentem seram subodorata fuerit, tandiu oculis, tandiu odorarium sagacitate scrutatur singula, donec comprehensam, dentibusq. barentem pradam domino sistat. Et sane multo etiam opificium ipsum opus admiratione antecellit, & arduum sua sponte facinus, atque praeclarum exornat ipsa conficiendi ratio, redditq. praestantius. Per simile est, quod dissimili in re andabazarum more ludentibus

Scopus Algebrae.

A

eue-

euenire solet. Quamdiu enim obvelatis oculis urgentur ipsi, urgentq. urgentes se, comprehensuros se aliquem nunquam desperant, & multis tamen, qui tandem sit interceptus, ignotum habent, & frustra sepe his atque illis tentatis tenebris, ubi aliquem tenuerunt, tum demum detracta vitta, lucem oculi recipiunt, & ludus absoluitur. Obscuros enim numeros Algebra nunc addendo, nunc diuidendo, nunc multiplicando, suspensio velut vestigio, pertentat, certa, se in aliqua Geometrica progressionem ab unitate profecta deprehensuram, quod querit, in qua tamen progressionem inuentura sit, incerta; ac tamdiu ceco labore ludit, tamdiu latitantis numeri tenebras omnes explorat, vestigat, ac perfert, donec eo progrediatur, & ad eum numerum deveniatur, qui fuerat questioni subiectus, qui tum demum in lucem emergit, eum ipsa absoluitur operatio. Est prima quidem is numerus existit, qui in toto illo numerorum labore unitatem progressionis ab unitate incipientis proximè consequitur, tum etiam y omnes numeri deprehenduntur, qui ad questionem explicandam indagandumq. propositum additi & diuisi fuere, ut suis deinde locis planum faciemus. Quam igitur scopus iste late viagatur, qui nec genus ullum numerorum, nec ullius magnitudinis diversitatem, & se alienam putat? ut non numerorum modo latebras omnes detogat, sed uniuscuiusque etiam molis finitam magnitudinem, sonorum metrum, ponderum momenta, mensurarumq. certos terminos assequatur, neque ulla Arithmetica questio subiiciatur, quam non veluti suam agnoscat Algebra, atque expediat. Tam multas, tam varias, tam obscuras, tam difficiles Mathematicas partes una Algebra pertractat uniuersas. Nam quod rerum Mathematicarum inextricabiles nodos solui non posse, accidit aliquando, aut si quid obscurum extrahi à tenebris nunquam potuit, non huius facultatis præcepta certissima, sed æquationum & æqualitatum difficultates, & quæ nondum innotuit, earundem ratio causanda est. De his tamen plura ad finem capitis 12. habentur. Illud modo agamus, ut quantis intervallis Algebra Arithmetica

metice praeceptionibus antecellat, videamus: Quid enim in illa est, quod non etiam huius veluti fascies vereatur? qua exempla tam sua, quae tam ancipites questionum ambages, quae tanta moles difficultatum, qui tam inextricabiles meandri rerum abditissimarum, quae non sint omnia illi cum ista communia? Nihil habet Arithmetica, nihil quod Algebra fugiat; quae explicare ipsa cum nequeat, cognoscenda Algebra tradat, habet quam plurima. Illud vero quam praeclarum est, quam unicuique optandum maxime, quam huius facultatis peculiare? Quod enim ceteris commune est, ut non ante proposita difficultas expediri possit, nec ne, sentias, quam totam absolvas, & his iterumq. integram repetas, iteresq. operationem; id in hac, in ipsa operationis decursu obutam sit, & prodit ipsa questio, prius quam labor finem accipiat. Quae enim saepe supposita fallacia, & questionum pugnantes inter se sententia Algebra imperitos latent, eas Arithmetica studiofus, nisi per hanc exploratas habeat, totus de proposita questionis solutione sollicitus frustra laborat, atque ad has, atque ad illas regulas animum refert, experitur singulas, singulas recognoscit, torquet sese & conficit, ad extremum inanes labores suos sentit, studiumq. infelix damnat. Quare ne illud quidem in hac facultate est mandare curandum, ne laborem ullum temere susceptum; & ad extremum usque frustra toleratum dolendum sit; quod alia Mathematica partes accipere quidem ab hac possunt, prestare ipsa non possunt. Atque haec pauca de praesentia ac dignitate Algebra praefationis loco dicta sint.

DE INVENTORE ALGEBRAE AC nomine. Caput I.



De inventore huius artis non convenit inter omnes, Gebrum Arabem Astronomum asserunt non pauci, & a Gebro Algebram dictam contendunt. Verò similis tamē Ioannes Regiomontanus in præfatione Alphragani Diophanto Alexandrino hoc inventum attribuit. Ipse enim Diophantus in tredecim librorum præfatione, quos hac de re scripsit ad Dionysium, se primum huius

Varia nomina Algebra.

scientiæ inventorem proficitur, & a nemine ante se in lucem datam, immo ad ipsam vique aetate ignotam omnino fuisse, pronunciat. Maiorem accepit nomen ipsius varietatem, nam quod inter ceteras Arithmeticae regulas maxime præstat, Ars maior a plurimis appellata est. Regulam census & rei Latini dixerunt; hoc est, regulam Radicis & quadrati. Magna enim ex parte quæstiones in hac arte propositæ solvantur per calculationes radicum, quos ipsi res, & quadratorum, quos iidem census vocant, ut suo loco constabit. Apud Italos Regula, cosa (scu della cosa) nuncupatur; quod in quæstionibus solvendis semper una radix ponatur, quam ipsi cosam dicunt. Ex quo etiam nomen illud sortita est, quo a multis regula Cosica nominatur. Non uno eam nomine Arabes omnes nominant, Algebram enim quidam vocant, quod apud eos idem sonat, ac restauratio; quia nimirum in quæstionibus hac arte solvendis aliquam semper æquationem, siue æqualitatem est deueniendum, in qua, quicquid ablatum, quicquid diminutum est, quicquid deesse compertum, restaurari oportet. Almuchabulam vero, quod oppositionem eorum lingua significat, propterea vocant alij, quod in quæstionum abditis exponendis in hac scientia, cum ad æquationem æqualitatemve aliquam peruentum est, duo semper numeri æquales, diverso tamen nomine, sibi inuicem opponuntur. Atque hinc postremo factum est, ut geminatis nominibus Algebram & Almuchabulam aliqui vocauerint; quod scilicet tum per restaurationem, tum per hanc, quam modo diximus, oppositionem, quæstiones omnes expediat. Harum tamen appellationum rationes is cognosceat planius, qui quæstionum, quæ hoc opere continentur, solutiones diligentius cognoverit. Vñs tamen apud scriptores, ut cum Arabibus Algebra hac tota nostra scientia communi appellatione dicebatur, obtinuit.

Hæc de inventore & nomine Algebrae dicta sufficiant. Quæ si quam præclara est, quam iucunda studiosis sui, quam omnibus se se præstat admirabilem; tam etiam perspicue tradita esset, nec in Arith-

Arithmeticoꝝ, qui eam docuerunt, obscuritate declaranda magis, quam in eiusdem facultatis præceptis explicandis laborandum esset, coleretur etiam ipsa inter primas, suamq. dignitatem pariter, & nominis splendorem integrum retineret: nec tam multi scriptorum vel ambagibus impediti, vel obscuritate deterziti, relato reputante vestigio, ante discenda Algebra voluntatem & spem perdicensi abiicerent, quam Algebra ipsam, primo, vt aiunt, e limine saluarent.

HORVM mihi laborem leuandi labor incumbit in præsentia, nec molestus, licet grauis, nec si eius fructus existat, iniucundus. Quod & diuina ope præstare pro meis viribus enitar. Omnia proinde, quæ ad Algebra spectant, ea methodo tradere, difficultatūq. moles omnes explanare conabor, vt quibus mediocriter tantum in Arithmetica præceptis versatus, quam fieri possit, minimum in ea addiscenda laboris experiatur. In quo tamen præstando, sicut diligentiam non patiari desiderari meam, ita eorum a me opinionē alienam puto, si qui sunt, qui viqueunque perfectam & numeris omnibus absolutam Algebra tractationem a me requirant.

NON adeo me amo, vt me tantopere cæteris omnibus, qui ad hanc diem eam descripserunt, præferendum putem; vt quod ipsi non effecerunt, præstare me posse profitear.

ÆQUATIONES esse plurimas inter tres, pluresvè numeros diuersis nominibus appellatos, probe scio, quæ in quæstionibus Algebra beneficio dissoluendis interdum, licet non ita frequenter, incedunt, nec tamen satis adhuc compertum apud omnes est, quæ arte ab ipsis radices sint educendæ, quarum ego æquationum & eas, quæ adhuc cognitæ exploratæq. sunt, & eas, quæ nondum suis è tenebris emerferunt, cap. 12. enumerabo. Meum igitur hoc opus est, *Intentia auctoris.* ea vna cura, vt quæ inuoluntè alij, ego explicatius exponam, apertius, quæ illi obscurius, proferre quæ latent, ardua explanare, facili præferre, singula, quo ad meâ industria feret, dilucide & enucleate tradere atque docere. Postremo non tam de Algebra dignitate & existimatione detrahere illæ æquationes debent, ex quibus radices inuenire nondum didicimus, quam eam quæstiones infinitæ prope modum commendare, quæ æquationibus inuentis soluuntur, certamque, vt suis locis constabit, scientiæ rationem habent. Verum qui suos labores non omnino ociosos in Algebra scientia posuisse optat, eum in vulgaribus Arithmetica præceptis se se aliquando exercuisse oportebit, nec eorum omnino rudem ad huius cognitionem institutionemq. accedere, cuiusmodi illa sunt, quæ quasi fundamenta sunt tyronibus iacienda; Additio numerorum, subtractio, multiplicatio, atque diuisio, non integrorum modo, sed & fractionū. His adde proportionum regulam, quæ a plerisque regula trium nuncupatur; atque his similia non pauca: Proportiones præterea, progressionēq. numerorum tum Arithmeticas, tum Geometricas calluisse debet. Tertio nosse debet extradicum omnium extractions ex quoque numero, qui proponatur, siue integer is fuerit, siue fractus.

fractus. Demum & Geometria, & disciplinis alijs excultum, nec
seuiter expolitum esse præstabit.

*Algorithmus
quid.*

*Tria genera
numerorū in
Algebra vi-
sistorum.*

STYDII præterea plurimum in Algorithmo addiscendo collocā-
dum erit, quem habet hæc facultas a cæteris peculiarem. Algo-
rithmum vero dicimus tractationem, quæ additionem, subtractionem,
& alias operationes numerorum complectitur. Eum inquam
Algorithmum numerorum quorundam, quos in vulgari Arithme-
tica explicari in viū non est. Eorum porro numerorum triplex om-
nino genus numeratur. Primum quidem eorum, quos Cosficos ple-
rique, vel Denominatos dixerunt, iſq; in aliqua Geometrica pro-
gressionē, quæ ab unitate ducit initium, reperiuntur; cuiusmodi
sunt Radices, Quadrati, Cubi, & quæ eiusdem generis sunt non
paucæ, de quibus mox dicere instituiam. In altero genere insunt
numeri, qui radicales appellantur, ut radix quadrata, cubica, &
huiusmodi cuiuscunque numeri, siue is eam habeat radicem, siue
non habeat, atque de his differemus, cum ad caput 16. perueneri-
mus. Tertij denique generis sunt numeri radicales numerorū eius
generis, quod primo loco positum est a nobis, quales sunt radix
quadrata, vel cubica, & similes, quotcunque quadratorum, cubo-
rum, vel radicum, &c. de quibus postremus nobis erit labor. Et
quoniam eorum numerorum Algorithmus, quos in secundo ac ter-
tio genere collocauimus, difficultatem non minimam, & obscu-
ritatem habet non contemnendam, de industria eum in finem regulæ
Algebrae rejici placuit. Nam etiamſi quæſtionum satis multæ cum
Geometricarum, tum Arithmeticarum per hanc Algebrae regulam
enodari ac solui nequeant sine illo Algorithmō; nulla tamen inter
Algebrae scientiam, & eum Algorithmum cognatio tanta est, ut hæc
ab illo, tanquam nexu quodam adhærescant sibi, aut nunquam di-
uelli queat, aut aliquo modo ab eodem pendere dicenda sit. Primū
igitur Algorithmus Cosficorum, siue eorum, qui Denominati dicun-
tur, numerorum explicandus nobis est, qui ad hanc scientiam pe-
nitur cognoscendam omnino censetur necessarius. Tum ipsam Al-
gebrae regulam, & quæ omnia persequemur, quæ ad eiusdem regulæ
plenam cognitionem faciunt; quibus absolutis, a cap. 16. initium
facientes, totoq; 16. numerorum radicalium, & absolutorum &
Denominatorum, siue Cosficorum Algorithmum trademus. Extre-
mas partes Aenigmata agent, quibus propositis, & tandem expli-
catis, planior ac perfectior totius regulæ Algebrae sensus fiet, &
fructus uberior.

DE NUMERIS COSSICIS, sive Denominatis. Cap. II.



NUMERI Cossici, sive Denominati sunt omnes numeri cuiuscuque progressionis Geometricæ ab unitate incipientis. Proposita namq. progressionē qualibet Geometrica ab unitate initium sumente, Primus terminus, id est, unitas numerum absolutum, & simplicem representat: Secundus vero terminus unitatem sequens vocatur radix omnium sequentium, cum ex eius multiplicatione in seipsum procreetur tertius, & ex multiplicatione eiusdem secundi termini in tertium producatur quartus, & sic deinceps, ut in scholio propof. 10. lib. 8. Eucl. demonstrauimus. Tertius deinde terminus, quia prodicitur, ut dictum est, ex secundo in seipsum, dicitur Quadratus, seu Census, vel Zensus, ut nonnulli huius artis periti volunt. Quartus postea terminus appellatur Cubus, quoniam fit ex multiplicatione radicis, hoc est, secundi termini in suum quadratum, nimirum in tertium terminum, ut diximus. Atque ita deinceps omnes numeri progressionis Geometricæ, cuius initium est unitas, denominantur, habita ratione multiplicationis radicis in sequentes terminos.

Numeri Cossici qui sunt.

QVIA vero varie huiusmodi numeri a varijs auctoribus denominantur, de legimus nos ex omnibus modum quandam denominandi illos numeros faciem, & valde accommodatum, ut denominationes has quantumlibet extendere possimus, & appositis characteribus designare: appellantes nimirum numeros progressionis Geometricæ, numeros Cossicos: quia quidem in re nonnullos scriptores recentiores secuti sumus. Parum enim refert, si hoc nomine, vel alio appellentur numeri progressionis Geometricæ, dummodo res ipsa intelligatur. Denominationes autem hæc exprimuntur sequentibus characteribus

Cur numeros proportionis Geometricæ dicamus Cossicos.

N. 2e. 3. 4e. 5. 6e. 7. 8e. 9. 10e. 11. 12e. 13. 14e. 15. 16e. 17. 18e. 19. 20e. 21. 22e. 23. 24e. 25. 26e. 27. 28e. 29. 30e. 31. 32e. 33. 34e. 35. 36e. 37. 38e. 39. 40e. 41. 42e. 43. 44e. 45. 46e. 47. 48e. 49. 50e. 51. 52e. 53. 54e. 55. 56e. 57. 58e. 59. 60e. 61. 62e. 63. 64e. 65. 66e. 67. 68e. 69. 70e. 71. 72e. 73. 74e. 75. 76e. 77. 78e. 79. 80e. 81. 82e. 83. 84e. 85. 86e. 87. 88e. 89. 90e. 91. 92e. 93. 94e. 95. 96e. 97. 98e. 99. 100e. 101. 102e. 103. 104e. 105. 106e. 107. 108e. 109. 110e. 111. 112e. 113. 114e. 115. 116e. 117. 118e. 119. 120e. 121. 122e. 123. 124e. 125. 126e. 127. 128e. 129. 130e. 131. 132e. 133. 134e. 135. 136e. 137. 138e. 139. 140e. 141. 142e. 143. 144e. 145. 146e. 147. 148e. 149. 150e. 151. 152e. 153. 154e. 155. 156e. 157. 158e. 159. 160e. 161. 162e. 163. 164e. 165. 166e. 167. 168e. 169. 170e. 171. 172e. 173. 174e. 175. 176e. 177. 178e. 179. 180e. 181. 182e. 183. 184e. 185. 186e. 187. 188e. 189. 190e. 191. 192e. 193. 194e. 195. 196e. 197. 198e. 199. 200e. 201. 202e. 203. 204e. 205. 206e. 207. 208e. 209. 210e. 211. 212e. 213. 214e. 215. 216e. 217. 218e. 219. 220e. 221. 222e. 223. 224e. 225. 226e. 227. 228e. 229. 230e. 231. 232e. 233. 234e. 235. 236e. 237. 238e. 239. 240e. 241. 242e. 243. 244e. 245. 246e. 247. 248e. 249. 250e. 251. 252e. 253. 254e. 255. 256e. 257. 258e. 259. 260e. 261. 262e. 263. 264e. 265. 266e. 267. 268e. 269. 270e. 271. 272e. 273. 274e. 275. 276e. 277. 278e. 279. 280e. 281. 282e. 283. 284e. 285. 286e. 287. 288e. 289. 290e. 291. 292e. 293. 294e. 295. 296e. 297. 298e. 299. 300e. 301. 302e. 303. 304e. 305. 306e. 307. 308e. 309. 310e. 311. 312e. 313. 314e. 315. 316e. 317. 318e. 319. 320e. 321. 322e. 323. 324e. 325. 326e. 327. 328e. 329. 330e. 331. 332e. 333. 334e. 335. 336e. 337. 338e. 339. 340e. 341. 342e. 343. 344e. 345. 346e. 347. 348e. 349. 350e. 351. 352e. 353. 354e. 355. 356e. 357. 358e. 359. 360e. 361. 362e. 363. 364e. 365. 366e. 367. 368e. 369. 370e. 371. 372e. 373. 374e. 375. 376e. 377. 378e. 379. 380e. 381. 382e. 383. 384e. 385. 386e. 387. 388e. 389. 390e. 391. 392e. 393. 394e. 395. 396e. 397. 398e. 399. 400e. 401. 402e. 403. 404e. 405. 406e. 407. 408e. 409. 410e. 411. 412e. 413. 414e. 415. 416e. 417. 418e. 419. 420e. 421. 422e. 423. 424e. 425. 426e. 427. 428e. 429. 430e. 431. 432e. 433. 434e. 435. 436e. 437. 438e. 439. 440e. 441. 442e. 443. 444e. 445. 446e. 447. 448e. 449. 450e. 451. 452e. 453. 454e. 455. 456e. 457. 458e. 459. 460e. 461. 462e. 463. 464e. 465. 466e. 467. 468e. 469. 470e. 471. 472e. 473. 474e. 475. 476e. 477. 478e. 479. 480e. 481. 482e. 483. 484e. 485. 486e. 487. 488e. 489. 490e. 491. 492e. 493. 494e. 495. 496e. 497. 498e. 499. 500e. 501. 502e. 503. 504e. 505. 506e. 507. 508e. 509. 510e. 511. 512e. 513. 514e. 515. 516e. 517. 518e. 519. 520e. 521. 522e. 523. 524e. 525. 526e. 527. 528e. 529. 530e. 531. 532e. 533. 534e. 535. 536e. 537. 538e. 539. 540e. 541. 542e. 543. 544e. 545. 546e. 547. 548e. 549. 550e. 551. 552e. 553. 554e. 555. 556e. 557. 558e. 559. 560e. 561. 562e. 563. 564e. 565. 566e. 567. 568e. 569. 570e. 571. 572e. 573. 574e. 575. 576e. 577. 578e. 579. 580e. 581. 582e. 583. 584e. 585. 586e. 587. 588e. 589. 590e. 591. 592e. 593. 594e. 595. 596e. 597. 598e. 599. 600e. 601. 602e. 603. 604e. 605. 606e. 607. 608e. 609. 610e. 611. 612e. 613. 614e. 615. 616e. 617. 618e. 619. 620e. 621. 622e. 623. 624e. 625. 626e. 627. 628e. 629. 630e. 631. 632e. 633. 634e. 635. 636e. 637. 638e. 639. 640e. 641. 642e. 643. 644e. 645. 646e. 647. 648e. 649. 650e. 651. 652e. 653. 654e. 655. 656e. 657. 658e. 659. 660e. 661. 662e. 663. 664e. 665. 666e. 667. 668e. 669. 670e. 671. 672e. 673. 674e. 675. 676e. 677. 678e. 679. 680e. 681. 682e. 683. 684e. 685. 686e. 687. 688e. 689. 690e. 691. 692e. 693. 694e. 695. 696e. 697. 698e. 699. 700e. 701. 702e. 703. 704e. 705. 706e. 707. 708e. 709. 710e. 711. 712e. 713. 714e. 715. 716e. 717. 718e. 719. 720e. 721. 722e. 723. 724e. 725. 726e. 727. 728e. 729. 730e. 731. 732e. 733. 734e. 735. 736e. 737. 738e. 739. 740e. 741. 742e. 743. 744e. 745. 746e. 747. 748e. 749. 750e. 751. 752e. 753. 754e. 755. 756e. 757. 758e. 759. 760e. 761. 762e. 763. 764e. 765. 766e. 767. 768e. 769. 770e. 771. 772e. 773. 774e. 775. 776e. 777. 778e. 779. 780e. 781. 782e. 783. 784e. 785. 786e. 787. 788e. 789. 790e. 791. 792e. 793. 794e. 795. 796e. 797. 798e. 799. 800e. 801. 802e. 803. 804e. 805. 806e. 807. 808e. 809. 810e. 811. 812e. 813. 814e. 815. 816e. 817. 818e. 819. 820e. 821. 822e. 823. 824e. 825. 826e. 827. 828e. 829. 830e. 831. 832e. 833. 834e. 835. 836e. 837. 838e. 839. 840e. 841. 842e. 843. 844e. 845. 846e. 847. 848e. 849. 850e. 851. 852e. 853. 854e. 855. 856e. 857. 858e. 859. 860e. 861. 862e. 863. 864e. 865. 866e. 867. 868e. 869. 870e. 871. 872e. 873. 874e. 875. 876e. 877. 878e. 879. 880e. 881. 882e. 883. 884e. 885. 886e. 887. 888e. 889. 890e. 891. 892e. 893. 894e. 895. 896e. 897. 898e. 899. 900e. 901. 902e. 903. 904e. 905. 906e. 907. 908e. 909. 910e. 911. 912e. 913. 914e. 915. 916e. 917. 918e. 919. 920e. 921. 922e. 923. 924e. 925. 926e. 927. 928e. 929. 930e. 931. 932e. 933. 934e. 935. 936e. 937. 938e. 939. 940e. 941. 942e. 943. 944e. 945. 946e. 947. 948e. 949. 950e. 951. 952e. 953. 954e. 955. 956e. 957. 958e. 959. 960e. 961. 962e. 963. 964e. 965. 966e. 967. 968e. 969. 970e. 971. 972e. 973. 974e. 975. 976e. 977. 978e. 979. 980e. 981. 982e. 983. 984e. 985. 986e. 987. 988e. 989. 990e. 991. 992e. 993. 994e. 995. 996e. 997. 998e. 999. 1000e. 1001. 1002e. 1003. 1004e. 1005. 1006e. 1007. 1008e. 1009. 1010e. 1011. 1012e. 1013. 1014e. 1015. 1016e. 1017. 1018e. 1019. 1020e. 1021. 1022e. 1023. 1024e. 1025. 1026e. 1027. 1028e. 1029. 1030e. 1031. 1032e. 1033. 1034e. 1035. 1036e. 1037. 1038e. 1039. 1040e. 1041. 1042e. 1043. 1044e. 1045. 1046e. 1047. 1048e. 1049. 1050e. 1051. 1052e. 1053. 1054e. 1055. 1056e. 1057. 1058e. 1059. 1060e. 1061. 1062e. 1063. 1064e. 1065. 1066e. 1067. 1068e. 1069. 1070e. 1071. 1072e. 1073. 1074e. 1075. 1076e. 1077. 1078e. 1079. 1080e. 1081. 1082e. 1083. 1084e. 1085. 1086e. 1087. 1088e. 1089. 1090e. 1091. 1092e. 1093. 1094e. 1095. 1096e. 1097. 1098e. 1099. 1100e. 1101. 1102e. 1103. 1104e. 1105. 1106e. 1107. 1108e. 1109. 1110e. 1111. 1112e. 1113. 1114e. 1115. 1116e. 1117. 1118e. 1119. 1120e. 1121. 1122e. 1123. 1124e. 1125. 1126e. 1127. 1128e. 1129. 1130e. 1131. 1132e. 1133. 1134e. 1135. 1136e. 1137. 1138e. 1139. 1140e. 1141. 1142e. 1143. 1144e. 1145. 1146e. 1147. 1148e. 1149. 1150e. 1151. 1152e. 1153. 1154e. 1155. 1156e. 1157. 1158e. 1159. 1160e. 1161. 1162e. 1163. 1164e. 1165. 1166e. 1167. 1168e. 1169. 1170e. 1171. 1172e. 1173. 1174e. 1175. 1176e. 1177. 1178e. 1179. 1180e. 1181. 1182e. 1183. 1184e. 1185. 1186e. 1187. 1188e. 1189. 1190e. 1191. 1192e. 1193. 1194e. 1195. 1196e. 1197. 1198e. 1199. 1200e. 1201. 1202e. 1203. 1204e. 1205. 1206e. 1207. 1208e. 1209. 1210e. 1211. 1212e. 1213. 1214e. 1215. 1216e. 1217. 1218e. 1219. 1220e. 1221. 1222e. 1223. 1224e. 1225. 1226e. 1227. 1228e. 1229. 1230e. 1231. 1232e. 1233. 1234e. 1235. 1236e. 1237. 1238e. 1239. 1240e. 1241. 1242e. 1243. 1244e. 1245. 1246e. 1247. 1248e. 1249. 1250e. 1251. 1252e. 1253. 1254e. 1255. 1256e. 1257. 1258e. 1259. 1260e. 1261. 1262e. 1263. 1264e. 1265. 1266e. 1267. 1268e. 1269. 1270e. 1271. 1272e. 1273. 1274e. 1275. 1276e. 1277. 1278e. 1279. 1280e. 1281. 1282e. 1283. 1284e. 1285. 1286e. 1287. 1288e. 1289. 1290e. 1291. 1292e. 1293. 1294e. 1295. 1296e. 1297. 1298e. 1299. 1300e. 1301. 1302e. 1303. 1304e. 1305. 1306e. 1307. 1308e. 1309. 1310e. 1311. 1312e. 1313. 1314e. 1315. 1316e. 1317. 1318e. 1319. 1320e. 1321. 1322e. 1323. 1324e. 1325. 1326e. 1327. 1328e. 1329. 1330e. 1331. 1332e. 1333. 1334e. 1335. 1336e. 1337. 1338e. 1339. 1340e. 1341. 1342e. 1343. 1344e. 1345. 1346e. 1347. 1348e. 1349. 1350e. 1351. 1352e. 1353. 1354e. 1355. 1356e. 1357. 1358e. 1359. 1360e. 1361. 1362e. 1363. 1364e. 1365. 1366e. 1367. 1368e. 1369. 1370e. 1371. 1372e. 1373. 1374e. 1375. 1376e. 1377. 1378e. 1379. 1380e. 1381. 1382e. 1383. 1384e. 1385. 1386e. 1387. 1388e. 1389. 1390e. 1391. 1392e. 1393. 1394e. 1395. 1396e. 1397. 1398e. 1399. 1400e. 1401. 1402e. 1403. 1404e. 1405. 1406e. 1407. 1408e. 1409. 1410e. 1411. 1412e. 1413. 1414e. 1415. 1416e. 1417. 1418e. 1419. 1420e. 1421. 1422e. 1423. 1424e. 1425. 1426e. 1427. 1428e. 1429. 1430e. 1431. 1432e. 1433. 1434e. 1435. 1436e. 1437. 1438e. 1439. 1440e. 1441. 1442e. 1443. 1444e. 1445. 1446e. 1447. 1448e. 1449. 1450e. 1451. 1452e. 1453. 1454e. 1455. 1456e. 1457. 1458e. 1459. 1460e. 1461. 1462e. 1463. 1464e. 1465. 1466e. 1467. 1468e. 1469. 1470e. 1471. 1472e. 1473. 1474e. 1475. 1476e. 1477. 1478e. 1479. 1480e. 1481. 1482e. 1483. 1484e. 1485. 1486e. 1487. 1488e. 1489. 1490e. 1491. 1492e. 1493. 1494e. 1495. 1496e. 1497. 1498e. 1499. 1500e. 1501. 1502e. 1503. 1504e. 1505. 1506e. 1507. 1508e. 1509. 1510e. 1511. 1512e. 1513. 1514e. 1515. 1516e. 1517. 1518e. 1519. 1520e. 1521. 1522e. 1523. 1524e. 1525. 1526e. 1527. 1528e. 1529. 1530e. 1531. 1532e. 1533. 1534e. 1535. 1536e. 1537. 1538e. 1539. 1540e. 1541. 1542e. 1543. 1544e. 1545. 1546e. 1547. 1548e. 1549. 1550e. 1551. 1552e. 1553. 1554e. 1555. 1556e. 1557. 1558e. 1559. 1560e. 1561. 1562e. 1563. 1564e. 1565. 1566e. 1567. 1568e. 1569. 1570e. 1571. 1572e. 1573. 1574e. 1575. 1576e. 1577. 1578e. 1579. 1580e. 1581. 1582e. 1583. 1584e. 1585. 1586e. 1587. 1588e. 1589. 1590e. 1591. 1592e. 1593. 1594e. 1595. 1596e. 1597. 1598e. 1599. 1600e. 1601. 1602e. 1603. 1604e. 1605. 1606e. 1607. 1608e. 1609. 1610e. 1611. 1612e. 1613. 1614e. 1615. 1616e. 1617. 1618e. 1619. 1620e. 1621. 1622e. 1623. 1624e. 1625. 1626e. 1627. 1628e. 1629. 1630e. 1631. 1632e. 1633. 1634e. 1635. 1636e. 1637. 1638e. 1639. 1640e. 1641. 1642e. 1643. 1644e. 1645. 1646e. 1647. 1648e. 1649. 1650e. 1651. 1652e. 1653. 1654e. 1655. 1656e. 1657. 1658e. 1659. 1660e. 1661. 1662e. 1663. 1664e. 1665. 1666e. 1667. 1668e. 1669. 1670e. 1671. 1672e. 1673. 1674e. 1675. 1676e. 1677. 1678e. 1679. 1680e. 1681. 1682e. 1683. 1684e. 1685. 1686e. 1687. 1688e. 1689. 1690e. 1691. 1692e. 1693. 1694e. 1695. 1696e. 1697. 1698e. 1699. 1700e. 1701. 1702e. 1703. 1704e. 1705. 1706e. 1707. 1708e. 1709. 1710e. 1711. 1712e. 1713. 1714e. 1715. 1716e. 1717. 1718e. 1719. 1720e. 1721. 1722e. 1723. 1724e. 1725. 1726e. 1727. 1728e. 1729. 1730e. 1731. 1732e. 1733. 1734e. 1735. 1736e. 1737. 1738e. 1739. 1740e. 1741. 1742e. 1743. 1744e. 1745. 1746e. 1747. 1748e. 1749. 1750e. 1751. 1752e. 1753. 1754e. 1755. 1756e. 1757. 1758e. 1759. 1760e. 1761. 1762e. 1763. 1764e. 1765. 1766e. 1767. 1768e. 1769. 1770e. 1771. 1772e. 1773. 1774e. 1775. 1776e. 1777. 1778e. 1779. 1780e. 1781. 1782e. 1783. 1784e. 1785. 1786e. 1787. 1788e. 1789. 1790e. 1791. 1792e. 1793. 1794e. 1795. 1796e. 1797. 1798e. 1799. 1800e. 1801. 1802e. 1803. 1804e. 1805. 1806e. 1807. 1808e. 1809. 1810e. 1811. 1812e. 1813. 1814e. 1815. 1816e. 1817. 1818e. 1819. 1820e. 1821. 1822e. 1823. 1824e. 1825. 1826e. 1827. 1828e. 1829. 1830e. 1831. 1832e. 1833. 1834e. 1835. 1836e. 1837. 1838e. 1839. 1840e. 1841. 1842e. 1843. 1844e. 1845. 1846e. 1847. 1848e. 1849. 1850e. 1851. 1852e. 1853. 1854e. 1855. 1856e. 1857. 1858e. 1859. 1860e. 1861. 1862e. 1863. 1864e. 1865. 1866e. 1867. 1868e. 1869. 1870e. 1871. 1872e. 1873. 1874e. 1875. 1876e. 1877. 1878e. 1879. 1880e. 1881. 1882e. 1883. 1884e. 1885. 1886e. 1887. 1888e. 1889. 1890e. 1891. 1892e. 1893. 1894e. 1895. 1896e. 1897. 1898e. 1899. 1900e. 1901. 1902e. 1903. 1904e. 1905. 1906e. 1907. 1908e. 1909. 1910e. 1911. 1912e. 1913. 1914e. 1915. 1916e. 1917. 1918e. 1919. 1920e. 1921. 1922e. 1923. 1924e. 1925. 1926e. 1927. 1928e. 1929. 1930e. 1931. 1932e. 1933. 1934e. 1935. 1936e. 1937. 1938e. 1939. 1940e. 1941. 1942e. 1943. 1944e. 1945. 1946e. 1947. 1

vt numerus, cui appositus sit, a radicibus denominetur. vt 4 re . significant quatuor radices, vel res. Vnde si progressio Geometrica habeat 3. in secundo loco, erunt 4 re . octo unitates: si vero 3. duodecim unitates. & sic de ceteris.

Tertius character K . repræsentat quadratum, quem sensum nonnulli dicunt: vt 4 K . sunt quatuor quadrati vel sensi. Itaq. si tertius numerus progressionis Geometricæ sit 4. erunt 4 K . decem & sex unitates: Si autem 9. triginta sex unitates. &c.

Quartus character ce . denotat cubum. vt 4 ce . significat quatuor cubos: ita vt si cubus fuerit 2. 4 ce . sint 32. unitates: si 27. 4 ce . sint 108. unitates. &c.

Idem dicendum est de reliquis characteribus, quorū significationes hic sunt subscripæ, una cum appellationibus, & signis, quibus alij scriptores vtuntur. Quemadmodum enim appellationes numerorū Cossicorum apud scriptores varios varix sunt, vt diximus, ita etiam signa seu characteres, quibus ipsas exprimunt, iidem non sunt.

N. Numerus simplex, & absolutus.

re. Radix. Italis Res, vel Cosa. Vnde hoc modo ab ipsis radix exprimitur. 1 co. 4 co. 10 co. &c. Alij vero ita designant. 1 R. 100 W. &c.

q. Zensus, siue Quadratus. Alij quadratum exprimunt hoc characterē q. vt 1 q. 30 q. 8 q. &c. Itali sic notant. ce. vt 1 ce. 4 ce. 10 ce. &c.

cu. Cubus. Alij artifices ita depingunt. cu. vt 7 cu. 8 cu. 100 cu. &c.

qq. Zenzizensus, siue Quadratiquadratus. Nonnulli ita signant. qq. vt 3 qq. 10 qq. &c. Itali vero sic. ce.ce. vt 4 ce.ce. 9 ce.ce. 12 ce.ce. &c.

Rel. Surdesolidus. Hunc alij dicunt Surfolidum, vel Superfolidum. Italis dicitur Relatum primum. Vnde ita solent exprimere. Rel.P. vt 11 Rel.P. 20 Rel.P. &c.

ce. Zensicubus, seu Quadratus cubi. vel Cubizensus. Quadraticubus. Cubus quadrati. Cubiquadratus. Alij hoc characterē vtuntur. qce. Possent quoque hic numerus inuersis notis signari, vt ce.K.ceq. Itali hoc modo signant. ce.cu. vel cu.ce.

B. Bisurdesolidus. Secundum quosdam Bisurdesolidus, vel Surdesolidus, aut Superfolidus secundus. Apud Italos vocatur Relatum secundum. vnde ita depingunt. Rel.2.

qqq. Zenzizenzensus, seu Quadratus quadratiquadrati. Quem ita nonnulli denotant. qqq. Itali vero sic. ce.ce.ce.

ce. Cubicubus, seu Cubus cubi. qui ita a quibusdam pingitur. cce. Ab Italis autem sic. cu.cu.

B. Zensurdesolidus, seu quadratus Surdesolidi, vel Surdesolidus quadrati. Hunc ita nonnulli designant. q.B. Itali vero, quoniam eum vocant censum Relati primi, hoc modo notant. ce. Rel.P.

C. 2. Csurdefolidus. Secundum alios Tersurdefolidus, vel Superfolidus tertius. Italis dicitur Relatum tertium, & ita pingitur. Rel. 3.

Eodem modo proportionem quadā reliqua signa, siue characteres Cossici explicari poterunt, qui quidem in infinitum progrediuntur, ut mox dicemus.

V T autem cognoscamus, quidnam sibi velint prædictæ denominationes, & qua ratione originem ducant a terminis cuiusque progressionis Geometricæ ab unitate initium sumentis; considerandæ sunt diligenter sequentes duæ progressionēs, una cum supradictis characteribus Cossicis in medio earum positis.

Quomodo series naturalis numerorum numeris Cossicis progressionis Geometricæ exponat.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
N.	2e.	8.	te.	88.	8.	8te.	B.8.	888.	ce.	8.8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	8cc.
C.8.	88te.	D.8.	8B.8.	te.8.	8888.	E.8.	8cc.
2048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65536.	131072.	8cc.

PRIOR progressio est naturalis numerorum series incipientium ab o. qui exponunt & signa Cossica subscripta, & terminos posterioris progressionis, quæ Geometrica est, ab unitate initium ducens: appellanturq. numeri ordinis superioris exponentes terminorum progressionis Geometricæ, & signorum Cossicorum. Hæc autem expositio in hoc consistit. Prima figura o, habens sub se N, & 1. indicat numerum simplicem & absolutum ex unitatibus compositum, & ob id nullo exponente insignitur. quamvis improprie hæc figura o, dici possit Exponens numeri absoluti. Secundus terminus 1. supra 2. & 2e. ostendit numerum secundum progressionis Geometricæ esse primam denominationem in numeris Cossicis, appellariq. Radicem. Tertius deinde terminus 2. manifestat, tertium numerum Geometricæ progressionis esse secundam denominationem, vocariq. Zenfum, siue Quadratum. Sic quoque 6. demonstrat, sextam denominationem esse numerum Zensicubum, & sic de cæteris: &c. &c. &c.

DEINDE iidem numeri exponentes progressionis naturalis numerosam docent, quot proportionēs progressionis Geometricæ interterijciantur inter quemlibet numerum eiusdem Geometricæ progressionis, atque unitatem. Ut 1. supra 2e. & 2. significat, inter 2. quemlibet numerum suæ radicem progressionis Geometricæ, atque unitatem contineri unam proportionem 2. ad 1. At 2. supra 8. & 4. indicant, inter 8. siue 4. quadratumve, atque unitatem comprehendi duas proportionēs 4. ad 2. & 2. ad 1. Item 3. supra te, & 8. monet, inter 8. siue te, & unitatem cadere tres proportionēs 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. & sic de cæteris, ut 6. supra 8te. & 64. monstrat, inter 64. siue

græ. atque unitatem intercipi sex proportiones 64. ad 32. & 32. ad 16. & 16. ad 8. & 8. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. &c.

Cuius characteris exponent gignatur ex mutua multiplicatione, divisioneque duorum exponentium.

PRAETEREA quilibet duo exponentes numeri inter se multiplicati producant exponentem characteris Cossici, qui ex characteribus assumptorum exponentium componitur. Ut ductis 2. in 7. fit 6. exponents characteris græ, qui ex 2. & 7. componitur. Item ex 3. in 5. fit exponents 15. characteris ætæ. ex 7. & 5. cōpositi. &c. Sic etiam diuisio quouis numero exponente maiore per minorem, quemcunque, indicabit Quotiens, si integer numerus est, exponentem characteris Cossici, qui relinquitur, si ex characterē numeri exponentis diuisi, tollatur character numeri exponentis, per quem facta est diuisio. Ut si 6. exponents characteris græ. diuidatur per 2. exponentem characteris 2. fit Quotiens 3. exponents characteris ætæ. qui relinquitur, si ex characterē græ, exponentis 6. auferatur character 2. exponentis 2. Item si numerus 15. exponents characteris ætæ. diuidatur per 5. exponentem characteris 3. fit Quotiens 3. exponents characteris ætæ, qui relinquitur, si ex ætæ. tollatur 3. &c.

RVRSVS hæc figura 2. posita supra 4. & 8. docet, quadratum, seu secundam denominationem produci ex multiplicatione radicis bis positæ. Nam si radix 2. ponatur bis hoc modo 2. 2. & fiat multiplicatio 2. in 2. procreabitur Quadratus, seu Zenius 4. Eodem pacto figura hæc 3. posita supra 8. & ætæ. significat, cubum, siue tertiam denominationem produci ex radice ter positæ, & multiplicata. Nam si radix 2. ter ponatur, ut hic, 2. 2. 2. fiatq. multiplicatio 2. in 2. & producti numeri in 2. exurget cubus 8. Sic quoque figura 5. monstrat, numerum Surdesolidum procreari ex multiplicatione radicis quinquies positæ, ut hic. 2. 2. 2. 2. 2. Eademq. est ratio de omnibus alijs.

Definitio vniuscuiusque numeri Cossici.

E X his facile definiuntur omnes numeri Cossici. Si enim petatur, quid sit v.g. numerus Bsurdesolidus, dicemus eum esse numerum, qui ex aliquo numero septies positō, & multiplicato gignitur. Ut 128. nascitur ex multiplicatione huius radicis 2. septies positæ in hunc modum, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. Similiter Zenizenus erit numerus, quem numerus aliquis quater positus sua multiplicatione producit, &c. Semper autem numerus, qui aliquoties positus multiplicatione sua numerum aliquem procreat, dicitur radix producti numeri. Ut quoniam 2. positus decies hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & multiplicatus facit hunc numerum 1024. qui est 8.8. idcirco 2. dicitur radix Zensurdesolidi huius numeri 1024. Idemq. de alijs dicendum est.

VIDES igitur, quam apposite naturalis progressio numerorum ab o. incipientium, & supra progressionem Geometricam ab unitate cœptam posita, dicatur exponere terminos progressionis Geometricæ.

CAETERVM non solum ex multiplicatione radicis aliquoties positæ producantur numeri progressionis Geometricæ, ut exposuimus, verum etiam ex multiplicatione numerorum aliorum inter se,

fe, vt signa eorum Cossica demonstrent. Vt licet hic numerus Zensurdesolidus 1024. gignatur ex radice decies posita, hoc modo, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. vt eius exponent 10. indicat: tamen quia eius signum Cossicum β , constat ex his duobus signis Cossicis γ . & δ . quorum exponentes sunt 2. & 5. idcirco si eadem radix 2. bis ponatur, hoc modo, 2. 2. propter 2. exponentem signi γ . & multiplicetur, vt producat 4. & hic productus quinque positus, hoc modo, 4. 4. 4. 4. 4. ob 5. exponentem signi δ . multiplicetur, procreabitur idem numerus 1024. Eodem modo, si radix 2. quinque ponatur, propter signum δ . atque ita multiplicetur, & productus numerus 32. ponatur bis, propter signum γ . idem numerus gignetur. Nam radix ita multiplicata 2. 2. 2. 2. 2. facit 32. hic autem numerus ita multiplicatus 32. 32. procreat 1024. atque ita de reliquis dicendum est, si eorum signa Cossica ex pluribus signis Cossicis componantur.

EST quoque in superioribus progressionibus dignum consideratione, quod additio numerorum progressionis Arithmetice respondet multiplicationi numerorum progressionis Geometricae: & subtractio diuisioni. Sicut enim exempli gratia, 2. & 5. faciunt 7. si simul addantur, ita quoque γ . & δ . quorum 2. & 5. sunt exponentes, nempe 4. & 32. inter se multiplicati producant 128. id est, β . cuius exponent est 7. Item sicut 3. & 9. simul faciunt 12. ita ϵ . & ζ . nimirum 8. & 12. quorum exponentes sunt 3. & 9. inter se multiplicati gignunt 4096. hoc est, η . cuius exponent est 12. atque eodem modo de reliquis dicendum est.

RVRSVS quemadmodum subtrahendo 5. a 7. remanent 2. ita, diuidendo β . nempe 128. cuius exponent est 7. per δ . hoc est, per 32. cuius exponent est 5. prodit numerus 4. nempe γ . cuius exponent est 2. Similiter sicut subtrahendo 3. ex 12. relinquuntur 9. ita diuidendo η . hoc est, 4096. cuius exponent est 12. per ϵ . id est, per 8. cuius exponent est 3. producit ζ . nempe 12. cuius exponent est 9. & sic de ceteris. Demonstrationem huius rei afferemus in Multiplicatione, & Diuisione numerorum Cossicorum.

QVOD autem dictum est hactenus de progressionem Geometricam duplicis proportionis, quae ab unitate incipit, idem intelligendum est in quavis alia progressionem Geometricam, cuius initium unitas est: cuiusmodi sunt verbi gratia dux sequentes progressionem Geometricam, quarum prior continet proportionem quadruplas, posterior autem septuplas completitur.

Additio & subtractio id faciunt in serie naturali numerorum, quod Multiplicatio & Diuiso in progressionem Geometricam.

Arith.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Sec.
Geom.	N.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.
Arith.	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.	16384.	65536.
Geom.	N.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Arith.	1.	7.	49.	343.	2401.	16807.	117649.	823543.	59270321.

*Quomodo om-
nes numeri
progressionis
Geometricae
sint denomi-
nandi.*

Omnia namq. quae dicta sunt, ad has duas progressionis, & ad omnes alias transferri facile possunt.

SUPEREST, ut doceamus quam ratione omnes numeri progressit cuiuscunque progressionis Geometricae ab unitate incipientis denominandi sint, aut (quod idem est) quanam signa Cossica dictis numeris tribuenda sint, & ascribenda. Quod quidem facile praestabimus, si prius denominemus numeros, quorum exponentes sunt numeri primi, cuiusmodi sunt sequentes.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. &c.
Horum autem characteres, siue signa, quae ipsi exponunt, haec sunt:
g. ce. a. B. C. D. E. F. G. H. I. K. L. M. N. O.
P. Q. R. &c.

Cum enim tertius numerus ab unitate in progressionem quavis Geometrica sit quadratus, ut demonstratur propof. 8. lib. 9. Eucl. erit eius signum g, cuius exponent 2. Rursus quia quartus numerus ab unitate est Cubus, ut constat ex eadem propof. erit eius nota ce, & exponent 3. Deinde quia sextus ab unitate numerus, quem exponit numerus primus 5, neque quadratus est, neque cubus, nisi quando secundus numerus ab unitate quadratus est, vel cubus, ut ex propof. 10. lib. 9. Eucl. liquido constat, tribuerunt ei scriptores hoc signum B, ita ut Surdesolidus appellatus sit. Quoniam vero idem in reliquis numeris, quorum exponentes sunt numeri primi, contingit, ita ut neque quadrati sint, neque cubi, primo ab unitate non existente quadrato, vel cubo, ut ex eadem propof. perspicuum est, appellati sunt quoque illi numeri progressionis Geometricae, qui exponentes habent numeros primos, Surdesolidi, ita ut is, quem exponit 7. dicatur secundus Surdesolidus, qui vero exponitur ab 11. Tertius Surdesolidus, & sic de ceteris. Sed quia, si secundus Surdesolidus ita signetur, a. & tertius sic, 3. B. facile nota Arithmetica huic signo B. appositae alios numeros confundere & perturbare possunt, visum est artificibus loco notarum Arithmeticarum ascribere literas Alphabeti, denominareq. secundum B. B. a. secunda litera, & tertium C. a. tertia litera, &c. Hoc igitur modo formantur signa & characteres numerorum Cossicorum, quorum exponentes sunt numeri primi, ut haec formula indicat.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. &c.
g. ce. a. B. C. D. E. F. G. H. I. K. L. M. N. O. P. Q. R. &c.

EX his inuenimus characteres ceterorum numerorum Cossicorum, quorum exponentes non sunt numeri primi, sed compositi, hoc modo. Resoluatur numerus exponens compositus, cuius denominatio, & character desideratur, in suas partes aliquotas in-compositas, quae inter se ordine multiplicatae ipsum constituent, atque producant. quod in hunc modum fiet.

Numeri compositi in suas **NUMERVS** compositus datus diuidatur per minimum numerum primum, per quem diuidi potest: Similiter quotiens, si fuerit numerus

merus compositus: Rursus hic quotiens, si fuerit compositus, per numerum primum minimum, qui eum numeret, diuidatur: atque ita deinceps continuè fiat diuisio, donec occurrat quotiens, qui sit ita deinceps continuè fiat diuisio, donec occurrat quotiens, qui sit numerus primus, nullam videlicet habens partem aliquotam. Nam si omnes diuisores eiusmodi, etiam si aliqui saepius repetantur, una cum ultimo quotiente ordine ponantur, & inter se multiplicentur, cum ultimo quotiente sunt partes incompositae datum numerum compositum per multiplicationem constituentes. Vt si numerus compositus datus sit 924. Primo diuido eum, quoniam par est, per 2. tanquam per eius partem incompositam minimam, inuenioq. quotientem 462. Referuo autem 2. Rursus quotientem 462. quia par est, diuido per 2. efficioq. quotientem 231. & referuo iterum 2. Deinde quotientem 231. quia impar est, diuido per 3. tanquam per minimum numerum primum, reperioq. quotientem 77. (quod si aliquid in diuisione relictum fuisset, expertus fuisset diuisionem per 4. 7. & alios numeros primos, donec nihil fuisset residuum. Et si nullum talem diuisorem, qui nihil relinquat, inuenirem, tunc primi duo diuisores 2. 2. & ultimus quotiens essent partes incompositae datum numerum restituentes, & nulla alia dari posset, praeter unitatem.) Referuo igitur 3. Et rursus diuido 77. per 7. sed quoniam aliquid superest in diuisione, non referuo 3. sed eundem quotientem 77. partior per 7. sed quia aliquid superest in diuisione, diuido eundem per 7. inuenioq. quotientem 11. numerum primum. Sunt ergo partes incompositae 2. 2. 3. 7. 11. numerum datus 924. sua multiplicatione restituentes.

DEINDE omnibus partibus aliquotis incompositis ignotis characteres debiti subscribantur. Hac enim ratione proficit character integer compositus integri numeri exponentis. Exemplum. Inueniendum sit signum Cossicum numeri trigessimiprimi Cossici, cuius exponentis est numerus hic compositus 30. Quotus enim numerus Cossicus est ab unitate, tot unitates, minus una, continet eius exponentis, ut ex antedictis progressionibus apparere potest. Quoniam igitur partes ipsius aliquotae incompositae sua multiplicatione ipsum procreantes sunt 2. 3. 5. quarum signa sunt γ . τ . ϵ . Idcirco numerus dictus trigessimiprimus hoc signo Cossico decorabitur $\gamma\tau\epsilon$, appellabiturq. Zensicubifurdesolidus. Eodem modo exponentis 14. cuius partes incompositae sunt 2. 2. 3. 7. habebit signum Cossicum $\gamma\gamma\tau\epsilon$. Ita quoque exponentis 100, cuius partes incompositae sunt 2. 2. 5. 5. hoc signum Cossicum sortietur $\gamma\gamma\epsilon\epsilon$. & sic de ceteris.

IDEM consequemur hac ratione. Accipiantur duo quicunque numeri, qui inter se multiplicati producant exponentem numerum oblatum. Nam eorum signa Cossica component signum Cossicum propositi numeri exponentis. ut si exponentis sit 12. numeri sua multiplicatione ipsum producentes sunt 3. & 4. quorum signa Cossica sunt $\tau\epsilon$, & $\gamma\gamma$. Signum igitur Cossicum exponentis 12 est $\gamma\gamma\tau\epsilon$. Semper

partes incompositas resoluere, quae ipsum producant.

modi quoque
diuisio
reperioq. quotientem
diuisio
reperioq. quotientem
diuisio
reperioq. quotientem

diuisio
reperioq. quotientem
diuisio
reperioq. quotientem

diuisio
reperioq. quotientem
diuisio
reperioq. quotientem

DE NVMERATIONE COSSICORVM
numerorum. Cap. III.

RACILIS est ex dictis Numeratio numerorum Cossicorum. Quando enim soli ponuntur, vt 5 2e. vel 8 3. vel 20 re. &c. exprimuntur hoc modo, quinque radices, vel 8. Zens, siue quadrati, vel 20. cubi, &c. Quando autem coniuncti inter se proponuntur, medio hoc signo +, vel hoc —. vt 5 2e + 8 3. vel 8 3 — 5 2e. vel 20 re + 8 3 — 5.

Explicatio signorum + & —.

habenda est maxima ratio horum signorum +. —. quorum illud dicitur signum additorum, significatq. plus, vel additionem; hoc vero appellatur signum subtractorum, denotatq. minus, vel diminutionem, aut subtractionem. Hinc factum est, vt numeri illi, quibus interponitur signum +, dicti sint compositi. Quibus vero interijcitur signum —, nominati sint Diminuti. Quibus denique utrumque signum interponitur, appellati sint mixti. licet omnes dici possint compositi. Itaq. compositus hic. 5 2e + 8 3. esset hoc modo. 5 radices, plus 8 zens. Hic vero Diminutus 8 3 — 5 2e. hoc modo. 8 zens, minus 5 radices. Mixtus vero iste, 20 re + 8 3 — 5. hoc pacto. 20 cubi, plus 8 zens, minus 5. vnitates. Nam, vt dictum est, numerus, qui post se non habet characterem aliquem Cossicum, significat numerum absolutum ex vnitatibus compositum.

Numeri Cossici compositi, Diminuti & mixti qui.

REFERVNTVR autem, vt patet, hæc signa +. —. ad numeros, qui ea sequuntur, nunquam autem ad præcedentes. Item numerus, quem neutrum horum signorum præcedit, intelligitur habere signum additorum +. Sensus porro numerorum compositorum, diminutorum, vel mixtorum facilis est. Nam cum dicimus 5 2e + 8 3, intelligimus 5. radices vna cum 8 zens: hoc est, vnitates 42. si radix est 2. & quadratus, vel zensus 4. Sic cum dicimus 8 3 — 5 2e, intelligimus ex 8 zens detractas esse 5 radices. vnde si radix est 2, arque adeo zensus 4. continebit numerus propositus. vnitates 22. Idem dicendum est de alijs.

QVONIAM vero in antecedenti capite numerorum Cossicorum, cuiusmodi sunt 2e. 3. re. &c. appellauimus interdum etiam signa Cossica; vt vitemus omnem confusionem, appellabimus in sequentibus has notas 2e. 3. re. &c. characteres, has vero +. —. signa.

PLERIQVE auctores pro signo + ponunt literam P, vt significet plus: pro signo vero — ponunt literam M, vt significet minus. Sed placet nobis vti nostris signis, vt a literis distinguantur, ne confusio oriatur.

PRAETEREA inter recentiores non pauci radices surdas, vt vocant,

*Radices sur-
da quæ passio
signetur.*

*Signum radi-
cale quid.*

vocant, vel irrationales, quæ videlicet numeris exprimi nequeunt, notant hoc signo $\sqrt{\quad}$. quod statim insequitur character Cossicus $\sqrt{\quad}$, vel $\sqrt{\quad}$, vel $\sqrt{\quad}$. &c. prout radix illa est quadrata, Zensificave, vel Cubica, vel Zensificata, siue quadratiquadrata, &c. V.g. radicem quadratam numeri 12. designat hoc modo. $\sqrt{12}$. cubicam hoc modo $\sqrt[3]{12}$. & Zensificatam hac ratione, $\sqrt[4]{12}$. atque hanc ob causam signum hoc $\sqrt{\quad}$ radicale appellatur. Quo signo nos etiam in sequentibus utemur: quippe cum minor confusio ex eo oriatur, quâ si quod plerique faciunt, radicem quadratam ita signemus, Rq. Cubicam hoc modo, R cu. Zensificatam hoc alio, Rqq. &c. Facile enim ex hac designatione, literæ Rq. Rcu. Rqq. cum alijs literis confunduntur. Diligenter ergo hæc signa $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$. &c. addiscenda sunt, ut ea, quæ sequuntur, intelligantur, quando nimirum huiusmodi signa occurrunt. Sciendum tamen, quotiescunque nominatur radix alicuius numeri, sine voce, quadrata, cubica, surdissima, vel zensificata, &c. vel illi numero præfigitur signum hoc $\sqrt{\quad}$. sine characterē $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, &c. intelligi radicem quadratam simpliciter apud scriptores. quod a nobis etiam non raro observabitur.

DE ADDITIONE ET SVBTRACTIONE numerorum Cossicorum. Cap. IIII.

Additio Cossicorum numerorum alicuius denominationis.

Additio numerorum Cossicorum eiusdem denominationis.

Subtractio numerorum Cossicorum diversarum denominationum.

Subtractio numerorum Cossicorum eiusdem denominationis.



QUANDO numerus Cossicus additur numero Cossico alterius denominationis, vel characteris, absoluitur additio mediante hoc signo $+$, sitq. numerus compositus. Ut hi duo numeri 6 $\sqrt{2}$. & 8. simul additi faciunt 6 $\sqrt{2}$ + 8. Item 6 $\sqrt{2}$. & 8 $\sqrt{2}$. faciunt 6 $\sqrt{2}$ + 8 $\sqrt{2}$. &c.

QUANDO vero addendus est numerus Cossicus alteri numero Cossico eiusdem appellationis, vel characteris, additur simul numeri, & summæ apponitur idem character Cossicus. Ut hi numeri 4 $\sqrt{2}$. & 9 $\sqrt{2}$. simul additi faciunt 13 $\sqrt{2}$. Item 5 $\sqrt{2}$. & 4 $\sqrt{2}$. faciunt 9 $\sqrt{2}$. &c.

PARI ratione, quando numerus Cossicus subtrahitur a numero Cossico alterius denominationis, absoluitur subtractio mediante hoc signo $-$, sitq. numerus diminutus. Ut hic numerus 6 $\sqrt{2}$. deductus ex 8 $\sqrt{2}$. relinquit 2 $\sqrt{2}$. Item 12. ex 6. $\sqrt{2}$. relinquit 6 $\sqrt{2}$ - 12. & sic de cæteris.

QUANDO vero numerus Cossicus subtrahendus est ex altero numero Cossico eiusdem characteris, subtrahitur numerus a numero, & reliquo numero idem character assignitur. Ut 4 $\sqrt{2}$. ex 9 $\sqrt{2}$. relinquit 5 $\sqrt{2}$. Et 9 $\sqrt{2}$. ex 20 $\sqrt{2}$. relinquit 11 $\sqrt{2}$. &c.

SED quando Cossici numeri compositi, diminuti, & mixti inter se ad-

se adduntur, vel alter ab altero subtrahitur, ponendus erit alter sub altero, ita ut numeri eiusdem appellationis inter se respondeant, quemadmodum in fractionibus Astronomicis fieri consuevit. Quod si in alterutro eorum non reperiatur numerus respondens alicui in altero numero, ponenda erit loco eius figura hæc nihili 0. cum si signo +. Quibus constitutis, addendi erunt numeri eiusdem appellationis, vel alter ab altero detrahendus, & summa, vel numeri reliqui proprijs in locis subscribendi, una cum iisdem signis +, vel -, quæ in numeris addendis, vel subtrahendis reperiuntur.

Additio & subtrahitio Cosmorum numerorum compoſitorum &c.

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{r} \text{re.} \quad \text{N.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \\ 6 + 8 = 14 \quad 7 + 8 = 15 \\ 7 + 10 = 17 \quad 3 + 9 = 12 \\ 13 + 18 = 31 \quad 10 + 17 = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{re.} \quad \text{N.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \\ 7 + 8 = 15 \quad 4 + 11 + 0 = 15 \\ 4 + 11 = 15 \quad 3 + 0 + 8 = 11 \\ 12 + 19 = 31 \quad 7 + 13 + 8 = 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{re.} \quad \text{N.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \\ 7 + 10 + 8 = 25 \quad 4 + 11 = 15 \\ 4 + 9 + 6 = 19 \quad 10 = 10 \\ 11 + 2 + 14 = 27 \quad 14 = 14 \end{array}$$

In penultimo exemplo additus est huic numero, 7 S + 8 re = 5 + 4 S. hic numerus, 4 S + 9 S + 6 re = 9. factaq. est hæc summa.

Exempla Subtractionis.

$$\begin{array}{r} \text{re.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \\ 7 + 11 + 8 = 26 \quad 11 + 19 = 30 \\ 3 + 0 + 8 = 11 \quad 4 + 11 = 15 \end{array}$$

$$4 + 11 + 0 = 15 \quad 7 + 8 = 15$$

$$\begin{array}{r} \text{re.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \quad \text{S.} \quad \text{re.} \quad \text{N.} \\ 11 + 9 + 14 = 34 \quad 14 + 4 = 18 \quad 10 + 17 = 27 \\ 7 + 0 + 8 = 15 \quad 4 + 4 = 8 \quad 7 + 8 = 15 \\ 4 + 9 + 6 = 19 \quad 0 + 0 + 3 = 3 \quad 9 = 9 \end{array}$$

In pe-

In penultimo exemplo reliquus numerus est, 4 8 + 9 22 + 6 22 = 9. Reijcitur enim + 6. quia neque in reliquo numero subtractionis, neque in summa additionis poni debet figura hæc 0. cum sit superflua canea. Eodem modo reliquus numerus in primo exemplo erit 4 22 + 3 22 = 6.

POTEST etiam fieri additio, & subtractio, si characteres Colsici scribantur post numeros, non autem supra ipsos numeros. ut secundum exemplum Additionis, ita stabit.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ 8} + 8 \text{ 22} = 5 \text{ N} \\ 3 \text{ 8} + 9 \text{ 22} = 8 \text{ N} \\ \hline 10 \text{ 8} + 17 \text{ 22} = 13 \text{ N} \end{array}$$

Secundum item exemplum Subtractionis ita stabit.

$$\begin{array}{r} 11 \text{ 22} + 19 \text{ N} = 8 \text{ 8} \\ 4 \text{ 22} + 11 \text{ N} = 5 \text{ 8} \\ \hline 7 \text{ 22} + 8 \text{ N} = 3 \text{ 8} \end{array}$$

Quod etiam de multiplicatione, diuisioneq. intelligendum est. Atque hic modus ut plurimum a nobis obseruabitur in hoc opere.

*Quid agendū,
quando unus
numerus ha-
bet signū +,
& alter signū
— in addi-
tione, & sub-
tractione.*

QVOD si in additione, vel subtractione alter numerorum habuerit signū +, alter vero —, commutatur species, seu operatio: hoc est, in Additione subtrahitur minor ex maiore, & reliquus numero tribuitur signum maioris numeri, a quo facta est subtractio, siue illud fuerit +, siue —.

In Subtractione vero adduntur simul numeri, & summx apponitur signum superioris numeri, a quo fieri debebat deductio; quodcumque illud fuerit siue +, siue —.

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{r} \text{8cc. 8. 82. 22. N.} \\ 7 + 0 + 8 + 0 = 4 + 8 \\ 7 + 5 = 11 = 11 + 0 + 0 \\ \hline 14 + 5 = 3 = 11 = 4 + 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8. 22. \\ 6 + 8 \\ 2 = 10 \\ \hline 8 = 2 \end{array}$$

Si hi duo numeri 6 8 = 8 22. & 12 22 = 3 8 debeant addi, formabimus exemplum hoc modo, ut singula singulis respondeant.

$$\begin{array}{r} 6 \text{ 8} + 6 \text{ 8} = 8 \text{ 22} \\ 12 \text{ 22} + 3 \text{ 8} = 12 \text{ 22} \\ \hline 2 \text{ 8} + 3 \text{ 8} + 4 \text{ 0} = 3 \text{ 8} + 4 \text{ 22} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Vel} \\ 12 \text{ 22} + 6 \text{ 8} = 8 \text{ 22} \\ 3 \text{ 8} + 12 \text{ 22} \\ \hline 3 \text{ 8} + 4 \text{ 22} \end{array}$$

Ratio-

Rationem vero huius operationis pulchre docent numeri absoluti, ut hic vides.

$$\begin{array}{r}
 8 + 5 \\
 10 - 4 \\
 \hline
 18 + 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 - 5 \\
 10 + 4 \\
 \hline
 18 - 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 + 4 \\
 10 - 5 \\
 \hline
 18 + 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 - 4 \\
 10 + 5 \\
 \hline
 18 - 1
 \end{array}$$

Quoniam enim in primo exemplo ad 8 + 5, hoc est, ad 13, non adduntur integre 10, ut fiant 23, sed subductis prius 4. Ideo fit summa 19, nempe 18 + 1. Itaq. postquam addita sunt 8, & 10, factaq. sunt 18, detrahenda sunt 4, ex 5, ut remaneat 1, cum hoc signo +.

Eodem modo in secundo exemplo, non addantur integre 8, sed minus 5, ad 10 + 4, hoc est, ad 14, propterea postquam ex 8, & 10, facta sunt 18, detrahenda sunt 5, ex 4. Et quia deest unitas, ut possit subtrahi, idcirco ponitur 1, cum signo -. Eadem ratio est in ceteris. Vbi vides in primo exemplo ex 8 + 5, & 10 - 4, id est, ex 13, & 6, effici 18 + 1, id est, 19. In secundo vero ex 8 - 5, & 10 + 4, hoc est, ex 3, & 14, fieri 18 - 1, hoc est, 17. In tertio quoque ex 8 + 4, & 10 - 5, hoc est, ex 12, & 5, constare 18 - 1, hoc est, 17. In quarto denique ex 8 - 4, & 10 + 5, id est, ex 4, & 15, confici 18 + 1, id est, 19.

Exempla Subtractionis.

| gr. | 8. | 88. | ce. | 2e. | N. | 8. | 2e. | | | |
|-----|----|-----|-----|-----|----|----|-----|---|---|---|
| 14 | + | 5 | - | 3 | - | 11 | - | 4 | + | 8 |
| 7 | + | 0 | + | 8 | + | 0 | - | 4 | + | 8 |
| 7 | + | 5 | - | 11 | - | 11 | + | 0 | + | 0 |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

In priori exemplo, quando detrahuntur - 4 2e. ex - 4 2e. potest signari reliqua figura 9, vel signo +, vel signo -. Nihil .n. interest utriusque ponatur, quando reliquus numerus est 0. Immo totus reliquus numerus ita scribendus erit: 7 gr + 5 8 - 11 88 - 11 ce. Ratio quoque huiusce operationis perspicua est in numeris absolutis, ut ex sequentibus exemplis apparet.

$$\begin{array}{r}
 18 + 5 \\
 8 - 4 \\
 \hline
 10 + 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18 + 4 \\
 8 - 5 \\
 \hline
 10 + 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18 - 5 \\
 8 + 4 \\
 \hline
 10 - 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18 - 4 \\
 8 + 5 \\
 \hline
 10 - 9
 \end{array}$$

Quoniam enim in primo exemplo non integre subducuntur 8, ex 18 + 5, hoc est ex 23, sed minus 4, propterea subductis 8, ex 18, & relinquantur 10, addenda sunt rursus 4, ad 5. Eademq. est ratio in secundo exemplo. In tertio vero exemplo, cum 8, deducantur ex 18, ex quibus iam ablata sunt 5, restituenda sunt 5, ipsi 4, & sum-

ma per signum — notanda. Quod etiam fit in quarto exemplo. Vbi vides in primo exemplo, si ex 18 + 5. hoc est, ex 23. detrahantur 8 — 4, hoc est, 4. relinqui 10 + 9. id est, 19. In secundo quoque, si ex 18 + 4. hoc est, ex 22. detrahantur 8 — 5. id est, 3. relinqui 10 + 9. hoc est, 19. In tertio vero, si ex 18 — 5. id est, ex 13. detrahantur 8 + 4. id est, 12. remanere 10 — 9. id est, 1. In quarto denique, si ex 18 — 4. hoc est, ex 14. demantur 8 + 5 id est, 13. remanere quoque 10 — 9. hoc est, 1. omnia autem minus minus.

Quid agendum in subtractione, quando numerus habet signum + vel — & numerus posterior ponatur.

QVOD si quando contingat, vt idem signum + vel — reperiat, tam in numero subtrahendo, quam in eo, a quo fit subtractio, sed subtrahendus maior sit, subtrahendus erit præpostero ordine superior ab inferiori, sed numero reliquo dandum signum contrarium, ita vt ex signo +, fiat —, & ex —, fiat +. Vt duo exempla, quæ sequuntur, indicant.

$$\begin{array}{r}
 9 + 4 - 5 \\
 4 + 7 - 8 \\
 \hline
 5 - 3 + 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6 - 5 + 3 \\
 7 - 9 + 10 \\
 \hline
 -1 + 4 - 7
 \end{array}$$

In posteriori exemplo, quoniam 6 re. & 7 re. intelliguntur habere signum +, idcirco reliquus numerus adeptus est signum —. Vnde ita scribendus erit, 4 8 — 1 10 — 7. Non enim recte primus numerus afficitur signo —. Huius etiam operationis veritas perspicua est in duobus hisce exemplis numerorum absolutorum. Vbi vides, si in priori exemplo

$$\begin{array}{r}
 9 + 4 - 5 \\
 4 + 7 - 8 \\
 \hline
 5 - 3 + 3
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6 - 5 + 3 \\
 7 - 9 + 10 \\
 \hline
 -1 + 4 - 7
 \end{array}$$

ex 9 + 4 — 5. id est, ex 8. subtrahantur 4 + 7 — 8, id est, 3. relinqui 5 — 3 + 3. nimirum 5. In posteriori vero, si ex 6 — 5 + 3. subducantur 7 — 9 + 10. hoc est, 8. ex 4. remanere — 1 + 4 — 7. hoc est, — 4. quia nimirum superiori numero defunt 4. vnitates, vt inferior subtrahi possit.

CAETERVM omnia præcepta hæcenus tradita de additione, & subtractione, quod ad signa + & — spectat, comprehenduntur facile his duabus regulis ad memoriam iuuandam.

Dua regula observanda in subtractione. Eodem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpostero ponuntur. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex +, additione, & fit —, & ex —, fit +.

Diversa signa mutant speciem operationis; Et in additione ponitur signum maioris numeri; In subtractione vero, superioris, a quo fit subtractio, siue maior

maior is sit, sunt minores, aut aequalis. Quae quidem regulae, intellectus praecipit traditis, difficiles non sunt.

SVPEREST, ut doceamus, quo modo instituenda sit probatio, Probatio additionis & Subtractionis. Duobus igitur modis comprobari potest, an recte nec ne in Additione, vel Subtractione operatum sit. Primum enim probari potest Additio per subtractionem, & subtractio per Additionem; quemadmodum in absolutis numeris solet fieri.

Secundo constatuatur tabula cum aliquibus progressionibus Geometricis ab unitate incipientibus, ut hic cernis.

| N | 20 | 8 | re | 88 | 16 | 64 | 128 | 256 |
|---|----|----|-----|-----|------|-------|-------|--------|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 |

Deinde resoluantur numeri Cossici addendi, iuxta aliquam harum progressionum, in numeros absolutos, isq. simul addantur, vel vnus ab altero detrahatur, ratione signi +, vel —. Post hanc eodem modo resoluantur numeri Cossici summae collectae. Si enim recte facta est additio, erunt numeri summae collectae resoluti simul aequales numeris addendis resolutis simul. Ut in hoc exemplo. 6.re. (si probatio instituitur per progressionem, cuius radix est 2.) faciunt 48. & 48. faciunt 16. Iungantur simul 48. & 16. propter signum +. fiunt 64. Itē 4 re. faciunt 32. addantur ad 64, propter signum + (semper enim numerus nullo signo notatus, intelligitur insignitus hoc signo +, ut dictum est.) fiunt 96. Denique 88. faciunt 32. quae ablata ex 96, ob signum —, relinquunt 64. Vide iam, an 10 re — 48, resoluti faciant quoque 64. Peripicuam autem est, 10 re. facere 80, a quibus si deducantur 48, hoc est, 16. propter signum —, relinqui 64. &c.

NON secus Subtractio comprobabitur, si eius numeri Cossici in absolutos numeros commutentur. Nam numeri subtracti, & reliqui simul aequales debent esse numeris, a quibus facta est subtractio, &c. Ut in hoc proposito exemplo, si probationem instituamus iuxta progressionem, cuius radix est 3. 10 re. faciunt 270, a quibus, si deducantur 48, id est 36. propter signum —, remanent 234. Satis autem constat 6 re + 48. & 4 re — 88. resolutos ac simul additos facere quoque 234. Eodem modo si 6 re + 48. resoluti detrahantur ex 10 re — 48. resolutis, relinquentur 4 re — 88. resoluti. Vel certe si 4 re — 88. reso.

resoluti deducantur ex 10 ce — 4 g. remanebunt 6 ce + 4 g. resoluti.

Idem exemplum examinabitur per progressionem, cuius radix est $\frac{1}{2}$. licet aliquantò laboriosius, hoc modo. 10 ce. faciunt $\frac{1}{2}$ a quibus si tollantur 4 g. nimirum $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. remaneant $\frac{1}{2}$. Necessè igitur est, vt 6 ce + 4 g. resoluti, & detracti ex $\frac{1}{2}$. relinquant 4 ce — 8 g. resolutos. Ne quia 6 ce. faciunt $\frac{1}{2}$. & 4 g. efficiunt $\frac{1}{4}$. id est, $\frac{1}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$. faciunt $\frac{1}{4}$. quæ ex $\frac{1}{2}$. subtrahendæ sunt. At quoniam numeri præpositi ponuntur, subtrahendæ sunt $\frac{1}{2}$. ex $\frac{1}{4}$. vt remaneant — $\frac{1}{4}$. iuxta primam regulam. Atque tanrunden debent conficere 4 ce — 8 g. Sunt autem 4 ce. $\frac{1}{2}$. a quibus vt auferatur 8 g. id est, $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{4}$. auferendæ sunt $\frac{1}{2}$. ex $\frac{1}{4}$. propterea quod numeri sunt positi præpositi, vt remaneant — $\frac{1}{4}$. iuxta legem primæ regulæ. quod est propositum.

DE MULTIPLICATIONE

& Diuisione numerorum Cossicorum.

Cap. V.

*Multipl. &
Diuisio nume-
ri Cossici per
absolutum.*



VM numerus Cossicus per numerum absolutum multiplicatur, aut diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) eiusdem denominationis Cossici. Vt multiplicatis 4 ce. vel 8 g. per 3. proueniunt 12 ce. vel 24 g. &c. Item diuisis 12 ce. vel 24 g. per 3. producantur 4 ce. vel 8 g. &c.

*Multipl. &
Diuisio nume-
ri Cossici per
Cossicum nu-
merum.*

QUANDO vero numerus Cossicus per numerum Cossicum multiplicatur, vel diuiditur, producitur numerus (facta multiplicatione, aut diuisione, vt in numeris absolutis) alterius denominationis Cossici, vt autem sciatur, quænam denominatio procreetur, pulchre id commoustrat progressio quilibet Geometrica ab unitate incipiens, vna cum numeris exponentibus, de quibus in cap. 2. dictum est, & hic apparet.

| | | | | | | | | | | |
|----|----|---|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | &c. |
| N. | 2e | 3 | ce | 8g | 10 | 16e | 32 | 64g | 128 | &c. |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | &c. |

Nam in multiplicatione fit exponens numerus denominationis Cossici constare ex additione exponentium numerorum, qui videlicet denominationes illas, quæ multiplicantur, exponunt. In diuisione autem reperitur exponens numerus Cossici denominationis productæ,

ductæ, qui relinquatur, si exponens numerus denominationis diuidentis subtrahatur ab exponente numero denominationis diuidentis. Vt ex multiplicatione. 4 re. in 4 re. vel 4 re. in 7 re. sunt 16 re. vel 28 re. Nam vnitas, quæ est exponens huius characteris Cossici 2e. addita ad vnitatem, facit 2. exponentem huius characteris re. Sic etiam ex multiplicatione 4 re. in 5 re. sunt 20 re. Et ex 4 re. in 6 re. sunt 24 re. &c. Item ex diuisione 24 re. per 4 re. sunt 6 re. Et ex diuisione 24 re. per 4 re. producantur 9 re. Et ex diuisione 12 re. per 4 re. sunt 3 re. Et ex 8 re. per 8 re. fit 1 N. quia subductis 2. a 2. relinquatur 0, exponens numeri absoluti. Ita quoque diuisis 12 re. per 4 re. proveniunt 3 re. &c.

Ex his facile intelligitur, quoniam modo numerus Cossicæ in seipsum multiplicetur quadrato, cubice, &c. Nam 5 re. in se quadrato faciunt 25 re. cum 3. &c. 3. faciant 6. At 5 re. in se cubice faciunt 125 re. Nam primum 5 re. in se faciunt 25 re. Deinde 25 re. in 5 re. faciunt 125 re. &c.

DEMONSTRATIO huius rei facilis est. Repetatur enim progressio characterum Cossicorum numeros progressionis Geometricæ denominationum, vna cum naturali progressionem numerorum exponentium, vt hic.

*Demonstratio
Multiplicationis & Diuisionis numerorum Cossicorum.*

| | | | | | | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c. |
| N. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | re. | &c. |

Quoniam igitur, vt in scholio propof. 11. lib. 9. Encl. docuimus, quilibet numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis seipsum multiplicans producit numerum eiusdem progressionis, qui tantum ab eo distat exclusiue, quantum ipse abest exclusiue ab vnitate; fit vt re, seipsum multiplicans producat re. qui tertium locum occupat post re, exclusiue, quemadmodum & re, tertium habet locum post N. hoc est, post vnitatem exclusiue. Quare cum, exponens huius characteris re, nempe 3. ad se additus faciat 6. exponentem, qui tertium locum possidet post 3. exclusiue, propterea quod tres vnitates continentur in 3. per quod nimirum interualla denominatio re. distat a N. seu vnitate exclusiue. (Nam exponens cuiusque denominationis Cossicæ tot continet vnitates, quotum locum ipsa denominatio obtinet ab vnitate, siue a N. exclusiue.) perspicuum est, numerum 6. qui fit ex additione 3. ad 3. esse exponentem huius characteris Cossici 3re. qui producitur ex multiplicatione re. in se. Eademq. ratio est de cæteris characteribus Cossicis, qui seipsum multiplicantes.

VERSUS, quia, vt ex eodem scholio constat, si minor aliquis numerus progressionis Geometricæ ab vnitate incipientis multiplicet maiorem quam ipsam eiusdem progressionis, procreatur numerus, qui tantum a maiore distat exclusiue in progressionem eadem, quantum minor ab vnitate abest exclusiue; efficitur vt re. multiplicans

plians gr̄e, producat cr̄e, qui tertium occupat locum post gr̄e, exclusiue, sicut & cr̄e, tertium possidet locum exclusiue post N, hoc est, post unitatem. Quocirca cum exponens 3. characteris re, additus ad 6. exponentem characteris gr̄e. faciat 9. exponentem, qui tertius locum adeptus est post 6. exclusiue, propterea quod in 3. continentur tres unitates, quorum nimirum locum exclusiue ab unitate, seu N, occupat character hic re; manifestum est, numerum 9. qui fit ex additione 3. ad 6. exponentem esse huius characteris Cossici cr̄e, qui gignitur ex multiplicatione re, in gr̄e. Eadem de causa idem character cr̄e, procreatur ex multiplicatione gr̄g. in s. & sic de ceteris.

QVONIAM vero, ut Additio Subtractionem, & Subtractio Additionem; ita quoque Multiplicatio Diuisionem, & Diuisio Multiplicationem probat; sit ut quemadmodum ex additione 3. ad 3. fiat 6. & ex multiplicatione s. in re, fit gr̄e; ita subtractis ex 6. relinquantur 3. & diuiso gr̄e, per re, proueniat re. Item sicut ex additione 3. ad 6. fiunt 9. & ex multiplicatione re, in gr̄e, fit cr̄e; sic etiam subtractis 3. ex 9. relinquantur 6. & diuiso cr̄e, per re, producat gr̄e, eademq. ratio est de reliquis.

Et X hac demonstratione perspicuum fit, id quod cap. 2. tradidimus; Additionem videlicet numerorum progressionis Arithmetice respondere multiplicationi numerorum progressionis Geometricę, & Subtractionem Diuisioni. Demonstrauimus enim, quemadmodum ex additione 2. ad 4. fiunt 6. ita ex multiplicatione 2. in 3. fieri gr̄e. Item sicut subtractis 2. ex 6. relinquantur 4. ita diuiso gr̄e, per 2. fieri 2. &c.

ITAQVE ex multiplicatione cuiusuis characteris Cossici in aliū quemcumque producit character Cossicus tantum a maiore distans exclusiue, quantum minor ab unitate, hoc est, ab hoc signo N. recedit exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. Ut ex re, in gr̄g, fit Cr̄. &c. Ex diuisione vero cuiuslibet characteris Cossici maioris per alium quemuis minorem prouenit character Cossicus tantum a maiore distans exclusiue, retrocedendo tamen, quantum minor ab unitate, seu characterē N. abest exclusiue, vel quantus est exponens minoris characteris Cossici. Ut ex diuisione cr̄e, per gr̄g, producit s. &c.

QVANDO autem numerus Cossicus compositus, vel diminutus multiplicatur, aut diuiditur per numerum absolutum, vel Cossicum tam simplicem, quam compositum, diminutumve, præter documentum iam traditum habenda est maxima ratio horum signorum +. & —. Nam quando numeri se mutuo multiplicantes, vel diuidentes habuerint idem signum +. vel —. apponitur producto semper hoc signum +. Quando vero alter illorum habuerit signum +, & alter hoc —, afficitur productus numerus perpetuo hoc signo —. Quod alij scriptores docent his verbis. In multiplicatione ac diuisione, Plus per Plus, vel Minus per Minus producit Plus; At Plus per Minus, vel Minus per Plus producit Minus. Hoc autē uicē hac regula memorię mandabitur.

Multip. & Diuisio numeri Cossici compositi per absolutum, vel per Cossicum tam simplicem, quam compositum.

Eadem

Eadem signa ponunt signum additorum: Diversa vero signa ponunt si
num subtractorum.

Regula in
multipl. &
divisione nu-
merorum Cos-
sicarum ob-
servanda.

Exempla Multiplicationis.

$$\begin{array}{r}
 7 \text{ 8} + 4 \text{ 2e} \\
 \hline
 9 \text{ N}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \text{ 8} - 4 \text{ 2e} \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \text{ 8} - 4 \text{ 2e} \\
 \hline
 9 \text{ 2e}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 63 \text{ 8} + 36 \text{ 2e} \\
 \hline
 99 \text{ 8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 63 \text{ 8} - 36 \text{ 2e} \\
 \hline
 27 \text{ 8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 63 \text{ 2e} - 36 \text{ 8} \\
 \hline
 27 \text{ 2e}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8 \text{ 8} + 9 \\
 \hline
 17 \text{ 8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \text{ 8} - 9 \\
 \hline
 -1 \text{ 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 72 \text{ 8} + 81 \\
 \hline
 153 \text{ 8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -72 \text{ 8} + 81 \\
 \hline
 9 \text{ 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 64 \text{ 88} + 72 \text{ 8} \\
 \hline
 136 \text{ 88}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 64 \text{ 88} - 72 \text{ 8} \\
 \hline
 67 \text{ 88}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 64 \text{ 88} + 144 \text{ 8} + 81 \\
 \hline
 209 \text{ 88}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 64 \text{ 88} - 144 \text{ 8} + 81 \\
 \hline
 -11 \text{ 88}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8 \text{ 2e} - 4 \text{ 8} \\
 \hline
 4 \text{ 2e}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 6 \text{ 8} + 8 \text{ 2e} - 6 \text{ N} \\
 \hline
 14 \text{ 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 48 \text{ 88} - 24 \text{ 2e} \\
 \hline
 48 \text{ 88}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -24 \text{ 8} - 32 \text{ 2e} + 24 \text{ N} \\
 \hline
 -32 \text{ 2e}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12 \text{ 88} + 16 \text{ 2e} - 36 \text{ 8} - 32 \text{ 2e} + 24 \text{ N} \\
 \hline
 12 \text{ 88}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \text{ 8} + 8 \text{ N} - 3 \text{ 2e} \\
 \hline
 17 \text{ 8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \text{ 2e} - 4 \text{ 88} - 8 \text{ 8} \\
 \hline
 -4 \text{ 88}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -72 \text{ 88} - 64 \text{ 8} + 24 \text{ 2e} \\
 \hline
 -112 \text{ 88}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 -36 \text{ 82e} - 32 \text{ 88} + 12 \text{ 8} \\
 \hline
 -64 \text{ 88}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 63 \text{ 8} + 56 \text{ 2e} - 21 \text{ 88} \\
 \hline
 63 \text{ 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -36 \text{ 82e} + 75 \text{ 8} - 125 \text{ 88} + 80 \text{ 2e} - 64 \text{ 8} \\
 \hline
 -36 \text{ 82e}
 \end{array}$$

In hoc ultimo exemplo præcedunt semper in summa maiores deno-
minationes Cosicæ minores denominationes Cosicæ. Sed quo-
niam non recte in initio ponitur hoc signum —, propterea ita col-
locanda erit summa producta.

$$75 \text{ 8} - 36 \text{ 82e} - 125 \text{ 88} + 80 \text{ 2e} - 64 \text{ 8}.$$

Exempla Divisionis.

$$\begin{array}{r}
 \text{per } 2 \text{ 2e} \text{ 2e} \left(3 \frac{1}{2} \text{ N} \right) \mid \text{per } 2 \text{ 8} \text{ 2e} \left(3 \frac{1}{2} \text{ 8} \right) \mid \text{per } 2 \text{ 8} \text{ 2e} \left(3 \frac{1}{2} \text{ N} \right) \\
 2 \text{ 8} + 2 \text{ 2e} \left(3 \text{ 2e} + 1 \frac{1}{2} \text{ N} \right) \mid 2 \text{ 8} \text{ 88} - 2 \text{ 8} \left(4 \frac{1}{2} \text{ 2e} - 3 \text{ 2e} \right) \\
 \hline
 \text{D} \quad 8 \text{ 8} \text{ 8}
 \end{array}$$

DEINDE probatio institui potest per resolutionem Cossicorum numerorum secundum aliquam radicem progressionis Geometricæ, ut dictum est ad finem cap. 4. Nam numeri Cossici, qui multiplicatur inter se, resoluti tantum faciant necesso est, si multiplicentur inter se, quantum numeri Cossici producti, secundum eandem radicem resoluti. Et diuidendus numerus Cossicus resolutus tantum debet producere diuisus per diuisorem resolutum, quantum Quotiens secundum eandem radicem resolutus, ut hic apparet.

Exemplum Multiplicationis.

Secundum radicem 2. faciunt
 $6\ 2e = 8. 4. \& 5\ 2e = 3.$ faciunt 7. Ex multiplicatione autem 4. per 7. sunt 28. Tandem quoque fit ex resolutione producti numeri secundum eandem radicem 2. ut patet.

$$\begin{array}{r} 6\ 2e = 8 \\ 4\ 2e = 3 \\ \hline 18\ 2e = 24 \\ 30\ 8 = 40\ 2e \\ \hline 30\ 8 = 58\ 2e + 14 \end{array}$$

Exemplum Diuisionis.

Diuidendus numerus $30\ 8 = 58\ 2e + 14.$ secundum radicem 2. resolutus facit 28. Diuisor vero $6\ 2e = 8.$ facit 4. Diuisus autem 28. per 4. producuntur 7. Perspicuum autem est, quotientem hunc $5\ 2e = 3.$ secundum eandem radicem resolutum efficere quoque 7.

QVOD autem eadem signa + & +, vel — & —, in Multiplicatione & Diuisione producant semper signum hoc +. Diuersa autem signa +, & —, vel — & +, faciant semper hoc signum —; præterquam quod examen Multiplicationis & Diuisionis abunde id comprobare possit: tamen idipsum clarè perspicitur in numeris absolutis. Ut in hoc exemplo sequenti, quis non videt, si multiplicentur $8 = 2.$ hoc est, 4. per $7 = 3.$ hoc est, per 4. produci 24. nèpe $56 = 38 + 6$?

$$\begin{array}{r} 8 = 2 \\ 7 = 3 \\ \hline 56 = 14 \\ \hline \quad = 38 + 6 \\ \hline 56 = 38 + 6 \end{array}$$

nam cum ex 7. in 8. sunt 56. quoniam non multiplicatur totus hic numerus 7. in hunc 8. sed in 8. detractis prius 2. propterea numerus hic 56. maior est vero producto. Vnde ex multiplicatione postea eiusdem numeri 7. in — 2. sunt 14. signanda hoc signo —, atque ita ex + in —, fit —. Rursus quia non totus hic numerus 7. sed detractis prius 3. multipli-

Quod eadem signa producant signum +. Diuersa autem signum —.

catur in 8 — 2, fit vt productus 56 — 14. fit verò productio maior. Quare ex multiplicatione — 3, in 8. sunt 24. notanda hoc signo —, atque ita rursus ex — in + fit —. Sed quia non totum hoc, quod provenit ex — 3. in 8. sed quod produciatur ex — 3. in 8, subtrahitis prius 2. idcirco restituendum est id, quod iniuste ablatum est; atque ita postremo ex — 3. in — 2, sunt 6. notanda signo hoc +, quod additionem significat, vt restituantur 6. quæ ablata fuerant. Eadem ratio est in cæteris exemplis Multiplicationis.

IAM vero cum ex multiplicatione 5. in — 4. gignatur hic numerus — 24. vt dictum est, necesse est, vt ex diuisione — 24. per — 4. producantur 6; & ex diuisione — 24. per 6. fiant — 4. Quare in diuisione quoque ex —, in —, fit +, & ex —, in +, vel contra, fit —. Itaq. quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant, ita siue Plus in Plus, siue Minus in Minus multiplicatum, aut diuisum producit Plus. Item, sicut affirmatio negationis, siue negatio affirmationis negat, ita siue Plus in Minus, siue Minus in Plus multiplicatum, aut diuisum producit Minus.

DE NVMERIS FICTIS, SIVE MINORIBUS quam nihil. Cap. VI.



VE M A D M O D V M varix finguntur radices numerorum, qui eas non habent, qualis est radix quadrata, vel cubica, vel Zenfizenfica, vel Surdesolida huius numeri 10, fitq. hæc fictio summa vtilitate, & commo do eorum, qui in rebus Mathematicis versantur, vt suo loco dicemus: Ita etiam a scriptoribus Algebræ finguntur non temere numeri quidam minores quam nihil, vt 0 — 4. hoc est, nihil detractis prius quatuor vnitatibus. Item 6 — 10. hoc est, sex unitates minus 10. vnitatibus. Quod vnico exemplo hoc subtractionis perspicuum fiet. Sint ex 8 — 2, deducenda 10 — 5. hoc est,

5, ex 6. Primo detraho — 5 ex — 2, hoc est, quia superior numerus minor est, detraho 2, ex 5, & reliquo numero 3, tribuo contrarium signum +, iuxta legem subtractionis supra traditam. Nam re vera hic numerus — 2. intelligitur superare hunc numerum — 5, tribus vnitatibus, cum — 2, cadat infra nihil duabus vnitatibus, at — 5. infra idem nihil descendat quinque vnitatibus, hoc est, tribus vnitatibus magis, quam — 2, recedat a nihilo. Quod etiam hinc potest intelligi, quod huic numero — 2, desint tantum duæ unitates, vt æqualis sit nihilo, at huic — 5, desint quinque, vt nihilo æqualeat. Deinde subtraham + 10, ex + 8, maiorem numerum ex minore, quod fieri non potest. Vnde non inuenio numerum

$$\begin{array}{r} 8 - 2 \\ 10 - 5 \\ \hline - 2 + 3 \end{array}$$

aliquem

*Numeri ficti,
siue minores
quam nihil.*

aliquem verum, quem pro relicto reponam, si 10. ex 8, subducam. Nam si superior numerus 8, maior esset inferiore 10, remaneret verus numerus ex illa subtractione: Et si æqualis esset superior numerus inferiori, relinqueretur nihil. Nunc vero cum numerus subtrahendus 10, maior sit numero 8, a quo fieri debet subtractio, efficitur, ut numerus infra 0, hoc est minor nihilo, relinquatur, ille nimirum, qui deest superiori, ut ab eo inferior detractus relinquitur 0, cuiusmodi est numerus, qui relinquitur ex subtractione superioris ab inferiore, notatus signo —, quod defectum significat, nepe — 2. Ut totus numerus relictus sit — 2 + 3. Sed quia non recte ad initium numeri præfigitur hoc signum —, ita statuendus erit relictus. 3 — 2. Eodem modo, quotiescunque maior numerus aliquis ex minore detrahendus est, (quod te vera fieri non potest) ponitur in hac scientia pro relicto excessus, quo inferior numerus superiorem superat, præfixo hoc signo —, ut subtractis 20, ex 12, relinquuntur — 8. &c.

VIDES igitur, quam pulchre hæc ars pro immensa copia sua utatur & ijs, quæ sunt, & ijs, quæ non sunt, sed tantum esse finguntur. Quod accuratius adhuc ex ijs, quæ sequuntur, iam iam intelliges.

QUEMADMODVM supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem fractiones unitatis, ut unitas media sit inter numeros integros & fractos; ita supra 0, seu nihilum, ponitur unitas cum reliquis numeris veris, & infra 0, fingitur unitas cum reliquis numeris, præposito tamen semper signo hoc —, ita ut 0, seu nihilum, medium sit inter numeros veros, & fictos, siue minores nihilo. Quod apposite sequentes duæ progressionis commonstrant, quarum superior est naturalis series numerorum, inferior autem Geometrica, illiusq. numeri numeros huius exponunt, ut cap. 2. dixi-

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-----|
| &c. | —7 | —6 | —5 | —4 | —3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | &c. |
| &c. | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{256}$ | $\frac{1}{512}$ | $\frac{1}{1024}$ | $\frac{1}{2048}$ | $\frac{1}{4096}$ | $\frac{1}{8192}$ | $\frac{1}{16384}$ | &c. |

mus. Nam & hic superioris progressionis numeri idem faciunt additione, & subtractione, quod inferioris progressionis numeri multiplicatione, atque divisione. ¶ Ut enim ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ in 32, fiunt 8, ita ex additione — 2, ad 5, fiunt 3. Item sicut ex multiplicatione $\frac{1}{2}$ in 8, fiunt 4, ita ex additione — 1, ad 3, fiunt 2. Rursus, ut ex divisione 8, per $\frac{1}{2}$, prodeunt 32, sic ex subtractione — 2, de 3, relinquuntur 5. Et quemadmodum ex divisione 8, per $\frac{1}{2}$, exeunt 16, ita ex subtractione — 1, de 3, relinquuntur 4. &c. Ut ex ijs, quæ de additione subtractioneq. numerorum Cossicorum diximus, perspicuum est. Immo ex hoc facile constat, in additione & subtractione diversa signa mutare speciem operationis, &c. ut docuimus cap. 4. alias non responderet additio & subtractio in progressionibus naturalium numerorum multiplicationi ac divisioni in Geometrica progressionibus.

EX his liquido constat, non frustra excogitari huiusmodi numeros fictos, siue nihilo minores, quandoquidem tam concinne eorū additio ad numeros integros, vel subtractio, respondet multiplicationi, & diuisioni numerorum integrorum progressionis Geometricæ per numeros fractos eiusdem progressionis, ut dictum est.

Vnum & eundem numerum habere posse duas radices quadratas inæquales.

EST autem hoc loco obseruatione dignum, dari posse numerum Cossicum, qui habeat duas radices quadratas inæquales; siue (quod idem est) exhiberi posse duos numeros inæquales, quorum vterque in seipsum ductus producat eundem numerum. Nam hi duo numeri, $2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}$, & $3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}$, si vterque in se multiplicetur, producunt $4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$, ut hic vides

$$\begin{array}{r}
 2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3} \\
 2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3} \\
 \hline
 - 6\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} \\
 4\frac{2}{3} - 6\frac{2}{3} \\
 \hline
 4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \\
 3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} \\
 \hline
 - 6\frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} \\
 9\frac{2}{3} - 6\frac{2}{3} \\
 \hline
 4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Cum tamen ipsi numeri multiplicati inter se sint valde inæquales. Prior enim $2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}$, si per radicem 2. resoluitur, efficit $8 - 6$, hoc est, 2. qui numerus in se ductus procreat 4. qui æqualis est producto $4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$. cum hic per eandem radicem 2. resoluitur efficit quoque 4. Posterior vero $3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}$, efficit $6 - 8$, id est 0 — 2. qui numerus in se multiplicatus producit quoque 4. si leges multiplicationis seruentur. Itaque tam numerus $2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}$, quam $3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}$, radix est quadrata numeri $4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} = 12\frac{2}{3}$. quod sane mirum videri possit, & paradoxum, cum tamen ita rem sese habere, resolutiones radicum, & producti numeri euidenter comprobent.

HOC idem cernitur in numeris absolutis. Nam vterque horum numerorum $4 - 1$, & $1 - 4$, id est 3, & 0 — 3, in se multiplicatus gignit 9. ut hic cernis.

$$\begin{array}{r}
 4 - 1 \\
 4 - 1 \\
 \hline
 - 4 + 1 \\
 16 - 4 \\
 \hline
 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 - 4 \\
 1 - 4 \\
 \hline
 - 4 + 16 \\
 1 - 4 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

Idemq. in infinitis alijs numeris licebit experiri. Quod si ducantur $4 - 1$, in $1 - 4$, producat numerus $8 - 17$, hoc est, 0 — 9. At ex multiplicatione $2\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}$, in $3\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3}$, procreabitur numerus $12\frac{2}{3} - 4\frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$, qui resolutus per radicem 2, efficit $3\frac{2}{3} = 36$, id est, 0 — 4. cum tamen vterque illorum in se ductus producat 4. Causa autem huius rei in multiplicationem numerorum

Cossi-

Cofficorum, & signorum + & — reiicienda videtur: & debilitas ingenij humani accusanda, quod capere non potest, quo pacto id verum esse possit. Neque enim de ratione prædictæ multiplicatio- nis dubitandum est, cum illa per multa exempla sit confirmata.

DE FRACTIONIBVS numerorum Cossicorum. Cap. VII.



AEDEM fere operationes sunt in fractionibus, seu Minutijs Cossicis, quæ in vulgaribus Minutijs, adhibitis tamen ijs, quæ de integris Cossicis numeris hæcenus tradidimus, quod ad characteres Cossicos, & signa + & — attinet. Nam, ut de Numeratione exempla nonnulla ponamus, hæc fractio $\frac{1}{2}$, significat, tres unitates diuisas esse per 2. Et $\frac{3}{4}$ denotat 7. Zentos esse diuisos per 9, unitates. Itē $\frac{3}{4}$ indicat hunc numeri 9 $\frac{3}{4}$ + 8 $\frac{3}{4}$, diuisum esse p 6 re. Et $\frac{3}{4}$ vult numerum hunc 9 $\frac{3}{4}$ — 8 $\frac{3}{4}$, esse diuisum p 6 re. &c.

Abbreviatio duobus modis fieri potest. Aut enim solum abbreviantur numeri, ut in Minutijs vulgaribus fit, inactis characteribus Cossicis, aut etiam characteres Cossici abbreviantur. Ut fractio hæc $\frac{1}{2}$, quod ad numeros attinet, reducitur ad hæc $\frac{1}{2}$. Hæc autem $\frac{1}{2}$, reducitur ad hanc $\frac{1}{2}$, quia maxima mensura, communis est 9. Modus autem inveniendi maximam mensuram, trium aut plurium numerorum colligitur ex propos. 3. lib. 7. Eucl. Si enim sunt tres numeri, inuenta maxima mensura duorum, si hæc metiatur quoque tertium, erit ipsa maxima mensura omnium; si vero non metiatur tertium, erit maxima mensura illius maximæ mensuræ, & tertij numeri, omnium trium mensura maxima. Eodē modo, datis quatuor numeris, inuenta maxima mensura trium, si hæc metiatur & quartum numerum, erit ipsa maxima omnium, quatuor mensura; si vero non metiatur, erit maxima mensura mensuræ illius maximæ, & quarti numeri, maxima mensura omnium quatuor. Et sic de reliquis. Similiter hæc minutia $\frac{1}{2}$, ad hanc reducitur $\frac{1}{2}$. Hæc autē $\frac{1}{2}$, reducitur ad hæc $\frac{1}{2}$. &c.

AT vero abbreviatio characterum Cossicorum fit per subtractionem exponentis minoris characteris ab exponentibus aliorum characterum. Nam si reliquis numeris proprii characteres tribuantur, peracta erit abbreviatio, quod ad characteres attinet. Hinc perspicuum est, numerum minoris characteris Cossici fieri in hac abbreviatio- ne Absolutum. Itē Minutiam, in quo Absolutus numerus reperitur, non posse abbreviari, quod ad characteres attinet. Ut hæc Minutia $\frac{1}{2}$, abbreviari non potest, quod spectat ad characteres: sed quod ad numeros attinet, reducetur per abbreviatio- nem ad hanc

*Numeratio
fractionis Cossicorum.*

*Abbreviatio
fractionis Cossicorum.*

ad hanc, $\frac{1}{2 \times 2}$. At vero hæc Minutia $\frac{1}{2 \times 2}$, quod ad characteres spectat, ad hanc reducitur. $\frac{1}{2 \times 2}$. Deinde quod ad numeros attinet, ad hanc $\frac{1}{2 \times 2}$. Hæc autem $\frac{1}{2 \times 2}$, reducitur ad istam, quod ad numeros & characteres attinet, $\frac{1}{2 \times 2}$.

*Demonstratio
abbreviatio-
nis fractionū
Cossicarum.*

FACILIS autem est demonstratio huiusce abbreviationis. Nam quod spectat ad numeros, cum Minutiæ propositæ numeri diuidantur per eundem numerum, per maximam videlicet eorum mensuram, erit eadem proportio inter quotientes, quæ inter numeros diuisos. Quare æquales erunt hæc fractiones, $\frac{4}{8 \times 2}$, $\frac{4}{4 \times 2}$. Quod vero ad characteres attinet, cum singuli characteres per eundem exponentem deprimantur, ita ut eadem prorsus sit distantia inter characteres, ad quos facta est reductio, quæ inter characteres initio propositos, habebit eandem proportionem characteres, ad quos facta est reductio, quam priores characteres propositi. Acquales itaq. erunt hæc Minutiæ, $\frac{4}{8 \times 2}$, $\frac{4}{4 \times 2}$. Nam eadem proportio est 4 8, ad 1 2 re, quæ 4, ad 1 8 re, cum idem numerus fiat ex multiplicatione 4 8, primi numeri, in 1 8 re, numerum quartum, qui ex 4, numero tertio in 1 2 re, numerum secundum. Utrobique enim, producit hic numerus 4 8 re. &c. Vel certe, cum & inter 8, ac 2 re, & inter N, ac 8 re, tres medij termini cadant proportionales, propterea quod 8, & 2 re, æqualiter sunt depressi, nempe per 1, exponentem huius characteris minoris 8. &c.

219.7.

*Reductio fra-
ctionum Coss-
icarum.*

*Demonstratio
reductionis
fractionū Cos-
sicarum.*
b 17.7.

REDUCTIO fractionum ad eundem denominatorem absolvitur multiplicando numeratores in denominatores per crucem, & denominatores inter se, ut in Minutijs vulgaribus. Ut hæc fractiones $\frac{1}{2 \times 2}$, $\frac{1}{2 \times 2}$, reducuntur ad has, $\frac{1 \times 2}{2 \times 2 \times 2}$, $\frac{1 \times 2}{2 \times 2 \times 2}$.

RATIO autem huius reductionis persfacilis est. Quoniam enim idem numerus 5 8 re, multiplicans duos numeros 3 2 re, & 4 8, produxit 15 B8, & 20 8 8 re. eadem proportio erit 15 B8, ad 20 8 8 re, quæ 3 2 re, ad 4 8. ac propterea eundem habebunt valorem fractiones hæc $\frac{15}{20}$, & $\frac{3}{4}$. Eodem modo æquales erunt hæc fractiones $\frac{4}{8}$, & $\frac{1}{2}$. Nam hic numerus 4 8, multiplicans duos 4 re, & 5 8 re, genuit hos duos 16 8, & 20 8 8 re.

QVOD si numerus aliquis integer, & fractio ad eandem denominationem sint reducenda, supponenda est vnitas numero integro pro denominatore, & reliqua peragenda, ut prius. Ut 6. & $\frac{1}{2}$. hoc modo $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2}$, reducuntur ad has fractiones $\frac{6 \times 1}{1 \times 2}$, & $\frac{1}{2}$. Et hæc dux $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2}$, ad has $\frac{6 \times 1}{1 \times 2}$, $\frac{1}{2}$. Nam huic numero Cossico integro 5 8, suppositus est vnitas pro denominatore.

SI vero integris adhæreat fractio aliqua, reducenda erunt prius integra ad eam fractionem; quod quidem fit multiplicando integra per denominatorem fractionis, & numerum productum numeratori addendo. Ut si 4 8 + $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$ reducere velimus ad eandem denominationem, multiplicabimus prius 4 8, per 1 re, ut habeamus duas fractiones has $\frac{4 \times 1}{1 \times 1}$, $\frac{1}{1}$, quas ad has duas reuocabimus, $\frac{4 \times 1 \times 2}{1 \times 1 \times 2}$, $\frac{1 \times 2}{1 \times 1 \times 2}$. & sic de cæ-

IAM vero quatuor reliquæ operationes fractionum Cōficarum, *Additio, Sub-*
hoc est, *Additio, Subtractio, Multiplicatio, atque Divisio*, non
differunt ab ijs, quas de Minutijs vulgaribus tradidimus, habita-
tamen semper ratione signorum $+$ & $-$, nec non characterū Cō-
ficorum, quorum operationes in superioribus præceptis continen-
tur. Itaq. solum exemplis rem absolueamus hoc loco.

Exempla Additionis.

$\frac{1}{2}$ X $\frac{1}{3}$ faciunt $\frac{1}{6}$ hoc est, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Item $\frac{4}{5}$ X $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{8}{15}$ hoc est, $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.
Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino si-
miles sunt, propterea solum numeratores adduntur inter se, & sum-
mæ idem denominator subscribitur. Hæc autem fractio quod ad
numeros, & characteres simul spectat, reducitur ad hanc

Exempla Subtractionis.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ relinquit $\frac{1}{6}$ hoc est, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Item $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ relinquit $\frac{8}{15}$ hoc est, $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15} - \frac{4}{15} = \frac{4}{15}$.
Quoniam enim in posteriori exemplo denominatores omnino sunt similes, & iidem, detrahendus est numerator a nume-
ratore, & reliquo numero idem denominator subscribendus.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{3}{8}$. Item $\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{7}{32}$.
Hic enim integro numero supponitur unitas pro
denominatore, ut exemplum ad Multiplicationem paretur hoc mo-
do. $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{3}{8}$. Item $\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{7}{32}$.
Prius enim in hoc exemplo facta est reductio
— 8 N., ad fractionem, cui adhærebant, multiplicando videlicet
— 8 N., per $\frac{1}{2}$, denominatorem. Quare fractiones multiplicandæ
fuerunt hæc $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{3}{8}$.

Exempla Divisionis.

$\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ faciunt $\frac{3}{8}$. Item $\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{7}{32}$.
hoc est $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Item $\frac{7}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$.
Item $\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{4}$ faciunt $\frac{7}{32}$.

QUONIAM vero Additio, & Subtractio, Item Multiplicatio ac
Divisio

Diuisio se mutuo probant, fit vt si ex additione $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{5}{6}$ hoc est, $\frac{5}{6}$; subductis $\frac{1}{2}$ ex $\frac{5}{6}$ relinquantur $\frac{1}{3}$. Relinquantur autem iuxta regulam $\frac{1}{3}$ hoc est, in minimis terminis $\frac{1}{3}$. Necessse est igitur, has duas minutias $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$ esse æquales, hoc est, eandem proportionem esse 4 & 6. ad 3 re, atque 4 N. ad 3 re. Quod quidem verum est. Nam si Minutia dicta multiplicentur per crucem, producentur æquales numeri, hoc est, tantum fiet ex primo numero in quartum, nimirum ex 4 & 6. in 3 re, quantum ex secundo in tertium, nimirum ex 3 re, in 4 N. Itaq. non est necesse, vt eadem Minutia omnino proueniat, sed satis est, vt æqualis Minutia producat, quæ quidem æqualitas facile comprobari potest ex multiplicatione per crucem. Idem dicendum est de exemplis Multiplicationis ac Diuisionis, vt ex superioribus exemplis apparet.

Compendiaria quadam operationes Minutiarum ad plurimas quæstiones soluendas peritiles.

I.

Compendia quadam fractionum. **Dati numeri partem quamcumque, vel partes nominatas ad ipsum numerum addere.**

SIT datus numerus $\frac{12}{5}$ cui volo addere $\frac{1}{2}$ ipsius numeri. Vtor ergo hoc compendio, etiam si ignorem, quæ sint $\frac{1}{2}$ ipsius. Addo ad partem, vel partes addendæ, vnitatem, (quod breuiter fit, addendo denominatorem numeratori) nimirum ad $\frac{1}{2}$ facio $\frac{3}{2}$. Hanc vero minutiam multiplico per numerum datum, efficioq. $\frac{3}{2} \times \frac{12}{5} = \frac{36}{5}$ summam quæsitam.

Item si $\frac{1}{3}$, addendæ sint ad 12 &. addo vnitatem ad $\frac{1}{3}$, vt fiant $\frac{4}{3}$. Hanc minutiam multiplico per 12. &, facioq. summam hanc $\frac{4}{3} \times 12 = 16$. hoc est, 16 &. Similiter si ad hanc minutiam $\frac{1}{4}$ addendum sit eius dimidium; addita vnitatem ad $\frac{1}{4}$, fiunt $\frac{5}{4}$. Multiplico $\frac{5}{4}$ per $\frac{1}{2}$, fit summa tota $\frac{5}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. &c.

II.

Dati numeri partem, vel partes quascunque ad partem, vel partes quascunque eiusdem numeri addere.

SIT datus numerus $\frac{12}{5}$ ad cuius $\frac{1}{2}$, volo addere $\frac{1}{3}$ eiusdem dati numeri. Addo partes propositas inter se, vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, facioq. $\frac{5}{6}$. Hanc minutiam multiplico in datum numerum $\frac{5}{6} \times \frac{12}{5} = 2$ efficioq. summam $\frac{10}{5} = 2$.

Similiter si $\frac{1}{3}$ huius numeri 35. ad $\frac{1}{4}$ eiusdem volo addere. Addo prius $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, facioq. $\frac{7}{12}$. Multiplico $\frac{7}{12}$ per 35. efficioq. $\frac{245}{12}$ hoc est, 34. &c.

III.

Dati numeri partem, vel partes quascunque ab ipso numero subtrahere.

SIT datus numerus $\frac{11 \times 10}{12}$, a quo volo subtrahere $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, hæc est $\frac{1}{6}$ (iunt enim prius in vnam summam redigendæ fractiones, si plures fuerint). Demo $\frac{1}{6}$ ex vnitatem (quod breuiter fit, subtrahendo numeratorem a denominatore. Nam reliquus numerus est numerator) remanensq. $\frac{1}{12}$. Multiplico $\frac{1}{12}$ per datum numerum $\frac{11 \times 10}{12}$ facioq. reliquum numerum $\frac{11 \times 10}{12} - \frac{1}{6}$.

Similiter volo subtrahere $\frac{1}{3}$ huius numeri $\frac{11 \times 10}{12}$, ab ipso numero $\frac{1}{3}$. Detraho $\frac{1}{3}$ ex vnitatem, manet $\frac{2}{3}$. Multiplico $\frac{2}{3}$ per $\frac{11 \times 10}{12}$, facioq. $\frac{22 \times 10}{6}$ pro summa reliqua, &c.

IIII.

Dati numeri partem, vel partes quascunque a parte, vel partibus quibuscunque eiusdem numeri subtrahere.

SIT datus numerus $\frac{11 \times 10}{12}$ a cuius $\frac{1}{2}$ volo detrahere $\frac{1}{3}$. Demo prius $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{2}$, remanet $\frac{1}{2}$. Multiplico $\frac{1}{2}$ per $\frac{11 \times 10}{12}$ facioq. summam reliquam $\frac{11 \times 10}{12}$.

Item volo subducere $\frac{1}{3}$ huius numeri 36. ex $\frac{1}{2}$ eiusdem numeri. Demo $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{3}$ manent $\frac{1}{6}$. Multiplico $\frac{1}{6}$ per 36. facioq. 6. hoc est, 5. pro numero reliquo. &c.

V.

Dati numeri partem, vel partes quascunque inuenire.

SIT datus numerus $\frac{11 \times 10}{12}$. Volo ipsius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, id est, $\frac{1}{6}$. (quædo enim plures sunt fractiones, colligendæ sunt prius in vnam summam). Multiplico $\frac{1}{6}$ per datum numerum $\frac{11 \times 10}{12}$ facioque $\frac{11 \times 10}{12} \times \frac{1}{6}$ atque hic numerus constituit $\frac{1}{6}$, hoc est, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. dati numeri $\frac{11 \times 10}{12}$.

Similiter volo $\frac{1}{3}$ huius numeri 36. Multiplico $\frac{1}{3}$ in 36. facioq. 12. hoc est, 18. &c.

VI.

Numerum inuenire, cuius pars nominata data sit, vel partes. Hoc est, numerum inuenire, cuius datus quilibet numerus sit data quauis pars, vel partes.

SIT hic numerus $\frac{12}{7}$ dux tertie partes alicuius numeri. Volo reperire illum numerum. Diuido $\frac{12}{7}$ per $\frac{1}{7}$ facioq. $\frac{12}{1}$ atque hic est numerus, cuius $\frac{1}{7}$ faciunt $\frac{12}{7}$.
 Pari ratione volo inuenire numerum, cuius hic numerus 8, sit $\frac{1}{4}$. Diuido 8 per $\frac{1}{4}$ facioq. $\frac{32}{1}$, hoc est, 32. atque hic est numerus, cuius $\frac{1}{4}$ faciunt 8. &c.

DE REGVLA ALGEBRAE.

Cap. VIII.



BSOLVTO Algorielmo numerorum Cossicorum, ordo iam postulat & locus, ut celeberrimam Algebrae regulam exponamus. Occasione enim huius omnia, quae hactenus tradita sunt de numeris Cossicis, planiora fient, & reliqua, quae ad perfectionem huius regulae cognitionem requiruntur, declaranda erunt. Neque enim omnia, ut debent, explicari possunt, nisi occasione accepta a partibus regulae Algebrae, ut suo loco dicemus. Regula igitur Algebrae, quam alij scriptores in plures distaxerunt, huiusmodi est.

Regula Algebrae.

Pro numero incognito in quaestione ponatur radix una hoc modo, 1 re. (Possunt etiam interdum plures radices poni hoc modo 2 re. vel 3 re, &c. vel alius quidam numerus, pro commoditate quaestionis proposita.) Quae iuxta quaestionis tenorem examinetur, donec Aequatio aliqua inueniatur: Haec reducatur, si reductione opus fuerit: Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus aequationis numerus. Nam vel Quotiens ipse erit numerus, qui quarebatur, pretium scilicet radice in principio posita, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quarebatur, notum reddet. Pulchre autem diuisor suo characterere Cossico demonstrabit, quando radix ex Quotiente, & quamam sit extrahenda.

HABET autem regula haec quatuor partes. Prima est Inuentio Aequationis, Secunda, Reductio Aequationis inuenta: Tertia, Diuisio alterius numeri Aequationis per numerum maioris characteris Cossici: Quarta & vltima, Extractio radice alicuius ex Quotiente.

HARVM duae sunt omnino necessariae, nimirum Inuentio Aequationis,

tionis, & Diuifio. In omni enim quæftione per hanc regulam foluenda inuenienda eft Aequatio, fiue Aequalitas inter duos numeros, & Diuifio inftituenda. Reliquæ dux, nimirum Reductio Aequationis, & Extractio radicis ex Quotiente, non omnino funt neceffariæ. Neque enim omnis Aequatio inuenta reductionem exigit, neque femper ex Quotiente radix extrahenda eft, vt ex ijs, quæ fequuntur, manifeflum erit. Quid porro inter vnica hanc regulam noftram, & multiplices aliorum regulas (Plures enim alij regulas præfcribunt) cap. 13. manifeflum erit.

SED priusquam omnes has quatuor partes regulæ fingulatim pertrañemus, rudi quadam Minerua, & obiter regulam ipfam explanabimus, hoc propofito problemate.

Inuenire numerum, ita vt dimidio ipfius, & tertia parte ab eo fublatis, reliquus numerus fit 7.

PONO hunc numerum ignotum, qui quæritur, effe $1\frac{1}{2}$, ita vt $1\frac{1}{2}$, æqualis intelligatur numero abcondito, quem inquirimus. Cum enim omnis numerus fiue integer, fiue fractus, fiue integer cum fractio obtinere poffit fecundum locum alicuius progressionis Geometricæ ab vnitatem incipientis, ita vt fit radix illius progressionis: confiftit totum artificium huius regulæ Algebræ in eo, vt inueniat, quamnam progressionem Geometricam numerus quæritus conftituat; hoc eft, in quam progressionem numerus, qui quæritur, locum vnitati proximum occupet. Iuxta igitur quæftionis tenorem examino $1\frac{1}{2}$, hoc eft, fumô ipfius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc eft, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{6}$, quæ partes fimul conftituunt $\frac{1}{2}$. Aufero $\frac{1}{2}$, ex $1\frac{1}{2}$, remanet $\frac{1}{2}$. Iam fic ratiocinor. Quoniam $1\frac{1}{2}$, pofita eft æqualis toti numero abcondito, qui quæritur, erit $\frac{1}{2}$, æqualis dimidio totius numeri, & $\frac{1}{3}$, tertiæ parti eiusdem. Et quoniam dimidio, ac tertia parte ex toto numero fublactis, reliquus numerus eft 7; fit, vt $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, hoc eft, $\frac{1}{4}$, deductis ex $1\frac{1}{2}$, reliquus numerus, nimirum $\frac{1}{2}$, æqualis fit reliquo numero 7, quia fi ab æqualibus æqualia ablata funt, quæ relinquuntur, funt æqualia. Inuenta eft igitur Aequatio, fiue Aequalitas inter $\frac{1}{2}$, & hunc numerum 7, atque ita prima pars regulæ abfoluta eft, quæ ita habet. [Pro numero incognito in quæftione ponatur $1\frac{1}{2}$, quæ iuxta quæftionis tenorem examinatur, donec Aequatio aliqua inueniatur.] Satis autem patet ex propofito exemplo, quæ ratione iuxta tenorem quæftionis Aequatio inuenienda fit. Eft autem Aequatio, vt hic fumitur, nihil aliud, quam proportio æqualitatis inter duas quantitates, fiue res varie denominatas. Vt in dato exemplo, proportio æqualitatis eft inter $\frac{1}{2}$, & 7, quæ duo varie denominantur. Nam cum dux res æquales dicatur, quæ eandem habent denominationem, eft ea æqualitas, fiue æquatio vel falſa, vt cum dico æquationem effe inter 5, & 7, aut inter $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, vel certe identitas quædam ad regulam Algebræ inutilis prius, vt cum dico, æqualitatem effe, feu æquationem inter 4 & 2,

Prima pars
regulae Alge-
brae.

In quo confi-
stat artificium
regulae Alge-
brae.

Æquatio 2^a.

& 4 & 2,

& 4 $\frac{1}{2}$, aut inter 7. & 7. Necesse est ergo, ut æqualitas ad regulam Algebrae pertinet sit inter duas res diuersorum nominum.

*Secunda pars
regula Alge-
brae.*

Sequitur deinde in regula. [*Hæc reducatur, si reductione opus fuerit.*] Hoc est, Aequatio inuenta reducatur, si res postulauerit. Quando autem, & quomodo sit reducenda Aequatio, paulo post docebimus. Nunc certum sit, nostram Aequationem inter $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$, & 7. non indigere reductione.

*Tertia pars
regula Alge-
brae.*

QVARE subiungit regula. [*Deinde per numerum characteris Cossici maioris diuidatur reliquus æquationis numerus.*] Quoniam in omni Aequatione reperiuntur duo numeri inæqualiter denominati, præcipit regula Algebrae, ut per numerum maioris characteris Cossici diuidatur reliquus numerus æquationis. Non iubet, ut diuisio fiat per maiorem numerum Cossici, sed per maioris characteris Cossici numerum. Nam Diuisor in hac regula, dum diuidit, abijcit characterem suum, alioquin Quotiens semper foret vnitas. Cum enim numerus maioris characteris Cossici, quando a characterē denominatur, æqualis sit reliquo æquationis numero, perspicuum est, si aliter per alterum ita diuidatur, produci vnitatem, propterea quod numerus quicunque in altero numero sibi æquali semel duntaxat continetur. Cur autem Diuisor huiusmodi abijciat suum signum Cossicum, paulo inferius cap. 11. dicam, ubi hanc diuisionem, quæ in Algebra regula præcipitur, plenius explanabimus. In nostra Aequatione inuenta inter $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$, & 7 N, maior character Cossicus est $\frac{1}{2}$, hoc est, maiorem exponentem habet, quam N, cum huius exponentis sit 0, illius vero 1. Per exponentes enim cognoscimus, vter character Cossicus maior sit, vel minor. Itaq. diuidendus est hic numerus 7 N, per $\frac{1}{2}$, relicto characterē $\frac{1}{2}$. fitq. Quotiens 42.

*Quarta pars
regula Alge-
brae.*

ADDITVR autem tandem in regula. [*Nam vel quotiens ipse erit numerus, qui quærebatur, pretius scilicet radices in principio posita, vel certe radix aliqua Quotientis numeri numerum, qui quærebatur, notum reddet. &c.*] Quando, & quæ radix Quotientis manifestet numerum incognitum, qui quæritur, persulchre docet maior character Cossicus, per cuius numerum Diuisio instituitur, ut proprio loco docebimus. In proposito nostro exemplo non est extrahenda vlla radix, sed ipse Quotiens offert numerum, qui quærebatur. Itaq. numerus, qui in problemate proponitur inueniendus, est 42. veritatemq. propositum problema in progressionē Geometrica ab 1. incipiente, in qua numerus vnitati proximus est 42. qualis est hæc.

Ad præfatum.

1. 42. 1764. 74088. 3111696. &c. In hac enim sola apparet, veram esse vltimam æquationem inuentā inter $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ & numerum 7. Iam vero si huius numeri 42. inuenti sumatur $\frac{1}{2}$. nimirum 21. & $\frac{1}{2}$. videlicet 14. atque hæ partes ex ipso numero 42. detrahantur, sit reliquus numerus 7. id quod in quæstione proposita desiderabatur.

ATQVE hoc modo, inuento numero, qui inquirebatur, & vni radici ponebatur æqualis, institui potest examē, siue probatio, iuxta problematis, vel quæstionis propositæ tenorem. Sed problemate propo-

proposito, & explicatione regulæ pingui, vt diximus, Minerua, ab-
soluta, declarandæ sunt deinceps singulæ partes regulæ exquisitius,
ac clarius, vt facturos nos paulo ante recepimus.

DE AEQVATIONVM VARIETATE.

Cap. IX.



ATIS constat ex ijs, quæ dicta sunt, vt ex posi-
tione 1 2e, si ea examinetur secundum exempli
pronunciationem, æquatio inter duos numeros
inuenienda sit: Nunc autem de hac æquatione,
plura dicenda erunt, vt intelligamus, quoniam
modis vna eademq. æquatio possit variari. Inuen-
ta enim æquatione aliqua, poterunt ex ea pluri-
mæ aliæ constitui. Vt in superiori exemplo, inuenta est æquatio in-
ter $\frac{1}{2}$ 2e, & 7. Et quoniam ponebatur 1 2e, æqualis toti numero in-
ueniendo, fit vt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$, hoc est, $\frac{1}{2}$ 2e & $\frac{1}{2}$ 2e, hoc est, 7. æquantur
vni radici, ita vt æquatio sit inter $\frac{1}{2}$ 2e + 7, & 1 2e. Iuxta hanc cõ-
munem sententiam. Omne totum æquale est omnibus suis partibus
simul sumptis. Sic etiam si $\frac{1}{2}$ 2e, dematur ex 1 2e, & 7, ex toto nume-
ro 42, inuenta erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ 2e, & 35. &c.

SED vt accuratius varias æquationum commutationes cogno-
scamus, sciendum est, omnem calculum, qui in hac Algebræ regu-
la instituitur, fieri per lineas, superficies, acque corpora, quæ pro-
grediuntur secundum proportionem aliquam Geometricam ab vni-
tate inchoatam, vt supra diximus. Apposite igitur varis æquatio-
nes ex hac sequenti figura Geometrica intelligi possunt.

Est enim 1 2e, linea quædam par-
tium sub certo quodam numero,
seu series quædam rerum quarũ-
cunque sub numero aliquo de-
terminato. Vt in hac figura qua-
drangulari, sex lineæ longitudi-
nis, quarum quælibet partes ha-
bet 12; similiterq. duodecim li-
næ latitudinis, in quarum qua-
libet reperiuntur partes 6, vide-
re licet. Vides autem primo, vt 6 2e, longitudinis æquantur huic
numero 72. quia sex lineæ, seu 6 2e, longitudinis complent totam
figuram continentem partes 72. Deinde cernis, vt 12 2e, latitudinis
eidem numero 72, æquales sint. Totam enim figuram habentem
partes 72, constituunt 12 2e, latitudinis, seu 12 lineæ latitudinis,
vt patet. Sed in exemplum sumamus 12 2e, latitudinis, vt æquatio
sit inter 12 2e, & 72. Et quoniam, si ab æqualibus æqualia auferan-
tur,

*Varia permu-
tationes aqua-
tionum.*

tur, quæ remanent, æqualia sunt; si ex utroque numero æquationis auferamus 4 2e, remanebit adhuc æquatio inter 8 2e, & 72 — 4 2e. Nā 8 2e, latitudinis in figura superiori continent partes 48. at 4 2e, faciunt 24. Sublatis autem 24, ex 72, relinquuntur 48. Similiter, quoniam si æqualibus æqualia addantur, quæ sunt, æqualia sunt; si utriusque parti huius ultimæ æquationis inter 8 2e, & 72 — 4 2e, addamus 10. inueniemus æquationem inter 8 2e + 10, & 82 — 4 2e. Nam 8 2e + 10, faciunt 58, & tantundem efficiunt 82 — 4 2e, ut constet. Quod si rursus utriusque parti huius æquationis inter 8 2e + 10, & 82 — 4 2e, auferamus 4 2e, remanebit æquatio inter 4 2e + 10, & 82 — 8 2e. Nam ex superiori figura utraque pars constituit 34. Ita quoque si ex huius æquationis ultimæ parte utraque detrahamus 10, constituetur æquatio inter 4 2e, & 72 — 8 2e. Utraque enim pars facit 24. Atque hac arte ex una æquatione inuenta sexcentæ alie possunt constitui, non variato valore, seu pretio vniuersis radicis.

SVMMA autem huius variationis in hoc præcepto consistit.

*Præceptū va-
riandi quam-
vis æqua-
tionem.*

Utriusque termino Æquationis idem commune addatur, aut ab utroque idem commune subtrahatur; aut certe uterque terminus per eundem numerum multiplicetur, diuidaturve. Ita enim remanebit illæsa æquatio sub terminis mutatis.

IN qua quidem Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione in memoriam reuocanda sunt documenta illa, quæ de signis istis +, & —, tradidimus. Variatio superiorum æquationum facta est per additionem, & subtractionem eiusdem numeri ab utroque termino æquationis: Nunc subiiciemus alterum exemplum, multiplicationis, & diuisionis. Sit igitur ex eadem figura superiori inuenta æquatio inter 3 2e + 12, & 72 — 7 2e. Quod si utrunque terminum multiplicemus per 2, efficiemus æquationem inter 6 2e + 24, & 144 — 14 2e. Nam uterque terminus facit 60. Sic etiam, si utrumque terminum huius posterioris æquationis diuidamus per 6, prodibit æquatio inter 1 2e + 4, & 24 — 2 2e. Ut perspicuum est.

DE REDVCTIONE AEQVATIONIS.

Cap. X.



QVANDO in solutione alicuius quæstionis ad Aequationem deuentum fuerit, ita ut per numerū maioris characteris Cossici reliquus Aequationis numerus diuidi non possit; ut regula Algebræ præcipit; reducenda est Aequatio inuenta prius, quam Diuisio institatur. Tunc autem Diuisio fieri non potest, cum maior chara-

character Cossicus, per cuius numerum fieri debet diuisio, vel non solus ponitur in altera parte æquationis, vel etsi solus ponitur, tamen in reliqua quoque parte idem character reperitur, ut ex his exemplis perspicuum fiet. Sit inuenta æquatio inter $9\ 2e - 12$, & 43 . Hic vides diuisionem fieri non posse per 9 , numerum videlicet maioris characteris Cossici $2e$, quia non solum $9\ 2e$, constituunt alteram æquationis partem, sed $9\ 2e - 12$. Sic quoque, si æquatio fuerit inter $9\ 2e$, & $72 - 3\ 2e$; non poterit diuisio fieri per 9 , numerum scilicet huius characteris $2e$, quia licet solus hic numerus $9\ 2e$, occupet alteram partem æquationis, idem tamen character $2e$, in altera quoque parte æquationis reperitur. Similiter inuenta æquatione inter $9\ 2e + 12$, & $78 - 2\ 2e$, diuisio nulla fieri potest, quod in vtrique parte æquationis reperitur & character hic $2e$, & hic N . Idem iudicium de alijs æquationibus huiusmodi habeto, qualis est inter $1\ 8 - 3\ 2e$, & 108 . Item inter $1\ 8 - 48$, & $8\ 2e$. Itē inter $108 + 8\ 2e$, & $2\ 8 - 12\ 2e + 60$. &c. Omnes hæ æquationes, in quibus valor radices est 12 , & similes aliæ, reducendæ sunt ad alias, in quibus maior character Cossicus in altera parte æquationis solus statuitur, & in altera parte amplius non repetatur. In quibus nullus character Cossicus bis ponatur. Fit autem hæc reductio per variationem illam, seu permutationem particularum æquationis, quā in præcedenti cap. descripsimus. Ut æquatio inter $9\ 2e - 12$, & 43 , reducitur per restaurationem huius diminuti $- 12$, hoc est, per additionem huius numeri 12 , ad vtramque partem, ad hanc inter $9\ 2e$, & 55 . Ita etiam æquatio inter $9\ 2e$, & $72 - 3\ 2e$, per restaurationem huius diminuti $- 3\ 2e$, hoc est, per additionem $3\ 2e$, ad vtramque partem, reuocatur ad æquationem inter $12\ 2e$, & 72 . Pari ratione æquatio inter $9\ 2e + 12$, & $78 - 2\ 2e$, primo per restaurationem diminuti huius $- 2\ 2e$, seu additionem $2\ 2e$, ad vtramque partem, reducitur ad æquationem inter $11\ 2e + 12$, & 78 . Secundo hæc per transpositionem huius additi $+ 12$, hoc est, per subtractionem 12 , ex vtrique parte, reducitur ad æquationem inter $11\ 2e$, & 66 .

RVRSVS æquatio inter $1\ 8 - 3\ 2e$, & 108 , reducitur per restaurationem diminuti huius $- 3\ 2e$, ad æquationē inter $1\ 8$, & $32e + 108$. vtrique enim parti additæ sunt $3\ 2e$. Sic etiā æquatio inter $1\ 8 - 48$, & $8\ 2e$, reducitur per restaurationem huius diminuti $- 48$, hoc est, per additionem 48 , ad vtrique partē, ad istam inter $1\ 8$, & $82e + 48$. Denique æquatio inter $108 + 8\ 2e$, & $2\ 8 - 12\ 2e + 60$, reducitur primo per restaurationem $- 12\ 2e$, ad æquationem inter $108 + 102e$, & $2\ 8 + 60$. Secundo hæc per transpositionem $+ 60$, id est, per ablationem 60 , ex vtrique parte, reducitur ad æquationem inter $2\ 8$, & $102e + 48$. Itaq. omnis reductio æquationum, ut expeditior fiat, initium sumere debet a restauratione diminuti, si quod fuerit, hoc est, numerus ille, qui hoc signum $-$ gerit, vtrique parti æquationis addi debet. Deinde transponendus est numerus signum $+$ gestans, ex vna parte in alteram, hoc est, ex vtrique parte est detrahendus.

Varia æquationes reducenda.

Æquationes ita reducenda sunt, ut maior character solitarius in vna parte ponatur, &c. Reductiones variarum æquationum.

Quæ quidem restauratio, seu additio, & transpositio, seu subtractio, quamvis recte fiat per regulam additionis, & subtractionis, vt ex dictis patet, tota tamen ars reductionis continetur in his duobus præceptis, quorum primum est.

Primum præceptum reductionis.

Quicquid transponitur, mutat signum. Hoc est, particula æquationis habens signum —, transposita in alteram partem acquirit signum +, nimirum additur alteri parti. Particula vero gerens signum +, transposita mutat + in —, id est, subtrahitur. Quod quidem in omnibus reductionibus præmissis obseruatum est. Quod si particula illa, quæ transponitur, habuerit similem denominationem in altera parte, in quam est transponenda, vsurpandum erit secundum hoc præceptum.

Secundum præceptum reductionis.

Eadem signa subtrahunt, diuersa vero addunt. Hoc est, si particula æquationis transponenda gerens signum quodcumque ex his duobus +, —, habuerit in altera parte æquationis numerum maiorem eiusdem denominationis cum eodem signo, subtrahendus est numerus illius particule ab hoc numero, relinquendumq. est idem signum, quod habet numerus, a quo fit subtractio: Vnde inchoanda erit transpositio a minori numero. Si vero particula transferenda habuerit in altera parte numerum eiusdem denominationis cum opposito signo, addendus est numerus illius particule huic numero, relinquendumq. est idem signum, quod habet numerus, ad quæ fit additio. Atque vt vtriusque regulæ vsus melius intelligatur, reducemus adhuc vnâ aut alterâ æquationem. Sit æquatio inter 6 2e — 10, & 10 2e — 34. quoniam igitur numeri 10. & 34. habent idem signum —, propterea, vt minor 10, transferatur, auferendus est numerus 10, ex 34. atque ita remanebit æquatio inter 6 2e, & 10 2e — 24. Rursus quia numeri 10 2e, & 6 2e, idem habent signum +, idcirco minor 6 2e, a maiori 10 2e, aufertur, vt maneat æquatio inter 0 2e, & 4 2e — 24. Denique transponendo — 24, erit æquatio inter 24, & 4 2e. Sit rursus æquatio inter 54 + 4 2e, & 1 2e — 6 2e + 30. Primum quia + 4 2e, & — 6 2e, diuersa signa habent, propterea adduntur 4 2e, ad 6 2e, vt fiant — 10 2e. sitq. æquatio inter 54, & 1 2e — 10 2e + 30. Deinde quia 54, & + 30, idem signum + habent, ideo subtrahuntur 30, a 54, vt maneat æquatio inter 24, & 1 2e — 10 2e. Tertio transpono — 10 2e, vt sit æquatio inter 1 2e, & 10 2e + 24. & sic de cæteris.

Summa reductionis.

ITAQUE colligitur ex ijs, quæ diximus, totum negotium reductionis in transpositione particularum esse positum: Transpositionem autem istam ex proxime dictis documentis pendere. Oblata enim æquatione aliqua, in qua numerus characteris maioris Cossici non solus vnâ partem æquationis constituit, sed ei coniunctus est alius numerus Cossicus minoris denominationis, transferendus est hic in alteram partem, iuxta præceptum quidem primum, si in altera parte, in quam transfertur, non reperitur numerus eiusdem denominationis: At vero si altera pars æquationis, in quam fieri debet hæc transpositio, habuerit eiusdem denominationis numerum, peragenda

agenda est hæc translatio iuxta alterum documentum. quæ omnia in superioribus exemplis obseruata esse vides. Denique consue-
 continuanda est æquatio, addendo, auferendo, & transponendo,
 quoad maioris characteris numerus in, vna parte solitarius conspi-
 ciatur.

VOLO autem studiosum hoc loco esse monitum, hæc duo præ-
 cepta solum inuenta esse pro compendio reductionis: Nam qui ad-
 ditionis & subtractionis regula vult esse contentus, potest citra
 omne incommodum illis carere. Quod etiam nonnullis consulere-
 rem, ne hæc præcepta cum præceptis additionis, & subtractionis
 confundant, id quod sæpe accidere solet, præsertim tyronibus hu-
 ius artis.

SED agamus iam de reductione illarum æquationum, quæ inter
 Minutias reperiuntur. Omnis autem eiusmodi æquatio reducitur
 ad æquationem integrorum per multiplicationem in cruce. Sit
 inuenta æquatio inter has Minutias $\frac{120}{8} + \frac{36}{2} = \frac{990}{20}$. Multi-
 plicentur in cruce, nempe numerator prioris Minutiae in deno-
 minatorem posterioris ducatur, & denominator prioris in nume-
 ratorem posterioris eritq. facta æquatio inter $9 \frac{3}{4} + 36 \frac{2}{2} = 180 \frac{8}{20}$. Hoc est, per abbreviationem characterum, inter
 $9 \frac{3}{4} + 36$, & $180 \frac{8}{20} = 990$. & per abbreviationem numerorum, inter
 $9 \frac{3}{4} + 4$, & $20 \frac{2}{2} = 110$. Quod si fiat reductio per transpositio-
 nem, vt nuper tradidimus, erit eadem hæc æquatio inter $19 \frac{3}{4}$,
 & 114 .

SIC æquatio inter $\frac{48}{4} + \frac{12}{3} = \frac{120}{5}$, reducitur per multiplica-
 tionem in cruce ad hanc inter $8 \frac{2}{2} + 36 = 12 \frac{8}{5}$. Quæ si
 per transpositionem reducat, erit eadem æquatio inter $66 \frac{2}{5} + 36$,
 & $12 \frac{8}{5}$.

QVOD si æquatio inuenta sit inter hanc minutiam $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$ &
 quamcunque aliam rem, vt libram, vel vntiam, vel horam, vel gra-
 dum, vel minutum, &c. sumenda est hæc res tanquam integrum,
 aliquod, & pro ea vnitas constituenda, cui alia vnitas supponatur,
 vt fiat fractio. Vnde in dato exemplo erit æquatio inter $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$ &
 $\frac{1}{12}$ quæ per multiplicationem in cruce reducetur ad æquationem
 inter 628 , & $126 + 12$.

DEMONSTRATIO reductionis æquationum inter Minutias per-
 facilis est. Quoniam enim duæ Minutiae ponuntur æquales, erit
 eadem proportio numeratoris Minutiae prioris ad denominatorem
 eiusdem, quæ numeratoris Minutiae posterioris ad denominatorem
 eiusdem. Quare si Minutiae per cruce multiplicentur, hoc est, nu-
 merator prioris Minutiae in denominatorem posterioris ducatur, &
 denominator prioris in numeratorem posterioris, nempe primus
 numerus in quartum, & secundus in tertium, producti erunt nu-
 meri æquales: atque adeo Aequatio inuenietur inter illos numeros
 productos. Quod erat demonstrandum.

QVO pacto autem æquatio inter numerum Cossicum irrationali-
 lem, & numerum absolutum, vt inter $\sqrt{8} 24 \frac{2}{2}$ & 12 , vel inter

translatio

*Securior est
reductio sine
duobus præce-
ptis prædictis.*

*Reductio æqua-
tionum inter
Minutias, &
inter numeros
Cossicos irra-
tionales, &
numeros abso-
lutos inueni-
tam.*

translatio

*Demonstratio
reductionis æ-
quationum in-
ter minutias.*

18 10 8. & 10: reducenda sit, docebimus ad finem cap. 16. ubi de huiusmodi numeris acturi sumus.

Characteres abbreviandi SI occurrat tandem æquatio, in qua nullus sit numerus absolutus, abbreviandi erunt characteres Cossici, vt cap. 7. docuimus. Vt sunt, vt habetur numerus absolutus in una parte æquationis.

SIMILITER æquatio inter 1 8, & 1 8 + 35 156 88, reducenda est ad æquationem inter 1 8, & 1 8 + 35 156.

Item æquatio inter 1 8, & 1 8 + 35 156 88, reducenda est ad æquationem inter 1 8, & 1 8 + 35 156.

Item æquatio inter 1 8, & 1 8 + 35 156 88, reducenda est ad æquationem inter 1 8, & 1 8 + 35 156.

Item æquatio inter 1 8, & 1 8 + 35 156 88, reducenda est ad æquationem inter 1 8, & 1 8 + 35 156.

VERVM hæc abbreviatio non est omnino necessaria, vt in cap. 11. dicemus ante extractions radicum numerorum Cossicorum simplicium.

Reducenda est æquatio per diuisionem, ut numerus maioris characteris Cossici solitarii positus sit unitas. POSTREMO si facta reductione æquationis, vt maior character Cossicus ponatur solus ex altera parte æquationis, qui maior sit quam 26, qualis est 8, vel 88, &c. diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum illius characteris Cossici maioris, si non est unitas; ita vt unitas ab illo characteris Cossico denominata qualis sit alteri parti æquationis. Vt si æquatio sit inuenta inter 4 8, & 8 26 + 96. diuidendi erunt singuli numeri per 4. vt reducat æquatio ad æquationem inter 1 8, & 2 26 + 24.

Item æquatio inter 12 8, & 66 26 + 36. reducenda est per diuisionem ad æquationem inter 1 8, & 5 26 + 3. &c.

RATIO huius reductionis obscura non est. Cum enim singuli numeri per eundem numerum diuidantur, nempe per numerum maioris characteris Cossici, habebunt Quotientes eandem proportionem, quam numeri diuisi. Quam ob rem, quemadmodum inter numeros diuisos, ita & inter Quotientes Aequatio necessaria reperietur.

CAETERVM hæc reductio fiet, si iuxta tenorem regulæ Algebræ diuisio instituat per numerum maioris characteris, ipso characteris abiectis, retentis tamen characteribus numerorum, ipso characteris abiectis, retentis tamen characteribus numerorum, qui diuidantur, vt cap. insequenti dicitur: adeo vt hæc reductio, de qua proxime diximus, superuacanea esse videatur, quandoquidem Diuisio, quæ in regulæ Algebræ præcipitur, eam nobis exhibeat. Quia tamen alij auctores eam reductionem necessariam esse docent, libuit eam etiam hic explicare, quamuis, vt diximus, eam diuisio iuxta legem regulæ Algebræ commodissime quoque offerat.

DE DIVISIONE, QVAM PRAECIPIT regula Algebra. Cap. XI.



PRÆACTA reductione æquationis, ubi id res postulat, quemadmodum cap. præcedenti docuimus, præcipit regula Algebra, vt per numerum maximi characteris Cossici, abiecto caractere, totus reliquus æquationis numerus diuidatur, vna cum characteribus Cossicis. Est autē hæc diuisio compendium quoddam regulæ illius aureæ proportionum, quam trium appellant. Nam si exempli gratia 72e. æquales sint huic numero 42. inquirendum est, cui numero 12e. æqualis sit. Quare iuxta doctrinam regulæ trium, multiplicantur inter se 42, & 12e, producunturq. 42 12e, quibus diuisis per 72e, prodeunt 6. pro æstimatione vnus radices. Quando enim Cossicus numerus per numerum Cossicum eiusdem characteris diuiditur, producitur numerus absolutum, vt ex ijs constat, quæ cap. 5. scripsimus; quia numerum exponentes æquales sunt, ac proinde detracto vno ex altero, remanet 0, exponents numeri absoluti. Hinc est, quod regula Algebra absolute docet, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse alterum numerum æquationis. Nam hæc ratione idem numerus producitur, qui per proportionum regulam produceretur. Vt ex proposito exemplo constat. Idem enim numerus producitur ex diuisione 42 12e, per 72e, qui ex diuisione 42, per 7.

Explicatio plenior diuisionis, quam regula Algebra præcipit.

SIMILITER si 12 3, æquales sint 66 2e + 36, inquirendum est, cui numero æqualis sit 1 3. Quare multiplicatur inter se 66 2e + 36, & 1 3, producunturq. 66 2e + 36 3; quibus diuisis per 12 3, vt iubet regula trium, proueniunt 5 1/2 2e + 3. pro pretio vnus Zens, seu quadrati. Idem hic numerus producitur, si per 12 3, abiecto prius caractere hoc 3, diuidantur 66 2e + 36. vt constat: propterea ait regula Algebra, per numerum maioris characteris Cossici diuidendum esse simpliciter reliquum æquationis numerum, ne longior operatio per regulam trium instituitur. Eodem modo si 1/2 3. & 6 2e + 13 1/2. æquales sint, querendū est, quanta sit æstimatio vnus Zens vel quadrati. Quod quidem fiet, iuxta legem regulæ Algebra, diuidendo singulos numeros per 1/2, numerum scilicet maximi characteris. Qua ratione inuenietur æquatio inter 13. & 182e + 40. hoc est, pretium. 1 3. erit 18 2e + 40.

Item si æquatio inueniatur inter 1 3e. & 600 2e + 10368 indagandum est pretium vnus zensicubi. quod per regulam trium fiet, si dicatur: si 3 3e. dant 600 2e + 10368. quid dabit 1 3e? Multiplicando enim duos posteriores numeros inter se, producitur numerus 600 2e + 10368 3e, quo diuiso per primum numerum, vide-

vide-

videlicet per 3 re. fiet Quotiens 200 re + 3456. critq. æquatio inter 1 re & 200 re + 3456. quæ facilius inuenitur, si singuli numeri huius æquationis inter 3 re. & 600 re + 10368. diuidantur per 3. nimirum per numerum maioris characteris, vt ad finem antecedentis cap. scripsimus. Ita enim opus non erit adhibere regulam trium: sed satis erit, vt per numerum maioris characteris, abiecto characterē, singuli numeri alterius partis æquationis vnā cum characteribus diuidantur, vt regula Algebræ iubet.

QVOD si diuisor fuerit vnitas denominata a maiore characterē Coscico, non opus est diuisione, quoniam vnitas diuidens nihil noui producit. Vt si 1 re, æqualis sit 3 re + 18. &c. Quare operæ pretium est, vt æquatio reducat, ita vt numerus maioris characteris sit vnitas, quemadmodum ad finem præcedentis cap. docuimus.

QVOD autem, quando vnitas denominatur a maiore characterē, diuisione non sit opus, liquidò constat ex regula trium. Nam in hac æquatione inter 1 re. & 3 re + 18. si dicatur. Quando 1 re, dat 3 re + 18. quid dabit 1 re? erit identitas, & nugatio. Nam ex multiplicatione 3 re + 18. per 1 re. fit numerus 3 re + 18 re. qui diuisus per 1 re. facit 3 re + 18. vt ex lege multiplicationis, atque diuisionis liquet.

DE EXTRACTIONE RADICVM, cuius mentionem facit regula Algebræ.

Cap. XII.

Quando quotiens indicat pretium radicis.



DOCENDVM est vltimo loco, quando numerus Quotiens Diuisionis numerum ignotum, qui queritur, patefaciat, & quando radix aliqua Quotientis, & quænam eundem numerum absconditum indicet. Quando igitur, facta reductione characterum Coscicorum, maior character Coscicus fuerit re. tunc numerus quotiens continuo numerū, qui queritur, manifestum facit. Vt si 5 re, æquales sint 30. facta diuisione 30. per 5. dabit Quotiens, nempe 6, pretium vnus radicis: vt ad initium præcedentis cap. dictum est. Immo quotiescunque numerus Coscicus maioris denominationis æquatur numero Coscico proximè minoris denominationis, diuiso numero minoris denominationis per maioris denominationis numerum, dabit Quotiens valorem vnus radicis, etiam si non sit facta abbreviatio characterū: quia huiusmodi æquatio per abbreviationem characterum reducitur ad æquationem inter re & N. Vt si 5 re. æquantur 30. re. diuisis 30. per 5. fit Quotiens 6. pro pretio vnus radicis. Nam hæc æquatio reducitur ad æquationem inter 5 re, & 30. si characteres abbrevientur.

uientur. Quod etiam ex regula trium manifestum est. Nam si dicitur. Si 5β . dant $30\beta\gamma$. quid dabit 1α ? multiplicando $30\beta\gamma$. per 1α . sunt 30β . quibus diuisis per 5β . fit Quotiens 6 . numerus absolutus. Eademq. ratio est de ceteris numeris Cossicis collateralibus. Ratio huius rei est, quod in omni progressionem Geometrica incipiente ab 1 . eadem semper est proportio cuiuscunque numeri ad proximè antecedentem, quæ secundi ad primum, hoc est, radices ad unitatem.

Si vero maximus character Cossicus æquationis, qui solus ex vna parte æquationis statuitur, maior sit, quàm 1α , & numerus absolutus sit in altera parte, extrahenda est ex Quotiente radix, quam ipse character significat. Vt si character sit γ , extrahenda est radix Zenfica, siue quadrata: si $\epsilon\epsilon$, cubica: si $\beta\gamma$, Zenfizenfica: si β , Surdesolidi, &c. Quia in huiusmodi æquationibus ex diuisione inuenitur æstimatio vnius zenfi, vel cubi, vel zenfizenfi, &c. Exempli gratia, si æquatio sit inter 2γ , & $144-12\alpha$, erit (facta prius diuisione, vt 1γ , equalis sit $72-6\alpha$.) extrahenda radix quadrata ex $72-6\alpha$. Similiter, si æquatio sit inter 1γ , & $6\alpha+72$, vel $72+6\alpha$, eruenda erit quadrata radix ex $6\alpha+72$, vel ex $72+6\alpha$. Sic etiam, si æquatio inueniatur inter 5γ , & 720 . erit, facta diuisione, quærenda radix quadrata ex Quotiente hoc 144 . Item si $10\epsilon\epsilon$, æquales sint 466560 , inuenienda erit, facta diuisione, radix cubica huius Quotientis 46656 . & sic de ceteris. Vt autem generaliter sciatur, quænam radix eruenda sit ex Quotiente, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus, abbreviandi sunt characteres, vt æquatio fiat inter N . & numerum Cossicum. Vt si æquatio sit inter $10\beta\epsilon$ & $466560\epsilon\epsilon$. reductur ea ad æquationem inter $10\epsilon\epsilon$ & 466560 . Facta ergo diuisione, eruenda erit radix cubica ex Quotiente 46656 . Et sic de ceteris. Ratio est, quia per diuisionem inuenitur valor vnius cubi, vel alterius numeri Cossici, ad quem facta est abbreviatio per characteres. Nam si dicas. Si $10\epsilon\epsilon$ dant 466560 . quid dabit $1\epsilon\epsilon$ facies ex multiplicatione secundi numeri in tertium, $466560\epsilon\epsilon$. quibus diuisis per $10\epsilon\epsilon$. fit Quotiens 46656 . valor vnius cubi &c.

DENIQUE quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, vt cognoscas, quænam radix, facta diuisione minoris numeri Cossici per maiorem, ex Quotiente sit eruenda, etiam si characteres non abbreviuntur: vide quot denominationes in progressionem Geometrica inter propósitos duos numeros Cossicos sint interiectæ. Nam si vna tantum est intermedia, extrahenda est radix quadrata: si duæ, cubica: si tres, Zenfizenfica, &c.

CAETERVM quæ arte radices ex numeris absolutis sint extrahendæ, copiose satis in Geometria practica exposuimus, nunc vero explicandum est, quonam modo ex numeris Cossicis sint eliciendæ.

SI igitur extrahenda est radix aliqua ex numero Cossico simplici, sumatur propósita radix illius numeri, relicto characterē, ac si absolutus esset. Deinde exponens characteris eiusdem numeri di-

Quando, & qua radix sit extrahenda, quando alter numerorum æquationis est numerus absolutus.

Quam radix sit extrahenda, quando duo numeri Cossici non collaterales inter se æquantur, quorum neuter est numerus absolutus.

Qualis radix sit extrahenda, etiam si characteres non abbreviuntur.

Extractio radicum ex numeris Cossicis simplicibus.

uidatur per exponentem characteris, a quo radix extrahenda denominatur, inuenieturq. exponents characteris, a quo radix quæsitæ, denominabitur. Vt sit inuenienda radix quadrata huius numeri 144 8. Sumpta radice quadrata ipsius numeri 144, quæ est 12, diuidatur exponents huius characteris 8, per exponentem characteris 8, a quo videlicet radix quadrata, quæ quæritur, denominatur, nimirum 2, per 2. proueniet enim 1, pro exponente characteris 2. Est ergo 12 2e. radix quadrata huius numeri 144 8. Nam si hic numerus 12 2e, in seipsum multiplicetur, producetur numerus propositus 144 8.

RVRVSVS sit eruenda radix quadrata ex 144 3re. Accepta radice quadrata numeri, nempe 12, diuidatur exponents characteris huius 3re. nempe 6, per exponentem radicis quadratæ, nimirum per 2. reperieturq. exponents 3. cuius character est 2e. Igitur 12 2e, radix quadrata est huius numeri 144 3re.

SIC quoque radix cubica huius numeri 64 2e, erit 4 2e. Nam radix cubica numeri huius 64, est 4. & exponente huius characteris 2e, nempe 3, diuiso per 3, exponentem scilicet characteris, a quo radix cubica nomen sumit, producitur vnitas, exponents videlicet huius characteris 2e.

Item radix quadrata huius numeri 25 88, erit 5 8.

Et radix Zenfizenfica huius numeri 16 888, erit 2 8.

Et radix Surdesolida numeri huius 32 88, erit 2 8.

Et radix Zenfizenfica huius numeri 81 88, erit 3 2e. &c.

QVOD si vel numerus non habeat radicem, quæ inquiritur, vel ex diuisione exponentium non producat numerus exponents integer, carebit propositus numerus Cossicus radice illa, quæ desideratur. Vt numerus 25 2e non habet radicem quadratam, vel cubicam, quia etiam si numerus 25. habeat radicem quadratam, nempe 5. tamen ex diuisione 3, exponentis scilicet huius characteris 2e, per 2, exponentem quadratæ radicis, prouenit numerus 1 ½, cui nullus character respondet. Rursus et si ex diuisione 3, exponentis huius characteris 2e, per 3, exponentem radicis cubicæ, proueniat 1, exponents characteris huius 2e. tamen numerus 25. caret radice cubica. &c.

QVOD vero attinet ad extractionses radicum ex numeris Cossicis compositis, & diminutis, sciendum est, tunc solum posse certa via & arte ex eiusmodi numeris extrahi radices, quando tres numeri Cossici æquationis habent exponents, qui eundem inter se excessum habeant: hoc est, qui sint Arithmetice proportionales. Quales sunt sequentes æquationes.

*Qui numeri
Cossici compo-
siti habeant
radices.*

$$1.8. \quad 62e + 72.$$

$$1.8. \quad 72 - 62e.$$

$$1.8. \quad 142e - 48.$$

$$1.88. \quad 188 + 648.$$

$$1.88. \quad 725 - 48.$$

Exponentes sunt.

2. 1. 6.

Exponentes sunt.

3. 0. 7.

Exponentes sunt.

2. 1. 0.

Exponentes sunt.

4. 2. 0.

Exponentes sunt.

4. 0. 2.

1.88.

| | | | |
|-------|-------------------|------------------|---------------|
| 1.88. | 4338—41616. | Exponentes sunt. | 4. 2. 0. |
| 1.88. | 10088+3456. | Exponentes sunt. | 6. 3. 0. |
| 1.88. | 5120—1668. | Exponentes sunt. | 6. 0. 3. |
| 1.88. | 8008—156751. | Exponentes sunt. | 6. 3. 0. |
| 1.88. | 100088+185076881. | Exponentes sunt. | 8. 4. 0. |
| 1.88. | 114651701—1038. | Exponentes sunt. | 8. 0. 4. |
| 1.88. | 100088—78461119. | Exponentes sunt. | 8. 4. 0. |
| 1.88. | 808+39609. | Exponentes sunt. | 10. 5. 0. |
| 1.88. | 7424—1008. | Exponentes sunt. | 10. 0. 5. |
| 1.88. | 10008—999424. | Exponentes sunt. | 10. 5. 0. &c. |

Quando exponentes Arithmetica progressionem seruantes omnes sunt maiores quam 0. abbreviandi sunt per subtractionem minimi numeri exponentis. Ut hæc sequentes æquationes

| | | | |
|-------|----------------|------------------|-----------|
| 1.C8. | 7258—48. | Exponentes sunt. | 11. 7. 9. |
| 1.C8. | 100888+34568. | Exponentes sunt. | 11. 8. 5. |
| 1.88. | 100888+143368. | Exponentes sunt. | 10. 6. 3. |

reducuntur ad hæc.

| | | | |
|-------|--------------|------------------|----------|
| 1.88. | 725—48. | Exponentes sunt. | 4. 0. 2. |
| 1.88. | 10088+3456. | Exponentes sunt. | 6. 3. 0. |
| 1.88. | 10088+14336. | Exponentes sunt. | 3. 4. 0. |

Pt sic de alijs infinitis dicendum est. Ita enim facile cognoscetur, quænam radix eruienda sit.

QUANDO autem exponentes non seruant Arithmetica proportionem, hoc est, non habent eundem excessum, ut si æquatio foret inter 188, & 48+16. vbi exponentes sunt 3. 2. 0. Vel inter 188, & 1028+24. vbi exponentes sunt 3. 1. 0. nondum est inuenta ars, qua huiusmodi radices certo eruantur; quamvis Cardanus, & Nicolaus Tartalea in quibuldam exemplis singularibus inuenerint ælimationem vnius radices. Raphael autem Bombellus ex quibusdam etiam æquationibus eiusmodi, & alijs nonnullis putat se inuenisse, quo pacto eruiendæ sint radices. Franciscus quoque Vieta dicitur demonstrasse regulam generalem pro eiusmodi radicibus extrahendis: quâ quia videre hæcenus non licuit, & rationes Bombelli obscuræ valde sunt, atque æquationes eiusmodi, in quibus nimirum plures numeri Cossici quam duo æquantur vni numero Cossico, (qualis est V.g. æquatio inter 108+38+72 & 34) numero fere infinitæ exiunt, & quæ raro in vsum veniunt, parumturque ipso teste, non paucas exceptiones, contenti erimus in hac nostra Algebra, quæ facilem, certam, atque exploratam habent scientiam, id est, explicabimus tantummodo extractiones radicum ex numeris Cossicis prioris generis, quando nimirum vnus numerus Cossicus duobus æquatur, exponentesq. seruant proportionalitatē

Qui numeri Cossici commensuri non habent radices.

Arithmeticam: quippe cum hæc satis sint ad innumera fere numerorum ænigmata dissoluenda.

AC primo quidem agemus de extractione radicum ex ijs numeris, quorum exponentes sunt 2. 1. 0. vel 2. 0. 1, quæ omnes quadratæ sunt. Deinde vero de inuentione radicum illorum numerorum dicemus, quorum exponentes sunt 4. 2. 0. vel 6. 3. 0. vel 8. 4. 0. vel 10. 5. 0. &c. quæ quidem radices sunt vel Zenszenficæ, vel Zenscubicæ, vel Zenszenzescicæ, vel Zensurdesolide, &c. vt maximi characteres æquationum indicant. Hæ enim æquationes omnes exploratæ, ac certissimam habent scientiam, qua earum radices inueniantur.

HAC igitur arte radices quadratæ eruantur ex compositis, siue diminutis numeris Cossicis.

Extractio radicum quadratarum ex Cossico numero composito vel diminuto.

1. Dimidium numeri radicem sume.
2. Ad huius dimidij quadratum adde, vel ab eodem subtrahere numerum absolutum, prout signo + vel - fuerit affectus.
3. Ad huius summæ, vel relictæ radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahere dimidium numeri radicem, prout radicem numerus signo + vel - fuerit notatus. Nam vltima hæc summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium vnius radices quadrata.

SIT æquatio inuenta inter 1 8, & 72 — 6 2e. Facta diuisione 72 — 6 2e, per 1, vt iubet regula Algebræ, prodit idem numerus, pretium videlicet vnius Zenfi, cuius radicem ita inueniemus.

Primum sumo dimidium numeri radicem, nimirum 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo absolutum numerum 72, propterea quod gerit signum +, facioq. 81.

Tertio a radice quadrata huius summæ 81, nempe a 9, detraho dimidium numeri radicem, puta 3: Nam numerus radicem signo — affectus est, relinquunturq. 6. pro æstimatione radices quæsitæ. Quod sic probatur. Si 1 2e, est 6, erunt 6 2e, 36, quibus sublati ex 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radices 6.

SIT rursus æquatio inuenta inter 1 8, & 62e + 72. Inuenienda igitur est radix quadrata huius numeri 62e + 72.

Primum capio dimidium numeri radicem, puta 3.

Deinde ad huius dimidij quadratum, vt ad 9, addo 72, propter signum +, quod gerit numerus absolutus, facioq. 81.

Tertio ad radicem quadratam huius summæ 81, nimirum ad 9, adijcio dimidium numeri radicem, nempe 3; affectus enim est numerus radicem signo +, efficioq. 12, pro pretio radices. Quod ita confirmatur. Cum 1 2e, est 12, erunt 6 2e, 72, quibus additis ad 72, sunt 144, quibus æqualis est numerus quadratus radices 12.

SIT

SIT denique inuenta æquatio inter 18 & 182—72. Quærenda ergo est radix huius quadrati 182—72.

Primum accipio dimidium numeri radicem, nimirum 9.

DEINDE ab huius dimidij quadrato, puta ab 81, deduco 72, propter signum —, quod præponitur numero absoluto, relinquunturq. 9.

Tertio ad radicem quadratâ huius relictâ 9, hoc est, ad 3, addo dimidium numeri radicem, utpote 9. Gerit namq. numerus radicâ signum +, efficitq. 12, pro valore radicis. Quod hac ratione patet. 18 2e, faciunt 216, si 1 2e, est 12. ablatis igitur 72, ex 216, remanent 144. quibus æqualis est numerus quadratus radicis inueniatur 12.

SED hoc loco monendus lector est, huiusmodi numeros Cossicos Diminutos, in quibus numerus absolutus gerit signum —, habere duplicem radicem, quæ æquationi satisfaciât, maiorem scilicet & minorem. Maior inuenitur, ut proxime dictum est. Minor vero habebitur, si radix quadrata illius relictâ ex dimidio numeri radicem detrahatur. Ut in dato exemplo postremo, si 3, radix quadrata huius relictâ 9, subtrahatur a 9, dimidio numeri radicem, relinquuntur 6, pro altera radice, & minore huius numeri Cossici 182—72. Quod ita constat. 18 2e, faciunt 108, si 1 2e, est 6, ablatis igitur 72, remanent 36, quibus æqualis est quadratus numerus huius radicis 6.

ITAQ. in huiusmodi numeris liberum erit, tertio loco ad radicem quadratam inuentam ex relictâ illo vel addere dimidium numeri radicem, vel eandem illam radicem inuentam ex dimidio numeri radicem subducere. Non tamen semper utraque radix propositum problema soluet, sed altera tantum, ut in ænigmate 25. cap. 32. manifestum fiet.

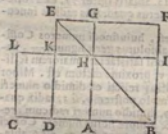
SOLVM numerus ille Cossicus Diminutus habens numerum absolutum signo — affectum. unicam habet radicem, cuius numerus absolutus quadrato dimidij numeri radicem æqualis est. Huius enim numeri Cossici radix est dimidium ipsum numeri radicem. Ut si æquatio sit inter 18, & 182—36. erit radix huius numeri diminuti 182—36, dimidium numeri radicem, nimirum 6: quia numerus absolutus 36, æqualis est quadrato dimidij numeri radicem. Nam capiatur dimidium numeri radicem, nempe 6, & a quadrato huius dimidij, ut a 36, detrahantur 36, quo facto remanet 0, cuius radix quadrata quoque est 0. Siue igitur ad hanc radicem addatur dimidium numeri radicem, puta 6, siue ex hoc dimidio radix dicta tollatur, semper inuenietur radix esse 6, quæ æquationi satisfaciât, ut constat.

EX his perspicuum est, triplicem esse numerum Cossicum, cuius radix quæritur. Aut enim compositus est, cuius tam numerus radicem, quam numerus absolutus gerit signum +; Aut Diminutus, cuius vel numerus radicem, vel numerus absolutus signo — est notatus, ut ex tribus exemplis adductis liquido constare potest.

AGE vero, aperiamus rationem huius extractionis radicū Geometricis demonstrationibus, vt non solum experientia, sed etiam certissima scientia cognoscamus, recte hac arte erui radices quadratas ex numeris. Cossicis compositis, diminutivis. Repetamus ergo primum exemplum, in quo æquatio erat inter 8, & $N - 2$, vel si restaretur diminutum hoc -2 , inter $3+2$, & N .

*Demonstratio
extractionis
radicū ex Cos-
sicis numeris
compositis, di-
minutivis.*

SIT AB, latus Zenq̃i, seu quadrati nobis ignotum, quod queritur, quo productio ad partes A, sumatur recta AC, numero radicū,



æqualis, quæ bifariam secetur in D, vt sit AD, dimidium numeri radicū. Super rectam BD, compositam ex latere quadrati ignoti, & dimidio numeri radicū, describatur quadratum DF, cuius diameter BE. Ducta deinde ipsa DE, parallela AG, quæ diametrum secet in H, ducatur per H, recta IL, ipsi BC, parallela secans DE, in K, occurrensq̃ rectæ, quæ ex C, ipsi DE, parallela ducitur, in L. Quoniam igitur AL, KG, quadrata sunt ex coroll. propos. 4. lib. 2.

Eucl. erit rectangulum CH, contentum sub AC, numero radicū, & AH, latere quadrati, quod queritur, valor, seu pretium radicū; (Numerus enim radicū multiplicatus in valore radicis producit omnium radicū valorem. Vt existente vna radice 6, valebunt 36. primi. & 20. 30.) atque adeo DH, dimidium pretij radicū, cum equalia sint rectangula DH, DL. Cum ergo rectangula DH, HF, equalia quoque sint, erunt DH, HF, equalia integro radicū pretio. Et quoniam quadratum AL, equalē ponitur alicui numero absoluto, minus valore radicū: vel quia quadratum AI, vna cum valore radicū, quarum numerus est AC, ponitur equalē alicui numero absoluto, erit gnomon GBK, illi numero absoluto equalis: qui si addatur ad GK, quadratum dimidij numeri radicū, cognitum erit totum quadratum DF, a cuius latere DE, si auferatur AD, dimidij numeri radicū, vt præcipit regula, notum fiet latus AB. Quod est propositum.

SED sumamus iam secundum exemplum, vbi æquatio erat inter 8, & $2 + N$.

SIT rursus AB, latus quadrati, quod inquiritur. Et quia ponitur 18, equalis $2 + N$, erit numerus radicū minor latere AB. Sit ergo recta AC, numero radicū equalis, cuius dimidium AD, vel DC. Descripto ex AB, quadrato AE, vna cum diametro EF, ducatur DG, ipsi AF, parallela secans BE, in G, puncto, per quod agatur GH, ipsi AB, parallela. Deinde ducatur CI, parallela ipsi BE, secans BF, in K, & GH, in L. Denique per K, agatur MN, parallela ipsi AB, secans DG, in O. Eruntq̃ DH, OL, CM, qua-

æquale sit valori radicem AG, minus numero absoluto, ex hypothesi; erit DG, rectangulum numero absoluto æquale. Et quoniam rectangulum DG, rectangulo AK, æquale est, quod latera DE, DB, lateribus DA, DK, æqualia sint, propter quadrata AE, DL: Est autem AK, gnomoni PBN, æquale. Cum enim æqualia sint complementa CK, KI; addito communi DL, erit CL, ipsi DI, æquale: Sed CL, ipsi AN, æquale est. Igitur & DI, ipsi AN, æquale erit; additoq. communi CK, fiet AK, gnomoni PBN, æquale. Igitur & DG, hoc est, numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis erit. Qui si auferatur, ut præscribit regula extractionis radicem, ex CI, quadrato dimidij numeri radicem, relinquetur nolum quadratum NP, cuius latus CD, additum ad AC, dimidium numeri radicem, constituet latus AD, quadrati AE, notum. Quod est propositum.

SIT iam datum quadratum DL, eodem numero radicem, & numero absoluto eodem manentibus; Erit ergo rectangulum AL, contentum sub numero radicem AB, & latere quadrati BL, æstimatione omnium radicem. Ac proinde, cum quadratum DL, una cum numero aliquo absoluto, valori radicem æquale sit, vel quadratum DL, æquale sit valori radicem AL, minus aliquo numero absoluto, ex hypothesi erit rectangulum AK, numero absoluto æquale. quod cum æquale sit gnomoni PBN, ut ostensum est, erit & numerus absolutus gnomoni PBN, æqualis. quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicem, notum remanebit quadratum NP, cuius latus CD, ex CB, dimidio numeri radicem subtractum, notum relinquet DB, latus quadrati dati DL. Quod est propositum.

POSTREMO datum sit quadratum CI. Erit igitur rectangulum AI, sub AB, numero radicem, & latere BI, comprehensum, pretium radicem propositarum, quibus æquale ponitur quadratum CI, una cum dato numero absoluto. Vel quibus æquale ponitur quadratum CI, minus numero absoluto. Rectangulum igitur AH, numero absoluto æquale erit. Quo ablato ex CI, quadrato dimidij numeri radicem, nihil remanebit, cum æqualia sint rectangula AH, CI; atque adeo nihil addendum erit vel subtrahendum a dimidio numeri radicem, sed ipsummet dimidium numeri radicem, nempe CB, latus erit quadrati dati, ut ante docuimus. Quod est propositum.

Itaq. si x . æquetur $2e - N$. vel æquatio sit inter $x + N$, & $2e$. (quod idem est) si radicem numeri, qui relinquitur, subtractio numero absoluto ex quadrato dimidij numeri radicem, addamus dimidio numeri radicem, inueniemus radicem maiorem æquationi propositæ satisfaciensem: Si vero eandem ex dimidio numeri radicem subtrahamus, reperiemus radicem minorem æquationis propositæ: Si denique numerus absolutus æqualis sit quadrato dimidij numeri radicem, erit ipsum dimidium numeri radicem radix, quæ inquiritur.

Demonstratio alia extractio nis radicis an PETRVS Nonius cap. 4. primæ partis suæ Algebræ adducit alias demonstrationes non minus elegantes, quibus prius inuestigat Geometrice,

metrice, quoniam quadratus numerus, vel Zensus, æqualis sit cuiusque numero absoluto, minus quocunque radicibus, sive qui vna cum quolibet radicibus æqualis sit cuiusque numero absoluto: Vel qui æqualis sit quocunque radicibus, vna cum quouis numero absoluto: Vel denique qui sit æqualis quocunque radicibus, minus quolibet numero absoluto, sive qui vna cum quocunque numero absoluto æqualis sit quolibet radicibus.

numeri Coss
eis compositis,
demonstrare.
similq. 74 &

PROPONATUR ergo primum hic numerus Cossicus 55, — 62. Inueniendum est quadratum huic numero æquale, atque adeo demonstrandum, recte ex superioribus præceptis, eius radicem quadratam fuisse inuentam. Prius restituatur ablatum illud — 62, per transpositionem, ut sit Aequatio inter 18 + 62, & 55. Sit numerus

radicum recta AB, quæ bisariam secetur in C, & ex C, erigatur perpendicularis CD, æqualis lateri illius quadrati, quod numero absoluto est æquale. (omnis enim numerus, etiam non quadratus, habet in quantitate continua radicem, seu latas, ut proposi. 22. lib.

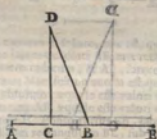
6. Geometricæ Practicæ docui.) connectaturq. recta BD, cui ex CB, producta æqualis absindatur CE. Dico quadratum rectæ BE,

vna cum radicibus propositis, quorum numerus est AB, æquale esse numero absoluto, cuius latus quadratum est CD; ac proinde idem quadratum rectæ BE, æquale esse eidem numero, cuius latus quadratum CD, minus radicibus propositis, quarum numerus est AB.

* Quoniam enim quadratum ex BD, æquale est quadratis ex CD, CB; estq. quadratum ex BD, quadrato ex CE, æquale; erit quoque quadratum ex CB, quadratis ex CD, CB, æquale. Sed quadrato b 6. secun. ex CE, æquale est rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB. Igitur & rectangulum sub AE, BE, vna cum quadrato ex CB, æquale erit quadratis ex CD, CB: ablatoque communi quadrato rectæ CB; æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato ex CD. Est c 3. secun.

autem rectangulum sub AE, BE, æquale quadrato ex BE, & rectangulo sub AB, BE. Igitur & quadratum ex BE, vna cum rectangulo sub AB, BE, æquale erit quadrato ex CD. Cum igitur c posito quadrato ex BE, rectangulum sub AE, BE, numero radicum, & latere quadrati comprehensum sit valor radicum, liquido constat, quadratum rectæ BE, vna cum radicibus datis, quarum numerus est AB, æquale esse numero proposito absoluto, cuius latus quadratum est CD, ideoq. idem quadratum rectæ BE, æquale esse numero absoluto, cuius latus quadratum est CD, minus valore radicum, quarum numerus est AB. Quod est propositum.

EX hac demonstratione manifestum est, præceptum superius recte



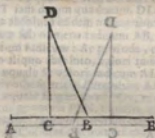
similq. 74 &

numeri 55 &

a 47. primi.

similq. 74 &

hæ præscribere modum inveniendi radicem ex numero hoc Cossico
 55—62. Nam si ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicem,
 adijcitur numerus absolutus, nempe quadratum ex CD, nota fiet
 a 47. primi. duo simul quadrata ex CB, CD, hoc est, quadratum ex BD, atque
 adeo & quadratum ex CE. Si igitur ex hoc latere CE, auferatur CB,
 dimidium numeri radicem, cognitum erit latus BE, hoc est, radix
 quadrata, quæ quærebatur. *ad hoc opus sit quædam regulæ communes*
 SIT rursus Cossicus numerus 62+55. Exhibendum est quadra-
 tum illi æquale, demonstrandumq; recte eius radicem esse extractam,
 iuxta præcepta superiora. Sit rursus recta AB, secta bisariam in C,
 numerus radicem, & perpendicularis CD, latus quadratum nu-
 meri absoluti. & ductæ rectæ BD,



b 47. primi.

a 6. secun.

æqualis sit recta CE. Dico, qua-
 dratum rectæ AE, æquale esse ra-
 dicibus datis, quarum numerus
 AB, una cum numero dato abso-
 luto, cuius quadratum latus CD.
 Quoniam enim quadratum ex
 BD, atque adeo & quadratum ex
 CE, quadratis ex CD, CB, aequa-
 le est; Est autem quadrato ex
 CE, æquale quadratum ex CB,
 una cum rectangulo sub AE, BE;
 Erit quoque quadratum ex CB,
 una cum rectangulo sub AE, BE,
 comprehensum quadratis ex CD, CB, æquale; ablatoque communi
 quadrato rectæ CB, æquale erit rectangulum sub AE, BE, quadrato
 ex CD, hoc est, numero absoluto proposito. Quare cum & rectan-
 gulum sub AE, AB, latere quadrati, (posito quadrato ex AE,) & nu-
 mero radicem contentum sit radicem propositarum valor, sitq;
 quadratum ex AE, duobus rectangulis sub AE, BE, & sub AE, AB,
 æquale; perspicuum est, quadratum rectæ AE, æquale esse radici-
 bus, quarum numerus est AB, una cum dato numero absoluto, cu-
 ius latus quadratum CD. Quod est propositum.

d v. secun.

m uol. d d

m uol. e c

e 47. primi.

LATVS autem AE, ita potum sit ex superioribus, & hac demo-
 stratione. Ad quadratum rectæ CB, dimidij numeri radicem, adda-
 tur numerus absolutus, quadratum videlicet rectæ CD, fietq; nota
 duo quadrata simul rectarum CB, CD, hoc est, quadratum ex BD,
 seu CE. Quod si ad latus CE, cognitum apponatur dimidium nu-
 meri radicem, nempe recta AC, nota erit tota AE, quæ quære-
 batur. *ad hoc opus sit quædam regulæ communes*
 SIT denique numerus Cossicus 18+56, cui inveniendum est
 quadratum æquale, & ostendendum, recte inventum esse eius latus.
 Sit, ut prius, numerus radicem recta AB, secta bisariam in C, & re-
 cta D, latus sit quadratum numeri absoluti; restituanturq; dimidij
 hoc, — 56, ut sit etiam æquatio inter 18+56, & 18+56. Sit autem
 primum recta D, minor dimidio numeri radicem AC, vel CB; Di-
 uidatur

Demonstratio
 alia hanc sit, d
 m uol. e c

midatur recta AB, in E, ita ut D, sit medio loco proportionalis inter segmenta AE, EB, ex ijs, quæ ex Peletario docuimus ad propof.

13. lib. 6. Eucl. * Erit igitur rectangulum sub AE, EB, quadrato ex D, hoc est, numero absoluto proposito æquale. Dico tam quadratū rectæ AE, quam EB, vna cum dato numero absoluto æquale esse radicibus propositis, quarum numerus est AB: ideoq. tam quadratum rectæ AE, quam EB, æquale esse valori radicum propositarum, minus numero absoluto. Describantur enim ex AE, EB, quadrata AF, EK, perficianturq. rectangula AH, BL. Eritq. tam rectangulum EH, quam EL, contentum sub AE, EB, numero absoluto, hoc est, quadrato rectæ D, æquale. Posito igitur latere quadrati AE, erit rectangulum AH, contentum sub AB, numero radicum, & AE, latere quadrati, valor radicum propositarum; Manifestum autem est, quadratum AF, vna cum EH, numero absoluto, æquale esse valori radicum AH; ac proinde idem quadratum AF, æquale esse valori radicum AH, minus absoluto numero EH. Posito rursus EB, latere quadrati, erit pretium omnium radicum rectangulum BL, sub AB, numero radicum, & latere quadrati EB, comprehensum. Perspicuum autem est, quadratum etiam BI, vna cum EL, absoluto numero esse valori radicum BL, æquale: ideoq. idem quadratum BI, æquale esse valori radicum BL, minus numero absoluto EL.

Vtrumque autem latus AE, EB, ita notum efficietur. * Quoniam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato ex CE, æquale est quadrato ex AC, vel CB; si ex quadrato rectæ AC, vel CB, id est, dimidij numeri radicum, auferatur rectangulum sub AE, EB, nempe numerus absolutus, relinquetur notum quadratum ex CE. Si igitur latus hoc CE, cognitum addatur ad AC, dimidium numeri radicum, notum fiet latus AE; Si vero idem latus CE, ex CB, dimidio numeri radicum dematur, notum remanebit latus EB.

SIT deinde recta D, æqualis dimidio numeri radicum AC, vel CB. Dico quadratum ex AC, dimidio numeri radicum, vna cum numero absoluto dato æquale esse radicibus propositis. Describatur enim ex AC, quadratum AE, compleaturq. rectangulum AG. eritq. CG, quoque quadratum. Quoniam igitur recta D, æqualis ponitur rectæ AC, vel CB, erit quadratum CG, æquale numero absoluto; positoq. AC, latere quadrati æquationis, erit rectangulum AG, sub latere



AC, & numero radicem AB, contentum, æstimatio, siue pretium radicem. Liquido autem constat, quadratum AE, una cum CG, numero absoluto, æquale esse radicibus AG: ideoq. quadratum idem AE, esse æquale valori radicem AG, minus numero absoluto CG.

ITAQ. cum recta D, minor est dimidio numeri radicem AC, vel CB, hoc est, cum numerus absolutus æquationis minor est quadrato dimidij numeri radicem, inuenitur duplex radix æquationis. Cũ vero recta D, æqualis est dimidio numeri radicem, id est, numerus absolutus propositus æqualis est quadrato dimidij numeri radicem, est radix æquationis ipsum dimidium numeri radicem. Neque vero recta D, maior esse potest dimidio numeri radicem AC, vel CB. Nam falsa esset æquatio, cum quadratum ipsius D, nempe numerus absolutus, ex quadrato dimidij numeri radicem auferri non posset, atque adeo radix, secundum præceptum traditum, nullo modo inueniri. Accedit etiam, quod D, si maior esset quam AC, vel CB, nõ posset esse medio loco proportionalis inter duo segmenta rectæ AB, vt patet ex demonstratione illa, quam ex Peletario apposuius ad propof. 13. lib. 6. Eucl. Quare inueniri non posset quadratum æquationi satisfaciens.

POSSVMVS cum eodem Petro Nonio artem hanc extractionis radicem ex numeris Cossicis compositis hoc etiam modo proponere.

*Alius modus
extrahendi ra-
dicem qua-
dratam ex nu-
mero Cossico
composito, vel
diminuto.*

1. Ad quadratum numeri radicem adde, vel ab eodem subtrahere quadruplum numeri absoluti, prout signo +, vel -, fuerit affectus numerus absolutus.
2. Ad huius summa, vel relictæ radicem quadratam adde, vel ab eadem subtrahere numerum radicem, prout radicem numerus signo +, vel -, fuerit notatus. Nā vltima hæc summa, vel relictum dabit æstimationem, & pretium duplicatæ radicis quadratæ. Quare dimidium ipsius valor erit vnius radicis.

SIT enim extrahenda radix ex hoc numero Cossico, 72 — 62e. Ad quadratum numeri radicem, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti; & ex radice quadrata summe confectæ 324, hoc est, ex 18, detraho numerum radicem, nempe 6; remanentq. 12, pro valore duarum radicem. Pretium ergo vnius radicis erit 6.

RVRVS ex numero hoc Cossico, 62e + 72, eruenda sit radix. Ad quadratum numeri radicem, vt ad 36, addo 288, quadruplum numeri absoluti, facioq. 324. Ad huius summe deinde radicem quadratam, vt ad 18, adijcio numerum radicem, vt pote 6, facioq. 24, pro pretio duplicatæ radicis. Vnius ergo radicis pretium erit 12.

POSTREMO inueniēda sit radix huius numeri Cossici, 182e + 72.

Ex 324. quadrato numeri radicem, subtraho 288. quadruplum ab-
soluti numeri, relinquanturq. 36. Ad huius relicti radicem qua-
dratam, nempe ad 6. adiungo 13. numerum radicem, conficiq.
34. pro duplicatae radicis pretio. Vna ergo radix erit 22. Quod fi
radicem quadratam relicti illius, nempe 6. detraham ex 18. nume-
ro radicem, remanebunt 12. pro valore duplicatae radicis minoris;
(Huiusmodi enim numerus Confusus duplicem habet radicem, vt di-
ctum est) Quare una radix erit 6.

ATQVE hic modus commodissimus est, quando radicum numerus impar est, vel fractus, ne cogamur accipere dimidium illius, quod semper est numerus fractus, &c.

RATIO vero huius operationis hæc est. * Quoniam quadratum numeri radicem quadruplum est quadrati, quod ex dimidio numeri radicem gignitur, quemadmodum & numerus absolutus quadruplicatus numeri absoluti quadruplus est, * fit vt & summa, quæ fit ex quadrato numeri radicem, & quadruplo numeri absoluti, quadrupla fit summa, quæ prius in alio modo operationis conscribebatur ex quadrato dimidij numeri radicem, & numero absoluto: efficitur quoque, vt & reliquum, quod fit ex detractiōe quadrupli numeri absoluti ex quadrato numeri radicem, quadruplum fit reliquum, quod antea fiebat ex detractiōe numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri radicem. * Quam ob rem radix quadrata huius summe, vel reliquii, dupla erit radicis quadratæ prioris summe, vel reliquii, quemadmodum & numerus radicem duplex est dimidij numeri radicem. Siue igitur ad hanc radicem quadratam adiiciamus numerum radicem, vel ab eadem subtrahamus eundem, * fiet quoque summa, vel reliquum duplum summe, vel reliquii, quod fit ex additiōe dimidij numeri radicem ad radicem quadratam in prior operatione inuentam, vel ex detractiōe dimidij numeri radicem ex prior radice quadrata. Quare dimidium summe huius, vel reliquii pretium erit radicis æquationi satisfaciens.

QVAM tamen operationem ita quoque Geometricè confirmabimus cum Petro Nonio: Sit primum equatio inter $\frac{1}{2}$, & $N - x$, hoc est, si restaretur diminutum, inter $\frac{1}{2} + x$, & N .

PONATUR AB, latus quadrati
ignotum, quod queritur, quo
producto ad partes A, fumatur
recta AC, numero radicum equalis.
Sumatur quoque ex eadem
AB, ad partes B, protrahita, recta
BD, ipsi AB, equalis; & ex
tota CD, describatur quadratum
CDEF, cum diametro DF, perficiaturq. figura, vt vides, ita vt
similis sit omnino figure propo.
s. lib. 2. Euclidis. Erunt igitur, vt in
propo. s. lib. 2. Eucl. demonstrat

Н 2 сф.



Commoditas
huius posterio-
ris medi ex-
tractionis.

a Schol. pro-
pos. 4. lib. 2.
b 1. quinti.

c s. quinti .

dSchol. pro-
pos. 4. lib. 2.

e i. vel 5.
quinti.

*Demonstratio
alterius huius
modi extra-
ditionis .*

est. BP, ML, AG, GN, OK, quadrata, & gnomon ODK, quadruplus rectanguli CG. Quoniam vero AG, ponitur quadratum, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum CM, contentum sub numero radicem AC, & latere quadrati AM, valor radicem omnium. Cum ergo æquatio sit inter $3 + 2e$, & N, erit rectangulum CG, æquale numero absoluto, atque adeo gnomon ODK, quadruplus numeri absoluti; qui si addatur ad OK, quadratum numeri radicem AC, totum quadratum CE, cognitum erit; ex cuius latere CD, cognito, si tollatur AC, numerus radicem, relinquetur recta AD, dupla lateris AB, quod quæritur, cognita. Quod est propositum.

SIT deinde æquatio inter 3 , & $2e + N$. Ponatur AB, latus ignotum quadrati, quod quæritur, & AC, numerus radicem. Producta recta AB, sumatur BD, ipsi BC, & DR, ipsi AC, æqualis; & ex AD, describatur quadratum ADEF, una cum diametro DF, perficiaturque figura, ut prius. Erit rursum, ut antea, gnomon ODK, quadruplus rectanguli KG, & OK; QI, quadrata. Et quia QI, quadratum ponitur, cuius latus AB, quæritur, erit rectangulum QK, contentum sub QM, numero radicem, (est enim QM, ipsi AC, æqualis) & latere quadrati QE, valor omnium radicem. Quocirca cum sit æquatio inter 3 , & $2e + N$, erit rectangulum KG, numero absoluto æquale, ac propterea gnomon ODK, numeri absoluti quadruplus; quo addito ad OK, quadratum numeri radicem, notum fiet totum quadratum AE; ad cuius latus AD, cognitum si addatur DR, numerus radicem (posita enim est recta DR, numero radicem AC, æqualis) cognita erit tota recta AR, quæ dupla est lateris AB, quod quæritur. Si enim æqualibus BC, BD, æquales rectæ adijciantur CA, DR, totæ BA, BR, æquales fient, atque adeo AR, dupla erit ipsius AB. Quod est propositum.

DENIQUE sit æquatio inter 3 , & $2e - N$, hoc est, si diminutum restauretur, inter $3 + N$, & $2e$. Repetatur præcedens figura, sitque numerus radicem recta AD, & AB, latus quadrati, quod quæritur, sit primum maius dimidio numeri radicem. Quoniam igitur QI, ponitur quadratum, cuius latus AB, inveniendum est, erit rectangulum AI, contentum sub latere quadrati AB, & numero radicem AD, vel AE, valor radicem. Cum ergo æquatio sit inter $3 + N$, & $2e$, erit rectangulum AG, numerus absolutus, atque adeo gnomon ODK, ipsius quadruplus, uti prius; qui si ex AE, quadrato numeri radicem dematur, remanebit quadratum OK, notum, cuius lateri cognito AC, vel DR, si adijciatur numerus radicem AD, fiet nota tota AR, quæ dupla est lateris AB, ut prius est demonstratum.



2 34. primi.

tum. Quod est propositum.

SIT iam BD, latus quadrati inueniendum dimidio numeri radicum minus. eritq. rectangulum AP, contentum sub latere quadrati DP, & numero radicum AD, valor radicum. Et quia æquatio est inter $3+N$, & $2x$, erit rectangulum AG, numerus absolutus, ac proinde gnomon ODK, ipsius quadruplus, qui ablatus ex AE, quadrato numeri radicum relinquit quadratum OK, eiusq. latus propterea AC, notum fiet. Quod si AC, ex AD, numero radicum dematur, remanebit nota recta CD, quæ lateris BD, dupla est. Quod est propositum.

IAM vero, si quadruplum numeri absoluti æquale fuerit quadrato numeri radicum, erit dimidium numeri radicum latus quadrati, quod queritur. Sit enim AB, recta numerus radicum secta bifariam in C; descriptoq. quadrato AD, ductantur rectæ CF, GH, secantes quatuor latera bifariam, & quadrati in quatuor quadrata æqualia. Si igitur AC, dimidium numeri radicum ponatur latus quadrati, erit rectangulum AG, contentum sub latere quadrati AH, & numero radicum AB, valor radicum; ac propterea cum æquatio sit inter $3+N$, & $2x$, erit CG, rectangulum numero absoluto æquale, & quadruplum eius quadrato AD, ex numero radicum AB, descripto æquale. Si igitur quadruplum numeri absoluti, hoc est, quadratum AD, auferatur ex AD, quadrato numeri radicum AB, remanebit 0. quod siue addatur ad AB, numerum radicum, siue ab eo subtrahatur, nota fiet recta AB, quæ dupla est lateris AC. Quod est propositum.



QVOD vero spectat ad extractionem radicum Zensizensicarum, vel Zensicubicarum, vel Zensizenzenficarum, vel Zensurdesolidarum, quando nimirum numeri Cossici æquationis, abbreviatis tamen eorum characteribus, habent exponentes, qui progressionem Arithmeticam constituent vnam ex his. 4.2.0. vel 4.0.2. vel 6.3.0. vel 6.0.3. vel 8.4.0. vel 8.0.4. vel 10.5.0. vel 10.0.5. &c: in quibus maior character semper componitur ex 3. & alio characterè Cossico, ut ex numeris exponentibus manifestum est: extrahenda est prius radix quadrata, propter characterem 3. iuxta modum hætenus descriptum, accommodando omnia ea, quæ de numero radicum præcepimus, illi numero, qui affectus est characterè Cossico in illa parte æquationis, ex qua radix eruenda est: perinde ac si æquatio foret inter tres numeros Cossicos characteribus 3. 2. & N. affectos. Deinde ex hac radice quadrata inuenta, siue ea rationalis sit, siue irrationalis, elicienda est radix alia, iuxta reliquam partem characteris Cossici maioris, relicto hoc characterè 3. (est enim character maior Cossicus compositus) hoc est, eruenda est radix denominata a characterè Cossico, qui in ea parte æquationis cernitur, in qua duo numeri reperiuntur, & qui medius est inter maximum characterem,

Extrahitio radicis zensizensicæ, zensicubicæ, &c.

cterem, & minimum, siue N. Vt si æquatio sit inter 188. & 183+648. extrahenda erit radix quadrata ex hoc numero 183+648, propter priorem partem signi Cossici 8. non aliter, ac si esset æquatio inter 18. & 13+648. quæ radix est 36. ex qua rursus eruenda est radix quadrata: nempe 6. ob reliquam partem characteris Cossici, nimirum 8. qui medium locum obtinet inter 88. & N. Igitur 6. erit radix numeri Cossici propositi.

Eodem modo si sit æquatio inter 1320. & 120—16 ce. sumenda est prius radix quadrata huius numeri 120—16 ce. & ex hac elicienda radix cubica. Sic etiam, si æquatio habeatur inter 1888. & 10000 88—7846119. accipienda est primum quadrata radix, & ex hac eruenda deinde radix Zensificata: Et sic de cæteris.

QVOD autem ex huiusmodi numeris Cossicis extrahatur radix quadrata eodem artificio, quo superius vti sumus, perspicuum est. Nam maximus character Cossicus, cum sit compositus ex 8. & alio quodam characterē Cossico siue simplici, siue composito, indicat unitatem ab eo denominatam esse zensum, seu quadratum alicuius numeri a reliqua parte maximi characteris Cossici denominati, ita ut reliqua illa pars sit tanquam radix prioris partis. Quare cum hæc reliqua pars reperiatur quoque in altera æquationis parte, cuius radix inuestigatur, denominari poterit eius numerus a 8. si numerus maximi characteris, nempe unitas, a 8. denominetur: atque adeo iuxta præcepta tradita recte ex illo numero æquationis radix quadrata inuenietur. Verbi gratia. In æquatione inter 88. & 8+12. cum hic character 88. significet zensum vnius cubi, erit vnus cubus radix quadrata illius zensi, ac proinde numerus cuborum in altera parte æquationis, numerus erit radicem eiusdem zensi. Et sic de cæteris. Inuenta autem hæc radice quadrata, extrahenda est ex ea radix a reliqua parte maximi characteris Cossici denominata, quia illa radix quadrata est numerus denominatus ab illa reliqua parte, & non absolutus. Quemadmodum qui vult radicem zensificatam huius numeri 64. inuenire prius debet eius radicem quadratam, nempe 8. Deinde quoniam hæc radix quadrata non est numerus absolutus, sed cubus, cum numerus 64. sit zensus vnius cubi, sumenda erit radice inuenta 8. radix cubica, nimirum 2. atque hic numerus radix erit Zensificata dati numeri 64.

EXEMPLA D V O, in quibus occurrunt radices surdæ.

1. Si æquatio inter 188. & 8008—156752. Dimidium cuborum, nimirum 400. quadro, efficioq. 160000. Detraho 156752. & reliqui numeri 349. quadratam radicem 57. ad dimidium numeri cuborum, nimirum ad 400. adjicio, efficioq. 457. cuius radix cubica dat radicem Zensificatam quæsitam, quæ surda est. Eius cubus est 457 qui ductus in se facit Zensicubum 108849. qui æqualis est

est 800 re. id est, 365600. minus 156751. ut patet. Idem ferè constabit, si per radicem cubicam numeri 457. in numeris inuentam, agemus. Radix enim cubica numeri 457. propinqua est 7 $\frac{7}{8}$. inuenta per appositionem duorum ternariorum cistrarum. Eius cubus est 411 $\frac{11}{8}$. & Zensicubus 208422. proximè: qui æqualis est ferè 800 re. hoc est, 365600. minus 156751. Nam post detractiōe reliquus fit numerus 208475 $\frac{1}{8}$. qui parum differt a 208422. Causa huius inæqualitatis est, quod propinqua illa radix non est vera radix. Felicius ergo æquatio succedit, si operatio per ipsam radicem surdam instituitur.

ET quoniam numerus 800 re — 156751. duplicem radicem habet, ut supra diximus, propterea quod numerus absolutus signo — affectus est; maior inuenitur, ut dictum est, nimirum radix cubica numeri 457. minor verò reperietur, si superioris numeri 3249. relinqui post detractiōem numeri absoluti ex quadrato dimidij numeri cuborum, radicem quadratam 57. ex 400. dimidio numeri cuborum detrahimus, & reliqui numeri 343. radicem cubicam sumamus 7. Huius enim Zensicubus est 22649. qui æqualis quoque est 800 re; id est, 374400. minus 156751. ut manifestum est. Itaq. maior radix huius numeri 800 re — 156751. surda est, nimirum radix cubica numeri 457. minor autem rationalis est, nimirum 7. radix videlicet cubica cubi 343.

SIT rursus æquatio inter 12. & 8 $\frac{2}{3}$ — 5. Dimidium numeri radicem, nimirum 4. quadro, & ex quadrato 16. demo 5. & reliqui numeri 11. propinquam radicem quadratam 3 $\frac{3}{4}$. (que inuenta est per appositionem trium binariorum cistrarum.) addo ad dimidium numeri radicem, ut ad 4. efficioq. radicem propinquam 7 $\frac{1}{2}$. numeri propositi 8 $\frac{2}{3}$ — 5. Eius quadratum est 53 $\frac{1}{3}$. quod ferè æquale est 8 $\frac{2}{3}$ — 5; quippe cum 8 $\frac{2}{3}$ — 5. efficiant 53 $\frac{1}{3}$.

RADIX minor eiusdem numeri 8 $\frac{2}{3}$ — 5. (Habet enim duplicem radicem, propter signum —. quod numerus absolutus gerit, ut supra diximus) est 4 $\frac{1}{2}$. quæ habetur, si reliqui numeri superioris 11. radix propinqua 3 $\frac{3}{4}$. ex 4. dimidio numeri radicem detrahatur. Quadratum radicis 4 $\frac{1}{2}$. est 20 $\frac{1}{4}$. quod ferè æquale est 8 $\frac{2}{3}$ — 5. Nam 8 $\frac{2}{3}$ — 5. conficiunt 20 $\frac{1}{4}$. qui numerus illum quadratum superat hoc fracto numero 2 $\frac{1}{4}$. qui minor est, quam 4 $\frac{1}{2}$.

FELICIUS quoque æquatio succedet, si per radices surdas operari velimus. Nam maior radix est 4 $\frac{1}{2}$ — 1812. Minor vero 4 — 1812. Illius tam quadratum, quam octuplum radicis — 5. efficit 27 $\frac{1}{4}$ — 18704. hoc est, 33 $\frac{3}{4}$. proximè. Huius verò tam quadratum, quam octuplum radicis — 5. conficit 27 $\frac{1}{4}$. proximè, nimirum 27 — 18704. Ratio porrò huius operationis per radices surdas intelligitur cap. 23. in algorithmo surdorum numerorum.

Multi-

Multiplicationes ita formantur.

| | |
|--|--|
| $ \begin{array}{r} 4 + \sqrt{8} \ 21 \\ 4 + \sqrt{8} \ 11 \\ \hline + \sqrt{8} \ 176 + 11 \\ 16 + \sqrt{8} \ 176 \\ \hline \text{Summa. } 27 + \sqrt{8} \ 704. \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 4 - \sqrt{8} \ 11 \\ 4 - \sqrt{8} \ 11 \\ \hline - \sqrt{8} \ 176 + 11 \\ 16 - \sqrt{8} \ 176 \\ \hline \text{Summa. } 27 - \sqrt{8} \ 704. \end{array} $ |
| $ \begin{array}{r} 4 + \sqrt{8} \ 11 \\ \hline 8 \\ 32 + \sqrt{8} \ 704 \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 4 - \sqrt{8} \ 11 \\ \hline 8 \\ 32 - \sqrt{8} \ 704 \end{array} $ |
| $ \begin{array}{r} 27 + \sqrt{8} \ 704 \\ \hline \text{Demptis 5. remanent} \end{array} $ | $ \begin{array}{r} 27 - \sqrt{8} \ 704 \\ \hline \text{Demptis 5. remanent} \end{array} $ |

Quando aliquando quæstio aliqua non soluitur, culpa in Arithmetico, non autem in Algebra transferenda est.

Posui duo hæc exempla, ut videas, non minus veram esse regulam Algebrae a nobis traditam in numeris furdis, quam in rationalibus. IAM verò, si quando æquario occurrat, quam resolueri nescias, culpa transferenda non est in artem Algebrae, sed in te potius, qui non omnium æquationum scientiam perdidicisti. Verbi gratia. Si incidis in æquationem inter 1 re. & 38 + 126 + 8. & nescias ex hoc numero 38 + 126 + 8. extrahere radicem cubicam, culpa erit tua, non autem regulæ Algebrae, quæ docet, si ex illo numero radix cubica extrahatur, quæstioni satisfactum esse. Est autem radix cubica prædicta 4. Nam eius cubus est 64. qui æqualis est tribus quadratis, nimirum 48. & duabus radicibus, id est, 8. & octo vnicatibus. Idem iudicium habero de æquatione inter 1 re. & 1968 + 147. Item inter 1 re. & 3024 + 133. Quia enim exponentes denominationum non feruant proportionem Arithmeticam, nondum est inuenta ars, qua resolui possint, cum tamen sint solubiles. Nam in utraque radix valet 7.

SIC etiam, quando occurrunt radices furdæ, quarum doctrinam non perfecte calles, non erit vitio vertendum scientiæ Algebrae, si quæstio proposita maneat adhuc igoora. Id quod in duobus exemplis superioribus perspicuum esse potest, in quibus, ut æquatio proposita explicaretur, opus fuit, per numeros furdos, siue irracionales, operationem instituire. SAEPENUMERO etiam accidit, ut in quæstionibus nonnullis explicandis requiratur magna doctrina Geometriæ, vel alterius cuiuspiam scientiæ, ut infra, quando variaz quæstiones proponemus dissoluendas, perspicuum fiet. Qui ergo in ea doctrina satis non fuerit exercitatus, frustra se ad quæstionis propositæ explanationem accinget. Nunquam enim ea scientia destitutus illam expediet. quod quidem non culpa Algebrae, sed ipsius accidere, pro certo tenendum est.

QVEM-

QVEMADMODVM si forte in regula illa aurea, quam regulam Trium dicunt, occurrant numeri surdi, ac irrationales, aut numeri fracti, atque is, qui per eam regulam ratiocinationem instituit, ignarus sit doctrinæ illorum numerorum, ac proinde quæstionem, propositam soluere nequeat; accusanda non est ipsa regula, sed artifex. Cum enim prædicta regula iubeat multiplicare secundum numerum per tertium, ac productum per primum diuidere, vt Quotiens exhibeat quæstionis solutionem, culpa erit artificis, si operari nesciat per numeros surdos, aut fractos, non autem ipsius regulæ. Vt si proponatur hæc quæstio. 2. dant $\sqrt{8}$ 3. quid ergo dabit $\sqrt{8}$ 12? certum est, eum, qui nesciat multiplicare, ac diuidere radices surdas, quæstionem non posse soluere. Secundus enim numerus $\sqrt{8}$ 3. ductus in tertium, id est, in $\sqrt{8}$ 12. facit $\sqrt{8}$ 36. qua diuisa per primum numerum 2. fit Quotiens $\sqrt{8}$ 9. hoc est, numerus 3. Eadem ratione regula Algebrae docet, quid agendum sit in qualibet quæstione proposita, vt ad æquationem aliquam deueniatur: quam etiam si artifex enodare nesciat, nihil tamen Algebrae regula de sua firmitate, ac robore amittit, sed tota culpa in artificem reijcienda est.

DE MVLTITVDINE REGVLARVM

Algebrae, quam alij auctores introducunt;

Cap. XIII.

VIDISTI hætenus, opinor studiose lector, vnica nostram regulam Algebrae perfecte, planèq. nos docere, qua ratione quamlibet quæstionem propositam euoluere debeamus: quippe quæ præcipiat, vt. 1. 2. quæ pro numero inuestigando ponitur, vel alium numerum, iuxta quæstionis tenorem examinemus, donec in æquationem aliquam incidamus duorum numerorum: Deinde, æquatione huiusmodi inuenta, ac reducta, vt cap. 10. de reductione æquationis tradidimus, per numerum maioris characteris. Cossici reliquam æquationis numerum diuidamus; ac tandem ex Quotiente radicem æquationi congruentem extrahamus, si opus est. Vt autem te non lateat, quam varias alij scriptores regulas Algebrae tradant, operæ pretium duxi, eorum regulas hic proponere, vt illis collatis cum vnica nostra, quid inter nostram, & multiplices aliorum regulas intersit, intelligas.

ALII ergo scriptores æquationes illas potissimum considerant; Inter quos nux quæ inter tres primos terminos progressionis Geometricæ ab vni-
 tate incipientis, hoc est, inter Numerum, Radicem, atque Quadra-
 tum, siue Zensum, reperiuntur. qui quidem tres termini sex pos-
 sunt modis inter se æquari. Aut enim æquatio est inter 8. & 2: aut uenit.

I

inter

Tres simplices inter 3. & N: aut inter 3. & N. quæ tres æquationes ab illis simplicibus dicuntur, quod solum vnus terminus in ijs vni termino æquetur: Aut inter 3+3. & N: aut inter 3. & 3+N: Vel (quod idem est) inter 3. & N+3. Aut denique inter 3+N & 3: quæ tres æquationes ab eisdem compositæ vocantur, propterea quod in ijs semper duo termini vni termino adæquantur. Pro his sex æquationibus sex regulas præscribunt.

R E G V L A P R I M A.

Quædo æquatio est inter 3 & 3. QUANDO reperitur æquatio inter 3. & 3. diuiso numero signi 3. per numerum signi 3. Quotiens exhibet pretium 1 3. Vt si 5 3. æquales sint 30 3. diuisis 30. per 5. prodibit Quotiens 6. pro estimatione vnus radices. Nam quadratum huius radices est 36. atque idcirco 5 3. faciunt 180. quantum nimirum faciunt 30 3.

R E G V L A II.

Quædo æquatio est inter 3 & N. QUANDO æquatio reperitur inter 3. & N. diuiso numero absoluto per numerum signi 3. procreabitur in Quotiente pretium 1 3. quemadmodum in 1. regula. Vt si 5 3. æquales sint 30. diuisis 30. per 5. exit Quotiens 6. pro valore 1 3. Nam radix 6. quinques sumpta facit 30.

R E G V L A III.

Quædo æquatio est inter 3 & N. QUANDO inter 3. & N. æquatio deprehenditur, diuiso numero absoluto per numerum signo 3. affectum, habebitur in Quotiente valor 1 3. Eius ergo radix quadrata dabit pretium 1 3. Vt si æquatio sit inter 4 3. & 144. diuisis 144. per 4. provenit Quotiens 36. pro valore 1 3. Radix ergo quadrata numeri 36. quæ est 6. offeret pretium 1 3. Nam quadratum numeri 6 est 36. quo multiplicato per 4. fit numerus 144.

R E G V L A IIII.

Quædo æquatio est inter 3+3 & N. QUANDO æquatio occurrat inter 3+3. & N. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, productum numerus absolutus addendus. Nam si ex huius aggregati radice quadrata dematur semissis numeri radicum, reliquum fiet pretium 1 3. Vt si æquatio constituatur inter 13+12 3. & 85. multiplicabimus 6. semissem videlicet numeri radicum, in se, productum 36. adiciemus 85. vt fiat 121. Ab huius enim numeri radice quadrata 11. si subducatur semissis numeri radicum, nimirum 6. remanebunt 5. pro valore 12 3. Nam 1 3. est 25. additis autem 12 3. videlicet 60. fit numerus absolutus 85. vt proponitur.

R E G V L A V.

QVANDO æquatio instituitur inter x . & $2x+N$. vel inter y . & $N+2x$. multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & producto numerus absolutus adijciendus. Nam si ad huius aggregati radicem quadratam addatur semissis numeri radicum, constabitur æstimatorio $12x$. Vt si æquatio ponatur inter 12 . & $6x+16$. vel inter 8 . & $16+6x$. ducemus 3 . id est, semissem numeri $2x$. in se, ac producto 9 . adijciemus numerum absolutum 16 . vt fiant 25 . Ad huius enim numeri radicem quadratam 5 . si addatur semissis numeri radicem, nimirum 3 . constabitur numerus 8 . pro pretio $12x$. Nam eius quadratum est 64 . qui numerus æqualis est $6x$. id est, 48 . vna cum 16 . vt pater.

Quando æquatio est inter x & $2x+N$.

R E G V L A VI.

QVANDO denique æquatio reperitur inter $x+N$. & $2x$; multiplicanda est semissis numeri radicum in se, & ex producto auferendus numerus absolutus propositus. Nam si ad radicem quadratam reliqui numeri adijcias semissem numeri radicum, vel ex hac semisse eandem radicem detrahas, consicies pretium $12x$. ita vt eiusmodi æquatio duplicem habeat radicem, maiorem scilicet ac minorem. Vt si proposita sit æquatio inter $13+21$. & $102x$, ducemus 5 . semissem numeri radicum in se, & ex producto numero 25 . auferemus numerum absolutum 21 . Nam si ad reliqui numeri 4 . radicem quadratam 2 . addemus semissem numeri radicem, hoc est, 5 . efficiemus 7 . valorem maioris radicis: Et si eandem radicem 2 . subtrahemus ex 5 . nimirum ex semisse numeri radicum, reliqua fient 3 . pro valore minoris radicis. Nam maioris radicis 7 . quadratum est 49 . & additis 21 . fit numerus 70 . qui æqualis est $102x$. At vero minoris radicis 3 . quadratum est 9 . & additis 21 . fit numerus 30 . qui æqualis est $102x$. vt liquet.

Quando æquatio est inter $x+N$ & $2x$.

PORRO quando plures, vel pauciores zensi, quam 1 . in aliqua æquatione occurrunt, diuidendi erunt omnes numeri æquationis per numerum signo x . affectum, vt æquatio fiat inter 12 . & c. quod & nos faciendum esse præcepimus. V. g. si æquatio detur inter $33+63$. & $30.2x$. diuidendi erunt singuli numeri per 3 . vt æquatio fiat inter $11+21$. & $102x$: ac deinde regula 6 . vsurpanda. Sic si detur æquatio inter 12 . & $32x+8$. vel inter 12 . & $8+32x$. si numeri singuli diuidantur per 4 . inuenietur æquatio inter 3 . & $6x+16$. vel inter 3 . & $16+6x$. quæ per 5 . regulam explicabitur.

Quando in æquatione reperiuntur plures paucioresve zensi.

HAB ergo sunt 6 . regulæ ab omnibus fermè auctoribus traditæ. Quo pacto omnes enim alie æquationes inter alios numeros Cossicos, qui diuersi sunt a x . & N . ad prædictas 6 . reducuntur; vt frustra nonnulli scriptores plures regulas præscribant. Nā si huiusmodi æquationes reuocentur.

tiones occurrant, in quibus numeri exponentes characterum seruant proportionalitatem Arithmeticam, abbreviandi erunt characteres, vt supra dictum est, ad eum finem, vt in altera parte æquationis numerus absolutus reperiatur: Deinde obseruanda ea, quæ circa finem cap. 12. de extractione radicis Zenithicæ, Zeniscubicæ, &c. scripsimus: quando videlicet exponentes seruant hanc proportionem Arithmeticam 4.2.0. vel 4.0.2. aut 6.3.0. vel 6.0.3. &c.

Præstantior esse unicam nostram regulam Algebra sex aliorum regulis.
 QVOD si rem attentius introspicere velimus, facile deprehendemus, unicam nostram Algebra regulam longe esse præstantiorem supradictis 6. regulis aliorum: quippe cum in nostra fiat semper reductio æquationis ad 1 & 2. in vna parte æquationis, ac proinde signa + & - . in altera æquationis parte plene, atque abunde nos instruant, quando fieri debeat additio, & quando subtractio. quod in superioribus 6. regulis non tam clarè apparet.

Æquatio simplex, & cap. 12. qua.
 QVEMADMODVM autem scriptores Algebra æquationes priorum trium regularum; simplices appellant, trium vero posteriorum regularum æquationes compositas, vt paulo ante diximus: ita quoque nos in ips, quæ sequuntur, æquationem, quæ inter duos numeros duntaxat occurrit, doctrinæ gratia, simplicem nominabimus, compositam vero eam, quæ inter tres numeros deprehenditur.

QVAESTIO PROPOSITA VTRVM possibilis sit, nec ne, an verò inepta, ac nugatoria, quo pacto ex ipsa operatione, quæ per Algebra regulam fit, cognoscatur. Cap. XIII.

Quo pacto cognoscatur, num quæstio sit possibilis, an impossibilis.

QVONIAM in principio huius lib. diximus, regulam Algebra hanc habere excellentiam, vt in ipso opere nos edoceat, num quæstio, quæ proponitur, solui possit, nec ne: docendum iam paucis erit, quæ id ratione fiat. Quotiescunque igitur in dissoluenda per Algebra præcepta quæstione aliqua incidimus in æquationem aliquam impossibilem, vel nugatoriam, atque ineptam, pronuntiabimus quæstionem solui nulla ratione posse: vel certè esse nugatoriam, & ineptam: quod nonnullis exemplis declarabitur.

2. quæstio impossibilis.

1. *Quæstatur numerus, qui ductus in 3. & hic productus, in se, tantum faciat, quantum ex ipso numero in se multiplicato, & ex hoc producto in 7.*

PONA-

PONATUR quæsitus numerus 12. quæ docta in 3. facit 36. & hic productus in se, facit 98. qui numerus debet esse æqualis ei, qui fit ex 12 in se, & ex productio in 3. Fit autem ex 12 in se 48. & hic numerus in 3. ductus facit 36. Invenit ergo est æquatio inter 98. & 36. quæ est impossibilis. Quapropter enunciabimus, quætionem propositam esse impossibilem.

2. Dividatur numerus 12. in tales duas partes, ut 1. unius cum 1. alterius efficiat 4. 2. quæstio impossibilis.

PONATUR pro una parte 12. eritq. altera 12. Tercia pars illius est 4. & quarta pars huius est 3. quæ simul efficiunt 7. Nam ex 4 & 3. fit 7. ut ex cap. 4. constat. quæ æqualitas debet numero 4. Ablatis utrinque 3. erit æqualitas inter 4 & 1. Igitur divisa 12. per 3. fiet 4. & 1. atque hæc est prima pars numeri 12. & altera pars 0. quod est ineptum. Improprie tamen 1. illius, nimirum 4. cum 1. huius, id est 5. cum 0. facit 4.

QVOD si, positis eisdem partibus 12. & 12. accipiamus 4. prioris, nempe 12. & 3. posterioris, videlicet 4. & 3. quæ partes simul conficiunt 7. (quod 12. & 12. faciant 24. ut ex cap. 4. constat) quæ æqualitas non possunt esse numero 4. Ergo neque hoc modo quæstio possibilis est.

3. Dividatur numerus 10. in tales duas partes, ut ex illis unius in alteram producantur 26. 3. quæstio impossibilis.

PONATUR pro una parte 12. eritq. altera 10. & 12. quæ partes inter se multiplicatæ faciunt 102. qui productus æqualis esse debet numero 26. Addito 12. utrinque, sunt 102. æquales 12 + 26. ablati q. 26. utrinque, erit æqualitas inter 12 & 102. 26. Ex hoc numero, qui æqualis est 12. extrahemus radicem quadratam hoc modo, ut supra docuimus. Semissis radicem est 5. huius quadratum 25. ex quo auferri non possunt 26. ut vult signum. Igitur dicemus, quætionem solui non posse.

4. Inveniantur duo numeri, ut ex ductu unius in alterum fiat numerus triplus summa ipsorum. 4. quæstio impossibilis.

PONATUR unus 12. & alter 1. unitates. Ex 12. in 1. fit numerus 12. qui triplus esse debet summe ipsorum, quæ est 12 + 1. Ergo summa hæc triplicata, nimirum 36 + 6. æqualis debet esse 12. quod falsum est. Impossibilis igitur est quæstio proposita, si alter numerorum constituitur 1. Si pro secundo numero posset fuisse plures

plures unitates, quam in denominatore proportionis date continetur, nimirum 4. vel 5. vel 6. &c. questio solui posset. Nam posito secundo numero 4. inueniretur 12e. esse 12. atque ita duo numeri quæsiti essent 12. & 4. qui inter se multiplicati efficiunt 48. qui numerus triplus est summa ipsorum, quæ est 16.

5. *Quæratnr numerus, qui per 3. multiplicatus producat ipsius quadratum, & summa ex ipso numero, & eius quadrato collecta sit 72.*

PONAMVS. numerum esse 12e. quæ multiplicata per 3. facit 36e. qui numerus æqualis debet esse quadrato ex 12e. producto nimirum 144. eritq. vnus radices pretium 12. qui numerus per 3. multiplicatus, hoc est, in se ipsum, procreat eius quadratum 144. Sed quoniam hic quadratus cum sua radice 12. conficit 156. non autem 72. dices questionem esse impossibilem. quod etiam ex ipsis æquationibus constat. Nam si 12e. cum suo producto 36e. facit 48e. quæ æquales debent 72. atque ita 12e. erit 2. Et quia 12e. cum suo quadrato, id est, cum 144. etiam æqualis debet esse numero 72. erit æquatio inter 12 + 144. & 72. hoc est, (ablata 12e. vtrinq.) inter 132. & 60. inuenieturq. 12e. esse 36e. quæ a priori valde differunt. Immo si tam 48e. quam 144 + 12e. æquales sunt 72. erunt bis 72. id est, 144. æquales 132 + 12e. hoc est, æquatio constituetur inter 132. & 144 — 12e. eritq. 12e. quæ ab vtraque superiori longè etiam differunt. Denique si tam 48e. quam 132 + 12e. æquales sunt 72. erit etiã æqualitas inter 48e. & 132 + 12e. ablataq. vtrinq. 12e. erunt 36e. æquales 132. Pretium ergo 12e. erit 3. Quocirca cum tam varis estimationes 12e. inueniantur, questio solui non poterit, præsertim, cum per nullam radicem inuentarum questionis satisfiat, nisi priori eius parti per radicem 32. — 32 0: mual u uoliquam ol tami 221

6. *Quæratnr numerus, cuius quadratus cum numero 40. æqualis sit 12. radicibus eiusdem quadrati.*

PONATVR. numerus esse 12e. Eius quadratus erit 144. Igitur 144 + 40. æqualia sunt 12e. hoc est, 18. æqualis erit 12e — 40. Summa semissis numeri radicem, nimirum 6. Et quia ab huius semissis quadrato, id est, ex 36. numerus 40. detrahi non potest, erit questio impossibilis.

7. *Iam vero si quando accidat, æquationem inuentam esse infibilibis quid, ter duos numeros Collocos æquales, eiusdemq. denominationis, sed nugatoria questio solui poterit per quemuis numerum.*

Ut si quæratnr numerus, quo multiplicato per 2. & producto in seipsum ducto, faciat numerum æqualem

ei, qui ex numero in seipsum ducto producit, & ex numero solui
ducto in 4.

DE SECUNDIS RADICIBUS

PONATUR numerus esse 12. Ex 12. in 2. sunt 22. & ex 22
in se sunt 48. Et quia 12 ducta in se signat 144. & ex 144. in 4. sunt
48. inuenta erit æquatio inter 48. & 48. quæ nugatoria est & inep-
ta. Quæstio igitur excutere poterit in omni numero. Nam V.g. ex
10. in 2. sunt 20. & ex 20. in se sunt 400. quantum videlicet sit ex
10. in se, & ex producto 100 in 4.

8. Item numerus 10. diuidendus sit in tales duas partes,
ut numerus, qui sit ex una parte in totum numerum,
æqualis sit quadrato eiusdem partis, una cum nume-
ro, qui ex eadem parte in alteram ducta procreatur.

8. quæstio possi-
bilis, sed nu-
gatoria.

PONATUR prima pars esse 12. ideoq. altera 10—12. Et quia
ex priori parte, id est, ex 12. in totum numerum 10. sunt 102:
Ex eadem autem parte in se fit 144. & ex 12. in 10—12. sunt
102—144. quæ addita ad 144. sunt 102. quia vt 12. addatur ad
—144. debet fieri subtractio, vt in additione dictum est. Igitur in-
uenta est æquatio inter 102. & 102. quæ similiter nugatoria est:
fieri q. potest, quod proponitur, in quolibet numero, quomodocun-
que in duas partes distributo, vt demonstratum est ab Eucl. lib.
2. propos. 2. Quod si altera pars 10—12 ducatur in totum nume-
rum 10. sunt 100—102. Si vero eadem pars in se ducatur, sunt
100—102+144. & duæ partes 12. & 10—12 inter se multiplicæ
faciunt 102—144. quæ cum 100—102+144. faciunt 100—102.
quæ æqualia esse debent 100—102. producto scilicet secundæ par-
tis in 10. quæ æquatio nugatoria quoque est.

9. Sit rursus diuidendus numerus 10. in tales duas par-
tes, ut producti ex toto numero 10. in ipsas partes sint
simul æquales quadrato totius numeri.

9. quæstio nu-
gatoria, quæ
impossibilis.

PONATUR una pars 12. ideoq. altera 10—12. Ex toto nume-
ro 10. in 12. & 10—12 sunt 102. & 100—102. qui numeri si-
mul efficiunt 100. vt ex regula additionis patet. Et quoniam ex 10.
in se sunt quoque 100. erit æquatio inter 100. & 100. quod est inep-
tum. Quæstio ergo soluitur per quemcunque numerum in qua-
cunque duas partes diuisum, vt ab Eucl. lib. 2. propos. 2. ostensum est.
LIQUAT igitur, ex ipsa operatione cognosci posse, num propo-
sitæ quæstio solui possit, nec ne: an vero sit vana, ac nugatoria, quæ
videlicet in omnem numerum conueniat.

DE SECYNDIS RADICIBVS.

Cap. xv.

*Cut excogita-
ta sint secunda
radices.*



V A E R V N T V R. non raro duo, vel tres, aut etiam plures numeri sub incerta proportionē: idcirco postquam pro primo numero posita est $12g$, non videtur commodum pro secundo numero ponere iterum $12g$: & pro tertio etiam $12g$, &c. quia cum $12g$ primo loco posita diuersum plerumque valorem habeat a radice secundo loco posita, itemq. a radice tertio loco posita, facile eueniret, vt in operatione exempli radices inter se confunderentur, nisi diuersis characteribus designentur. Quam ob rem excogitatae sunt radices secundae, quas Cardanus Quantitates furdas, Petrus Notius, & alij Quantitates simplices, aut obsoletas appellant, notantq. hoc modo. $1q$, $2q$, &c. hoc est, vna quantitas, duae quantitates, &c. Nos cum alijs appellabimus radices secundas, notabimusq. hoc modo, $1A$, hoc est, $12g$. secunda distincta ab ea, quae primo loco posita est. $1B$, id est, $12g$ secunda distincta a duabus, quae primo, & secundo loco posita sunt: & sic deinceps. Hac enim ratione facilius secundarum radicum algorithmus explicabitur.

Additio secundarum radicum.

Subtractio secundarum radicum.

Multiplicatio secundarum radicum.

IN numeratione, quando numerus duo signa habet, intelligitur numerus cum priore signo ductus in vnitatem posterioris signi. Vt $12gA$, significat $12g$ ductam in $1A$, & $32gA$, significat $32g$ ductam in $1A$. Sic $13gA$, indicat $13g$ ductum in $1A$, &c. **A**DDITIO vero perficitur, si numeri inter se addantur, & character idem secundae radiceis apponatur: quando videlicet secundae radices sunt eiusdem generis. Vt ex $3A$, & $4A$, fiunt $7A$. atque ex $3B$, & $4B$, fiunt $7B$. &c. Quando vero secundae radices non sunt eiusdem generis, fit additio per signum additorum $+$. Vt ex $3A$, & $4B$, fiunt $3A + 4B$. Item ex $32g$, & $4A$, fiunt $32g + 4A$. &c.

SUBTRACTIO quoque, quando secundae radices sunt eiusdem generis, fit, si numerus a numero subtrahatur, & reliquo numero idem character secundae radiceis apponatur. Vt $3A$, ex $7A$ relinquunt $4A$, & $3B$, ex $7B$, relinquunt $4B$, &c. Quando autem secundae radices sunt diuersae, fit subtractio per signum subtractionis $-$. Vt $3A$, ex $4B$, relinquunt $4B - 3A$.

MULTIPLICATIONES autem ita fiunt. Quando numerus radiceis primae multiplicandus est cum numero radiceis secundae signatae solum litera A , vel B , &c. multiplicantur numeri inter se, & eadem signa apponuntur. Vt ex $32g$, in $2A$, fiunt $42gA$, id est, $42g$ multiplicatae in $1A$. Similiter ex $3A$, in $22g$, fiunt $4A2g$, hoc est, $4A$, multiplicatae in $12g$. Sic etiam ex 33 in $4B$, fiunt $133B$, id est, 133 .

12 B. multiplicati in 1 B. &c. Sic etiam ex 12e in 1 A, fit 12e A, id est, 12e multiplicata in 1 A. Et ex 18. in 1 A B. fit 18 A B. hoc est, 18. ductus in 1 A B.

QUANDO numerus absolutus in numerum secundæ radicis ducitur, fit numerus secundæ radicis. Vt ex 6. in 3 C, fiunt 18 C. Et ex 7. in 4 B, fiunt 28 B, &c.

QUANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis diuersæ literæ, ducitur numerus in numerum, productioq. eadem literæ apponuntur. Vt ex 3 A, in 9 B, fiunt 27 A B, hoc est, 27 A, multiplicatæ in 1 B.

QUANDO numerus secundæ radicis ducitur in numerum secundæ radicis eiusdem literæ, producitur character B, præposita tamen eadem litera. Vt ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 A B.

QUANDO numerus secundæ radicis ducitur in se quadratè, vel cubicè, &c. producitur character B, vel C, &c. præposita eadem litera. Vt 1 A, in se quadratè, facit 1 A B. hoc est, 1. quadratum secundæ radicis. Rursus ex 12e A, in 12e A, fit 18 A B. id est, 18 primæ radicis ductus in 18. secundæ radicis. Item 3 B, in se quadratè faciunt 9 B B. Sic 3 B, in se cubicè, faciunt 27 B C.

QUANDO numerus secundæ radicis ducitur in alium numerum eiusdem radicis secundæ, quæ etiam habet characterem Cossicum, intelligitur primus numerus habere etiam signum Cossicum 2e. Vt ex 1 A, in 1 A B, fit 1 A C. Et ex 3 B, in 4 B C, fiunt 12 B B C.

QUANDO numerus Cossicus simplex, absq. litera secundæ radicis, multiplicatur in numerum signatum litera, & signo Cossico, ducitur numerus in numerum, & productio eadem signa apponuntur. Vt ex 2 C, in 4 A B, fiunt 8 C A B. hoc est, 8 C multiplicati in 1 A B. Item ex 12e in 12e A B, fit 18 B A B. id est, 18 B. ductus in 1 A B. Tantum quoque fit ex 18 A, in se quadratè. Nam ex 18. in se fit 18 B. & ex 1 A, in se fit 1 A B.

QUANDO numerus post literam secundæ radicis signum Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post literam secundæ radicis gerit quoque signum Cossicum, producitur numerus cum characterem Cossico, quem exponentes characterem dant, cui præponenda, insuper est litera, vel literæ secundæ radicis. Vt ex 2 A B, in 3 A C, fiunt 10 A B. Item ex 3 A B, in 4 B C, fiunt 12 A B C.

QUANDO numerus post literam secundæ radicis characterem Cossicum gerens ducitur in numerum, qui post characterem Cossicum literam quoque secundæ radicis habet, producitur numerus cum posteriore characterem Cossico, quem insequitur litera secundæ radicis, deinde apponitur character Cossicus productus ex priore characterem Cossico in literam secundæ radicis, ac si haberet signum hoc 2e. Vt ex 1 A C, in 18 A, fit 18 A B B. Tantundem quoque fit ex 12e A B, in se quadratè. Item ex 3 A B, in 4 C A, fiunt 12 C A C, id est, 12 C multiplicati in 1 A C.

IN diuisione secundarum radicum, fit prius reductio signorum Cossicorum, per subtractionem similium signorum. Vt ex diuisione

ne 8cc Ag, per 4 Ag, reductis signis, diuiduntur 8cc, per 4. fitque Quotiens 2 cc. Sic 8cc Ag, per 4 cc, fit Quotiens 2 Ag.

QUANDO autem diuiditur numerus 2e, per numerum secundarum radicum, fit minutia in Quotiente. Vt 2e per 4 A, fit 3/4.

Extrahio radicem ex secundis radicibus. IN extrahitione radicum, eruitur radix ex numero, si habet, eiq. apponitur littera secundæ radicis, reiecto caractere Cossico. Vt radix quadrata numeri 25 Ag. est 5 A. Itē radix cubica numeri 27 Arc. est 3 A. Et radix zenfizenfica numeri 16 Dg. est 2 D.

QUANDO vero numerus non habet talem radicem, vel character Cossicus non est eiusdem appellationis cum radice extrahenda, præponitur toti numero cum littera, & caractere, signum radicale. Vt radix cubica numeri 3 Ag. est 3cc Ag. Item radix quadrata numeri 4 Arc. est 2g Arc.

Examen operationum radicem secundarum.

PROBANTVR prædictæ multiplicationes, diuisionesq. per progressionem Geometricas ab 1. incipientes. Claritatis autem gratia progressionem duplarum proportionum ascribemus radicibus, & progressionem triplarum radicibus secundis. cuiusmodi sunt hæc.

| | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|----|----|-----|-----|------|------|-------|-------|-----|
| N | 2e | 8 | cc | gg | g | 3cc | Bg | ggg | ccc | gg | 8cc |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 8cc |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 | 59049 | 8cc |

Itaq. vt videas, ex 2 e in 2 A, fieri 4e A, id est, 4e ductas in 1 A. resolutæ 2 e, faciunt 4. & 2 A, faciunt 6, ac 4. in 6. efficiunt 24. quantum videlicet faciunt 4 e, id est, 8 ductæ in 1 A, id est, in 3.

DEINDE ex 2 A, in 2e, diximus fieri 4 A e, hoc est, 4 A, ductas in 1 e. Et quia 2 A, sunt 6. & 2 e, sunt 4. sunt autem 24. ex 6. in 4. quantum nimirum faciunt 4 A, id est, 12. in 1 e, videlicet in 2.

PRAETEREA ex 1 e, in 1 A, produciuntur 1 e A, quia 1 e est 2. & 1 A, est 3. sunt autem 6. ex 2. in 3. quantum nimirum fit ex 1 e, id est, ex 2. in 1 A, id est, in 2.

SIC etiam ex 1 g. in 1 Ag, fit 1 g Ag, nimirum 1 g, ductus in 1 Ag. Et quia 1 g, est 4. & 1 Ag, est 9. sunt autem 36. ex 4. in 9. quantum nimirum fit ex 1 g. id est, ex 4. in 1 Ag, id est, in 9.

RVRVSUS ex 2 g. in 4 B, facti sunt 12 B, hoc est, 12 g. ducti in 1 B. Nam 3 g. sunt 12. & 4 B, sunt etiam 12. sunt autem 144. ex 12. in 12. quantum nimirum fit ex 12 g, id est, ex 48. in 1 B, id est, in 3.

ITEM ex 6. in 3 C, sunt 18 C, hoc est, ex 6. in 9. sunt 54. hoc est, 18 C. Sic ex 7. in 4 B, facti sunt 28 B, nimirum 84. quantum nimirum fit ex 7. in 4 B, id est, in 12.

EX 3 A, in 9 B, procreantur sunt 27 AB, id est, 27 A, multiplicatæ in 1 B. Nam 3 A, sunt 9. & 9 B, sunt 27. Fiunt autem 243. ex 9. in 27. quantum nimirum fit ex 27 A, id est, ex 81. in 1 B, id est, in 3.

ITEM

ITEM ex 3 A, in 4 A, fiunt 12 A γ , hoc est, 12 γ . secundæ radicis. Nam 3 A, sunt 9. & 4 A, sunt 12. Fiunt autem 108. ex 9. in 12. quantum nimirum faciunt 12 γ . secundæ radicis.

PRÆTEREA ex 1 A, in se quadratè fit 1 A γ . hoc est, 1 γ . secundæ radicis. Item 3 B, in se quadratè faciunt 9 B γ , id est, 9 γ . secundæ radicis. Nam 3 B, sunt 9. at ex 9. in 9. fiunt 81. nimirum 9 γ . secundæ radicis. Item ex 12 A, in 12 A, fit 144 A γ , id est, 1 γ . primæ radicis ductus in 1 γ . secundæ radicis. Nam 12 A, significat 12. primam ductam in 1 radicem secundam, id est, 2 ducta in 3. hoc est, 6. Fit autem ex 6. in 6. numerus 36. quantum nimirum fit ex 1 γ . primæ radicis, id est, ex 4. in 1. quadratum secundæ radicis, nimirum in 9. Sic 3 B, in se cubicè faciunt 27 B γ , id est, 27 re secundæ radicis. Quia 3 B, sunt 9. & 9. in se cubicè faciunt 729. quantum videlicet faciunt 27 re secundæ radicis.

POST hæc, ex 1 A, in 1 A γ , fit 1 A γ , hoc est, cubus secundæ radicis, nimirum 27. Nam 1 A, valet 3. & 1 γ . secundæ radicis 9. Liquet autem ex 3. in 9. gigni 27.

ITA quoque ex 3 B, in 4 B γ , fiunt 12 B γ . hoc est, 12 γ . secundæ radicis. Nam 3 B, sunt 9. & 4 re secundæ radicis 108. Fiunt autem 972. ex 9. in 108. quantum videlicet faciunt 12 γ . secundæ radicis.

AMPLIUS ex 2 re. in 4 A γ , fiunt 8 re A γ , hoc est, 8 re multiplicati in 1 γ . secundæ radicis. Nam 2 re sunt 16. & 4 γ . secundæ radicis 36. Fiunt autem 576. ex 16 in 36. quantum nimirum faciunt 2 re, id est, 64. multiplicati in 1 γ . secundæ radicis, videlicet in 9. Item ex 1 re. in 12 A γ , fit 12 A γ . id est, 12 γ . ductus in 1 γ . secundæ radicis. Nam 1 re. est 8. & 12 A γ . id est, 12 ducta in 1 γ . secundæ radicis, est 18. Fiunt autem 144. ex 8. in 18. quantum scilicet facit 12 γ , nimirum 16. ductus in 1 γ . secundæ radicis, id est, in 9.

ITEM ex 12 A γ , in 5 A γ , fiunt 10 A β . Nam 2 γ . secundæ radicis sunt 18. & 5 re secundæ radicis sunt 1080. Fiunt autem 2430. ex 18. in 1080. quantum scilicet faciunt 10 β . secundæ radicis. Item ex 3 A γ , in 4 B γ , fiunt 12 A β . Nam 3 γ . secundæ radicis faciunt 27. & 4 re secundæ radicis faciunt 108. Fiunt autem 2916. ex 27. in 108. ac tantundem faciunt 12 β . secundæ radicis.

POSTREMO ex 1 A γ , in 13 A, fit 13 A γ . hoc est, 1 γ . ductus in 13 γ . secundæ radicis. Nam 1 re secundæ radicis est 27. & 1 γ . est 4. Fiunt autem 108. ex 27. in 4. & ex 108. in 12 secundam, id est, in 3. fiunt 324. ac tantundem fit ex 1 γ . in 13 γ . secundæ radicis, hoc est, ex 4. in 81. Quod autem ex 12 A γ , in se quadratè fiat quoque 144 A γ . sic perspicuum fiet. Numerus 12 A γ . significat 12 primam, id est, 2. ductam in 1 γ . secundæ radicis, id est, in 9. quæ multiplicatio facit 18. At ex 18. in 18. fit numerus 324. qui æquivaleret numero 144 A γ . hoc est, numero producto ex 1 γ . id est, ex 4. in 12 γ . secundæ radicis, hoc est, in 81. Similiter ex 3 A γ , in 4 re A, fiunt 12 re A γ . Nam 3 γ . secundæ radicis sunt 27. & 4 re A, (id est, 4 re ducti in 1 A, vel in radicem secundam, hoc est, ex 32. in 3.) faciunt

96. Fiunt autem 2592. ex 27. in 96. Ac tantundem faciunt 1296. Arc. hoc est, 1296 multiplicati in 1 re secundæ radicis, nimirum ex 96. in 27.

IAM vero ex diuisione 8reA8. per 4A8. produci Quotientem, ac. eodem modo probabimus. Nam 8reA8. (id est 8 re multiplicati per 1A8. hoc est, 64. per 9.) faciunt 576. qui numerus diuisus per 48 secundæ radicis, nimirum per 36. facit Quotientem 16. hoc est, 2 re. Item ex diuisione 8reA8. per 4re. gigni Quotientem 2A8. perspicuum etiam est. Nam 8reA8 (id est, 8 re. ducti in 1A8. videlicet 64. in 9.) sunt 576. qui numerus diuisus per 4 re, id est, per 32. facit Quotientem 18. nimirum 2 8. secundæ radicis.

PARI ratione numeri 25A8. radicem quadratam esse 5A. manifestum quoque est. Nam 5A. sunt 15. at ex 15. in 15. fit numerus 225. cui æquales sunt 258. secundæ radicis. Non aliter ostendimus, 3A. esse radicem cubicam numeri 27Arc. Nam 3A. sunt 9. at ex 9. in se cubice fiunt 729. videlicet 27 re secundæ radicis. Ita quoque numeri 16D88. radix Zensizensifica erit 2D. quia 2D. sunt 6. & ex 6. in se Zensizensificæ fiunt 1296. nimirum 1688 secundæ radicis.

LIBVIT omnes has operationes secundarum radicum examinare per progressionem Geometricas, vt earum veritas omnibus constaret: quia de illis fortasse non nemo dubitare posset, cum earum ratio sit paulo obscurior, quam illa operationum numerorum Cosificorum. Vnus porro secundarum radicum explicabitur in ænigmatibus per regulam Algebræ dissoluendis.

DE NVMERIS IRRATIONALIBVS, siue surdis. Cap. XVI.

*Irrationales
numeri, siue
surdi, qui.*



VMERI irrationales, siue surdi sunt radices numerorum, quæ exprimi non possunt numeris, ac proinde neque audiri, ob quam causam radices surdæ sunt appellatæ, signanturq. hoc modo. $\sqrt{10}$. $\sqrt{11}$. $\sqrt{12}$. $\sqrt{13}$. &c. vrad finem cap. 3. declarauimus. Vt $\sqrt{10}$, hoc est, radix quadrata numeri 10. dicitur surda, vel irrationalis, quia nullus numerus dari potest, siue integer sit, siue integer cum fracto, qui in se quadratè multiplicatus producat 10. De integro manifestum est. Nam 3. in se ductus producit 9. numerum minorem, quam 10. At 4. in se multiplicatus gignit 16. numerum maiorem, quam 10. atque idcirco neque 3. neque 4. ideoq. neque vllus numerus minor quam 3. neque maior quam 4. radix quadrata esse potest numeri 10. De integro cum fracto res etiam clara est. Radix enim illa deberet esse inter 3. & 4. Sed quamuis inter 3. & 4. infiniti sint fracti, qui cum 3. constituent integrum cum fractis, vt $3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{5}$. &c. nullus

nullus tamen eorum in se ductus quadratè producere potest. 10. nu-
merum integrum, vt in Lemmate ad finem defin. 8. lib. 5. Eucl. de-
monstrauimus. Sic etiam $\sqrt{10}$ irrationalis est. Sc. $\sqrt{100}$. Sc.

DE hīce numeris nunc agendum est, ut plurimæ quæstiones, in quibus numeri irrationales interueniunt, queant explicari. Res quidem est non paucis difficultatibus inuoluta, sed quæ tamen planè intelligatur, si modo vehemens, ardensq. studium adhibeatur. Quòd si quis ad hanc rem perfectè intelligendam minus idoneus reperiatur, isne desperet omnino: quippe cum sine hac cognitione innumerabiles penè quæstiones per Algebra regulà enodari queat. Quo circa, omisâ ad breue tempus tractatione hæc numerorum irrationalium, quæ 13. capitulis continetur, conferre se poterit ad cap. 19. & 30. ubi innumerabilia penè æigmata scitâ iucundissima, sine cognitione numerorum irrationalium, enodata inueniunt. Deinde postquam se aliquandiu in Algebra quæstionibus exercuerit, regredi poterit ad tractationem hanc numerorum irrationalium, perdiscendam.

SOLET ante omnia a nonnullis disputari, an numeri irrationales verè dicendi sint numeri, necne. Cum enim neque integri numeri sint, neque fracti, vt paulò ante diximus, neque certam proportionem, quæ numeris exprimi possit, habeant ad integros numeros, aut fractos, non videntur esse numeri dicendi. Quia tamen sub regulam cadunt, censendi erunt aliquo modo esse numeri. Nam $\sqrt{8}$ 10. in se multiplicata gignit numerum 10, sicut radix quadrata numeri 9. producit 9. Item $\sqrt{8}$ 3. in $\sqrt{8}$ 12. procreat $\sqrt{8}$ 36. hoc est, 6. quemadmodum idem numerus 6. fit ex 2. in 3. vt ex algorithmo numerorum irrationalium, de quo mox agemus, constat. Habet autem numeri irrationales cum numeris fractis quandam affinitatem. Quemadmodum enim inter quosvis duos numeros integros cadunt infiniti numeri fracti, vt hic apparet, vbi inter 2. & 3. cadunt omnes hi numeri fracti.

$$2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{8}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, \&c.$$

ita quoque inter quoslibet duos numeros integros cadunt infiniti numeri irrationales. Ut inter 2. & 3. cadunt omnes hi.

J85, J86, J87, J88, J89, J90, J91, J92, J93, J94, J95,
J96, J97, J98, J99, J100, J101, J102, J103, J104, J105,
J106, J107, J108, J109, J110, J111, J112, J113, J114,
J115, J116, J117, J118, J119, J120, J121, J122, J123,
J124, J125, J126, J127, J128, J129, J130, J131, J132,
J133, etc.

Tam enim finguli illi fracti, quam hi surdi finguli maiores sunt quam 2. minores autem quam 3. ut liquet.

AFFERVNTVR ab auctoribus duo genera radicum furdarum, *Duo genera*
 Quædam enim sunt simplices, ut v.g. alicuius numeri non quadrati, *radicum fur-*
 Iste alicuius numeri non cubi, v.g. numeri alicuius non zensifensi, *darum simplex,*
 Iste alicuius numeri non furdesolidi, atque ita de alijs radicibus, *& composita.*
 numerorum progressionis Geometricæ ab 1. incipientis, quorum
 radices

Numeri mediales qui.

Radix ligata qua.

Numerus irrationalis compositus, vel diminutus, qui.

Radix Vniuersalis, qua.

Radix totius numeri compositi, diminutus, qua.

radices numeris exprimi non possunt, atque has radices simplices vocant nonnulli numeros mediales, propterea quod per illos reperiuntur media proportionalia inter duos numeros, vt cap. 21. dicemus. Aliæ radices surdæ sunt compositæ per interposita signa +. & — quarum duo item genera ab auctoribus deferibuntur. In primo continentur illæ, quas dicunt Ligatas, quando nimirum intelligimus summam ex pluribus radicibus; vel ex vna radice, pluribusvè, atque ex numero aliquo, vel ex numero Cossico, aut pluribus collectam. Vt cum per hunc numerum $389 + 384$. intelligimus 5. vnitates, summam videlicet ex 3. radice zenfica numeri 9. & ex 2. radice zenfica numeri 4. collectam, dicitur numerus ille radix Ligata, quæ equaualeat numero 5. Sic etiam Ligata radix erit $387 + 384 + 3$. quæ æquiualebit huic, $387 + 5$. Significamus enim ad 387. additum esse numerum 5. Eodem modo radix Ligata erit, $383 + 22$. Denotamus enim 22 esse additas ad 383. Denique Ligata radix erit $3849 — 3827$. Item $386 — 389$. In priori namque intelligimus ex 3849. hoc est, ex 7. ablatam esse 3827. id est, 3. atque ita pretium eius erit 4. In posteriori autem volumus ex 386 100. subtrahi 389. nimirum 3. Sed nos hasce radices Ligatas nominabimus deinceps numeros irracionales compositos, vel diminutos. Immo, vt breuitati consulamus, appellabimus deinceps etiam numeros diminutos, plerumque compositos. Alterum genus compositarum radicum complectitur radices surdas, quæ Vniuersales dicuntur: quando videlicet intelligitur radix alicuius radicis Ligatæ, vel numeri compositi, diminutivæ. Vt huius numeri compositi, $22 + 389$. radix Vniuersalis est 5. Est enim sensus, vt ad 22. addatur radix zenfica 9. quæ est 3. & aggregati 25. radix sumatur, quæ est 5. Eodem pacto, si inuertantur particule numeri eiusdem, vt fiat numerus $389 + 22$. erit eius radix Vniuersalis eadem, nimirum 5. Nos radices has Vniuersales vocabimur simpliciter radices numerorum irrationalium compositorum, aut diminutorum, ac propterea huiusmodi numeris præfigemus signum radicale 38. vel 386. atque vt significemus, illud ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo: $38(22 + 389)$. vel sic, quod idem est, $38(389 + 22)$. Alia exempla huiusmodi radicum sume hæc. $38(385 + 12)$. Item $38(48 + 12)$. Item $38(389 + 384) + 38(12 + 3825)$. Est enim sensus huius posterioris radicis, vt sumatur summa conflata ex 389. & 384. nimirum ex 3. & 2. quæ est 5. & ad hanc summam adijciatur radix aggregati ex 11. & 3825. hoc est, aggregati 16. quæ est 4. vt tota summa fiat 9. eiusque radix 3. Quod si inuertantur duo illi numeri compositi hoc modo. $38(11 + 3825) + 38(389 + 384)$ variabitur sensus, quia signum radicale 38. in principio positum videtur referendum esse ad totum illud, quod sequitur: ita vt 11. sumantur cum 5. radice 25. vt fiant 16. quibus addantur 389. & 384. nimirum 5. vt fiat tota summa 21. eiusque radix 3821. quæ multum a priori, quæ erat 3. differt. Denique huius numeri $38(7 + 3848)$ radix erit $2 + 383$. Nā hic

hic numerus in se ductus producit 74. & 48. vt. ex sequentibus patebit. Est & aliud genus radicis apud scriptores nonnullos, quam Distinctam dicunt, in qua videlicet particula seorsum accipiuntur, non autem earum summa. Vt hac radix $\sqrt[3]{164}$ & 9. quando particule per se sumuntur, vt 4. & 3. non autem coniunctim, vt 7. quia sic esset radix Ligata, quam nunc simpliciter runciamus irrationalem compositum nominauimus. dicitur radix Distincta & multum differt a Ligata. Nam si accipiarur, tanquam Ligata, & nunc se ducatur, fiet numerus 49. At vt Distincta, sicut numeri 16. & 9. qui simul efficiunt 25. duntaxat. Verum proprijs in locis declarabimus, quoniam sensus sit harum radicum. Variè enim hac de re auctores loquuntur. Et de eisdem plura inuenies in cap. 14.

Radix Distincta, quæ.

DE REDVCTIONE RADICVM simplicium ad eandem denominationem.

Cap. XVII.



Ti radices surde simplices inter se possunt multiplicari, ac diuidi, necesse est illas, si diuersæ sint denominationis, ad eandem denominationem reducere, quæ reductio eodem fere modo fit, quo nuntur diuisorum denominatorum ad eandem denominationem reuocantur. Positis enim signis radicalibus sub numeris, ad quos pertinent, multiplicandi sunt ipsi numeri in signa radicalia per crucem, vt noui numeri procreentur: Deinde signa ipsa inter se addenda, hoc est, eorum exponentes inter se multiplicandi quoque, vt signum commune vel exponens signi communis producatur. V.g. hæc duæ radices $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[4]{4}$. ita ad idem signum radicale reuocabuntur. Positis numeris, ac signis, vt dictum est, & figura indicat, multiplicandus est numerus 5. cubice, propter signum $\sqrt[3]{}$, vt fiat nouus numerus 125. At numerus 4. censice, propter signum $\sqrt[4]{}$, vt gignatur nouus numerus 16. Deinde addendum signum $\sqrt[4]{}$ ad $\sqrt[3]{}$, vt fiat signum $\sqrt[12]{}$. cuius nimirum exponens est 16. procreatus ex ductu 2. exponentis 8. in 2. exponente $\sqrt[3]{}$, vt cap. 2. docuimus. quod signum productum $\sqrt[12]{}$, uti ique numero prius producto præfigendū, ostia vt $\sqrt[12]{125}$ & $\sqrt[12]{16}$ reducta sint ad $\sqrt[12]{125}$ & $\sqrt[12]{16}$. Quo facto, erit $\sqrt[12]{125}$ æqualis $\sqrt[12]{125}$ & $\sqrt[12]{16}$ æqualis $\sqrt[12]{4}$. Nam $\sqrt[12]{125}$ est $\sqrt[12]{125}$ numeri 125. propterea quod 125. in se quadratè efficit 5. & 5. in se cubice facit 125. Eadem ratione $\sqrt[12]{16}$ est $\sqrt[12]{16}$ numeri 16. propterea quod 16. in se cubice facit 4. & 4. in se quadratè facit 16. quod etiam inde patet. Quoniam $\sqrt[12]{16}$ mul-

Qua ratione diuersæ radices ad eandem denominationem reducuntur.



a 17. septimi multiplicans $\frac{1}{8}$. & 5. produxit $\frac{5}{8}$ grē. & 125. * erit eadem proportio $\frac{5}{8}$ grē, ad 125. quæ $\frac{1}{8}$, ad 5. Sic quoque, cum $\frac{1}{8}$. multiplicans $\frac{1}{4}$. & 4. faciat $\frac{1}{2}$ grē, & 16. erit eadem proportio $\frac{1}{2}$ grē, ad 16. quæ $\frac{1}{8}$, ad 4. ac proinde $\frac{1}{8}$ 5. æqualis erit $\frac{1}{2}$ grē 125. & 16. æqualis $\frac{1}{2}$ grē 16.

*Demonstratio
reductiois.* VERVM predicto modo recte reduci radices ad eandem deno-
minationem, hoc est, in dato exemplo, $\sqrt[3]{35}$ esse $\sqrt[3]{35} 125$. & $\sqrt[3]{35} 4$
æquivalere $\sqrt[3]{35} 16$. ita quoque Geometricè ostendemus.

C. 2. E. 3.
A B G D E H
1. J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Sic A, radix Zenica numeri B, cuius radice exponens sit C. Item D, sit radix cubica numeri B, cuius exponens sit F. Ducatur B, quadratus huius numeri 135, in se cubice, propter exponentem F, vel signum ite. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, sit Jce, numeri producti 125, cuius exponens F. Item ducatur B, cubus huius numeri Jce4. in se quadrate, propter signu B, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, sit Jg, numeri producti 16, cuius exponens C. Postremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatq, numerus K. Dico A, esse Jce, nimirum a 6. Et D, Jce esse numeri H, ab eodem numero K denominatum. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata a C, erunt inter B, & vnitatem tot proportionales euales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum due, vt cap.2. explicatum est, & hic perspicuum est, 1.3.4.5. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab E, erunt eandem ob causam inter G, & vnitatem tot proportionales euales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1.5.25. 125. hoc est, inter G, & E, erunt due proportionales euales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportionales euales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint due proportionales euales proportioni A, ad vnitatem, erunt sex huiusmodi proportionales inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K, qui numerus proportionum pignatur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportionales inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F. Ac proinde G, erit zenficus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit Jce, numeri G. Non aliter demonstrabimus, D, esse Jce, numeri H. Eademq, ratio est de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.
 Exemplum 2. Sit A, radix Zenica numeri B, cuius radice exponens sit C. Item D, sit radix cubica numeri B, cuius exponens sit F. Ducatur B, quadratus huius numeri 135, in se cubice, propter exponentem F, vel signum ite. (ita enim fiet multiplicatio per crucem) vt fiat numerus 125. ita vt B, sit Jce, numeri producti 125, cuius exponens F. Item ducatur B, cubus huius numeri Jce4. in se quadrate, propter signu B, vel exponentem C, vt fiat numerus 16. ita vt E, sit Jg, numeri producti 16, cuius exponens C. Postremo ducatur exponens C, in exponentem F, fiatq, numerus K. Dico A, esse Jce, nimirum a 6. Et D, Jce esse numeri H, ab eodem numero K denominatum. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata a C, erunt inter B, & vnitatem tot proportionales euales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum due, vt cap.2. explicatum est, & hic perspicuum est, 1.3.4.5. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab E, erunt eandem ob causam inter G, & vnitatem tot proportionales euales proportioni B, ad vnitatem, quot sunt vnitates in F, nimirum tres, vt hic etiam patet. 1.5.25. 125. hoc est, inter G, & E, erunt due proportionales euales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt tres proportionales euales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint due proportionales euales proportioni A, ad vnitatem, erunt sex huiusmodi proportionales inter G, & vnitatem, quot videlicet vnitates sunt in K, qui numerus proportionum pignatur ex multiplicatione duarum proportionum inter B, & vnitatem, in tres proportionales inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F. Ac proinde G, erit zenficus, cuius exponens est 6. hoc est, A, erit Jce, numeri G. Non aliter demonstrabimus, D, esse Jce, numeri H. Eademq, ratio est de alijs, vt in hoc altero exemplo numerorum rationalium.

A, est Jre. numeri B, denominata a C. At vero D, est J88. numeri E, denominata ab F. Ex B, in se zensificæ, propter exponentem F, fiat G, ita vt B, sit J88. numeri 4096. Item ex E, in se cubice, propter exponentem C, fiat H, ita vt E, sit Jre. numeri H. Ac tandem ex C, in F, fiat K. Dico A, esse J88re. numeri G, denominatam a K, id est, a numero 12. Et D, esse J88re. numeri H, denominatam ab eodem numero 12. Cum enim A, sit radix ipsius B, denominata a C; erunt inter B, & vnitatem tot proportionēs æquales proportioni A, ad vnitatem, quot vnitates sunt in C, nimirum tres, vt hic patet, 1.2.4.8. Item quia B, radix est ipsius G, denominata ab F; erunt tot proportionēs inter G, & vnitatem, quarum quælibet æqualis est proportioni B, ad vnitatem, quot vnitates sunt in F, nimirum quatuor, vt hic patet, 1.8.64.512.4096. hoc est, inter G, & B, erant tres proportionēs æquales proportioni B, ad vnitatem: quandoquidem inter G, & vnitatem sunt quatuor proportionēs æquales proportioni B, ad vnitatem. Cum ergo inter B, & vnitatem sint tres proportionēs æquales proportioni A, ad vnitatem, erunt inter G, & vnitatem duodecim proportionēs æquales proportioni A, ad vnitatem: quot videlicet sunt vnitates in numero K, nimirum 12, qui numerus proportionum gignitur ex multiplicatione trium proportionum inter B, & vnitatem, in quatuor proportionēs inter G, & vnitatem, hoc est, ex C, in F: ac proinde G, erit J88re, cuius exponentis est 12: id est, A, erit J88re. numeri G. Eademq. ratione D, erit J88re numeri H.

SINT rursus reuocandi duo numeri 6, id est, Jo 6. (quod exponentis numeri absoluti sit 6.) & J88 12. Ducantur 6. in se zensificæ, vt fiant 1296. Sed 12. ducenda non sunt in Jo. propter exponentem 6. neque 4: exponentis 88. in 6, eandem ob causam. Quare 6. & J88 12. reducuntur ad J88 1296. & J88 12. Atque ita, quando proponitur numerus absolutus, & radix aliqua, multiplicandus est tantummodo numerus absolutus in se, prout exigit character radice. Vt in proximo exemplo numerus absolutus 6. ductus est in se zensificæ, factaq. est reductio ad J88 1296. & J88 12.

COMPENDIOSE interdum fieri possunt huiusmodi reductiones, per abiectionem signi radicalis, quando nimirum vterque numerus habet radicem, quam signum radicale indicat. Tunc enim extrahitur illa radix, signumq. eius radicale deletur. Vt si dux hæ radices, Jre 27. & J88 25. reuocandæ sint ad eandem denominationem, extraho ex 25. radicem zensificam 5. cui præpono reliquum signum 8, hoc modo J8 5. Deinde ex 27. extraho radicem cubicam 3. quam multiplico zensificæ, vt fiat J8 9. Erunt ergo datæ dux radices reductæ ad has J8 9. & J8 5. Si prius extraheretur radix cubica ex 27. nimirum 3. deletio signo Jre, remanet numerus absolutus 3. Extracta deinde radice

$$\begin{array}{r} 1296 \quad 12 \\ 6 \quad X \quad 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 531441 \quad 15625 \\ 27 \quad X \quad 25 \\ Jre \quad J88 \end{array}$$

Quo pacto numerus absolutus, & radix reducatur ad eandem denominationem.

Compendium reductionis.

$$\begin{array}{r} 531441 \quad 15625 \\ 27 \quad X \quad 25 \\ Jre \quad J88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 531441 \quad 15625 \\ 27 \quad X \quad 25 \\ Jre \quad J88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 531441 \quad 15625 \\ 27 \quad X \quad 25 \\ Jre \quad J88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 531441 \quad 15625 \\ 27 \quad X \quad 25 \\ Jre \quad J88 \end{array}$$

radice zenfica ex 25. quæ est 5. præpono ei reliquum signum γ . hoc modo. $\gamma 25$. Quia vero prius inuentus est numerus absolutus 5. ducendus est in se zenfice, vt fiat $\gamma 9$. atque ita rursus facta est reductio ad $\gamma 9$. & $\gamma 5$. vt prius. Sine compendio reducerentur ad has duas, $\gamma 25$ & $\gamma 144$. & $\gamma 25$ & $\gamma 1625$. quæ tandem reducerentur ad $\gamma 9$. & $\gamma 5$. hoc modo. Extraho ex $\gamma 144$. radicem cubicam 81. & ex hac radicem zenfizenficam 3. cui nullum signum radicale præpono, quia numerus habuit $\gamma 25$. Deinde ex $\gamma 1625$. eruo radicem cubicam 25. & ex hac radicem zenficam 5. cui præfigo signum γ . quod reliquum est, hoc modo $\gamma 5$. quia numerus 5. non habet γ . Quoniam vero prius inuentus est numerus absolutus 3. ducatur 3. in se zenfice, vt fiat $\gamma 9$. atque ita reductio facta erit ad $\gamma 9$. & $\gamma 5$. vt prius. Sic etiam si reducenda sint $\gamma 1024$. & $\gamma 1216$. Extraho ex 1024. radicem surdesolidam 4. delectoq. caractere γ . manet $\gamma 4$. Extracta autem radice zenfica ex 4. habebimus 2. Item ex 1216. eruo radicem cubicam 6. cui præpono signum γ . Sed quia prius habuimus numerum absolutum 2. ducemus 2. in se zenfice, vt fiat $\gamma 4$. Erunt igitur dictæ radices reductæ ad $\gamma 4$. & $\gamma 6$. Atque hoc modo fit compendium per abiectionem alicuius signi radicalis.

NONNYNQVAM fieri etiam potest compendium per assumptionem alicuius signi radicalis. Vt si reducenda sint $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 6. duco 2. in se zenfice, propter signum γ . quod præter se reperitur in altera radice, facioq. 4. cui præpono γ . eritq. facta reductio ad $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 6. Sine compendio fieret reductio, vt hic vides ad $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 64. & $\gamma 27$. 216. Et si ex his numeris eruantur radices cubice 4. & 6. deleanturq. signa γ . singula ex singulis, facta erit reductio ad $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 4. & $\gamma 27$. 6. vt prius. Sic etiam reducerentur $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 8. ad $\gamma 25$ & $\gamma 27$. 8. si nimirum 2. ducatur in se zenfice, & producto addatur idem signum radicale γ . præposito insuper signo γ .

DENIQUE vt alia adhuc exempla ob oculos ponam, quotiescunque in vtraque radice idem character reperitur, reducerentur illæ radices facile ad eandem denominationem, si numerus minoris denominationis multiplicetur in se secundum exigentiam alterius characteris, qui in maiore denominatione reperitur, & producto addatur character ille, secundum quem facta est multiplicatio. Vt $\gamma 27$ 9. & $\gamma 4$. reducerentur ad $\gamma 27$ 9. & $\gamma 27$ 16. si nimirum numerus 4. minoris denominationis ducatur in se zenfice, propter characterem γ , qui in maiore denominatione præter γ . reperitur. ITEM $\gamma 27$ 8. & $\gamma 9$. reducerentur ad $\gamma 27$ 8. & $\gamma 27$ 729. si nimirum numerus 9. minoris denominationis ducatur in se cubice, propter characterem γ , qui præter γ . in maiore denominatione continetur.

SIC etiam $\gamma 27$ 20. & $\gamma 10$. reducerentur ad $\gamma 27$ 20. & $\gamma 27$ 1000000. si nimirum numerus 10. minoris denominationis ducatur

Regula reductionis quorundam radicum facilis.

ducatur in se zenficubicè, propter characterem grè. qui præter 8.
reperitur in maiore denominatione: hoc est, vel prius in se zenfi-
cè, & productus 100. in se cubicè: vel prius in se cubicè, & pro-
ductus 1000. in se zenficè. Vtroque enim modo producitur nume-
rus 1000000.

ITA quoque Jgre 30. & Jre 15. reducentur ad Jgre 30. & Jgre 225. si videlicet numerus 15. minoris denominationis. ducatur in se zentificet, & productio 225. prater characterem re. apponatur quoque character 30. & sic de alijs.

ITAQ. maior character semper manet intactus, & solum minor
mutatur, assumendo alium characterem prater illum, quem habet;
characterem, inquam, secundum cuius exigentiam multiplicatus
fuit numerus minoris denominationis, & qui in maiore denomina-
tione reperitur ultra minoris denominationis characterem.

DE MVLTIPPLICATIONE

ac Diuisione radicū simplicium.

Cap. XVIII.



T. doctrinæ ordo seruetur, agendum erit de multiplicatione, diuisioneq. radicum simplicium ante additionem, subtractionemque, quia sine multiplicatione additio, subtractioq. radicum absoluti non potest. Quando ergo duæ radices multiplicanda, aut diuidenda sunt eiusdem generis, multiplicantur earum numeri inter se, aut diuidun-

*Multiplicatio, ac divisio
radicum sim-
ilicium, quo
modo fiat.*

Verex du Qiu JK 7. in JK 10. fit JK 70000 100000 100000 100000

EX $\sqrt{g}$ 3. in $\sqrt{g}$ 12. fit $\sqrt{g}$ 36. id est. 6.

Ex. $\sqrt{8} = 2\frac{1}{4}$, in $\sqrt{8}$ 8, fit $\sqrt{8}$ 18.

Ex Joe 24. in Joe 10. fit Joe 240.

Ex Jce. 4. in Jce 16. fir Jce 64. hoc est

EX 889. in 888. fit 887.

Ex $\sqrt{p}$ 4. in $\sqrt{p}$ 8. fir $\sqrt{p}$ 32. id est. 2.

Item ex diuisione $\sqrt[3]{8} 70$. per $\sqrt[3]{8} 7$. fit $\sqrt[3]{8} 10$.

Ex $\sqrt[3]{8}$ 36. per $\sqrt[3]{8}$ 12. fit $\sqrt[3]{8}$ 3.

Ex $\sqrt{8}$ 18. per $\sqrt{8}$ 8. fit $\sqrt{8}$ 2 $\frac{1}{2}$. hoc est.

Ex $\sqrt{100}$ 140, per $\sqrt{100}$ 14, fir $\sqrt{100}$ 10.

Ex Jce 64. per Jce 4. fit Jce 16.

Ex. 1. 72. per $\sqrt{88}$. 8. fit $\sqrt{88}$ 9.

EX 4.11.32. per $\sqrt{A}$ 8, fit $\sqrt{A}$ 4.

QUANDO autem propositæ duæ radices non sunt eiusdem nature, reducendæ sunt ad eandem denominationem: deinde multiplicatio, aut diuisio instituenda ut prius.

VT ex ductu $\sqrt{8}$ in $\sqrt{2}$ fit $\sqrt{16}$. Nam numerus $1\frac{1}{2}$. Zensificè in se ductus facit $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{2}$. hoc est, $\sqrt{8}$ 2 atque ita ex $\sqrt{8}$ 8 in $\sqrt{8}$ 2 fit $\sqrt{16}$. hoc est, $\sqrt{16}$.

EX $\sqrt{16}$ 2 in $\sqrt{16}$ 6 fit $\sqrt{96}$ 24 . Dux namq. illæ radices reducuntur ad has duas $\sqrt{16}$ 4 & $\sqrt{16}$ 6 .

EX $\sqrt{8}$ 5 in $\sqrt{4}$ fit $\sqrt{32}$ 2000 . Nam datæ duæ radices renocantur ad has, $\sqrt{8}$ 125 & $\sqrt{4}$ 16 .

ITEM ex diuisione $\sqrt{8}$ 18 per $\sqrt{2}$ fit $\sqrt{8}$ 8 . Numerus enim $1\frac{1}{2}$ ductus in se quadratè facit $2\frac{1}{4}$ cui præponendum est signum $\sqrt{}$. ut fiat $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{4}$ atque ita diuisa $\sqrt{8}$ 18 per $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{4}$ hoc est, per $\sqrt{8}$ 2 fit Quotiens $\sqrt{8}$ 8 .

EX $\sqrt{16}$ 24 per $\sqrt{4}$ fit Quotiens $\sqrt{16}$ 6 . Nam dux illæ radices reducuntur ad has $\sqrt{16}$ 24 & $\sqrt{4}$ 4 si nimirum numerus 2 ducatur in se quadratè, & productio 4 præter signum $\sqrt{}$ apponatur etiam signum $\sqrt{}$ ut fiat $\sqrt{16}$ 4 atque ita diuisa $\sqrt{16}$ 24 per $\sqrt{16}$ 4 fit Quotiens $\sqrt{16}$ 6 .

EX $\sqrt{16}$ 4000 per $\sqrt{8}$ 5 fit Quotiens $\sqrt{16}$ 4 . Dux namq. illæ radices reducuntur ad $\sqrt{16}$ 4000000 & $\sqrt{8}$ 15625 . Nam 2000 in se quadratè faciunt 4000000 & 5 in se Zensificubicè faciunt 15625 quibus productis præponitur commune signum $\sqrt{}$ cuius exponentis 12 gignitur ex 6 exponente signi $\sqrt{}$ in 2 exponentem signi $\sqrt{}$. Atque ita si diuides $\sqrt{16}$ 4000000 per $\sqrt{8}$ 15625 facies Quotientem $\sqrt{16}$ 256 hoc est, $\sqrt{4}$ 4 . Nam $\sqrt{8}$ 15625 est 40 cuius $\sqrt{4}$ est $\sqrt{4}$ 4 .

EX $\sqrt{8}$ 4 per $\sqrt{8}$ 2 fit Quotiens $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{2}$ id est, $\sqrt{8}$ 2 . Nam ex ductu Quotientis $\sqrt{8}$ 2 in diuisorem $\sqrt{8}$ 2 fit $\sqrt{8}$ $2\frac{1}{2}$ hoc est, $\sqrt{8}$ 2 numerus diuisus.

Multiplicatio QUANDO radix aliqua multiplicatur in se quadratè vel cubicè, radicem in se vel secundum exigentiam alterius signi radicalis, quod gerit, suadendus est ipsemet numerus pro numero productio, deletio signi quadratè, cubicè, zensificè radicali.

VT $\sqrt{8}$ 4 in se quadratè facit 4 . Nam $\sqrt{8}$ 4 in $\sqrt{8}$ 4 facit $\sqrt{8}$ 16 hoc est, 4 .

EX $\sqrt{8}$ 18 in se quadratè facit 18 id est, $\sqrt{8}$ 324 quæ est 18 .

EX $\sqrt{4}$ 4 in se cubicè facit 4 . Nam $\sqrt{4}$ 4 in $\sqrt{4}$ 4 facit $\sqrt{4}$ 16 & ex $\sqrt{4}$ 4 in $\sqrt{4}$ 16 facit $\sqrt{4}$ 64 hoc est, 4 atque radix cubica huius producti est $\sqrt{4}$ 4 .

SIC $\sqrt{8}$ 16 in se zensificè facit 16 . Nam ex $\sqrt{8}$ 16 in $\sqrt{8}$ 16 fit $\sqrt{8}$ 256 & ex $\sqrt{8}$ 256 in se fit $\sqrt{8}$ 65536 nimirum 16 quia radix quadrata numeri 65536 est 256 & huius radix quadrata est 16 .

AT quando radix aliqua multiplicatur in se secundum exigentiam alterius signi radicalis, ducendus est numerus in se secundum exigentiam alterius huius signi radicalis, ac productio signum radicale

cale numeri multiplicati præponendum.

VT. ex $\sqrt[3]{8}$ 6. in se cubicè fit $\sqrt[3]{8}$ 216. Vnde radix cubica huius producti erit $\sqrt[3]{8}$ 6. Nam ex $\sqrt[3]{8}$ 6. in se fit $\sqrt[3]{8}$ 36. & ex $\sqrt[3]{8}$ 6. in $\sqrt[3]{8}$ 36. fit $\sqrt[3]{8}$ 216.

EX. $\sqrt[3]{8}$ 8. in se quadratè fit $\sqrt[3]{8}$ 64. id est, 4. Vnde radix quadrata numeri $\sqrt[3]{8}$ 64. est $\sqrt[3]{8}$ 8. hoc est, 2.

EX. $\sqrt[3]{8}$ 6. in se quadratè fit $\sqrt[3]{8}$ 36. Atque ita radix quadrata numeri $\sqrt[3]{8}$ 36. est $\sqrt[3]{8}$ 6.

EX. $\sqrt[3]{8}$ 6. in se cubicè fit $\sqrt[3]{8}$ 36. hoc est, $\sqrt[3]{8}$ 6. Nam radix Zensica numeri 36. est 6. & huius radix cubica est $\sqrt[3]{8}$ 6. Vnde radix quadrata numeri $\sqrt[3]{8}$ 36. vel $\sqrt[3]{8}$ 6. est $\sqrt[3]{8}$ 6.

EX. $\sqrt[3]{8}$ 6. in se cubicè fit $\sqrt[3]{8}$ 216. vel $\sqrt[3]{8}$ 6. quia huius numeri 216. radix cubica est 6. & huius radix quadrata est $\sqrt[3]{8}$ 6. Itaq. radix cubica numeri $\sqrt[3]{8}$ 216. vel $\sqrt[3]{8}$ 6. est $\sqrt[3]{8}$ 6.

EX. $\sqrt[3]{8}$ 6. in se quadratè fit $\sqrt[3]{8}$ 36. hoc est, $\sqrt[3]{8}$ 6. quia radix quadrata numeri 36. est 6. & huius radix quadrata est $\sqrt[3]{8}$ 6. Ex quo fit, radicem quadratam numeri $\sqrt[3]{8}$ 36. vel $\sqrt[3]{8}$ 6. esse $\sqrt[3]{8}$ 6. Itaque

vt habeatur quadratum alicuius radicis zensificæ, satis est, adducere vnum signum 3. Vt in dato exemplo quadratum $\sqrt[3]{8}$ 6. fuit $\sqrt[3]{8}$ 6. Sic etiam quadratum $\sqrt[3]{8}$ 8. est $\sqrt[3]{8}$ 8. & sic de cæteris.

ITAQ. si radix quadrata aliqua furda duplanda est, multiplicandus est eius numerus per 4. Producti namq. $\sqrt[3]{8}$ est dupla radicis datæ. Vt duplum $\sqrt[3]{8}$ 3. erit $\sqrt[3]{8}$ 12. Nam vt $\sqrt[3]{8}$ 3. ducatur in 2. reducenda sunt numeri $\sqrt[3]{8}$ 3. & 2. ad eandem denominationem $\sqrt[3]{8}$ 3. & $\sqrt[3]{8}$ 4. &c.

SIC etiam si duplanda sit $\sqrt[3]{8}$ 10. multiplicanda erit per $\sqrt[3]{8}$ 8. fietq. eius duplum $\sqrt[3]{8}$ 80. Duo namq. numeri $\sqrt[3]{8}$ 10. & 2. reuocandi sunt ad eandem denominationem, $\sqrt[3]{8}$ 10. & $\sqrt[3]{8}$ 8.

NON aliter radix quæcunque multiplicabitur per 3. 4. 5. &c. si dicti numeri multiplicentur zensificè, vel cubicè, vel zensificè, secundum conditionem nimirum radicis multiplicandæ. Vt $\sqrt[3]{8}$ 9. triplicabitur, si ducatur in $\sqrt[3]{8}$ 27. vt gignatur $\sqrt[3]{8}$ 2187. Quadruplicabitur autem, si multiplicetur per $\sqrt[3]{8}$ 1024. vt fiat $\sqrt[3]{8}$ 9216. quæ quadrupla est $\sqrt[3]{8}$ 9. &c.

HINC facillè cognoscemus summam quotcunque radicum surdarum æqualium. Si enim vnâ illarum radicum multiplicetur per tot vnitates, quæ sunt radices propositæ, gignetur earum summa. Vt quinque $\sqrt[3]{8}$ 7. faciunt $\sqrt[3]{8}$ 175. Item quatuor $\sqrt[3]{8}$ 8. faciunt $\sqrt[3]{8}$ 112. hoc est, 8. Sic decem $\sqrt[3]{8}$ 4. faciunt $\sqrt[3]{8}$ 4000000. Nam redigere quotlibet numeros æquales in vnâ summâ, nihil est aliud, nisi vnum illorum numerorum ducere in ipsorum multitudinem. Vt summa trium horum numerorum æqualium 12. 12. 12. æqualis est numero producto ex 12. in 3. &c.

RECTE autem fieri multiplicationem radicis in radicem, vt diximus, sic demonstrabimus in radicibus quadratis. Sint duæ lineæ, AB, $\sqrt[3]{8}$ 3. & BC, $\sqrt[3]{8}$ 12. Dico $\sqrt[3]{8}$ 36. hoc est, radicem quadratam numeri 36. qui fit ex quadrato 3. lineæ AB, in quadratum

Facilis inuenta quadrati radicis zensificæ.

Quo modo radix dupletur, vel triplicetur, &c.

Summa quotcunque radicum æqualium.

Demonstratio multiplicationis radicem quadratam.

$\sqrt[3]{8} \ 3$ $\sqrt[3]{8} \ 12$ 12. lineæ BC, esse numerum productum ex linea AB, id est, ex C $\sqrt[3]{8} \ 3$. in lineam BC, hoc est, in $\sqrt[3]{8} \ 12$. Quoniam enim ex Lemma

a 10. sept.

mate propos. 54. lib. 10. Eucl. rectangulum sub AB, BC, medio loco proportionale est inter quadrata rectarum AB, BC: *erit id, quod sit ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC, æquale ei, quod sit ex rectangulo sub AB, BC, in se multiplicato: ideoq. productum ex AB, in BC, radix quadrata erit producti ex 3. quadrato rectæ AB, in 12. quadratum rectæ BC. quod erat demonstrandum.

Demonstratio generalis multiplicationis omnium radicum.

IN alijs autem omnibus radicibus, etiam non quadratis, idem hoc modo demonstrabimus. Sit A, $\sqrt[3]{8}$. numeri B: & C, $\sqrt[3]{8}$ numeri D: atque ex A, in B, fiat cubus E, vt A, sit $\sqrt[3]{8}$ numeri E: Et ex C, in D, fiat cubus F, vt C, sit $\sqrt[3]{8}$ numeri F. Item ex A, in E, fiat zensifensus G, vt A, sit $\sqrt[3]{8}$ numeri A: Et ex C, in F, fiat zensifensus H, vt C, sit $\sqrt[3]{8}$ numeri H. Ac tandem ex A, in C, fiat I: Et ex quadrato B, in quadratum D, fiat quadratus K: Et ex cubo E, in cubum F, fiat cubus L: Et ex Zensifensu G, in Zensifensum H, fiat Zensifensus M. Dico numerum I, productum

Tabula numerorum

ex A, $\sqrt[3]{8}$ B, in C, $\sqrt[3]{8}$ D, esse $\sqrt[3]{8}$ numeri K, producti ex $\sqrt[3]{8}$ B, in $\sqrt[3]{8}$ D. Item eundem numerum I, productum ex A, $\sqrt[3]{8}$ E, in C, $\sqrt[3]{8}$ F, esse $\sqrt[3]{8}$ numeri L, producti ex $\sqrt[3]{8}$ E, in $\sqrt[3]{8}$ F. Denique eundem numerum I, productum ex A, $\sqrt[3]{8}$ G, in C, $\sqrt[3]{8}$ H, esse $\sqrt[3]{8}$ numeri M, producti ex $\sqrt[3]{8}$ G, in $\sqrt[3]{8}$ H. Atque ita deinceps, si A, & C, in G, & H, ducantur, vt fiant Surdefolidi; & deinde

b 17. sept.

c 17. sept.

d 10. sept.

Zensicubi, &c. Quoniam enim A, multiplicans A, & C, fecit B, & I, *erit B, ad I, vt A, ad C. Item quia C, multiplicans A, & C, fecit I, & D: *erit quoque I, ad D, vt A, ad C, hoc est, vt B, ad I: ac proinde B, I, D, continuè sunt proportionales. *Igitur idem numerus fiet ex B, in D, qui ex I, in se. Fit autem K, ex B, in D. Igitur idem K, fiet ex I, in se: hoc est, I, erit $\sqrt[3]{8}$ numeri K.

e 17. sept.

f 17. sept.

g 19. sept.

DEINDE quia B, multiplicans A, & D, fecit E, & K; *erit E, ad K, vt A, ad D. Item quia C, multiplicans A, & D, fecit I, & F: *erit quoque I, ad F, vt A, ad D, hoc est, vt E, ad K: ac proinde quatuor numeri E, K, I, F, proportionales sunt. *Igitur idem numerus fiet ex E, primo in F, quartum, qui ex I, tertio in K, secundum. Factus est autem L, cubus ex E, in F. Idem igitur L, fiet ex I, in K, suum quadratum: ac proinde I, erit $\sqrt[3]{8}$ numeri L.

h 17. sept.

i 17. sept.

k 19. sept.

RVRSVS quoniam E, multiplicans A, & F, fecit G, & I; *erit G, ad I, vt A, ad F. Item quia C, multiplicans A, & F, fecit I, & H: *erit quoque I, ad H, vt A, ad F, hoc est, vt G, ad I: ac proinde quatuor numeri G, I, I, H, proportionales sunt. *Igitur idem numerus fiet ex G, primo in H, quartum, qui ex I, tertio in I, secundum. Factus est autem M, Zensifensus ex G, in H. Idè ergo M, fiet

fiat ex I, in I, suum cubum : ideoq. I, erit $\sqrt[3]{8}$ numeri M. & sic de ceteris. quod erat demonstrandum.

QVAMVIS autem in exemplo positi sint numeri rationales, idem tamen verum etiam est in numeris irrationalibus, vt Franciscus Maurolicus in sua Arithmetica speculatiua docuit. quod & in hac formula cernitur, in qua eadem demonstratio locum habet. Nam quemadmodum propositiones lib. 7. Eucl. demonstratæ sunt in numeris fractis, ita eadem ostenduntur in numeris surdis. V.g. quia A, multiplicans A, & C, fecit B, & I: erit ex defin. 15. lib. 7. tam B, ad A, quam I, ad C, vt A, ad unitatem. quamuis proportio hæc sit irrationalis. Igitur erit B, ad A, vt I, ad C: Et permutando B, ad I, vt A, ad C; ac proinde A, multiplicans duos A, & C, fecit duos B, & I, qui eandem proportionem habent, quam multiplicati A, & C. vt vult propof. 17. lib. 7. Eademq. ratio est de ceteris propositionibus lib. 7. Eucl.

M, 225. vel $\sqrt[3]{8}$ 50625

G, 9. vel $\sqrt[3]{8}$ 81

H, 25. vel $\sqrt[3]{8}$ 625

I, $\sqrt[3]{8}$ 3375

E, $\sqrt[3]{8}$ 27

F, $\sqrt[3]{8}$ 125

K, 15. vel $\sqrt[3]{8}$ 225

B, 3. vel $\sqrt[3]{8}$ 9

D, 5. vel $\sqrt[3]{8}$ 25

A, $\sqrt[3]{8}$ 3

C, $\sqrt[3]{8}$ 5

RECTE etiam diuidi radicem per radicem, si præceptum traditum seruetur, demonstratione non indiget: quippe cum Quotiens multiplicatus per diuisorem producat numerum diuisum. Vt quia $\sqrt[3]{8}$ 15. diuisa per $\sqrt[3]{8}$ 3. Quotientem facit $\sqrt[3]{8}$ 5. Et $\sqrt[3]{8}$ 5. ducta in $\sqrt[3]{8}$ 3. facit $\sqrt[3]{8}$ 15. vt demonstratum est, dubitandum non est, recte factam esse diuisionem.

IMMO rite fieri multiplicationem, diuisionemq. radicem surdarum eo modo, quem præscripsimus, abunde nos docere possunt radices rationales: quippe quæ eo modo multiplicatæ, atque diuise procreent veros numeros productos, ac Quotientes. Nam ex $\sqrt[3]{8}$ 4. in $\sqrt[3]{8}$ 49. fit $\sqrt[3]{8}$ 196. hoc est 24. Et ex diuisione $\sqrt[3]{8}$ 196. per $\sqrt[3]{8}$ 4. fit Quotiens $\sqrt[3]{8}$ 49. id est, 7. Item ex $\sqrt[3]{8}$ 27. fit $\sqrt[3]{8}$ 216. nimirum 6. Et ex diuisione $\sqrt[3]{8}$ 216. per $\sqrt[3]{8}$ 6. fit Quotiens $\sqrt[3]{8}$ 27. nimirum 3. &c.

L E M M A.

UTRUM dua radices surdæ commensurabiles sint nec ne; & quam proportionem inter se habeant, cognoscere.

DIVIDATUR vnâ radix per alteram. Si enim Quotiens fuerit ratio-

An dua radi- rationalis, ipse radices comensurabiles erunt, proportionēq. habe-
es sint com- bunt inter se, quā Quotiens ad unitatē. Vel si Quotiens est minutia,
mensurabiles, quam numerator minutie ad denominatorem. Ve quoniam si diui-
& quam ha- datur $\text{Jg } 12.$ per $\text{Jg } 3.$ fit Quotiens $\text{Jg } 4.$ hoc est, 2. erunt $\text{Jg } 12.$ &
beant propor- $\text{Jg } 3.$ comensurabiles, habebuntq. proportionem duplam, nimi-
tionē, quo po- rum 2. ad 1.
ssō cognosca-
tur.

SIC etiam diuisa $\text{Jg } 3.$ per $\text{Jg } 12.$ fit Quotiens $\text{Jg } \frac{1}{4}.$ vel $\text{Jg } \frac{1}{2}.$
 hoc est, $\frac{1}{4}.$ Sunt ergo $\text{Jg } 3.$ & $\text{Jg } 12.$ comensurabiles, earumq.
 proportio eadem est, quæ $\frac{1}{2}.$ ad 1. hoc est 1. ad 2. numeratoris ad
 denominatorem. Nam per propos. 1. Minutiarum ad finem lib. 9.
 Eucl. eadem est proportio numeratoris minutie cuiusvis ad eiusdē
 denominatorem, quæ ipsius minutie ad unitatem.

ITEM $\text{Jg } 18.$ & $\text{Jg } 8.$ comensurabiles erunt, proportionemq.
 habebunt, quam 3. ad 2. nimirum sesquialteram. quod maiore di-
 uisa per minorem, Quotiens fit $\text{Jg } 2\frac{1}{2}.$ vel $\text{Jg } \frac{5}{2}.$ hoc est, $\frac{5}{2}.$ Diuisa
 autem $\text{Jg } 8.$ per $\text{Jg } 18.$ fit Quotiens $\text{Jg } \frac{2}{9}.$ hoc est $\frac{2}{9}.$ Sunt ergo $\text{Jg } 8.$
 & $\text{Jg } 18.$ comensurabiles, proportionemq. habent, quam 2. ad 3.

RVRVSVS comensurabiles erunt $\text{Jg } 75.$ & $\text{Jg } 48.$ Nam diuisa
 illa per hanc, fit Quotiens $\text{Jg } 1\frac{3}{4}.$ vel $\text{Jg } \frac{5}{4}.$ id est, $\frac{5}{4}.$ proportio-
 nem autem habebunt, quam 5. ad 4.

ITA quoque reperiuntur esse comensurabiles $\text{Jg } 9.$ & $\text{Jg } 4.$
 proportionemq. habere, quam 3. ad 2.

PRAETEREA $\text{Jce } 120.$ & $\text{Jce } 135.$ comensurabiles sunt: quia
 illa per hanc diuisa, fit Quotiens $\text{Jce } 2\frac{1}{5}.$ vel $\text{Jce } \frac{11}{5}.$ id est, $\frac{11}{5}.$
 estq. earum proportio sesquitercia, nimirum 4. ad 3.

EADEM ratione comensurabiles sunt $\text{Jce } 162.$ & $\text{Jce } 108.$
 habentq. proportionem, quam 7. ad 3. nimirum duplam sesquiter-
 tium, si maior cum minore conferatur. Diuisa namq. maiore per
 minorem, fit Quotiens $\text{Jce } 1\frac{2}{3}.$ vel $\text{Jce } \frac{5}{3}.$ hoc est, $\frac{5}{3}.$

COMMENSVRABILES quoque sunt $\text{Jce } 6000.$ & $\text{Jce } 1058.$
 habentq. proportionem, quem 10. ad 7. Diuisa enim priore per po-
 steriorem, fit Quotiens $\text{Jce } 2\frac{1}{7}.$ vel $\text{Jce } \frac{15}{7}.$ hoc est, $\frac{15}{7}.$

NON secus comensurabiles erunt $\text{Jg } 3888.$ & $\text{Jg } 243.$ quia
 ex diuisione prioris per posteriorem fit Quotiens $\text{Jg } 16.$ hoc est 2.
 Habent ergo proportionem duplam.

EODEM modo comensurabiles erunt $\text{Jg } 19683.$ & $\text{Jg } 243.$
 habebuntq. proportionem triplam: quia ex diuisione prioris per
 posteriorem prodit Quotiens $\text{Jg } 81.$ hoc est, 3.

DENIQUE comensurabiles etiam erunt $\text{Jg } 19683.$ & $\text{Jg } 3888.$ proportionemq. habebunt sesquialteram. quia ex diuisione
 fit Quotiens $\text{Jg } 5\frac{1}{3}.$ vel $\text{Jg } \frac{16}{3}.$ id est, $\frac{16}{3}.$

IAM vero si ex diuisione gignatur numerus surdus, vel irratio-
 nalis, radices incommensurabiles erunt, proportionemq. habebunt ir-
 rationalem. Cuiusmodi sunt $\text{Jg } 48.$ & $\text{Jg } 8.$ quia ex diuisione ori-
 tur Quotiens $\text{Jg } 6.$ irrationalis, cum 6. non habeat radicem qua-
 dratam: habent tamen proportionem, quam $\text{Jg } 6.$ ad 1.

INCOMMENSVRABILES quoque erunt $\text{Jce } 32.$ & $\text{Jce } 18.$ Nam
 ex

ex diuisione gignitur Quotiens $\sqrt{16}$ vel $\sqrt{4}$, qui licet habeat radicem quadratam $\frac{1}{2}$, cubicam tamen non habet. Erit autem earum proportio eadem, quæ $\sqrt{16}$ ad $\sqrt{4}$ vel $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{1}$.

QUANDO radices sunt diuersorum generum, reducenda prius sunt ad eandem denominationem. Ut si dentur $\sqrt[3]{64}$ & $\sqrt{27}$. Reductis ad eandem denominationem, nimirum ad $\sqrt[3]{64}$ & $\sqrt[3]{27}$ 729. si posterior per priorem diuidatur, fit Quotiens $\sqrt[3]{27}$ hoc est $\sqrt[3]{27}$ id est $\frac{3}{2}$, sunt ergo $\sqrt[3]{64}$ & $\sqrt{27}$ commensurabiles, habetq. posterior ad priorem proportionem, quam 3 ad 2.

EST Lemma hoc pernecessarium ad radicem additionem, subtractionemque de qua in duabus propositionibus sequentibus.

DE ADDITIONE RADICVM simplicium. Cap. XIX.

QUANDO addendæ sunt inter se duæ, vel plures radices æquales, multiplicanda est vna earum per 2, vel 3, aut 4, &c. prout radices fuerint 2, vel 3, aut 4, &c. Productus enim numerus erit summæ illarum radicum, vt cap. præcedenti diximus. Ut summa ex $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$ collecta est $\sqrt{24}$. Nam $\sqrt{6}$ duplicata, hoc est, multiplicata per 2, facit $\sqrt{24}$. Item $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$ faciunt $\sqrt{54}$ propterea quod $\sqrt{6}$ triplicata, id est, multiplicata per 3, facit $\sqrt{54}$ & sic de alijs.

Additio radicū equalium.

QUANDO autem duæ radices inæquales eiusdem speciei addendæ inter se sunt, experiendum prius est, per Lemma præcedens, an sint commensurabiles, an vero incommensurabiles: idemq. faciendum est, si radices sint diuersarum denominationum; postquam ad eandem denominationem fuerint reuocata. Et si quidem deprehendantur esse incommensurabiles, non poterunt in vnam summam colligi, ita vt ex illis vna radix simplex conficiatur, sed addendæ sunt per interpositionem signi additorum +. Ut ex $\sqrt{6}$ & $\sqrt{11}$ fit summa $\sqrt{6} + \sqrt{11}$. Vel $\sqrt{11} + \sqrt{6}$. Item ex 8 & $\sqrt{7}$ fit summa $8 + \sqrt{7}$ vel $\sqrt{7} + 8$. Sic ex $\sqrt{9}$ & $\sqrt{20}$ fit summa $\sqrt{9} + \sqrt{20}$.

Additio radicū incommensurabilium.

RADICES tamen quadratæ incommensurabiles addi inter se possunt, hoc etiam modo. Ad summam quadratorum addatur duplum eius, quod fit ex vna radice in aliam. Summæ enim huius collectæ radix quadrata erit summa propositarum duarum radicum. Sint addendæ $\sqrt{6}$ & $\sqrt{11}$. Quadrati numeri 6 & 11 faciunt 17. Et ex $\sqrt{6}$ & in $\sqrt{11}$ fit $\sqrt{66}$ cuius duplum est $\sqrt{264}$. Summa ergo ex $\sqrt{6}$ & $\sqrt{11}$ collecta erit radix quadrata huius aggregati 17 + $\sqrt{264}$ nimirum $\sqrt{17 + \sqrt{264}}$ Ratio huius operationis ex

Additio radicū quadratarū per propositionem 4. lib. 2. Eucl.

propof. 4. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam fi linea aliqua recta diuifa fit in $\sqrt{3} 6$. & $\sqrt{3} 11$. erunt duo quadrata harum partium 6. & 11. quibus fi addatur productum ex $\sqrt{3} 6$ in $\sqrt{3} 11$. bis, fiet totum quadratū totius lineæ binomium hoc, $17 + \sqrt{3} 264$. Huius ergo radix quadrata, nimirum $\sqrt{3} (17 + \sqrt{3} 264)$ erit summa quaerita, ex $\sqrt{3} 6$. & $\sqrt{3} 11$. collecta. Quo pacto autem ex binomijs radix quadrata fit extrahenda, quando res exigit, & ratio postulat, cap. 27. dicemus: quæ tamen hic inuenietur esse $\sqrt{3} 11 + \sqrt{3} 6$. quæ non differt a summa radicum propofitarum, si per signum + copulentur. Hæc autē ratio addendi in numeris rationalibus euident quodque est. Sint enim addendæ $\sqrt{3} 4$. & $\sqrt{3} 9$. ubi manifestum est, summam collectā esse 5. Quadrati 4. & 9. faciunt 13. Et ex $\sqrt{3} 4$. in $\sqrt{3} 9$. fit $\sqrt{3} 36$. cuius duplum est $\sqrt{3} 144$. Summa ergo ex $\sqrt{3} 4$. & $\sqrt{3} 9$. collecta, erit radix quadrata huius aggregati $13 + \sqrt{3} 144$. nimirum $\sqrt{3} (13 + \sqrt{3} 144)$. Constat autem, 13. cum $\sqrt{3} 144$. id est, cum 12. conficere 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc etiam artificio addi possunt radices quadratæ commensurabiles, sed semper produceretur radix simplex in summa. Vt si addendæ sint $\sqrt{3} 3$. & $\sqrt{3} 12$. Diuifa hac per illam, fit Quotiens $\sqrt{3} 4$. rationalis: ac proinde commensurabiles sunt. Ergo si earum quadrati 3. & 12. in vnā summam colligantur, fit numerus 15. Et si vna radix in alteram ducatur, fit numerus $\sqrt{3} 36$. cuius duplum $\sqrt{3} 144$. cum 15. facit $15 + \sqrt{3} 144$. Huius igitur radix quadrata, nimirum $\sqrt{3} (15 + \sqrt{3} 144)$ hoc est, $\sqrt{3} 27$. summa erit collecta ex $\sqrt{3} 3$. & $\sqrt{3} 12$.

Additio radicum commensurabilium. AT. verò si radices cuiuscunque generis addendæ fuerint inuentæ commensurabiles, hoc est, si diuifa vna per alteram, Quotiens fuerit rationalis siue integer, siue fractus, aut integer cum fracto, & si quidem integer, subscripta vnitate, vt fiat fractio: ita agemus. Quam proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propofitarum radicum ad talem partem minoris radicis, qualis pars est 1. minoris numeri fractionis. Quare si talis pars sumatur ex minore radice, eaq. multiplicetur per denominatorem proportionis illius multiplicis, procreabitur summa propofitarum radicum. Item quā proportionem multiplicem habet summa ex numeratore, ac denominatore collecta ad 1. eam quoque habebit summa propofitarum radicum ad talem partem maioris radicis, qualis pars est 1. maioris numeri fractionis. Quare si talis pars ex maiore radice accipiat, eaq. ducatur in denominatorem proportionis illius multiplicis, produceretur propofitarum radicum summa.

Vt si addendæ sint $\sqrt{3} 8$. & $\sqrt{3} 18$. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{3} 2\frac{1}{2}$. siue $\sqrt{3} \frac{5}{2}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Quia igitur summa minorum fractionis $\frac{5}{2}$. nimirum 5. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quineuplam, habebit quoque quintuplam proportionem summa datarum radicum ad semissem minoris radicis. Est autem $\sqrt{3} 2$. semissem minoris radicis

$\sqrt[4]{8}$. Diuisa namq. $\sqrt[4]{8}$. per 2. hoc est, per $\sqrt[4]{4}$. fit Quotiens $\sqrt[4]{2}$. Quamobrem si $\sqrt[4]{2}$. multiplicetur per 5. denominatorem proportionis quintuplæ, hoc est, per $\sqrt[4]{25}$. gignetur $\sqrt[4]{50}$. summa ex $\sqrt[4]{2}$. & $\sqrt[4]{18}$. collecta.

ITEM quia summa numerorum fractionis $\frac{1}{3}$. id est, 5. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis proportionem habet quintuplam, eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radices. Est autem $\sqrt[4]{2}$. tertia pars maioris radices $\sqrt[4]{18}$. Diuisa namq. $\sqrt[4]{18}$. per 2. hoc est, per $\sqrt[4]{4}$. fit Quotiens $\sqrt[4]{2}$. Si igitur $\sqrt[4]{2}$. ducatur in 5. denominatorem quintuplæ proportionis, id est, in $\sqrt[4]{25}$. procreabitur eadem summa $\sqrt[4]{50}$.

EADEM summa conflabitur, si minor radix, $\sqrt[4]{8}$. diuidatur per maiorem $\sqrt[4]{18}$. Erit enim Quotiens $\sqrt[4]{\frac{2}{9}}$. hoc est, $\frac{1}{3}$. Ergo rursus quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{1}{3}$. ad 1. tertiam partem maioris numeri fractionis habet proportionem habet quintuplæ, ita quoque eandem habebit summa radicum propositarum ad tertiam partem maioris radices, $\sqrt[4]{18}$. hoc est, ad $\sqrt[4]{2}$. Item quemadmodum 5. summa numerorum fractionis $\frac{1}{3}$. ad 1. semissem minoris numeri fractionis, proportionem habet quintuplam, ita quoque eandem habebit summa radicum $\sqrt[4]{8}$. & $\sqrt[4]{18}$. ad semissem minoris radices, $\sqrt[4]{8}$. nimirum ad $\sqrt[4]{2}$. &c.

RVRSVS sint addendæ $\sqrt[4]{3}$. & $\sqrt[4]{12}$. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens $\sqrt[4]{4}$. hoc est 2. Supposita ergo unitate, ut fiat fractio $\frac{1}{2}$. quoniam summa 3. numerorum huius fractionis ad 1. proportionem habet triplam, estq. 1. æqualis minori numero fractionis 1. habebit quoque summa datarum radicum ad minorem radicem $\sqrt[4]{3}$. proportionem triplam. Quare si $\sqrt[4]{3}$. minor radix ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, nimirum in $\sqrt[4]{9}$. fiet summa $\sqrt[4]{27}$.

ITEM quia prædicta summa 3. numerorum fractionis $\frac{1}{3}$. ad 1. proportionem habet triplam, estq. 1. semissem maioris numeri 2. fractionis, habebit quoque summa radicum propositarum ad semissem maioris radices $\sqrt[4]{12}$. hoc est, ad $\sqrt[4]{3}$. proportionem triplam. Si igitur $\sqrt[4]{3}$. semissem videlicet maioris radices, ducatur in 3. denominatorem proportionis triplæ, id est, in $\sqrt[4]{9}$. producet eadem summa $\sqrt[4]{27}$.

DEMONSTRATIO huiuscæ rei est, quod datis quatuor numeris proportionalibus, ita se habeat summa priorum duorum ad maiorem vel minorem ipsorum, ut summa duorum posteriorum ad maiorem, vel minorem ipsorum. Item ita summa priorum duorum ad quamlibet partem maioris, vel minoris, ut summa duorum posteriorum ad similem partem maioris, vel minoris. Ut datis numeris 6.4. & 12.12. proportionalibus: erit componendo, ut 10. ad 4. ita 30. ad 12. Et per conuersionem rationis, ut 10. ad 6. ita 30. ad 18. Quia vero est quoque ut 4. ad 1. quartam partem, ita 12. ad 3. quartam partem: erit ex æquo, ut 10. ad 1. ita 30. ad 3. Item quia est quoque, ut 6. ad 1. sextam partem, ita 18. ad 3. sextam partem: erit quoque

quodque ex æquo, vt 16. ad 1. ita 36. ad 3. Cum ergo ex diuisione vnius radicis per aliam gignatur denominator proportionis vnius ad alteram, ita vt eadem proportio sit vnius ad alteram, quæ numeratoris fractionis ad denominatorem; (supposita 1. quando Quotiens est numerus integer) manifesta euadit ratio additionis radicum, & sine admiratione dignum est, additionem fieri præcisam in ijs, quæ præcisam, & cognitam quantitatem non habent.

HINC fit, summam quoque ex duabus radicibus commensurabilibus colligi, si per denominatorem proportionis, quam habet summa numerorum fractionis $\frac{1}{2}$. nimirum 5. ad maiorem fractionis numerum 3. vel ad minorem 2. hoc est, per $\frac{1}{2}$. vel per $\frac{1}{3}$. multiplicetur maior radix $\sqrt{8}$ 18. vel minor, $\sqrt{2}$ 8. ita vides ex $\sqrt{8}$ 18. in $\frac{1}{2}$. hoc est, in $\sqrt{2}$ 8. Vel ex $\sqrt{2}$ 8. in $\frac{1}{3}$. id est, in $\sqrt{8}$ 18. gigni $\sqrt{8}$ 300 vt prius.

SINT rursus addenda $\sqrt{8}$ 72. & $\sqrt{2}$ 18. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\sqrt{2}$ 4. hoc est, 2. & supposita 1. fit $\frac{1}{2}$. denominator proportionis duplæ. Sicut igitur summa 3. ad 2. habet proportionem triplam, ita quoque summa duarum radicum ad minorem $\sqrt{8}$ 18. tripla est. Si ergo ducatur $\sqrt{8}$ 18. in 3. id est, in $\sqrt{2}$ 9. fiet $\sqrt{8}$ 162. pro summa radicum $\sqrt{8}$ 72. & $\sqrt{2}$ 18. Item sicut eadem summa 3. numerorum fractionis $\frac{1}{2}$. ad 2. habet proportionem sesquialteram, cuius denominator est $\frac{1}{2}$. ita quoque summa quæ sita erit ad maiorem radicem $\sqrt{8}$ 72. sesquialtera. Si ergo $\sqrt{8}$ 72. ducatur in $\frac{1}{2}$. id est, in $\sqrt{2}$ 2. productum eadem summa $\sqrt{8}$ 162. cum $\sqrt{2}$ 18. summa maiorem radicem $\sqrt{8}$ 180. producat.

POSSUNT etiam addi radices commensurabiles per eodem modo, per regulam auream, & in idem res recidet. Cum enim in primo exemplo sit, vt 5. summa numerorum fractionis $\frac{1}{2}$. ad minorem numerum 2. vel ad maiorem 3. ita summa radicum ad radicem minorem, vel maiorem, vt ostendimus: erit conuertendo quoque, vt 2. vel 3. ad summam 5. ita minor radix, vel maior ad radicem summam. Si ergo fiat, $\sqrt{2}$ 18. ita $\sqrt{8}$ 8. ad aliud. Vel $\sqrt{8}$ 18. ita $\sqrt{2}$ 8. ad aliud. procreabitur summa $\sqrt{8}$ 30. vt prius.

In postremo autem exemplo, in quo denominator proportionis fuit $\frac{1}{2}$. si fiat,

$\sqrt{2}$ 18. ita $\sqrt{8}$ 18. ad aliud. Vel $\sqrt{8}$ 18. ita $\sqrt{2}$ 18. ad aliud. gignetur summa $\sqrt{8}$ 162. quæ prius.

SINT rursus addenda $\sqrt{8}$ 2. & $\sqrt{2}$ 8. Ex diuisione $\sqrt{8}$ 8. per $\sqrt{2}$ 2. fit Quotiens rationalis $\sqrt{2}$ 4. id est, 2. & supposita 1. fit $\frac{1}{2}$. Si ergo fiat,

$\sqrt{2}$ 18. ita $\sqrt{8}$ 2. ad aliud. Vel $\sqrt{8}$ 2. ita $\sqrt{2}$ 18. ad aliud. colligetur summa $\sqrt{8}$ 18. ita $\sqrt{2}$ 18.

Sint quoque addenda $\sqrt{2}$ 162. & $\sqrt{8}$ 2058. Diuisa maiore radice per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{2}$ 12 $\frac{1}{2}$. vel $\sqrt{2}$ 24 $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Si igitur fiat,

$\sqrt{2}$ 18. ita $\sqrt{8}$ 2058. ad aliud. gignetur summa $\sqrt{8}$ 37002. quæ prius.

Pulebra ratio
addendi radi-
ces commen-
surabiles.

ad aliud
ex diuisione
vnius radicis
per alteram

Vt 3.

Vt 7. ad 10. ita $\sqrt{70}$ 162. ad aliud. Vel

Vt 7. ad 10. ita $\sqrt{70}$ 1058. ad aliud: reperietur summa $\sqrt{70}$ 6000.

ITEM addendæ sint $\sqrt{70}$ 8. & $\sqrt{70}$ 27. qui numeri rationales sunt. Ex diuisione $\sqrt{70}$ 27. per $\sqrt{70}$ 8. fit Quotiens rationalis $\sqrt{70}$ $\frac{27}{8}$. vel $\sqrt{70}$ $\frac{27}{8}$. hoc est, $\frac{27}{8}$. Si ergo fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{70}$ 8. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{70}$ 27. ad aliud: prodibit summa $\sqrt{70}$ 125. hoc est 5.

RVRVS addendæ sint $\sqrt{70}$ 243. & $\sqrt{70}$ 3888. Proportio est $\frac{3}{4}$. Si ergo fiat,

Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{70}$ 243. ad aliud. Vel

Vt 2. ad 3. ita $\sqrt{70}$ 3888. ad aliud: exurget summa $\sqrt{70}$ 19683.

POSTREMO sint addendæ $\sqrt{70}$ 4. & $\sqrt{70}$ 27. qui numeri sunt rationales. Reductis hinc radicibus ad eandem denominationem, vt ad $\sqrt{70}$ 64. & $\sqrt{70}$ 729. Ex diuisione maioris per minorem fit Quotiens rationalis $\sqrt{70}$ $\frac{27}{4}$. hæc est, $\frac{27}{4}$. Si igitur fiat,

Vt 2. ad 5. ita $\sqrt{70}$ 64. ad aliud. Vel

Vt 3. ad 5. ita $\sqrt{70}$ 729. ad aliud: procreabitur summa $\sqrt{70}$ 15625 hoc est, 5.

ADDE quaque possunt radices commensurabiles hoc modo. Diuisa maiore radice per minorem, addatur Quotienti rationali unitas. Si namq. numerus conflatus ducatur in minorem radicem, procreabitur summa quaesita. Nam si Quotiens ducatur in minorem radicem, id est, in diuisorem, producetur maior radix, quæ diuisa fuit: Et si unitas ducatur in eundem diuisorem, id est, in minorem radicem, producetur minor radix: atque adeo duo producti summam duarum radicum facient. Cum ergo, per theor. 1. ad propos. 1. lib. 9. Eucl. quod respondet propos. 1. lib. 2. idem numerus fiat ex minore radice in summam ex Quotiente, & unitate collectam, qui ex eadem radice minore in Quotientem, & in unitatem sunt seorsum; producetur quoque summa duarum radicum, datarum ex minore radice in summam ex Quotiente, & unitate collectam.

SINT enim addendæ $\sqrt{8}$ 8. & $\sqrt{8}$ 18. Diuisa maiore per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ $\frac{9}{2}$, id est, $\frac{9}{2}$. & addita 1 fit $\frac{11}{2}$. Et quoniam ex $\frac{11}{2}$ in $\sqrt{8}$ fit $\sqrt{8}$ 50. erit $\sqrt{8}$ 50. summa duarum radicum $\sqrt{8}$ 2. & $\sqrt{8}$ 18.

ITEM sint addendæ $\sqrt{16}$ 162. & $\sqrt{16}$ 2058. Ex diuisione nascetur Quotiens rationalis $\frac{3}{4}$. & addita 1. fit numerus $\frac{7}{4}$. qui ductus in $\sqrt{16}$ 162. gignit $\sqrt{16}$ 6000. summam duarum radicum propositarum.

QUANDO duæ radices, vel plures, per vnam aliquam eiusdem generis radicem diuidi possunt, ita vt Quotientes sint rationales, coniunguntur in vnam summam, si summa Quotientum ducatur in communem illam radicem diuidentem. Productus enim numerus erit summa quaesita. Nam cum, per theorema proxime citatum, numerus, qui fit ex radice diuidente in Quotientum summam, equalis sit ipsi, qui ex eadem diuidente radice sunt in singulos Quotientes, hoc est, omnibus simul radicibus propositis; liquido constat,

Alia ratio pul-
chra addendi
radices com-
mensurabiles.

et ubi dicitur
ex eo de arith.
lib. 2. c. 11.
et ubi dicitur
quodam lib.
arithmetic.

et ubi dicitur
quodam lib.
arithmetic.
et ubi dicitur
quodam lib.
arithmetic.

Addere plu-
res radices ho-
mogenas commu-
nem mensuram
vnam radicem
eiusdem generis

ex radice diuidente in summam Quotientum gigni summam radicem proposituram.

Vt si addendæ sint $\sqrt{8}$. & $\sqrt{18}$. Si vtræque diuidatur per $\sqrt{2}$. producentur Quotientes rationales $\sqrt{4}$. & $\sqrt{9}$. hoc est 2. & 3. quorum summa 5. si ducatur in communem diuisorem, id est, in $\sqrt{2}$. procreabitur summa $\sqrt{50}$.

ITEM sint addendæ $\sqrt{8}$. $\sqrt{50}$. & $\sqrt{72}$. si diuidantur singulæ per $\sqrt{2}$. fient Quotientes rationales, $\sqrt{4}$. $\sqrt{25}$. & $\sqrt{36}$. hoc est, 2. 5. & 6. quorum summa 13. ducta in $\sqrt{2}$. communem diuisorem, producet summam $\sqrt{338}$.

SINT tandem addendæ $\sqrt{8}$. $\sqrt{32}$. & $\sqrt{48}$. Diuidantur singulæ per $\sqrt{2}$. fient Quotientes $\sqrt{4}$. $\sqrt{16}$. & $\sqrt{24}$. quorum priores duo sunt rationales, nimirum 2. & 4. at posterior irrationalis. Non ergo hoc modo in vnam colligi summam poterunt, sed solum duæ priores facient summam $\sqrt{72}$. atque ita ex omnibus tribus fiet summa $\sqrt{72} + \sqrt{48}$.

DE SUBTRACTIONE radicum simplicium. Cap. XX.

Subtractio radicum ab æquali radice.
Subtractio radicum inæqualium.



Subtractio radicum quadratarum per propof. 7. lib. 2. Eucl.

Subtractio radicum quadratarum per propof. 7. lib. 2. Eucl.

VANDO radix aliqua a radice æquali subtrahitur, nihil relinquitur. Vt $\sqrt{12}$. a $\sqrt{12}$. Item $\sqrt{100}$. a $\sqrt{100}$. subtracta relinquit $\sqrt{0}$. vel $\sqrt{0}$.

QVOD si radices fuerint incommensurabiles, (quando nimirum, diuisa maiore per minorem, Quotiens est irrationalis) non poterit fieri subtractio, nisi per signum subtractorum —. Vt $\sqrt{3}$. ex $\sqrt{10}$. relinquit $\sqrt{10} - \sqrt{3}$. Item $\sqrt{10}$. ex $\sqrt{50}$. relinquit $\sqrt{50} - \sqrt{10}$.

QVANDO tamen radices sunt quadratæ, & incommensurabiles, poterit minor a maiore subtrahi hoc etiam modo. A summa quadratorum subducatur, quod ex vna radice in aliam bis fit. Radix enim quadrata eius, quod relinquitur, erit residuum subtractionis. Sit subtrahenda $\sqrt{12}$. a $\sqrt{20}$. Quadrati numeri 12. & 20. faciunt 32. Et ex $\sqrt{12}$. in $\sqrt{20}$. fit $\sqrt{240}$. cuius duplum $\sqrt{960}$. detractum ex summa quadratorum relinquit 32 — $\sqrt{960}$. Radix ergo quadrata huius relictæ, nimirum $\sqrt{32 - \sqrt{960}}$. erit id, quod relinquitur, detracta $\sqrt{12}$. ex $\sqrt{20}$. Huius operationis ratio ex propof. 7. lib. 2. Eucl. colligitur. Nam si tota aliqua linea fit $\sqrt{20}$, quæ secetur ita, vt vna pars sit $\sqrt{12}$. erunt duo quadrati numeri 10. & 12. nimirum 32. æquales numero $\sqrt{960}$. qui fit bis ex $\sqrt{12}$. in $\sqrt{20}$. vna cum quadrato reliquæ partis lineæ. Si ergo numerus, qui fit bis ex $\sqrt{12}$. in $\sqrt{20}$. dematur ex 32. summa quadratorum, reliquum fiet quadratum reliquæ partis lineæ. Igitur quadratum huius partis erit 32 — $\sqrt{960}$. Ac proinde residuum, quod relinquitur

tur post subtractionem $\sqrt{8}$ 12. ex $\sqrt{8}$ 20. erit $\sqrt{8}$ (32— $\sqrt{8}$ 260.) Quo pacto autem radix quadrata, quando res exigit, ex Apotomis, siue Residuis fit extrahenda, dicemus cap. 27. quæ tamen hic erit $\sqrt{8}$ 20— $\sqrt{8}$ 12. non differens a residuo, si $\sqrt{8}$ 12. a $\sqrt{8}$ 20. subtrahatur per interpositionem signi—. Verum hæc ratio subtrahendi perspicua, quoque est in numeris rationalibus. Sit enim auferenda $\sqrt{8}$ 4. a $\sqrt{8}$ 49. ubi liquido constat, residuum esse 5. Quadrati 4. & 49. efficiunt 53. Et ex $\sqrt{8}$ 4. in $\sqrt{8}$ 49. fit $\sqrt{8}$ 196. cuius duplum $\sqrt{8}$ 784. ablatum ex 53. summa quadratorum relinquit 53— $\sqrt{8}$ 784. ac proinde residuum quæsitum erit $\sqrt{8}$ (53— $\sqrt{8}$ 784.) Constat autem, esse 53— $\sqrt{8}$ 784. hoc est, 53—28. eam 25. cuius radix quadrata est 5.

IMMO hoc eodem artificio subtrahi poterit radix quadrata a radice quadrata, si fuerint commensurabiles: sed tunc residuum, erit radix simplex. Vt si subducenda sit $\sqrt{8}$ 3. a $\sqrt{8}$ 27. Diuisa hæc per illam, fit Quotiens $\sqrt{8}$ 9. rationalis, ac proinde commensurabiles sunt. Summa quadratorum 3. & 27. est 30. a qua si dematur $\sqrt{8}$ 324. nimirum duplum eius, quod fit ex $\sqrt{8}$ 3. in $\sqrt{8}$ 27. remanebunt 30— $\sqrt{8}$ 324. Igitur $\sqrt{8}$ (30— $\sqrt{8}$ 324.) hoc est, $\sqrt{8}$ 12. erit residuum, subtractionis.

Si autem radices cuiuscunque generis propositæ fuerint cõmensurabiles, hoc est, si diuisa maiore per minorem, Quotiens fuerit rationalis, ita tamen, vt si fuerit numerus integer, ei supponatur vnitas, vt fiat fractio, ita agemus. Quam proportionem habet numerus, qui relinquitur, detracto denominatore fractionis ex numeratore, hoc est, quam habet differentia numerorum fractionis ad 1. eam quoque habebit residuum post subtractionem minoris radice ex maiore ad talem partem minoris, qualis pars est 1. denominatoris fractionis: vel eam quoque proportionem habebit dictum residuum ad talem partem maioris radice, qualis pars est 1. numeratoris fractionis. Quocirca si talis pars capiatur ex minore radice, vel maiore, eaq. per denominatorem proportionis illius multiplicetur, producetur residuum, quod quæritur.

SIT subtrahenda $\sqrt{8}$ 8. ex $\sqrt{8}$ 50. Ex diuisione maioris per minorem, fit Quotiens rationalis $\sqrt{8}$ 24. hoc est, 4. Quia ergo differentia numerorum fractionis $\frac{4}{5}$. est 3. quod detracto denominatore 2. ex numeratore 5. remaneant 3. quæ differentia ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel quintam partem maioris numeri fractionis, proportionem habet triplam: habebit quoque residuum, quod relinquitur, dempta $\sqrt{8}$ 8. ex $\sqrt{8}$ 50. ad semissem minoris radice, nimirum ad $\sqrt{8}$ 2. vel ad quintam partem maioris radice, videlicet ad $\sqrt{8}$ 2. proportionem triplam. Si igitur $\sqrt{8}$ 2. ducatur in 3. hoc est, in $\sqrt{8}$ 9. producetur residuum $\sqrt{8}$ 18. quod desideratur.

IDEM residuum habebitur, si minor radix $\sqrt{8}$ 8. diuidatur per maiorem $\sqrt{8}$ 50. Fiet enim Quotiens $\sqrt{8}$ $\frac{5}{2}$. hoc est, $\frac{5}{2}$. Rursus ergo, quemadmodum 3. differentia numerorum fractionis ad 1. semissem minoris numeri fractionis, vel ad quintam partem maioris numeri fractionis proportionem habet triplam: ita quoque differentia

Subtractiora-
dicum com-
mensurabiliu.

Subtractiora-
dicum com-
mensurabiliu.

Subtractiora-
dicum com-
mensurabiliu.

rentia duarum radicum propositarum triplam habebit proportionē ad semissem minoris radice, vel ad quintam partem maioris, vide- licet ad $\frac{5}{2}$. Quare triplum $\frac{5}{2}$. nimirum $\frac{15}{2}$. erit differentia datarum radicum, id est, residuum post deductionem $\frac{5}{2}$. ex $\frac{50}{2}$. Demonstratio eadem est, quæ supra in additione adducta est.

HINC fit, residuum quoque produci, si per denominatorem pro- portionis, quam habet differentia numerorum fractionis, hoc est, reliquus numerus, dempto minore fractionis numero ex maiore, ad maiorem numerum fractionis, vel ad minorem, nimirum in propo- sito exemplo per $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. (nam $\frac{1}{2}$. est denominator proportionis, quam habet differentia numerorum fractionis, ad $\frac{5}{2}$. maiorem nu- merum fractionis: At $\frac{1}{3}$. denominator est proportionis, quam ea- dem differentia $\frac{3}{2}$. habet ad minorem numerum fractionis) multi- plicetur maior radix, vel minor. Ita vides ex ductu $\frac{50}{2}$. in $\frac{1}{2}$. vel ex ductu $\frac{50}{2}$. in $\frac{1}{3}$. gigni residuum $\frac{15}{2}$. idem, quod prius.

*Pulchra ratio
subtrahendi ra-
dices commo-
surabiles.*

SVBTRACTIO quoque radicum commensurabilium commo- dissimè fieri potest per regulam auream. Cum enim sit, ut differen- tia numerorum fractionis ad maiorem, vel minorem eiusdem frac- tionis numerum, ita residuum, quod queritur, ad radicem maio- rem, vel minorem: Et conuertendo, ut maior numerus fractionis, vel minor, ad differentiam numerorum fractionis, ita maior radix, vel minor ad residuum subtractionis: Si in dato exemplo fiat:

Ve 5. ad 3. ita $\frac{50}{2}$. ad aliud, Vel

Ve 2. ad 3. ita $\frac{50}{2}$. 8. ad aliud, producetur residuum quæsitum.

$\frac{50}{2}$ 18. SIC etiam si subtrahenda sit $\frac{162}{2}$ ex $\frac{6000}{2}$. Diuisa hac per illam, fit Quotiens rationalis $\frac{6000}{162}$. id est, $\frac{1000}{27}$. ubi differentia numerorum fractionis est 7. Si ergo fiat,

Ve 10. ad 7. ita $\frac{6000}{2}$. ad aliud. Vel

Ve 3. ad 7. ita $\frac{162}{2}$. ad aliud, gignetur residuum desideratum $\frac{1053}{2}$.

*Alia ratio
pulchra sub-
trahendi ra-
dices commo-
surabiles.*

SVBTRAHI etiam potest radix a radice, si sint commensurabiles, hac ratione. Diuisa maiore per minorem, dematur vnitas ex Quo- tiente rationali. Si namq. reliquus numerus in minorem radicem ducatur, prodibit residuum quæsitum. Nam si totus Quotiens in minorem radicem, id est, in diuisorem ducatur, producetur maior radix, quæ diuisa fuit. Cum ergo vnitas in minorem radicem faciat minorem radicem; liquido constat, si Quotiens, dempta prius vni- tate, ducatur in minorem radicem, gigni eandem maiorem radicem; minus minore radice, hoc est, differentiam radicum propositarum.

SIT subtrahenda $\frac{588}{2}$ 3888. a $\frac{19683}{2}$. Ex diuisione fit Quo- tiens rationalis $\frac{19683}{588}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Dempta 1. remanet $\frac{1}{2}$. quæ (re- uocata prius ad $\frac{588}{2}$ 14.) ducta in $\frac{588}{2}$ 3888. facit $\frac{19683}{2}$ 243. differ- entiam radicum propositarum.

*Alia subtrahendi ratio
quando radi-*

DENIQUE fieri poterit subtractio hoc alio modo. Diuidatur utraque radix per communem aliquam radicem eiusdem generis, ita ut Quotientes sint rationales, si fieri potest. Nam subtracto vno Quo-

Quarto, extractis radicibus, quas signum radicale indicat, quando extrahi possunt, delenda sunt signa radicalia, quorum radices extractæ sunt.

Quinto, ac ultimo pro extremis progressionis ultima ponendi sunt numeri dati, ac per minorem singuli termini medij multiplicandi.

V.g. si inter 5. & 20. statuendus sit vnus numerus medius, ascendendum est signum hoc radicale 5.

DEINDE diuiso maiore numero 20. per minorem 5. constituentem progressionem hæc trium terminorum 1. 4. 16. per Quotientem 4. progrediens.

Tertio cuilibet termino præfigendum signum 5. hoc modo 5. 1. 5. 4. 5. 16. erunt 3. hi termini continuè queque proportionales, cum sint radices quadrate numerorum 1. 4. 16. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus quadratis, sic stabit progressio 1. 2. 4.

Quinto, huius progressionis termini singuli per numerum minorem 5. multiplicandi sunt. Vnde sic stabit progressio 5. 10. 20. inuentusq. erit medius terminus proportionalis 10. quia 5. 10. 20. eisdem habent proportionem, quas 1. 2. 4. cum hos numeros idem numerus 5. multiplicans illos produxerit.

SINT rursus inter 6. & 48. inueniendi quinque medij proportionales. Hic ascendendum est signum 6.

DEINDE diuiso maiore numero 48. per minorem 6. instituenda est progressio septem terminorum per Quotientem 3. progrediens, hoc modo.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio cuilibet termino præponendum signum 6. ut hic.

6. 1. 6. 3. 6. 9. 6. 27. 6. 81. 6. 243. 6. 729.

eruntq. hi termini continuè quoque proportionales, cum sint radices Zensibicæ numerorum 1. 3. 9. &c. continuè proportionalium.

Quarto extractis radicibus, quæ extrahi possunt, & deletis signis, quorum radices extractæ sunt, sic stabit progressio.

1. 6. 3. 6. 3. 6. 3. 6. 3. 6. 3. 6. 3. 6. 3.

Quinto, ac ultimo, multiplicatis singulis huius progressionis terminis per 6. minorem numerum ex duobus propofitis, constitues sequentem progressionem cum quinque medijs terminis proportionalibus.

6. 6. 36. 139968. 6. 648. 6. 108. 6. 1944. 6. 1337408. 18.

eruntq. hi termini continuè proportionales, cum sint producti ex eodem numero 6. in numeros 1. 6. 3. 6. 3. &c. continuè proportionales.

QVOD autem hi termini sint continuè proportionales, probari experiendo etiam potest. Nam sumptis quibuscumque tribus proximis, tantum sit ex primo in tertium, quantum ex medio in se, ut

a Schol. 18.
septimi.

b Schol. 18.
septimi.

vult

vult propos. 20. lib. 7. Eucl. Ut sumptis hisce tribus $\text{Jce } 648. \text{ Jg } 108.$
 $\text{Jce } 1944.$ tam ex primo in tertium, quam ex medio in se, gignitur
 numerus 108. Nam ex $\text{Jg } 108.$ in se fit numerus 108. & ex $\text{Jce } 648.$
 in $\text{Jce } 1944.$ fit $\text{Jce } 129712.$ hoc est, 108. Item acceptis tribus hi-
 sce, 6. $\text{Jgce } 19968.$ $\text{Jce } 648.$ Ex medio in se quadrate fit Jgce
 $19191041024.$ hoc est, extracta radice quadrata 139968. productus
 numerus est $\text{Jce } 139968.$ (quia 139968. radicem cubicam non ha-
 bet.) qui etiam producitur ex 6. in $\text{Jce } 648.$ ut liquet.

S C H O L I V M.

SOLET sapenumero contingere, ut ex numero aliquo extrahenda sit ra-
 dix quadrata, vel cubica, qui eam non habet. Ne ergo frustra tempus in-
 sumatur, traduntur a nonnullis regula quadam, quibus facile cognoscantur
 numeri non quadrati, & non cubi.

Primum omnes numeri, qui ultimam figuram ad dexteram habent 2. vel
 3. vel 7. vel 8. non sunt quadrati: quia in numeris quadratis ultima figura
 necessarii debet esse una ex his. 1. 4. 5. 6. 9. 0.

Deinde nullus numerus, ex quo reiicilis 9. ut in probatione nouernaria fieri
 consuevit, non superest aliqua harum figurarum. 1. 4. 7. 0. quadratus est.

Tertio, numeri ultimam figuram habent 5. nisi eam precedat figura 2.
 cum alia figura pari, vel cum 0. quadratus esse nequit. Vt hi numeri 125.
 325. 67525. 89725. 100925. quadrati non sunt.

Quarto, numeri ultimam figuram habentes 1. vel 9. nisi eam antecedit
 figura par, aut 0. quadrati non sunt. Vt hi numeri 4371. 4379. 67899.
 75351. quadrati non sunt.

Quinto, numeri habentes ultimam figuram 4. nisi eam precedat alia fi-
 gura par, vel 0. quadrati non sunt, Vt hi numeri 6924. 70014. quadrati
 esse nequeunt.

Sexto, numeri habentes figuram ultimam 6. nisi eam antecedit figura im-
 par, quadrati non sunt. Vt numeri 5746. 7086. 34526. quadrati non
 sunt.

Septimo ac ultimo, numerus habens in fine plures figuras 0. sub numero
 impari, quadratus esse non potest. Vt numeri 460. 678000. 91010. qua-
 drati non sunt.

QUOD vero ad cubos attinet, nullus numerus erit cubus, si reiicilis 9. qui numeri
 non remanet 1. vel 8. vel 0. Itaq. 12009. non erit cubus, cum reiicilis 9. re-
 maneant 3.

Deinde numerus, cuius ultima figura est 2. vel 4. vel 8. si proxime ante-
 cedens figura non sit par, vel 0. non potest esse cubus. Vt numeri 34532.
 456174. 1100038. non sunt cubi.

Tertio nullus numerus habens in fine 0. vel 00. potest esse cubus. Vt hi nu-
 meri 1230. 100. 34600. cubi non sunt.

Quarto & ultimo, numerus habens ultimam figuram 5. nisi proxime an-
 tecedens figura sit 2. vel 7. cubus esse non poterit. Vt hi numeri. 361035.
 67895. 1120015. cubi non sunt.

Qui numeri
 no sint qua-
 drati.

Auger null
 abstrahido
 obitba de
 rudi 3. ou
 snolli

Qui numeri
 no sint cubi.

Itaq. antequam ad extractionem radice quadrata, vel cubica aggrediaris, operis periculum feceris, si prius per conditiones prædictas experiaris, an propositus numerus possit esse quadratus, aut cubus.

DE ADDITIONE AC SVBTRACTIONE numerorum irrationalium compositorum.

Cap. XXII.



CONFICITVR Algorithmus numerorum irrationalium compositorum ex radicibus simplicium. Algorithmo, dummodo pro additione, & subtractione, in memoriam reducantur regulæ illæ dux, quæ de signis + & — traditæ sunt cap. 4. videlicet.

I

Dux regulæ observandæ eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præpositi differunt. Tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit —, & ex — fit +.

2

Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis. Et in additione ponitur ſignum maioris numeri: In ſubtractione vero ſuperioris, ſiue maior is ſit ſiue minor, aut æqualis.

Quæ quidem dux regulæ cap. 4. prædicto expoſitæ ſunt, & ex ſubiectis exemplis intelligi facile poſſunt.

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{r} 6 + \sqrt{8} \ 18 \\ 4 + \sqrt{8} \ 8 \\ \hline 10 + \sqrt{8} \ 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 162 - 2 \\ \sqrt{8} \ 100 - 3 \\ \hline \sqrt{8} \ 722 - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 27 + \sqrt{8} \ 8 \\ \sqrt{8} \ 12 + \sqrt{8} \ 2 \\ \hline \sqrt{8} \ 75 + \sqrt{8} \ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{88} \ 243 - \sqrt{88} \ 162 \\ \sqrt{88} \ 48 - \sqrt{88} \ 32 \\ \hline \sqrt{88} \ 1875 - \sqrt{88} \ 1250 \end{array}$$

Exempla

Exempla Subtractionis.

$$\begin{array}{r} \sqrt{88} \ 1875 + \sqrt{88} \ 1250 \\ \sqrt{88} \ 243 + \sqrt{88} \ 162 \\ \hline \sqrt{88} \ 48 + \sqrt{88} \ 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 - 5 \\ \sqrt{8} \ 8 - 2 \\ \hline \sqrt{8} \ 18 - 3 \end{array}$$

Exempla exceptionis in subtractione pro prima regula.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 + 2 \\ \sqrt{8} \ 18 + 4 \\ \hline \sqrt{8} \ 8 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 - 2 \\ \sqrt{8} \ 18 - 4 \\ \hline \sqrt{8} \ 8 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 + 6 \\ \sqrt{8} \ 72 + 2 \\ \hline 4 - \sqrt{8} \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 72 + 2 \\ 6 + \sqrt{8} \ 18 \\ \hline \sqrt{8} \ 18 - 4 \end{array}$$

Exempla exceptionis in additione pro regula secunda.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 + 3 \\ \sqrt{8} \ 32 - 5 \\ \hline \sqrt{8} \ 162 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 - 3 \\ \sqrt{8} \ 32 + 5 \\ \hline \sqrt{8} \ 162 + 2 \end{array}$$

Exempla exceptionis in subtractione pro regula secunda.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 162 + 2 \\ \sqrt{8} \ 50 - 3 \\ \hline \sqrt{8} \ 32 + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 162 - 2 \\ \sqrt{8} \ 50 + 3 \\ \hline \sqrt{8} \ 32 - 5 \end{array}$$

Alia exempla additionis.

$$\begin{array}{r} 8 - \sqrt{8} \ 50 \\ \sqrt{8} \ 242 - 12 \\ \hline \sqrt{8} \ 72 - 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 50 + 6 \\ 24 - \sqrt{8} \ 242 \\ \hline 30 - \sqrt{8} \ 72 \end{array}$$

Alia exempla subtractionis.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 72 - 4 \\ 8 - \sqrt{8} \ 50 \\ \hline \sqrt{8} \ 242 - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 - \sqrt{8} \ 72 \\ \sqrt{8} \ 50 + 6 \\ \hline 24 - \sqrt{8} \ 242 \end{array}$$

Alia

Alia exempla subtractionis.

$$\begin{array}{r} \text{Jg. } 0 + 16 \\ \text{Jg. } 320 - 8 \\ \hline 24 - \text{Jg. } 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Jg. } 180 + 0 \\ \text{Jg. } 320 - 8 \\ \hline 8 - \text{Jg. } 20 \end{array}$$

*Observanda in
numellis sub-
tractionibus.*

Hic in priori exemplo quoniam numerus Jg 320. non habet respondentem in superiori numero, positus est numerus Jg 0. cum signo +. Item quia in posteriori exemplo numerus 8. in superiori numero non habet respondentem, positus quoque est numerus 0. cum signo +. quod semper in subtractione observandum est, ut superiores duæ regulæ locum habeant.

VERVM in huiusmodi exemplis fiet hoc etiam modo subtractio. Post numerum, a quo debet fieri subtractio, ponatur numerus subtrahendus, commutatis tamen singulis signis eius in signa contraria, ponendo — pro +. & contra. Deinde fiat reductio per additionem. Ut si subtractio fieri debeat Jg 320 — 8. a numero 16. sic stabit exemplum.

16 — Jg 320 + 8
Si ergo addantur 16. ad 8. fiunt 24. & dempta Jg 320. erit residuum 24 — Jg 320.

Item si fiat subtractio Jg 320 — 8. à Jg 180. sic stabit exemplum. Jg 180 — Jg 320 + 8. Si ergo addantur Jg 180. & — Jg 320. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & —. detrahta Jg 180. & Jg 320. erit residuum 8 — Jg 20.

Rursus sit facienda subtractio Jg 180 — 8. de Jg 320. sic stabit exemplum. Jg 320 — Jg 180 + 8. Si ergo addantur simul Jg 320 — Jg 180. hoc est, mutata specie operationis, propter diuersa signa + & —. dempta Jg 180. de Jg 320. erit residuum 8 + Jg 20.

Sit præterea facienda subtractio 8 — Jg 12. de Jg 72 — 4. Sic stabit exemplum. Jg 72 — 4 — 8 + Jg 12. Si ergo addantur inter se Jg 72. Jg 12. & — 4 — 8. erit residuum Jg 72 + Jg 12 — 12. quia radices illæ sunt incommensurabiles. Quod si addantur per propof. 4. lib. 2. Eucl. facient Jg (84 + Jg 3456). atque adeo residuum totum erit Jg (84 + Jg 3456) — 12.

Hoc autem modo rectè fieri subtractionem, liquido constat in numeris rationalibus. Sit enim facienda subtractio Jg 49 — 3. de 8 + Jg 9. hoc est, 4. de 11. vbi residuum est 7. Secundum præceptum traditum sic stabit exemplum. 8 + Jg 9 — Jg 49 + 3. Iam ex 8. & 3. fiunt 11. & ex Jg 9. & — Jg 49. fit numerus — 4. Ergo residuum est 11 — 4. hoc est, 7. ut ratio postulat.

SED ut totum hoc negotium additionis, subtractionisq. planius intelligatur, subiungemus alia nonnulla exempla. Sint ergo addenda 7 + Jg 5. ad 4 + Jg 3.

EX

*Alia exempla
additionis, &
subtractionis.*

$$\begin{array}{r} 7 + \text{Jg } 5 \\ 4 + \text{Jg } 3 \\ \hline 11 + \text{Jg } (8 + \text{Jg } 60) \end{array}$$

Ex 7. & 4. fiunt 11. & ex $\sqrt{8}$ 5. ac $\sqrt{8}$ 3. per propof. 4. lib. 2. Eucl. fit $\sqrt{8}$ (8 + $\sqrt{8}$ 60.) Igitur fumma eft 11 + $\sqrt{8}$ (8 + $\sqrt{8}$ 60.)

RVRSVS fint addenda $\sqrt{8}$ 5 + 3. ad $\sqrt{8}$ 20 — 4. Ex $\sqrt{8}$ 5. & $\sqrt{8}$ 20. quia cōmenfurabiles funt, fit $\sqrt{8}$ 45. & ex + 3. ac

— 4. fit — 1. Tota ergo fumma eft $\sqrt{8}$ 45 — 1. Eadem fumma conflabitur, fit $\sqrt{8}$ 5. ad $\sqrt{8}$ 20. addantur per propof. 4. lib. 2. Eucl. ut ad initium cap. 19. docuimus. Fiet enim $\sqrt{8}$ (25 + $\sqrt{8}$ 400.) hoc eft,

$\sqrt{8}$ 45. atque ita rursus erit tota fumma $\sqrt{8}$ 45 — 1.

PRAETEREA fint addenda $\sqrt{8}$ 5 + 7. ad $\sqrt{8}$ 5 + 7. ad $\sqrt{8}$ 6 — 7. Ex $\sqrt{8}$ 5. & $\sqrt{8}$ 6. fit $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 120.)

& ex + 7. & — 7. fit 0. Summa ergo collecta erit $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 120.)

AMPLIUS fint addenda $\sqrt{8}$ 7 + 3. ad $\sqrt{8}$ 20 — 4. Ex $\sqrt{8}$ 7. & $\sqrt{8}$ 20. fit $\sqrt{8}$ (27 + $\sqrt{8}$ 160.) & ex + 3. & — 4. fit — 1.

Tota ergo fumma erit $\sqrt{8}$ (27 + $\sqrt{8}$ 160) — 1.

SINT quoque addenda $\sqrt{8}$ 5 + 7. ad $\sqrt{8}$ 6 — 1. Ex $\sqrt{8}$ 5. & $\sqrt{8}$ 6. fit $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 120.) at ex + 7. & — 1. fit

+ 5. Tota ergo fumma erit $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 120) + 5. Vel 5 + $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 120.)

ITEM fint addenda 7 + $\sqrt{8}$ 5. ad 4 — $\sqrt{8}$ 3. Summa erit 11 + $\sqrt{8}$ 5 — $\sqrt{8}$ 3. Vel fecundum regulam 2.

subtrahemus per propof. 7. lib. 2. Eucl. $\sqrt{8}$ 3. a $\sqrt{8}$ 5. propter diuerfa figna +.

& — hoc modo. Quadrati numeri 5. & 3. faciunt 8. & ex + $\sqrt{8}$ 5. in — $\sqrt{8}$ 3. fit — $\sqrt{8}$ 15. cuius duplum — $\sqrt{8}$ 60. ex aggregato quadratorum 8.

auferatur, remanebuntq. 8 — $\sqrt{8}$ 60. Radix ergo huius relictæ eft id, quod relinquitur poft detractionem $\sqrt{8}$ 3. ex $\sqrt{8}$ 5. cui radice præfigendum eft fignum +, maioris numeri. Tota ergo fumma eft 11 + $\sqrt{8}$ (8 — $\sqrt{8}$ 60.)

ITEM fint addenda 8 — $\sqrt{8}$ 7. ad 10 — $\sqrt{8}$ 7. Ex 8. & 10. fiunt 18. at ex — $\sqrt{8}$ 7. & — $\sqrt{8}$ 7. fit — $\sqrt{8}$

28. Tota ergo fumma erit 18 — $\sqrt{8}$ 28.

ITEM fint addenda 10 + $\sqrt{8}$ 49. ad 7 — $\sqrt{8}$ 4. Vbi manifefturn eft, fummam effe 22. ex 10. & 7. fiunt 17. Et fubtrac̃ta $\sqrt{8}$ 4. a $\sqrt{8}$ 49.

per propof. 7. lib. 2. Eucl. propter figna +. & — diuerfa, remanent $\sqrt{8}$ (53 — $\sqrt{8}$ 784.) cui præponendum

eft fignum + maioris numeri. Tota ergo fumma eft 17 + $\sqrt{8}$ (53 — $\sqrt{8}$ 784.)

784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — $\sqrt{8}$ 784. fit 5.

(Nam

(Nam 18. radix numeri 734. dempta ex 53. relinquit 15. cuius radix quadrata est 5.) erit tota summa 17 + 5. hoc est, 22.

ITEM sint addenda 10 — 18 49. ad 7 + 18 4. ubi etiam liquet, summam esse 12. Ex 10. & 7. sunt 17. Et subtracta 18 4. a 18 49. propof. 7. lib. 2. Eucl. propter diuersa signa — & +. remanet 18. (13 — 784) cui prefigendum est signum —

maioris numeri. Tota ergo summa collecta est 17 — 18 (13 — 784.) Cum ergo radix quadrata huius numeri 53 — 18 784. fit 5. erit tota summa 17 — 5. hoc est, 12.

ITEM sint addenda 6. ad 18 24
 + 3. Fiet summa 18 24 + 9. Vel 9 +
 18 24.

$$\begin{array}{r} 18 \ 24 \\ + \ 9 \\ \hline 18 \ 33 \end{array}$$

ITEM. sint addenda 6. ad 18 24

$$\begin{array}{r} 18 \ 24 \\ + \ 6 \\ \hline 18 \ 30 \end{array}$$

— 3. Fiet summa 18 24 + 3.

ITEM fit addenda 18 6. ad 18 14
 + 3. Ex radicibus, quia commensurabiles sunt, fit 18 14. At ex — 3 & + 0. — 3. Summa igitur est 18 14 — 3.

ITEM fit addenda 18 8. ad 18 32 + 18 18. Ex 18 8. & 18 32. quia commensurabiles sunt, fit 18 72. Fiet ergo summa 18 72 + 18 18.

Atque ex his duabus radicibus, cum commensurabiles sint, fit 18 162. summa quæ sita. Vel quia commensurabiles etiam sunt

18 8. & 18 18. fiet ex illis 18 50. ita ut tota summa fit 18 50 + 18 32. Atque ex his

duabus radicibus, cum sint commensurabiles, fit 18 162. summa, quæ sita, ac prius. Itaq. hi numeri 18 72 + 18 18. & 18 50 + 18 32. æquales sunt, cum uterque æqualis fit 18 162. ut patuit.

ITEM fit addenda 18 216 — 18 405. ad 18 64 — 18 80.

Ex 18 216. & 18 64. quia commensurabiles sunt, fit 18 1000. hoc est, 10. At ex 18 405. & 18 80. quia

commensurabiles quoque sunt, fit 18 325. Tota ergo summa est 10 —

18 325.

ITEM fit addenda 18 256 — 18 27. ad 18 81 + 18 8. Ex 18 256. & 18 81. fit 18 240. hoc est, 7. At ex — 18 27. & + 18 8. fit — 18 1. hoc est, — 1.

Summa ergo tota est 7 — 1. hoc est 6. Quod ita esse, liquet. Nam 18 256. est 4. a qua si tollatur 18 27. hoc est,

3. remanet 1. cui si addatur 18 81. id est 3. & insuper 18 8. id est 2. fiet summa 6. ut prius.

SINT

SINT denique addenda $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 2$) & $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 2$). Hu-
fiusmodi radices, quas supra appellauimus radices numerorum irra-
tionalium compositorum, diminutorumve, & quas alij radices Vni-
uersales dicunt, non possunt commodius in vnam summam redigi,
quam per signum +, hoc modo $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 2$) & $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 2$).
Sic etiam, si prior a posteriori sit subtrahenda, erit residuum $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8}$
— $\sqrt[3]{8}$) = $\sqrt[3]{8}$ ($\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{8} = 0$). Sed de huiusmodi radicibus plura cap.
24. dicemus.

SIT subtrahenda $\sqrt[3]{8} 356$ — $\sqrt[3]{8} 27$. a $\sqrt[3]{8} 2401$ — $\sqrt[3]{8} 1$. Vbi
manifestum est, residuum esse 5. Quoniam $\sqrt[3]{8} 2401$ & $\sqrt[3]{8} 256$
commensurabiles sunt, si hæc ab il-
la detrahatur, relinquitur $\sqrt[3]{8} 81$. hoc
est, 3. Et si — $\sqrt[3]{8} 27$. a — $\sqrt[3]{8} 1$. sub-
trahatur, cum sine etiam commensu-
rabiles, remanebit + $\sqrt[3]{8} 8$, hoc est
2. Liqueat autem 3. & 2. officere 5. vt ratio postulat.

ITEM sine subtrahenda $\sqrt[3]{8} 50$. a $\sqrt[3]{8} 72$ — 3. Quoniam + $\sqrt[3]{8}$
72. & — $\sqrt[3]{8} 50$. habent dissimilia signa,
mutabitur species operationis, hoc est, in-
ter se addenda sunt, fietq. earum summa,
 $\sqrt[3]{8} 242$. Item quia — 3. & + 9. habent sig-
na diuersa, fiet etiam additio, & summa
12. recipiet signum — superioris numeri. Residuum ergo quod
quiritur, erit $\sqrt[3]{8} 242$ — 12.

ITEM sit subtrahendus a $\sqrt[3]{8} 1000$ + $\sqrt[3]{8} 3125$. numerus hic $\sqrt[3]{8}$
216 — $\sqrt[3]{8} 405$. Quia $\sqrt[3]{8} 1000$. &
 $\sqrt[3]{8} 216$. commensurabiles sunt, de-
tracta hac ex illa, remanet $\sqrt[3]{8} 64$.
hoc est, 4. At ex $\sqrt[3]{8} 3125$. & $\sqrt[3]{8} 405$.
405. quæ etiam commensurabiles
sunt, fit summa $\sqrt[3]{8} 20480$. Hæ enim inter se addendæ sunt, iuxta
2. regulam, propter signa dissimilia: eiq. summæ præfigendum si-
gnum + superioris numeri.

DE NIQVE sit subtrahenda $\sqrt[3]{8} 216$ — $\sqrt[3]{8} 405$. a $\sqrt[3]{8}$
1000 — $\sqrt[3]{8} 3125$. Residuum
erit id, quod in hac formula
descripsum est. Nam $\sqrt[3]{8} 216$.
detracta ex $\sqrt[3]{8} 1000$. reliquam
facit $\sqrt[3]{8} 64$. hoc est, 4. &c.

CAETERVM quando duæ particule numeri compositæ sunt om-
nino æquales duabus particulis numeri diminuti, breuissime vnus
numerus ad alterum additur, vel diminutus a composito demitur,
hac ratione.
Additio peracta erit, si prior particula alterutrius numeri duplicetur.
Vt ex additione 15 + $\sqrt[3]{8} 8$. ad 15. — $\sqrt[3]{8} 8$. fit summa 30. Item
ex additione $\sqrt[3]{8} 20$ + 6. ad $\sqrt[3]{8} 20$ — 6. fit summa $\sqrt[3]{8} 80$. Sic etiam
ex $\sqrt[3]{8} 20$ + $\sqrt[3]{8} 6$. ad $\sqrt[3]{8} 20$ — $\sqrt[3]{8} 6$. fit summa $\sqrt[3]{8} 80$. Ratio est, quod
posse-

Compendiosa
additio, sub-
tractioq. compo-
sitorum & di-
minutorum nu-
merorum si-
milium.

posteriores particulae se mutuo interimant, propter signa +. & —. Subtractio vero absoluta erit, si posterior particula alterutrius numeri duplicetur. Ut 10 — Jg 4. ex 10 + Jg 4. relinquunt Jg 16. id est 4. Item Jg 12 — 5. ex Jg 12 + 5. relinquunt 10. Item, Jg 12 — Jg 5. ex Jg 12 + Jg 5. relinquunt Jg 20. Ratio est, quod priores particulae ex subtractione nil relinquunt, & posteriores addendae sint, quemadmodum regula 2. praecipit, propter diuersa signa — & +.

DE MULTIPLICATIONE, ac Diuisione numerorum irrationalium Compositorum, & Diminutorum.

Cap. XXIII.

*Regula in
multiplica-
tione, ac diui-
sione obserua-
da.*



I C etiam in memoriam reuocanda est regula illa, quam cap. 5. de signis + & — praescripsimus. Videlicet.

E A D E M signa ponunt signum Additorum: Diuersa vero signa ponunt signum Subtractorum.

Sive igitur plus in plus, siue minus in minus multiplicetur, semper producitur plus. Et siue plus in minus, siue minus in plus ducatur, semper procreatur minus. Posito igitur ex duobus numeris uno sub altero, fit multiplicatio, ut in numeris absolutis, dummodo obserues ea, quae cap. 18. de multiplicatione radicum simplicium, & cap. 19. de earundem radicum additione, subtractioneq. tradita sunt. id quod exempla infra scripta docebunt. In sequenti exemplo, ex — Jg 45. in — Jg 30. fit + Jg 900. hoc est, + 30. Et ex — Jg 45. in + 6. id est, in — Jg 36. fit — Jg 1620. Et ex — Jg 20. in + 8. hoc est, in + Jg 64. fit — Jg 1280. Ac denique ex + 8. in + 6. fit + 48. Eruntq. totus numerus productus 48 — Jg 1280 + Jg 1620 + 30. qui, si fiat reductio per additionem, & subtractionem, erit 78 — Jg 5780. Nam ex + 48. & + 30. sunt + 78. Et ex — Jg 1280. & — Jg 1620. quia commensurabiles sunt, fit — Jg 5780. IN hoc altero exemplo, ex — Jg 8 162. in — Jg 8 648. fit + Jg 8 104976. hoc est, + 78. Et ex — Jg 8 162. in + Jg 8 288. fit — Jg 8 46656. hoc est, Jg 216. Et ex — Jg 8 648. in + Jg 8 128. fit — Jg 8

et subducitur ab eadem subducitur octingenti et octiduum — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Id est, — $\text{Jg } 81944$.

Alia exempla multiplicationis.

$$\text{Jce } 7 + \text{Jg } 6$$

$$\text{Jg } 7 + \text{Jce } 3$$

$$\text{Jce } 1323 + \text{Jg } 8748$$

$$\text{Jg } 14 + \text{Jce } 72$$

IN priori exemplo reduimus $\text{Jg } 6$ & $\text{Jg } 3$. ad eandem denominationem, videlicet ad $\text{Jg } 36$. & $\text{Jg } 243$, atque ita ex multiplicatione facta est $\text{Jg } 8748$. Deinde $\text{Jg } 3$. & $\text{Jce } 7$. reducti sunt ad $\text{Jce } 27$. & $\text{Jce } 49$. eiusdem denominationis, procreataque effect multiplicatione $\text{Jce } 1323$.

IN exemplo posteriori reducti sunt $\text{Jg } 2$. & $\text{Jce } 3$. ad $\text{Jce } 8$. & $\text{Jce } 9$. & ex multiplicatione facta est $\text{Jce } 72$. atque ex $\text{Jg } 14$. in $\text{Jg } 14$. facta est $\text{Jg } 14$.

Aliud exemplum in numeris rationalibus.

$$\text{JA } 9 + \text{Jce } 27$$

$$\text{Jg } 36 + \text{Jce } 46656$$

$$\text{hoc est, } 6 + \frac{6}{8} + \frac{6}{8}$$

IN hoc exemplo reducuntur $\text{Jce } 27$. & $\text{Jg } 4$. ad $\text{Jce } 729$. & $\text{Jce } 64$. quarum multiplicatio facit $\text{Jce } 46656$. hoc est, 6. Deinde ex $\text{JA } 9$. fit $\text{JA } 36$. id est, 6. ita ut totus numerus productus sit $6 + 6$. hoc est, 12.

Alia duo exempla.

$$7 + \text{Jg } 5$$

$$7 + \text{Jg } 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

$$49 + \text{Jg } 245 + \text{Jg } 245 + 5$$

IN priori exemplo ex numero composito in se fit productus 49
 $+ \sqrt{8} 245 + \sqrt{8} 245 + 5$. hoc est, $54 + \sqrt{8} 980$. quod ex 49. & +5.
 fiant 54. & ex $\sqrt{8} 245$. & $\sqrt{8} 245$. hoc est, ex duplo $\sqrt{8} 245$. fiat $\sqrt{8}$
 980. In posteriori ex numero diminuto in se fit productus 49 — $\sqrt{8}$
 245 — $\sqrt{8} 245 + 5$. hoc est, $54 - \sqrt{8} 980$.

Compendiosa multiplicatio numeri compositi, vel diminuti in se. IMMO vt ducatur numerus compositus in seipsum, vel in alium
 equalem, satis est, vt quadrata particularum simul addantur, & huic
 summæ adijciatur duplum eius, quod fit ex vna particula in aliam,
 vt in duobus proximis exemplis patet. Nam quadrata particularum
 consueunt 54. Et ex vna particula in aliam fit in priori exemplo $\sqrt{8}$
 245. in posteriori autem — $\sqrt{8} 245$. cuius duplum est $\sqrt{8} 980$. vel
 — $\sqrt{8} 980$. Igitur in exemplo priori produceretur numerus $54 + \sqrt{8}$
 980. In posteriori vero hic, $54 - \sqrt{8} 980$. veluti prius.

Alia duo exempla in numeris rationalibus.

| | |
|--|--|
| $5 + \sqrt{8} 4$ | $5 - \sqrt{8} 4$ |
| $5 + \sqrt{8} 4$ | $5 - \sqrt{8} 4$ |
| $25 + \sqrt{8} 100 + \sqrt{8} 100 + 4$ | $25 - \sqrt{8} 100 - \sqrt{8} 100 + 4$ |

IN priori ducuntur 7. in se, fitq. productus 49. In posteriori ve-
 ro ducuntur 3. in se, fitq. productus 9. vt liquet. Quæ multiplicatio-
 nes per compendium proximè traditum ita fient. Quadrata par-
 ticularum consueunt 29. Et ex vna particula in aliam, fit in priori
 quidem exemplo, $\sqrt{8} 100$. in posteriori vero — $\sqrt{8} 100$. cuius du-
 plum est $\sqrt{8} 400$. vel — $\sqrt{8} 400$. In priori ergo exemplo productus
 numerus erit $29 + \sqrt{8} 400$. hoc est, 49. In posteriori vero $29 - \sqrt{8}$
 400. id est, 9.

Alia duo exempla.

| | |
|--|--------------------------------------|
| $6 + \sqrt{8} 8$ | $\sqrt{8} 10 + \sqrt{8} 2$ |
| $6 - \sqrt{8} 8$ | $\sqrt{8} 10 - \sqrt{8} 2$ |
| $36 + \sqrt{8} 288 - \sqrt{8} 288 - 8$ | $10 + \sqrt{8} 20 - \sqrt{8} 20 - 2$ |

Compendiosa multiplicatio numeri compositi quadratarum radicum per similem diminutum. IN his duobus exemplis radicum quadratarum, ac similibus, in
 quibus ducitur numerus compositus in similem diminutum, aut
 contra, perficietur breuissimè multiplicatio, si in alterutro numero-
 rum ex quadrato particule prioris dematur quadratum posterioris
 particule, siue posterior particula minor sit priore, siue maior. Vt
 positi quadratarum radicum in priori exemplo, si 8. quadratus numerus posterioris particule
 $\sqrt{8} 8$. dematur ex 36. numero quadrato prioris particule 6. reliquus
 per similem nu- fiet productus numerus 28. In posteriori autem exemplo, si 2. qua-
 merum dimi- dratus numerus posterioris particule $\sqrt{8} 2$. detrahatur a 10. quadrato
 nutum. numero prioris particule $\sqrt{8} 10$. relinquetur productus numerus 8.

ATQVE

ATQVE ita quotiescunque numerus compositus, ac diminutus radicum quadratarum irrationalis, si similes sint, inter se multiplicantur, producitur semper vnicus numerus, & is rationalis. quod quidem Eucl. lib. 10. propof. 115. demonstrauit. quia huiusmodi numeri sunt Binomium, ac Residuum, vt ex cap. 27. constabit.

QVANDO posterior particula maior est, producitur numerus diminutus, vt in hoc appposito exemplo apparet. Nam si 16. quadratus numerus posterioris particule dematur ex 4. quadrato numero particule prioris, remanent 4 — 16. Atque hoc ita esse, docet hæc altera formula.

multiplicationis. Et quoniam $2 + \sqrt{8}$ 16. faciunt 6. & $2 - \sqrt{8}$ 16. faciunt 2 — 4. si 2 — 4. ducantur in 6. fit productus numerus 12 — 24. Necesse igitur est, hosce duos numeros 4 — 16. & 12 — 24. esse æquales, vt verè sunt, cum vnus ab altero deductus relinquat 0. vt subscriptæ duæ formulæ subtra-

ctionum demonstrant: quia 8 — 8. æquivalent nihilo. quod etiam ex eo patet, quod tam ex 4 ad — 16. quam ex 12. ad — 24. semper summa fiat — 12. iuxta regulam 2. additionis.

PORRO de multiplicatione radicum numerorum compositorum, vel diminutorum, quas Vniuersales dicunt, agemus cap. 24. quod sequitur.

Exempla Diuisionis.

per $\sqrt{ce}$ $\sqrt{8} + \sqrt{ce}$ $\sqrt{8}$ ($\sqrt{ce}$ 7 + $\sqrt{ce}$ 5)
 per $\sqrt{ce}$ $\sqrt{8} + \sqrt{ce}$ $\sqrt{8}$
 per $\sqrt{ce}$ $\sqrt{8} + \sqrt{ce}$ $\sqrt{8}$ ($\sqrt{ce}$ 4 + $\sqrt{ce}$ 2 $\frac{1}{2}$)
 per $\sqrt{ce}$ $\sqrt{8} + \sqrt{ce}$ $\sqrt{8}$

Diuisionum
 compositi di
 minutius per
 radicem sim
 plicem.

Alia exempla Diuisionis.

per $\sqrt{8}$ 20 — $\sqrt{ce}$ 10 ($\sqrt{8}$ 2 $\frac{1}{2}$ — $\sqrt{ce}$ 1 $\frac{1}{2}$)
 per $\sqrt{8}$ 8 + $\sqrt{ce}$ 3 ($\sqrt{8}$ 2 + $\sqrt{ce}$ 1 $\frac{1}{2}$)
 per $\sqrt{8}$ 2 + $\sqrt{ce}$ 3

IN priori exemplo, diuisa $58\ 20$. per 3 . id est, per $58\ 9$. fit Quotiens $58\ 2\frac{2}{3}$. Diuisa vero — $58\ 10$. per $+3$. id est, per $+58\ 27$. fit Quotiens — $58\ 1\frac{1}{3}$. In posteriori autem exemplo, reducendæ sunt $588\ 8$. & $58\ 2$. ad $588\ 64$. & $588\ 16$. eiusdem denominationis, diuisaq. illa per hanc, fit Quotiens $588\ 4$. hoc est, $588\ 2$. Eodem modo $58\ 3$. & $58\ 2$. reducendæ sunt ad $588\ 9$. & $588\ 32$. diuisaq. illa per hanc, fit Quotiens $588\ 7\frac{1}{2}$. Quoniam autem multiplicatio probat diuisionem, si posterior Quotiens multiplicetur per $58\ 2$. diuisorẽ, producetur numerus diuisus $588\ 8 + 58\ 3$. Nam $588\ 7\frac{1}{2}$. & $58\ 2$. reducuntur ad $588\ 8$. & $588\ 1024$. quæ inter se multiplicatæ gignunt $588\ 8 \times 1024$. hoc est, $588\ 81$. siue $58\ 3$. Item $588\ 2$. & $58\ 2$. reducuntur ad $588\ 4$. & $588\ 16$. quæ inter se multiplicatæ faciunt $588\ 64$. hoc est, $588\ 8$. Item si fit diuidendus numerus $588\ 23328$ — $588\ 10368$. per 6 . hoc est, per $588\ 1296$. fit Quotiens $588\ 324$ — 9 . hoc est 18 — 9 . nimirum 9 .

Diuisio per numerum radicatum quadratarũ, vel transfiguratum compositum, aut diminutum.

2 17. sept.

QUANDO diuisor est numerus radicum quadratarum, vel transfigurarum compositus, aut diminutus, oportet illum multiplicare per numerum similem, mutato signo $+$ in $-$, & signo $-$ in $+$. ut gignatur numerus vnicus rationalis, vt paulo ante dictum est, pro diuisore. Deinde per eundem hunc numerum ita transmutatum multiplicandus est numerus diuidendus, vt producatur nouus numerus per diuisorem inuentum diuidendus. Nam hic numerus diuidendus nouus ad diuisorem nouum inuentum habet eandem proportionem, quam propositus numerus diuidendus ad diuisorem propositum: propterea quod idem numerus ille transmutatus multiplicans vtrumque horum illos produxit: ac proinde idem Quotiens fiet, siue diuidendus propositus per propositum diuisorem, siue nouus diuidendus inuentus per nouum diuisorem diuidatur. Quem admodum quia ita se habent 12 , ad 3 . vt 48 . ad 12 . semper Quotiens 4 . procreatur; siue 12 . per 3 . siue 48 . per 12 . diuidantur.

SINT diuidenda 42 . per $58\ 25 + 58\ 4$. hoc est, per 7 . vbi Quotiens est 6 . si multiplicetur diuisor per $58\ 25$ — $58\ 4$. gignetur nouus diuisor 21 . qui nimirum remanet, si 4 . quadratum posterioris particule ex 25 . quadrato prioris particule dematur, vt paulo ante dictum est. Et si diuidendus numerus 42 . hoc est, $58\ 1764$. per eundem numerum $58\ 25$ — $58\ 4$. multiplicetur, producetur nouus numerus diuidendus $58\ 44100$ — $58\ 7056$. quod diuiso per inuentum diuisorem 21 . hoc est, per $58\ 441$. fit Quotiens 6 . Nam $58\ 100$. nimirum 10 . — $58\ 16$. id est, — 4 . facit 6 . vt manifestum est.

SINT rursus diuidenda 54 . per $2 + 58\ 16$. hoc est, per 6 . vbi Quotiens est 9 . Si diuisor ducatur in 2 — $58\ 16$. producetur numerus diminutus 4 — 16 . quia posterior particula priorẽ maior est.

Quare

Quare inuertendæ sunt particulæ diuisoris hoc modo $\text{Jg } 16 + 2$. vt ex ductu $\text{Jg } 16 = 2$. fiat numerus simplex 12. pro diuifore. Quod si diuidendus numerus 54. ducatur in eundem numerum $\text{Jg } 16 = 2$. fiet nouus diuidendus $\text{Jg } 4656 = 108$. quo diuifio per 12. nimirum $\text{Jg } 4656$. per $\text{Jg } 144$. & $= 108$. per 12. fit Quotiens $\text{Jg } 324 = 9$. hoc est, 18 $= 9$. nimirum 9.

ITEM sint diuidenda 6. per $\text{Jg } 12 + \text{Jg } 6$. Ducto vtroque numero in $\text{Jg } 12 = \text{Jg } 6$. fiunt $\text{Jg } 432 = \text{Jg } 216$. & 6. Ex diuifione autem $\text{Jg } 432 = \text{Jg } 216$. per 6. hoc est, per $\text{Jg } 36$. fit Quotiens $\text{Jg } 12 = \text{Jg } 6$. Probat. Nam ex Quotiente $\text{Jg } 12 = \text{Jg } 6$. in diuiforem $\text{Jg } 12 + \text{Jg } 6$. fit numerus diuifus 6.

ITEM diuidendus fit numerus 66 $= \text{Jg } 2000$. per 8 $= \text{Jg } 45$. Si vterque numerus ducatur in 8 $+ \text{Jg } 45$. fit nouus diuidendus 528 $= \text{Jg } 128000 + \text{Jg } 196020 = \text{Jg } 90000$. hoc est, 228 $+ \text{Jg } 7220$. (Nam detracta $\text{Jg } 90000$. id est, 300. ex 528. reliquus fit numerus 228. & $\text{Jg } 128000$. detracta ex $\text{Jg } 196020$. cum hi numeri sint commensurabiles, relinquit $\text{Jg } 7220$.) atque nouus diuifor 19. Fit autem ex diuifione Quotiens 12 $+ \text{Jg } 20$. Nam ex hoc Quotiente in diuiforem 8 $= \text{Jg } 45$. fit numerus 96 $+ \text{Jg } 1280 = \text{Jg } 6480 = \text{Jg } 900$. qui æqualis est numero diuifio 66 $= \text{Jg } 2000$. quia $\text{Jg } 900$. hoc est, 30. ex 96. relinquit 66. & $= \text{Jg } 6480$. ex $+ \text{Jg } 1280$. hoc est, ex additione vnius ad alterum propter signa diuerfa, cum sint commensurabiles, fit numerus $= \text{Jg } 2000$.

SINT quoque diuidenda 10. per $\text{Jg } 81 + \text{Jg } 81$. hoc est, per 5. vbi Quotiens est 4. Inuertatur diuifor sic, $\text{Jg } 81 + \text{Jg } 81$. vt posterior particula minor fit priore, multipliceturq. tam diuidendus 10. quam diuifor $\text{Jg } 81 + \text{Jg } 81$. per $\text{Jg } 81 = \text{Jg } 16$. fietq. nouus diuidendus $\text{Jg } 12960000 = \text{Jg } 2560000$. & nouus diuifor $\text{Jg } 6561 = \text{Jg } 256$. hoc est 9 $= 4$. videlicet 5. Diuifio ergo illo diuidendo per 5. hoc est, per $\text{Jg } 625$. fit Quotiens $\text{Jg } 20736 = \text{Jg } 4096$. hoc est, 12 $= 8$ nimirum 4. vt par est. Adduxi hoc exemplum in numeris rationalibus, vt intelligeres, eandem esse rationem in radicibus zensizensicis, quæ est in radicibus zensicis.

SINT rursus diuidenda 10. per $\text{Jg } 5 + \text{Jg } 3$. Multiplicetur vterque numerus per $\text{Jg } 5 = \text{Jg } 3$. fietq. nouus diuidendus $\text{Jg } 50000 = \text{Jg } 30000$. & nouus diuifor $\text{Jg } 25 = \text{Jg } 9$. hoc est, $\text{Jg } 5 = \text{Jg } 3$. Et quoniam hic diuifor non est numerus vnicus rationalis, multiplicabimus tam nouum diuidendum inuentum, quam nouum diuiforem, per $\text{Jg } 5 + \text{Jg } 3$. fietq. alius nouus diuidendus $\text{Jg } 1250000 = \text{Jg } 750000 + \text{Jg } 450000 = \text{Jg } 270000$. & alius diuifor nouus 5 $= 3$. hoc est, 2. Si ergo illum diuidendum per hunc diuiforem diuidemus, id est, per $\text{Jg } 16$. faciemus Quotientem $\text{Jg } 78125 = \text{Jg } 46875 + \text{Jg } 28125 = \text{Jg } 16875$. Quod probatur. Si namque hic Quotiens ducatur in diuiforem propositum, nimirum in $\text{Jg } 5 + \text{Jg } 3$. producet. numerus diuifus 10. vt hic patet.

$$\begin{array}{r}
 \text{Jg} 3 \text{ } 78125 - \text{Jg} 46875 + \text{Jg} 28125 - \text{Jg} 16875 \\
 \text{Jg} 390625 - \text{Jg} 234375 + \text{Jg} 140625 - \text{Jg} 84375 \\
 \hline
 + \text{Jg} 234375 - \text{Jg} 140625 + \text{Jg} 84375 - \text{Jg} 50625 \\
 \text{Jg} 390625 - \text{Jg} 234375 + \text{Jg} 140625 - \text{Jg} 84375
 \end{array}$$

Quoniam enim numeri intermediij, quorum bini æquales sunt, & diuersorum signorum, se mutuo tollunt, relinquetur productus $\text{Jg} 390625 - \text{Jg} 50625$, hoc est, 25 — 15. videlicet 10.

*Diuisio per nu-
merū radicū
quadratarum
compositū triū
particularum
vel plurium.*

$$\begin{array}{r}
 \text{PRÆTEREA sint diuidenda } 100. \text{ per } \text{Jg} 3 + \text{Jg} 5 + 6. \text{ Hic quia} \\
 \text{diuisor habet tres particulas affectas signo } +. \text{ vt inueniatur diuisor} \\
 \text{simplex, multiplicandus est diuisor in similem numerum, mutata} \\
 \text{ultima particula } +. \text{ in } -. \text{ vt hic vides, Pro-} \\
 \text{ducetur enim numerus} \\
 \text{duarum particularum,} \\
 \text{Jg } 60 + 2. \text{ pro nouo di-} \\
 \text{uisore, qui etiam habe-} \\
 \text{bitur hoc modo. Prio-} \\
 \text{res duæ particulae inter} \\
 \text{se multiplicentur. Nam}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6 \\
 \hline
 \text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6 \\
 \hline
 - \text{Jg } 18 - \text{Jg } 30 - 6 \\
 + \text{Jg } 15 + 5 + \text{Jg } 30 \\
 + 3 + \text{Jg } 15 + \text{Jg } 18 \\
 \hline
 \text{Jg } 60 + 2
 \end{array}$$

si productus numerus $\text{Jg } 15$. duplicetur, proueniet $\text{Jg } 60$. pro prio-
re particula. Et si vltimæ particulae numerus 6. dematur ex 3. sum-
ma numerorum 3. & 5. priorum duarum particularum, remanebit
numerus + 2. pro particula posteriore. Quod si numerus diuiden-
dus 100. per eundem numerum $\text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 - \text{Jg } 6$. multiplicetur,
gignetur nouus numerus diuidendus $\text{Jg } 30000 + \text{Jg } 50000 - \text{Jg}$
 60000 . qui ad nouum diuisorem inuentum eandem proportionem
habebit, quam numerus diuidendus propositus 100. ad propositum
diuisorem $\text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6$.

a 17.sept.

SED quoniam inuentus nouus diuisor nondum est simplex, du-
cemus eum in diminutum similem, nimirum in $\text{Jg } 60 - 2$. effice-
musq. $60 - 4$. hoc est, 56. pro nouo diuisore. Et si nouus diuiden-
dus $\text{Jg } 30000 + \text{Jg } 50000 - \text{Jg } 60000$. ducatur in eundem nu-
merum $\text{Jg } 60 - 2$. procreabitur nouus numerus diuidendus Jg
 $180000 + \text{Jg } 300000 + \text{Jg } 140000 - \text{Jg } 120000 - \text{Jg } 200000$
 $- \text{Jg } 360000$, quo diuiso per diuisorem inuentum 56. prodibit
idem Quotiens, qui proueniret, si datus numerus 100. per datum
diuisorem $\text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6$. diuideretur.

QVOD si diuisorem datum $\text{Jg } 3 + \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6$. multiplicare-
mus per $\text{Jg } 3 - \text{Jg } 5 + \text{Jg } 6$. (Nam quando omnes tres particulae
habent signum +. poterit quælibet earum mutari in -) produce-
remus nouum diuisorem $\text{Jg } 72 - 4$. & nouum diuidendū $\text{Jg } 30000$
 $- \text{Jg } 50000 + \text{Jg } 60000$. Et si tam hic diuidendus, quam ille di-
uisor $\text{Jg } 72 - 4$. ducatur in $\text{Jg } 72 + 4$. producetetur nouus alius di-
uidendus, & nouus diuisor simplex 56. ad quem diuidendus nouus
eandem proportionē habebit, quam datus numerus diuidendus 100
ad

b 17.sept.

ad datum diuisorem $\text{Jc } 3 + \text{Jc } 5 + \text{Jc } 6$.

SI vero diuisor habuerit vnā particulam cum signo —. vertendum erit signum — in +. vt fiat multiplicatio.

ATQVE hoc eodem modo, si diuisor habuerit plures particulas radicum quadratarum, quam tres, mutabis semper vnā ex +, in —, vel contra. Nam ex prima multiplicatione gignetur numerus totidem particularum, minus vnā, & in secunda totidem quoque, minus duabus, & sic deinceps procedendum erit, donec fiat numerus simplex pro diuisore nouo. Diuidendus quoque numerus ducendus est in primum numerum multiplicantem: Deinde productus numerus in secundum, &c. ita vt tot fiant multiplicationes, quot factæ sunt, vt diuisor simplex inueniretur.

QUANDO diuisor habet duas particulas radicum cubicarum, inueniendus etiam est diuisor simplex. quod ita fiet. Sint V.g. diuidenda 10. per $\text{Jc } 5 + \text{Jc } 3$. Per doctrinam propof. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur tres numeri continuè proportionales (propter 3. exponentem cubi) in proportionē particularum diuisoris, nimirum $\text{Jc } 5$. ad $\text{Jc } 3$. hac methodo. Primum ducatur $\text{Jc } 5$. in se, fietq. primus numerus $\text{Jc } 25$. Deinde ducatur $\text{Jc } 5$. in $\text{Jc } 3$. gigneturq. secundus numerus $\text{Jc } 15$. Tertiò ducatur quoque $\text{Jc } 3$. in se, prouenietq. tertius numerus $\text{Jc } 9$. atque ita hi tres numeri producti. $\text{Jc } 25$. & $\text{Jc } 15$. & $\text{Jc } 9$. erunt continuè proportionales in proportionē $\text{Jc } 5$. ad $\text{Jc } 3$. vt in dicta propof. 2. lib. 8. ab Euclide demonstratum fuit. Quod etiam experiri licebit per multiplicationem. Nam positis tribus numeris $\text{Jc } 25$. $\text{Jc } 15$. $\text{Jc } 9$. tantum fit ex primo in tertium, quantum ex medio in se. Item positis quatuor numeris $\text{Jc } 5$. $\text{Jc } 3$. $\text{Jc } 25$. $\text{Jc } 15$, tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium. quod etiam in his quatuor $\text{Jc } 5$. $\text{Jc } 3$. $\text{Jc } 15$. $\text{Jc } 9$. cernitur. Extremi duo numeri afficiantur signo +, & medius signo —. hoc modo $\text{Jc } 25 - \text{Jc } 15 + \text{Jc } 9$. per hunc communem numerum multiplicantem si multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuisor $\text{Jc } 5 + \text{Jc } 3$. fiet nouus diuidendus $\text{Jc } 25000 - \text{Jc } 15000 + \text{Jc } 9000$. & nouus diuisor $\text{Jc } 125 + \text{Jc } 27$. id est, 8. vt in subiecta formula liquet. qui diuisor simplex habetur.

(vt auctores docent, & quod est obseruatione dignum) si numeri particularum diuisoris 5. & 3. simul addantur, etiā si nulla fiat multiplicatio.

EADEM via tenenda est in diuisore composito duarum radicum zensificicarum, zensicubicarum, &c. dummodo tot numeri continuè proportionales, secundum doctrinam propof. 2. lib. 8. Eucl. reperiantur in proportionē particularum diuisoris, surdesolidarū

$$\begin{array}{r}
 \text{Jc } 25 - \text{Jc } 15 + \text{Jc } 9 \\
 \text{Jc } 5 + \text{Jc } 3 \\
 \hline
 + \text{Jc } 75 - \text{Jc } 45 + \text{Jc } 27 \\
 + \text{Jc } 125 - \text{Jc } 75 + \text{Jc } 45 \\
 \hline
 \text{Summa. } \text{Jc } 125 + \text{Jc } 27
 \end{array}$$

Diuisio per numerum radicem cubicarū compositum.

Diuisio per numerum radicem zensificicarū, surdesolidarū &c. cōpositū.

quot unitates sunt in exponente 88. 8. 8re. &c. nimirum quatuor in diuifore radicum zensificicarum, & quinque pro diuifore radicum furdofolidarum, & fex pro zensicubicis, &c. Quibus inuentis, tribuatur primo numero fignum +. fecundo fignum —. tertio iterum fignum +. & quarto iterum fignum —. atque ita alternatim procedendo, vt numeri in locis imparibus gerant fignum +, & in locis paribus fignum —. Exemplum ponam in diuifione 10. per $\sqrt[88]{5} + \sqrt[88]{3}$. quam fupra alio modo expediuius. Quoniam, exponens 88. eft 4. inuenientur hi quatuor numeri proportionales $\sqrt[88]{125}$. $\sqrt[88]{75}$. $\sqrt[88]{45}$. $\sqrt[88]{27}$. iuxta

$$\begin{array}{ccccccc} & & \sqrt[88]{5} + \sqrt[88]{3} & & & & \\ & \sqrt[88]{25} & \sqrt[88]{15} & \sqrt[88]{9} & & & \\ \sqrt[88]{125} & - & \sqrt[88]{75} & + & \sqrt[88]{45} & - & \sqrt[88]{27} \end{array}$$

doctrinam propof. 2. lib. 8. Eucl. vt hic cernis: vbi appofuimus fignum + numeris locorum imparium, numeris autem locorum parium fignum — vt diximus faciendum effe. Iam fi per hunc numerum quatuor particularum multiplicetur tam numerus 10. diuidendus, quam diuifor $\sqrt[88]{5} + \sqrt[88]{3}$. reperietur nouus numerus diuidendus $\sqrt[88]{1250000} - \sqrt[88]{750000} + \sqrt[88]{450000} - \sqrt[88]{27}$. & nouus diuifor $\sqrt[88]{625} - \sqrt[88]{375} + \sqrt[88]{225} - \sqrt[88]{135}$. hoc eft, 2. ijdem omnino, qui fupra ante diuifionem per numerum radicum quadratarum compofitum trium particularium. Atque hic diuifor, fine multiplicatio- ne, habetur, vt auctores docent, fi minoris particulæ numerus in diuifore dematur ex numero particulæ maioris, videlicet 3. ex 5. vt hæ formulæ indicant.

Inuentio numeri diuidendi.

$$\begin{array}{l} 10. \text{ hoc eft, } \sqrt[88]{10000} \\ \sqrt[88]{125} - \sqrt[88]{75} + \sqrt[88]{45} - \sqrt[88]{27} \\ \hline \sqrt[88]{1250000} - \sqrt[88]{750000} + \sqrt[88]{450000} - \sqrt[88]{270000} \end{array}$$

Inuentio diuiforis.

$$\begin{array}{l} \sqrt[88]{125} - \sqrt[88]{75} + \sqrt[88]{45} - \sqrt[88]{27} \\ \hline \sqrt[88]{5} + \sqrt[88]{3} \\ \hline + \sqrt[88]{375} - \sqrt[88]{125} + \sqrt[88]{135} - \sqrt[88]{81} \\ + \sqrt[88]{625} - \sqrt[88]{375} + \sqrt[88]{225} - \sqrt[88]{135} \\ \hline \sqrt[88]{625} - \sqrt[88]{375} \end{array}$$

EADEM ratio eft de cæteris. Sed quando numerus exponens ra-
dicum

dicum est par, vt $\frac{18}{3}$. &c. diuisor simplex habetur, si (vt auctores docent) numerus particulæ minoris in dato diuisore ex numero maioris particulæ subducatur: at vero, quando exponens numerus est impar, vt $\frac{18}{3}$. &c. simplex diuisor habetur, si numeri particularum diuisoris dati in vnam colligantur summam. id quod in superioribus obseruatum esse vides.

SED neque hoc omittendum est, quando diuisor est duarum radicum diuersarum, eas ad eandem denominationem esse reducendas, antequam operationem auspiceris.

DENIQUE quando diuisor est plurium particularum, ac diuersarum radicum, ita vt non facile reduci possit ad simplicem diuisorem, constituenda erit fractio, cuius numerator sit numerus diuidentis, & denominator ipsemet diuisor: non secus ac in numeris absolutis fieri solet, quando minor numerus per maiorem diuidentis proponitur, vt 3. per 4. Fit enim fractio $\frac{3}{4}$. Verbi gratia, si numerus $\frac{18}{3}$ 48 + $\frac{18}{3}$ 3. diuidentis sit per $\frac{18}{3}$ 15 + $\frac{18}{3}$ 6. — $\frac{18}{3}$ 3. fiet hæc fractio

Diuisio per numerum compositum diuersarum radicum

Numerator. $\frac{18}{3}$ 48 + $\frac{18}{3}$ 3

Denominator. $\frac{18}{3}$ 15 + $\frac{18}{3}$ 6 — $\frac{18}{3}$ 3

S C H O L I V M.

ACCIDIT non raro, vt inter duos numeros irracionales compositos ambigatur, vter eorum maior sit. qua ambiguitas ita tollitur. Sint propositi duo numeri, 4 + $\frac{18}{3}$ 7. & 20 — $\frac{18}{3}$ 180. Auferatur vtroque numerus 4. remanebitq. ex vna parte, $\frac{18}{3}$ 7. & ex altera, 16 — $\frac{18}{3}$ 180. Certum autem est, si duo numeri dati sint aequales, residua hæc etiam aequalia esse: Et si inæquales, residua eodem modo esse inæqualia. Quadratur vtrumque residuum, eritq. prioris residui quadratum 7. posterioris vero, 436 — $\frac{18}{3}$ 184320. Certum quoque est, si residua sint aequalia, eorum quadrata quoque aequalia esse: Et si illa sint inæqualia, hæc etiam esse inæqualia. Addatur vtrique quadrato diminutum hoc — $\frac{18}{3}$ 184320. fientq. numeri 7 + $\frac{18}{3}$ 184320. & 436. Auferantur vtrique 7. eruntq. reliqui numeri $\frac{18}{3}$ 184320. & 429. qui quadrentur, vt fiant 184320. & 184041. Et quia illud quadratum maius est, quam hoc, pronuntiabis numerum 4 — $\frac{18}{3}$ 7. maiorem esse numero 20 — $\frac{18}{3}$ 180. Eodem pacto cum alijs numeris procedes. Hoc etiam per extractiones radicum constat. Nam radix propinqua numeri 7. est $2\frac{1}{2}$. quæ cum 4. facit $6\frac{1}{2}$. At radix propinqua numeri 180. est $13\frac{1}{2}$. quæ dempta ex 20. relinquit $6\frac{1}{2}$. Constat autem $\frac{1}{2}$. esse numerum maiorem, quam $\frac{1}{2}$. Atque ita habes aliam rationem tollendi ambiguitatem. Sed prior ratio est magis accurata.

Vter duorum numerorum compositorum maior sit.

DE RADICIBVS NVMERORVM

irrationalium compositorum, vel diminuto-

rum: quas alij Vniuersales dicunt: Et

de earundem Algorithmo.

Cap. XXIIII.



*Varia radices
numerosum
compositorum.*

AE radices oriuntur plerunque ex additione, ac subtractione radicum irrationalium simplicium, incommensurabilium, vt in cap. 19. ac 20. paruit: quas hoc loco paulò diligentius explicare proponimus. quod exequemur, expositis varijs radicibus numerorum compositorum, vnà cum earum Algorithmo. Si igitur ex hoc numero composito, $10 + \sqrt{8} 7$. extrahenda sit radix quadrata, erit ea $\sqrt{8} (10 + \sqrt{8} 7)$ cuius sensus est, vt radice quadrata numeri 7. si haberi posset, addita ad 10. totius numeri radix quadrata sumatur. In hac vero altera radice. $\sqrt{8} (10 + \sqrt{8} 7)$. intelligimus radicem cubicam numeri ex 10. & $\sqrt{8} 7$. compositi. Et vt res planius percipiatur, proferemus exempla in numeris rationalibus. Vt $\sqrt{8} (10 + \sqrt{8} 16 + 3 + \sqrt{8} 64)$ nihil aliud significat, quam 5. Nam $\sqrt{8} 16$. est 4. quæ addita ad 3. facit 7. & 7. cum $\sqrt{8} 64$. id est, cum 8. faciunt 15. quibus si addantur 10. sunt 25. præterea totius numeri compositi, cuius radix quadrata est 5. Item $\sqrt{8} (5 + \sqrt{8} 9)$ erit 2. Est enim sensus, vt sumptis radicibus quadratis numerorum 25. & 9. quæ sunt 5. & 3. efficietes 8. extrahatur ex hac summa radix cubica, quæ est 2. Hæc vero radix, $\sqrt{8} (10 + \sqrt{8} 36) + \sqrt{8} (70 + \sqrt{8} 121)$. valebit 13. Significatur enim radicem quadratam compositi $10 + \sqrt{8} 36$. quod est 16. nimirum $\sqrt{8} 36$. quæ est 4. addi ad 9. radicem quadratam compositi $70 + \sqrt{8} 121$. quod est 81.

QVEMADMODVM autem quadratum radicis quadratæ cuiusvis surdæ simplicis est ipse numerus, deleto signo radicali $\sqrt{8}$. Et cubus radicis cubicæ simplicis, ipse numerus, deleto signo radicali $\sqrt[3]{8}$. Vt quadratum $\sqrt{8} 5$. est 5. & quadratum $\sqrt{8} 25$. est 25. Cubus vero $\sqrt[3]{8} 12$. est 12. & cubus $\sqrt[3]{8} 27$. est 27. propterea quod radix quælibet quadrata ducta in se quadrate producit eius radicis quadratum, ducta vero in se cubice gignit cubum eiusdem radicis: Ita quoque quadratum radicis quadratæ numeri cuiuslibet compositi est ipsemet numerus compositus, deleto signo $\sqrt{8}$. Et cubus radicis cubicæ numeri compositi cuiusvis est ipsemet numerus, deleto signo $\sqrt[3]{8}$. Vt quadratum $\sqrt{8} (11 + \sqrt{8} 9 + \sqrt{8} 4)$. est $11 + \sqrt{8} 9 + \sqrt{8} 4$. hoc est, 16. ita vt illa radix valeat 4.

*Quadrata &
cubi radicum
numerosum
compositorum.*

Qua-

Quadratum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 49 + \sqrt{8} 36 - \sqrt{8} 16$) est $\sqrt{8} 49 + \sqrt{8} 36 - \sqrt{8} 16$. hoc est, 9. ita ut radix illa valeat 3.

Quadratum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 64 + \sqrt{8} 49 + \sqrt{8} 36 - 5$) est $\sqrt{8} 64 + \sqrt{8} 49 + \sqrt{8} 36 - 5$. hoc est, 16. ita ut valor illius radicis sit 4.

Quadratum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 216 + \sqrt{8} 27$) est $\sqrt{8} 216 + \sqrt{8} 27$. hoc est, 9. pretiumq. eius radicis est 3.

Quadratum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 216 - \sqrt{8} 27$) est $\sqrt{8} 216 - \sqrt{8} 27$. hoc est, 3. valorq. eius radicis est $\sqrt{8} 3$.

Cubus $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 25 + \sqrt{8} 9$) est $\sqrt{8} 25 + \sqrt{8} 9$. hoc est, 8. ita ut radix illa valeat 2.

Cubus $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 25 - \sqrt{8} 9$) est $\sqrt{8} 25 - \sqrt{8} 9$. id est, 2. pretiumq. radicis illius est $\sqrt{8} 2$.

Cubus $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 64 + \sqrt{8} 27$) est $\sqrt{8} 64 + \sqrt{8} 27$. id est, 7. ita ut radix illa sit $\sqrt{8} 7$. Idemq. iudicium facies de zensizensis, ac surdesolidis, &c. radicum zensizensicarum, & surdesolidarum numerorum compositorum. Proposui autem exempla in numeris rationalibus, ut res fieret clarior. Arque hoc modo multiplicatur radix cuiuslibet numeri compositi in se; hoc est, producitur eius quadratum, vel cubus, &c.

AT vero radix numeri compositi in radicem simplicem, vel in numerum compositum, vel in numerum absolutum, vel denique in aliam radicem numeri compositi, multiplicabitur hac ratione. Vterque numerus tam multiplicandus, quam multiplicans, reducitur ad quadratum, vel cubum. Deinde fiat multiplicatio, ut supra traditum est. Nam radix totius producti erit numerus procreatus ex multiplicatione. quemadmodum ex $\sqrt{8} 5$. in $\sqrt{8} 12$. fit $\sqrt{8} 60$. radix nimirum zensica numeri 60. ex multiplicatione quadratorum 5. & 12. producti. Item sicut ex $\sqrt{8} 9$. in $\sqrt{8} 10$. fit $\sqrt{8} 90$. videlicet radix cubica numeri 90. qui ex multiplicatione cubi 9. in cubu 10. gignitur, ut cap. precedenti traditum est. Hoc autem clarius ex sequentibus exemplis discas. Sit enim multiplicanda $\sqrt{8} (7 + \sqrt{8} 3)$ per 2. Quadrata sunt $7 + \sqrt{8} 3$. & 4. Si ergo ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si ducatur $\sqrt{8} 3$ in 4. hoc est, in $\sqrt{8} 16$. fit $\sqrt{8} 48$. Totus ergo numerus productus est $\sqrt{8} (28 + \sqrt{8} 48)$. Rite autem hoc modo fieri multiplicationem, discas ex hoc altero exemplo numerorum rationalium. Sit ducenda, $\sqrt{8} (7 + \sqrt{8} 4)$. hoc est, 3. (nam 7. cum $\sqrt{8} 4$. faciunt 9. cuius $\sqrt{8}$ est 3.) per 2. Vbi manifestum est, numerum genitum fore 6. Quadrata sunt $7 + \sqrt{8} 4$. & 4. Si igitur ducantur 4. in 7. fiunt 28. Et si $\sqrt{8} 4$. ducatur in 4. hoc est, in $\sqrt{8} 16$. fit $\sqrt{8} 64$. eritq. totus numerus productus $\sqrt{8} (28 + \sqrt{8} 64)$. hoc est, $\sqrt{8} 36$. nimirum 6. ut convenit.

SIT rursus multiplicanda $\sqrt{8} (7 + \sqrt{8} 4)$ per 3. hoc est 3. per 3. ubi productus numerus est 9. Quadrata sunt $7 + \sqrt{8} 4$. & 9. Ex 9. in 7. fiunt

*Multiplicatio
radicis nume-
ri compositi in
se.*

*Multiplicatio
radicis nume-
rorum compo-
sitorum.*

$$\begin{array}{r}
 7 + \sqrt{8} 3 \\
 \times 2 \\
 \hline
 28 + \sqrt{8} 48 \\
 \hline
 7 + \sqrt{8} 4 \\
 \times 4 \\
 \hline
 28 + \sqrt{8} 64 \\
 \hline
 7 + \sqrt{8} 4 \\
 \times 3 \\
 \hline
 63 + \sqrt{8} 324 \\
 \hline
 63. \&c.
 \end{array}$$

63. & ex Jg 4. in 9. hoc est, in Jg 81. fit Jg 324. Productus ergo numerus erit Jg (63 + Jg 324) hoc est, Jg 81. nimirum 9.

ITEM fit multiplicanda Jg (Jg 25 + Jg 16) hoc est, Jg 9. siue 3. per 3. ubi etiam constat, productum numerum fore 9. Quadrata sunt Jg 25 + Jg 16. & 9. Ex Jg 25. in 9. hoc est, in Jg 81. fit Jg 2025. Et ex Jg 16. in 9. id est, in Jg 81. fit Jg 1296. Procreatus ergo numerus erit Jg (Jg 2025 + Jg 1296.) hoc est, Jg (45 + 36.) siue Jg 81. hoc est, 9.

SIT multiplicanda Jce (Jce 64 + Jce 27) hoc est, Jce 7. per 2. ubi productus erit Jce 56. Cubi numerorum sunt Jce 64 + Jce 27. & 8. Ex Jce 64. in 8. hoc est, in Jce 512. fit Jce 32768. & ex Jce 27. in 8. hoc est, in Jce 512. fit Jce 13824. Cum ergo (Jce 32768. fit 32. Et Jce 13824. fit 24. erit productus numerus Jce (32 + 24) id est, Jce 56.

SIT multiplicanda Jce (64 + Jce 27.) per 2. Cubi numerorum sunt 64 + Jce 27. & 8. Ex 64. in 8. sunt 512. Et ex Jce 27. in 8. id est, in Jce 512. fit Jce 13824. quæ est 24. additaq. ad 512. facit 536. Est ergo productus numerus Jce 536. atque ita est. Nam Jce (64 + Jce 27) hoc est, Jce 67. ducta in 2. hoc est, in Jce 8. facit Jce 536.

SIT ducenda Jce (Jce 64 + Jg 36 + 3.) in 5. Cubi numerorum sunt Jce 64 + Jg 36 + 3. & 125. Ex Jce 64. in 125. id est, in Jce 1953125. fit Jce 125000000. At ex Jg 36. in 125. id est, in Jg 15625. fit Jg 562500. Et ex 3. in 125. sunt 375. Cum ergo Jce 125000000. fit 500. & Jg 562500. fit 750. erit procreatus numerus Jce 1625. ut ratio postulat. Nam Jce (Jce 64 + Jg 36 + 3.) hoc est, Jce 13. ducta in 5. hoc est, in Jce 125. facit Jce 1625.

SI numerus per 5. multiplicandus, fuisset Jce (Jce 64 + Jg 36 + 3.) productus fuisset numerus Jce (Jce 125000000 + Jg 562500 + 375.) hoc est, Jce (500 + 750 + 375.) hoc est, Jce 875. quod verum est. Nam Jce (Jce 64 + Jg 36 + 3.) est Jce 7. quæ ducta in 5. hoc est, in Jce 125. facit Jce 875.

SIT multiplicanda Jg (12 + Jg 6) per 6. Quadrata numerorum sunt 12 + Jg 6. & 36. Ex 12. in 36. sunt 432. Et ex Jg 6. in 36. hoc est, in Jg 1296. fit Jg 7776. Productus igitur ex multiplicatione numerus est Jg (432 + Jg 7776.)

432 + Jg 7776

SIT

SIT ducenda $\sqrt{8}$ ($13 + \sqrt{8} 144$) hoc est, $\sqrt{8} 25$. id est, 7. per 6. vbi certum est, gigni 30. Quadrata numerorum sunt $13 + \sqrt{8} 144$. & 36. Ex 13. in 36. fiunt 468. Et ex $\sqrt{8} 144$. in 36. id est, in $\sqrt{8} 1296$. fit $\sqrt{8} 186624$. Numerus ergo productus est $\sqrt{8}$ ($468 + \sqrt{8} 186624$) hoc est, $\sqrt{8} 900$. id est, 30.

$$\begin{array}{r} 13 + \sqrt{8} 144 \\ 36 \end{array}$$

$$468 + \sqrt{8} 186624$$

SIT multiplicanda $\sqrt{8}$ ($13 + \sqrt{8} 9$) per $\sqrt{8}$ ($5 + \sqrt{8} 16$) hoc est, $\sqrt{8} 16$. id est, 4. per $\sqrt{8} 9$. id est, per 3. vbi constat produci 12. Quadrata numerorum sunt $13 + \sqrt{8} 9$. & $5 + \sqrt{8} 16$. Ex $\sqrt{8} 9$. in $\sqrt{8} 16$. fit $\sqrt{8} 144$. Et ex $\sqrt{8} 16$. in 13. id est, in $\sqrt{8} 169$. fit $\sqrt{8} 2704$. Deinde ex $\sqrt{8} 9$. in 5. hoc est, in $\sqrt{8} 25$. fit $\sqrt{8} 225$. Et ex 5. in 13. fiunt 65. Tam $\sqrt{8} 144$. id est, 12. cum 65. facit 77. quibus si addatur $\sqrt{8} 2704$. & $\sqrt{8} 225$. nimirum 52. & 15. fiunt 144. Igitur $\sqrt{8} 144$. id est, 12. est numerus productus, vt dictum est.

$$13 + \sqrt{8} 9$$

$$5 + \sqrt{8} 16$$

$$\sqrt{8} 2704 + \sqrt{8} 144$$

$$65 + \sqrt{8} 225$$

$$\sqrt{8} 2704 + \sqrt{8} 225 + 77$$

SIT rursus multiplicanda $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 1800 + 30$) — $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$) per $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$). Scribantur numeri, vt hic vides. Ex $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$) in $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$)

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 1800 + 30) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 450 + 15)$$

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 450 + 15) \quad \sqrt{8} (\sqrt{8} 450 + 15)$$

fit eius quadratus $\sqrt{8} 450 + 15$.
præposito signo
— cum + in $\sqrt{8} 810000 + \sqrt{8} 4050000 + 450 - \sqrt{8} 450 + 15$
— ducatur. Ex $\sqrt{8} 810000 + \sqrt{8} 1620000 + 450$

$\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 1800 + 30$) in $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$) fit $\sqrt{8} 810000 + \sqrt{8} 1620000 + 450$. si nimirum quadrata numerorum inter se multiplicentur: hoc est, 1350 + $\sqrt{8} 1620000$. quia $\sqrt{8} 810000$. æquivalet 900. qui numerus additus ad 450. facit 1350. & præposito signo $\sqrt{8}$. erit productus numerus $\sqrt{8}$ ($1350 + \sqrt{8} 1620000$). Est autem radix huius Binomij 1350 + $\sqrt{8} 1620000$. numerus $\sqrt{8} 900 + \sqrt{8} 450$. vt ex cap. 28. constabit: hoc est, 30 + $\sqrt{8} 450$. ex qua si dematur prior productus — $\sqrt{8} 450 + 15$. factus ex $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 450 + 15$) in se, inclinetur numerus 15. vt in hac formula cernis.

$$30 + \sqrt{8} 450$$

$$15 - \sqrt{8} 450$$

$$15$$

HAC ratione ritè fieri multiplicationem, peripicuum fiet, hoc altero exemplo proposito. vbi fit multiplicatio 1. in 3. productusq. numerus est 3. Nam ex $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 9 + 6$) in $\sqrt{8}$

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 4 + 14) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 9 + 6)$$

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 9 + 6) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 9 + 6)$$

$$+ \sqrt{8} 144 + 84 - \sqrt{8} 9 + 6$$

$$\sqrt{8} 36 + \sqrt{8} 1764$$

$$\sqrt{8} 144 - 9$$

$$(\sqrt{8}$$

($\sqrt{89} + 6$) fit eius quadratus $\sqrt{89} + 6$. præposito signo —, cum + in — ducatur. Deinde ex $\sqrt{8} (\sqrt{8} + 14)$ in $\sqrt{8} (\sqrt{89} + 6)$ fit numerus $\sqrt{8} 144$. id est, 12. vt in præcedēti formula vides. Nā $\sqrt{8} 36$ est 6. & $\sqrt{8} 144$ est 12. & $\sqrt{8} 1764$ est 42. quæ omnes cum 84. faciunt 144. & præposito signo $\sqrt{8}$. fit productus $\sqrt{8} 144$. nimirum 12. a quo si detrahatur alter productus $\sqrt{89} + 6$. nimirum 9. supererunt 3. pro toto numero producto.

SIT quoque multiplicanda $\sqrt{8} (6 + \sqrt{89})$ per numerum compositum $\sqrt{8} 4 + \sqrt{8} 16$. Quadratum prioris numeri est $6 + \sqrt{8} 9$. posterioris autem $20 + \sqrt{8} 356$. vt patet, si $\sqrt{8} 4 + \sqrt{8} 16$. ducatur in $\sqrt{8} 4 + \sqrt{8} 16$. Multiplicatione igitur facta, vt hic vides, erit numerus productus $\sqrt{8} (\sqrt{8} 9216 + \sqrt{8} 3600 + \sqrt{8} 2304 + 120)$ hoc est, $\sqrt{8} 324$. nimirum 18.

MULTIPLICETVR $\sqrt{8} (7 + \sqrt{8} 4)$ hoc est, $\sqrt{8} 9$. nimirum 3. per $\sqrt{8} 9$. hoc est, per 3. vbi perspicuum est, numerum gigni 9. Quadrata numerorum sunt $7 + \sqrt{8} 4$. & 9. Ex $\sqrt{8} 4$. in 9. id est, in $\sqrt{8} 81$. fit $\sqrt{8} 324$. Et ex 7. in 9. fiunt 63. Igitur productus numerus erit $\sqrt{8} (63 + \sqrt{8} 324)$ hoc est, $\sqrt{8} 81$. siue 9. vt diximus.

MULTIPLICETVR $\sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6)$ per $\sqrt{8} 12 + \sqrt{8} 6$. Quadrata numerorum sunt $12 + \sqrt{8} 6$. & $18 + \sqrt{8} 288$. vt constat, si $\sqrt{8} 12 + \sqrt{8} 6$. ducatur in se. (Producitur enim numerus iste $12 + \sqrt{8} 288 + 6$. constat autem 12. & 6. facere 18.) Ex $\sqrt{8} 288$, in $\sqrt{8} 6$. fit $\sqrt{8} 1728$. Et ex $\sqrt{8} 288$ in 12. hoc est, in $\sqrt{8} 144$. fit $\sqrt{8} 41472$. Et ex $\sqrt{8} 6$. in 18. id est, in $\sqrt{8} 324$. fit $\sqrt{8} 1944$. Ac tandem $\sqrt{8} 12$. in 18. fiunt 216. Itaque totus numerus productus erit $\sqrt{8} (216 + \sqrt{8} 1944 + \sqrt{8} 41472 + \sqrt{8} 1728)$.

Multiplicatio radices numeri compositi, vna cum radice zenfica numeri diminuti similis in seipsam multiplicanda vt compositi, proponitur. quod non raro in Binomijs, ac Residuis (de quibus in cap. 27. & 28.) accedit, ita agemus. Sit in se multiplicanda $\sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6) + \sqrt{8} (12 - \sqrt{8} 6)$. Scribatur numerus bis, vt in diminuti similis multiplicatione fieri solet. Et quoniam ex propos. 4. lib. 2. Eucl. qualis, in seipsum quadrata partium $\sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6)$ & $\sqrt{8} (12 - \sqrt{8} 6)$ vna cum eo, quod ex vna parte $\sqrt{8} (12 - \sqrt{8} 6)$ bis fit in alteram partem $\sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6)$ æqua-

20 + $\sqrt{8}$ 20 per $\sqrt{8}$ 5. ex + $\sqrt{8}$ 0. (quoniam diuersa signa mu-
 20 - $\sqrt{8}$ 5 + 1 tant speciem, fitq. additio) remanet + $\sqrt{8}$ 5. vt in
 20 - $\sqrt{8}$ 5. Subtractione radicum simplicium diximus. atque
 0 + $\sqrt{8}$ 5. ita ex $\sqrt{8}$ 20 + $\sqrt{8}$ (20 - $\sqrt{8}$ 5.) in $\sqrt{8}$ 20 - $\sqrt{8}$
 (20 - $\sqrt{8}$ 5) producitur $\sqrt{8}$ 5.

IMMO hoc compendio vt etiam licebit, quando multiplica-
 dus est numerus compositus ex numero Cossici, & radice numeri
 Cossici compositi vel diminuti, per numerum diminutum similem.
 Vt si ducendus sit numerus $\frac{1}{2} 8 + \sqrt{8}$ ($\frac{1}{2} 88 + 1 8$) in $\frac{1}{2} 8 - \sqrt{8}$
 ($\frac{1}{2} 88 + 1 8$). Scripto vno numero

sub alio, voluit cernis, detrahatur

quadratum $\frac{1}{2} 88 + 1 8$ posterioris

particulæ ex $\frac{1}{2} 88$ quadrato parti-

culæ prioris, vt hæc altera formu-

la ostendit. Nam reliquis numerus

0 - $\sqrt{8}$ erit is, qui producitur ex

vno numero in alium.

SIC etiam ex $\frac{1}{2} 8 + \sqrt{8}$ ($\frac{1}{2} 88 + 1 8$) in $\frac{1}{2} 8 - \sqrt{8}$ ($\frac{1}{2} 88 - 1 8$)

gignetur numerus 1 8. vt alia duæ hæc apposite formulæ docent.

$\frac{1}{2} 88 + \sqrt{8}$ ($\frac{1}{2} 88 + 1 8$)

$\frac{1}{2} 88 - \sqrt{8}$ ($\frac{1}{2} 88 - 1 8$)

1 8

$\frac{1}{2} 88 + 0 8$

$\frac{1}{2} 88 - 1 8$

0 + 1 8

1 8

Diuisio radi-
 cum numero-
 rum compo-
 sitorum.

DIVISIO radicum huiusmodi fit hoc modo. Tam numerus diui-
 dendus, quam diuidens reducatur ad quadratum. Deinde diuisio
 fiat, vt supra explicatum est. Radix enim producti numeri erit
 Quotiens, vt exempla probabunt in quacumque modo, vt in cap. præ-
 cedenti diximus, ex diuisione $\sqrt{8}$ 12. per $\sqrt{8}$ 3. exit $\sqrt{8}$ 4. radix al-
 mirum reifica numeri 4. qui fit ex diuisione quadrati 12. per qua-
 dratum 3. Item sicut ex diuisione $\sqrt{8}$ 30. per $\sqrt{8}$ 5. fit Quotiens $\sqrt{8}$
 6. radix videlicet surdesolidi numeri 6. ex diuisione surdesolidi 30.
 per surdesolidum 5. procreati.

SIT diuidenda $\sqrt{8}$ (13 + $\sqrt{8}$ 7) per $\sqrt{8}$ 5. Quadrata numerorum

sunt 13 + $\sqrt{8}$ 7. & 5. Ex diui-

sione 13. per 5. exeunt 2 $\frac{1}{2}$. Et

ex $\sqrt{8}$ 7. per 5. id est, per $\sqrt{8}$ 25.

exeunt $\sqrt{8}$ $\frac{7}{5}$. Totus ergo Quo-

tiens est $\sqrt{8}$ ($2 \frac{1}{2} + \sqrt{8} \frac{7}{5}$).

SIT diuidenda $\sqrt{8}$ (432 + $\sqrt{8}$ 7776) per 6. Quadrata numero-

rum sunt 432 + $\sqrt{8}$ 7776. & 36. Diuisis 432. per 36. exeunt 12.

& di-

& diuisa $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 7776. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 1296. exit $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 6. Quotiens ergo totus erit $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (12 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 6.)

— SIT diuidenda $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (588 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 34848) per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (12 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 8) Quodrat numerorum sunt 588 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 34848. & 12 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 8. Quoniam diuisor fit numerus compositus, multiplicandus erit per 12 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 8. mutato signo + in —. vt supra cap. 13. dictum est: vt fiat nouus diuisor $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 136. Quod si per eundem numerum 12 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 8. multiplicetur diuidendus numerus, fiet nouus diuidendus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (6528 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 332928). Fit enim numerus productus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (7056 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5018112 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 2765952 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 278784) qui reducitur ad $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (6528 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 332928) quia radix numeri 278784. est 528. quæ detracta ex 7056. relinquit 6528. Et detracta $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 2765952. ex $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5018112. cum sint commensurabiles in proportione $\frac{1}{4}$. relinquit $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 332928. cui apponendum est signum +. maioris numeri. Itaq. si diuidatur nouus diuidendus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (6528 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 332928) per nouum diuisorem 136. fiet Quotiens $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (48 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18). Diuisis namq. 6528. per 136. exeunt 48. Et diuisa $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 332928. per 136. hoc est. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18496. exit $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18. atque adeo $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (48 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18) Quotiens erit diuisionis propositæ.

HOC exemplum quia pulchrum est, & subobscurum, libet examinare per multiplicationem. Igitur necesse est, numerum diuisum ($\mathcal{J}\mathcal{K}$ 588 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 34848) redire, si Quotiens inuentus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (48 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18) in diuisorem $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (12 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 8) ducatur. Fit autem ex hac multiplicatione numerus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (576 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 2592 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18432 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 144) Quod si $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 144. addatur ad 576. fiet summa 588. Et si simul addantur $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 2592. & $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 18432. quæ commensurabiles sunt in proportione $\frac{1}{4}$. fiet $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 14848.

DIVIDATUR item $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 15. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (3 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5) Vt simplex diuisor reperiat, ducemus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (3 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5) in $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (3 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5). fietq. diuisor $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 4. nouus. Quod si diuidendus numerus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 15. ducatur quoque in $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (3 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5). gignemus nouum diuidendum $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (45 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 125) Quadratum huius numeri diuidendi est 45 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 1125. Noui vero diuisoris quadratum est 4. Si ergo partiamur 45. per 4. fiet Quotiens $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 11 $\frac{1}{4}$. Et si diuidamus — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 1125. per 4. hoc est. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 16. fit Quotiens — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 70 $\frac{3}{4}$. Totus igitur Quotiens est $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (11 $\frac{1}{4}$ — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 70 $\frac{3}{4}$.)

DIVIDAMVS 20. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (10 — $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5.) Multiplicetur utriusque numerus per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (10 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 5.) vt fiat nouus diuidendus $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (4000 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 80000) nouus autem diuisor $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 95. Quadrata horum numerorum sunt 4000 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 800000. & 95. Si igitur partiamur 4000. per 95. exibunt 42 $\frac{2}{5}$. At ex diuisione $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 800000. per 95. id est. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 9025. prodit $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 88 $\frac{4}{5}$. Quotiens ergo propositæ diuisionis est $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (42 $\frac{2}{5}$ + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 88 $\frac{4}{5}$.)

DIVIDAMVS $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (4 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 25) per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (1 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 9) hoc est. $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 9. per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 4. siue 3 $\frac{3}{4}$ per 2. vbi Quotiens est 1 $\frac{1}{4}$. Multiplicetur tam diuidendus, quam diuisor, per $\mathcal{J}\mathcal{K}$ (1 + $\mathcal{J}\mathcal{K}$ 9) vt fiat nouus diuidendus

$\sqrt{8}$ ($4 + \sqrt{8} 25 - \sqrt{8} 144 - \sqrt{8} 225$) & nouus diuisor $\sqrt{8} - 8$. Quadrata horum numerorum sunt $4 + \sqrt{8} 25 - \sqrt{8} 144 - \sqrt{8} 225$. & -8 . Ex diuisione 4. per -8 . fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $\sqrt{8} 25$. per -8 . id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $\sqrt{8} - \frac{1}{2}$. vel (quod idem est) $-\sqrt{8} \frac{1}{2}$. Et ex diuisione $-\sqrt{8} 144$. per -8 . id est, per $\sqrt{8} 64$. exit $\sqrt{8} + \frac{1}{2}$. vel (quod idem est) $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $-\sqrt{8} 225$. per -8 . hoc est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $+\sqrt{8} 1\frac{1}{2}$. Quibus Quotientibus in ordinem redactis, erit totus Quotiens $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 3\frac{1}{2} + \sqrt{8} 2\frac{1}{2} - \sqrt{8} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$) qui æquualet $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$. vt diximus. Nam $\sqrt{8} 3\frac{1}{2}$. hoc est, $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{2}$. & $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. siue $\sqrt{8} \frac{1}{2}$. est $\frac{1}{2}$ quæ cum priori $\frac{1}{2}$ facit $\frac{1}{2}$. Deinde $\sqrt{8} \frac{1}{2}$. est $\frac{1}{2}$. quæ cum $\frac{1}{2}$ hoc est, cum $\frac{1}{2}$ facit $\frac{1}{2}$. atque $\frac{1}{2}$. ex $2\frac{1}{2}$ relinquunt $1\frac{1}{2}$. siue $2\frac{1}{2}$. atque radix huius numeri est Quotiens supra inuentus, nimirum $1\frac{1}{2}$.

IMMO ex diuisione $\sqrt{8}$ ($4 + \sqrt{8} 25 - \sqrt{8} 144 - \sqrt{8} 225$) per $\sqrt{8} - 8$. pronenire $1\frac{1}{2}$. ita quoque fiet manifestum. Ex 4. & $\sqrt{8} 25$. sunt 9. Et ex $-\sqrt{8} 144 - \sqrt{8} 225$. sunt 17. Faciunt autem -17 . cum $+9$. numerum -8 . Igitur numerus diuidendus est $\sqrt{8} - 18$. & diuisor $\sqrt{8} - 8$. vbi Quotiens fit $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$.

HOC exemplum ita quoque proponi potest, vt dicamus, diuidendam esse $\sqrt{8}$ ($4 + \sqrt{8} 25$) per $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 9 + 1$) vbi iterum diuiduntur 3. per 2. Et si tam diuidendus, quam diuisor multiplicetur per $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 9 - 1$) fiet nouus diuidendus numerus $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 244 + \sqrt{8} 225 - 4 - \sqrt{8} 23$) & nouus diuisor $\sqrt{8} 8$. Quadrata horum numerorum sunt $\sqrt{8} 144 + \sqrt{8} 225 - 4 - \sqrt{8} 23$. & 8. Ex diuisione autem $\sqrt{8} 144$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $\sqrt{8} 2\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $\sqrt{8} 225$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $\sqrt{8} 3\frac{1}{2}$. Et ex diuisione -4 . per 8. fit Quotiens $-\frac{1}{2}$. Et ex diuisione $-\sqrt{8} 23$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $-\sqrt{8} \frac{1}{2}$. ita vt totus Quotiens sit idem omnino, qui prius, nimirum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 3\frac{1}{2} + \sqrt{8} 2\frac{1}{2} - \sqrt{8} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$). De industria autem interdum longior sum in exemplis expediendis, vt ex ijs difficultates, quæ in radicibus numerorum compositorum occurrere solent, discas superare.

DIVIDAMVS quoque $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 32768 + \sqrt{8} 13824$) per 2. Cubi numerorum sunt $\sqrt{8} 32768 + \sqrt{8} 13824$. & 8. Ex diuisione $\sqrt{8} 32768$. per 8. hoc est, per $\sqrt{8} 512$. fit Quotiens $\sqrt{8} 64$. Et ex diuisione $\sqrt{8} 13824$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 512$. fit Quotiens $\sqrt{8} 27$. Totusq. Quotiens erit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8} 64 + \sqrt{8} 27$) hoc est, $\sqrt{8} 7$. DENIQUE fit diuidenda $\sqrt{8}$ ($33 + \sqrt{8} 9$) per $\sqrt{8}$ ($3 + \sqrt{8} 1$) hoc est, 6. per 2. vbi Quotiens est 3. Multiplicetur uterque numerus per $\sqrt{8}$ ($3 - \sqrt{8} 2$) vt fiat nouus diuidendus $\sqrt{8}$ ($99 + \sqrt{8} 81 - \sqrt{8} 1089 - \sqrt{8} 9$) & nouus diuisor $\sqrt{8}$ ($9 - 1$) hoc est, $\sqrt{8} 8$. Quadrata horum numerorum sunt $99 + \sqrt{8} 81 - \sqrt{8} 1089 - \sqrt{8} 9$. & 8. Ex diuisione 99. per 8. fit Quotiens $12\frac{1}{2}$. Ex diuisione $\sqrt{8} 81$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $\sqrt{8} 1\frac{1}{2}$. Ex diuisione $-\sqrt{8} 1089$. per 8. id est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $-\sqrt{8} 17\frac{1}{2}$. Ac tandem ex diuisione $-\sqrt{8} 9$. per 8. hoc est, per $\sqrt{8} 64$. fit Quotiens $-\sqrt{8} \frac{1}{2}$. Eting. totus

rus Quotiens $\sqrt[3]{8}$ ($12 \frac{1}{2} + \sqrt[3]{8} 1 \frac{1}{2} - \sqrt[3]{8} 17 \frac{1}{2} - \sqrt[3]{8} 2 \frac{1}{2}$) hoc est, 3. Nam si ad $12 \frac{1}{2}$ addatur $\sqrt[3]{8} 1 \frac{1}{2}$, hoc est, $\frac{1}{2}$, fient $13 \frac{1}{2}$, ex quibus si tollantur $\sqrt[3]{8} 17 \frac{1}{2}$, & $\sqrt[3]{8} 2 \frac{1}{2}$, hoc est, $\frac{1}{2}$, & 4, relinquentur 9. Est ergo Quotiens $\sqrt[3]{8}$ 9, id est, 3.

ADDITION, & subtractio radicum numerorum compositorum. *Additio radicum numerorum compositorum.*
commodè plerunque addi non possunt, vel vna ab altera subtrahi, nisi per interpositionem signi + vel -. ut cap. 21. annotauimus. Quando tamen addenda est huiusmodi radicū aliqua ad simile, mutatur signo + in -, vel - in +, comodissime inter se addentur, si illæ radices per signum + connectantur, & totum illud aggregatum in se ducatur, ut paulò ante monstratum est. Nam $\sqrt[3]{8}$ huius producti erit summa duarum radicum propositarum. Ut si addenda sint hæ duæ radices, $\sqrt[3]{8}$ ($12 + \sqrt[3]{8} 6$) & $\sqrt[3]{8}$ ($12 - \sqrt[3]{8} 6$) ducemus hoc compositum $\sqrt[3]{8}$ ($12 + \sqrt[3]{8} 6$) + $\sqrt[3]{8}$ ($12 - \sqrt[3]{8} 6$) in seipsum, producenturque numerus $24 + \sqrt[3]{8} 552$, ut supra diximus. Huius ergo radix quadrata, nimirum $\sqrt[3]{8}$ ($24 + \sqrt[3]{8} 552$) erit summa duarum radicum propositarum.

Eodem modo supra, harum radicum, $\sqrt[3]{8}$ ($10 + \sqrt[3]{8} 36$) & $\sqrt[3]{8}$ ($10 - \sqrt[3]{8} 36$) summa inuenta fuit, $\sqrt[3]{8}$ ($20 + \sqrt[3]{8} 256$) hoc est, $\sqrt[3]{8} 36$, id est, 6.

ITEM sint addendæ $\sqrt[3]{8}$ ($8 + \sqrt[3]{8} 32$) & $\sqrt[3]{8}$ ($8 - \sqrt[3]{8} 32$). Sic stabit exemplum ad multiplicationem. Si ergo productum numero præfiges signum $\sqrt[3]{8}$, erit summa duarum radicum dictarum, $\sqrt[3]{8}$ ($16 + \sqrt[3]{8} 128$).

Productus. $16 + \sqrt[3]{8} 128$.

ITEM sit addenda $\sqrt[3]{8}$ ($2 + \sqrt[3]{8} 3$) ad $\sqrt[3]{8}$ ($2 - \sqrt[3]{8} 3$). Sic instituetur multiplicatio, fietq. productus, $4 + \sqrt[3]{8} 4$, hoc est, 6. Igitur summa duarum radicum quæ sita erit $\sqrt[3]{8} 6$.

Huiusmodi radicum additio commodè etiã se fiet. Multiplicetur quadratum vnius radicis in quadratum alterius, quod breuissime fiet, si in alterutra radice quadratum posterioris particule dematur ex quadrato particule prioris, & residui radix adijciatur ad priorem particulam, summaq. hæc duplicetur, id est, per 2 multiplicetur. Radix enim huius producti dabit summam quæ sita. Ut in primo exemplo, summa $\sqrt[3]{8}$ ($2 + \sqrt[3]{8} 3$) & $\sqrt[3]{8}$ ($2 - \sqrt[3]{8} 3$) ita fiet. Dempto quadrato 6, posterioris particule ex 144, quadrato particule prioris, supersunt 138. Si igitur addatur $\sqrt[3]{8} 138$, ad 12.

Productus. $4 + \sqrt[3]{8} 4$, hoc est, 6.

ad 11. priorem partem, fiet summa 12 + $\sqrt{8}$ 138. quæ ducta in 2. faciet summam quæ sitam $\sqrt{8}$ (24 + $\sqrt{8}$ 152) ut prius.

IN secundo autem exemplo, summa $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36) & $\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36) ita nota fiet. Dempto quadrato 36. posterioris partem ex 100. quadrato prioris partem, remanent 64. Si ergo $\sqrt{8}$ 64. addes ad priorem partem 10. facies 10 + $\sqrt{8}$ 64. quæ summa ducta in 2. faciet summam desideratam $\sqrt{8}$ (20 + $\sqrt{8}$ 256.) hoc est, $\sqrt{8}$ 36. hoc est, 6. veluti prius.

IN tercio denique exemplo, summam radicem $\sqrt{8}$ (2 + $\sqrt{8}$ 3) & $\sqrt{8}$ (2 — $\sqrt{8}$ 3) sic cognoscemus. Dempto quadrato 3. posterioris partem ex 4. quadrato partem prioris, reliqua fit 1. Si ergo addemus $\sqrt{8}$ 1. ad 2. priorem partem, faciemus 2 + $\sqrt{8}$ 1. hoc est, 3. Duplum est 6. Ergo $\sqrt{8}$ 6. est summa optata, eadem quæ prius.

QUANDO addendæ sunt duæ radices numerorum compositorum dissimilium, quorum videlicet numeri particularum non omnes æquales sunt: addi poterunt nonnunquam per propof. 4. lib. 2. Euclidum scilicet, cum numerus ex vna radice in alteram bis multiplicatus productus reduci potest ad simplicem numerum, vel ad numerum compositum duarum particularum. hoc scilicet modo. Sit addenda $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36) ad $\sqrt{8}$ (11 + $\sqrt{8}$ 25) hoc est, 4. ad 4. ubi summa est 8. Quadrata duarum radicum per signum + connexa faciunt 10 + $\sqrt{8}$ 36 + 11 $\sqrt{8}$ 25. Productus numerus ex vna radice in alteram, (hoc est, si quadratum vnius in quadratum alterius ducatur, & productus præfigatur signum $\sqrt{8}$. ut in multiplicatione radicem simplicium quadratarum fieri solet) est $\sqrt{8}$ (110 + $\sqrt{8}$ 4356 + $\sqrt{8}$ 2500 +

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{8} (10 + \sqrt{8} 36) \\
 \sqrt{8} (11 + \sqrt{8} 25) \\
 \hline
 \sqrt{8} 2500 + \sqrt{8} 900 \\
 110 + \sqrt{8} 4356 \\
 \hline
 \sqrt{8} (110 + \sqrt{8} 4356 + \sqrt{8} 2500 + \sqrt{8} 900.)
 \end{array}$$

reducitur ad $\sqrt{8}$ 1034. hoc est, ad 32. Si igitur addantur 32. ad duo superiora quadrata, erit tota summa $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36 + $\sqrt{8}$ 11 + $\sqrt{8}$ 25 + 32.) hoc est, $\sqrt{8}$ 64. siue 8. ut ratio postulat.

SIT rursum addenda $\sqrt{8}$ (12 + $\sqrt{8}$ 108) ad $\sqrt{8}$ (2 + $\sqrt{8}$ 3) Summa quadratorum est 12 + $\sqrt{8}$ 108 + 2 + $\sqrt{8}$ 3. Productus numerus ex vna radice in alteram est $\sqrt{8}$ (42 + $\sqrt{8}$ 1728) quæ radix est $\sqrt{8}$ 24 + $\sqrt{8}$ 18. (ut ex cap. 17. patebit.) cuius duplum, nimirum $\sqrt{8}$ 96 + $\sqrt{8}$ 72. additum ad prædicta duo quadrata 12 + $\sqrt{8}$ 108 + 2 + $\sqrt{8}$ 3. hoc est, ad 14 + $\sqrt{8}$ 108 + $\sqrt{8}$ 96 + $\sqrt{8}$ 72. hoc est, ad 14 + $\sqrt{8}$ 147. (nā $\sqrt{8}$ 108. & $\sqrt{8}$ 3. sunt commensurabiles, conficiuntq. $\sqrt{8}$ 147) fiet tota summa $\sqrt{8}$ (14 + $\sqrt{8}$ 147 + $\sqrt{8}$ 96 + $\sqrt{8}$ 72.)

SIT quoque addenda $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 2 + 1) ad $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 162 + 9.) Summa quadratorum est $\sqrt{8}$ 2 + 1 + $\sqrt{8}$ 162 + 9. Ex vna radice in alteram

fiet $\sqrt{8}$

fit $\sqrt{8}$ ($27 + \sqrt{8}$ 648) quæ radix valet $3 + \sqrt{8}$ 18. (quo pacto autem ex hoc quadrato $27 + \sqrt{8}$ 648. erui debeat radix, cap. 27. docebitur) cuius duplum $6 + \sqrt{8}$ 72. additum ad prædictam quadratorum summam facit $\sqrt{8}$ $2 + 1 + \sqrt{8}$ 162 $+ 9 + 6 + \sqrt{8}$ 72. hoc est $\sqrt{8}$ 512 $+ 16$. Nam $\sqrt{8}$ 162. & $\sqrt{8}$ 72. commensurabiles sunt, faciuntq. $\sqrt{8}$ 200. Item $\sqrt{8}$ 200. & $\sqrt{8}$ 27. commensurabiles quoque sunt, faciuntq. $\sqrt{8}$ 512. Summa ergo quæ sita erit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 512 $+ 16$.)

SED quando productus numerus ex vna radice in alteram non potest reduci ad numerum compositum, quando videlicet radicem, quæ sit vel radix simplex, vel numerus compositus, non habet, fieret hoc modo summa magis perplexa, & obscura: Quare commodius fiet tunc addito per signum $+$ interpositum. V. g. si addenda sit $\sqrt{8}$ ($2 + \sqrt{8}$ 3) ad $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 12 $+ 2$) fit ex vna in alteram $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 48 $+ \sqrt{8}$ 36 $+ 4 + \sqrt{8}$ 12) hoc est, $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 108 $+ 10$) propterea quod $\sqrt{8}$ 48. & $\sqrt{8}$ 12. commensurabiles sunt, conficiuntq. $\sqrt{8}$ 108. ac $\sqrt{8}$ 36. & 4. efficiunt 10. Sed quia numerus quadratus $\sqrt{8}$ 108 $+ 10$. radicem habet $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 27 $+ \sqrt{8}$ 2) $+ \sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 27 $- \sqrt{8}$ 2.) vt ex cap. 27. constabit. quæ quidem composita est ex duabus radicibus duorum numerorum compositorum. Efficiunt

autem hæc duæ radices summam $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 27 $+ \sqrt{8}$ 2) $+ \sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 27 $- \sqrt{8}$ 2)

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} 27 + \sqrt{8} 2 \quad + \quad \sqrt{8} 27 - \sqrt{8} 2 \\ \hline \sqrt{8} 54. \text{ hoc est, } 5 \end{array}$$

vt in hac formula

apparere. Atque hæc summa redu-

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} 100. \text{ id est, } 10 \\ \hline \sqrt{8} (\sqrt{8} 27 + \sqrt{8} 2 + \sqrt{8} 27 - \sqrt{8} 2 + 10. \end{array}$$

citur ad hanc, $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 108 $+ 10$) erit hæc summa radix huius numeri $\sqrt{8}$ 108 $+ 10$. quod patet, quia $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 108 $+ 10$) in se ducta facit $\sqrt{8}$ 108 $+ 10$. Hæc autem radix $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 108 $+ 10$) duplicata, quod fiet, si eius quadratum $\sqrt{8}$ 108 $+ 10$. ducatur in 4. quadratum binarij; Hæc, in quâ, radix duplicata facit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1728 $+ 40$) quæ cum duobus quadratis radicem propositarum, nimirum cum $2 + \sqrt{8}$ 3. & $\sqrt{8}$ 12 $+ 2$. faciet radicem summam $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1728 $+ 40$) $+ 2 + \sqrt{8}$ 3 $+ \sqrt{8}$ 12 $+ 2$ sed quia $2 + \sqrt{8}$ 3 $+ \sqrt{8}$ 12 $+ 2$. faciunt 14 $+ \sqrt{8}$ 27. erit summa $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1728 $+ 40$) $+ \sqrt{8}$ 27 $+ 14$) quæ magis intricata est, quam si summa dicatur esse $\sqrt{8}$ ($2 + \sqrt{8}$ 3) $+ \sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 12 $+ 2$). Eadem illa, summa intricata facilius reperietur, sine inuersione radicis numeri $\sqrt{8}$ 108 $+ 10$, cuius radix, nimirum $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 108 $+ 10$.) producta, fuit ex vna radice proposita in alteram. Nam duplum huius numeri, $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1728 $+ 40$) cum duobus quadratis radicem propositarum, conficiet ex propos. 4. lib. 2. Eucl. duarum radicem summam eandem $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1728 $+ 40$) $+ \sqrt{8}$ 27 $+ 14$.)

QUANDO duæ huiusmodi radices sunt commensurabiles, poterunt inter se addi per regulam trium, veluti radices simplices. Vt si addenda proponatur $\sqrt{8}$ ($2 + \sqrt{8}$ 3) ad $\sqrt{8}$ ($3 + \sqrt{8}$ 48.) Diuisa hac

hac per illam, (inuenio videlicet nouo diuifore $\sqrt{8}$ 1. & nouo diuifendo $\sqrt{8}$ 4.) fit Quotiens $\sqrt{8}$ 4. hoc est, 2. siue $\frac{1}{2}$. Habere ergo illæ radices proportionem duplam: ac proinde si fiat, Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ (2 + $\sqrt{8}$ 3) ad aliud, inuenietur summa $\sqrt{8}$ (18 + $\sqrt{8}$ 247.)

ITEM fit addenda $\sqrt{8}$ (4 + $\sqrt{8}$ 6) ad $\sqrt{8}$ (8 + $\sqrt{8}$ 24.) Diuisa hac per illam (inuenio diuifore nouo $\sqrt{8}$ 10. & nouo diuifendo $\sqrt{8}$ 20) fit Quotiens $\sqrt{8}$ 2. qui licet irrationalis fit, ac proinde radices proportionitæ sint incommensurabiles, conabimur tamen eius beneficio illas simul addere, more radicum commensurabilium. Est ergo proportio vnus radicis ad alteram, quæ $\sqrt{8}$ 2. ad 1. ita vt denominator proportionis fit $\frac{1}{2}$. Et denominator 1. huius fractionis additus ad $\sqrt{8}$ 2. denominatoré, facit $\sqrt{8}$ 2 + 1. Quare si fiat, Vt 1. ad $\sqrt{8}$ 2 + 1. ita $\sqrt{8}$ (4 + $\sqrt{8}$ 6) ad aliud, fit $\sqrt{8}$ (18 + $\sqrt{8}$ 128 + $\sqrt{8}$ 54 + $\sqrt{8}$ 48) pro summa duarum radicum propositarum. Nam vt in regula triu multiplicetur $\sqrt{8}$ 2 + 1. in $\sqrt{8}$ (4 + $\sqrt{8}$ 6) reducenda est $\sqrt{8}$ 2 + 1. ad quadratum 3 + $\sqrt{8}$ 8. hoc est, ducenda in se, atque hoc ducendum in 4 + $\sqrt{8}$ 6. quadratum radicis $\sqrt{8}$ (4 + $\sqrt{8}$ 6.) Productioq. 12 + $\sqrt{8}$ 128 — $\sqrt{8}$ 54 + $\sqrt{8}$ 48. præfigendum signum $\sqrt{8}$.

SIT præterea addenda $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 6 — $\sqrt{8}$ 2) ad $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 96 — $\sqrt{8}$ 32.) Diuisa hac per illam, (inuenio scilicet nouo diuifore $\sqrt{8}$ 4. & nouo diuifendo $\sqrt{8}$ 16.) fit Quotiens $\sqrt{8}$ 4. hoc est, 2. estq. proportio vnus radicis ad alteram dupla, cuius denominator est $\frac{1}{2}$. Si igitur fiat, Vt 1. ad 3. ita $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 6 — $\sqrt{8}$ 2) ad aliud: reperietur summa quæsitæ $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 486 — $\sqrt{8}$ 162.)

*Subtrahenda
similium numeri
vorum compo-
situm.*

IAM vero si a radice numeri compositi detrahenda sit alia radix similis numeri diminuti, (quod sæpe contingit in Binomijs, ac Residuis, eorumq. radicibus) fiet id hoc modo. Sic subtrahenda V. g.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6) - \sqrt{8} (12 - \sqrt{8} 6) \\ \sqrt{8} (12 + \sqrt{8} 6) - \sqrt{8} (12 - \sqrt{8} 6) \\ \hline 12 + \sqrt{8} 6 \quad + \quad 12 - \sqrt{8} 6 \\ \hline \quad \quad \quad - \sqrt{8} 138 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - \sqrt{8} 138 \\ \hline 24 - \sqrt{8} 552 \end{array}$$

+ $\sqrt{8}$ 6. & 12 — $\sqrt{8}$ 6. addatur duplum numeri — $\sqrt{8}$ 138. qui fit ex vna parte in alteram, videlicet — $\sqrt{8}$ 552. fietq. quadratum 24. — $\sqrt{8}$ 552. quia duo quadrata efficiunt 24. Radix igitur huius quadrati, nimirum $\sqrt{8}$ (24 — $\sqrt{8}$ 552) erit id, quod relinquitur ex detractioe $\sqrt{8}$ (12 — $\sqrt{8}$ 6) a $\sqrt{8}$ (12 + $\sqrt{8}$ 6.) Detracto enim numero ex alio numero, si reliquus numerus ducatur in se, erit radix quadrata numeri producti, numerus ille reliquus. Ac proinde cum in dato exemplo numerus reliquus, $\sqrt{8}$ (12 + $\sqrt{8}$ 6) — $\sqrt{8}$ (12 — $\sqrt{8}$ 6) in se ductus faciat 24 — $\sqrt{8}$ 552. erit $\sqrt{8}$ (24 — $\sqrt{8}$ 552) numerus, qui relinquitur ex detractioe $\sqrt{8}$ (12 — $\sqrt{8}$ 6) a $\sqrt{8}$ (12 + $\sqrt{8}$ 6.)

ALIUD exemplum in numeris rationalibus. Sit subtrahenda,

$\sqrt{8}$

$\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36) ex $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36) nimirum 2. ex 4. ubi perspicuum est, reliquum numerum esse 2. Scripto numero $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36.) — $\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36)

qui nimirum relinquatur post deductionem $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36) — $\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36)

$\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36) ex $\sqrt{8}$ $\sqrt{8}$ (10 + $\sqrt{8}$ 36) — $\sqrt{8}$ (10 — $\sqrt{8}$ 36)

(10 + $\sqrt{8}$ 36) atque eodem ducto in se, iuxta præscriptum propof. 4.

lib. 2. Eucl. fiet productus numerus 20 — $\sqrt{8}$

256.) Ergo residuum quæsitum erit $\sqrt{8}$ (20 — $\sqrt{8}$ 256) hoc est, $\sqrt{8}$ 4. siue 2. quod est propositum.

QUANDO propositæ radices huiusmodi sunt diuersæ, poterit minor a maiore subtrahi, ex præscripto propof. 7. lib. 2. Eucl. quando videlicet numerus productus ex vna radice in aliam multiplicata bis reduci potest ad numerum simplicem, vel compositum duarum particularum, hac scilicet ratione. Sit subtrahenda $\sqrt{8}$ (8 — $\sqrt{8}$ 32)

ex $\sqrt{8}$ (8 + $\sqrt{8}$ 32.) Quadrata duarum particularum sunt 8 — $\sqrt{8}$ 32. & 8 + $\sqrt{8}$ 32. quæ connexa per signum +, faciunt 8 — $\sqrt{8}$ 32 + 8 + $\sqrt{8}$ 32. hoc est, 16. Ex vna radice in alteram

fit $\sqrt{8}$ 32. cuius duplum $\sqrt{8}$ 128. ablatum ex $\sqrt{8}$ (8 + $\sqrt{8}$ 32)

16. summa quadratorum, relinquit 16 — $\sqrt{8}$ $\sqrt{8}$ (8 — $\sqrt{8}$ 32)

128. Huius ergo numeri radix quadrata, nimirum $\sqrt{8}$ (16 — $\sqrt{8}$ 128) est residuum desideratum.

SIT rursus auferenda $\sqrt{8}$ (2 + $\sqrt{8}$ 3) ex $\sqrt{8}$ (12 + $\sqrt{8}$ 108.) Summa quadratorum est 2 + $\sqrt{8}$ 3 + 12 + $\sqrt{8}$ 108. hoc est, 14 + $\sqrt{8}$ 147.

Nam $\sqrt{8}$ 108. & $\sqrt{8}$ 3. commensurabiles sunt, efficiuntq. $\sqrt{8}$ 147. Ex vna radice in alteram fit $\sqrt{8}$ (42 + $\sqrt{8}$ 1728) quæ radix, vt ex cap.

28. constabit, est $\sqrt{8}$ 24 + $\sqrt{8}$ 18. cuius duplum $\sqrt{8}$ 96 + $\sqrt{8}$ 72. demptum ex prædicta quadratorum summa 14 + $\sqrt{8}$

147. relinquit 14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 96. & — $\sqrt{8}$ 72. & præposito signo $\sqrt{8}$.

erit residuum subtractionis $\sqrt{8}$ (14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 96. & — $\sqrt{8}$ 72.) quod

idem est, ac 14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 96 + $\sqrt{8}$ 72. quia sensus est, ex 14 + $\sqrt{8}$ 147. detrahi aggregatum ex $\sqrt{8}$

96. & $\sqrt{8}$ 72. vt rectè dictum sit, residuum esse 14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 96. & — $\sqrt{8}$ 72. Est enim sensus, non solum subtrahi $\sqrt{8}$ 96. sed insuper $\sqrt{8}$ 72. subduci. Hoc autem perspicuè cernitur, si numerus

rationalis detrahendus sit, vt $\sqrt{8}$ 100 + $\sqrt{8}$ 4. ex 14 + $\sqrt{8}$ 147. ubi certum est, subtrahi 10 + 2. hoc est, 12. residuumq. esse 2 + $\sqrt{8}$

147. quod æquale sit huic, 14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 100 + $\sqrt{8}$ 4. siue huic, 14 + $\sqrt{8}$ 147 — $\sqrt{8}$ 100. & — $\sqrt{8}$ 4. vt perspicuum est.

QVOD si productus numerus ex vna radice in alteram non habeat

beat radicem, numerum compositum duarum particularum, facienda est subtractio per signum —. Vt si subtrahenda sit $\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})$ ex $\sqrt{3} (\sqrt{3} 12 + 2)$. Ex ductu vnius radicis in alteram fit $\sqrt{3} (\sqrt{3} 108 + 17)$ quæ, vt ex cap. 18. patebit, æquivallet huic, $\sqrt{3} (\sqrt{3} 127 + \sqrt{3} 2) + \sqrt{3} (\sqrt{3} 27 - \sqrt{3} 2)$. Quare commodius dicetur residuum subtractionis esse $\sqrt{3} (\sqrt{3} 12 + 2) - \sqrt{3} (2 - \sqrt{3} 3)$.

QUANDO denique huiusmodi radices sunt commensurabiles, subtrahetur vna ab altera per regulam trium, vt de radicibus simplicibus diximus. Sit enim subtrahenda $\sqrt{3} (2 + \sqrt{3} 3)$ ex $\sqrt{3} (8 + \sqrt{3} 48)$. Diuisa hac per illam, (inuento nimirum nouo diuifore $\sqrt{3} 1$. & nouo diuifendo $\sqrt{3} 4$) fit Quotiens $\sqrt{3} 4$. hoc est 2. ita vt proportio earum sit dupla, cuius denominator $\frac{1}{4}$. Si ergo fiat, vt 1. ad 1. ita $\sqrt{3} (2 + \sqrt{3} 3)$ ad aliud. producet $\sqrt{3} (2 + \sqrt{3} 3)$ pro residuo subtractionis.

ITEM sit auferenda $\sqrt{3} (4 + \sqrt{3} 6)$ ex $\sqrt{3} (8 + \sqrt{3} 24)$. Diuisa hac per illam, (inuento scilicet nouo diuifore $\sqrt{3} 10$. & nouo diuifendo $\sqrt{3} 20$.) fit Quotiens $\sqrt{3} 2$. ita vt denominator proportionis maioris ad minorem sit $\frac{1}{2}$. Si ergo fiat, vt 1. ad $\sqrt{3} 2 - 1$. ita $\sqrt{3} (4 + \sqrt{3} 6)$ ad aliud, prodibit residuum subtractionis $\sqrt{3} (12 + \sqrt{3} 54 - \sqrt{3} 128 - \sqrt{3} 48)$. Nam vt in regula trium multiplicetur $\sqrt{3} (4 + \sqrt{3} 6)$ per $\sqrt{3} 2 - 1$. reducendus est prius hic numerus ad quadratum 3 — $\sqrt{3} 8$ Sec.

Postremo sit subducenda $\sqrt{3} (\sqrt{3} 6 - \sqrt{3} 2)$ a $\sqrt{3} (\sqrt{3} 486 - \sqrt{3} 162)$. Diuisa hac per illam, (inuento scilicet diuifore nouo $\sqrt{3} 4$. nouo diuifendo $\sqrt{3} 36$) fit Quotiens $\sqrt{3} 9$. hoc est, 3. ita vt radices proportionis habeant proportionem triplam, cuius denominator $\frac{1}{3}$. Si igitur fiat, vt 1. ad 1. ita $\sqrt{3} (\sqrt{3} 6 - \sqrt{3} 2)$ ad aliud, prodibit residuum quæritu $\sqrt{3} (\sqrt{3} 96 - \sqrt{3} 32)$. Vt enim in regula trium secundus numerus in tertium multiplicetur, reducendi sunt ambo ad quadrata 4.

& $\sqrt{3} 6 - \sqrt{3} 2$. & vnum in alterum ducendum, vt hic factum esse vides, & productio præfigendum signum $\sqrt{3}$. vt residuum fiat $\sqrt{3} (\sqrt{3} 96 - \sqrt{3} 32)$. Idem residuum reperietur, si fiat, vt 3. ad 1. ita $\sqrt{3} (\sqrt{3} 486 - \sqrt{3} 162)$ ad aliud. Nam reuocato secundo numero regulæ trium

2. & tertio $\sqrt{3} (\sqrt{3} 486 - \sqrt{3} 162)$ ad quadrata 4. & $\sqrt{3} 486 - \sqrt{3} 162$. si inter se multiplicentur, gignetur numerus $\sqrt{3} 7776 - \sqrt{3} 2592$. qui vt per 3. primum numerum regulæ trium diuidatur, reducendus erit ad quadratum 9. Si ergo $\sqrt{3} 7776$. diuidatur per 9. id est, per $\sqrt{3} 81$. fiet Quotiens $\sqrt{3} 96$. Et si — $\sqrt{3} 2592$. diuidatur per 9. hoc est, per $\sqrt{3} 81$. fiet Quotiens — $\sqrt{3} 32$. Sec.

$$\sqrt{3} 6 - \sqrt{3} 2$$

$$\hline 4$$

$$\sqrt{3} 96 - \sqrt{3} 32$$

$$\hline$$

$$- \sqrt{3} 162$$

$$\hline$$

$$\sqrt{3} 486 - \sqrt{3} 162$$

$$\hline 4$$

$$\sqrt{3} 7776 - \sqrt{3} 2592$$

$$\hline$$

DE MINVTIIS NVMERORVM

Irrationalium, ac de earundem Algorithmo. Cap. XXV.



VMERATIO harum minutiarum facilis est.

Numeratio
minutiarum
irrationalium.

Quando enim signum radicale ponitur ante medium minutia, refertur signum illud ad vtrumque terminum, tam scilicet ad numeratorem, quam ad denominatorem. Vt hæc minutia $\sqrt[3]{\frac{8}{16}}$ significat $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ diuisam esse per $\sqrt[3]{\frac{16}{8}}$ æquualetq. $\frac{1}{2}$. Sic $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ significat $\sqrt[3]{\frac{3}{1}}$ diuisam esse per $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ æquualetq. $\frac{1}{3}$. Ita quoque $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ denotat, $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ esse diuisam per $\sqrt[3]{\frac{8}{1}}$.

QUANDO signum radicale ponitur ante numerum integrum est fractio, reducendus est totus numerus ad vnicam fractionem, vt eius valor exprimi possit. Vt $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ reducitur ad $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ significatq. $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ diuisam esse per $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ hoc est, per 5. potestq. ita representari $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, ita vt significet, $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ esse diuisam per 5. Quod si termini huius minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ multiplicentur per eundem aliquem numerum, nimirum per $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ producetur minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{4000}}$ æquualet minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$. Et si rursus termini producat minutia ducantur in eandem $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ fiet minutia æquualet $\sqrt[3]{\frac{1}{4000}}$ hoc est, $\sqrt[3]{\frac{1}{4000}}$ significatq. cubum 192. (qui videlicet producit ex $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ ducta in se cubice) diuisum esse per $\sqrt[3]{\frac{1}{4000}}$ quia radix cubica numeratoris 7077888 est 192. Rursus minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ significat $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ nimirum 4. diuisam esse per $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ nimirum per 8. æquualetq. minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. At minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ significat $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ id est, 4. diuisam esse per 64. æquualetq. minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ vel $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Sic minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ significat numerum 16. diuisum esse per $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$ id est, per 8. æquualetq. numero 2.

QUANDO eadem est proportio numeratorum ad denominatores, minutia æquales sunt, quemadmodum in minutis vulgaribus. Itaq. omnes hæc minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ eiusdem sunt valoris: quia in omnibus numerator ad denominatorem proportionem feruat quadruplam, vt constat, si numeratores singuli per singulos denominatores diuidantur.

MINVTIAE irrationales reducuntur ad minimos terminos, quia do reduci possunt, vt reduci solent minutia vulgares. Vt hæc minutia $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ reducitur ad hæc $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ & $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ ad $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$. Possunt quoque nonnunquam reduci ad minora signa radicalia. Vt $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ reducitur ad $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ quia numerator 4. habet radicem quadratam 2. sed hæc non habet cubicam: At denominator 8. habet radicem cubicam 2. sed hæc quadratam non habet. Esse autem hæc minutia

Abbreviatio
minutiarum
irrationalium.

$\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ aequales, probari potest ex multiplicatione in crucem.

Additio & subtractio minutorum irrationalium.

ADDITIO, atque subtractio fit in hunc modum. Si denominator est idem, adduntur denominatores, vt supra traditum est, vel vnus ab altero subtrahitur, & summa, vel residuo communis denominator supponitur.

Additio

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \text{ vel } \frac{1}{2}$$

Subtractio

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0} \text{ vel } \frac{1}{2}$$

Vt ex additione $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$ fit summa $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. At subtracta $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{2}$ relinquitur $\frac{1}{2}$.

id est $\frac{1}{2}$.

QUANDO autem denominatores sunt diuersi, fit reductio ad eundem denominatorem per multiplicationem in crucem, quemadmodum in minutis vulgaribus fieri consuevit. Deinde eodem modo numeratores adduntur inter se, vel vnus ab altero subtrahitur, & summa, vel reliquo numero idem denominator communis subtribitur. Vt si addi debent $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. ad $\frac{1}{6}$ vel illa ex hac auferenda, reducuntur, vt formula apposita monstrat, ad $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{6}$.

Reductio

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{6}$ 441

Additio

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

fit autem ex additione summa $\frac{1}{6}$. hoc est, $\frac{1}{6}$. Nam numeratores communis sunt in proportionem $\frac{1}{2}$ efficiuntq. summam $\frac{1}{6}$ 676. cui supponitur denominator communis $\frac{1}{6}$ 441. vt fiat summa $\frac{1}{6}$ 441. hoc est, $\frac{1}{6}$. id est, $\frac{1}{6}$. At subtracta $\frac{1}{6}$ ex $\frac{1}{6}$ remanent $\frac{1}{6}$. Nam numerator $\frac{1}{6}$ 441. subtractus a numeratore $\frac{1}{6}$ 196. relinquit $\frac{1}{6}$ 441. hoc est, $\frac{1}{6}$.

Eodem modo, si addendæ sunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. reducto eas prius ad eandem denominationem, videlicet ad $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{6}$. Additis deinde numeratoribus, ac supposito eodẽ denominatore 10. fit summa $\frac{1}{6}$ 10. At vero ex subtractione minoris minutæ ex maiore relinquitur $\frac{1}{6}$ 10. quia $\frac{1}{6}$ 100. ex $\frac{1}{6}$ 100. nihil relinquit.

ITEM si addendæ sunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. vel illa minutia ex hac detrahenda, non est opus reductione ad eandem denominationem. Fit autem ex numeratoribus summa $\frac{1}{6}$ 81. & supposito denominatore 9. fit summa ex duabus propositis minutis $\frac{1}{6}$ 81. hoc est, 1. At detractio numeratoris $\frac{1}{6}$ 4. ex numeratore $\frac{1}{6}$ 49. relinquitur $\frac{1}{6}$ 25. Est ergo residuum $\frac{1}{6}$ 25. hoc est, $\frac{1}{6}$.

QUANDO numeratores sunt incommensurabiles, additio eorũ fit per interpositionem signi +, subtractio autem per interiectionem signi - Vt summa ex $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ fit summa $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ dempta ex $\frac{1}{2}$ reliquam facit $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

IN

*Multiplicatio
ac diuifio mi-
nutiarum ir-
rationalium.*

IN multiplicatione, ac diuifione minutiarum irrationalium so-
lum opus est reductione ad eadem signa radicalia. Reliqua enim
perficiuntur, vt in minu-
tius vulgaribus traditum

Multiplicatio *Diuifio*
est. Vt si diuenda fit $\frac{1}{2}$, per $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3}$.
per $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{3}$. At si
prior per posteriorem diuenda fit, inuicem terminis diuiforis, sta-
bit exemplum, vt vides. Fit autem Quotiens $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$, hoc est $1\frac{1}{2}$.
Nam ex $\frac{1}{2}$ 3. in 7. fit $\frac{1}{2}$ 147. & ex 4. in $\frac{1}{2}$ 6. fit $\frac{1}{2}$ 96. In
diuifione tamen fieri potest reductio ad eandem denominationem,
sed tunc, relicto denominatore, facienda est diuifio numeratoris
per numeratorem. Vt in dato exemplo, minutix $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ re-
ducuntur ad $\frac{1}{6}$ & $\frac{2}{6}$. Diuifio autem numeratore $\frac{2}{6} \div \frac{1}{6} = 2$,
per numeratorem $\frac{1}{6}$ fit Quotiens $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$, vt prius.

SINT quoque multiplicanda inter se $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$.
Primum reducenda sunt ad eadem signa radicalia, retento eodem
denominatore comuni 10. Numeratores ergo $\frac{1}{2}$ 800. & $\frac{1}{3}$ 5184
reducuntur ad $\frac{1}{30}$ 12000000. & $\frac{1}{30}$ 16873856. Deinde si nu-
merator $\frac{1}{30}$ 1536. multiplicetur Zenfice, reducetur ad $\frac{1}{30}$
2359296. Itaq. sic stabunt minutix reducta. Ex $\frac{1}{30}$ 2359296. in
ad $\frac{1}{30}$ 12000000 non .001 mris. $\frac{1}{30}$ 12000000. $\frac{1}{30}$ 12000000.
quod est .01 mris. $\frac{1}{30}$ 12000000. $\frac{1}{30}$ 12000000. $\frac{1}{30}$ 12000000.
 $\frac{1}{30}$ 12000000. hoc est, in $\frac{1}{30}$ 512. (Nam $\frac{1}{30}$ 512. &
 $\frac{1}{30}$ 12000000. idem prorsus sunt, cum idem numerus fiat ex
 $\frac{1}{30}$ 512. in 10. hoc est, in $\frac{1}{30}$ 1000000. qui ex 1. in $\frac{1}{30}$
 $\frac{1}{30}$ 12000000) producitur $\frac{1}{30}$ 120795952. Et ex $\frac{1}{30}$ 2359296. in
 $\frac{1}{30}$ 16873856. fit $\frac{1}{30}$ 634038096576. hoc est, $\frac{1}{30}$ 7962624. cu
hic numerus fit illius producti radix zenfica. Et quoniam denomi-
natores multiplicati faciunt 100. erit productus numerus

AD extremum fit diuenda $\frac{1}{30}$ 12000000. $\frac{1}{30}$ 12000000. $\frac{1}{30}$ 12000000.
per $\frac{1}{30}$ 12000000. Quoniam eundem habent denominatorem, fa-
tis est, diuidere numeratores. Ex diuifione $\frac{1}{30}$ 12000000. per
 $\frac{1}{30}$ 2359296. fit Quotiens $\frac{1}{30}$ 217. nimirum $\frac{1}{30}$ 11625.
hoc est, $\frac{1}{30}$ 11625. propterea quod numerator $\frac{1}{30}$ 15625. aequaler
numero 5. cum numeri 15625. radix Zenfica fit 125. & huius radix
cubica 5. Vel (quod idem est) quod numeri 15625. radix cubica
fit 25. & huius radix Zenfica 5. At ex diuifione $\frac{1}{30}$ 16873856. per
 $\frac{1}{30}$ 2359296. fit Quotiens $\frac{1}{30}$ 11. siue $\frac{1}{30}$ 11. vel
 $\frac{1}{30}$ 11. hoc est, $\frac{1}{30}$ 11. siue $\frac{1}{30}$ 11. Ex diuifione ergo proposita fit Quo-
tiens $\frac{1}{30}$ 217. Vel $\frac{1}{30}$ 11. Vel $\frac{1}{30}$ 11.

*Radix 5.
quoniam radi-
cibus 5. in
15625. 15625
est 125. &
125. in 125.
est 5. &
5. in 5.
est 1.*

DE NUMERIS IRRATIONALIBVS

Cossicis, siue denominatis, vna cum

eorum Algorithmo.

Cap. XXVI.

Numeri Cossicis
siue irrationalibus,
qui.



NUMERI Cossici, siue denominati sunt irrationalibus, quando illis præfigitur signum aliquod radicalium. Vt $20\sqrt{2}$. fit irrationalis $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. Item $\sqrt{20}$ $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. &c. Sensus autem est, vt sumatur radix zenfica, vel cubica, vel zenfizenfica 20 . radicem, quæ mille modis variari potest, pro varietate valoris vnius radicis, potestq. aliquando esse rationalis, & aliquando, vt plurimum, irrationalis. Nam si $1\sqrt{2}$. est $\sqrt{2}$. erunt $20\sqrt{2}$. numerus 200 . cuius $\sqrt{2}$. est 10 . atque ita $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. est numerus rationalis, æquivalens 10 . At $\sqrt{20}$ $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. erit irrationalis, cum 200 . non habeant radicem cubicam. Sic etiam $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. erit irrationalis, quod 200 . non habeant radicem zenfizenficam: æquiualeat tamen $\sqrt{2}$ 10 . quippe cum radix zenfica 200 . fit 10 . & radix zenfica 20 . fit $\sqrt{2}$ 10 . Quod si $1\sqrt{2}$. fit $\sqrt{2}$. erit valor $20\sqrt{2}$. 2000 . quæ habent radicem cubicam 10 . Erit igitur $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. rationalis, æquivalens 10 . At $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. erit irrationalis, sicut & $\sqrt{2}$ $20\sqrt{2}$. cum 2000 . neque habeant radicem zenficam, neque zenfizenficam: Vides ergo, non posse iudicari, an huiusmodi numeri sint rationales, vel irrationales, nisi prius constet æstimatio vnius radicis. Immo fieri potest, vt numerus aliquis Cossicus, sine signo radicali, inueniatur interdum esse irrationalis. Vt si æquatio reperiatur inter $1\sqrt{2}$. & $20\sqrt{2}$. & vnius zenfi pretium fit 18 . necessario numerus $20\sqrt{2}$. erit irrationalis, æquivalens $\sqrt{2}$ 7200 . Nam quadrati 18 . radix est $\sqrt{2}$ 18 . atque adeo $20\sqrt{2}$. erunt $\sqrt{2}$ 7200 . qui numerus irrationalis est, cum 7200 . careant radice quadrata.

Additio, &
Subtractio nu-
merorum Cossicorum ir-
rationalium.

ALGORITHMVS horum numerorum ex triplici Algorithmo consistit, signorum radicalium, numerorum absolutorum, & signorum Cossicorum: neque admodum difficilis est, cum ipsa signa satis nos instruant, quid agere debeamus. Additio enim vt plurimum fit per interpositionem signi $+$. Subtractio vero per signum $-$. Vt ex additione $\sqrt{2}$ $36\sqrt{2}$. ad $\sqrt{2}$ $12\sqrt{2}$. fit summa $\sqrt{2}$ $36\sqrt{2}$ $+$ $\sqrt{2}$ $12\sqrt{2}$. Vel $\sqrt{2}$ $12\sqrt{2}$ $+$ $\sqrt{2}$ $36\sqrt{2}$. At dehisceis 36 . ex $\sqrt{2}$ $36\sqrt{2}$. fit reliquus numerus $\sqrt{2}$ $36\sqrt{2}$. & sic de alijs.

QUANDO signa Cossica sunt eadem, & numeri irrationales, semotis signis Cossicis, sunt commensurabiles, tunc signa Cossica operationem non impediunt, sed numeri irrationales adduntur, ac subtrahuntur, quemadmodum radices surdæ, vt cap. 19. & 20. monstratum.

fratum est, ac post operationem idem signum Coficum apponitur. Vt ex $\frac{48}{8}$ 2^{te}. ad $\frac{48}{18}$ 2^{te}. fit summa $\frac{48}{50}$ 2^{te}. quia $\frac{48}{8}$ 8. & $\frac{48}{18}$ 18. cōmenfurabiles sunt, efficiunt $\frac{48}{50}$. quod constat ita esse, si 2^{te} statuat 3, triunt enim 8 2^{te}. 16. cuius numeri radix est 4. et 18 2^{te}. faciente 36. cuius numeri radix est 6. Fiunt autem 10. ex 4. & 6. Liqueat autem $\frac{48}{50}$ 2^{te}. facere etiam 10. cum 50 2^{te} faciant 100. cuius numeri radix est 10.

SIC ex $\sqrt[3]{8} \text{ 2e. ad } \sqrt[3]{32} \text{ 2e. fit } \sqrt[3]{72} \text{ 2e. quod per resolutionem probari potest, posita } 1 \text{ 2e. 2. Nam } \sqrt[3]{8} \text{ 2e. erit 4. \& } \sqrt[3]{32} \text{ 2e. erit 8. fit autem ex 4. \& 8. summa 12. Vide iam, an summa collecta } \sqrt[3]{72} \text{ 2e. faciat etiam 12. Certum autem est, } 72 \text{ 2e. facere } 144. cuius radix est 12.}$

ITEM: ex 14. 8. ad 16. 32. fit summa 16. 72. Et ex 16. 8. ad 16. 4. fit 16. 36. Nam si 1. 2. Ratuatur 2. ut 1. 2. fit 4. erunt 16. 64. cuius numeri radix est 8. At 4. 2. erunt 16. cuius numeri radix est 4. Fiant autem 1. 2. ex 8. & 4. quantum nimirum valet 16. 36. quippe cum 16. 3. fit 144. cuius numeri radix est 12.

PRÆTEREA ex 488 g. ad 48 18 g. fit 48 50 g. quod etiam perbelles examini quadrat, posita 72 2. vt 18 g. fit 4. Erunt enim 8 g. 72. cuius numeri radix est 48 32. Et 18 g. sunt 72. cuius radix est 48 72. Fit autem ex 48 32. & 48 72. summa 48 200. Ac tantundem facit 48 50 g. quippe cum 50 g. sint 200. cuius numeri radix est 48 200.

EADEM ratione, dempta $\sqrt{38}$ 2g. ex $\sqrt{38}$ 18 2g. superest $\sqrt{38}$ 2 2g. Atque subtrahit $\sqrt{38}$ 8 g. a $\sqrt{38}$ 18 g. reliqua fit $\sqrt{38}$ a 3 g. Veramque exemplum per radiceem 1. sic examinabimus. 8 2g. faciunt 16. cuius numeri radix est 4. Et 18 g. faciunt 36. cuius numeri radix est 6. Demptis autem 4. ex 6. remanent 2. Accitantundem facit $\sqrt{38}$ a 2g. cu 2 2g. faciunt 4. cuius numeri radix est 2. Rursus 8 3 g. faciunt 32. cuius numeri radix est $\sqrt{38}$ 32. Et 18 g. faciunt 72. cuius numeri radix est $\sqrt{38}$ 72. Subtrahit vero $\sqrt{38}$ 32. ex $\sqrt{38}$ 72. remanet $\sqrt{38}$ 8. quantum nimirum facit $\sqrt{38}$ a 3 g. propterea quod 2 g. faciunt 8. cuius numeri radix est $\sqrt{38}$ 8.

V.T. autem numeri Cossici irrationales inter se multiplicentur, aut dividantur, reducenda prius sunt signa radicalia ad idem signū vt cap. 18. docuimus: si nimirum multiplicatio fiat in cruce. Vt Jre 4 ze. & Jg 8 ze. reducantur ad Jze 16 g. & Jze 512 ce. vt ex subiecta formula patet. Nam 4 ze ductæ in se zenificæ, faciunt 16 g. & 8 ze multiplicatæ in se cubicæ faciunt 512 ce. Exponentes vero signorum radicalium inter se multiplicati faciunt 6. exponentem signi Jze. Reductionem autem esse ritè peractam, hoc est, Jze 16 g. æqualem esse Jre 4 ze. & Jze 512 ce. æqualere Jg 8 ze. perspicuum est. Nam posita 1 ze 1. crunt 4 ze 8. cu-

$$\begin{array}{r} \text{Jze } 16\text{ g} \qquad \text{Jze } 512\text{ ce} \\ \hline 4\text{ ze} \times 8\text{ ze} \\ \hline \text{Jre } 4\text{ ze} \qquad \text{Jg } 8\text{ ze} \\ \hline 3 \qquad 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

[Faint, illegible handwritten text]

*Reductio fi-
gnorum radi-
calium in nu-
meris Coficis
irrationalibus*

$$\begin{array}{r} \sqrt{16} \quad \sqrt{36} \\ 4 \quad 6 \\ \hline 16 \quad 36 \\ \hline 64 \quad 144 \\ \hline 100 \quad 225 \\ \hline 169 \quad 400 \end{array}$$

ius numeri radix cubica est 2. Ac tantundem facit $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ ad qua
reducta est $\sqrt[3]{4}$ re. 4 re. Nam 16 $\frac{8}{16}$ faciunt 64. cuius numeri radix zen-
sificubica est 2. Item 8 re. erunt 16. cuius numeri radix zensifica est 4.
Atque tantundem quoque facit $\sqrt[3]{8}$ re. 16 re. ad quam $\sqrt[3]{8}$ re. re-
uocata est. Nam 512 re. faciunt 4096. cuius numeri radix zensificu-
bica est 4.

Eodem modo $\sqrt[3]{8}$ re. & $\sqrt[3]{4}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ reducentur ad $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. &
 $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. ut hac altera formu-
la docet. Esse autem $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re.

$\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. & $\sqrt[3]{8}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re.
equalem $\sqrt[3]{8}$ re. & $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re.
equivalere $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. facile proba-
bimus. Nimirum $\sqrt[3]{8}$ re. hoc est.

$\sqrt[3]{8}$ re. 16 est 4. quantum videlicet facit
 $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. quippe cum 512 re. fa-
ciant 4096. cuius numeri $\sqrt[3]{8}$ re. est 4.

Item $\sqrt[3]{4}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. est quoque 4. quan-
tum nimirum facit $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. cum 256 $\frac{8}{16}$ re. faciant 4096. qui
numerus radicem zensificubica habet 4. Ex quo constat, tam $\sqrt[3]{8}$ re.
& $\sqrt[3]{4}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. inter se, quam $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. & $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. inter se
esse aequales.

*Multiplicatio
ac diuisio nu-
merorum Cos-
sorum irrati-
onalium.*

FACTA reductione, ut praecepimus, institui potest & multiplicatio
& diuisio. In priori ergo exemplo, ex multiplicatione
 $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. in $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. fit $\sqrt[3]{8}$ re. 8192 $\frac{8}{16}$ re. quod ita probatur. $\sqrt[3]{8}$ re.
512 re. facit 4. Et $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. facit 2. Atque ex 4. in 2. sunt 8. quan-
tum nimirum facit $\sqrt[3]{8}$ re. 8192 $\frac{8}{16}$ re. Quoniam videlicet 8192 $\frac{8}{16}$ re. faciunt
262144. cuius $\sqrt[3]{8}$ re. est 8. Item ante reductionem $\sqrt[3]{4}$ re. 4 re. est 2. &
 $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. est 4. ubi rursus vides, ex 2. in 4. gigni 8.

Item ex diuisione $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. per $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. fit Quotiens $\sqrt[3]{8}$ re.
32 re. hoc est 2. cum 32 re. faciant 64. cuius numeri $\sqrt[3]{8}$ re. est 2.
quod probatur. Nam $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. est 4. & $\sqrt[3]{8}$ re. 16 $\frac{8}{16}$ re. est 2. ubi cer-
nis, ex diuisione 4. per 2. Quotientem fieri 2. quod etiam ante re-
ductionem manifestum est: quippe cum $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. fit 4. & $\sqrt[3]{4}$ re. 4 re.
fit 2. ubi iterum ex diuisione 4. per 2. fit Quotiens 2.

*Ad aliam
hoc
et in
et in
et in
et in*

IN posteriori vero exemplo, ex multiplicatione $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. in
 $\sqrt[3]{8}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. fit $\sqrt[3]{8}$ re. 131072 $\frac{8}{16}$ re. hoc est 16. propterea quod
131072 $\frac{8}{16}$ re. faciunt 26777216. qui numerus radicem zensificubica
habet 16. Atque hoc ita esse, liquet. Nam tam $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. quam
 $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. est 4. Manifestum autem est, ex 4. in 4. fieri 16. quod
etiam patet ante reductionem, cum tam $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. quam $\sqrt[3]{4}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re.
4. posita 1 re. 2. &c.

Item ex diuisione $\sqrt[3]{8}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. per $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. fit Quotiens
 $\sqrt[3]{8}$ re. $\frac{1}{2}$ re. hoc est, $\sqrt[3]{8}$ re. 1. cum $\frac{1}{2}$ re. fit 1. posita 1 re. 2. ac proinde
cum $\sqrt[3]{8}$ re. 1. fit 1. erit Quotiens 1. ut ratio postulat. Cum enim
 $\sqrt[3]{8}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. & $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. aequales sint, quod quilibet earum fit
4. ut dictum est, fiet ex diuisione vnus per alteram Quotiens 1. Pa-
ri ratione ex diuisione $\sqrt[3]{8}$ re. 131072 $\frac{8}{16}$ re. per $\sqrt[3]{8}$ re. 512 re. fit Quo-
tiens $\sqrt[3]{8}$ re. 256 $\frac{8}{16}$ re. ut probare poter.

SIC etiam, vt 1 2e ducatur in $\sqrt[4]{8}$ 4. quadranda erit 1 2e. & quadrato 1 8, præponendum signum radicale $\sqrt[4]{8}$, vt fiat $\sqrt[4]{8}$ 1 8. atque ita ex $\sqrt[4]{8}$ 1 8 in $\sqrt[4]{8}$ 4. fit numerus $\sqrt[4]{8}$ 4 8. quod probatur, si 1 2e. fit 2. Nam ex 2. in $\sqrt[4]{8}$ 4. id est in 2. fiunt 4. radix nimirum 4 8. id est, numeri 16.

Ita quoque vt 3 2e ducantur in $\sqrt[4]{8}$ 16. quadrandus erit numerus 3 2e vt fiunt 9 8. Deinde $\sqrt[4]{8}$ 9 8 ducenda in $\sqrt[4]{8}$ 16. gigneturq. numerus $\sqrt[4]{8}$ 144 8. quod eodem modo probabitur, sumpto binario pro 1. radice. Nam 3 2e facient 6. & $\sqrt[4]{8}$ 16. facit 4. Fiunt autem 24. ex 6. in 4. Ac radix 8 144 8. facit similiter 24. cum 144 8 faciant 576. cuius numeri radix est 24. &c.

Hi porro numeri producti $\sqrt[4]{8}$ 4 8. & $\sqrt[4]{8}$ 144 8. dicuntur numeri radicum, vt in ænigmate 12. & 28. cap. 32. constabit: quia videlicet prior productus est ex 1 2e. in $\sqrt[4]{8}$ 4. posterior autem ex 3 2e. in $\sqrt[4]{8}$ 16. quemadmodum numerus 4. productus ex 1. aureo in 4. Item numerus 48. productus ex 8. aureis in 16. dicitur numerus aureorum. Id quod diligenter observandum est.

Atque hoc perinde est, ac si ducatur 1. in $\sqrt[4]{8}$ 4. vel 3. in $\sqrt[4]{8}$ 16. Producti enim numeri $\sqrt[4]{8}$ 4. & $\sqrt[4]{8}$ 144. sunt numeri unitatum, quæ multiplicatæ sunt. Itaq. ex 1 2e. in $\sqrt[4]{8}$ 4. fit numerus radicum $\sqrt[4]{8}$ 4 8. nimirum $\sqrt[4]{8}$ 4. zenforum. Et ex 3 2e. in $\sqrt[4]{8}$ 16. fit numerus radicum $\sqrt[4]{8}$ 144 8. id est, $\sqrt[4]{8}$ 144. zenforum, atque ita de cæteris. quandoquidem in huiusmodi multiplicationibus seruata est regula multiplicationis radicum furdarum, quæ in cap. 18. tradita est. Verum hoc melius percipitur ex solutione ænigmatis 12. & 28. cap. 32.

OBSERVANDVM autem hic est, rem non succedere, si signa *Quando post reductionem signa Cosifica abbreviari possunt, & quando non.* Cosifica, vt cap. 7. docui, abbreviuntur. Nam in priori exemplo, in quo 1 2e. & $\sqrt[4]{8}$ 8 2e reductæ sunt ad $\sqrt[4]{8}$ 16 8. & $\sqrt[4]{8}$ 512 2e. ubi ex multiplicatione procreatus est numerus 8. si signa Cosifica abbreviari possint, stabit reductio in his terminis $\sqrt[4]{8}$ 16. & $\sqrt[4]{8}$ 512 2e. Sed ex multiplicatione vnus in alteram fit $\sqrt[4]{8}$ 8192 2e. quæ valet 128. propterea quod 8192 2e. faciunt 16384. cuius numeri $\sqrt[4]{8}$ est 128. & huius 128. est 128. quæ æqualis non est priori numero producto 8. Solum quando huiusmodi numeri reducti æquales sunt, abbreviari poterunt signa Cosifica. Tunc epim manet adhuc æqualitas, vt cap. 12. diximus. Vt quia $\sqrt[4]{8}$ 512 2e. & $\sqrt[4]{8}$ 256 8. æquales sunt, cum quolibet valeat 4. si abbreviuntur signa Cosifica, cernetur adhuc æqualitas inter $\sqrt[4]{8}$ 512. & $\sqrt[4]{8}$ 256 2e. quippe cum 256 2e faciant 512. Constat autem $\sqrt[4]{8}$ 512. & $\sqrt[4]{8}$ 256 2e. æquales esse. Hoc te monere volui, ne signa Cosifica abbrevies, etiam post reductionem factam, nisi constet numerorum æqualitas.

DE minutis porro horum numerorum non attinet quidquam dicere, cum suorum integrorum præcepta sequantur in omnibus.

CAETERVM si occurrat æquatio inter numerum Cosificum Irra. *Æquatio inter numerum fractionalem, & numerum absolutum, reducetur ea æquatio hoc modo.*

*Coefficientum Ir-
rationali, &
numerum ab-
solutum.*

do. quod quidem prope finem cap. 10. polliciti sumus; nos hoc lo-
co docturos. Sit V. g. æquatio inter $\sqrt{8}$ 24 26. & 12. Quo posito,
erit quoque æquatio inter eorum quadrata 24 26. & 144. Diuisis
ergo 144. per 24. prodibit in Quotiente vnus radice pretium 6:
quod patet. quia 24 26 facient 144. cuius numeri radix quadrata
est 12.

Item si sit æquatio inter $\sqrt{8}$ 10 8. & 20. erit etiam æquatio inter
eorum quadrata 10 8. & 400. Diuisis igitur 400. per 10. reperietur
1 8. valere 40. atque idcirco 1 26. valebit $\sqrt{8}$ 40. Nam 10 8. erunt
400. cuius numeri radix quadrata est 20.

Denique si æquatio inueniatur inter $\sqrt{8}$ 12 8. & 30. erit etiam
æquatio inter eorum cubos 12 8. & 27000. Diuisis ergo 27000. per
12. prodibit pretium 1 8. 2250. ac propterea 12 8. facient 27000.
cuius numeri radix cubica est 30.

*Quando lu-
in medi aqua
tio impossibilis
fit.*

Quod si quis proponat æquationem inter $\sqrt{8}$ 8. & 3. erit etiam
æquatio inter eorum cubos 8. & 27. quod est impossibile. Itaq. in
hiscæ æquationibus, necesse est, numerum absolutum esse radicem
numeri, qui gerit signum radicale. qualis est æquatio inter $\sqrt{8}$ 8.
& 2. Item inter $\sqrt{8}$ 64. & 4. Item inter $\sqrt{8}$ 81. & 9. &c. Alioquin
impossibilis erit æquatio.

DE BINOMIIS, ATQVE APOTOMIS, Residuisvè. Cap. XXVII.

*Binomium, &
Residuum: ut
Trinomium,
Quadrinomiū
apud scripto-
res quid.*



*Binomium, et
Residuum se-
cundum Eu-
clidem, quid.*

CRIPTORES Algebrae fermè omnes, duos
numeros quosuis copulatos per signum +, Bino-
mium appellare solent, vt $\sqrt{8}$ 12 + $\sqrt{8}$ 3. & $\sqrt{8}$ 18
+ $\sqrt{8}$ 8. & 6 + $\sqrt{8}$ 9. Copulatos vero per signum
—, Residuum, vel Apotomen, vt $\sqrt{8}$ 12 — $\sqrt{8}$ 3. &
 $\sqrt{8}$ 18 — $\sqrt{8}$ 8. & 6 — $\sqrt{8}$ 9. Plures autem nume-
ros ita copulatos, dicere consueuerunt, trinomiū,
quadrinomiū, &c. vt $\sqrt{8}$ 17 + $\sqrt{8}$ 10 + $\sqrt{8}$ 3. vel $\sqrt{8}$ 17 — $\sqrt{8}$ 10 +
 $\sqrt{8}$ 3. dicunt Trinomium: At $\sqrt{8}$ 17 + $\sqrt{8}$ 10 + $\sqrt{8}$ 3 + $\sqrt{8}$ 2. Vel $\sqrt{8}$
17 — $\sqrt{8}$ 10 + $\sqrt{8}$ 3 — $\sqrt{8}$ 2. Quadrinomiū, &c. Euclides autem
in lib. 10. propos. 37. & 74. tunc solum numeros binos copulatos
per signum +. vel —, vocat Binomia, vel Residua, quando duo illi
numeri copulari sunt Rationales solum potentia commensurabiles,
quamuis alter eorum sit radix surda, vel vterque. Vt 6 + $\sqrt{8}$ 20.
Item $\sqrt{8}$ 18 + 4. Item $\sqrt{8}$ 24 + $\sqrt{8}$ 18. vocat Binomia: At 6 — $\sqrt{8}$ 20.
Et $\sqrt{8}$ 18 — 4. Et $\sqrt{8}$ 24 — $\sqrt{8}$ 18. appellat Residua, vel Apotomas.
Nam quilibet duo numeri copulati sunt Rationales potentia tan-
tum commensurabiles; cum eorum quadrata commensurabilia sint
quadrato cuiusuis numeri Rationalis. Itaque neque $\sqrt{8}$ 10 + $\sqrt{8}$
8. Binomium erit, neque $\sqrt{8}$ 10 — $\sqrt{8}$ 8. Residuum. quia eorum parti-

particulæ sunt numeri Irrationales: quippe cum eorum quadrata, $\sqrt{8} 10$. & $\sqrt{8} 8$. sint incommensurabilia habentia proportionem, quâ $\sqrt{8} 4$. ad 1. ut ex Lemmate cap. 18. patet. Eadem ratione neque $6 + \sqrt{8} 9$. neque $10 + 6$. Binomia erunt, neque $6 - \sqrt{8} 9$. neque $20 - 6$. Residua: propterea quod bini quilibet numeri efficiunt vnum solum numerum rationalem, non autem duos. Nam $6 + \sqrt{8} 9$. æquivalent 9 . & $10 + 6$. æquivalent 16 . Item $6 - \sqrt{8} 9$. æquivalent 3 . Et $20 - 6$. æquivalent 14 . Ratio autem est, quod bini quilibet sunt Rationales longitudine commensurabiles, & non potentia tantum: quippe cum proportio inter quoslibet duos sit rationalis; Proportio enim 6 . ad $\sqrt{8} 9$. dupla est: si namq. per $\sqrt{8} 9$. diuidantur 6 . hoc est, $\sqrt{8} 36$. exhibet in Quotiente $\sqrt{8} 4$. hoc est, 2. denominator proportionis. Si vero diuidantur 20 . per 6 . fiet Quotiens $3\frac{1}{3}$. ita ut 20 . ad 6 . habeant proportionem triplam sesquiterciam. Eadem ratione, neque $\sqrt{8} 12 + \sqrt{8} 3$. Binomium erit, neque $\sqrt{8} 12 - \sqrt{8} 3$. Residuum, licet vterque numerus sit radix surda. quia numeri proportionem habent duplam, & priores duo efficiunt summam $\sqrt{8} 27$. videlicet vnicum numerum: posteriores vero duo æquivalent $\sqrt{8} 3$. vnicum etiam numero. Eandemq. ob causam neque $\sqrt{8} 18 + \sqrt{8} 8$. Binomium erit censendum, neque $\sqrt{8} 18 - \sqrt{8} 8$. Residuum, quamuis vterque numerus radix surda sit. quia numeri proportionem habent sesquialteram, cuius denominator est $1\frac{1}{2}$. ac priores duo faciunt summam $\sqrt{8} 50$. vnicum numerum: posteriores vero duo huic vnicum numero $\sqrt{8} 8$. æquivalent. Denique propositis duobus numeris rationalibus, hoc est, quorum quadrata commensurabilia sunt: quadrato cuiusvis numeri rationalis, ita tamen, ut diuiso vno per alterum, Quotiens fiat rationalis, id est, numerus, qui radicem habeat, non constitueret ex illis Binomium, aut Residuum: quia eiusmodi numeri non sunt potentia tantum commensurabiles, sed etiam longitudine; ac proinde ex ipsis non fit numerus irrationalis, sed rationalis, licet nonnunquam efficiatur radix surda. Ut ex 3. & $\sqrt{8} 16$. fit summa $\sqrt{8} 49$. hoc est, 7. numerus rationalis, qui surdus non est: At ex $\sqrt{8} 8$. & $\sqrt{8} 18$. fit summa $\sqrt{8} 50$. numerus rationalis surdus. Atque in hoc decipiuntur non pauci, putantes omnem numerum, qui gerit signum $\sqrt{8}$. & radicem non habet, esse irrationalem. quod verum non est, atque Euclidi manifeste repugnat. Solum quando numerus gerens signum $\sqrt{8}$. refert superficiem aliquam, vel quadratû, numerus ille irrationalis est. qualis est superficies rectangula producta ex multiplicatione mutua duorum numerorum rationalium potentia tantum commensurabilium. Ut si $\sqrt{8} 3$. ducatur in $\sqrt{8} 10$. producitur superficies $\sqrt{8} 30$. irrationalis, quæ Media dicitur. Radix autem eius quadrata est $\sqrt{8} 90$. quæ vocatur linea Media. cum hæc in se quadratè ducta faciat $\sqrt{8} 900$. hoc est, $\sqrt{8} 30$. propterea quod radix zenfica numeri 900. est 30. & huius radix zenfica est $\sqrt{8} 30$. Itaq. quando in superioribus numeros habentes præfixum signum $\sqrt{8}$. vocamus irracionales, id improprie dictum accipiendum est, quando numeri illi rationales sunt.

Non omnem numerum, qui gerit signum $\sqrt{8}$. esse irrationalem. a 22. decimi.

Superficies, & linea Media.

Potest quidem omnis numerus gerens signum $\sqrt{}$. dici numerus irrationalis, si sumatur pro superficie Media, producta ex $\sqrt{2}$ 1. in ipsum numerum. Vt $\sqrt{2}$ 3. erit superficies Media, & irrationalis, si capiatur pro producto ex $\sqrt{2}$ 1. in $\sqrt{2}$ 3. cuiusq. radix quadrata erit $\sqrt{2}$ 3. Nam hæc ducta in se zensicæ facit $\sqrt{2}$ 9. hoc est $\sqrt{2}$ 3. quippe cum radix zensica numeri 9. sit 3. & huius radix zensica $\sqrt{2}$ 3. & sic de alijs.

*Sex Binomia,
at Residua.*

a 12. decimi.

*Binomium pri-
mum.*

*Binomium se-
cundum.*

*Binomium
tertium.*

*Binomium
quartum.*

CONSTITUIT. Euclides sex genera Binomiorum, totidemq. Residuorum. Aut enim maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est communis longitudo, vel incommensurabilis. Item vel maius nomen communis longitudo est longitudine numero rationali exposito, vel minus, vel neutrum. Vtrumque enim nomen exposito numero rationali longitudine communis longitudo esse nequit. quia & ipsa nomina essent numeri rationales longitudine communis longitudo. quod est absurdum, cum ponantur potentia tantum communis longitudo. Quibus positis, sunt sex genera Binomiorum. quæ sic definiuntur.

Binomium primum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine communis longitudo, ipsumq. maius nomen exposito numero rationali est communis longitudo. Vt $\sqrt{2}$ 6 + $\sqrt{2}$ 27. quia quadratum maioris nominis 6. nimirum 36. superat 27. quadratum minoris nominis, quadrato 9. cuius radix 3. longitudine communis longitudo est maiori nomini 6. atque ipsum quoque maius nomen 6. communis longitudo est longitudine exposito cuius numero rationali.

Binomium secundum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine communis longitudo, ipsumq. minus nomen exposito numero rationali est longitudine communis longitudo. Vt $\sqrt{2}$ 48 + 6. quia quadratum maioris nominis, nimirum 48. superat 36. quadratum minoris nominis, quadrato 12. cuius radix, videlicet $\sqrt{2}$ 12. communis longitudo est longitudine maiori nomini; cum $\sqrt{2}$ 48. ad $\sqrt{2}$ 12. habeat proportionem duplam; propterea quod illa per hanc diuisa, fiat Quotiens $\sqrt{2}$ 4. hoc est, 2. Item minus nomen exposito cuilibet numero rationali communis longitudo est longitudine.

Binomium tertium est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine communis longitudo, sed neutrum nomen exposito numero rationali longitudine communis longitudo existit. Vt $\sqrt{2}$ 24 + $\sqrt{2}$ 18. quia maioris nominis quadratum 24. superat 18. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{2}$ 6. communis longitudo est longitudine maiori nomini: cum $\sqrt{2}$ 24. ad $\sqrt{2}$ 6. proportionem habeat duplam: quippe cum illa diuisa per hanc, Quotiens fiat $\sqrt{2}$ 4. hoc est, 2. At neutrum nomen longitudine communis longitudo est exposito numero rationali.

Binomium quartum est, cuius maius nomen plus potest, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini est longitudine incommensurabilis.

menſurabilis, ipſum vero maius nomen expoſito numero rationali commenſurabile eſt longitudine. Vt $4 + \sqrt{8}$ 10. quia maioris nominis quadratum 16. ſuperat 10. quadratum minoris nominis, quadrato 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{8}$ 6. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini 4. quippe cum maioris nominis quadratum 16. ad 6. quadratum $\sqrt{8}$ 6. proportionem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: ac propterea eorum latera longitudine ſint incommenſurabilia. At maius nomen 4. longitudine commenſurabile eſt numero expoſito rationali.

Binomium quintum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommenſurabilis eſt longitudine, nomen vero minus expoſito numero rationali longitudine eſt commenſurabile. Vt $\sqrt{8}$ 5 + 2. quia quadratum 5. maioris nominis ſuperat 4. quadratum minoris nominis, quadrato 3. cuius radix, nimirum $\sqrt{8}$ 1. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini: quippe cum maioris nominis quadratum ad 1. quadratum $\sqrt{8}$ 1. proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad numerum quadratum: ac propterea latera eorum ſint longitudine incommenſurabilia. Eſt tamen minus nomen 2. longitudine commenſurabile expoſito numero rationali cuiſcunque.

Binomium denique ſextum eſt, cuius maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato, cuius radix maiori nomini incommenſurabilis eſt longitudine, ſed neutrum nomen expoſito numero rationali commenſurabile longitudine. Vt $\sqrt{8}$ 80 + $\sqrt{8}$ 50. quia quadratum 80. maioris nominis ſuperat 50. quadratum minoris nominis, quadrato 30. cuius radix, nimirum $\sqrt{8}$ 30. longitudine incommenſurabilis eſt maiori nomini. quippe cum quadratum 80. maioris nominis, & quadratum 30. proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum: ideoque eorum latera longitudine ſint incommenſurabilia longitudine. Neutrum quoque nomen longitudine commenſurabile eſt expoſito numero rationali.

SEX autem Reſidua, vel Apotome eodem modo ſe habent: cum ex quolibet Binomio oriatur Apotome reſpondens, interpoſito ſigno — pro ſigno +. Nam ex Euclide Apotome nil aliud eſt, quam id, quod relinquitur, ſi duobus numeris rationalibus potentia tantum commenſurabilibus poſitis, minor de maiore detraharur. quod quidem fit per interpoſitionem ſigni —.

Itaque ex primo Binomio $6 + \sqrt{8}$ 27. fit prima Apotome $6 - \sqrt{8}$ 27.

Ex ſecundo Binomio $\sqrt{8}$ 48 + 6. fit Apotome ſecunda $\sqrt{8}$ 48 — 6.

Ex tertio Binomio $\sqrt{8}$ 24 + $\sqrt{8}$ 18. fit Apotome tertia $\sqrt{8}$ 24 — $\sqrt{8}$ 18.

Ex quarto Binomio $4 + \sqrt{8}$ 10. fit quarta Apotome $4 - \sqrt{8}$ 10.

Ex quinto Binomio $\sqrt{8}$ 5 + 2. fit quinta Apotome $\sqrt{8}$ 5 — 2.

Ex ſexto denique Binomio $\sqrt{8}$ 80 + $\sqrt{8}$ 50. fit ſexta Apotome $\sqrt{8}$ 80 — $\sqrt{8}$ 50.

a 9. decimi.

Binomium
quintum.

b 9. decimi.

Binomium
ſextum.

c 9. decimi.

Sex genera
Apotomarum

80. — $\sqrt{8}$ 50. quæ omnia perspicua sunt ex definitionibus Apotomarum ab Euclide traditis.

QVONIAM vero intelligentia decimi libri potissimum in cognitione Binomiorum, ac Residuorum consistit, libet paulatim diutius in eorum tractatione immorari. Primo autem loco docebimus, quæ ratione quoduis Binomium operatum, ac proinde & Residuum (cui hoc solum signo — ab illo differat) reperitur: Deinde, quæ arte ex quouis Binomio, aut Residuo radix quadrata eliciatur, & quamnam lineam Irrationalem, vel numerum compositum, diminuiturve radix illa constituat: insistentes semper ijs, quæ ab Euclide demonstrata sunt.

Binomij primi, & Apotoma prima inuentio.

SIT ergo inueniendum primum Binomium, primumq. Residuum. Quadratus quilibet numerus A B, nimirum 9. diuidatur in B. C, quadratum numerum 4. & in A C, numerum non quadratū 5. assumaturq. numerus rationalis quicunque 6. pro primo nomine. Et fiat, vt numerus 9. A B, ad numerum 5. A C, ita 36. quadratus numerus assumpti numeri 6. ad aliud: inuenieturq. quadratus 20. Ergo $6 + \sqrt{8}$ 20. erit primum Binomium. Et $6 - \sqrt{8}$ 20. erit prima Apotome, vt constet ex propo. 49. & 86. lib. 10. Eucl.

Binomij secundum, & Apotoma inuentio.

Binomium verò secundum, atque Apotome secunda hoc modo reperietur. Diuiso quocunque numero quadrato A B, nimirum 9. in B C, quadratum 4. & in A C, non quadratum 5. assumatur ad libitum numerus rationalis 5. pro secundo nomine: Fiat, vt numerus 5. A C, ad quadratum numerum 9. A B, ita 25. quadratus numerus numeri assumpti 5. ad aliud: inuenieturq. quadratus 45. Ergo Binomium secundum est $\sqrt{8}$ 45 + 5. Et $\sqrt{8}$ 45 — 5. Apotome secunda, vt manifestum est ex propo. 50. & 87. lib. 10. Eucl.

Binomij tertium, & Apotoma inuentio.

Binomium tertium, & Apotomam tertiam inueniemus sic. Diuiso quolibet numero quadrato A B, videlicet 9. in B C, quadratū 4. & in A C, non quadratum 5. sumatur alius numerus D, nimirum 6. non quadratus proxime maior, quam A C, 5. differetque D, ab A C, vel sola vnitate, vel binario. Vnitatem quidem, quando A C, numerus talis fuerit, vt ei vnitas addita non faciat quadratū: binario vero, quando vnitas addita ad A C, facit quadratū. Vt si A C, sit 8. erit proxime maior non quadratus differens ab 8: binario, quia vnitas addita ad 8. efficit quadratum 9. At si A C, sit 5. vt in nostro exemplo, erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non conficit quadratum. Sumpto dein-

de quocunque numero rationali 12. Fiat vt numerus D, 6. ad quadratum numerum A B, 9. ita 144. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 12. ad aliud, inuenieturq. quadratus 216. cuius radix, videlicet $\sqrt{216}$. erit maius nomen. Quod si rursus fiat, vt 9. quadratus A B, ad numerum A C, 5. ita quadratus 216. inuentus ad aliud, reperietur quadratus 120. cuius radix, nimirum $\sqrt{120}$. erit minus nomen. Binomium ergo tertium inuentum est $\sqrt{216} + \sqrt{120}$. Et Apotome tertia $\sqrt{216} - \sqrt{120}$. vt ex propof. 52. & 88. lib. 10. Eucl. liquet.

Binomium quartum, & Apotomam quartam inueniemus in hunc Binomij quartum modum. Diuifo quocunque quadrato numero A B, nimirum 9. in duos non quadratos A C, C B, vt pote in 6. & 3. sumptoque A C, C B nuntio. numero quolibet rationali 6. pro maiori nomine 2. fiat, vt quadratus numerus A B, 81. ad 6. + $\sqrt{81}$ 24. videlicet 9. ad A C, 6. non quadratum, ita ad 6. + $\sqrt{81}$ 24. quadratus numerus assumpti numeri rationalis 6. ad aliud reperieturq. quadratus 24. cuius radix, nimirum $\sqrt{24}$. erit minus nomen. Est ergo quartum Binomium 6 + $\sqrt{24}$. Et quarta Apotome 6 - $\sqrt{24}$. vt ex propof. 52. & 89. lib. 10. Eucl. colligitur.

Binomium quintum, & Apotomam quintam ita explorabimus. Diuifo quolibet numero quadrato A B, nimirum 9. in duos A C, C B, non quadratos, vt in 6. & 3. sumptoque numero quouis rationali 2. pro minori nomine 2. fiat, vt A C, numerus 6. ad 2. + $\sqrt{6}$ 2. quadratum A B, nimirum ad 9. ita 4. quadratus assumpti numeri rationalis 2. ad aliud. $\sqrt{6} + 2$ aliud. inuenieturq. quadratus 6. cuius radix, nimirum $\sqrt{6}$. erit maius nomen. Erit ergo Binomium quintum $\sqrt{6} + 2$. & Apotome quinta $\sqrt{6} - 2$. vt Euclides propof. 53. & 90. lib. 10. concludit.

Binomium denique sextum, & Apotomam sextam indagabimus Binomij sexti, hac arte. Diuifo quolibet numero 12. non quadrato A B, in duos C A, Apotoma non quadratos A C, C B, vt in 7. & 5. sumatur alius quadratus D, quicunque, nimirum 9. & infuper quilibet numerus 12. rationalis 12. Deinde fiat, vt numerus quadratus D, nimirum 9. ad numerum 12. non quadratum A B, ita 144. quadratus numeri assumpti numeri rationalis 12. ad aliud. $\sqrt{12} + \sqrt{144}$ 12. Reperietur enim quadratus 192, cuius radix, nimirum $\sqrt{192}$. erit maius nomen Binomij. Et si rursus fiat, vt numerus 12. A B, non quadratus ad 7. numerum A C, ita quadratus proxime inuentus 192. ad aliud, reperietur quadratus numerus 112. cuius radix, nimirum $\sqrt{112}$. erit minus nomen. ita vt Binomium sextum fit $\sqrt{192} + \sqrt{112}$. Apotome autem sexta $\sqrt{192} - \sqrt{112}$.

Inuentio Binomij, vel Apotomae cuiusvis speciei, ex dato Binomio, vel Apotoma eiusdem speciei.

$\sqrt{8} 191 - \sqrt{8} 112$. vt ex propof. 54. & 91. lib. 10. Eucl. conftat. **I**AM verò, dato quouis Binomio, vel Apotoma, inueniemus ex eo, fine magno labore, quoutis alia Binomia, & Apotomas eiusdem speciei. Nam pro primo, ac quarto Binomio, fi fiat, vt maius nomen ad minus, ita quouis numerus rationalis affumptus pro maiori nomine noui Binomij ad aliud, produceretur minus nomen noui Binomij primi vel quarti. Pro fecundo vero, ac quinto, fi fiat, vt minus nomen ad maius, ita quouis numerus rationalis pro minori nomine noui Binomij affumptus ad aliud, procreabitur maius nomen noui Binomij fecundi, vel quinti. Pro tertio denique ac sexto, fi fiat, vt maius nomen ad minus, (quorum vtrumque numerus furdus eft) ita quouis numerus furdus pro maiori nomine noui Binomij affumptus ad aliud, proueniet minus nomen noui Binomij tertij, vel sexti. Rationem huius rei, fi quis defideret, fciat petendam eſſe ex propof. 15. lib. 10. Eucl. Cum enim per conſtructionem eadem fit proportio inter nomina dati Binomij, quæ inter nomina producti Binomij: fi maius nomen dati Binomij plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi commenſurabilis longitudine; poterit quoque maius nomen noui Binomij plus, quam minus, quadrato radicis longitudine ſibi commenſurabilis: Et fi maius nomen illius plus poteſt, quam minus, quadrato radicis ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoque maius nomen huius plus, quam minus, quadrato radicis ſibi incommenſurabilis longitudine. Nam nomina Binomiorum ſunt inſtar linearum. Atque ideo duo illa Binomia erunt eiufdem generis, nimirum vtrumque erit vel primum, vel ſecundum, vel tertium, &c. quippe cum vel maius nomen in vtroque, vel minus numerus ſit rationalis, vel furdus. Inuenio porro Binomio nouo, iam noſti, fieri ex eo Reſiduum, vel Apotomam, ſi ſignum +. in — commutetur.

a 15. decimi.

Inuentio Binomij, vel Apotomae cuiusvis speciei, ex dato Binomio, vel Apotoma eiusdem speciei.

Exempli cauſa, ex Binomio primo $6 + \sqrt{8} 27$. fiet ſimile Binomium, cuius maius nomen ſit 400. ſi fiat, vt 6. ad $\sqrt{8} 27$. ita 400. ad aliud. hoc eſt, ſi multiplicetur $\sqrt{8} 27$. in 400. id eſt, in $\sqrt{8} 160000$. & productus numerus $\sqrt{8} 4320000$. per 6. id eſt, per $\sqrt{8} 36$. diuidatur. Producentur enim $\sqrt{8} 120000$. Eritq. nouum Binomium primum $400 + \sqrt{8} 120000$. Et noua Apotome prima $400 - \sqrt{8} 120000$. Quadratum enim 160000 . maioris nominis ſuperat quadratum 120000 . minoris nominis quadrato 40000. cuius radix 200. longitudine commenſurabilis eſt maiori nomini, &c. Eademq. ratio eſt de cæteris.

b 15. decimi.

c 17. ſeptimi

RVRVSVS ſi vtrumque nomen dati Binomij per eundem quemuis numerum multiplicetur, aut diuidatur, produceretur eadem de cauſa duo nomina alterius Binomij eiufdem ſpeciei: quæ etiam nomina erunt alterius Apotomæ eiufdem ſpeciei: propterea quod duo numeri procreati eandem inter ſe proportionem habent, quam duo nomina propoſiti Binomij. V.g. Dato Binomio ſecundo $\sqrt{8} 48 + 6$. ſi vtrumque nomen per 3. multiplicetur, fiet alterum Binomium ſecundum $\sqrt{8} 432 + 18$. & alia Apotome $\sqrt{8} 432 - 18$. Et ſi vtrumque nomen eiufdem dati Binomij ſecundi $\sqrt{8} 48 + 6$. diuidatur per

nume-

numerum quemuis eundem 3. fiet iterum aliud Binomium secundum $\sqrt{8} \ 5\frac{1}{2} + 2$. & alia Apotome secunda $\sqrt{8} \ 5\frac{1}{2} - 2$. Quod si diuisio fiat per 2. gigneretur nouum Binomium secundum $\sqrt{8} \ 12 + 3$. & noua Apotome secunda $\sqrt{8} \ 12 - 3$. & sic de alijs.

QVOD si quando iudicandum sit de aliquo Binomio, vel Residuo proposito, quodnam sit ex prædictis sex speciebus, non erit id magni laboris. Nam si maius nomen fuerit numerus rationalis absolutus, erit Binomium vel primum, vel quartum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum nominis minoris, Quotiens fiat numerus quadratus, Binomium erit primum: Si vero Quotiens sit numerus non quadratus, Binomium erit quartum.

Binomii, vel Residui propositum quodnam sit ex 6. speciebus, indicare.

Si autem minus nomen fuerit absolutus numerus rationalis, erit Binomium vel secundum, vel quintum. Et si quidem, diuiso quadrato maioris nominis per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens gignatur numerus quadratus, Binomium erit secundum: Si vero Quotiens fiat numerus non quadratus, Binomium erit quintum.

Si denique neutrum nominum fuerit absolutus numerus rationalis, sed surdus, erit Binomium vel tertium, vel sextum; Tertium, quidem, quando diuiso maioris nominis quadrato per excessum, quo illud quadratum superat quadratum minoris nominis, Quotiens proueniat numerus quadratus: si vero Quotiens gignatur numerus non quadratus, Binomium erit sextum. Idemq. dices de Apotoma quacunque.

POSTREMO est etiam sciri non iniucundum, omnia sex Binomia, ac proinde & Residua, vel Apotomas, reperiri in paucis lineis certo quodam artificio intra circulum quemlibet descriptis. Sit enim circulus A B C D, cuius diameter B D, in tot æquales partes distribuatur, ut earum numerus tertiam, & quartam partem habeat, nimirum in 12. Ex quarta parte diametri E, comprehendente scilicet B E, tres duodecimas diametri; atque ex tertia parte diametri F, complectente videlicet B F, quatuor duodecimas diametri, erigantur ad diametrum perpendicularæ E A, F C, in diuersas partes; iunganturq. rectæ A B, B C, C D, D A. Harum omnium rectarum quantitates hoc modo cognoscuntur. Quoniam A E; inter D E, a coroll. 13. E B, media est proportionalis; & C F, inter D F, F B: erit tam. sexti. quadratum ex A E, rectangulo sub D E, E B, quam quadratum ex B C, rectangulo sub D F, F B, æquale. Est autem rectangulum sub D E, E B, hoc est, ex 9. in 3. productum 27. Igitur & quadratum ex A E, erit 27. ideog. recta A E, $\sqrt{8} \ 27$. Rectangulum autem sub D F, F B, id est, ex 8. in 4. procreatum est 32. Igitur & quadratum ex C F, erit 32. & recta C F, $\sqrt{8} \ 32$.

Qua ratione in circulo omnia 6. Binomia, & Apotoma reperiuntur.

Deinde quia quadrata ex B E, E A, nimirum 9. & 27. conficiunt 36, & quibus æquale est quadratum ex A B; erit quadratum ex A B, c 47. primi. 36. & recta ipsa A B, $\sqrt{8} \ 36$. hoc est, 6.

Rursus quia quadrata ex B F, F C, nimirum 16. & 32. efficiunt

longitudine sunt commensurabiles. Si vero in posterioribus tribus maiora nomina diuidantur per excessus, quibus eorum quadrata superant quadrata minorum nominum, sunt Quotientes numeri non quadrati: ac proinde maiora nomina plus possunt, quam minora, quadratis, quorum radices maioribus nominibus longitudine sunt incommensurabiles. Cetera ex se manifesta sunt.

QVOD si diametrum BD, diuiseris in alias partes, quarum numerus habeat partem tertiam, & quartam, vt in 24. vel 36. vel 48. vel 60. vel 240. vel 360. vel 480. vel 600. &c. inuenies eodem ordine alia 6. Binomia, & Apotomas.

DE EXTRACTIONE RADICVM

ex Binomijs, & Apotomis. Vbi obiter de alijs

lineis Irrationalibus, de quibus Euclides in lib. 10. disputat.

Cap. XXVIII.



VNT nonnulli, qui affirmant, ex solis prioribus tribus Binomijs, atque Apotomis radices quadratas elici posse. quod verum non est, & Euclidi omnino repugnat, vt mox ostendemus: neque scio, quo modo excusari possint, nisi dicatur, propterea eos posteriora tria Binomia, atque Apotomas radicibus quadratis priuare, quod horum radices sint valde perplexæ, & obscuriores, quam

ipsamet Binomia, atque Apotomæ: quippe cum sint radices numerorum compositorum, quas Vniuersales vocant, vt in exemplis patebit. Habere aut omnia Binomia, atque Apotomas radices quadratas, quæ in se ductæ ipsa Binomia, atque Apotomas producant, euidenter ex propof. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. Item ex propof. 92. 93. 94. 95. 96. & 97. lib. 10. Eucl. colligitur. In prioribus enim 6. propositionibus demonstrat Euclides, quoniam numeri in se multiplicati producant Binomia (vocamus lineas Irrationales, numeros Irrationales.) in posterioribus autem 6. propositionibus ostendit, quoniam numeri in se ducti Apotomas procreent. quod ita manifestum fiet. In propof. 55. ait, Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. Quis autem nescit, si Rationalis illa sit vnitas, spatium illud comprehensum, esse Binomium primum, quippe cum vnitas multiplicans Binomium primum, producat ipsummet Binomium primum? Numerus ergo potens Binomium primum, hoc est, radix Binomij primi, est Binomium, ex sententia Eucl. Eadem ratione ex sequentibus quinque propof. inferetur,

Cum nonnulli dicant, non esse Binomia habere radices.

Omnia Binomia secundum Eucl. habere radices.

Radices 6. Binomiorum, quales lineæ, vel

numeri Irrationales sunt. fertur, radicem Binomij secundi esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Radicem autem Binomij tertij esse lineam Irrationalem, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Et radicem quarti Binomij lineam Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Ac radicem quinti Binomij esse lineam Irrationalem, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Radicem denique sexti Binomij esse irrationalem lineam, quæ bina Media potens nominatur.

Radices 6. Apotomarum, quales lineæ Irrationales, vel numeri sunt. Non aliter ex propof. 92. & fequentibus quinque colligemus, radicem primæ Apotomæ esse Apotomen. Radicem vero Apotomæ secundæ esse Mediæ Apotomen primam. Radicem deinde tertiæ Apotomæ esse Mediæ Apotomen secundam. Et radicem Apotomæ quartæ esse lineam Irrationalem, quæ appellatur Minor. Radicem autem Apotomæ quintæ esse lineam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Denique radicem sextæ Apotomæ lineam esse Irrationalem, quæ cum Medio Medium totum efficit. Non est igitur dubitandum, ex Euclidis sententia omnia Binomia, omnesq. Apotomas habere radices: cum tam perspicue doceat, quo pacto cuiusque Binomij, atque Apotomæ radix appelletur. Quod ut planius fiat, explicandæ sunt obiter illæ lineæ Irrationales, quas demonstrat radices esse Binomiorum, atque Apotomarum. Hactenus enim solum Binomium eiusque sex species, solamq. Apotomen, eiusq. sex genera, Item lineam Medium, superiori cap. exposuimus.

237. decimi QVEMADMODVM ergo Binomium apud Eucl. est linea Irrationalis ex duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus composita: ita si dux Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant, (Has lineas docuit inuenire propof. 28.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima vocatur. Hanc nobis exhibebit radix Binomij secundi.
39. decimi Et si dux Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; (quæ quo pacto reperiuntur, docuit propof. 29.) erit tota linea Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda dicitur. Eamq. nobis præbebit radix tertij Binomij.
40. decimi Et si dux rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; (quas inuenire docet propof. 34.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Maior vocatur. quam nobis offeret radix Binomij quarti.
41. decimi Et si dux rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medijs; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (quæ inueniuntur propof. 35.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ Rationale ac Medium potens nominatur. Hanc nobis demonstrabit radix Binomij quinti.
42. decimi Si denique dux rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medijs & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq. composito ex quadratis ipsarum, (qua ratione huiusmodi lineæ reperiuntur,

riantur, docuit propof. 36.) tota recta linea Irrationalis erit, quæ vocatur bina Media potens. Eamq. nobis indicabit radix Binomij fexti.

Bina Media potens.

a 74. decimi

b 75. decimi

ITEM quemadmodum Apotome apud Eucl. est linea Irrationalis, quæ reliqua est, si a Rationali auferatur Rationalis potentia tantum commensurabilis existens toti: Ita si a Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæcum tota Rationale contineat; (quas quidem lineas propof. 28. reperit.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ Mediæ Apotome prima vocatur. Quam quidem profert radix Apotomæ secundæ.

Media Apotome prima.

c 76. decimi

Et si a Media auferatur Media, potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; (quæ lineæ propof. 29. inveniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ Mediæ Apotome secunda appellatur. Hæc autem apparebit in radice Apotomæ tertiæ.

Media Apotome secunda.

d 77. decimi

Et si a recta linea, auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium; (quas lineas propof. 34. reperit.) Recta linea reliqua irrationalis est, quæ Minor nominatur. Quæ quidem radix est Apotomæ quartæ.

Linea Maior.

e 78. decimi

Et si a recta linea auferatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq. composito ex ipsarum quadratis; (quæ lineæ propof. 35.) Reliqua linea irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficiens dicitur. Qualis est radix Apotomæ quintæ.

Reliqua cum Rationali Medium totum efficiens.

f 79. decimi

Et si tandem a recta detrahatur recta, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq. composito ex ipsarum quadratis; (quæ lineæ propof. 36. inveniuntur.) Reliqua linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficiens appellatur. Quam nobis exhibet radix sextæ Apotomæ.

Reliqua cum Medio Medium totum efficiens.

g 80. decimi

HAS porrò lineas Irrationales, vel potius numeros Irrationales (quas enim Euclides lineas nominat, nos numeros dicimus) plenius, perfectiusq. declarabimus in radicibus Binomiorum, & Apotomarum.

Habes igitur ex Euclide tredecim numero lineas Irrationales inter se differentes, de quibus potissimum in lib. 10. agitur. Sunt autem hæc.

1. Media.

2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuenta.

3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex binis Medijs secunda.

5. Maior.

6. Rationale ac Medium potens.

7. Bina Media potens.

8. Apotome, cuius etiam species sex sunt inuenta.

9. Ma-

Examen radice inuenta.

| | |
|---|--|
| $\begin{array}{r} \sqrt{88} \ 252 + \sqrt{88} \ 28 \\ \sqrt{88} \ 252 + \sqrt{88} \ 28 \\ \hline + \sqrt{88} \ 7056 + \sqrt{88} \ 28 \\ + \sqrt{8} \ 252 + \sqrt{88} \ 7056 \\ \hline \text{Summa} \ \sqrt{8} \ 448 + \sqrt{8} \ 336 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \sqrt{88} \ 252 - \sqrt{88} \ 28 \\ \sqrt{88} \ 252 - \sqrt{88} \ 28 \\ \hline - \sqrt{88} \ 7056 + \sqrt{8} \ 28 \\ + \sqrt{8} \ 252 - \sqrt{88} \ 7056 \\ \hline \text{Summa} \ \sqrt{8} \ 448 - \sqrt{8} \ 336 \end{array}$ |
|---|--|

Sit Binomium quartum $24 + \sqrt{8} \ 448$. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576 . & 448 . est 128 . cuius radicem, nimirum $\sqrt{8} \ 128$. maiori nomini 24 . adijcio, facioq. $24 + \sqrt{8} \ 128$. Eandem $\sqrt{8} \ 128$. ab eodem maiore nomine 24 . detraho, relinquoq. $24 - \sqrt{8} \ 128$. Semissis illius summa $24 + \sqrt{8} \ 128$. est $12 + \sqrt{8} \ 32$. semissis vero illius numeri relicti $24 - \sqrt{8} \ 128$. est $12 - \sqrt{8} \ 32$. Radix ergo Binomij quarti propositi est $\sqrt{8} \ (12 + \sqrt{8} \ 32) + \sqrt{8} \ (12 - \sqrt{8} \ 32)$. Radix vero quarti huius Residui $24 - \sqrt{8} \ 448$. est $\sqrt{8} \ (12 + \sqrt{8} \ 32) - \sqrt{8} \ (12 - \sqrt{8} \ 32)$. Illa iuxta propof. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hæc vero ex propof. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq. ex præcepto propof. 40. & 77. lib. 10. $\sqrt{8} \ (12 + \sqrt{8} \ 32)$ & $\sqrt{8} \ (12 - \sqrt{8} \ 32)$ sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata $12 + \sqrt{8} \ 32$. & $12 - \sqrt{8} \ 32$. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet, cum consiciant simul sumpta numerum 24 . Rationalem. Denique quod sub ipsis continetur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies $\sqrt{8} \ 112$. Media: cuius radix est $\sqrt{88} \ 112$. linea Media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, quæ sunt quadrata $12 + \sqrt{8} \ 32$. & $12 - \sqrt{8} \ 32$. simul addita efficere summam 24 . Rationalem.

Duo incommensurabilia facere possunt summam Rationalem.

Examen radice inuenta pro Binomio quarto.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ (12 + \sqrt{8} \ 32) + \sqrt{8} \ (12 - \sqrt{8} \ 32) \\ \sqrt{8} \ (12 + \sqrt{8} \ 32) + \sqrt{8} \ (12 - \sqrt{8} \ 32) \\ \hline 12 + \sqrt{8} \ 32 + 12 - \sqrt{8} \ 32 \\ \hline \sqrt{8} \ 112 \\ \hline \sqrt{8} \ 448 \\ \hline \text{Tota summa} \ 24 + \sqrt{8} \ 448. \text{ Binomium propositum.} \end{array}$$

Sit

Sit Binomium quintum $\sqrt{8} 448 + 12$. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt $\sqrt{8} 112$. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, $\sqrt{8} 76$. semissi $\sqrt{8} 112$, maioris nominis addita facit $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76$. Ab eadem autem semisse detracta relinquit $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76$. Radix ergo propofiti Binomij quinti est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ Residui vero respondentis radix erit $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ Illa per propof. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale, & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propof. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq. ex doctrina propof. 41. & 78. lib. 10. $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76)$ & $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$.) duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum ex ipsarum quadratis faciat Medium, peripicuum etiam est, cum earum quadrata $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76$. & $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76$. simul sumpta faciant $\sqrt{8} 448$. superficiem Mediam, cuius radix est $\sqrt{8} \sqrt{8} 448$. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum gignatur $\sqrt{8} 36$. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76)$. & $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum $\sqrt{8} 36$. hoc est, 6.

*Radix Bino-
my quinti est
linea Rationa-
le ac Medium
potens: Et ra-
dix Residui
quinti est li-
nea cum Ra-
tionali Mediũ
totum efficiens.*

*Duo incommen-
surabilia in-
ter se multipli-
cata facere
possunt nume-
rũ Rationale.*

Examen radice inuenta pro Residuo quinto.

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$$

$$\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$$

$$\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76 - \sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76$$

$$- \sqrt{8} 36. \text{ id est, } - 6$$

$$- \sqrt{8} 36. \text{ id est, } + 6$$

$$- 12$$

$$\text{Totum summa, } \sqrt{8} 448 - 12. \text{ Residuum quintum.}$$

Sit denique Binomium sextum $\sqrt{8} 448 + \sqrt{8} 352$. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet $\sqrt{8} 24$. addita ad semissem maioris nominis, nimirum ad $\sqrt{8} 112$. facit summam $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24$. Ergo prior portio radice quæ sita est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24)$. Et si eandem summam $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24$. detrahatur ex toto maiore nomine $\sqrt{8} 448$. relinquitur $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24$. Nam $\sqrt{8} 112$. dempta ex $\sqrt{8} 448$. relinquit $\sqrt{8} 112$. ex quo relicto si tollatur $\sqrt{8} 24$. relinquitur $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24$. ideoq. posterior portio radice quæ sita est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24)$. totaq. radix Binomij sexti propofiti, erit $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24)$

Examen radiceis inuenta.

| | |
|---|---|
| $\begin{array}{r} \sqrt{88} 252 + \sqrt{88} 28 \\ \sqrt{88} 252 + \sqrt{88} 28 \\ \hline + \sqrt{88} 7056 + \sqrt{88} 28 \\ + \sqrt{88} 252 + \sqrt{88} 7056 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{88} 448 + \sqrt{88} 336 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \sqrt{88} 252 - \sqrt{88} 28 \\ \sqrt{88} 252 - \sqrt{88} 28 \\ \hline - \sqrt{88} 7056 + \sqrt{88} 28 \\ + \sqrt{88} 252 - \sqrt{88} 7056 \\ \hline \text{Summa } \sqrt{88} 448 - \sqrt{88} 336 \end{array}$ |
|---|---|

Sic Binomium quartum $24 + \sqrt{88} 448$. ex quo radix extrahetur per primam regulam, hoc pacto. Differentia quadratorum 576. & 448. est 128. cuius radicem, nimirum $\sqrt{88} 128$. maiori nomini 24. adjicio, facioq. $24 + \sqrt{88} 128$. Eandem $\sqrt{88} 128$. ab eodem maiore nomine 24. detraho, relinquoq. $24 - \sqrt{88} 128$. Semissis illius summa $24 + \sqrt{88} 128$. est $12 + \sqrt{88} 32$. semissis vero illius numeri relict $24 - \sqrt{88} 128$. est $12 - \sqrt{88} 32$. Radix ergo Binomij quarti propositi est $\sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) + \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32)$ Radix vero quarti huius Residui $24 - \sqrt{88} 448$. est $\sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) - \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32)$. Illa iuxta propof. 58. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Maior dicitur. Hac vero ex propof. 95. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ appellatur Minor. Itaq. ex præcepto propof. 40. & 77. lib. 10. $\sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32)$ & $\sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32)$ sunt duæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. Esse enim potentia incommensurabiles, perspicuum est, cum earum quadrata $12 + \sqrt{88} 32$. & $12 - \sqrt{88} 32$. incommensurabilia sint. Quod etiam compositum ex hisce quadratis sit Rationale, patet, cum conficiant simul sumpta numerum 24. Rationalem. Denique quod sub ipsis continetur, esse Medium, liquet, cum ex mutua earum multiplicatione gignatur superficies $\sqrt{88} 112$. Media: cuius radix est $\sqrt{88} 112$. linea Media. Vbi obseruatu dignum est, duo incommensurabilia, quæ sunt quadrata $12 + \sqrt{88} 32$. & $12 - \sqrt{88} 32$. simul addita efficere summam 24. Rationalem.

Duo incommensurabilia facere possunt summam Rationalem.

Examen radiceis inuenta pro Binomio quarto.

| | |
|--|--|
| $\begin{array}{r} \sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) + \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32) \\ \sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) + \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32) \\ \hline 12 + \sqrt{88} 32 + 12 - \sqrt{88} 32 \\ \hline \sqrt{88} 112 \\ \sqrt{88} 112 \\ \hline \sqrt{88} 448 \end{array}$ | $\begin{array}{r} \sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) - \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32) \\ \sqrt{88} (12 + \sqrt{88} 32) - \sqrt{88} (12 - \sqrt{88} 32) \\ \hline 12 + \sqrt{88} 32 - 12 + \sqrt{88} 32 \\ \hline \sqrt{88} 112 \\ \sqrt{88} 112 \\ \hline \sqrt{88} 448 \end{array}$ |
| $\text{Totâ summa } 24 + \sqrt{88} 448. \text{ Binomium propositum.}$ | |

Sit

Sit Binomium quintum $\sqrt{8} 448 + 12$. Ex quo per 2. regulam extrahetur radix hac ratione. Semisses nominum sunt $\sqrt{8} 112$. & 6. quarum quadrata 112. & 36. quorum differentia 76. cuius radix, $\sqrt{8} 76$. semissi $\sqrt{8} 112$. maioris nominis addita facit $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76$. Ab eadem autem semisse detracta relinquit $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76$. Radix ergo propositi Binomij quinti est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ Residui vero respondentis radix erit $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ Illa per propof. 59. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ Rationale. & Medium potens appellatur. Hæc vero ex doctrina propof. 96. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Itaq. ex doctrina propof. 41. & 78. lib. 10. $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76)$ & $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ duæ lineæ sunt potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur Rationale. Esse enim potentia incommensurabiles, constat, cum earum quadrata incommensurabilia sint. Quod autem compositum est ipsarum quadratis faciat Medium, peripicuum etiam est, cum earum quadrata $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76$. & $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76$. simul sumpta faciant $\sqrt{8} 448$. superficiem Medium, cuius radix est $\sqrt{8} 8 448$. linea Media. Denique ex ipsarum multiplicatione inter se gigni Rationale, manifestum est, cum pignatur $\sqrt{8} 36$. nimirum 6. Vbi quoque vides, duo incommensurabilia, videlicet $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76)$. & $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76)$ inter se multiplicata producere numerum Rationalem, nimirum $\sqrt{8} 36$. hoc est, 6.

Radix Binomij quinti est linea Rationalem ac Medium potens: Et radix Residui quinti est linea cum Rationali Medium totum efficiens.

Duo incommensurabilia inter se multiplicata faciunt numerum Rationalem.

Examen radices inuenta pro Residuo quinto.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76) \\ \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76) \end{array}$$

$$\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 76 - \sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 76$$

$$- \sqrt{8} 36. \text{ id est, } - 6$$

$$- \sqrt{8} 36. \text{ id est, } + 6$$

$$- 12$$

Tota summa, $\sqrt{8} 448 - 12$. Residuum quintum.

Sit denique Binomium sextum $\sqrt{8} 448 + \sqrt{8} 352$. ex quo per 3. regulam radix eruetur hoc modo. Quadratorum differentia est 96. cuius pars quarta 24. Huius radix, videlicet $\sqrt{8} 24$. addita ad semissem maioris nominis, nimirum ad $\sqrt{8} 112$. facit summam $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24$. Ergo prior portio radices quæ sita est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24)$. Et si eandem summam $\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24$. detrahas ex toto maiore nomine $\sqrt{8} 448$. relinquetur $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24$. Nam $\sqrt{8} 112$. dempta ex $\sqrt{8} 448$. relinquit $\sqrt{8} 112$. ex quo relicto si tollatur $\sqrt{8} 24$. relinquetur $\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24$. idcoq. posterior portio radices quæ sita est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24)$. totaq. radix Binomij sexti propositi, erit $\sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24)$

Radix Binomij sexti est linea bina Media potens: Et *radix Residui sexti est linea cum Medio Medium totum efficiens.*
 112 + $\sqrt{8}$ 24) + $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 112 — $\sqrt{8}$ 24.) Residui vero sexti respondentis radix erit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 112 + $\sqrt{8}$ 24) — $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 112 — $\sqrt{8}$ 24.) Illa, concludente propof. 60. lib. 10. Irrationalis linea est, quæ bina Media potens nominatur. Hæc vero, ut demonstrat propof. 97. lib. 10. linea Irrationalis est, quæ cum Medio Medium totum efficit. Itaq. ex demonstratione propof. 42. & 79. lib. 10. dux linea $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 112 + $\sqrt{8}$ 24) & $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 112 — $\sqrt{8}$ 24) potentia incommensurabiles sunt, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq. composito ex quadratis ipsarum. Quod enim potentia incommensurabiles sint, docent earum quadrata, quæ incommensurabilia sunt. Quadrata autem simul facere Medium, constat, cum simul faciant $\sqrt{8}$ 448. superficiem Medium, cuius radix est $\sqrt{8}$ 448. Denique ex ductu vnus in alteram procreari etiam Medium, liquido constat, cum producant $\sqrt{8}$ 88. superficiem Medium, cuius radix est $\sqrt{8}$ 88.

Examen radice inuenta pro Binomio sexto propofito.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24) \\
 \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24) + \sqrt{8} (\sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24) \\
 \hline
 \sqrt{8} 112 + \sqrt{8} 24 \quad + \quad \sqrt{8} 112 - \sqrt{8} 24 \\
 \hline
 \sqrt{8} 88 \\
 \sqrt{8} 88 \\
 \hline
 352
 \end{array}$$

Tota summa. $\sqrt{8}$ 448 + $\sqrt{8}$ 352. Binomium propofitum.

Differentia quadratorum nominū radice cuiuslibet Binomij, & Residui, qua.

IN quolibet autem Binomio, aut Residuo animaduertes, radicem differentia quadratorum vtriusque nominis, esse differentiam inter quadrata nominum radice ipsius Binomij, vel Residui. quod mirum cuiuspiam videri possit. quod in proximis 6. Binomij expetiri licet.

In primo Binomio 23 + $\sqrt{8}$ 448. cuius radix inuenta est 4 + $\sqrt{8}$ 7. Quadratum numeri 23. nimirum 529. superat quadratum 448. numero 81. cuius radix est 9. differentia videlicet inter quadrata nominum radice, hoc est, inter 16. & 72.

In Binomio secundo $\sqrt{8}$ 448 + 14. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{8}$ 343 + $\sqrt{8}$ 7. Quadratum 448. superat 196. quadratum numeri 14. numero 252. cuius radix, nimirum $\sqrt{8}$ 252. est differentia inter quadrata nominum radice. Nam ea quadrata sunt $\sqrt{8}$ 343. & $\sqrt{8}$ 7. ut patet ex multiplicatione nominum $\sqrt{8}$ 343. & $\sqrt{8}$ 7. in se quadrata. Et si $\sqrt{8}$ 7. dematur ex $\sqrt{8}$ 343. reliqua fit $\sqrt{8}$ 252.

In tertio Binomio $\sqrt{8}$ 448 + $\sqrt{8}$ 336. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{8}$ 252 + $\sqrt{8}$ 28. Quadratum 448. superat quadratum 336. numero 112. cuius radix, videlicet $\sqrt{8}$ 112. differentia est inter quadrata nominum radice, quæ sunt $\sqrt{8}$ 252. & $\sqrt{8}$ 28. Constat autem $\sqrt{8}$ 28. demptam ex $\sqrt{8}$ 252. relinquere $\sqrt{8}$ 112.

In quarto Binomio $24 + \sqrt{448}$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{12}$ ($12 + \sqrt{32}$) $+ \sqrt{3}$ ($12 - \sqrt{32}$). Quadratum 576 . numeri 24 . superat quadratum 448 . numero 128 . cuius radix, nimirum $\sqrt{128}$. differentia est inter quadrata nominum radices, hoc est, inter $12 + \sqrt{32}$, & $12 - \sqrt{32}$. vt in hac formula subtractionis apparet. Nam 12 . ex 12 . nihil relinquit: sed

$$\begin{array}{r} 12 + \sqrt{32} \\ - \sqrt{32} \\ \hline 12 \end{array}$$

— $\sqrt{32}$. ex $+ \sqrt{32}$. (cum diuersa signa mutet speciem) relinquit $\sqrt{32}$. duplum scilicet $\sqrt{32}$

$$\begin{array}{r} 12 + \sqrt{32} \\ - \sqrt{32} \\ \hline 12 + \sqrt{32} \end{array}$$

32 . cum signo $+$ superioris numeri.

In Binomio quinto $\sqrt{448} + 12$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{3}$ ($\sqrt{12} + \sqrt{76}$) $+ \sqrt{3}$ ($\sqrt{12} - \sqrt{76}$). Quadratum 448 . superat quadratum numeri 12 . numero 304 . cuius radix, nimirum $\sqrt{304}$. differentia est inter quadrata nominum radices, hoc est, inter $\sqrt{12} + \sqrt{76}$. & $\sqrt{12} - \sqrt{76}$. vt in hac apposita formula subtractionis apparet. Nam $\sqrt{12}$. ex $\sqrt{12}$. nil relinquit. At — $\sqrt{76}$. ex $+ \sqrt{76}$. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit $\sqrt{304}$. duplum videlicet

$$\begin{array}{r} \sqrt{12} + \sqrt{76} \\ - \sqrt{76} \\ \hline \sqrt{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{12} + \sqrt{76} \\ - \sqrt{12} \\ \hline \sqrt{304} \end{array}$$

$\sqrt{304}$. cum signo $+$ superioris numeri.

In Binomio denique sexto $\sqrt{448} + \sqrt{352}$. cuius radix inuenta fuit $\sqrt{3}$ ($\sqrt{12} + \sqrt{24}$) $+ \sqrt{3}$ ($\sqrt{12} - \sqrt{24}$). Quadratum 448 . superat quadratum 352 . numero 96 . cuius radix, nimirum $\sqrt{96}$. differentia est inter quadrata nominum radices, hoc est, inter $\sqrt{12} + \sqrt{24}$. & $\sqrt{12} - \sqrt{24}$. vt in apposita formula subtractionis manifestum est. Nam $\sqrt{12}$. ex $\sqrt{12}$. nil relinquit. At — $\sqrt{24}$. ex $+ \sqrt{24}$. (cum diuersa signa mutent speciem) relinquit $\sqrt{96}$. duplum videlicet $\sqrt{96}$. cum signo $+$ numeri superioris.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12} + \sqrt{24} \\ - \sqrt{24} \\ \hline \sqrt{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{12} + \sqrt{24} \\ - \sqrt{12} \\ \hline \sqrt{96} \end{array}$$

Idem experieris in quouis alio Binomio, vel Residuo, & eius radice.

EX hoc colligitur facilis ratio multiplicandi quodcumque Binomium, aut Residuum in se quadratè, quæ talis est. Proposito Binomio, vel Residuo, accipiat summa quadratorum duarum particularum Binomij, vel Residui, pro prima portione numeri producti. Deinde a quadrato dictæ summæ detrahatur quadratum differentiarum quadratorum earundem particularum Binomij, vel Residui. Radix enim reliqui huius numeri erit altera portio producti numeri. Vt Binomium $\sqrt{50} + 6$. ductum in se, facit

$$\begin{array}{r} \sqrt{50} + 6 \\ \hline 85 + \sqrt{7200} \end{array}$$

$86 + \sqrt{7200}$. Nam duo quadrata 50 . & 36 . faciunt 86 . priorem particulam numeri producti. Et quadratum 7396 . numeri inuenti 86 . superat 196 . quadratum numeri 14 . nimirum differentiarum inter quadrata 50 . & 36 . numero 7200 . cuius radix, nimirum $\sqrt{7200}$. dabit posteriorem particulam numeri producti: adeo vt quadratum Binomij $\sqrt{50} + 6$. sit $86 + \sqrt{7200}$. quandoquidem quadratum 7396 . prioris portioneis 86 . superat 7200 . quadratum poster-

Pulchra ratio multiplicandi Binomij, vel Residui in se.

fioris portionis, numero 196. cuius radix 14. est differentia inter quadrata 50. & 96.

Eadem ratione quadratum Residui 58 50 — 6. erit 86 — 58 7200.

Ita quoque Binomium 58 50 + 58 6. ductum in se faciet 56 + 58 1200. quia quadratum 3136. prioris por-

tionis 56. superat 1200. quadratum 1200. portionis posterioris numero 1936. cuius radix 44. differentia est quadratorum 50. & 86.

6. Atque ita de ceteris.

TRADITUR ab auctoribus nonnullis alia ratio facilis eruenda radices ex proposito Binomio, vel Residuo, quam visum est hoc loco explicare, si tamen prius Lemma sequens ostendero.

L E M M A.

Lemma.

DATUM numerum in duas partes secare, ut numerus, qui ex mutua earum multiplicatione producit, æqualis sit dato numero, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri, qui diuidendus est, vel (quod idem est) quarta parte quadrati totius numeri diuidendi.

SIT V.g. numerus 20. in duas partes secandus, quæ inter se multiplicata producant numerum 75. qui minor est quadrato 100. semissis numeri 20. propositi, vel minor, quam 100. quarta pars quadrati 400. dati numeri 20. Ex 100. quadrato semissis numeri diuidendi auferatur datus numerus producentis 75. Et reliqui numeri 25. radix quadrata 5. tum addatur ad semissim numerum propositum, nimirum ad 10. tum ab eadem semisse detrahatur. Nam summa confecta 25. & numerus reliquus 5. erunt quæ sita partes numeri propositi 20. quæ inter se multiplicata producant datum numerum 75. Huius

A.....C.....D.....B

a 5. secundi.

praxis hæc est demonstratio. Sit numerus 20. AB, propositus diuisus in partes AD, DB, sua multiplicatione producentes datum numerum 75. quæ partes ita sunt cognita. Diuiso numero AB, bisariam in C, erit productus ex AB, in DB, una cum quadrato ex CD, æqualis quadrato 100. semissis CB. Igitur si datus numerus 75. scilicet ex AD, in DB, dematur ex quadrato 100. semissis CB, reliquus erit quadratus ex CD. 25. cuius radix 5. dabit rectam CD, quæ addita semisse AC, conficiet maiorem partem AD, 15. Et detracta ex semisse CB, reliquam faciet partem minorem DB, 5.

Sit rursus numerus 58 80. diuidendus in duas partes, ita ut inter se multiplicata faciant 3. Semissis dati numeri est 58 20. A quadrato cuius, nimirum a 20. detrahatur numerus 3. producentis 1. At reliqui numeri 19. radix, nimirum 58 19. addatur, & dematur

ex se.

$$\begin{array}{r} 58\ 20 + 58\ 19 \\ 58\ 20 - 58\ 19 \\ \hline 3 \end{array}$$

ex semisse 20. propositi numeri 1. suntque partes quasita 20 + 28 19.
 Et 20 — 28 19. qua inter se multiplicata signat 1. ut precedens formula
 appareat: detrahendo videlicet quadratum 19. ex quadrato 20. ut cap. 23. aut
 exempli Divisionis docuimus.

Item sit numerus 28 80. diuidendus in duas partes, qua inter se multipli-
 cata faciant 28 5. Semissi numeri 28 80. est 28 20. a cuius quadrato 20. se
 subtrahatur 28 5. remanebunt 20 — 28 5. cuius radix, nimirum 28 (20
 — 28 5.) addita ad semissem 28 20. dati numeri 28 80. faciet maiorem
 partem 20 + 28 (20 — 28 5) decepta vero ex eadem semisse 28 20. re-
 linquet minorem partem 28 20 —

28 (20 — 28 5.) qua partes inter se multiplicatae faciunt 28 5. ut in hac
 formula appareat. Nam ut ex cap. 23.

pater, multiplicatio fiet, si quadratum
 20 — 28 5. posterioris partis ex 20.
 quadrato prioris partis auferatur. Auferetur autem
 iuxta hanc alteram formulam. quia 20. ex 20.
 nihil relinquit. Et ut — 28 5. tollatur ex + 28 0.
 mutatur species, fitque additio cum signo +. supe-
 rioris numeri 28 0.

Postremo sit 1 8. diuidendus in duas partes, qua inter se multiplicata fa-
 ciant 1 8. hoc est, (Et in idem recidit.) ita ut 1 20 sit media loco proportiona-
 lis inter illas duas partes. Semissi 1 8. est 1 8. cuius quadratum est 1 8.
 ex quo tollemus 1 8. qui produci debet, remanebitque 1 8 — 1 8. cuius ra-
 dix, nimirum 1 8 (1 8 — 1 8) addita ad semissem 1 8. id est, ad 1 8 fa-
 ciet unam partem quasitam 1 8 + 1 8 (1 8 — 1 8) et ablata ex eadem
 semisse, reliquam faciet alteram partem 1 8 — 1 8 (1 8 — 1 8.) quae
 partes inter se multiplicata faciunt

1 8. ut in hac formula appareat.
 Nam multiplicatio fiet, ut ex su-
 perioribus patet, si 1 8 — 1 8.
 quadratum posterioris portionis de-
 trahatur ex 1 8. quadrato portio-
 nis prioris. Detrahatur autem iuxta hanc alteram
 formulam. quia 1 8. ex 1 8. nil relinquit. Et
 ut — 1 8. subtrahatur ex + 0 8. mutatur species
 operationis, fitque additio, cum signo + superioris nu-
 meri 0 8. Hoc Lemma absoluemus etiam per Alge-
 bram anigmate 23. capiti 20.

DEMONSTRATO, & exemplis illustrato hoc Lemmate, erue-
 mus radicem ex quolibet Binomio, Residuouè, hac facili via: Diui-
 datur per Lemma antecessens maius nomen in duas partes, quae inter
 se multiplicatae procreent numerum aequalem quartae parti quadra-
 ti nominis minoris. Radices namque harum parium copulatae per
 signum + pro Binomio, vel per signum — pro Residuo, radicem
 quasitam exhibebunt.

Alia via ex-
 trahenda ra-
 dicis ex dato
 Binomio, vel
 Residuo.

Sit rursus Binomium primum $72 + \sqrt{8} 2880$. Maius nomen 72 , fecabitur in duas partes producentes 720 . quartam partem quadrati 2880 . maioris nominis, hac ratione.

Semisiss maioris nominis 72 . est 36 . a cuius quadrato 1296 . detracta quarta pars prædicta 720 . relinquit 576 . cuius radix 24 . addita ad semissem nominatam 36 . & detracta ab eadem, facit partes quæritas 60 . & 12 . Ergo radix Binomij est $\sqrt{8} 60 + \sqrt{8} 12$. quod hic probatum est per multiplicationem radicis in se quadratè.

Sit quoque elicienda radix ex hoc residuo sexto $\sqrt{8} 60 - \sqrt{8} 12$. Maius nomen $\sqrt{8} 60$. distribuetur in duas partes producetes 3 . quartam partem quadrati 12 . minoris nominis, hoc pacto. Semisiss maioris nominis $\sqrt{8} 60$. est $\sqrt{8} 15$. a cuius quadrato 15 . detracta nominata pars quarta 3 . relinquit 12 . cuius radix $\sqrt{8} 12$. addita ad semissem $\sqrt{8} 15$. prædictam, & ab eadem sublata facit partes $\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12$. & $\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12$. Ergo radix dicti Residui sexti est $\sqrt{8} (\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12)$ quod hic probatum est.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} (\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12) \\ \sqrt{8} (\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12) - \sqrt{8} (\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12) \end{array}$$

Quadrata partium $\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12$ & $\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12$

$$\begin{array}{r} - \sqrt{8} 3 \\ - \sqrt{8} 3 \end{array}$$

Summa. $\sqrt{8} 60 - \sqrt{8} 12$

Nam quadrata partium faciunt $\sqrt{8} 60$. nimirum duplum $\sqrt{8} 15$. Et ex vna parte $\sqrt{8} (\sqrt{8} 15 + \sqrt{8} 12)$ in alteram $-\sqrt{8} (\sqrt{8} 15 - \sqrt{8} 12)$ fit $-\sqrt{8} 3$. quippe cum quadratum 12 . ex quadrato 15 . subductum relinquit 3 . cui præponendum est signum $\sqrt{8}$. cum signo $-$. propter Residuum. Duplum autem $-\sqrt{8} 3$. facit $-\sqrt{8} 12$.

S C H O L I V M.

EMERSIMVS tandem ex numerorum Cossicorum, & Irrationabilium multiplici difficultate, & ingens eorum tractationis pelagus, si minus commoda, felici tamen (nisi mea me fallit opinio) velificatione velis superamus; & aliquando portum per tot difficultatum ælius ac turbine, per tam multarum rerum maria prolapsi tenemus; quodq. ad divinam opem est referendum, integri atque incolumes tenemus. Inuat nunc, veluti in otio & quiete, eorum meminisse, qua paulo ante ferro pigebat. Alia enim nobisendarum spatia sunt enaviganda, quorum tamen laborem, si quis erit, præteritum iucunda commemoratio lenabis, ut spero, maxime. Inuat, inquam, paululum in eorum numerorum, qui hactenus explicati sunt, Algorismi

Qui ordo
feruetur in
enigmati-
bus per Al-
gebram fol-
uendis.

inconditissimo aequo, atque uberrimo fructu tantisper immorari. Quota enim eius pars, quata praeteriti laboris veluti merces periret, nisi in ipsius Algorismi fructu exigendo opera aliquid, ac temporis poneremus? Primo igitur enigmata quaedam, cap. nimirum 25. quod proxime sequitur, & 30. erunt soluenda, siue manis, problemata quaedam numerorum, quos vocant abstractos, eorum nimirum, qui ad res materiales, qualia sunt commercia, & mercatorum negotiationes, vel ad alias rerum aliarum quaestiones non contrahuntur. Quod & Alexandrinus Diophantus (egregius in primis scriptor, & de tota Algebra scientia, quam qui optime, meritis) & alij gravissimi scriptores iam ante praestiterunt. Hac enim siue enigmata, siue problemata placet appellare, ad speculativam Arithmeticam spectant: qua quidem scientia quantum dignitate praelet inter reliquas, concors omnium vox non obscure testatur. Nam & theorematum, & problematum numerorum abstractorum, qua in ea demonstrantur, varietate tam multiplex, multitudine tam copiosa est, ut huiusmodi enigmatum tractatio maximam addat & dignitatem, & vero perficiat etiam quodammodo eam scientiam, qua de numeris est. Quam multa enim ex problemate sunt, qua ei suppediat, quorum nulla esset cognitio, penes nos, neque extrahi de tenebris unquam possent, nisi Algebra institutio, veluti lumen, accederet? At enim otiosa sunt, neque ullam habet huiusmodi problemata utilitatem. Quid quod non utilitatem solum, sed & inconditionatam spectare aliquando, sapientis esse putamus, neque ab honestate alienum. Ista enim si ratio placet, cedo quid est, cur decem Iordanii libros de numeris admittamus? Quid, cur theorematum quae plurima, & problemata numerorum ab Euclide lib. 7. 8. & 9. demonstrata probemus, in quibus legendis insitamus, delectemur, eadem summa cum admiratione persequamur? Quis in illis tantus usus est, qua tanta, tam spectata utilitas, qua non tota insit & nascitur? Quantum ista vox non de huiusmodi splendore ac dignitate, sed de omnium scientiarum honestate, si admittatur, detractura est? Inest enim profecto hoc disciplinæ is omnibus, qua quoniam nunquam in usum exeunt, itaque, in veritatis contemplatione occupantur, speculativa dicuntur, ut mentem sua honestate exercent, principem animi facultatem, nempe intelligendi munus, augeant, atque perficiant, delectent ipsa per sese, totumque, ut ita dicam, hominem mirae quaedam sui inconditionate persuadent. Verum enimvero ne illud quidem dissimulandum est, quod suis locis fiet apertius, existeret etiam horum problematum maximus fructus, & utilitates, non in Geometricis modo, sed in alijs quoque facultatibus, artibusque, permixtis, quamquam non tantam utilitatis dicendam rationem putamus, ut si hac desit, nulla continuò sit cuiusque facultatis dignitas, & honestas. Hac ideo ita quam paucissimis moniti volumus, amico Lector, ut remota omni suspicionum caligine, expeditos animos afferat ad ea, qua duobus sequentibus cap. enigmata proponuntur, excussosque, prociui metu omni, ac maiore abiecto, faciliorem te, & hilariorum his evolvendis nobis praestes. Præter duorum capitulum enigmata, exempla varia cap. 31. subiiciemus, in quibus tamen numeris, qui ad materiam contracti sunt, ubi etiam quaestiones nonnullas, qua ad secundas radices spectant, accipies. Capitulo demum 32. multiplices de rebus Geometricis quaestiones in medium afferemus. Facile autem enigmatum multitudinem sustinebit is, cui, quam tandem ob causam producantur, constabit. Neque enim illud solum laboramus, ut pro-

posita

posita a nobis quaestiones dissolvantur, sed illud praeteren curandum nobis esse
duximus, ut alias quoque in similes ab alijs quocunque tempore dissolvendi
modus intelligatur: quem certe modum ex horum arithmetum solutione qui-
bus vel nullo negotio colliget. Quare neque illud omisimus, ut ita aenigmata
omnia, omnes quaestiones solutas daremus, ut studiosus Lector peculiare in his
enodandis Algebra artificum facile dignosceret. Singulos enim operationes
quasi oculis solvessimus, ne hastitandum foret in singulis, aut superiora pra-
cepta singulari intervallo repetenda. Quia ratio est, quare Algebrae
obscuram, & tenebrosam plerique autumant, ut ad paucos, aut etiam ad se-
re neminem eius intelligenda vim pertinere conferunt. Id enim in plerisque
eius scriptoribus desideratum animadverti, quod mihi maxime curandum
fuit, ut quae aptissime omnia proferrentur: Neque, ut mox olim Lyricus
poeta, laboro brevis esse, dummodo obscurus ne sim: Ex volens libenter, ver-
borum notam subire me patiar, ceteris ut apertissima per me omnia fiant.
Maior tamen ex aenigmatum sequentium explanatione voluptas ut derivetur,
praestabit ea, veluti sese exercendi causa, ad quaestionum normam examinare
perinde ac nulla eorum explicatio habuisset fuisset allata: interdum etiam nu-
meros & exempla alia, quae eorum, quae ibi subijciuntur, eorum loco subrogan-
do. Atque ut plurima aenigmata adscripsimus, quae omnino, nisi per Alge-
bram nequeunt explicari, ita etiam non pauca de industria inseruisse volui-
mus, quae etiam sine Algebra solvi posse non inficiamur. Placuit tamen ea
ceteris apponere, non ut alijs artibus sublata vellemus, sed ut expeditorem,
celeriter, incunctioremque, ea indagandi Algebra methodum agnosceremus.
Etiam, quod in alijs fit, ut totidem ferme leges, totidemque, praecipua tradantur,
quos sunt aenigmata cognoscenda, singulis aenigmatibus, non nisi singu-
la ac sua leges aperitur, & una lex toti tantum aenigmati exponitur, respon-
deat, id longe facilius, aduocata Algebra, dabit effectum. Vnde tamen eadem
lege, via, ac methodo universa ferè semper soluta praestabit, tamque nobis mo-
lestiam excinet, quam multiplex illa regularium varietas non assero non po-
test: Ut vel hac una laude, si cetera (quae hic pauca sibi, nec lenis) desint,
alijs omnibus Arithmetica regulis Algebra antecellat. Vix enim quaestione
oblato, ipsa etiam ratio cum explicanda in Algebra sese dat in conspectum, &
penè ipsa quaestio viam indicat, quae ipsam, veluti ita in se cunctis, tandem affe-
quimur. Quod quidem, si regulam falsè dedit, nullius omnino est aliarum.
Habet tamen Algebra praeter ceteris singulare, quod multis ipsa sola quaestio-
nis suae legibus soluat, de quibus alia vel non laborant, vel solvantur, nihil
efficiunt. Et quod eas, quae ab alijs quaque aliquando longis perambulantur,
veluti in tenebris deprehenduntur, ipsa quasi per compendia, & lucis clava
perficiat. Ceterum illud tenet calabo, studiose Lector, permulta a nobis esse
ferè aenigmata, quibus si alijs, atque alijs subinde numeri supplantantur, cerne-
batur solutus non possit. Non tamen in idem quod ab alijs sententiis solvi qua-
possit, quoque, non possunt. Id res ipsa eadem docebit operatio, quae ut in po-
teritiam quaestionem subire oportet. Vbi enim apparet inter duos inaequa-
les utrimque verè si numeros incident, etiam quaestio solutio nulla esse poterit.
Quam nos esse rationem diximus, quare Algebra regula tantopere unius
alijs Arithmetica praecipionibus praestet. Frequentissimum quippe est, ut in-
iquum aliquam quaestio, quae in periculis omnino non habet, Algebra

imperita obijciatur, quam ille per summum laborem, summamq. & animi, & corporis contentione[m] soluere ne quisquam conuincatur: & repetito iterum, iterumq. studio, tempus atque operam omnem suam passim ire impendens patietur. A quo certe precul obijt Algebræ studiosis, cui ipsa operatio, quæ passim, quæ vero non possunt solui, qualitates indicabit. Quasiuis igitur hoc est, quæ Algebræ studiosus gloriari iure patet, ut ob firmo animo, constantiq. sententia, proposita quaestio solui queat, nec ne, nihil desitians, nec dubia voce pronunciet?

AENIGMATA VARIA NVMERORVM

abstractorum per Algebram enucleanda, in quibus æquatio inter duos tantum numeros occurrit: quæ quidem simplex æquatio dicitur. Cap. XXIX.



N. hoc cap. asseremus anigmata, in quibus occurrunt simplices æquationes: In sequenti vero anigmata proponemus, in quibus compositæ æquationes reperiuntur. Quid porro sit æquatio simplex, quid composita, ad hunc cap. 13. declarauimus. Hinc igitur exordiamur.

I. Datum numerum quemcumque diuidere in duas partes se mutuò superantes in dato excessu quocunque.

Sit numerus 100. diuidendus in duas partes, quarum excessus, vel differentia sit 40. Ponatur minor pars 1 2e. ac proinde maior 100 —

1 2e. Detracto 1 2e. ex 100 — 1 2e. remanent

100 — 1 2e. vt hic vides. Eritq. intentæ æqua-

tio inter 100 — 1 2e. & 40. quippe cum dem-

pta minore parte ex maiore, relinqui debeant

40. Additis vtrinque 1 2e. erit æquatio inter

100. & 40 + 1 2e. Et vtrinque ablatis 40. æquatio erit inter 60. &

1 2e. Si ergo ex præscripto regulæ Algebræ diuidantur 60. per 2

inuenietur 1 2e. esse 30. acque hæc est minor pars. Ergo maior erit

70. nimirum 100 — 30. quæ maior pars etiam habebitur, si ad mi-

nores 30. adijciatur differentia proposita 40. Vides ergo maiorem

partem 70. superare minorem 30. números 40. vt propositum

est.

Quòd si statuamus, maiorem partem esse 1 2e. & minorem 100

— 1 2e. subtrahemus 100 — 1 2e. ex 0 + 1 2e. vt hic vides. rema-

nebuntq.

nebunt: — 100 + 12. hoc est, 12 — 100.

Nam subtracta + 0. ex + 100. remanent —

100, quod rursus posterè positi sint numeri, ideo-

que ex + fiat —. &c. Hic ergo numerus reli-

quus 12 — 100. æqualis esse debet dato ex-

cessui 40. Additis igitur 100. vtrunque. erit æquatio inter 12. &

140. Et diuisis 140. (vt præcipit regula Algebræ) per 12. fiet 12. 70.

quæ maior pars erit, ac propterea minor 30. nimirum 100 — 70.

SOLVTVR idem hoc ænigma hac alia ratione. Ponatur minor

pars 12. ideoq. maior 12 + 40. superans nimirum minorem nu-

mero 40. Ambæ partes simul efficiunt 12 + 40. qui numerus æqua-

lis debet esse dato numero 100. Demptis vtrunque 40. erit æquatio

inter 12. & 60. Diuisis ergo 60. per 12. erit 12. 30. minor scilicet

pars, ideoq. maior 70. vt prius.

Quod si maior pars ponatur 12. ideoq. minor 12 — 40. vt illa

hanc excedat numero 40. Ambæ partes simul efficiunt 12 — 40.

quæ summa æqualis est dato numero 100. Additis 40. vtrunque, erit

æqualitas inter 12. & 140. Diuisisq. 140. per 12. fiet 12. 70. pro

maiore parte, ideoq. minor erit 30. vt supra.

S C H O L I V M.

VSV interdum venit, ut numerus aliquis Cossicus, nimirum 12. vel 102. vel 18. vel 68. &c. in duas partes diuidendus sit, quæ se dato numero excedant: ut ænigmatibus manifestum est. Quæres sine Algebra (nam per Algebram mix fieri potest) hanc in medium perducitur. Ex dato numero Cossico detrahatur datus numerus per signum —. & remissis namq. huius numeri diminuti erit minor pars, cui si per regulam additionis copia, traditam addatur idem numerus datus, habebitur maior pars.

Sit enim 12 diuidenda in duas partes, quarum maior minorem superet 20. unitatibus. Deme 20. ex 12. & ad $\frac{1}{2}$ 12 — 10. semissem residus 12 — 20. adde 20. faciesq. $\frac{1}{2}$ 12 + 10. ut in formula opposita addes. Partes sunt $\frac{1}{2}$ 12 — 10. & $\frac{1}{2}$ 12 + 10. quarum hac illam superat numero 20. & ambæ efficiunt 12.

Sit rursus numerus 102 diuidendus in duas partes, quarum differentia 20. Deme 20. ex 102. Nam residus 102 — 20. semissem 52 — 10. erit minor pars: ad quam si addes 20. facies 52 + 10. maiorem partem, quarum hac illam superat 20. unitatibus, & ambæ efficiunt 102.

Sit quoque 18. diuidendus in duas partes, quarum differentia 150. Deme 150. & residus 18 — 150. semissem $\frac{1}{2}$ 18 — 75. erit minor pars, ad quam si addideris 150. facies maiorem partem $\frac{1}{2}$ + 75. quæ simul faciant 18. & maior minorem superat numero 150.

Sit denique numerus 68. diuidendus in duas partes, quarum maior minorem superat 3. unitatibus. Deme 3. ex 68. Nam residus 68 — 3. semis-

X 2

sit 3

Diuisio numeri Cossici in duas partes dati excessus.

$$\begin{array}{r} 0 + 12 \\ 102 - 12 \\ \hline -100 + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 12 - 10 \\ + 20 \\ \hline \frac{1}{2} 12 + 10 \end{array}$$

fit $3\frac{1}{2}$ — 4. erit prima pars: ad quam si addis 8. fiet maior pars $3\frac{1}{2} + 4$.
 Accipe ita de ceteris.

Diuisio numeri abfoluti in duas partes dari excessus, fine Algebra: Nam si excessus datum ex proposta numero detrahamus, erit reliquus: numeri femifus minor pars, ad quam si confluat excessus adueniens, conficiamus partem maiorem. Vt si numerus 30. distribuendus fit in duas, quarum differentia 40. Deme 40. ex 30. Reliqui enim numeri 60: femifus 30, erit minor pars: ad quam si addes 40. conflabis maiorem partem 70.

¶ Quid si Coefficientes numerus dividendus ita sit per Algebram, non inveniantur quidem partes numeri Coefficientis, sed pretium radicum reperitur, uti videmus, cuius partes respondent partibus per Algebram positis, quationibus satisfaciunt. Ut si numerus 28, secundus sit in duas partes, quarum maior superet minorem numero 40. Ponatur minor pars $\frac{1}{2}x$, (minor scilicet numerus, quia semper fuit dati numeri 28) eritq. maior pars $\frac{1}{2}x + 40$. Superat illam numero 40, quia singuli efficiunt 1 28 + 40, qui numerus aequalis debet esse dato numero 28. Dempto 1 28, utrinque, erit aequatio inter 40. Et 1 28. Dissolvit. 40. per 1, fiet 1 28. 40. Et 2 28. propositi 20, qui numerus dividendus proponitur. Quoniam igitur minor pars posita est $\frac{1}{2}x$. erit minor pars 20. semper videlicet unius 28, cuius pretium invenimus 40. ideoq. maior pars erit 60. utrumq. $\frac{1}{2}x + 20$. Vbi videt, 20. Et 60. efficere 80. Et maiorem partem superare minorem dato numero 40. Sic etiam si 28. distribuenda sint in duas partes, quarum differentia 40. invenitur eodem modo 1 28. 40. ideoq. 2 28. 80. Erig. $\frac{1}{2}x - 20$. Et $\frac{1}{2}x + 20 + 40$. erit 60. Et

111
 112
 113
 114
 115
 116
 117
 118
 119
 120
 121
 122
 123
 124
 125
 126
 127
 128
 129
 130
 131
 132
 133
 134
 135
 136
 137
 138
 139
 140
 141
 142
 143
 144
 145
 146
 147
 148
 149
 150
 151
 152
 153
 154
 155
 156
 157
 158
 159
 160
 161
 162
 163
 164
 165
 166
 167
 168
 169
 170
 171
 172
 173
 174
 175
 176
 177
 178
 179
 180
 181
 182
 183
 184
 185
 186
 187
 188
 189
 190
 191
 192
 193
 194
 195
 196
 197
 198
 199
 200
 201
 202
 203
 204
 205
 206
 207
 208
 209
 210
 211
 212
 213
 214
 215
 216
 217
 218
 219
 220
 221
 222
 223
 224
 225
 226
 227
 228
 229
 230
 231
 232
 233
 234
 235
 236
 237
 238
 239
 240
 241
 242
 243
 244
 245
 246
 247
 248
 249
 250
 251
 252
 253
 254
 255
 256
 257
 258
 259
 260
 261
 262
 263
 264
 265
 266
 267
 268
 269
 270
 271
 272
 273
 274
 275
 276
 277
 278
 279
 280
 281
 282
 283
 284
 285
 286
 287
 288
 289
 290
 291
 292
 293
 294
 295
 296
 297
 298
 299
 300
 301
 302
 303
 304
 305
 306
 307
 308
 309
 310
 311
 312
 313
 314
 315
 316
 317
 318
 319
 320
 321
 322
 323
 324
 325
 326
 327
 328
 329
 330
 331
 332
 333
 334
 335
 336
 337
 338
 339
 340
 341
 342
 343
 344
 345
 346
 347
 348
 349
 350
 351
 352
 353
 354
 355
 356
 357
 358
 359
 360
 361
 362
 363
 364
 365
 366
 367
 368
 369
 370
 371
 372
 373
 374
 375
 376
 377
 378
 379
 380
 381
 382
 383
 384
 385
 386
 387
 388
 389
 390
 391
 392
 393
 394
 395
 396
 397
 398
 399
 400
 401
 402
 403
 404
 405
 406
 407
 408
 409
 410
 411
 412
 413
 414
 415
 416
 417
 418
 419
 420
 421
 422
 423
 424
 425
 426
 427
 428
 429
 430
 431
 432
 433
 434
 435
 436
 437
 438
 439
 440
 441
 442
 443
 444
 445
 446
 447
 448
 449
 450
 451
 452
 453
 454
 455
 456
 457
 458
 459
 460
 461
 462
 463
 464
 465
 466
 467
 468
 469
 470
 471
 472
 473
 474
 475
 476
 477
 478
 479
 480
 481
 482
 483
 484
 485
 486
 487
 488
 489
 490
 491
 492
 493
 494
 495
 496
 497
 498
 499
 500
 501
 502
 503
 504
 505
 506
 507
 508
 509
 510
 511
 512
 513
 514
 515
 516
 517
 518
 519
 520
 521
 522
 523
 524
 525
 526
 527
 528
 529
 530
 531
 532
 533
 534
 535
 536
 537
 538
 539
 540
 541
 542
 543
 544
 545
 546
 547
 548
 549
 550
 551
 552
 553
 554
 555
 556
 557
 558
 559
 560
 561
 562
 563
 564
 565
 566
 567
 568
 569
 570
 571
 572
 573
 574
 575
 576
 577
 578
 579
 580
 581
 582
 583
 584
 585
 586
 587
 588
 589
 590
 591
 592
 593
 594
 595
 596
 597
 598
 599
 600
 601
 602
 603
 604
 605
 606
 607
 608
 609
 610
 611
 612
 613
 614
 615
 616
 617
 618
 619
 620
 621
 622

² *Dicos numeros invenire, quorum excessus sit datus quivis numerus, & eorum summa conficiat quemlibet datum numerum.*

11. Sit datus excessus 40. & summa 100. Hoc enigma a superiori non differt. Nam summa 100. distribuenda est in duas partes, quarum excessus sit 40.

III.

3 Datum numerum quemlibet in duas partes dividere, qua inter se multiplicata gignant numerum, qui ad quadratum minoris partis habeat datam proportionem quamcunque.

Sit datus numerus 100, diuidendus in duas partes, vt numerus ex vna in alteram genitus ad quadratum minoris partis proportionem habeat decuplam. Ponatur minor pars 1^{te}. Ideoq. maior 100 — 1^{te}. Ex vna in alteram procreatur numerus $100 \cdot 1 = 1$ %. qui decuplus esse debet ad quadratum partis minoris, nimirum ad 1 %. hoc est, æqualis 10 %. Est ergo æqualitas inter $100 \cdot 2 = 1$ % et 10 %.

18

Et addito 18. utrinque, inter 100.20. & 11.

8. Divisis ergo 100. per 11. iuxta tenorem re-

gule, prodibit 120.9. $\frac{1}{11}$. pro minore parte :

(quia numeri Cofici sunt collaterales.) qua-

abrata ex 100. reliqua erit maior pars 90 $\frac{10}{11}$.

Hæ partes, nimirum $\frac{100}{11}$ & $\frac{1000}{11}$ inter se multiplicatae faciunt

10000. hoc est, 826 $\frac{10}{11}$. qui numerus decuplus est ad quadratum

minoris partis, videlicet ad $\frac{1000}{11}$. hoc est, ad 82 $\frac{10}{11}$. vt perifi-

cium est.

$$100 - 120 = -20$$

$$+ 120$$

$$10020 = 18$$

$$10020 = 18$$

$$10020 = 18$$

$$10020 = 18$$

$$10020 = 18$$

$$10020 = 18$$

S. C H O L I V M.

SCIENDUM autem est, duas partes numeri dati inuentas, eandem

habere proportionem, quam productus numerus ex earum multiplicatione

habet ad quadratum minoris partis. Ita vides partes inuentas 9 $\frac{1}{11}$ & 50 $\frac{10}{11}$.

vel $\frac{100}{11}$ & $\frac{1000}{11}$. habere proportionem decuplam, quemadmodum produ-

ctus numerus 826 $\frac{10}{11}$ ad 82 $\frac{10}{11}$. quadratum minoris partis, sive $\frac{10000}{11}$.

ad $\frac{1000}{11}$. Cuius res ratio est, quod eadem pars minor multiplicet & seip-

sam, ut suum quadratum efficiat, & maiorem partem, ut productum numerum

gignat. Hinc enim fit, ut producti eandem proportionem habeant, quam

numeri multiplicati.

Itaque ænigma hoc ita proponi posset,

Datum numerum in duos parti in data proportionem,

qui inter se multiplicati gignant numerum, qui ad qua-

dratum minoris numeri proportionem habeat eandem

datam.

Sit enim datus numerus 100. diuidendus in duos habentes quadruplam

proportionem, ita ut numerus ex eorum multiplicatione procreatus habeat quo-

que ad quadratum minoris proportionem quadruplam. Ponatur minor numerus

120. & maior 420. ut nimirum habeant proportionem quadruplam. Et quia

duo hi numeri faciunt 520. erit æquatio inter 520. & 100. Divisis ergo 100.

per 5. fiet 20. minor scilicet numerus. Maior erit 80. cum postquam

fit 420. Vides ergo numerum 1600. productum ex 20. in 80. quadruplam

esse quadrati 400. ex minore 20. descripti. Item maiorem 80. ad minorem

20. quadruplam quoque habere proportionem.

4 Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati pro-

ducant numerum, qui ad quadratum minoris nu-

meri proportionem habeat datam: simul vero additi

constituant summam propositam quacunque.

Sit summa proposita 100. & numerus ex duobus numero inuenito in alterum

procre-

.V

a 17. septimi

.IV

IIII.

procentus sit & explus ad quadratum minoris numeri. Hoc etiam enigma & superior non differt. Nam Summa 100. diuidenda est in duas partes, quae inter se multiplicata producant numerum in proportione decupla ad quadratum numeri minoris.

V.

5 Duos numeros inuenire in data proportione, quorum maior si subtrahatur a dato numero, & minor a minore, alio dato numero, reliqui duo fiant duo numeri aequales: quando id fieri potest.

Sint inueniendi duo numeri in proportione tripla, quorum maiora detracto ex 30. & minore ex 16. reliqui fiant duo numeri aequales. Debent autem duo propositi numeri habere proportionem minorem proportione data. Vt in nostro exemplo minor est portio 30. ad 15. quam tripla.

Ponatur minor 12. Ideoque maior 32. triplo maior. Si 32 dematur ex 30. remanent 30 — 32. Et si 12 dematur ex 16. remanent 16 — 12. Est ergo inuenta aequatio inter 30 — 32. & 16 — 12. Addantur vtriusque 32. eritque aequatio inter 30. & 16 + 22. propterea quod + 32. addit ad — 12. faciant + 22. Et ablatis 16. vtriusque, erit aequalitas inter 14. & 22. Diuisusque 14. per 2. prodibit 7. pro minore numero. Maior ergo erit 21. triplo maior. Perspicuum autem est, si 21. ex 30. & 7. ex 16. detrahantur, vtriusque relinqui 9.

$$\begin{array}{r} + 32 \\ - 12 \\ \hline + 22 \end{array}$$

VI.

6 Duos numeros in proportione data inuenire, ita ut maiore addito ad datum numerum, & minore ad alium datum minorem, vel ad eundem, efficiantur duo numeri in proportione quacunque data, quando id fieri potest.

Sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, quorum maiore addito ad 6. & minore ad 4. efficiantur duo numeri in proportione tripla. Ponatur minor numerus 12. & maior 52. quintuplo maior. Ex 52. & 6. fiunt 52 + 6. Et ex 12. & 4. fiunt 12 + 4. Eruntque 52 + 6. in tripla proportione ad 12 + 4. hoc est, & triplicentur 12 + 4. aequatio fiet inter 52 + 6. & 32 + 12. Et ablatis 32. vtriusque, inter 22 + 6. & 12. Et rursum ablatis vtriusque 6. inter 22. & 6. Diuisus ergo 6. per 2. proveniet 3. pro minore numero, & 15. pro maiore, quintuplus illius. Iam si addantur 15. ad 6. & 3. ad 4. fiunt 21. & 7. in tripla proportione.

Si compositus numerus 52 + 6. ad 12 + 4. debeat habere proportionem quadruplam, erit aequalitas inter 52 + 6. & 42 + 16.

Et

Et ablatis 4. utrinque, inter 1. et 6. & 16. Et rursus ablatis 6. utrinque, inter 1. et 10. Diuisisq. 10. per 1. fiet 1. et 10. minor scilicet numerus, ideoq. maior 19. illius videlicet quintuplus. Quod si 50. addantur ad 6. & 10. ad 4. fient numeri 56. & 14. in proportionem quadrupla.

Et si compositus numerus 5. et 6. ad 1. et 4. habere debeat proportionem duplam, erit æquatio inter 1. et 6. & 1. et 8. Et ablatis 1. et 2. utrinque, inter 3. et 6. & 8. Et ablatis 6. utrinque, inter 3. et 2. Diuisis autem 2. per 3. fiet 1. et 3. minor scilicet numerus, & maior 4. illius quincuplus. Et si 14. addantur ad 6. id est, ad 1. et 7. ad 4. id est, ad 1. et 5. fient duo numeri 3. et 15. habentes proportionem duplam.

SED tam maior 5. et 6. quam minor 1. et 2. additis ad 6. efficere debeant duos numeros in proportionem tripla. Inuenietur æquatio inter 5. et 6. & 3. et 18. & ablatis 3. et 2. utrinque, inter 1. et 6. & 18. Et rursus ablatis 6. utrobique, inter 1. et 12. Diuisis ergo 12. per 1. fiet 1. et 12. minor numerus: maior autem erit 30. Si igitur uterque addatur ad 6. fient numeri 12. & 36. habentes proportionem triplam.

QVOD si quis velit, compositum numerum 5. et 6. ad 1. et 4. habere proportionem etiam quintuplam, vel maiorem, aut sequi alteram, euadet ænigma inexplicabile, seu impossibile: quia incedemus id æquationem impossibilem. Vt si proportio inter 5. et 6. & 1. et 4. debeat esse quintupla, vel sextupla, erit æquatio inter 5. et 6. & 5. et 20. Vel inter 5. et 6. & 6. et 24. quarum utraque impossibilis est.

At si proportio inter 5. et 6. & 1. et 4. debeat esse sesquialtera, erit æquatio inter 5. et 6. & 1. et 6. quæ etiam impossibilis est. Vbi clare perspicis, ex ipsa regula Algebræ cognosci posse, num ænigma propositum solui possit, nec ne. id quod cap. 14. pluribus verbis docuimus.

7. Numerum inuenire, qui additus ad quosuis duos numeros datos, faciat duos numeros in quacunque proportionem, quæ minor sit proportionem duorum numerorum propositorum.

VIIII

Sic inueniendus numerus, qui additus ad 100. & 10. faciat duos numeros in proportionem tripla. Ponatur numerus quæsitus 1. et 2. Fient ergo numeri 1. et 100. & 1. et 10. qui debent habere proportionem triplam. Igitur æquatio erit inter 1. et 100. & 3. et 60. Ablata 1. et 2. utrinque, remanebit æquatio inter 100. & 2. et 60. Et rursus, demptis 60. utrinque, inter 40. & 2. Diuisis autem 40. per 2. fiet 1. et 20. numerus quæsitus. Numeri ergo compositi erunt 100. & 40. in proportionem tripla.

DEBET autem proportio nominata minor esse proportionem inter

ter datos duos numeros, vt in nostro exemplo, minor, quam quintupla. Alias occurret nobis æquatio impossibilis. Ratio huius rei est, quod addito vno eodemq. numero ad duos inæquales, compositi minorem habeant proportionem, quam duo illi inæquales.

Sint namque duo numeri inæquales AB, maior, & CD, minor; quibus addatur idem numerus, vel duo æquales BE, DF. Dico minorem esse proportionem AB, ad CF, quam AB, ad CD: Quoniam enim (vt ad defin. 20. lib. 7. Eucl. declarauimus) maior est proportio maioris numeri AB, ad BE, quam minoris CF, ad eundem BE, vel ad DF: erit per conuersionem rationis, minor proportio AB, ad AB + BE, quam CF, ad CD + DF: Et permittendo, minor AB, ad CF, quam AB, ad CD. quod est propositum.

a schol. 22.
septimi.

Idem positis sic, data proportio super bipartiens quintas. Numeri compositi sunt 12 + 100, & 12 + 10, qui debent habere proportionem super bipartientem quintas. Si ergo 12 + 10, multiplicetur per 10, denominatorem proportionis super bipartientis quintas, id est, per 7, fiet numerus 120 + 100, qui æqualis erit numero 12 + 100. Hæc æquatio per multiplicationem in cruce, vt hic vides, reducitur ad æquationem inter 12 + 100, & 120 + 100. Et ablatis 120, vtrunque, erit æquatio inter 12 + 100, & 120 + 100. Et rursum ablatis 120, vtrunque, inter 12, & 120. Diuisis ergo 120, per 12, fiet 120, numerus quæsitus. Hic enim cum 100, & 10, faciet numeros 120, & 200, qui habent proportionem super bipartientem quintas. Apposui hoc alterius exemplum, vt videat, quo pacto æquationes inter minutias sine reducenda, quod ad finem cap. 10. docui

VIII. 8^o Numerum inuenire, qui ablatus ex quibuslibet duobus numeris datis, relinquat duos numeros in quacunque proportionem, quam maior sit proportionem duorum numerorum propositorum.

Sit inueniendus numerus, qui ablatus ex 100, & 50, relinquat duos numeros in proportionem septupla. Ponatur quæsitus numerus 12. Erunt ergo duo numeri reliqui 100 - 12, & 50 - 12, eritq. proportio illius ad hanc septupla. Quare æquatio erit inter 100 - 12, & 350 - 72. Additaq. 12, vtrunque, fiet 100, & 350, quæ erit æquatio inter 100, & 350. propter quod 12, faciat quod + 12, & 350 - 72, faciant 62. vt hic cernis. Et rursum additis vtrunque 62, erit æquatio inter 100 + 62, & 350 + 62. Et ablatis vtrunque

100. inter 6 2e. & 350. Diuisis ergo 350. per 6. erit 1 2e. 41 1/2. numerus quæsitus. Reliqui ergo numeri erunt 58 1/2. & 8 1/2. qui proportionem habent septuplam.

DEBET autem proportio data esse maior proportione, quam dati duo numeri habent, vt in proposito exemplo maior, quam dupla. Alias incidemus in æquationem impossibilem. Cuius rei ratio est, quod ablato vno eodemq. numero ex duobus inæqualibus, reliqui numeri habeant proportionem maiorem, quam duo illi inæquales.

Sint enim inæquales duo numeri AB, maior, & CD, minor, a quibus auferatur idem numerus, vel duo æquales EB, ED. Dico maiorem esse proportionem AE, ad CF, quam AB, ad CD. Quoniam enim (vt ex

A.....E....B
C.....F....D

defn. 20. lib. 7. Eucl. deduximus) maior est proportio maioris numeri AB, ad EB, quam minoris CD, ad eundem EB, vel ad ED: erit quoque permutando maior proportio AB, ad CD, quam EB, ad ED: septimi. nimirum totius ad totum, quam ablatis ad ablatum: erit quoque maior proportio reliqui AE, ad reliquum CF, quam totius AB, ad totum CD. quod est positum.

9 *Propositum numerum in duos numeros habentes datam proportionem distribuere.*

IX.

Sit numerus 100. diuidendus in duos in proportionem decupla. Ponatur minor pars 1 2e. Eritq. maior 10 2e. decuplo videlicet maior. Ergo summa harum partium 11 2e. æqualis erit 100. Diuisis igitur 100. per 11. fit 1 2e. 9 1/11. minor numerus, quo ablato ex 100. remanet maior numerus 90 10/11. qui illius decuplus est.

Alicer. Posita 1 2e. pro minore parte, erit maior pars 100—1 2e. quæ illius decupla esse debet. Igitur 10 2e. æquales erunt 100—1 2e. Additaq. 1 2e. vtrinq. erit æquatio inter 11 2e. & 100. vt supra. Quod si statuas maiorem partem esse 1 2e. erit minor 100—1 2e. quæ decuplata, erit æqualitas inter 1 2e. & 1000—10 2e. Additaq. 10 2e. vtrinq. æquatio erit inter 11 2e. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet 1 2e. 90 10/11. pro maiore parte. qua ablata ex 100. erit minor pars 9 1/11. vt prius.

10 *Propositum numerum in duas partes secare, vt maior ad minorem habeat datam proportionem, & insuper contineat datum quemcunque numerum.*

X.

Sit numerus 100. secandus in duas partes, quarum maior minoris sit tripla, & insuper contineat 20. vnitates. Ponatur 1 2e. pro minore parte. Maior ergo erit 3 2e + 20. Summaq. 4 2e + 20. æqualis esse debet 100. Ablatis 20. vtrinq. erit æqualitas inter

Y 4 2e.

4. 2e. & 80. Diuisisq. 80. per 4. fiet 1 2e. 10. pro minore parte. qua dempta ex 100. reliqua erit maior pars. 80. quæ triplum numeri 10. continet, nimirum 60. & insuper 10.

Aliter. Posita 1 2e. pro minore parte, erit maior 100 — 1 2e. 2 quæ si detrahantur 10. debet reliquus numerus 80 — 1 2e. triplus esse minoris 1 2e. hoc est, æquatio esse debet inter 3 2e. & 80 — 1 2e. Adlitaq. 1 2e. vtrinque æqualitas erit inter 4 2e. & 80. Igitur vt supra, erit 1 2e. 10. minor pars, & maior 80.

XI.

11 Duos numeros inuenire, quorum excessus datus sit, & proportio data.

Sit datus excessus 10. & data proportio quintupla. Ponatur minor numerus 1 2e. Erit maior 5 2e. nimirum illius quintuplus. Excessus eorum est 4 2e. Est ergo æquatio inter 4 2e. & 10. Diuisisq. 10. per 4. fiet 1 2e. 5. pro minore numero. Maior autem erit 15. qui ipsius 5. quintuplus est, eundemq. excedit numero 10.

SINT rursum inueniendi duo numeri in proportionem supertripartiente septimas, quorum excessus sit 11. Ponantur duo numeri 7 2e. 10 2e. in proportionem supertripartiente septimas. Horum differentia 3 2e. æqualis esse debet numero 11. Diuisis ergo 11. per 3. fiet 1 2e. 7. Igitur 7 2e. erunt 49. & 10 2e. facient 70. Est autem differentia inter 70. & 49. datus numerus 11. habentq. proportionem supertripartientem septimas.

XII.

12 Datum numerum in duos numeros parti, ita vt pars aliquota vnus data cum parte alia aliquota alterius data faciat datum quemuis numerum, qui positus sit inter pactes nominatas dati numeri diuidendi.

Sit numerus 100. diuidendus in duos, ita vt $\frac{1}{3}$. prioris cum $\frac{1}{4}$. posterioris efficiat 30. qui numerus positus est inter $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. dati numeri 100. nimirum inter 33 $\frac{1}{3}$. & 20. hoc est, minor est, quam 33 $\frac{1}{3}$. & maior, quam 20. Ponatur primus numerus 1 2e. ideoq. secundus 100 — 1 2e. Tertia pars primi est $\frac{1}{3}$ 2e. & quinta secundi 10 — $\frac{1}{5}$ 2e. quæ partes simul efficiunt 20 — $\frac{1}{15}$ 2e. quia vt addatur $\frac{1}{3}$ 2e. ad — $\frac{1}{5}$ 2e. fit subtractio, propter diuersa signa. Eritq. æquatio inter 20 + $\frac{1}{15}$ 2e. & 30. Ablatisq. 10. vtrinque, inter $\frac{1}{15}$ 2e. & 10. Diuisis autem 10. per $\frac{1}{15}$. prouenit 1 2e. 75. pro primo numero: atque idcirco secundus erit 15. nimirum 100 — 1 2e. Constat autem, tertiam partem prioris, nimirum 15. cum quinta parte posterioris, hoc est, cum 5. efficere 30.

Aliter, vt vitentur fractiones. Ponatur tertia pars primi, 1 2e. ideoq. totus primus 3 2e. Igitur $\frac{1}{3}$ secundi erit 30 — 1 2e. vt cū $\frac{1}{4}$ primi,

primi, id est, cum 1 2e. conficere possit 30. ideoq. totus secundus erit 150—5 2e. qui cum primo, hoc est, cum 3 2e. facere debet 100. Fit autem ex ipsis 150—2 2e. Igitur æquatio erit inter 150—2 2e. & 100. Additisq. vtrinq. 2 2e. inter 150. & 100+2 2e. Ablatisq. 100—vtrinq. inter 50. & 2 2e. Diuisis ergo 50. per 2. fiet 1 2e. 25. Et quia primus positus fuit 3 2e. erit primus 75. atque idcirco secundus 25. quemadmodum prius.

QVOD si quis posceret numerum 33 $\frac{1}{2}$. vel maiorem, aut 20. vel minorem, quem partes nominatæ efficere debeant, occurreret æquatio impossibilis, vt experiri poteris.

13 *Datum numerum in duos partiri, ita vt prioris pars aliquota data excedat aliam partem aliquotam posterioris datam numero quouis, qui minor sit parte aliquota totius numero propositi, eiusdem nominis cum parte aliquota prioris numeri.*

XIII.

Sit diuidentus numerus 100. in duos, ita vt prioris pars quinta excedat quartam partem posterioris, numero 11. qui minor est, quinta parte diuidenti numeri 100. Ponatur prior numerus 1 2e. ideoq. posterior 100—1 2e. Pars quinta prioris $\frac{1}{5}$ 2e. excedere debet quartam partem posterioris, nimirum 25— $\frac{1}{4}$ 2e. numero 11. hoc est, æquatio esse debet inter $\frac{1}{5}$ 2e. & 25— $\frac{1}{4}$ 2e + 11. Addita $\frac{1}{4}$ 2e vtrinq. erit æqualitas inter $\frac{1}{5}$ 2e. & 25 + 11. siue 36. Diuisis ergo 36. per $\frac{3}{5}$ 2e. inuenietur 1 2e. 80. pro priore numero. Ergo posterior erit 20. Et $\frac{1}{5}$ prioris, nimirum 16. superat quartam partem posterioris, videlicet 5. numero 11.

Aliter sine fractionibus. Ponatur $\frac{1}{5}$ prioris numeri 1 2e. ideoq. totus prior 5 2e. Posterioris ergo $\frac{1}{4}$. erit 1 2e—11. vt 1 2e superet 1 2e—11. numero 11. totusq. posterior numerus erit 4 2e—44. Erit igitur æqualitas inter 9 2e—44. & 100. quod ambo numeri 5 2e. & 4 2e—44. efficere debeant 100. Additis ergo 44. vtrinq. fiet æquatio inter 9 2e. & 144. Diuisusq. 144. per 9. reperietur 1 2e. 16. Et quia prior numerus positus fuit 5 2e. erit numerus prior 80. ac proinde posterior 20. Et quinta pars prioris, nimirum 16. superat $\frac{1}{4}$ quartam partem posterioris numero 11.

QVOD si excessus quintæ partis prioris numeri supra quartam posterioris proponeretur 20. nimirum $\frac{1}{5}$ numeri 100. diuidenti, vel maior, quam 20. res non succederet. quia incideremus in absurdum aliquod. Nam si excessus debeat esse 20. reperies numerum priorem esse 100. ideoq. posteriorem 0. quod absurdum est, &c.

14 *Numerum inuenire, a quo si auferantur duo dati numeri, residuum minoris ad maioris residuum datam habeat proportionem.*

XIII.

Y 2

Sint

Sint a quæſito numero auferendi numeri 100. & 30. ita vt reſiduū minoris ad reſiduū maioris proportionem habeat triplam. Ponatur numerus quæſitus 1 2e. Eruntq. reſidui 1 2e—100. & 1 2e—30. Debet ergo proportio eſſe tripla 1 2e—30. ad 1 2e—100; hoc eſt, æquatio debet eſſe inter 1 2e—30. & 3 2e—300. Additis 30. vtrinque, erit æquatio inter 1 2e. & 3 2e—270. Et rursus additis 270. vtrinque, inter 1 2e+270. & 3 2e. & ablata 1 2e. vtrinque, inter 270. & 2 2e. Diuiſis ergo 270. per 2. emerget 1 2e. 135. numerus quæſitus. Nam ſi ſubrahantur 100. & 30. reliqui ſunt 35. & 105. Ac 105. ad 35. triplam proportionem habent.

XV. 15 *Datis duobus numeris, alium inuenire, quo addito ad minorem, & detracto a maiore, ſumma ad reſiduū, vel reſiduū ad ſummam habeat proportionem datam minorem eā, quam numeri dati habent. Item quo addito ad maiorem, & detracto ex minore, ſumma ad reſiduū proportionem habeat datam maiorem eā, quæ inter datos numeros inuenitur.*

Sint dati duo numeri 20. & 100. inueniendusq. ſit primo numerus, quo addito ad 20. & ſubtracto a 100. ſumma ad reſiduū habeat proportionem quadruplam, quæ minor eſt, quam quintupla, quam habent 100. ad 20. Ponatur ille numerus 1 2e. eritq. ſumma 1 2e+20. & reſiduū 100—1 2e. Vt igitur ſumma illa huius reſidui ſit quadrupla, erit æquatio inter 1 2e+20. & 400—4 2e. Et additis 4 2e. vtrinque, inter 5 2e+20. & 400. Et ablatis 20. vtrinque, inter 5 2e. & 380. Diuiſis igitur 380. per 5. fiet 1 2e. 76. numerus quæſitus. qui additus ad 20. facit 96. & detractus ex 100. relinquit 24. Perſpicuum autem eſt, quadruplam proportionem eſſe 96. ad 24.

Sit deinde inueniendus numerus, quo addito ad 20. & ſubtracto a 100. reſiduū ad ſummam habeat proportionem quadruplam. Ponatur numerus ille 1 2e. eritq. vt prius, ſumma 1 2e+20. & reſiduū 100—1 2e. Vt igitur reſiduū iſtud illius ſummæ ſit quadruplū, erit æquatio inter 4 2e+80. & 100—1 2e. & addita 1 2e. vtrinque, inter 5 2e+80. & 100. Et ablatis 80. vtrinque, inter 5 2e. & 20. Diuiſis ergo 100. per 5. fiet 1 2e. 4. numerus quæſitus. Hic enim additus ad 20. facit 24. Et ablatas ex 100. relinquit 96. qui numerus numeri 24. quadruplus eſt.

Sit denique inueniendus numerus, quo addito ad 100. & detracto ex 20. ſumma illa ad hoc reſiduū proportionem habeat ſeptuplā, quæ maior eſt, quam quintupla inter 100. & 20. Ponatur ille numerus 1 2e. Fietq. ſumma 1 2e+100. & reſiduū 20—1 2e. Vt igitur ſumma illa ſit ſeptupla huius reſidui, erit æqualitas inter 1 2e+100. & 140—7 2e. Et additis 7 2e. vtrinque, inter 8 2e+100. & 140. Et ablatis 100. vtrinque, inter 8 2e. & 40. Diuiſis igitur 40.

per

per 8. fiet 1 2e. 7. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 100. facit 107. detractus autem ex 10. relinquit 15. Habentq. 107. ad 15. proportionem septuplam.

Si proportio data in ultimo exemplo esset quadrupla, minor videlicet proportionem inter 100. & 20. incideremus in æquationem impossibilem. quod experiri licet.

16 *Datis duobus numeris, alium inuenire, ad quem si adiciatur alter datorum, & ab eodem alter detrahatur; summa ad residuum proportionem habeat datam.*

XVI.

Dati numeri sint 100. & 20. inueniendusq. primò sit numerus, ad quem si addantur 100. & ab eodem tollantur 20. summa illa sit residui huius tripla. Ponatur numerus ille. 1 2e. Fietq. summa 1 2e + 100. & residuum 1 2e — 20. Vt igitur summa illa sit huius residui tripla; erit æquatio inter 1 2e + 100. & 3 2e — 60. Et additis vtriusque 60. inter 1 2e + 160. & 3 2e. Et ablata 1 2e vtriusque, inter 160. & 2 2e. Diuisis ergo 160. per 3. reperietur 1 2e. 80. numerus quæsitus. Nam si ei addes 100. facies 180. & si demas 20. remanent 60. Estq. tripla proportio 180. ad 60.

Sit deinde inueniendus numerus, ad quem si addantur 20. & ab eodem deducantur 100. summa illa residui huius sit tripla. Ponatur ille numerus 1 2e. Fiet summa 1 2e + 20. & residuum 1 2e — 100. Vt ergo illa huius sit tripla; erit æquatio inter 1 2e + 20. & 3 2e — 300. Et additis 300. vtriusque, inter 1 2e + 320. & 3 2e. Et ablata 1 2e vtriusque, inter 320. & 2 2e. Diuisis igitur 320. per 2. fiet 1 2e. 160. numerus quæsitus. Nam si ei addes 20. concies 180. & si demas 100. relinques 60. Estq. inter 180. & 60. proportio tripla.

17 *Propositum numerum in duos diuidere bis, ita ut maior numerus primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat datam proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis, datam quoque habeat proportionem quamcunque.*

XVII.

Propositus numerus 100; diuidendus sit bis in duos numeros, ita ut maior primæ diuisionis ad minorem secundæ diuisionis habeat proportionem triplam; maior vero secundæ diuisionis ad minorem primæ diuisionis proportionem decuplam. Ponatur maior pars primæ diuisionis 3 2e. ideoq. minor 100 — 3 2e. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1 2e. Est enim tripla proportio 3 2e. ad 1 2e. ideoq. maior pars secundæ diuisionis erit 100 — 1 2e. Vt autem 100 — 1 2e.

— 1 2e. habeant ad 100 — 3 2e. proportionem decuplam, necesse est æquationē esse inter 100 — 1 2e. & 1000 — 30 2e. Igitur additis 30 2e. vtrinque, erit æquatio inter 100 + 29 2e. & 1000. Ablatisq. 100. vtrinque, erit æqualitas inter 29 2e. & 900. Diuisis igitur 900. per 29.prehenderetur 1 2e. 31 $\frac{1}{29}$. Et quia maior pars primæ diuisionis posita fuit 3 2e. erit ipsa pars maior 93 $\frac{1}{29}$. ac proinde minor 6 $\frac{1}{29}$. Rursus quia minor pars secundæ diuisionis posita fuit 1 2e. erit ipsa pars minor 31 $\frac{1}{29}$. ideoq. maior 68 $\frac{1}{29}$. Estq. numerus 93 $\frac{1}{29}$. ad 31 $\frac{1}{29}$. triplus: Et 68 $\frac{1}{29}$. ad 6 $\frac{1}{29}$. decuplus.

XVIII.

18 *Datum numerum in duos diuidere ter, ita vt maior pars primæ diuisionis ad minorem secundæ datam habeat proportionem: Item maior secundæ diuisionis ad minorem tertiæ: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ.*

Datus numerus 100. sit ter diuidendus in duos, ita vt maior primæ diuisionis ad minorem secundæ proportionem habeat triplam: Maior autem secundæ diuisionis ad minorem tertiæ, proportionem duplam: Ac denique maior tertiæ diuisionis ad minorem primæ, proportionē quadruplam. Ponatur 3 2e. 1 2e. 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. maior pars primæ 100 — 3 2e. 100 — 1 2e. 50 — $\frac{1}{2}$ 2e. diuisionis 3 2e.

ideoq. minor 100 — 3 2e. Erit ergo minor pars secundæ diuisionis 1 2e. quippe cum tripla sit proportio 3 2e. ad 1 2e. ideoq. maior pars secundæ diuisionis erit 100 — 1 2e. quæ vt dupla sit minoris partis diuisionis tertiæ, erit minor pars tertiæ diuisionis 50 — $\frac{1}{2}$ 2e., atque idcirco maior 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. Vt autem 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. ad 100 — 3 2e. minorem partem primæ diuisionis proportionem habeat quadruplam, erit æquatio inter 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. & 400 — 12 2e. Additisq. 12 2e. vtrinque, æqualitas erit inter 50 + 12 $\frac{1}{2}$ 2e. & 400. Et ablatis vtrinque 50. inter 12 $\frac{1}{2}$ 2e. & 350. Diuisis igitur 350. per 12 $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 28. Maior ergo pars primæ diuisionis, quæ fuit posita 3 2e. erit 84. & minor 16. At minor pars secundæ diuisionis, quam posuimus 1 2e. erit 28. ac maior 72. Denique minor pars tertiæ diuisionis, quæ posita est 50 — $\frac{1}{2}$ 2e. erit 36. & maior 64. qui numeri satisfaciunt ænigmati proposito. quod experiri poteris.

XIX.

19 *Duos numeros inuenire, qui inter se multiplicati procreent*

erent numerum in data proportione ad eorum summam.

Sit productus ex multiplicatione ad summam triplus. Ponatur vnus numerus 12. alter vero quicunque numerus maior denominatore proportionis, V.g. 20. maior quam 3. Alias res non succedet. Ex 12. in 10. fiunt 20 2e. Et summa ex 12 & 20. collecta est 12+20. Vt ergo ille productus ad hanc summam habeat proportionem triplam, erit æquatio inter 20 2e. & 3 2e + 60. Et ablatiis 3 2e. vtrunque, inter 17 2e. & 60. Diuisis ergo 60. per 17. fiet 1 2e. 3 1/17. Sunt ergo duo numeri quæsit 3 1/17. & 20. Ex ductu vnus in alium fit numerus 70 1/17. qui triplus est ad 23 1/17. eorum summā.

SI vnus numerus ponatur 1 2e. & alter 4. maior videlicet, quam 3. denominator proportionis triplæ, inuenientur duo numeri 12 & 4. Nam ex 1 2e. in 4. fit numerus 4 2e triplus summæ 1 2e + 4. Ergo æquatio erit inter 4 2e & 3 2e + 12. Ablatisq. 3 2e vtrunque, inter 1 2e. & 12.2c proinde 1 2e erit 12. vnus numerus, alter autem erit 4. vt posuimus.

20 *Dato numero quolibet, inuenire alium, ita vt ex hoc in illum procreetur numerus in data proportione ad eorum summam: ita tamen, vt denominator proportionis dato numero minor sit.*

XX.

Dato numero 20. inueniendus sit alius, qui in illum ductus producat numerum triplum ad summam ex ipsis collectam: cuius proportionis denominator 3. minor est dato numero 20. Alias res non succedet. Non differt hoc ænigma à præcedenti. Nam si numerus quæsitus ponatur 1 2e. & alter numerus, 20. qui datus est, inueniatur numerus, vt ibi, qui in 20. ductus producat numerum triplum ad summam, &c.

21 *Inuenire duos numeros in data proportione, qui inter se multiplicati faciant numerum in data proportione ad eorum summam.*

XXI.

Hoc ænigma à 19. non differt, nisi quod hic datur proportio, quā inuenti numeri habere debent.

Sint ergo inueniendi duo numeri in proportione sesquialtera, vt inter se multiplicati faciant numerum duodecuplum summæ eorum. Ponantur duo numeri 4 2e. & 6 2e. in proportione sesquialtera. Ex vno in alterum fiunt 24 2e. eorumq. summa est 10 2e. Vt ergo 24 2e. ad 10 2e. proportionem habeant duodecuplam, erit æqua-

æquatio inter 24 8. & 120 2e. Diuisis ergo 120. per 24. proueniet 5. quia denominationes Cossicæ 8. & 2e. collaterales sunt. Cum ergo primus numerus positus sit 4 2e & secundus 6 2e. erit primus 20. & secundus 30. qui multiplicati inter se faciunt 600. qui numerus duodecuplus est eorum summæ 50.

Si proportio inter numerum ex multiplicatione factum ad summam debeat esse sesquiquinta. Positis numeris 4 2e & 6 2e in proportionē sesquialtera. Vt numerus 24 8. ex multiplicatione factus ad summam 10 2e proportionem habeat sesquiquintam: erit æquatio inter 24 8. & 12 2e quia 12 2e ad 10 2e habent etiam proportionem sesquiquintam: qui quidem numerus 12. procreatus est ex 1 1/2. denominatore proportionis sesquiquintæ in 10. Diuisis igitur 12. per 24. fiet 1 2e 1/2. atque adeo cum numeri positi sint 4 2e & 6 2e. erunt duo numeri quæriti 2. & 3. qui multiplicati inter se faciunt 6. numerum ad eorum summam 5. sesquiquintam.

XXII.

22 *Inuenire duos numeros, quorum summa sit datus quilibet numerus, & posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit datus etiam numerus quiuis.*

V E L

Datum numerum in duos parti, vt posteriore diuiso per priorem, Quotiens sit quilibet numerus datus.

Sit summa quæditorum numerorum 100. & Quotiens 10. Sit primum prior numerus 1 2e, atque idcirco posterior 100 — 1 2e. Hoc diuiso per 1 2e. fit Quotiens 100 — 1 2e. æqualis 10. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 100 — 1 2e. & 10 2e. Addita 1 2e vtrinque, erit æquatio inter 100. & 11 2e. Diuisis autem 100. per 11. fit 1 2e 10/11. hoc est, 9 1/11 prior numerus. Ergo posterior erit 90 10/11 sive 1000/11. Constat autem si 90 10/11 per 9 1/11 sive 1000/11 per 100/11 diuidantur, Quotientem gigni 10.

Sit deinde posterior numerus 1 2e. ideoq. prior 100 — 1 2e. Illo per hunc diuiso, fit Quotiens 100 — 1 2e. æqualis 10. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 1 2e. & 1000 — 10 2e. Et additis 10 2e vtrinque, erit æqualitas inter 1 2e. & 1000. Diuisis ergo 1000. per 11. fiet Quotiens 1000/11 sive 90 10/11. posterior numerus, priorq. erit 9 1/11. sive 100/11. vt prius.

IAM si numerus datus 100. secundus sit in duos, vt posteriore per priorem diuiso, Quotiens sit 10. soluetur quæstio eodem modo ponendo 1 2e. pro priore, vel posteriore, & pro altero 100 — 1 2e. vt liquet.

DENIQUE sit diuidendus numerus 100. in duas partes, vt posteriore per priorem diuisa, Quotiens sit 1/2. Ponatur prior pars 1 2e, & posterior 100 — 1 2e. Hæc diuisa per 1 2e, fit Quotiens 100 — 1 2e. æqualis 1/2. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur

ad

ad hanc inter 1 2e, & 100 — 2 2e. Additisq. 2 2e vtroque, erit æqualitas inter 3 2e, & 100. Diuisis ergo 100. per 3 fiet 1 2e $\frac{200}{3}$, siue 66 $\frac{2}{3}$. pro priorē parte. Posterior autem erit 33 $\frac{1}{3}$. siue $\frac{100}{3}$. Diuisis autem $\frac{100}{3}$. per $\frac{200}{3}$, fit Quotiens $\frac{1}{2}$. vt constat.

23 DATVM numerum in quinque partes secare, vt secunda primam contineat quotiescunque libuerit, & præterea quotlibet unitates: Tertia secundam quotiescunque etiam libuerit, ac præterea quotuis unitates: Quarta tertia sit multiplex data, minus quotuis unitatibus: Ac tandem quinta a multiplici data quarta, deficiat quotlibet etiam unitatibus; quando id fieri potest.

XXIII.

DATVS numerus sit 100. secundus in quinque partes, ita vt secunda primam contineat bis, & præterea 2. Tertia secundam ter, ac præterea 3. Quarta tertia sit dupla minus 4. Ac tandem quinta a dupla quarta deficiat 13. unitatibus. Ponatur prima pars 1 2e. Eritq. secunda 2 2e + 2. Tertia 6 2e + 9. Quarta 12 2e + 14. Et quinta 24 2e + 15. Summa omnium partium est 45 2e + 49. quæ æqualis debet esse dato numero. 100. Ablatis 40. vtrunque, erit æquatio inter 45 2e. & 60. Diuisisq. 60. per 45. fiet 1 2e. 1 $\frac{2}{3}$. prima pars. Ergo omnes quinque erunt 1 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$. 17. 30. 47.

Si numerus 100. secundus esset in quinque partes, vt secunda primam contineret ter, & præterea 4. Tertia secundam bis, & præterea 3. Quarta esset quintupla tertia, minus 6. Quinta denique, esset quadrupla quarta, minus 5. questio foret impossibilis. Nam posita prima parte 1 2e esset secunda 3 2e + 4. Tertia 6 2e + 11. Quarta 30 2e + 49. & quinta 120 2e + 191. quæ omnes partes faciunt 160 2e + 255. quæ summa æqualis deberet esse dato numero. 100. totum parti, quod est absurdum. Propterea diximus in ænigmate [quando id fieri potest.]

24 Datis duobus numeris, alium inuenire, qui cum minore numerum faciat æqualem ei, quem pars aliquota quæcunque inuenti numeri cum maiore efficit.

XXIII.

Sint dati duo numeri 20. & 30. inueniendusq. sit alius, qui cum 20. summam faciat æqualem summæ ex 20. & sexta parte inuenti numeri collectæ. Ponatur numerus questus 6 2e. (Pono hunc numerum, vt habeat nominatam partem sine fractione. quod tamen opus non est.) Ergo 6 2e + 20. æquales sunt 1 2e + 30. Ablata 1 2e vtrunque, erit æquatio inter 5 2e + 20. & 30. Ablatisq. rursum 20. vtrunque, inter 5 2e & 10. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 2e 2. Igitur

62e facient 12. numerum quæsitum. Hic enim cum 10. facit 32. & eius $\frac{1}{2}$. nimirum 2. cum 30. facit etiam 32.

- XXV. 25 *Inuenire duos numeros in data proportione, ut tantum fiat, minore detractio ex maiore, quantum maiore diuiso per minorem.*

Sint inueniendi duo numeri in proportionem decupla. Ponantur 12e. & 102e. Detractio minore 12e. ex maiore 102e. supersunt 92e. Et diuisio maiore 102e. per minorem 12e. fit Quotiens 10. Est ergo æquatio inter 92e. & 10. Et diuisis 10. per 9. fit 12e. 1 $\frac{1}{9}$. siue 12 $\frac{1}{9}$. primus numerus. Alter ergo erit 120. siue 11 $\frac{2}{3}$. Nam si demantur 1 $\frac{1}{9}$. ex 11 $\frac{2}{3}$. remanent 10. Et diuisis 11 $\frac{2}{3}$. per 1 $\frac{1}{9}$. hoc est, 12 $\frac{1}{9}$. per 12 $\frac{1}{9}$. fit Quotiens etiam 10.

- XXVI. 26 *Inuenire duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione inter se producto.*

Sint inueniendi duo numeri in proportionem decupla. Ponantur 12e. & 102e. Summa eorum est 112e. Et ex vno in alterum fit numerus 102e. Eritq. æqualitas inter 112e. & 102e. Diuisis ergo 112e. per 10. fiet 12e. 1 $\frac{2}{5}$. primus numerus: propterea quod numeri Cofcici collaterales sunt. Alter ergo erit 11. Tam enim summa eorum, quam numerus ex vno in alterum productus est 121 $\frac{2}{5}$.

- XXVII. 27 *Duos numeros inuenire in dato excessu, ita ut eorum quadrati datum etiam habeant excessum, qui tamen maior sit quadrato dati excessus numerorum.*

Sint inueniendi duo numeri, quorum excessus 4. quadratorum vero excessus 144. qui maior est, quam 16. quadratus excessus 4. numerorum dati. Ponatur minor numerus 12e. ideoq. maior 12e. + 4 quorum excessus 4. Quadrati sunt 128. & 128 + 82e. + 16. Excessus eorum 82e. + 16. qui æqualis debet esse numero 144. Ablatis 16. vtrinq. erit æquatio inter 82e. & 128. Diuisis ergo 128. per 8. erit 12e. 16. minor numerus. Maior ergo erit 20. ut excessus sit 4. Quadrati sunt 256. & 400. quorum excessus 144.

Si datus excessus numerorum sit 1. & quadratorum 31. inuenientur numeri 15. & 16. nimirum duo numeri proximi conficientes datum excessum quadratorum. Atque ita, quotiescunque excessus numerorum datur 1. & quadratorum numerus quouis impar, erunt duo numeri quæsitæ, duo proximi conficientes datum excessum quadratorum.

Quan-

Quando excessus numerorum est 5. & quadratorum 30. reperies numeros $\frac{1}{2}$. & 5 $\frac{1}{2}$.

Si numerorum excessus sit 10. & quadratorum 300. inuenies numeros 5. & 15.

Si excessus detur 2. inter numeros, & inter quadratos 12. erunt numeri quæsitæ 4 $\frac{1}{2}$. & 6 $\frac{1}{2}$.

S C H O L I U M.

HOC problema sine Algebra solui etiam potest (quod quidem percommo-
dum interdu erit in numeris Coëfficijs) hoc modo. Excessus datus
quadratorum diuidatur per duplum excessus dati numerorum. Nam si ex
Quotiente dematur semissis dati excessus numerorum, reliquus fiet minor nu-
merus. qui ad datum excessum numerorum adiectus faciet numerum ma-
iorem.

Sint enim inueniendi duo numeri, quorum excessus 6. & quadratorum ex-
cessus 12. Diuidatur 12. per 12. duplum scilicet numerum excessus 6. da-
ti numerorum. Et ex Quotiente $\frac{1}{2}$ 12. dematur numerus 3. semissis eiusdē
excessus 6. numerorum. Nam reliquus numerus $\frac{1}{2}$ 12 — 3. erit minor nu-
merus quæsitus: ad quem si adicies datum excessum 6. facies $\frac{1}{2}$ 12 + 3.
maiorem numerum. Excessus enim horum duorum numerorum est 6. Et
quadrati eorundem sunt $\frac{1}{4}$ 12 + 9 — $\frac{1}{4}$ 12 + 9. & $\frac{1}{4}$ 12 + $\frac{1}{4}$ 12 + 9. quo-
rum excessus est 12.

28 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportionē inuenire, quorum maior ad minorem datorum additus, tantum faciat, quantum minor ad maiorem adiectus.* XXVIII.

Sint dati numeri 9. & 30. inueniendiq. duo numeri in proportio-
ne quadrupla, &c. Ponatur minor 12. ideoq. maior 42. Erit igitur
æquatio inter 42 + 9. & 12 + 30. Ablata 12 vtrunque, erit
æquatio inter 32 + 9. & 30. Et ablatis 9. vtrunque, inter 32 & 21.
Diuisis ergo 21. per 3. fiet 12 7. minor numerus. Maior ergo erit
28. Et tam ex 28. & 9. quam ex 7. & 30. fiunt 37.

29 *Dato numero, alium inuenire, qui in datum ductus tantum faciat, quantum ad eundem additus.* XXIX.

Datus numerus sit 30. Pone quæsitum esse 12. qui ductus in 30.
facit 360. additus vero ad 30. facit 12 + 30. Eritq. æquatio inter
30 12. & 12 + 30. Ablata vtrunque 12. erit æquatio inter 28 12.
& 30. Diuisis autem 30. per 28. erit 12. $\frac{10}{7}$. siue 1 $\frac{3}{7}$. Additis
Z 2 enim

enim $1\frac{1}{2}$, ad 30. sunt 31 $\frac{1}{2}$. quantum nimirum sit ex $1\frac{1}{2}$. in 30.

- XXX. 30 Dato numero, alium inuenire, ut eius pars aliquota data in datum numerum ducta tantum faciat, quantum totus numerus inuentus ad eundem datum numerum additus.

Sit datus numerus 60. & data pars aliquota numeri inueniendi $\frac{1}{4}$. Ponatur $\frac{1}{4}$ numeri inueniendi 15. ac proinde totus numerus 30. Ex 15. id est, ex $\frac{1}{4}$. numeri quæsit in 60. fit numerus 60 20. At ex 30. toto scilicet numero quæsit, & 60. fit numerus 30 + 60. Erig. æquatio inter 60 20. & 30 + 60. Ablatisq. 30. vtrunque, inter 30 20. & 60. Diuisis ergo 60. per 30. fiet 1 20. $\frac{1}{3}$. tertia pars numeri quæsit, ac proinde numerus quæsit 3 $\frac{1}{3}$. Nam ex $1\frac{1}{3}$. id est, ex $\frac{1}{4}$. numeri inuenti, in 60. fit numerus 63 $\frac{1}{3}$. æqualis summa ex 3 $\frac{1}{3}$. & 60. collectæ.

- XXXI. 31 Datum numerum in duos partiri, ita ut minor sit maioris pars aliquota data, vel partes aliquota data, & contineat insuper datum alium numerum, si placet.

Sit datus numerus 40. distribuendus primum in duos, ut minor sit $\frac{1}{4}$. maioris. Ponatur minor 10. eritq. maior 30. qui æquales esse debent numero dato 40. Est igitur æquatio inter 30 & 40. Diuisusq. 40. per 8. præbuit 1 20. 5. minor numerus. maior ergo erit 35. nimirum 20. Et manifestum est, 5. esse septimam partem numeri 35.

Sit deinde idem numerus 40. secundus in duos, ut minor constituat $\frac{1}{4}$. maioris. Ponatur minor 30. ideoq. maior 70. ut ille huius $\frac{1}{4}$ contineat. Summa amborum est 100. æqualis dato numero 40. Diuisus ergo 100. per 10. reperietur 10. 4. ac proinde cum minor numerus positus sit 30. & maior 70. erit minor 12. & maior 18. continetq. ille $\frac{1}{4}$. huius.

Si datus numerus 84. secundus sit in duos, ut minor maioris contineat $\frac{1}{4}$. & præterea 7. unitates. ponemus maiorem esse 40. ut continere possit $\frac{1}{4}$. sine fractione. Erig. minor 30 + 7. Amborum summa est 37 + 7. æqualis dato numero 84. Ablatisq. 7. vtrunque, erit æquatio inter 30 & 77. Diuisusq. 77. per 7. erit 11. Cum igitur maiorem posuerimus 40. & minorem 30 + 7. erit maior 44. & minor 40. continetq. hic $\frac{1}{4}$. illius, nimirum 33. ac præterea 7.

- XXXII. 32 Duos numeros inuenire, ita ut si numerus productus

ex eorum multiplicatione diuidatur per eorundem differentiam, Quotiens fiat datus quicumque numerus.

Inueniendi sint duo numeri, ita ut numerus ex eorum multiplicatione productus si diuidatur per eorum differentiam, Quotientem faciat 30. Ponatur pro minore quilibet numerus minor dato Quotiente 30. nimirum 20. & maior ponatur 20 + 1 2e. ut differentia eorum sit 1 2e. Ex 20. in 20 + 1 2e. fit numerus 400 + 20 2e. quo diuiso per 1 2e. eorum differentiam, fit Quotiens $\frac{400 + 20 \times 2}{1 \times 2} = 210$. aequalis proposito numero 30. Hæc æquatio per multiplicationem in cruce reducitur ad æqualitatem inter 30 2e. & 400 + 20 2e. Ablatis ergo 20. 2e utrobique, æquatio erit inter 10 2e. & 400. Diuisisq. 400. per 10. fiet 1 2e. 40. pro differentia numerorum, qui queruntur. Cum ergo minor sit 20. erit maior 60. nimirum 20 + 1 2e. Jam vero ex 20. in 60. fit numerus 1200. quo diuiso per 40. differentiam numerorum, fit Quotiens 30.

33 Numerum inuenire, cuius duarum partium dataram quadrati summam conficiant, qua ad aliam partem datam eiusdem numeri inueniendi proportionem habeat datam quancunque. XXXIII.

Sit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. quadratos efficiant, quorum summa partis $\frac{1}{2}$. eiusdem numeri tripla sit. Ponatur numerus quælitus 1 2e. Partes datæ sunt $\frac{1}{2}$ 2e. & $\frac{1}{3}$ 2e. quarum quadrati $\frac{1}{4}$ 8. & $\frac{1}{9}$ 8. summam conficiunt $\frac{1}{18}$ 8. triplam ad $\frac{1}{2}$ 2e. hoc est, æqualem $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis ergo $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{18}$. fiet 1 2e. $\frac{18}{2}$. id est, $\frac{9}{1}$. numerus quælitus (propterea quod numeri Cossici collaterales sunt.) Huius enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{3}$. quarum quadrati $\frac{9}{4}$ & $\frac{4}{9}$. faciunt summam $\frac{17}{12}$. quæ tripla est ad $\frac{1}{2}$. hoc est, ad $\frac{1}{2}$. inuocati numeri $\frac{3}{2}$.

34 Numerum inuenire, qui in se ductus, & productus numerus in datam quemvis numerum faciat numerum in data proportionem ad cubum ex inuento numero procreatum. XXXIII.

Sit datus numerus 20. inueniendusq. sit alius, qui primum in se, deinde productus numerus in datum 20. gignat numerum quintuplum cubi ex inuento numero procreati. Ponatur numerus quælitus 1 2e. Ex 1 2e in se fit 1 8. Et ex 1 8. in 20. fit numerus 20 8. Cubus autem 1 2e. est 1 2e. ad quem 20 8. habere debent quintuplam proportionem. Igitur æquatio est inter 20 8. & 5 2e. Diuisis ergo

20. per 5. fiet 1 2e. 4. numerus quæsitus : quia numeri Cossici sunt collaterales. Hic enim numerus 4. ductus in se facit 16. Et ex 16. in 20. fit numerus 320. qui quintuplus est numeri 64. nimirum cubi ex inuento numero 4. procreati.

XXXV. 35 *Datum numerum in duos diuidere, vt alteruter eorum ductus in alium datum numerum excedat dato numero quolibet numerum productum ex altero numero in quemuis alium datum numerum.*

Datus numerus 10. secundus fit primus in duos, vt productus numerus ex primo in 4. superet numerum productum ex secundo in 6. vnitatem. Ponatur prima pars 1 2e. ideoq. secunda 10—1 2e. Ex 1 2e in 4. fiunt 4 2e. Et ex 10—1 2e in 6. fiunt 60—6 2e. Debetq. hinc productum numerus 4 2e. excedere vnitatem. Ac propterea æquatio erit inter 4 2e. & 61—6 2e. Additisq. 6 2e vtrunque, inter 10 2e. & 61. Diuisis igitur 61. per 10. fiet 1 2e. 6 10. primus numerus. Secundus ergo erit 3 10. Ex primo in 4. fiunt 12 10. Et ex secundo in 6. fiunt 18 10. hoc est, 23 10. qui numerus vnitatem superatur a 24 10.

Sit deinde idem numerus datus 10. secundus in duas partes, vt secunda pars ducta in 4. procreet numerum, qui vnitatem superet productum ex prima parte in 6. Ponatur rursus prima pars 1 2e. & secunda 10—1 2e. Ex 10—1 2e in 4. fit numerus 40—4 2e. Et ex 1 2e in 6. fiunt 6 2e. Hunc numerum ille productus superare debet vnitatem. Igitur æquatio erit inter 40—4 2e. & 6 2e + 1. Ablatisq. vnitatem vtrunque, inter 39—4 2e. & 6 2e. Additisq. 4 2e vtrunque, inter 39. & 10 2e. Diuisis ergo 39. per 10. fiet 1 2e. 3 10. primus numerus. Secundus igitur erit 6 10. Ex 6 10. in 4. fit numerus 24 10. Et ex 3 10. in 6. fiunt 18 10. siue 23 10. Manifestum autem est, numerum 24 10. vnitatem superare numerum 23 10.

QVOD si excessus debeat esse 20. inter productos numeros: Ponatur primus numerus 1 2e. & secundus 10—1 2e. Ex 1 2e in 4. fit numerus 4 2e. & ex 10—1 2e in 6. fit numerus 60—6 2e. quem primus ille superare debeat numero 20. Erit igitur æquatio inter 4 2e. & 80—6 2e. Additisq. 6 2e vtrunque, inter 10 2e. & 80. Diuisis ergo 80. per 10. fiet 1 2e. 8. primus numerus. Secundus ergo erit 2. Perpicuum autem est, numerum 32. qui fit ex primo 8. in 4. superare numerum 12. qui fit ex secundo 2. in 6. numero 20.

Sed iam numerus 40—4 2e. factus ex secundo 10—1 2e. in 4. superare debeat numero 20. numerum 6 2e. factum ex primo 1 2e. in 6. Erit ergo æquatio inter 40—4 2e. & 6 2e + 20. Additisq. 4 2e vtrunque, inter 40. & 10 2e + 20. Ablatisq. vtrunque 20. inter 20. & 10 2e. Diuisis igitur 20. per 10. fiet 1 2e. 2. primus numerus. Secundus ergo erit 8. Et certum est, numerum 32. ex secundo 8. in 4. factum, superare numerum 12. factum ex primo 2. in 6. numero 20.

- 36 *Datum numerum partiri in duas partes, quæ cum ipso progressionem Arithmeticam constituant.* XXXVI.

Datus numerus 20. diuidendus sit in duos, qui cum eodem numero 20. constituent tres numeros Arithmetice proportionales. Sit minor pars 12. & maior 20 — 12. Vt igitur 12. 20 — 12. 20. sint Arithmetice proportionales, erit idem excessus inter 12. & 20 — 12. qui inter 20 — 12.

& 20. Sunt autem excessus

$$\begin{array}{r} 20 - 12 \\ + 12 \\ \hline 20 - 22 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 + 0 \\ - 12 \\ \hline 0 + 12 \end{array}$$

 20 — 12. & 12. vt in hisce
 formulis subtractionum patet. Ergo æquatio erit inter
 20 — 12. & 12. Et additis 12 vtrunque, inter 20. & 32. Diuisus ergo 20. per 3. fiet 6 $\frac{2}{3}$. prima pars. Altera ergo erit 13 $\frac{1}{3}$. Constituuntq. 6 $\frac{2}{3}$. 13 $\frac{1}{3}$. & 20. progressionem Arithmeticam, cum eundem excessum habeant 6 $\frac{2}{3}$.

Aliter. Si 12. 20 — 12. 20. sunt Arithmetice proportionales, erit (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa primi & tertij, nimirum 12 + 20. æqualis duplo medij, nimirum 40 — 12. Additis ergo 12 vtrunque, existet æquatio inter 32 + 20. & 40. Ablatisq. 20. vtrunque, inter 32. & 20. Ergo rursus 12 erit 6 $\frac{2}{3}$. vt prius.

- 37 *Inuenire duos numeros, qui inter se multiplicati faciant numerum, qui ad minorem habeat datam proportionem, & ad maiorem quoque proportionem datam, sed illa minorem.* XXXVII.

Proportio producti ad minorem sit decupla, & ad maiorem sesquialtera. Ponatur productus 302. (Numerus enim 302 ad 32. habet proportionem decuplam, & ad 202. sesquialteram.) Erit minor numerus 32. & maior 202. qui inter se multiplicati debent facere 302. Faciunt autem 604. Est ergo æquatio inter 302. & 604. Diuisissq. 302. per 60. exibat 5 $\frac{1}{3}$. quod numeri Coefficient sint collaterales. Ergo minor numerus, quem posuimus 32. erit 1 $\frac{1}{3}$. Maior autem, qui positus est 202. erit 10. Atque ex 1 $\frac{1}{3}$. hoc est, ex $\frac{4}{3}$. in 10. fit numerus $\frac{40}{3}$. siue 13. qui ad 1 $\frac{1}{3}$. vel ad $\frac{4}{3}$. habet proportionem decuplam, & ad 10. sesquialteram.

- 38 *Datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales diuidere, quarum differentia data sit: quando id fieri potest.* XXXVIII.

Datus

Datus numerus 120. diuidendus sit in sex partes, quæ ordine sese excedant binario. Ponatur prima pars 1 2e. Erit secunda 1 2e + 2. Tertia 1 2e + 4. Quarta 1 2e + 6. Quinta 1 2e + 8. & sexta 1 2e + 10. quæ omnes simul faciunt summam 6 2e + 30. æqualem dato numero 120. Ablatis ergo 30. vtrinque, erit æquatio inter 6 2e. & 90. Diuisusq. 90. per 6. fiet 1 2e. 15. prima pars. Sunt ergo sex partes, 15. 17. 19. 21. 23. 25. quæ binario se excedunt. & summam faciunt 120.

DEBET autem datus numerus maior esse summa terminorum totidem Arithmetice progressionis, vno minus, in quot partes datus numerus iubetur distribui; quæ quidem a dato excessu incipiat. Vt in dato exemplo, maior quam summa 30. quinque terminorum 2. 4. 6. 8. 10. Alias res non succederet, quia incidereamus in æquationem inter duos numeros omnino inæquales. Atque ideo diximus in æstimate, [quando id fieri potest.]

XXXIX. 39 Datus numerus in quotuis partes Arithmetice proportionales partiri, quarum prima data sit: quando id fieri potest.

Sit datus numerus 60. diuidendus in 11. partes Arithmetice progressionem constituentes, cuius primus terminus sit 5. Pone differentiam progressionis 1 2e. erunt ergo 11 termini hi. 5. + 1 2e. 5 + 2 2e. 5 + 3 2e. 5 + 4 2e. 5 + 5 2e. 5 + 6 2e. 5 + 7 2e. 5 + 8 2e. 5 + 9 2e. 5 + 10 2e. quorum summa 55 2e + 55. æqualis esse debet dato numero 60. Ablatis ergo vtrinque 55. erit æquatio inter 55 2e. & 5. Diuisusq. 5. per 55. fiet 1 2e. 11. differentia progressionis. Erunt ergo 11. partes quæ sit hæc. 5. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. 5 11. quæ omnes simul faciunt 60.

DEBET autem datus numerus maior esse numero, qui sit ex numero terminorum in primum terminum datum. Vt in dato exemplo maior, quam 55. qui numerus sit ex numero terminorum, videlicet ex 11. in primum terminum 5. Hanc ob causam dictum est in æstimate, [quando id fieri potest.]

XL. 40 Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportionem, ut productus ex maiore horum in maiorem illorum faciat numerum, qui dato quolibet numero superet productum ex minore in minorem.

Dati numeri sint 5. & 9. oporteatq. inuenire duos alios in proportionem triplicam, quorum maior ductus in 9. faciat numerum, qui superet productum ex minore in 3. numero 110. Ponatur minor 1 2e. ideoq. maior 3 2e. Ex 3 2e. in 9. sunt 27 2e. & ex 1 2e. in 5. sunt 5 2e. Superat autem numerus 27 2e. numerum 5 2e. numero 22 2e. qui

qui æqualis debet esse numero 110. Diuisis ergo 110. per 22 fiet 5.
 5. primus numerus: ideoq. maior erit 15. Ex 15. in 9. fit nume-
 rus 135. qui superat 125. numerum ex 5. in 5. factum numero 110.

41 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data pro-
 portione, ut productus ex maiore eorum in minorem
 illorum superet dato numero eum, qui ex minore
 in maiorem fit. Vel eertè hic productus illum dato
 numero excedat.*

XLI.

Sint dati numeri 7. & 9. oporteatq. duos alios inuenire in dupla
 proportione, quorum maior ductus in 5. producat numerum, qui
 10. vnitatibus superet productum ex minore in 9. Ponatur minor 12.
 ac propterea maior 22. (Debet autem hic maior in minorem
 datum producere numerum maiorem eo, qui ex minore in datum
 maiorem fit, ut nimirum ille hunc superare possit. Vnde si dati nu-
 meri forent 2. & 9. questio esset impossibilis; quippe cum ex 22.
 in 2. fiat numerus 42. minor numero 92. qui fit ex 22 in 9.) Ex
 22 in 5. fit numerus 110. Et ex 12 in 9. fit numerus 108. quem
 ille superat 2. Est igitur æquatio inter 12. & 10. Diuisisq. 10.
 per 1. fit 12. 10. minor numerus, ac proinde maior erit 10. Vides
 ergo numerum 100. factum ex 10. in 5. superare 90. numerum ex
 10. in 9. factum 10. vnitatibus.

42 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut
 summa quadratorum ex ipsis descriptorum ad eorum
 summam habeat datam proportionem.*

XLII.

Sint inueniendi duo numeri in quintupla proportione, ita ut sum-
 ma quadratorum ex ipsis descriptorum, ad inuentorum numerorum
 summam habeat proportionem decuplam. Ponatur minor numerus
 12. ideoq. maior 60. quadrati sunt 144. & 3600. eorumq. summa
 3744. decupla summæ eorum, quæ est 374.4. Erit ergo æquatio inter
 168. & 602. Diuisis autem 602 per 168. fiet 3. 2. 1/7. siue 3 2/7. mi-
 nor numerus, (quod numeri Cossici collaterales sint.) atque adeo
 maior 11 2/7. siue 11 2/7. Quadrati sunt 144. & 144. quorum
 summa 288. decupla est ad 144. summam inuentorum nume-
 rorum.

II S D E M positis, si proportio inuenienda sit æqualitatis. erit
 æquatio inter 168. & 62. Diuisis ergo 62 per 168. fiet 1/2. mi-
 nor numerus. (quia Cossici numeri sunt collaterales.) Maior autè
 erit 1/2. Quadrati sunt 1/4. & 1/4. eorumq. summa 1/2. æqualis
 summæ 1/2. ex inuentis numeris collectæ.

Et si proportio inuenienda sit minoris inæqualitatis, ut subdupla,
 erit numerus 168. subduplus numeri 62. hoc est, hic illius erit
 A a duplus.

duplus. Igitur erit æquatio inter $5 \frac{1}{2}$ & $6 \frac{1}{2}$. Vel inter $16 \frac{1}{2}$ & $3 \frac{1}{2}$. Diuisiſq. 6. per $\frac{1}{2}$. vel 3. per 16. fiet 12. minor numerus. Maior ergo erit $\frac{11}{2}$. Quadrati sunt $\frac{1}{4}$ & $\frac{9}{4}$. eorumq. ſumma $\frac{10}{4}$. ſubdupla ſumma $\frac{5}{2}$. ex inuentis numeris collectæ: quippe cum hæc illius ſit dupla.

XLIII.

43 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportionē, ut maior horum ad maiorem datorum additus faciat numerum in data quacunque proportionē ad ſummam ex minoribus collectam. dummodo hæc ſecunda proportio data ſit inter proportionem datorum numerorum, & proportionem alteram datam.*

Sint dati numeri 10. & 12. oporteatq. inuenire alios duos in proportionē quintupla, ut ſumma ex maiore, & 12. tripla ſit ad ſummam ex minore, & 10. Eſt autem proportio tripla inter proportionem 12. ad 10. & proportionem quintuplam, hoc eſt, maior, quam illa, & minor, quam hæc. Ponatur minor numerus 12. ideoq. maior 52. Ex 52. & 12. ſit numerus 52 + 12. Et ex 12. & 10. numerus 12 + 10. cuius ille triplus eſſe debet. Ergo æquatio eſt inter 52 + 12. & 32 + 30. Ablatisq. vtrinq. 12. inter 52 & 32 + 18. Et rurſum ablatis 32 vtrinq. inter 12. & 18. Diuiſiſ igitur 18. per 2. fiet 9. minor numerus, ideoq. maior 45. Ex 45. & 12. ſit numerus 57. qui triplus eſt ad numerum ex 9. & 10. collectum, nimirum ad 19.

XLIII.

44 *Datis duobus numeris, inuenire alios duos in data proportionē, ut ſubtractio minore horum ex datorum maiore, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex minore, proportionem habeat datam quancunque.*

Sint dati duo numeri 60. & 100. oporteatq. alios duos inuenire in proportionē quintupla, ut minore ex 100. ſubtracto, reliquus numerus ad eum, qui relinquitur, detracto maiore ex 60. proportionem habeat vigecuplam. Ponantur duo numeri in proportionē quintupla, 12. & 120. Dempta 12. ex 100. reliquus numerus eſt 100 - 12. Demptis autem 12. ex 60. remanent 60 - 12. eritq. numerus 100 - 12. ad 60 - 12. vigecuplus: hoc eſt, æquatio erit inter 100 - 12. & 1200 - 1002. Additis 1002 vtrinq. erit æqualitas inter 100 + 992. & 1200. Ablatisq. 100. vtrinq. inter 992. & 1100. Diuiſiſ ergo 1100. per 99. fiet 12. $11 \frac{1}{9}$. vel $12 \frac{1}{9}$. minor

not numerus, ac preinde maior $\frac{100}{3}$, vel $33 \frac{1}{3}$. Prior ex 100, detractus relinquit $66 \frac{2}{3}$, posterior vero ex 60, subtractus relinquit $4 \frac{2}{3}$. Habentq. 33 $\frac{1}{3}$, hoc est $\frac{100}{3}$, ad $4 \frac{2}{3}$, siue ad $\frac{14}{3}$, proportionem eandem, quam 10. ad 1.

45 *Datis duobus numeris, alios duos in data proportionem inuenire, ut maior ex maiore detracto, & minore ex minore, numeri remaneant aequales.*

XL

Sint dati duo numeri 100. & 60. oportetq. inuenire alios duos in septupla proportionem, ut maior detracto ex 100. & minore ex 60. numeri reliqui sint aequales. Ponantur numeri in proportionem septupla 12. & 72. eruntq. reliqui numeri 100 — 72. & 60 — 12. aequales. Additis ergo utrinque 72. erit æquatio inter 100. & 60. + 62. Et ablati 60. utrinque, inter 40. & 62. Diuisis autem 40. per 6. erit 12. & 6. minor numerus, maior autem huius septuplus, 46 $\frac{2}{3}$. Ablato illo ex 60. & hoc ex 100. reliqui sunt numeri aequales 33 $\frac{1}{3}$.

46 *Tres numeros in data proportionem Geometrica continua inuenire, ut productus ex multiplicatione, quorumcunque duorum inter se, æqualis sit reliquo, vel ad ipsum habeat quamlibet proportionem datam.*

XLVI.

Sint inueniendi tres numeri in proportionem tripla, sitq. primum productus ex minimo in medium, maximo æqualis. Ponantur tres numeri tripli, 12. 32. 92. Ex 12. in 32. fit numerus 38. æqualis 92. Diuisis ergo 9. per 3. fiet 12. 3. quia numeri Cossici collaterales sunt. Tres ergo numeri quæsi sunt 3. 9. 27. Atque ex 3. in 9. fit numerus 27. maximo 27. æqualis.

Sit deinde productus ad maximum quadruplus, ita ut productus 38. ad 92. proportionem habeat quadruplam, hoc est, æquatio fit inter 38. & 362. Diuisis ergo 36. per 3. fiet 12. 12. eruntq. tres numeri tripli, 12. 36. 108. Et ex 12. in 36. fit numerus 432. ad 108. quadruplus.

Sit rursus productus ad maximum subduplus, ita ut productus 38. ad 92. proportionem habeat subduplam: hoc est, æquatio fiat inter 62. & 92. Diuisis ergo 9. per 6. fiet 12 $\frac{1}{2}$. sunt ergo tres numeri tripli $\frac{1}{2}$. 1 $\frac{1}{2}$. 2 $\frac{1}{2}$. Et ex $\frac{1}{2}$. in $\frac{1}{2}$. fit numerus 2 $\frac{1}{2}$. subduplus ad $\frac{1}{2}$.

IAM vero ex secundo 32. in tertium 92. fiat numerus 278. qui æqualis debet esse primo, nimirum 12. Diuisa 12. per 27. fit 12. 12. Tres ergo numeri tripli sunt $\frac{12}{27}$. $\frac{12}{27}$. $\frac{12}{27}$. Et ex $\frac{12}{27}$. in $\frac{12}{27}$. fit numerus $\frac{12}{27}$. æqualis primo $\frac{12}{27}$.

A2 2

Ar6

At si productus 27 8. ex secundo in tertium debeat ad primum 1 2e. habere proportionem triplam, erit æqualitas inter 27 8. & 3 2e. Diuisis ergo 3. per 27. fiet 1 2e. $\frac{1}{27}$. eruntq. tres numeri tripli $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{3}$. Et ex $\frac{1}{27}$. in $\frac{1}{3}$. hoc est, ex $\frac{1}{27}$. in 1. fit $\frac{1}{27}$. qui numerus triplus est primi $\frac{1}{27}$.

POSTREMO ex primo 1 2e. in tertium 9 2e. produci debeat numerus æqualis secundo 3 2e. hoc est, æquatio esse debeat inter 9 8. qui numerus fit ex primo in tertium, & 3 2e. Diuisis ergo 3. per 9. fiet 1 2e. $\frac{1}{9}$. Eruntq. tres numeri tripli $\frac{1}{9}$. 1. 3. Et ex primo $\frac{1}{9}$. in tertium 3. fit 1. æqualis secundo 1.

Si vero productus ex primo 1 2e. in tertium 9 2e. id est, 9 8. debeat habere ad secundum 3 2e. proportionem sextuplam, erit æquatio inter 9 8. & 18 2e. Diuisis ergo 18. per 9. fiet 1 2e. 2. Eruntq. tres numeri tripli, 1. 6. 18. Atque ex 1. in 18. fit numerus 36. sextuplus secundi numeri 6.

XLVII.

47 Datum numerum parti in duas partes, ut maiore diuisa per minorem, Quotiens fit datus idem numerus.

Sit datus numerus 40. & datus Quotiens item 40. Ponatur minor pars 1 2e. & maior 40 — 1 2e. Hac per illam diuisa, fit Quotiens $\frac{40-1}{1} = 39$, æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 40 — 1 2e. & 40 2e. Additaq. 1 2e. vtrunque, erit æquatio inter 40. & 41 2e. Diuisis ergo 40. per 41. fiet 1 2e. $\frac{40}{41}$. minor pars. Maior proinde erit 39 $\frac{1}{41}$. Qua per illam diuisa, fit Quotiens 40.

Si maior pars ponatur 1 2e. & minor 40 — 1 2e. Diuisa illa per hanc, fit Quotiens $\frac{40-1}{40-1} = 1$, æqualis 40. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 1 2e. & 1600 — 40 2e. Additisq. 40 2e. vtrunque, inter 41 2e. & 1600. Diuisis igitur 1600. per 41. fit maior pars 39 $\frac{1}{41}$, ac proinde minor $\frac{40}{41}$ ut prius.

XLVIII.

48 Duos numeros inuenire, ut primus eum quolibet multiplici secundi faciat numerum æqualem ei, qui confiat ex secundo & quouis multiplici primi. Vel ut primus eum data parte secundi tantum faciat, quantum secundus eum data parte primi. Vel denique, ut si primus sumat multiplicem quemcunque secundi, & secundus quemlibet multiplicem primi; Aut si primus accipiat partem datam secundi, & secundus datam partem primi; fiant duo numeri in data quauis proportionem.

Debeat

Debeat primus cum triplo secundi facere tantum ; quantum secundus cum quintuplo primi . Ponatur primus 12. & secundus quicuius numerus, videlicet 50. Ergo $12 + 150$. & $50 + 52$. æquales sunt . Ablataq. 12 vtrinque, erit æquatio inter 150. & $50 + 42$. Et rursum ablatis 50. vtrinque, inter 100. & 42. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 12. 25. Numeri ergo quæsitæ sunt 25. & 50. Nam primus 25. cum triplo secundi, hoc est, cum 150. facit 175. quantum secundus 50. cum quintuplo primi, id est, cum 125.

DEBEAT deinde primus cum $\frac{1}{2}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{3}$. primi facere vnum eundemq. numerum . Ponatur primus 32. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione : Secundus autem quilibet numerus habens $\frac{1}{2}$. sine fractione, nimirum 21. Primus igitur cum $\frac{1}{2}$. secundi faciet 32 + 3. Secundus vero cum $\frac{1}{3}$. primi faciet 21 + 12. Est ergo æquatio inter 32 + 3. & 21 + 12. Ablataq. 12 vtrinque, inter 12 + 3. & 21. Ablatisq. rursum 3. vtrinque, inter 22. & 18. Diuisis ergo 18. per 2. fiet 12. 9. Primus igitur positus 32. erit 27. & secundus 21. vt posuimus. Nam & 27. cum $\frac{1}{2}$. numeri 21. & 21. cum $\frac{1}{3}$. numeri 27. facit 30.

SED iam primus cum quadruplo secundi, & secundus cum triplo primi facere debeant duos numeros in proportionem dupla. Ponatur primus 12. & secundus quicuius numerus, videlicet 6. Primus igitur cum quadruplo secundi faciet 12 + 24. Secundus vero cum triplo primi faciet 6 + 32. Si ergo statues 12 + 24. maiorem, qui duplus debet esse ad 6 + 32. erit æquatio inter 12 + 24. & 12 + 62. Ablataq. 12 vtrinque, inter 24. & 12 + 52. Ablatisq. rursum 12. vtrinque, inter 12. & 52. Diuisis igitur 12. per 5. fiet 12. $\frac{12}{5}$. id est, 2 $\frac{2}{5}$. primus numerus ; secundus vero erit 6. vt positum fuit. Iam primus cum quadruplo secundi facit 26 $\frac{2}{5}$. secundus autem cum triplo primi facit 6 $\frac{12}{5}$. id est, 13 $\frac{2}{5}$. habetq. numerus 26 $\frac{2}{5}$. ad 13 $\frac{2}{5}$. proportionem duplam.

Si vero statues 6 + 32 maiorem, qui ad 12 + 24. duplus debet esse, erit æquatio inter 6 + 32. & 12 + 48. Et ablatis 12 vtrinque, inter 6 + 12 & 48. Ablatisq. rursum 6. vtrinque, inter 12. & 42. fietq. 12 42. primus numerus, secundus autem erit 6. vt posuimus. Primus cum quadruplo secundi facit 66. at vero secundus cum triplo primi facit 132. qui numerus ad 66. proportionem habet duplam.

DE NIQVE primus cum $\frac{1}{4}$. secundi, & secundus cum $\frac{1}{5}$. primi facere debeant duos numeros in sextupla proportionem . Ponatur primus 32. vt habeat $\frac{1}{5}$. sine fractione, & secundus quilibet numerus habens $\frac{1}{4}$. sine fractione, nimirum 7. Primus ergo cum $\frac{1}{4}$. secundi faciet 32 + 8. Secundus vero cum $\frac{1}{5}$. primi faciet 7 + 12. Et quia hi duo numeri debent habere proportionem sextuplam, erit necessario 7 + 12 maior. Nam si ducatur in 6. vt fiat æqualis numero 32 + 8. producere numerus 42 + 62. qui numero 32 + 8. æqualis esse nequit . Igitur æquatio erit inter 182 + 6. & 7 + 12. Ablataq. 12 vtrinque, inter 172 + 6. & 7. Ablatisq. rursum 6. vtrinque, inter

inter 17 &c. & 1. Diuisa igitur 1. per 17. fiet $1\frac{1}{17}$. Et quia primus numerus positus fuit 3 &c. erit primus numerus $3\frac{3}{17}$. & secundus 7. & positus fuit. Primus cum $\frac{1}{17}$. secundi facit $1\frac{1}{17}$. id est, $1\frac{1}{17}$. Secundus cum $\frac{1}{17}$. primi facit $7\frac{1}{17}$. hoc est, $7\frac{1}{17}$. qui numerus ad $3\frac{3}{17}$. proportionem habet sextuplam.

XLIX. 49 *Datum numerum distribuere in quotuis partes in data proportione Geometrica continua.*

Si datus numerus 4665. secundus in 5. numeros continuè sextuplos. Pone 5. numeros in sextupla proportione. 1 &c. 6 &c. 36 &c. 216 &c. 1296 &c. Horum summa 1555 &c. æqualis esse debet dato numero 4665. Diuisis ergo 4665. per 1555. fiet 1 &c. 3. eruntque quinque numeri in proportione sextupla continua. 3. 18. 108. 648. 3888. qui simul additi faciunt 4665.

Si secundus sit numerus 10. in tales quinque partes. inuenies 1555 &c. æquales 10. Diuisisq. 10. per 1555. fiet $1\frac{1}{1555}$. Eruntque quinque partes in proportione sextupla. $1\frac{1}{1555}$. $6\frac{6}{1555}$. $36\frac{36}{1555}$. $216\frac{216}{1555}$. $1296\frac{1296}{1555}$. facientes summam 10.

L. 50 *Inuenire quotuis numeros in data proportione Geometrica continua, quorum summa dato cuiusque numero sit æqualis.*

Sint inueniendi 5. numeri in proportione continua sextupla. facientes 4665. vel 10. Hoc ænigma a proximè præcedenti non differt. Nam si summa data secetur in 5. numeros in sextupla proportione continua, factum erit, quod iubetur.

LI. 51 *Datum numerum in tres numeros parti, ut minores duo datam habeant differentiam: Item duo maiores aliam differentiam datam.*

Si datus numerus 445. & minorum differentia 10. & maiorum 20. Ponatur minimus numerus 1 &c. eritq. medius 1 &c. + 10. et maximus 1 &c. + 20. Horum summa 3 &c. + 40. æqualis esse debet dato numero 445. Ablatis utrinque 40. erit æquatio inter 3 &c. & 405. Diuisis igitur 405. per 3. inuenietur 1 &c. 135. minimus numerus. atque idcirco medius erit 145. & maximus 165. qui ænigmati satisfaciunt, quod summam faciunt 445.

Si datus numerus sit 200. erunt 3 &c. + 40. æquales 200. & ablati utrinque 40. erit æquatio inter 3 &c. & 160. Diuisisq. 160. per 3. erit 1 &c. 53 $\frac{1}{3}$. primus numerus. secundus erit 63 $\frac{1}{3}$. & tertius 83 $\frac{1}{3}$. qui habent datos excessus, & consueunt 200.

Aliter.

Aliiter. Ponatur medius 12. eritq. minimus 12 — 10. & maximus 12 + 10. quorum summa 32 + 10. æqualis esse debet dato numero 445. vel 100. Ablatis 10. utrinque, erit æquatio inter 32 & 435. vel 190. Facta diuisione, erit 12. 145. vel 63 $\frac{1}{2}$. primus numerus. Ergo in primo exemplo erunt tres numeri 135. 145. 165. In secundo autem, 53 $\frac{1}{2}$. 63 $\frac{1}{2}$. 83 $\frac{1}{2}$. vt prius.

52 Tres numeros inuenire, vt minorum differentia sit data: Item maiorum differentia alia data: Et omnes tres datum numerum conficiant.

LII.

Sit minorum differentia 10. & maiorum 20. eorumq. summa 445. vel 100. Hoc etiam problema non differt a proxime antecedenti. Si namq. data summa distribuatur in tres partes datorum excessuum, factum erit, quod præcipitur.

53 Datum numerum parti in tres, vt vteruis extremorum cum medio ad alterum extremum proportionem habeat datam.

LIII.

Sit primum diuidendus datus numerus 100. in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem triplam: tertius vero cum medio ad primum quadruplam. Ponatur primus 12. Eruntq. alij duo simul 42. vt ad primum possint habere proportionem quadruplam. Horum ergo summa 52. æqualis esse debet dato numero 100. Diuisis igitur 100. per 5. fiet 12. 20. primus numerus, ideoq. alij duo simul, 80. Ponatur deinde tertius 12. ideoq. medius 80 — 12. Igitur primus 10. cum medio 80 — 12. hoc est, 100 — 12. ad tertium 12. triplus est, atque idcirco æquatio erit inter 100 — 12. & 32. Additaq. utrinque 12. inter 100. & 42. Diuisisq. 100. per 4. fiet 12. 25. tertius numerus. Medius ergo erit 55. qui relinquitur, detracto tertio 25. ex 80. Tres propterea numeri erunt 20. 55. 25. qui simul efficiunt 100. & primus cum medio efficit 75. numerum triplum ad tertium 25. At tertius cum medio facit 80. numerum quadruplum ad primum 20.

Si datus sit numerus 60. secandus in tres, vt primus cum medio ad tertium habeat proportionem noncuplam, sed tertius cum medio ad primum, quadruplam, procedemus eodem modo. Nam si primus ponatur 12. erunt alij duo simul 42. atque idcirco 52. æquales 60. dato numero. Diuisis ergo 60. per 5. fiet 12. 12. primus numerus; ideoq. alij duo facient 48. Rursum si tertius ponatur 12. facient alij duo simul 92. vt ad tertium habere possint proportionem noncuplam. Igitur 102. æquales erunt dato numero 60. Diuisisq. 60. per 10. fiet 12. 6. tertius numerus. Medius autem erit 42. qui relinquitur, si tertius 6. ex 48. dematur. Quocirca

circa tres numeri quæsti erunt 12. 42. 6. qui simul conficiunt 60. Et primus cum medio facit numerum 54. qui ad tertium 6. noncuplus est. Tertius vero cum secundo facit 48. qui numerus ad primum 12. quadruplus est.

Sit deinde idem numerus 100. distribuendus in tres, ut tam primus cum secundo ad tertium, quam tertius cum secundo ad primum habeat proportionem triplam. Ponatur primus 12. & secundus, ac tertius 32. ut ad primum habeat proportionem triplam. Horum summa 42. æqualis est 100. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 12. 25. primus numerus; ideoq. secundus, ac tertius facient 75. Ponatur deinde tertius 12. ideoq. secundus 75 — 12. Igitur primus cum secundo faciet summam 100 — 12. triplam ad tertium, id est, ad 12. siue æqualem 32. Addita 12. utrobique, erit æqualitas inter 100. & 42. Diuisis igitur 100. per 4. fiet 12. 25. tertius numerus, ac proinde secundus erit 50. nimirum 100 — 12. Itaq. tres numeri erunt 12. 50. 25. Et tam summa primi, & secundi ad tertium, quam summa tertij ac secundi ad primum, proportionem habet triplam.

Si utraque proportio deberet esse quadrupla, reperirentur tres numeri 20. 60. 10.

LIII. 54 *Inuenire tres numeros, ita ut primus cum secundo proportionem ad tertium habeat datam. Item tertius cum secundo ad primum datam proportionem habeat; Omnesq. tres conficiant summam datam.*

HOC ænigma a præcedenti diuersum non est. Nam si data summa diuidatur in tres numeros, ut iubetur, expeditum erit ænigma, non aliter, ac præcedens.

IV. 55 *Numerum inuenire, ita ut quadratus ex parte eius aliquota data descriptus, & quadratus alterius cuiusvis partis eius aliquota, conficiant ipsum numerum, vel alium qui ad inuentum numerum proportionem habeat datam.*

Inueniendus sit numerus, ita ut quadratus ex eius semisse descriptus, & quadratus ex eiusdem parte sexta descriptus, efficiant ipsum numerum, vel alium, qui ad inuentum proportionem habeat octuplam supertripartientem quartas. Eius semissis est 32. & sexta pars 12. Harum partium quadrati sunt 9 & 12. qui faciunt 102. numerum æqualem 62. Diuisis ergo 62. per 10. fiet 12. 25. (quod numeri Confici collaterales sint.) ac proinde 62. erunt 12. numerus quæsitus. Semissis eius 25. facit quadratum 625. Et eius sexta

sexta pars $\frac{1}{6}$, facit quadratum $\frac{1}{36}$, qui cum $\frac{1}{36}$, facit $\frac{2}{36}$, id est, $\frac{1}{18}$, numerum quæsitum.

SED iam duo quadrati facere debeant numerum, qui ad inuentum numerum habeat proportionem octuplam superpartientem quartas. Ponatur numerus esse 12. Eius semissis est $\frac{1}{2}$ 12. & sexta pars $\frac{1}{6}$ 12. Quadrati harum partium sunt $\frac{1}{4}$ 3. & $\frac{1}{36}$ 3. qui simul faciunt $\frac{1}{12}$ 3. qui numerus ad 12. habere debet proportionem octuplam superpartientem quartas, cuius videlicet denominator est 8 $\frac{1}{2}$. Hic autem ductus in 12. facit 8 $\frac{1}{2}$ 12. cui numero æqualis esse debet numerus $\frac{1}{12}$ 3. Diuisis ergo 8 $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{12}$ 3. fiet 12. $\frac{1}{2}$ 12. siue $\frac{1}{2}$ 12. numerus inuentus (quod numeri Cossici collaterales sint.) Eius enim semissis $\frac{1}{2}$ 12. facit quadratum $\frac{1}{4}$ 3. Et eiusdem sexta pars $\frac{1}{6}$ 12. facit quadratum $\frac{1}{36}$ 3. qui cum priori quadrato $\frac{1}{4}$ 3. id est, cum $\frac{1}{36}$ 3. facit numerum $\frac{1}{12}$ 3. qui ad inuentum $\frac{1}{12}$ 3. proportionem habet octuplam superpartientem quartas. quippe cum ille per hunc diuisus Quotientem faciat 8 $\frac{1}{2}$.

56 *Datum numerum parti in duos, vt data pars primi cum secundo tantum faciat, quantum secundi pars alia data cum primo efficit.*

LVI.

Numerus datus 44. secundus sit in duos, vt $\frac{1}{2}$. primi cum secundo, & $\frac{1}{2}$. secundi cum primo, faciant duos numeros æquales. Ponatur primus 12. ideoq. secundus 44—12. Quinta pars primi, nimirum $\frac{1}{5}$ 12. cum secundo facit 44— $\frac{1}{5}$ 12. Et tertia pars secundi, nimirum $\frac{1}{3}$ 44—12. cum primo facit 12 + $\frac{1}{3}$ 44—12. Est ergo æquatio inter 44— $\frac{1}{5}$ 12. & 12 + $\frac{1}{3}$ 44—12. Ablata 12. vtrunque, erit æquatio inter 44— $\frac{1}{5}$ 12. & $\frac{1}{3}$ 44—12. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æqualitatem inter 132— $\frac{1}{5}$ 12. & 44—12. Et additis $\frac{1}{5}$ 12. vtrunque, inter 132. & 44 + $\frac{1}{5}$ 12. Ablatisq. 44. vtrunque inter 88. & $\frac{1}{5}$ 12. Diuisis igitur 88. per $\frac{1}{5}$ 12. fiet 12. 20. primus numerus. Secundus vero erit 14. Vbi vides quintam partem primi, nimirum 4. cum secundo facere 18. quantum scilicet facit tertia pars secundi, nimirum 8. cum primo.

57 *Duos numeros inuenire, ita vt primus, accepto quolibet numero a secundo, faciat numerum, qui ad reliquum secundi proportionem habeat datam. Item secundus, accepto quolibet etiam numero a primo, faciat numerum, qui ad reliquum primi proportionem etiam habeat datam.*

LVII.

SINT inueniendi duo numeri, vt primus accipiens 40. a secundo faciat numerum reliqui secundi quadruplum: At secundus accipiens

B b

30. a

30. a primo faciat numerum residui primi noncuplum. Ponatur primus 12. Si igitur accipiat 40. a secundo, habebit 12 + 40. ac proinde secundo remaneat $\frac{1}{2}$ 2e + 10. ut nimirum ille ad hunc proportionem habeat quadruplam. Ergo antequam secundus daret primo 40. habuit $\frac{1}{2}$ 2e + 50. Ac proinde si accipiat 30. a primo, habebit $\frac{1}{2}$ 2e + 80. qui numerus ad reliquum primi, videlicet ad 12 — 30. debet habere proportionem noncuplam. Erit ergo æquatio inter $\frac{1}{2}$ 2e + 80. & 92e — 270. Additisq. 270. vtrunque, inter $\frac{1}{2}$ 2e + 350. & 92e. Ablataq. $\frac{1}{2}$ 2e. vtrunque, inter 350. & 8 $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 350. per 8 $\frac{1}{2}$. fiet 12. 40. primus numerus. Secundus autem erit 60. nimirum $\frac{1}{2}$ 2e + 50. Primus igitur 40. accipiens 40. a secundo, habebit 80. qui numerus quadruplus est numeri 20. qui secundo remanet. Secundus autem 60. accipiens 30. a primo habebit 90. qui numerus noncuplus est numeri 10. qui primo relinquitur, postquam 30. dederit secundo.

Si inueniendi sint duo numeri, ut primus accipiens 10. a secundo habeat numerum quintuplum reliqui secundi, at secundus accipiens 5. a primo, habeat numerum duplum reliqui primi inuenies duos numeros 15. & 15. Nam posito primo 12. si accipiat 10. a secundo, habebit 12 + 10. qui numerus quintuplus est numeri $\frac{1}{2}$ 2e + 2. atque hic secundo superest, postquam primo dederit 10. ergo prius habuit $\frac{1}{2}$ 2e + 12. Si igitur accipiat 5. a primo, habebit $\frac{1}{2}$ 2e + 17. qui numerus duplus esse debet numeri 12 — 5. qui primo superest, postquam dederit 5. secundo. hoc est, æqualitas erit inter $\frac{1}{2}$ 2e + 17. & 22e — 10. Additisq. 10. vtroque, inter $\frac{1}{2}$ 2e + 27. & 22e. Et si auferatur $\frac{1}{2}$ 2e. vtroque, inter 27. & 1 $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 27. per 1 $\frac{1}{2}$. hoc est, per $\frac{3}{2}$. fiet 12e 15. pro primo numero. Et quia secundus habebat $\frac{1}{2}$ 2e + 12. erit quoque secundus numerus 15. Atque duo hi numeri 15. & 15. questioni satisfaciunt. Nam si primus accipiat 10. a secundo, habebit 25. qui numerus quintuplus est reliqui, qui secundo superest, nimirum numeri 5. Secundus vero accipiens 5. a primo, habebit 20. numerum videlicet duplum numeri 10. qui primo superest.

LVIII. 58 *Tres numeros inuenire, ut bini quique faciant tres numeros propositos, dummodo semissis summa propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.*

DEBEAT primus cum secundo efficere 20. secundus cum tertio 30. ac tertius cum primo 40. qui omnes simul faciunt numerum 90. cuius semissis 45. maior est quam 20. & quam 30. & quam 40. Quod si tertius numerus effectus deberet esse 50. vel maior, res non succederet, quia omnes tres efficerent 100. vel maiorem numerum, cuius semissis esset vel æqualis vni eorum, nimirum 50. vel minor. Ut si tertius esset 51. vel 60. essent omnes tres 101. vel 110. cuius semissis 50 $\frac{1}{2}$. vel 55. minor esset tertio 51. vel 60. Sed operatio ipsa
probe

probe te docebit, an questio possibilis sit, nec ne. Ponatur ergo summa trium numerorum quæstorum esse 1 2e. Et quia primus ac secundus faciunt 10. erit tertius 1 2e — 10. Item quia secundus ac tertius faciunt 30. erit primus 1 2e — 30. Denique quia tertius ac primus faciunt 40. erit secundus 1 2e — 40. Hi omnes tres simul cōficiunt 3 2e — 90. quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quæ posita est 1 2e. Est ergo æquatio inter 1 2e. & 3 2e — 90. Additisq. 90. vtriusque, inter 1 2e + 90. & 3 2e. Ablataq. 1 2e. vtriusque, inter 90. & 2 2e. Diuisis igitur 90 per 2. fiet 1 2e. 45. summa omnium trium quæstorum numerorum. Et quoniam primus inuentus fuit 1 2e — 30. erit ipse primus 15. Secundus autem erit 5. nimirum 1 2e — 40. Ac tertius 25. videlicet 1 2e — 10. Itaq. tres numeri ordine inuenti sunt 15. 5. 25. manifestumq. est, primum ac secundum efficere 10. secundum ac tertium 30. tertium denique ac primum 40.

Aliter. Ponatur primus 1 2e. eritq. propterea secundus 10 — 1 2e. vt cum primo, nimirum cum 1 2e. facere possit 10. qui secundus numerus habebitur, si primus 1 2e. ex 10. dematur. Tertius autem erit 10 + 1 2e. vt cum secundo, id est, cum 10 — 1 2e. facere possit 30. habebiturq. hic tertius, si secundus 10 — 1 2e. dematur ex 30. Iam tertius 10 + 1 2e. cum primo 1 2e. facit 2 2e + 10. qui numerus æqualis debet esse 40. Demptis igitur 10. vtriusque, erit æquatio inter 2 2e. & 30. Diuisisq. 30. per 2. fiet 1 2e. 15. pro primo numero. Secundus ergo 10 — 1 2e. erit 5. Et tertius 10 + 1 2e. erit 25. vt prius.

39 Quatuor numeros inuenire, ita vt terni quique efficiant quatuor numeros propositos; dummodo tertia pars summa propositorum numerorum maior sit singulis propositis numeris.

LIX.

DEBEAT primus, secundus, ac tertius facere 10. Secundus, tertius, & quartus 22. Tertius, quartus, ac primus 24. Quartus denique, primus, & secundus 27. qui omnes quatuor faciunt 93. cuius numeri pars tertia 31. maior est quam 20. & quam 22. & quam 24. & quam 27. Quod si quartus deberet esse 40. res non succederet, quia omnes quatuor efficerent 106. cuius tertia pars 35 1/3. non maior est, quam 40. sed minor. Impossibilitatem porrò quæstionis ipsamet operatio indicabit. Ponatur summa omnium quatuor esse 1 2e. Et quia primus secundus, & tertius faciunt 10. erit quartus 1 2e — 10. Eadem ratione erit primus 1 2e — 22. Et secundus 1 2e — 24. Ac tertius denique 1 2e — 27. Hi omnes quatuor faciunt 4 2e — 93. Quæ summa æqualis debet esse summæ omnium, quam posuimus 1 2e. Est igitur æquatio inter 1 2e. & 4 2e — 93. Additisq. 93. vtriusque, inter 1 2e + 93. & 4 2e. Ablataq. 1 2e vtriusque, inter 93. & 3 2e. Diuisis igitur 93. per 3. fiet 1 2e. 31. Et quoniam primus fuit inuentus 1 2e — 22. erit ipse primus 9. Eademq. de causa, secundus

cundus 7. Tertius 4. & quartus 11. qui quatuor numeri problema efficiunt.

Hoc ænigma alio modo soluemus in quinque numeris in ænigmate 127.

S C H O L I V M.

EADEM arte inueniuntur quinque numeri, ut quaterni quique efficiant quinque numeros propositos; dummodo quarta pars summa propositorum numerorum singulis numeris propositis maior sit. Item sex numeri, si tamen quinta pars maior sit, &c. Et sic deinceps quotcunque numeri, si modo pars summa determinata à numero propositorum numerorum, vno minus, maior sit singulis numeris propositis.

IX. 60 Tres numeros inuenire, ut bini quique simul sumpti excedant reliquum dato numero.

a 16. pro-
nūc. primi.

STATVATUR primum & secundum superare tertium 20. vnitatibus: Excessum secundi ac tertij simul supra primum esse 30. vnitatum: Et denique excessum inter tertium ac primum simul, & secundum esse 40. vnitatum. Ponantur omnes tres esse 1 2e. Et quoniam primus & secundus superant tertium 20. vnitatibus; addito comuni tertio, a superabunt quoque primus, secundus & tertius simul. tertium duplicatum eisdem 20. vnitatibus: ideoq. omnes tres æquales erunt tertio duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex tertio duplicato, & 20. superat quoque tertium duplicatum 20. vnitatibus. Si igitur a summa omnium trium, quam posuimus 1 2e. auferamus 20. remanebit tertius duplicatus 1 2e — 20. atque idcirco tertius simplex erit $\frac{1}{2}$ 2e — 10. Eadem ratione primus erit $\frac{1}{2}$ 2e — 15. & secundus $\frac{1}{2}$ 2e — 20. Summa ergo omnium trium $\frac{1}{2}$ 2e — 45. æqualis erit summæ omnium trium numerorum quæstorum, quam posuimus esse 1 2e; ita ut æquatio sit inter 1 2e. & $\frac{1}{2}$ 2e — 45. Additisq. 45. vtrinque, inter 1 2e + 45. & $\frac{1}{2}$ 2e. Ablatq. 1 2e. vtrinque, inter 45. & $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 45. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e 90. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}$ 2e — 15. erit ipse primus 30. Eandemq. ob causam erit secundus 25. & tertius 35. qui tres numeri problema efficiunt.

Aliter. Ponatur tertius 1 2e. Et quoniam primus ac secundus superant tertium 20. vnitatibus; erunt primus & secundus simul 1 2e + 20. cum hic numerus excedat quoque 1 2e. 20. vnitatibus. Ponatur deinde secundus 25. semissis videlicet summæ 50. ex 20. & 30. collectæ. Cum ergo primus & secundus simul inuenti sint esse 1 2e + 20. si dematur secundus 25. relinquetur primus 1 2e — 5. Quia vero tertius cum primo superare debet secundum 40. vnitatibus: Faciunt autem tertius 1 2e. & primus 1 2e — 5. numerum 1 2e — 5.

qui

qui æqualis erit numero 65. cum hic secundum 25. superet 40. unitatibus: atque ita æquatio erit inter 2 2e — 5 & 65. Additisq. 5. utrinque, inter 2 2e & 70. Diuisis igitur 70. per 2. fiet 1 2e. 35. tertius numerus. Primus erit 30. nimirum 1 2e — 5. Et secundus 25. vt supra.

Aliter. Ponatur primus & secundus simul 1 2e, eritq. propterea tertius 1 2e — 20. vt nimirum primus & secundus simul, id est, 1 2e. superet tertium 20. unitatibus: qui tertius habebitur, scilicet primo 1 2e. demantur 20. Ergo omnes tres erunt 1 2e — 20. Et quia secundus ac tertius superare debent primum numero 30. addito communi primo, superabunt omnes tres primum duplicatum eodem numero 30. Dempstis igitur 30. ex omnibus tribus, id est, ex 2 2e — 20. remanebit primus duplicatus 1 2e — 40. ideoq. simplex primus 1 2e — 25. Primus ergo 1 2e — 25. & tertius 1 2e — 20. faciunt summam 2 2e — 45. quæ ex omnibus tribus, id est, ex 2 2e — 20. subtrahita 20. linquet secundum 25. Et quoniam primus ac tertius faciunt, vt dictum est proxime, summam 2 2e — 45. quæ debet secundum 25. superare numero 40. Si secundus 25. subtrahatur a prædicta summa, relinquetur numerus 2 2e — 70. æqualis dicto excessui 40. Additis igitur 70. utrinque, erit æquatio inter 2 2e. & 110. Diuisisq. 110. per 2. fiet 1 2e. 55. Primus ergo numerus 1 2e — 25. erit 30. Secundus vero est 25. & tertius 1 2e — 20. erit 35. vt prius.

61 Quatuor numeros inuenire, vt terni quique simul sumpti excedant reliquum dato numero: dummodo semissumma ex quatuor numeris postulatis collecta maior sit singulis numeris datis.

POSTVLETVR, vt primus, secundus, ac tertius simul excedant quantum 20. unitatibus: Et secundus, tertius, ac quartus primum 30. unitatibus: Et tertius, quartus, ac primus secundum 40. unitatibus: Ac denique quatuor, primus ac secundus tertium 50. unitatibus. Vbi vides, quatuor numeros datos facere 140. cuius numeri semissis 70. maior est singulis datis. Nam si conditio hæc non adferret, erit questio impossibilis. Vt si ultimus excessus datur 90. facient omnes excessus numerum 280. cuius semissis 90. maior non est dato excessu 90. questio erit inexplicabilis. Ponantur ergo omnes quatuor numeri 1 2e. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedunt quantum 20. unitatibus, addito communi quarto, superabunt quoque primus, secundus, tertius ac quartus quantum duplicatum ipsidem 20. unitatibus: ideoq. omnes quatuor æquales erunt quarto duplicato, vna cum 20. quia numerus compositus ex quarto duplicato, & 20. superat quoque quantum duplicatum 20. unitatibus. Si igitur a summa omnium quatuor, quæm posuimus 1 2e. auferatur 20. remanebit quartus duplicatus 1 2e — 20. atque adeo quartus simplex erit 1 2e — 10. Eadem ratione erit primus

— 10. Et 2. **LXI.**

a 16. pro-
nuc. primi.

1 2e — 15.

$\frac{1}{2}$ 20 — 15. Et secundus $\frac{1}{2}$ 20. Et tertius $\frac{1}{2}$ 20 — 15. Summa ergo omnium quatuor 20. æqualis erit priori summa omnium quatuor, quam posuimus 1 20. ita ut æquatio sit inter 1 20. & 2 20 — 10. Additisq. 20. utrinque, inter 1 20 + 20. & 2 20. Ablatisq. 1 20 utrinque, inter 70. & 1 20. Erit igitur 1 20 70. Cum ergo primus inuentus sit $\frac{1}{2}$ 20 — 15. erit ipse primus 20. Eandemq. ob causam secundus erit 15. Tertius 10. & quartus 15. qui omnes questionem expediunt.

Aliter. Ponatur quartus 1 20. Et quoniam primus, secundus, ac tertius excedant quartum 20. vnitatebus: Erunt illi tres simul 1 20 + 20. cum hic numerus superet 1 20. similiter 20. vnitatebus. Rursus quia secundus, tertius, & quartus excedunt primum 30. vnitatebus: ponatur summa secundi ac tertij 25. semissis videlicet primorum duorum excessum 20. & 30. simul. Quia igitur primus, secundus, ac tertius faciunt, ut diximus, 1 20 + 20. si auferatur secundus ac tertius simul, nimirum 25. reliquus erit primus 1 20 — 5. exceditq. summa 1 20 + 25. ex secundo, tertio, & quarto collecta, primum 1 20 — 5. numero 30. ut patet, si primus 1 20 — 5. auferatur ex 1 20 + 25. summa secundi, tertij, & quartij. Rursus, quia primus inuentus est 1 20 — 5. Secundus vero ac tertius faciunt 25. quartus denique positus est 1 20. erunt omnes quatuor 2 20 + 20. Cum ergo tertius, quartus, ac primus excedant secundum numero 40. Addito communi secundo, excedent omnes quatuor secundum duplicatū eodem numero 40. Ablatis igitur 40. ex summa 2 20 + 20. omnium quatuor, relinquetur secundus duplicatus 2 20 — 20. ipseq. secundus semel sumptus erit 1 20 — 10. qui subtrahitur ex 25. summa secundi ac tertij, reliquum faciet tertium 35 — 1 20. Quoniam vero quartus, primus, & secundus faciunt 3 20 — 15. debentq. superare tertium numero 50. superant autem tertium 35 — 1 20. numero 4 20 — 50. ut constet, si tertius 35 — 1 20. detrahatur ex prædicta summa 3 20 — 15. Est ergo æquatio inter 4 20 — 50. & 50. Additisq. 50. utrinque, inter 4 20. & 100. Diuisis ergo 100. per 4. fiet 1 20. 25. Primus ergo 1 20 — 5. erit 20. Secundus 1 20 — 10. erit 15. Tertius 35 — 1 20. erit 10. Et quartus 1 20. erit 15. quemadmodum prius.

Aliter. Ponatur summa omnium 1 20. Et quia priores tres excedere debent quartum numero 20. diuidenda erit 1 20. in duas partes, quarum maior minorem superet numero 20. Maior enim pars erit summa priorum trium, & minor pars erit quartus numerus. Diuisio autem hæc ita fiet, ut in scholio ænigmati 1. tradidimus. Dematur numerus 20. ex 1 20. ut reliquus sit numerus 1 20 — 20. Huius enim semissis $\frac{1}{2}$ 20 — 10. erit minor pars. Et si ad hanc addatur idem numerus 20. fiet maior pars $\frac{1}{2}$ 20 + 20. Erit ergo quartus numerus $\frac{1}{2}$ 20 — 10. & priores quatuor $\frac{1}{2}$ 20 + 10. Pari ratione, quia secundus, tertius, & quartus debent excedere primum numero 30. demantur 30. ex 1 20. Reliqui enim numeri 1 20 — 30. semissis $\frac{1}{2}$ 20 — 15. erit primus numerus. Item quia tertius, quartus,

tus, & primus superare debent secundum numero 40. si demantur 40. ex 1 2e. erit reliqui numeri 1 2e—40. semissis $\frac{1}{2}$ 2e—20. secundus numerus. Denique quia quartus, primus, & secundus superare debent tertium numero 50. si tollantur 50. ex 1 2e. erit reliqui numeri 1 2e—50. semissis $\frac{1}{2}$ 2e—25. tertius numerus. Omnes 4. inueniuntur 1 2e—15. $\frac{1}{2}$ 2e—20. $\frac{1}{2}$ 2e—15. & $\frac{1}{2}$ 2e—10. faciunt summam 1 2e—70. quæ aequalis esse debet summæ omnium, quam posuimus 1 2e. Est ergo æquatio inter 1 2e. & 2 2e—70. Additisq. 70. vtrinque, inter 1 2e + 70. & 2 2e. Ablataq. 1 2e. vtrinque, inter 70. & 1 2e. eritq. 1 2e. 70. & $\frac{1}{2}$ 2e 35. Primus ergo $\frac{1}{2}$ 2e—15. erit 10. Secundus $\frac{1}{2}$ 2e—20. erit 15. Tertius $\frac{1}{2}$ 2e—25. erit 10. Et quartus $\frac{1}{2}$ 2e—10. erit 15. veluti prius.

S C H O L I V M.

EODEM modo reperientur quinque numeri, et quaterni quinque superent reliquum dato numero; dummodo tertia pars summa ex quinque posulatis, excessibus maior sit singulis numeris. Pari ratione inuenientur sex, si tamen quarta pars maior sit, &c. Atque ita deinceps quocunque numeri, si modo pars summe denominata à numero datorum excessuum, minus duobus, maior sit singulis excessibus datis.

62 Tres numeros inuenire, quorum maximus mediam superet data parte minimi: Medius quoque minimum superet data parte maximi: Minimus denique datam medij partem excedat numero dato.

LXII.

SUPERET maximus medium tertia parte minimi: Medius minimum tertia quoque parte maximi: Minimus denique tertiam item partem medij excedat 10. unitatibus. Ponatur minimus 1 2e + 10. & medius 3 2e. Ita enim minimus tertiam medij partem superabit numero 10. Et quoniam medius minimum superare debet tertia parte maximi. Superat autem medius 3 2e. minimum 1 2e + 10. numero 2 2e—10. ut patet, si subtractio fiat 1 2e + 10. ex 3 2e. Igitur tertia pars maximi erit 1 2e—10. atque idcirco maximus erit 6 2e—30. Rursus quoniam maximus medium superare debet tertia parte minimi: Superat autem maximus 6 2e—30. medium 3 2e. numero 3 2e—30, qui æqualis erit tertia parti minimi: Ideoq. minimus erit 9 2e—90. Fuit autem minimus positus 1 2e + 10. Est ergo æquatio inter 9 2e—90. & 1 2e + 10. Additisq. 90. vtrinque, inter 9 2e. & 1 2e + 100. Ablataq. 1 2e. vtrinque, inter 8 2e. & 100. Diuisis ergo 100. per 8. fiet 1 2e. 12 $\frac{1}{2}$. Igitur minimus 1 2e + 10. erit 22 $\frac{1}{2}$. Medius 3 2e. erit 37 $\frac{1}{2}$. Maximus denique 6 2e—30. erit 45. Nam maximus 45. superat medium 37 $\frac{1}{2}$. numero 7 $\frac{1}{2}$. qui tertia pars est minimi 22 $\frac{1}{2}$. Medius vero 37 $\frac{1}{2}$. superat

rat minimum $2\frac{1}{2}$, numero 15, qui tertia pars est maximi 45. Minimus denique 12 $\frac{1}{2}$, superat 12 $\frac{1}{2}$, tertiam partem medij 37 $\frac{1}{2}$, numero 10, vt propositum est.

QVOD si maximus medium superare debeat semisse minimi; medium minimum quarta parte maximi; Et minimus tertiam partem medij numero 8. Ponatur minimus 12 + 8. Et medius 32. vt ille tertiam huius partem excedat octonario. Et quia medius minimum superare ponitur quarta parte maximi; Superat autem medius 32, minimum 12 + 8, numero 22 — 8. Igitur quarta pars maximi erit 22 — 8, ac proinde maximus erit 82 — 32. Rursus quia maximus medium superare debet semisse minimi; Superat autem maximus 82 — 32, medium 32, numero 52 — 32, qui æqualis erit semissi minimi; proptereaq. minimus erit 102 — 64. Fuit autem idē positus 12 + 8. Est ergo æquatio inter 102 — 64, & 12 + 8. Additionisq. 64, vtrinque, inter 102 & 12 + 8. Abstrahatq. 12, vtrinque, inter 92, & 8. Diuisis ergo 92, per 9, fiet 12.8. Ac proinde minimus 12 + 8, erit 16. Medius vero 32, erit 24. Maximus denique 82 — 32, erit 52.

Si quis proponeret, maximum debere superare medium semisse minimi; Medium quoque minimum semisse maximi; Minimum denique semissem medij binario; questio esset impossibilis, vt ipsa operatio per Algebram abundē docebit. Ponatur enim minimus 12 + 2. Et quia debet superare semissem medij binario, erit medius 22. Quia vero minimum medius superare debet semisse maximi; Superat autem medius 22, minimum numero 12 — 2, qui semissis debet esse maximi. Maximus ergo erit 22 — 4; quod est absurdum, cum medius inuentus sit 22, maior quam 22 — 4.

LXIII. 63 Tres numeros inuenire, ita vt si quisque proximē sequenti det datam sui partem, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiat aequalitas.

DET primus secundo tertiam sui partem; Secundus tertio quartam sui partem; Et tertius primo quintam sui partem; Et cum sibi mutuo distas partes dederint, & ab alijs acceperint, fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 32, vt tertiam partem habeat sine fractione. Secundus autem, 4, vniuersum, vt quartam partem sine fractione habeat. Si ergo hic secundus 4, accipiat $\frac{1}{2}$, primi 32, nimirum 12, atque det $\frac{1}{2}$, nimirum 1, tertio, habebit ipse secundus 3 + 12. Ac tantundem habere debet primus, vbi dederit, acceperitque, quæ iubentur. At primus 32, si tertiam partem dederit 12, & acceperit 3 — 12, cum demum habebit 12 + 3, vel 3 + 12, vt patet, si addantur 3 — 12, ad 12, quod hæc formula docet: Inuenies autem 3 — 12, si reliquum primi, nimirum 22, depleueris ex 3 + 12. Ergo 3 — 12, erit quinta pars tertij: quan-

$$\begin{array}{r} 12 + 0 \\ - 12 + 3 \\ \hline 3 + 12 + 3 \end{array}$$

quandoquidem eam dans reliquo primi, nimirum 2 2e. facit 3+1 2e. Igitur tertius erit 15 — 5 2e. qui si dederit primo quintam sui partem, hoc est, 3 — 1 2e. remanebunt illi 12 — 4 2e. Et si a secundo 4. acceperit quartam partem, nimirum 1. habebit 13 — 4 2e. qui numerus æqualis esse debet 7 + 1 2e. quantum scilicet tam primus, quam secundus habet, ut dictum est. Est ergo æquatio inter 13 — 4 2e. & 7 + 1 2e. Additisq. 4 2e. vtriusque, inter 13. & 3 + 5 2e. Ablatisq. 3. vtriusque, inter 10. & 5 2e. Diuisisq. 10. per 5. fiet 1 2e. 2. Ac propterea primus numerus 3 2e. erit 6. Secundus 4. ut posuimus, & tertius 15 — 5 2e. erit 5. Si namq. primus 6. dederit tertiam sui partem 2. acceperitq. quintam partem tertij, videlicet 1. habebit 5. Ac tantundem habebit secundus 4. si dederit quartam sui partem 1. tertio, acceperitq. tertiam partem primi. Item tantum quoque habebit tertius 5. si dederit primo quintam partem, id est, 1. acceperitq. a secundo 4. quartam partem, videlicet 1. quod est propositum.

QVOD si primus secundo debeat dare $\frac{1}{2}$. Secundus tertio $\frac{1}{3}$. & tertius primo $\frac{1}{4}$. Ponatur primus 2 2e. ut habeat $\frac{1}{2}$. sine fractione; Secundus autem 4. ut habeat $\frac{1}{3}$. sine fractione. Secundus igitur postquam dederit $\frac{1}{3}$. tertio, sumpseritq. $\frac{1}{3}$. a primo, habebit 1 2e + 3. Ac tantundem habere debet primus, postquam dederit $\frac{1}{4}$. secundo, acceperitq. $\frac{1}{4}$. a tertio. At primus, postquam dederit $\frac{1}{4}$. secundo, habebit 1 2e. reliquam, quæ cum 3. facit 1 2e + 3. Est ergo 3. tertia pars tertij, ideoq. tertius erit 9. Reliquum est, ut tertius 9. postquam dederit $\frac{1}{4}$. primo, sumpseritq. $\frac{1}{4}$. a secundo, habeat quoque 1 2e + 3. Habebit autem, si imperata fecerit, 7. Ergo æqualitas est inter 7. & 1 2e + 3. Ablatisq. 3. vtriusque, inter 4. & 1 2e. Igitur 1 2e. erit 4. ideoq. primus, quem posuimus 2 2e. erit 8. Secundus 4. & tertius 9. Nam primus 8. si det $\frac{1}{4}$. accipiatq. $\frac{1}{4}$. tertij, habebit 7. quemadmodum secundus, si det $\frac{1}{3}$. & accipiat $\frac{1}{3}$. primi. Nec non tertius, si det $\frac{1}{4}$. sumatq. $\frac{1}{4}$. secundi. Omnesq. tres numeri faciunt 21. tripulum videlicet numeri 7. quem quisque facit. quemadmodum etiam in primo exemplo omnes tres numeri 6. 4. 5. faciunt 15. tripulum scilicet numeri 5. quem quisque facit. In secundo porro exemplo huius ænigmati vides, non esse necessarium, ut partes datæ habeant denominatores, qui semper crescant ordine, ut in primo exemplo contigit.

64 Quatuor numeros inuenire ea lege, ut cum quis eorum proximè insequenti datam sui partem dederit, inter eos, qui dederunt, & acceperunt, reperiatur æqualitas.

LXIII.

DET primus secundo tertiam sui partem: Secundus tertio quartam: Tertius quarto quintam: Et quartus primo sextam. Ac tandem, postquam dederint, acceperintq. dictas partes, siue 4. numeri

Cc

meri

meri aequales. Ponatur primus 3 2e. vt tertiam partem sine fractione habeat. Secundus autem 4. vnicatum, vt quartam partem habeat sine fractione. Si ergo hic secundus accipiat $\frac{1}{2}$. primi 3 2e. nimirum 1 2e. atque det $\frac{1}{2}$. videlicet 1. tertio, habebit ipse 1 2e + 3. Ac tantundem oportet habere primum, postquam secundo dederit $\frac{1}{2}$. nimirum 1 2e. acceperitq. a quarto partem sextam. Sed si det $\frac{1}{2}$. videlicet 1 2e. superflunt illi 2 2e. quæ cum 3 — 1 2e. constituunt 1 2e + 3. vt ex hac formula colligitur. Inuenies autem

$$\begin{array}{r} 2\ 2e + 0 \\ - 1\ 2e + 3 \\ + 1\ 2e + 3 \end{array}$$

3 — 1 2e. si 2e. tolles ex 1 2e + 3. Ergo sexta pars quarti erit 3 — 1 2e. Et ipse quartus erit 18 — 6 2e. Hic quartus si det $\frac{1}{2}$. remanebunt illi 15 — 5 2e. & si accipiat $\frac{1}{2}$. tertij, debet habere 1 2e — 3. sicut tam primus, quam secundus. Sed si addantur 6 2e — 12. ad 15 — 5 2e. fit 1 2e + 3. vt in hac formula apparet.

Inuenies autem 6 2e — 12. si 15 — 5 2e. demantur ex 1 2e + 3. Igitur $\frac{1}{2}$. tertij erit 6 2e — 12. ipseq. tertius erit 30 2e — 60. Reliquum est iam, tertium hunc habere quoque 1 2e + 3. postquam quarto dederit $\frac{1}{2}$. videlicet 6 2e — 12. acceperitq. $\frac{1}{2}$. secundi 4. At si det $\frac{1}{2}$. superflunt illi 24 2e — 48. Et si acceperit $\frac{1}{2}$. a secundo, nimirum 1. habebit 24 2e — 47. qui numerus æqualis debet esse 1 2e + 3. Additis igitur 47. vtrinque, erit æqualitas inter 24 2e. & 1 2e + 50. Ablataq. 1 2e. vtrinque, inter 23 2e. & 50. Diuisis ergo 50. per 23. fiet 1 2e. $\frac{19}{23}$. Quocirca primus numerus 3 2e. erit $\frac{159}{23}$. Et secundus 4. siue $\frac{92}{23}$. Ac tertius 30 2e — 60. erit $\frac{1380}{23}$. Quartus deniq. 18 — 6 2e. erit $\frac{114}{23}$. qui ænigma conficiunt. Et si absteris denominatores, erunt quatuor numeri quæsitæ integri 150. 92. 120. 114. propterea quod numeratores eandem proportionem habent, quam ipsæ minuit, propter eundem denominatorem, vt ad finem lib. 9. Eucl. demonstrauimus.

a 15. quinti.

Et partes in quæstione expressæ ita se habent ad numeros integros, vt ad dictas minutas. quia ita se habet V. g. $\frac{1}{2}$. numeri 12. ad 12. vt $\frac{1}{2}$. numeri 90. ad 90. &c. Itaque si primus 150. det $\frac{1}{2}$. nimirum 50. supererunt 100. & si accipiat $\frac{1}{2}$. quarti 114. nimirum 19. habebit 119. Item si secundus 92. det $\frac{1}{2}$. sui numeri nimirum 23. remanebunt 69. & si accipiat $\frac{1}{2}$. primi 150. nimirum 50. habebit similiter 119. Sic quoque si tertius 120. det $\frac{1}{2}$. sui numeri, hoc est, 24. remanebunt 96. & si accipiat $\frac{1}{2}$. secundi 92. nimirum 23. habebit 119. Denique eodem modo, si quartus 114. det $\frac{1}{2}$. sui numeri, videlicet 19. supererunt 95. & si accipiat $\frac{1}{2}$. tertij 120. nimirum 24. habebit 119.

HIC etiam omnes 4. numeri inuenti 150. 92. 120. 114. efficiunt 476. quadruplum videlicet numeri 119. quem vnusquisque facit.

S C H O L I V M.

EODEM modo inueniantur 5. numeri, vel plures, ita vt, postquam vnusquisque sequenti partem datam dederit, tandem fiant 5. numeri aequales, vel plures. Omnesq. simul facient semper summam, qua totus numerum, quos singuli faciunt, continet, quod sunt ipsi numeri.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt cum prius dederit $\frac{1}{2}$. secundo, acceperit $\frac{1}{2}$. a quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{3}$. tertio, acceperit $\frac{1}{3}$. a primo: Item tertius dederit $\frac{1}{4}$. quarto, acceperit $\frac{1}{4}$. a secundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{5}$. quinto, acceperit $\frac{1}{5}$. a tertio. Quintus denique dederit $\frac{1}{2}$. primo, acceperit $\frac{1}{2}$. a quarto; fiant tandem 5. numeri aequales. Ponatur primus 32. vt habeat $\frac{1}{2}$. sine fraktionem. Secundus vero 2. vt habeat $\frac{1}{3}$. sine fraktionem. Si ergo secundus det $\frac{1}{3}$. tertio, id est, 1. remanens illi 1. Et si accipiat $\frac{1}{2}$. a primo, nimirum 16. habebit 17. + 1. quem numerum vnusquisque tandem habere debet. Primo autem, si det $\frac{1}{2}$. secunda, supererunt 22. qua cum $\frac{1}{2}$. quinti facere debent 12 + 1. At 22. cum 1 + 12. faciant 12 + 1. vt constet, si 22. detrahantur ex 12 + 1. Igitur quinta pars quinti erit 1 + 12. Et totus quintus 5 + 52. Huic quinto, si det $\frac{1}{5}$. remanebunt 4 + 42. qua cum $\frac{1}{4}$. quarti facere debent 12 + 1. Faciant autem 4 + 42. cum 52 = 3. numerum 12 + 1. vt patet, si 4 + 42. detrahantur ex 12 + 1. Igitur $\frac{1}{4}$. quarti numeri erit 52 = 3. totusq. quartus erit 302 = 18. Huic quarto si det $\frac{1}{3}$. quinto, supererunt 252 = 15. qua cum $\frac{1}{2}$. terti facere debent 12 + 1. Faciant autem 252 = 11. cum 16 = 242. numerum 12 + 1. vt patet, si 252 = 15. detrahantur ex 12 + 1. Igitur 16 = 242. erunt $\frac{1}{2}$. terti numeri, totusq. tertius erit 112 = 1682. Huic tertio, si det $\frac{1}{5}$. quarto, remanent 96 = 1442. qua cum $\frac{1}{2}$. secundi, id est, cum 1. facit 97 = 1442. qua aequalia debent esse 12 + 1. Additis 1442. vtrinq. erit aequatio inter 97. & 1452 + 1. Ablato, 1. vtrinq. inter 96. & 1452. Diuisis igitur 96. per 145. fiet $\frac{1}{2}$. 1. Ergo primus numerus positus 32. erit $\frac{1}{2}$. Secundus autem positus 2. erit $\frac{1}{3}$. Tertius deinde inuentus 112 = 1682. erit $\frac{1}{4}$. Quartus deinde, qui inuentus fuit 302 = 18. erit $\frac{1}{5}$. Quintus denique inuentus 5 = 52. erit $\frac{1}{2}$. Et delectis denominatoribus, erunt quinque numeri inueniendi integri. 288. 290. 112. 170. 245. qui problemati satisfaciunt. Nam si datas partes dent, & recipiant, vnusquisque habebit 241. qui numerus quintuplicatus facit 1205. summam omnino quinque numerorum inuentorum.

65 Datum numerum in duas partes diuidere, ita vt posterior pars cum data parte aliquota prioris faciat datum quemlibet numerum.

SIT numerus 60. distribuendus in duos, ita vt posterior cum $\frac{1}{2}$. prioris efficiat 28. Ponatur prior pars 52. vt dare possit $\frac{1}{2}$. sine fraktionem:

Atione: eritq. posterior pars 60 — 5 2e. quæ si acceperit $\frac{1}{2}$. prioris, nimirum 1 2e. habebit 60 — 4 2e. qui numerus æqualis debet esse dato numero 28. Additis igitur 4 2e. utrinque, erit æquatio inter 60. & 4 2e. + 28. Ablatisq. 28. utrinque, inter 32. & 4 2e. Diuisis ergo 32. per 4. fiet 8. Ac propterea prior pars 5 2e. erit 40. posterior vero 20. quæ si acceperit $\frac{1}{2}$. prioris, nimirum 8. habebit 28.

S C H O L I U M.

HOC idem sine Algebra efficitur hoc modo. Dempto numero dato, qui effici debet, a numero dato, qui distribuendus est, diuidatur reliquus numerus per denominatorem partis datæ, minus uno. Quotiens namq. per denominatorem partis multiplicatus, exhibebit priorem numerum, &c. Ut in dato exemplo, si datus numerus 28. dematur ex diuendo numero 60. & reliquus numerus 32. diuidatur per 4. (numerus videlicet unitate minorem denominatore quinta partis) fiet Quotiens 8. quo ducto in 5. denominatorem partis quinta, præducetur prior numerus 40. Posterior ergo erit 20.

Si idem numerus 60. secundus sit in duas, ita ut posterior cum $\frac{1}{2}$. prioris efficiat 59. Dempto numero 59. ex 60. & reliquo numero 1. diuiso per 4. fit Quotiens $\frac{1}{4}$. qui ductus in 5. faciat $\frac{5}{4}$. priorem numerum. Posterior ergo erit 58 $\frac{1}{4}$. Nam si huic addatur $\frac{1}{4}$. prioris, nimirum $\frac{5}{4}$. constabitur datus numerus 59.

LXVL

66 Duos numeros inuenire, quorum summa æqualis sit dato numero, & posterior cum data parte prioris efficiat datum quoque alium numerum.

HOC ænigma cum præcedenti coincidit. Nam si summa data secetur in duas partes, ut ibi imperatur, inuenti erunt duo numeri quæriti. Ut si inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior numerus cum $\frac{1}{2}$. prioris faciat 28. diuidendus erit numerus 60. ut dictum est, eruntq. quæriti numeri 40. & 20.

Si vero inueniendi sint duo numeri, quorum summa 60. & posterior cum $\frac{1}{2}$. prioris faciat 59. erit prior numerus 1 $\frac{1}{4}$. posterior autem 58 $\frac{1}{4}$. ut in scholio præcedenti paruit.

LXVII.

67 Tres numeros inuenire, ita ut, cum unusquisque a summa reliquorum duorum datam partem acceperit, fiant tres numeri æquales.

FAC, ut si primusumat a summa reliquorum duorum $\frac{1}{2}$. Secundus a summa reliquorum duorum $\frac{1}{3}$. Et tertius a summa duorum reliquorum $\frac{1}{4}$. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 2e. summa

summa vero reliquorum duorum ponatur numerus 3. vt habeat $\frac{1}{2}$. sine fractione. Si igitur primus a duobus reliquis accipiat $\frac{1}{2}$. habebit $1\frac{1}{2} + 1$. Et quia secundus a summa reliquorum duorum accipiens $\frac{1}{2}$. debet etiam facere $1\frac{1}{2} + 1$. diuidenda erit summa omnium trium, nimirum $1\frac{1}{2} + 3$. in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{2}$. prioris faciat $1\frac{1}{2} + 1$. Posterior enim pars erit secundus numerus, & pars prior summa primi ac tertij. Diuisio autem hæc fiet, vt in scholiis anigmati 65. docui, hoc modo. Dempto numero $1\frac{1}{2} + 1$. qui effici debet, ex summa $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quartæ, vno minus, nimirum per 3. & quotiens $\frac{2}{3}$. per denominatorem 4. multiplicetur. Procreatus enim numerus $\frac{2}{3}$. erit prior pars, quæ ablata ex summa $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium, relinquet partem posteriorem $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. pro secundo numero. Huic enim si addatur $\frac{1}{2}$. prioris partis $\frac{1}{2}$. (quæ est summa primi ac tertij) nimirum $\frac{1}{2}$. fiet numerus $1\frac{1}{2} + 1$.

Rursum quia tertius sumens $\frac{1}{2}$. a summa primi & secundi debet etiam facere $1\frac{1}{2} + 1$. diuidenda erit summa $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium eodem modo in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{2}$. prioris faciat $1\frac{1}{2} + 1$. quod ita fiet. Dempto numero $1\frac{1}{2} + 1$. qui effici debet, ex summa $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium, diuidatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis quintæ, vno minus, hoc est, per 4. Et quotiens $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{4}$. in denominatorem 5. ducatur. Productus enim numerus $\frac{1}{4}$. erit prior pars, summa videlicet primi ac secundi. quæ pars ablata ex summa $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium, reliquam faciet partem posteriorem $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Hæc enim accipiens $\frac{1}{2}$. summae primi ac secundi, quæ fuit $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. faciet quoque $1\frac{1}{2} + 1$. Reliquum iam est, vt omnes tres numeri inuenti $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. coadueant summam $1\frac{1}{2} + 3$. omnium trium. Faciunt autem $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Est ergo æquatio inter $1\frac{1}{2} + 3$. & $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Et ablata $1\frac{1}{2}$ vtrinque, inter 3. & $2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Ablatisq. $\frac{1}{2}$ vtrinque, inter 2. & $2\frac{1}{2}$. Diuisis igitur 2. per 2. fiet $1\frac{1}{2}$. pro primo numero quæsit, qui positus fuit $1\frac{1}{2}$. Secundus, qui inuentus fuit $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$. sive $\frac{1}{4}$. Tertius denique, quem inuenimus esse $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1}{4}$. Et si neglexeris denominatores, erunt tres numeri quæsitæ integri 13. 17. 19. problema propositum absoluentes. Nam & primus 13. cum $\frac{1}{2}$. secundi & tertij, id est, cum 12. & secundus 17. cum $\frac{1}{2}$. primi & tertij, hoc est, cum 8. & tertius 19. cum $\frac{1}{2}$. primi & secundi, nimirum cum 6. facit 25.

Hic autem summa trium numerorum inuentorum 49. non est tripla numeri 15. quem vnusquisque facit: quemadmodum in ænigmati 63. fiebat.

68 Quatuor numeros inuenire ea conditione, vt cum vnusquisque a summa reliquorum trium datam partem acceperit, fiant quatuor numeri aequales.

LXVIII.

ON 26

STA-

STATVAMVS, vt si primusumat $\frac{1}{2}$. summæ aliorum trium: Secundus $\frac{1}{3}$. summæ aliorum trium: Tertius $\frac{1}{4}$. summæ trium reliquorum: Quartus denique $\frac{1}{5}$. summæ aliorum trium; quatuor numeri fiant æquales. Ponatur primus 1 2e. & summa aliorum trium numerus 3. habens $\frac{1}{2}$. sine fractione. Primus igitur sumens $\frac{1}{2}$. huius summæ, videlicet 1. faciet 1 2e + 1. Et quia secundus cum $\frac{1}{3}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1 2e + 1. diuidentia erit summa 1 2e + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{4}$. prioris faciat 1 2e + 1. sicut in præcedenti problemate. Posterior enim pars erit secundus numerus, & prior summa primi, tertij, & quarti. Inuenta autem fuit in antecedenti problemate pars posterior 1 2e + $\frac{1}{2}$. pro secundo numero.

DEINDE quia tertius sumens $\frac{1}{4}$. summæ primi, secundi, & quarti, debet similiter conficere 1 2e + 1. diuidentia rursum erit summa 1 2e + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 2e + 1. Inuenta fuit in præcedenti problemate posterior pars 1 2e + $\frac{1}{3}$. pro tertio numero.

POSTREMO quia quartus accipiens $\frac{1}{5}$. summæ reliquorum trium debet etiam facere 1 2e + 1. diuidentia summam 1 2e + 3. omnium quatuor in duas partes, quarum posterior cum $\frac{1}{5}$. prioris faciat 1 2e + 1. quod per icholium ænigmatis 45. ita fiet. Dempto numero 1 2e + 1. qui effici debet, ex summa 1 2e + 3. omnium quatuor, duplatur reliquus numerus 2. per denominatorem partis $\frac{1}{5}$. vno minus, nimirum per 4. & quotiens $\frac{1}{5}$. in ipsum denominatorem 6. ducatur. Productus enim numerus $\frac{1}{5}$. erit prior pars summæ scilicet primi, secundi, ac tertij. quæ pars subtrahita ex summa 1 2e + 3. omnium quatuor, reliquam faciet partem posteriorem 1 2e + $\frac{1}{5}$. Hæc enim cum $\frac{1}{5}$. prioris, hoc est, cum $\frac{1}{5}$. faciet 1 2e + 1. Reliquum iam est, vt omnes 4. numeri inuenti 1 2e. 1 2e + $\frac{1}{2}$. 1 2e + $\frac{1}{3}$. 1 2e + $\frac{1}{4}$. integrent summam 1 2e + 3. omnium quatuor. Faciunt aut 4 2e + $\frac{1}{20}$. Est igitur æqualitas inter 1 2e + 3. & 4 2e + $\frac{1}{20}$. Ablataq. 1 2e vtrunque, inter 3. & 3 2e + $\frac{1}{20}$. Ablatisq. $\frac{1}{20}$. vtrunque, inter 1. $\frac{1}{20}$. & 3 2e. Diuisis ergo 1 $\frac{1}{20}$. siue $\frac{1}{20}$. per 3. fiet 1 2e. $\frac{1}{60}$. pro primo numero quæsto, quem posuimus esse 1 2e. Secundus inuentus 1 2e + $\frac{1}{2}$. erit $\frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. Tertius autem inuentus 1 2e + $\frac{1}{3}$. erit $\frac{1}{3}$. id est, $\frac{1}{3}$. Quartus denique inuentus 1 2e + $\frac{1}{4}$. erit $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. Et si abieceris denominatores, inuenti erunt quatuor numeri integri 47. 77. 92. 101. qui quæstioni satisfaciunt. Nam & primus 47. cum $\frac{1}{2}$. secundi, tertij, & quarti, id est, cum 92. & secundus 77. cum $\frac{1}{3}$. primi, tertij, & quarti, hoc est, cum 60. & tertius 92. cum $\frac{1}{4}$. primi, secundi, ac quarti, id est, cum 45. & quartus 101. cum $\frac{1}{5}$. primi, secundi, & tertij, videlicet cum 36. facit 137. Hic etiam summa quatuor numerorum inuentorum 317. quadrupla non est numeri 137. quem vnusquisque facit, quemadmodum in ænigmate 64. fiebat.

S C H O L I V M.

NON aliter inueniuntur 3. numeri, vel 6. vel plures ita ut si unusquisque a summa reliquorum accipiat datam partem, fiant totidem numeri aequales.

69 Tres numeros inuenire ea lege, ut si unusquisque proximè insequenti det imperatam sui partem, postquam mutuo dederunt, & acceperunt, singuli habeant eundem numerum datum.

I XIX.

SINT inueniendi tres numeri, ut si primus det $\frac{1}{2}$. secundo $\frac{1}{3}$. secundo $\frac{1}{4}$. tertio $\frac{1}{5}$. primo, fiant tres numeri 30. 30. 30. In enigmate 63. inuenimus tres numeros eadem conditione, nisi quòd tres numeros aequales, qui fieri debent, non determinauimus ad certum numerum, ut hic. Ergo inuenitis, per enigma 63. tribus numeris 6. 4. 5. qui illi enigmati satisfaciunt; ut inueniantur alij tres implentes conditiones huius enigmati: ponantur pro tribus numeris tot radices, quot vnitates sunt in tribus numeris inuenitis, nimirum 6 2e. 4 2e. 5 2e. Si ergo primus 6 2e. det $\frac{1}{2}$. supererunt 4 2e. & si a tertio 5 2e. accipiat $\frac{1}{5}$. habebit 5 2e. qui numerus aequalis debet esse imperato numero 30. Quocirca diuisis 30. per 5. fiet 6. & proinde primus 6 2e. erit 36. secundus 4 2e. erit 24. & tertius 5 2e. erit 30. Nam primus 36. amittens $\frac{1}{2}$. habebit 24. & accipiens $\frac{1}{5}$. tertij, nimirum 6. habebit 30. Ita quoque secundus 24. dans $\frac{1}{4}$. habebit 18. & recipiens $\frac{1}{5}$. primi, nimirum 12. habebit 30. Ac tandem tertius 30. abiciens $\frac{1}{5}$. habebit 24. & resumens $\frac{1}{4}$. a secundo, nimirum 6. habebit quoque 30. ut alij.

Aliter. Quoniam singuli conficere debent 30. erunt omnes tres numeri quæriti 90. At tres numeri positi 6 2e. 4 2e. 5 2e. faciunt 15 2e. qui numerus æqualis esse debet numero 90. Diuisis ergo 90. per 15. fiet 6. 2e. 4. 2e. 5. 2e. veluti prius.

S C H O L I V M.

AD eundem modum in enigmate 64. 67. & 68. determinari poterit numerus, quem singuli conficere debent. Vt si in præcedenti problemate 68. quilibet quatuor numerorum debeat efficere 100. Quoniam 4. numeri inueniti fuerunt 47. 77. 92. 104. Penemus 4. numeros esse 47 2e. 77 2e. 92 2e. 104 2e. facietq. primus cum $\frac{1}{4}$. reliquorum trium, nimirum cum 90 2e. numerorum 137 2e. qui æqualis esse debet imperato numero 100. Diuisis ergo 100. per 137. fiet $\frac{100}{137}$. Igitur primus numerus 47 2e. erit $\frac{4700}{137}$. Secundus $\frac{7700}{137}$. Tertius $\frac{9200}{137}$. & quartus $\frac{10400}{137}$. qui conditionem problematis

matris

matris imp'ent, dummodo denominatores non abiciantur. Nam primus $\frac{1}{112}$, cum $\frac{1}{2}$, reliquorum trium, id est, cum $\frac{1}{200}$, facit $\frac{11700}{22000}$, videlicet 100. Sic etiam secundus $\frac{1}{112}$, cum $\frac{1}{2}$, reliquorum trium, id est, cum $\frac{1}{200}$, facit $\frac{11700}{22000}$, hoc est, 100. Eundem numerum 100. facit tamen tertius cum $\frac{1}{2}$, reliquorum trium, quam quartus cum $\frac{1}{2}$, reliquorum.

PORRO in ænigmate 68. & 67. si vnusquisque numerorum facere debeat certum quendam numerum determinatum, locum non habebit secunda solutio præsentis ænigmati 69. quia summa trium numerorum in 67. ænigmate, vel 4. numerorum in 68. ænigmate inuentorum, non est tripla, vel quadrupla numeri, quem quisque conficit, postquam imperata impleuerit, vt ibi diximus. Solum ergo adhiberi poterit in ænigmate 63. vt in hoc ænigmate 69. factum est: nec non in ænigmate 64. vt iam iam videbis.

Sint enim inueniendi 5. numeri, vt si primus dederit $\frac{1}{2}$, secundo, acceperitq; $\frac{1}{3}$, a quinto: Secundus vero dederit $\frac{1}{3}$, tertio, acceperitq; $\frac{1}{4}$, a primo: Tertius vero dederit $\frac{1}{4}$, quarto, acceperitq; $\frac{1}{5}$, a secundo: Quartus autem dederit $\frac{1}{5}$, quinto, acceperitq; $\frac{1}{2}$, a tertio: Quintus denique dederit $\frac{1}{2}$ primo, acceperitq; $\frac{1}{3}$, a quarto; fiant tandem quinque numeri æquales, quorum quisque: 1205. vnitates contineat. In scholio ænigmati 64. inuenti sunt 5. numeri ea conditione, quam hic expressimus, 188. 190. 112. 170. 245. quorum vnusquisque, si imperata impleuerit, habet 241. Debet autem, vt hic iubetur, quilibet habere 1205. Ponuntur ergo quinque numeri, 188 2e. 190 2e. 112 2e. 170 2e. 245 2e. Si hi numeri imperata executi fuerint, habebit vnusquisque: 241 2e. vt dictum est, qui numerus æqualis esse debet dato numero 1205. Diuisis igitur 1205. per 241, fiet 5 2e. 5. Igitur primus numerus positus 188 2e. erit 1440. Secundus positus 190 2e. erit 1450. Tertius positus 112 2e. erit 1360. Quartus positus 170 2e. erit 1350. Quintus denique positus 245 2e. erit 1225. Nam si imperata fecerint hi 5. numeri, deprehendēs vnū, quemque habere 1205.

Aliter. Quoniam vnusquisque facere debet 1205. erit summa omnium quinque, 6025. Sed quinque numeri positi 188 2e. 190 2e. 112 2e. 170 2e. 245 2e. faciunt summam 1205 2e. Diuisis igitur 6025, per 1205, fiet 5. 2e. 5. veluti prius.

LXX. 70 Datum numerum in tres, quatuor, vel plures parti
es conditione, vt si quisque proxime sequenti det im
peratam sui partem, postquam mutuo dederint, &
acceperint, fiant tres numeri, vel quatuor, vel plures
æquales.

HOC ænigma a præcedenti non differt. Nam si datus numerus in tot partes æquales distribuat, quot in ænigmate exprimentur; inue-

inueniendi erunt per anigma præcedens, eiusq. scholium, (adhibito tamen enigmate 63. & 64. eiusq. scholio) totidem numeri, qui propositam conditionem seruantes faciant totidem numeros æquales vni parti numeri dati, qui in totidem partes fuit distributus. In hos enim numeros inuentos datus numerus diuidendus est; quippe cum omnes simul faciant summam triplam, vel quadruplam numeri, quem vnusquisque inuentorum facere debet, vt dictum est.

V. g. Si numerus 90. distribuendus sit in tres, vt cum primus dederit $\frac{1}{3}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{3}$, & tertius $\frac{1}{3}$, primo; fiant tres numeri æquales: distribuatur datus numerus 90. in tres partes æquales 30. 30. 30. ac per anigma 69. reperiantur tres numeri, vt seruata conditione præscripta, vnusquisque faciat 30. Inuenti numeri erunt 36. 24. 30. atque in hos distribuendus est datus numerus 90. Nam si præscriptam legem obseruent, faciet vnusquisque 30.

P A R I ratione, si numerus 6015. distribuendus sit in quinque partes, vt cum prima dederit $\frac{1}{5}$, secunda $\frac{1}{5}$, tertia $\frac{1}{5}$, quarta $\frac{1}{5}$, quinta $\frac{1}{5}$, & quinta $\frac{1}{5}$, primæ, singuli habeant eundem numerum: distribuendus erit datus numerus in quinque æquales partes 1203. 1203. 1203. 1203. 1203. & per scholium præcedentis enigmati (adiuuante scholio enigmati 64.) inueniendi quinque numeri, vt seruata lege præscripta, vnusquisque faciat 1203. qui quidē sunt, vt in proximo scholio patuit, 1440. 1450. 560. 1350. 1225. Atque in hos distribuendus est datus numerus 6015.

71 Datis duobus numeris, alium quendam inuenire, qui LXXI.
utrumque datum multiplicans faciat maiorem quidem quadratum, minorem vero latus eius quadrati. —

SINT dati duo numeri 100. & 5. sitq. numerus, quem quaerimus, 120. Ex 120. in 100. fit numerus 20020. Et ex 120 in 5. fit numerus 520. qui debet latus esse illius: atque adeo in se ductus faciet numerum æqualem 20020. Facit autem numerus 520. in se 25 8. Est ergo æquatio inter 20020. & 25 8. Diuisis igitur 20020. per 25. fiet 120. 8. numerus quaeritus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Hic enim multiplicans 200. facit quadratum 1600. cuius latus est numerus 40. ex 8. in 5. productus.

Si numeri dati sint 20. & 15. reperietur numerus $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur numerus quaeritus 120. fiant ex 120. in 20. & 15. numeri 2400 & 1520. Et ex 1520. in se fit numerus 225 8. qui æqualis debet esse quadrato 2020. Diuisis igitur 2400. per 225. fit 120. siue $\frac{1}{2}$. numerus quaeritus. Hic enim multiplicans 20. & 15. facit $\frac{1}{2}$ quadratum, cuius latus est numerus $\frac{1}{2}$. siue $\frac{1}{2}$. productus ex 120. in 15.

LXXII. 72 *Duos numeros inuenire, ita ut summa ex ipsis constet, & excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, datos numeros efficiant: dummodo datus quadratorum excessus minor sit, quam data summa quadratus.*

SIT eorum summa data 10. & excessus quadratorum datus 80. qui excessus minor est quadrato 400. data summa 10.

Ponatur primus numerus 1 2e. ideoq. secundus 10 — 1 2e. vt eorum summa sit 10. Quadrati eorum

$$\begin{array}{r} 10 - 1 \text{ 2e} \\ 10 - 1 \text{ 2e} \\ \hline - 10 \text{ 2e} + 1 \text{ 8} \\ 400 - 10 \text{ 2e} \\ \hline 400 - 40 \text{ 2e} + 1 \text{ 8} \end{array}$$

1 2e. & 400 — 40 2e + 1 8. cum ex ductu 10 — 1 2e. in 10 — 1 2e. fiat numerus 400 — 40 2e + 1 8. vt in hac formula apparet. Detracto illo quadrato ex hoc, remanet excessus 400 — 40 2e. aequalis 80. Additis 40 2e. vtrunque, erit aequatio inter 400. & 80 + 40 2e. Ablatisq. 80. vtrunque, inter 320. & 40 2e. Diuisis ergo 320. per 40. fiet 1 2e. 8. primus numerus, secundus vero positus 10 — 1 2e. erit 12. Summa numerorum 8. & 12. est 20. & quadratorum 64. & 144. excessus 80.

QVOD si derur eadem summa numerorum 10. & excessus quadratorum 400. qui minor non est quadrato 400. qui ex summa fit: erit questio impossibilis. Nam posito primo numero 1 2e. & secundo 10 — 1 2e. erunt rursus eorum quadrati 1 8. & 400 — 40 2e + 1 8. quorum excessus 400 — 40 2e. aequalis debet esse numero 400. quod fieri non potest.

DETVR rursus summa numerorum 20. & excessus quadratorum item 20. Posito primo numero 1 2e. & secundo 10 — 1 2e. erit eorum summa 10. & excessus quadratorum 400 — 40 2e. aequalis 10. Additis ergo vtrunque 40 2e. erit aequatio inter 20 + 40 2e. & 400. Ablatisq. 20. vtrunque, inter 380. & 40 2e. Diuisis ergo 380. per 40. fiet 1 2e. 9 $\frac{1}{2}$. primus numerus. Secundus ergo erit 10 $\frac{1}{2}$. quorum summa 20. & excessus quadratorum $\frac{1}{4}$. 1 $\frac{1}{2}$. numerus $\frac{1}{2}$. hoc est, 20.

LXXIII. 73 *Datum numerum in duos diuidere, ut excessus quadratorum, qui ex ipsis fiunt, sit quilibet numerus minor quadrato dati numeri.*

SIT datus numerus 10. diuidendus in duos, vt excessus quadratorum ex ipsis factorum sit 80. Hoc aemigma a precedenti diuersum non est. Nam si reperiantur duo numeri, quorum summa datus numerus 10. & excessus quadratorum ex ipsis factorum 80. erit summa data 10. in illos duos numeros distribuenda, &c.

74 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita ut summa quadratorum, qui ex ipsis fiunt, ad excessum numerorum inuentorum proportionem habeat datam.* LXXIII.

SINT inueniendi duo numeri in proportionem triplam, & summa quadratorum ex ipsis procreatorum ad summam inuentorum numerorum proportionem habeat decuplam. Ponatur minor numerus 12. maior 32. ad illum triplus. Excessus est 12. Et quadratorum 12. 92. summa 102. decupla ad 12. Ergo æquatio est inter 102. & 1202. Diuisis igitur 10. per 10. fiet 12. minor numerus, (quia numeri Cossici collaterales sunt) maiorq. erit 6. Excessus eorum est 4. & summa quadratorum 4. 36. est 40. qui numerus excessus 4. decuplus est.

75 *Duos numeros in data proportione reperire, ita ut excessus quadratorum ipsorum ad excessum inuentorum numerorum proportionem habeat datam.* LXXV.

NUMERI quæsi habeant proportionem triplam, & ad eorum excessum habeat excessus quadratorum proportionem duodecuplam. Ponatur minor numerus 12. maior 32. illius triplus. Excessus eorum est 12. Quadratorum 12. & 92. est 102. duodecupla habeas proportionem ad 12. Igitur æquatio erit inter 102. & 1212. Diuisis ergo 12. per 12. fiet 12. minor numerus (quod collaterales sint numeri Cossici) maiorq. erit 9. Excessus eorum est 6. Et quadratorum 9. & 81. excessus 72. ad 6. proportionem habet duodecuplam.

76 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita ut numerus ex vno in alterum procreatus ad eorum summam datam habeat proportionem.* LXXVI.

HABEANT quæsi numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum genitus ad eorum summam, proportionem septuplam. Ponatur minor 12. maior 42. illius quadruplus. Summa eorum est 52. Et ex 12. in 42. fit numerus 42. qui septuplam proportionem habere debet ad 52. Ergo æquatio erit inter 42. & 312. Diuisisq. 312. per 4. fiet 12. minor numerus quod numeri Cossici sint collaterales. Maior ergo erit 12. Summa eorum est 24. Ex 12. in 24. fit numerus 24. qui ad 24. proportionem habet septuplam.

- LXXVII. 77 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut numerus ex vno in alteru procreatus ad eorum excessum datam habeat proportionem.*

HABEANT quæfiti numeri proportionem quadruplam, & numerus ex vno in alterum productus ad eorum excessum proportionem septuplam. Ponatur minor 12. & maior 42. illius quadruplus. Excessus eorum est 32. Et productus ex 12. in 42. est 48. qui septuplam habere debet proportionem ad 32. Ergo æquatio erit inter 48. & 32. Diuisiſq. 21. per 4. fiet 12. Minor numerus: quod numeri Cofſici collaterales ſint. Maior ergo erit 54. Exceſſus eorū eſt 42. Ex 12. in 54. fit numerus 648. qui ad 42. proportionem habet ſeptuplam.

- LXXVIII. 78 *Duos numeros inuenire in data proportione, ita ut quadratus minoris ad maiorem numerum proportionem habeat datam.*

HABEANT numeri quæfiti proportionem triplam, & quadratus minoris ad maiorem, ſextuplam. Ponatur minor 12. & maior 32. illius triplus. Quadratus minoris eſt 144. qui ſextuplus eſſe debet maioris numeri 32. Ergo æquatio eſt inter 144. & 192. Diuiſiſq. 18. per 1. fiet 12. Minor numerus, quod numeri Cofſici collaterales. Maior ergo erit 54. Quadratus minoris, nimirum 324. ad maiorem 54. proportionem habet ſextuplam.

- LXXIX. 79 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut quadratus minoris ad Quotientem, ſi maior per minorem diuidatur, proportionem habeat quamecunq. datam.*

HABEANT numeri quæfiti proportionem quadruplam, at quadratus minoris ad Quotientem, diuiſo maioris per minorem, duplam. Ponantur quæfiti numeri 12. & 42. Diuiſo maioris per minorem, fit Quotiens 4. ad quem 12. quadratus minoris proportionem debet habere duplam: ita ut æquatio ſit inter 12. & 8. Diuiſiſq. 8. per 1. fiet 12. Minor numerus. Maior ergo erit 48. ad 12. quadruplus. Diuiſo maioris per minorem, fit Quotiens 4. id eſt, 4. ad quem 8. quadratus minoris proportionem habet duplam. Maior ergo erit 18. Quadratusq. minoris, nimirum 36. ad ipſum minorem 6. habet proportionem ſextuplam.

80 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut quadratus minoris ad eorum summam habeat proportionem datam quamlibet.*

LXXX.

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1 2e. & maior 3 2e. illius triplus. Quadratus minoris eſt 1 8. qui ſexcuplam proportionem habere debet ad 4 2e. ſummam videlicet amborum. Ergo æquatio erit inter 1 8. & 4 2e. Diuiſiſq. 24. per 1. fiet 1 2e. 24. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Numeri ergo quæſiti ſunt 24. 72. in proportionem tripla. Et quadratus minoris 576. ſexcuplam proportionem habet ad 96. ſummam ex ambobus collectam.

81 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut quadratus minoris ad eorum exceſſum habeat datam proportionem.*

LXXXI.

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus minoris ſexcuplam ad eorum exceſſum. Ponatur minor 1 2e. & maior 3 2e. illius triplus. Exceſſus illorum eſt 2 2e. ad quem quadratus 1 8. minoris habere debet ſexcuplam proportionem. Ita ut æquatio ſit inter 1. 8. & 12 2e. Diuiſiſq. ergo 12. per 1. fiet 1 2e. 12. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri igitur ſunt quæſiti 12. 36. triplam habentes proportionem. Et quadratus minoris, videlicet 144. ad 24. exceſſum eorum ſexcuplus eſt.

82 *Duos numeros in data proportione inuenire, ita ut quadratus maioris ad minorem habeat proportionem datam.*

LXXXII.

HABEANT quæſiti numeri proportionem triplam, & quadratus maioris ad minorem, ſexcuplam. Ponatur minor 1 2e. & maior 3 2e. illius triplus. Quadratus maioris 9 8. ad minorem 1 2e. proportionem habere debet ſexcuplam. Erit ergo æquatio inter 9 8. & 6 2e. Diuiſiſq. 6. per 9. fiet 1 2e. 2. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Numeri ergo quæſiti ſunt 2. 7. proportionem habentes triplam, Et quadratus maioris, nimirum 49. proportionem ſexcuplam habet ad minorem 2 ſine ad 7.

83 *Duos numeros in data proportione inuenire, ut quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, proportionem habeat datam quamcunque.*

LXXXIII.

H A.

HABEANT quæſiti numeri proportionem quadruplam, ac quadratus maioris ad Quotientem, diuiſo maiore per minorem, duplâ. Ponantur numeri quæſiti 1 2e. 4 2e. Diuiſo hoc per illum, fit Quotiens 4. ad quem 16 8. quadratus maioris proportionem debet habere duplam: ita ut æquatio ſit inter 16 8. & 8. Diuiſis 8. per 16. ſit 1 8. $\frac{1}{2}$. & 1 2e. 4 8. minor numerus. Maior ergo erit 4 8. illius quadruplus. Diuiſo maiore per minorem, fit Quotiens 4 16. id eſt, 4. ad quem 8. quadratus maioris proportionem habet duplam.

LXXXIII. 84 *Duos numeros in data proportionem inuenire, ita ut quadratus maioris ad eorum ſummam habeat datam proportionem.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ſexcuplam ad eorum ſummam. Ponatur minor 1 2e. & maior 3 2e. illius triplus. Quadratus maioris 9 8. ſexcuplus eſſe debet ad eorum ſummam 4 2e. Eſt igitur æquatio inter 9 8. & 14 2e. Diuiſiſq. 14. per 9. ſit 1 2e. $\frac{2}{9}$. vel $\frac{1}{3}$. quod numeri Coſſici ſint collaterales. Ac proinde numeri quæſiti triplam habentes proportionem erunt $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. Et quadratus maioris $\frac{1}{9}$. ſexcuplus eſt ad $\frac{2}{3}$. eorum ſummam: hoc eſt, ad $\frac{2}{3}$.

LXXXV. 85 *Duos numeros in data proportionem inuenire, ita ut quadratus maioris ad eorum exceſſum habeat datam proportionem.*

HABEANT numeri quæſiti proportionem triplam, & quadratus maioris ad eorum exceſſum, decuplam. Ponatur minor 1 2e. & maior 3 2e. illius triplus. Exceſſus eorum eſt 2 2e. ad quem quadratus maioris 9 8. decuplus eſſe debet. Eſt igitur æquatio inter 9 8. & 20 2e. Diuiſiſq. 20. per 9. ſit 1 2e. $\frac{2}{9}$. propterea quod numeri Coſſici collaterales ſunt. Numeri ergo quæſiti ſunt $\frac{1}{9}$. $\frac{2}{9}$. in proportionem tripla. Exceſſus eorum eſt $\frac{2}{9}$. ad quem decuplus eſt quadratus maioris $\frac{4}{81}$. ſive $\frac{2}{9}$.

LXXXVI. 86 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, ita ut omnium trium duo quicumque ſimul additi, & in reliquum multiplicati, tres numeros conſtituant in exceſſu equali, hoc eſt, Arithmetice proportionales.*

DATI duo numeri ſint 3. & 5. ponatur, tertius inuentus 1 2e. Hic cum 3. facit 1 2e + 3. quæ ſumma ducta in reliquum 5. facit 5 2e + 15. unum numerum. Deinde 1 2e. cum 5. facit 1 2e + 5. quæ ſumma

summas ducta in reliquum 3 facit 3 2e + 15. alterum numerum. Denique ex 3. & 1. fit numerus 8. ubi ductus in tertium 1 2e. facit 8 2e. tertium numerum. Opus est etiam, hos tres numeros 3 2e + 15. 3 2e + 15. & 8 2e. esse Arithmetice proportionales. quod tribus modis fieri potest. Aut enim maximus est 3 2e + 15. & medius 3 2e + 15. & minimus 8 2e. Aut maximus erit 3 2e + 15. medius 8 2e. & minimus 3 2e + 15. Aut denique maximus erit 8 2e. medius 3 2e + 15. & minimus 3 2e + 15. neque enim maximus esse potest 3 2e + 15. cum minor sit, quam 3 2e + 15.

SINT primum 5 2e + 15. 3 2e + 15. 8 2e. Arithmetice proportionales. Igitur (vt lib. 5. Eucl. in 4. proprietate trium numerorum Arithmetice proportionalium diximus) summa extremorum 5 2e + 15. aequalis erit duplo medij, hoc est, numero 6 2e + 30. Ablatisq. 6 2e utrinque, æquatio erit inter 7 2e + 15. & 30. Ablatisq. rursum 15 utrinque, inter 7 2e, & 15. Diuisis ergo 15. per 7. fiet 1 2e. 1/7. numerus quæsius. Vel si dicti tres numeri sunt Arithmetice proportionales, habebunt eundem excessum. Sed 5 2e + 15. excedit 3 2e + 15. numero 2 2e. Et 3 2e + 15. excedit 8 2e numero 15 2e. vt ex regula subtractionis patet. Est ergo æqualitas inter 2 2e & 15 — 3 2e. Additisq. 3 2e utrinque, inter 7 2e & 15. fietq. rursum 1 2e. 1/7. Iam 1 2e. cum 3 faciunt 3 1/7. hoc est, 1 2e. qui numerus ductus in reliquum 3 facit 3 1/7. primum numerum. Deinde ex 1 2e. & 3 fit summa 4 1/7. hoc est, 1 2e. quæ ducta in 3. reliquum numerum facit 1 2e. numerum medium. Denique ex 3 & 3 fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit 24. tertium numerum. Habentq. hi tres numeri 3 1/7. 1 2e. 8. eundem excessum 1 2e. siue 3 1/7. boud vtriusq. : vtriusq. totum + 3e + 1 2e. 8

SINT deinde 5 2e + 15. 8 2e. 3 2e + 15. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum 5 2e + 15. aequalis erit duplo medij, numero videlicet 16 2e. Ablatisq. 8 2e utrinque, æquatio erit inter 30. & 8 2e. Diuisisq. 30 per 8. fiet 1 2e. 3/8. hoc est, 1 2e. Vel dicti tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 5 2e + 15. & 8 2e. excessus 15 — 3 2e. At inter 8 2e. & 3 2e + 15. excessus est 5 2e — 15. Est ergo æquatio inter 15 — 3 2e. & 5 2e — 15. Additisq. 15 utrinque, inter 30 — 3 2e. & 5 2e. Additisq. rursum 3 2e utrinque, inter 30 & 8 2e. fietq. rursum 1 2e. 3/8. siue 1 2e. Iam, ex 1 2e. & 3 fit summa 4 3/8. siue 4 3/8. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit 13 1/8. primum numerum. Deinde ex 1 2e. & 3 fit summa 4 3/8. siue 4 3/8. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit 13 1/8. numerum tertium. Denique ex 3 & 3 fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 3 facit 24. medium numerum. Habentq. hi tres numeri, 13 1/8. 13 1/8. 8. eundem excessum 1 2e. siue 3 1/8.

POSTERMO sint 8 2e. 5 2e + 15. 3 2e + 15. Arithmetice proportionales. Igitur summa extremorum 8 2e + 15. aequalis erit duplo medij, hoc est, numero 10 2e + 30. Ablatisq. 10 2e utrinque, æquatio erit inter 1 2e + 15. & 30. Ablatisq. rursum 15 utrinque, inter 1 2e. & 15. fietq. 1 2e. 15. numerus quæsius. Vel dicti

tres

tres numeri habebunt eundem excessum. Est autem inter 8 & 20. & 12 & 15. excessus 3 & 20 — 15. At inter 5 & 20 + 15. & 3 & 20 + 15. excessus est 15. Est ergo æqualitas inter 3 & 20 — 15. & 2 & 20. Additisq; 15. utrinque. inter 3 & 20. & 2 & 20 + 15. Ablatisq; 2 & 20. utrinque. inter 1 & 20. & 15. fietq; rursus 1 & 20. 15. numerus quæsitus. Jam ex 15. & 3. fit summa 18. quæ ducta in reliquum numerum 5. facit 90. numerum medium. Deinde ex 15. & 5. fit summa 20. quæ ducta in reliquum numerum 3. facit 60. tertium numerum. Denique ex 3. & 5. fit summa 8. quæ ducta in reliquum numerum 15. facit 120. primum numerum. Habentq; tres hi numeri 120. 90. 60. eundem excessum 30.

HOC quæsitum soluemus etiam in ænigmate 131. ubi dabuntur duo numeri, ita ut tres numeri producti non possint tribus modis esse proportionales Arithmetice, ut hic, sed duobus tantum modis.

LXXXVII. 87 *Duos numeros in data proportionē inuenire, ita ut excessus quadratorum, qui ex ipsis fiant, ad eorum summam habeat proportionem datam.*

HABEANT quæsitæ numeri proportionem triplam, & excessus quadratorum ad summam eorum octuplam. Ponatur minor 1 & 20. & maior 3 & 20 illius triplus. Summa eorum est 4 & 20. & excessus quadratorum 18. 9 & 20. est 8 & 20. qui ad 4 & 20. proportionem habere debet octuplam. Erit ergo æquatio inter 8 & 20. & 32 & 20. Diuisisq; 32. per 8. fiet 1 & 20. 4. minor numerus: propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Maior autem erit 12. Excessus quadratorum 16. 144. est 128. qui ad 16. amborum summam proportionem habet octuplam.

LXXXVIII. 88 *Duos numeros in dato excessu inuenire, ita ut excessus quadratorum, qui ex ipsis fiant, superet datum excessum quousque numero dato: dummodo quadratus excessus numerorum quæsitum dati minor sit summa ex eodem excessu, & postulato numero collecta.*

SIT excessus numerorum quæsitum 7. Excessus autem quadratorum, qui ex quæsitis numeris fiunt, maior sit, quam 7. postulato numero 100. Ponatur minor numerus 1 & 20. maior 1 & 20. ut nimirum illum superet numero 7. Quadrati horum numerorum 1 & 20. & 1 & 20 + 14 & 20 + 49. se mutuo excedant numero 14 & 20 + 49. qui superare debet 7. numero 100. hoc est, æqualitas esse debet inter 14 & 20 + 49. & 107. Ablatisq; 49 utrinque, inter 1 & 20. & 58. Diuisis ergo 58 per 14. fiet 1 & 20. 4. minor numerus: maior ergo erit 11 & 20. ut minorem superet numero 7. Quadrati numerorum

$\frac{107}{7} = 15 \frac{2}{7}$, se mutuo excedunt numero $\frac{107}{7}$, qui datum numero-
rum excessum 7. superat numero 100. hoc est, æqualis est numero
107. cum 107. faciant $\frac{107}{7}$.

HÆC questio solui potuit, quia quadratus dati excessus 7. ni-
mirum numerus 49. minor est summa 107. ex dato excessu 7. & nu-
mero postulato 100. collecta. Quod si proponatur inueniendi duo
numeri in dato excessu 7. ita vt excessus quadratorum ipsorum ma-
ior sit, quam 7. numero 10. questio erit impossibilis. quod optime
ex ipsa operatione discēs. Posito enim minore numero 1. & ma-
iore 1. & 7. vt se mutuo superent septenario. Quadrati horum
numeriorum rursus se excedunt numero 14. & 49. qui superare
debet 7. numero 10. quod est absurdum, cum illum superet nume-
ro 14. & 49. qui maior est, quam 7. Causa est, quia quadratus 49.
excessus 7. minor non est summa 17.

89 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita vt excessus I XXXIX.
quadratorum, qui ex ipsis fiant, ad excessum datum
datam habeat proportionem, & insuper contineat
datum numerum, dummodo quadratus dati excessus
minor sit summa, qua ex numero, qui ex ductu de-
nominatoris data proportionis in ipsum excessum fit,
& ex dato numero colligitur.

DATUS excessus fit 4. & excessus quadratorum, qui ex quævis
numeris fiant, ad 4. habeat proportionem quincuplam, & insuper
contineat 20. vnitates. Ponatur minor numerus 1. & maior 1. &
4. vt illum quaternario superet. Quadratorum 1. & 16. & 8. & 8. &
16. est 8. & 16. qui quinquies continere debet datum exce-
ssum 4. & præterea 20. Quintuplum autem excessus 4. cum 20. fa-
cit 40. cui numero æqualis esse debet excessus quadratorum 8. &
16. Ablatis igitur 16. vtrinque, erit æqualitas inter 24. & 8. Diuisi-
siq. 24. per 8. fiet 3. minor numerus. maior ergo erit 7.
Eorum excessus 4. Quadratorum 9. & 49. excessus 40. continet exce-
ssum 4. quinquies, ac præterea 20. vnitates.

HÆC etiam questio solui potuit, quia quadratus 16. dati ex-
cessus 4. minor est summa ex quintuplo excessus 4. & numero 20.
collecta. Quod si excessus detur 4. & proportio tripla, & insuper
3. vnitates, questio fiet impossibilis. quod facile ex ipsa operatione
cognoscetur. Posito enim minore numero 1. & maiore 1. & 4.
erit excessus quadratorum 8. & 16. qui æqualis debet esse summe
ex triplo excessus 4. & numero 3. collecta, hoc est, numero 15.
quod est absurdum. Causa est, quia quadratus 16. excessus 4. non
est minor numero 15.

XC. 90. *Datum numerum quadratum in duos numeros quadratos distribuere.*

HOC ænigma sine Algebra solvimus lib. 3. nostræ Geometrix practicæ, propof. 9. vbi propofitum quadratum numerum non in duos solum, sed in quotuis numeros quadratos partiti sumus. Per Algebram autem idem hoc modo expediemus. Sit quadratus numerus 16. diuidendus in duos quadratos. Ponatur primus quadratus 1 8. ac proinde secundus 16 — 1 8. Finge huius latus esse quatuor-
 que radices, minus tot unitatibus, quot sunt in latere dati quadrati, nimirum 2 2e — 4. Huius quadratum 4 8 + 16 — 16 2e. æquale debet esse quadrato 16 — 1 8. Addito 1 8. vtrinque, erit æquatio inter 5 8 + 16 — 16 2e. & 16. Additisq. rursum 16 2e. inter 5 8 + 16. & 16 2e + 16. Ablatisq. 16 vtrinque, inter 5 8 & 16 2e. Diuisis igitur 16 per 5, fiet 3 2e. $\frac{1}{5}$. quia numeri Cofici collaterales sunt. Huius radices quadratus $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$. erit primus, quem posuimus 1 8. Secundus autem 16 — 1 8. erit $\frac{16}{5}$. cuius radix $\frac{4}{5}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{25}{5}$. nimirum 16.

Aliter. Ponatur latus primi quadrati esse 1 2e. Latus vero secundi quadrati quotuis radices, minus latere dati quadrati, nimirum 5 2e — 4. Quadrati numeri horum laterum 1 8. & 25 8 + 16 — 40 2e. simul æquales debent esse dato quadrato 16. Additis 40 2e vtrinque, erit æquatio inter 26 8 + 16. & 40 2e + 16. Ablatisq. 16. vtrinque, inter 26 8. & 40 2e. Diuisis ergo 40. per 26. fiet 1 2e $\frac{20}{13}$. (quod numeri Cofici sunt collaterales) cuius quadratum $\frac{400}{169}$. erit primus numerus quadratus. Secundus autem erit $\frac{216}{169}$. qui relinquitur, si ille ex 16. detrahatur. Eius latus est $\frac{6}{13}$. & ambo quadrati conficiunt $\frac{400}{169}$. hoc est, 16.

SCHOLIUM.

QUOD si minorem numerum quadratum iterum partiemur in duos quadratos, diuisus erit datus quadratus in tres. Et si minimus rursus secetur in duos, solus erit datus in quatuor. Atque ita diuisio in infinitum. Vides ergo propofitum quadratum diuidi posse per Algebram in duos quadratos varijs modis: ita vt semper fiant diuersi duo quadrati.

HOC problema solui etiam potest sine Algebra, hoc modo. Propofito quadrato, ducatur eius latus in quemcunque numerum. & duplum producti numeri diuidatur per eiusdem illius numeri quadratum auctum unitate. Quotientis enim quadratus erit unus quadratus qualisvis, quo ablato ex propofito quadrato, relinquetur aliter quadratus.

Vt si propofitus sit quadratus 36. ducatur eius latus 6. per 3. vt fiant 18. Et huius duplum 36. diuidatur per quadratum eiusdem numeri 3. auctum unitate,

unitate, nimirum per 10. Quotientis enim $\frac{36}{10}$, siue $\frac{18}{5}$, quadratus $\frac{324}{25}$, id est, 12 $\frac{24}{25}$, erit unus quadratus, quo ablato ex 36, erit alter 23 $\frac{12}{25}$, cuius latus $\frac{24}{5}$, siue 4 $\frac{4}{5}$. Et ambo quadrati 12 $\frac{24}{25}$, & 23 $\frac{12}{25}$, faciunt 36.

Nota tamen, latus propositi quadrati non esse ducendum per 1, quia duo quadrati essent propositi quadratus, & 0, quod est inaptum. Ut si 6, latus propositi quadrati 36, duceretur in 1, ut fiant 6. Et huius producti numeri duplum 12, divideretur per 2, nimirum per quadratum unitatis aulicam unitate, fieret Quotiens 6, cuius quadratum est 36, numerus propositus, &c.

91 Datum numerum ex duobus quadratis compositum in alios duos quadratos diuidere.

XCI.

SIT numerus 34, siue quadratus, siue non quadratus, compositus ex duobus quadratis 9, & 25, diuidendus in alios duos quadratos. Sint latera quadratorum 3, & 5, ponaturque latus primi quadrati quæsitum $12 + 3$, nimirum una radix, plus latere primi quadrati dati. Latus vero secundi quadrati quæsitum, quotcumque radices minus latere secundi quadrati dati, nimirum $22 - 5$. Quadrati horum laterum $18 + 62 + 9$, & $48 - 202 + 25$, faciunt summam $88 + 34 - 142$, æqualem dato numero 34. Additis ergo 142 utrinque, erit æquatio inter $88 + 34$, & $142 + 34$. Ablatisque 34 utrinque, inter 88 , & 142 . Diuisis igitur 14 , per 5 , fiet 12 , $\frac{2}{5}$, propterea quod numeri Cossici sunt, collaterales. Ergo latus primi quadrati quæsitum, quod posuimus $12 + 3$, erit $\frac{24}{5}$. Secundi vero quadrati latus, quod posuimus $22 - 5$, erit $\frac{36}{5}$, hoc est, $7\frac{1}{5}$. Quadrati horum laterum inuentorum $\frac{576}{25}$, $\frac{529}{25}$, faciunt $\frac{1105}{25}$, hoc est, numerum 34, datum.

92 Duos numeros quadratos in dato excessu inuenire.

XCII.

DETVR. excessus 70. Ponatur latus vnus quadrati 12 , alterius vero latus 12 , plus quolibet unitatibus, dummodo quadratus numerus ex ipsis descriptus minor sit dato excessu, nimirum $12 + 8$. Quadrati horum laterum 18 , & $18 + 162 + 64$, excessum habent $162 + 64$, qui æqualis esse debet dato excessui 70. Ablatis utrobique 64, erit æquatio inter 162 , & 6. Diuisis ergo 6, per 16, fiet $12\frac{1}{2}$, latus vnus quadrati. Latus alterius positum $12 + 8$, erit $8\frac{1}{2}$, siue $\frac{17}{2}$. Quadrati horum laterum inuentorum sunt $\frac{225}{4}$, & $\frac{289}{4}$, quorum excessus $\frac{64}{4}$, hoc est, 70.

MANIFESTVM autem est, alios atque alios duos numeros quadratos posse reperiri in dato eodem excessu, prout numerus absolutus in secundi quadrati radice alius atque alius assumetur. Ut dato eodem excessu 70, si latus primi quadrati ponatur 12 , & secundi $12 + 1$, erunt quadrati 18 , & $18 + 22 + 1$, & eorum excessus $22 + 1$, qui æqualis debet esse dato excessui 70. Ablata 1.

utrinque, erit æqualitas inter $12\frac{1}{2}$. & 69 . Diuisis igitur 69 . per 1 . fiet $12\frac{1}{2}$. $34\frac{1}{2}$. siue $\frac{69}{2}$. cuius quadratus est $\frac{4761}{4}$. siue $1190\frac{1}{4}$. Latus autem secundi quadrati, quod posuimus $12\frac{1}{2} + 1$. erit $35\frac{1}{2}$. siue $\frac{71}{2}$. cuius quadratus est $\frac{5041}{4}$. siue $1260\frac{1}{4}$. qui priorem $1190\frac{1}{4}$. superat numero 70 .

Si excessus detur 100 . ponaturq. latus primi quadrati $12\frac{1}{2}$. & latus secundi $12\frac{1}{2} + 10$. ubi quadratus numeri 10 . non est minor excessu dato 100 . sed æqualis, erit questio impossibilis. Nam quadrati $12\frac{1}{2}$. & $12\frac{1}{2} + 10$ $22\frac{1}{2} + 100$. excessum habent $202\frac{1}{2} + 100$. qui equalis debet esse dato excessui 100 . quod absurdum est, cum sit maior.

XCIII. 93 Duos numeros inuenire, quorum quadrati se excedant dato numero.

HOC ænigma soluitur, ut præcedens. Positis enim duobus lateribus, ut in præcedenti, inueniuntur duo latera, quorum quadrati datum excessum habebunt.

XCIII. 94 Duos numeros quadratos inuenire, quorum summa quadratus sit numerus.

ASSUMATVR quilibet quadratus pro vno quæstorum, nimirum 16 . Et per problema 92. inueniantur duo numeri quadrati, quorum excessus 16 . quadratus assumptus. Nam minor quadratus inuentus cum assumpto 16 . faciet alterum quadratum inuentum maiorem. Ponatur ergo ut in dicto problemate factum est, latus vnius quadrati $12\frac{1}{2}$. & alterius $12\frac{1}{2} + 3$. (ut nimirum quadratus numeri 3 . minor sit dato excessu 16 .) Quadrati horum laterum $12\frac{1}{2}$. & $12\frac{1}{2} + 3$ $62\frac{1}{4}$ & 9 . excessum habent $62\frac{1}{4} + 9$. qui æqualis esse debet dato excessui 16 . Ablatis 9 . utrobique, erit æquatio inter $62\frac{1}{4}$. & 7 . Diuisis ergo 7 . per 6 . fiet $10\frac{2}{3}$. latus minoris quadrati quæsitum. Latus maioris, quod posuimus $12\frac{1}{2} + 3$. erit $15\frac{1}{2}$. id est, $\frac{31}{2}$. Quadrati laterum $\frac{10}{3}$. & $\frac{31}{2}$. sunt $\frac{100}{9}$. & $\frac{961}{4}$. quorum excessus $\frac{861}{36}$. hoc est, 16 . Duo ergo quadrati quæsitum sunt 16 . siue $\frac{576}{36}$. & $\frac{961}{4}$. quorum summa $\frac{1009}{12}$. quadratus numerus est, latus habens $\frac{31}{2}$.

Abiectis denominatoribus, erunt inuenti duo quadrati integri 176 . & 49 . facientes quadratum 625 . cuius latus 25 .

XCIV. 95 Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus quadratus sit.

HOC ænigma non aliter soluetur, ac problema 92. Si namq. inueniantur per illud duo quadrati, quorum excessus datus sit numerus quadratus, factum erit, quod hic iubetur.

96 Tres numeros quadratos inuenire, quorum summa sit numerus quadratus.

XCVI.

PER problema 94. inueniuntur primum duo quadrati, quorum summa sit quadratus numerus, sintq. V.g. hi 576. 49. facientes quadratum 625. Deinde per problema 95. inueniantur alij duo quadrati, quorum excessus sit quadratus effectus 625. Nam minor inuentus cum quadrato 625. hoc est, cum duobus quadratis 576. 49. faciet maiorem quadratum. V.g. Dato excessu quadrato 625. inueniuntur duo quadrati in illo excessu, hoc modo i. Ponatur latus vnus 1 26 & alterius 1 26 + 10. (vt nimirum quadratus 10. vnitaru minor sit dato excessu 625.) Quadrati horum laterum 1 8. & 1 8 + 20 26 + 100. excessum habent 10 26 + 100. qui aequalis esse debet dato excessu 625. Ablatis ergo 100. vtrobiq. erit æquatio inter 20 26. & 525. Diuisiq. 525. per 20. fiet 1 26 $\frac{1}{2}$. Latus minoris quadrati. Maioris vero latus, quod positum fuit 1 26 + 10. erit 36 $\frac{1}{2}$. Horum laterum quadrati $\frac{11025}{4}$, $\frac{11025}{4}$, excessum habent $\frac{10225}{4}$. hoc est, 625. quadratum. Hic igitur excessus, nimirum $\frac{10225}{4}$, ex duobus quadratis 576. 49. conficitur cum minore quadrato $\frac{11025}{4}$. componet maiorem quadratum $\frac{21025}{4}$. Arque ita tres quadrati quæsitæ sunt 576. 49. $\frac{21025}{4}$. siue $\frac{21025}{4}$, $\frac{784}{4}$, $\frac{11025}{4}$. qui simul efficiunt quadratum $\frac{21025}{4}$. cuius latus est $\frac{145}{2}$.
Si abijciantur denominatores, erunt inuenti tres quadrati integri 9216. 784. 11025. quorum summa quadratus numerus est 21025. cuius latus 145.

S C H O L I V M.

ATQVE eadem arte inueniuntur 4. quadrati efficietes numerum quadratum; si prius per hoc problema inueniantur tres. Deinde per problema 95. duo habentes excessum, illum quadratum ex tribus quadratis confectum. Pari ratione inueniuntur 5. 6. 7. & quotquot quis voluerit, si videlicet prius inueniantur 4. vel 5. vel 6. &c.

97 Duos numeros inuenire, quorum tam summa, quam excessus sit numerus quadratus.

XCVII.

PONATUR latus quadrati ex duobus numeris quæsitis confici, vna radix, plus quotcunque vnitaribus, nimirum 1 26 + 4. cuius quadratum 1 8 + 8 26 + 16. æquale debet esse duobus numeris quæsitis. Si ergo vnus numerorum ponatur $\frac{1}{2}$ 8. erit alter $\frac{1}{2}$ 8 + 8 26 + 16. qui duo simul faciunt dictum quadratum 1 8 + 8 26 + 16. Reliquum est, vt $\frac{1}{2}$ 8. subtractus ex $\frac{1}{2}$ 8 + 8 26 + 16. relinquat etiam

etiam numerum quadratum. Ergo reliquus numerus 8×16 . æqualis erit alicui quadrato, qui V.g. fit 16. maior, quam 16. numerus absolutus. Ablatis igitur 16. utrobique, erit æqualitas inter 8×8 . & 20. Diuisisq. 20. per 8. fit 1 $\frac{5}{4}$. siue $\frac{5}{4}$. cuius quadratus est $\frac{25}{16}$. Cum ergo vnus numerorum, qui quæritur, positus sit $\frac{1}{4}$ 8. erit is $\frac{25}{16}$. primus numerus quæsitus. Secundus numerus, qui positus fuit $\frac{1}{4}$ 8 + 8×16 . erit $\frac{25}{16}$. plus $\frac{20}{16}$. siue 20. & insuper 16. hoc est $\frac{36}{16}$. & 36. siue $\frac{9}{4}$. qui duo numeri $\frac{25}{16}$. & $\frac{9}{4}$. faciunt $\frac{34}{16}$. Ad hunc enim si adijciatur primus $\frac{25}{16}$. fit summa $\frac{59}{16}$. id est, $\frac{3 \frac{11}{16}}$. numerus quadratus, cuius latus $\frac{1}{4}$. Et si ab eodem secundo $\frac{36}{16}$. dematur primus $\frac{25}{16}$. remanet numerus $\frac{11}{16}$. siue $\frac{1 \frac{1}{4}}{16}$. quadratus etiam, cuius latus $\frac{1}{4}$. siue 6.

XCVIII. 98 *Quobus numeris datis, inuenire alium, qui utriusque seorsum additus faciat quadratum.*

SINT dati duo numeri 4. & 7. Ponatur, qui quæritur, 1. qui cum datis faciat duos $1 \times 1 + 4$. & $1 \times 1 + 7$. qui quadrati debent esse. Detrahatur vnus ex altero, vt habeatur eorum excessus 3. quæranturq. duo numeri, qui inter se multiplicati producant hunc eundem excessum 3. Ita tamen, vt quadratum semissis excessus ipsorum maior sit minore numero dato 4. atque adeo æqualis esse possit minori numero composito $1 \times 1 + 4$. & quadratum semissis summe eorundem maior sit maiore numero dato 7. atque adeo æqualis esse possit maiori numero composito $1 \times 1 + 7$. quod cur fieri debeat, operatio docebit. Hi numeri erunt $\frac{1}{2}$. & 6. Nam inter se multiplicati producant 3. Et excessus eorum est $5 \frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{11}{2}$. cuius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum $\frac{121}{16}$. hoc est, $7 \frac{9}{16}$. maior est, quam 4. Summa vero eorundem est $6 \frac{1}{2}$. hoc est, $\frac{13}{2}$. cuius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. hoc est, $10 \frac{9}{16}$. maior est, quam 7. Inuenti autem sunt hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 6. sumpta ab libitum fractione $\frac{1}{2}$. cuius numerator vnitas vnus numerorum. Nam si eius denominator 2. ducatur in numerum 3. qui producti debet, fiet alter numerus 6. Quod si dati numeri forent 10. & 12. habentes eundem excessum 3. non satisfacerent numeri $\frac{1}{2}$. & 6. Quare sumenda esset alia fractio, nimirum $\frac{1}{3}$. pro vno numero. Nam ex 10. denominatore in 3. fiet alter numerus 30. Et ex $\frac{1}{3}$. in 30. fit numerus 3. Et excessus eorum est 29 $\frac{1}{3}$. hoc est, $\frac{88}{3}$. cuius semissis $\frac{44}{3}$. quadratum $\frac{1936}{9}$. siue 215 $\frac{1}{9}$. maior est, quam 10. Item summa eorundem numerorum est 30 $\frac{1}{3}$. hoc est, $\frac{101}{3}$. cuius semissis $\frac{101}{6}$. quadratum $\frac{10201}{36}$. siue 283 $\frac{1}{36}$. maior est, quam 12. Atque ita, si hi numeri $\frac{1}{3}$. & 30. non satisfacerent, accipienda esset alia fractio maioris denominationis, &c. Ac toties iteranda operatio, donec duo numeri reperiantur proposito satisfaciētes.

NOS rem exequamur cum numeris $\frac{1}{2}$. & 6. in proposito exemplo. quorum excessus $5 \frac{1}{2}$. vel $\frac{11}{2}$. & huius semissis $\frac{11}{4}$. quadratum

$\frac{22}{1}$. siue $7\frac{1}{2}$. æquale erit minori numero composito $12 + 4$. Ablatis ergo 4. vtroque, erit æquatio inter $3\frac{1}{2}$. & 12 . atque idcirco 12 erit $3\frac{1}{2}$. quæ radix etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 6. est $6\frac{1}{2}$. siue $\frac{13}{2}$. & huius semissis $\frac{13}{4}$. quadratum $\frac{169}{16}$. siue $10\frac{5}{8}$. æquale erit maiori numero composito $12 + 7$. Ablatis ergo 7. vtroque, fiet æquatio inter $3\frac{1}{2}$. & 12 . vt prius. Numerus igitur quæsitus est $3\frac{1}{2}$. Hic enim additus ad 4. & 7. faciet quadratos $7\frac{1}{4}$. & $10\frac{1}{4}$. siue $\frac{29}{4}$. & $\frac{41}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

Q V O D si sumatur fractio $\frac{1}{2}$. & denominator 3. ducatur in excessum 3. producet numerus 9. atque hi duo numeri $\frac{1}{2}$. & 9. multiplicati inter se facient 3. eorum excessus est $8\frac{1}{2}$. siue $\frac{17}{2}$. & huius semissis $\frac{17}{4}$. quadratum $\frac{289}{16}$. siue $18\frac{1}{4}$. æquale erit minori numero composito $12 + 4$. Ablatis ergo 4. vtroque, æquatio erit inter 12 . & $14\frac{1}{2}$. ideoque 12 erit $14\frac{1}{2}$. quæ etiam inuenietur hoc modo. Summa numerorum $\frac{1}{2}$. & 2. est $2\frac{1}{2}$. siue $\frac{5}{2}$. Huius semissis $\frac{5}{4}$. quadratum $\frac{25}{16}$. siue $1\frac{5}{8}$. æquale erit maiori numero composito $12 + 7$. Ablatis igitur 7. vtriusque, erit æquatio inter $14\frac{1}{2}$. & 12 . vt prius. Numerus igitur quæsitus est $14\frac{1}{2}$. Hic enim additus ad 4. & 7. facit quadratos $18\frac{1}{4}$. & $21\frac{1}{4}$. siue $\frac{73}{4}$. & $\frac{85}{4}$. quorum latera $\frac{1}{2}$. & $\frac{3}{2}$.

E X ipsa operatione intelligis, cur eligi debeant tales duo numeri producentes excessum datorum numerorum, quales diximus. Nam nisi quadratum semissis eorum excessus maius esset minore numero 4. non fieret æquatio inter ipsum, & minorem numerum compositum, vt patet, &c. Item constat, varios numeros inueniri posse, quorum quilibet additus ad datos duos numeros faciat duos quadratos, prout videlicet varij duo numeri accipiuntur, qui dicti excessum 3. producant. Ita vides, in dato exemplo inuentos esse duos numeros $3\frac{1}{2}$. & $14\frac{1}{2}$.

S E D experiamur idem in datis numeris 30. & 23. Addita 12 . vtriusque, fient quadrati $12 + 30$. & $12 + 23$. fietque æquatio (electis duobus numeris $\frac{1}{2}$. & 30. qui excessum 3. producant) inter $223\frac{1}{2}$. & $12 + 20$. Item inter $226\frac{3}{2}$. & $12 + 23$. Inueniunturque per vtramque æquationem 12 . esse $203\frac{1}{2}$. qui numerus additus ad 30. & 23. facit quadratos $223\frac{1}{2}$. & $226\frac{3}{2}$. siue $\frac{893}{2}$. & $\frac{909}{2}$. quorum latera $\frac{29}{2}$. & $\frac{31}{2}$.

Aliter. Sint rursus dati duo numeri 4. & 7. Ponatur numerus quæsitus $18 - 4$. Huic enim si addantur 4. fit 18 . quadratus. Et si eidem numero $18 - 4$. addantur 7. fit alius quadratus $18 + 3$. cuius latus statuatur 12 . minus quolibet unitatibus, quæ superent 4. nimirum $12 - 5$. cuius quadratum $18 - 10$ & 25. æquale esse debet quadrato $18 + 3$. Additis 10 & 25 vtroque, erit æqualitas inter $18 + 25$. & $18 + 10$ & 25. Et si auferatur 18 . vtrobiusque, inter 25. & 10 & 25. Ablatisque 3. vtrobiusque, inter 22. & 10 & 25. Diuisis igitur 22. per 10. fiet $22\frac{2}{5}$. siue $\frac{44}{5}$. a cuius quadrato $\frac{1936}{25}$. si auferantur 4. (quia numerus quæsitus fuit positus $18 - 4$.) hoc est $\frac{16}{25}$. reliquus erit numerus quæsitus $\frac{44}{5}$. Hic enim addi-

additus ad 4. & 7. facit quadratos 4 $\frac{2}{3}$. & 7 $\frac{2}{3}$. siue $\frac{10}{3}$. & $\frac{14}{3}$. quorum latera $\frac{2}{3}$. & $\frac{4}{3}$.

SI numeri dati sint 20. & 23. ponendus erit numerus quæsitus 18 — 20. ut additus ad 20. faciat quadratum 18. Et si eidem numero 18 — 10. addantur 23. fiet alius quadratus 18 + 3. cuius latus statuarur 12. minus quolibet unitatibus, quæ superent 20. minimum 12 — 21. cuius quadratum 18 — 42. 20 + 44. æquale debet esse quadrato 18 + 3. Additis 42. 20 utrobique, erit æqualitas inter 18 + 44. & 18 + 42. 20 + 3. & si dematur 18. utrobique, inter 44. & 42. 20 + 3. Ablatisq. 3. utrobique, inter 42. & 42. 20. Diuisis ergo 42. per 42. fiet 12. 10 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{21}{2}$. a cuius quadrato $\frac{441}{4}$. si auferatur 20. (quia numerus quæsitus positus fuit 18 — 20.) hoc est, $\frac{21}{2}$. reliquus fiet numerus quæsitus $\frac{441}{4}$. siue 88 $\frac{1}{4}$. qui additus ad 20. & 23. faciet quadratos 108 $\frac{1}{4}$. & 121 $\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{433}{4}$. & $\frac{485}{4}$. quorum latera $\frac{21}{2}$. & $\frac{23}{2}$.

XCIX.

99 Duobus numeris datis, alium inuenire, qui ab utroque seorsum subtractus, relinquat quadratum.

SINT dati duo numeri 9. & 21. Ponatur numerus quæsitus 9 — 18. Hic namq. ex 9. subtractus relinquit quadratum 9. ut in hac formula

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$
 apparet. Idem autem numerus 9 — 18. detractus ex 21. relinquit 12 + 18. ut in hac altera formula

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 9 \\ \hline 12 \end{array}$$
 liquet, qui numerus debet etiam esse quadratus. Statuatur eius latus 12. minus quolibet unitatibus, ita tamen, ut earum

quadratus superet 21. minimum 12 — 4. cuius quadratum 12 — 8. 20 + 16. æquale debet esse quadrato 12 + 18. Additis 8. 20 utrinque, erit æquatio inter 12 + 16. & 12 + 8. 20 + 12. Et si utrobique auferatur 12. inter 16. & 8. 20 + 12. Ablatisq. 12. utrinque, inter 4. & 8. 20. Diuisis ergo 4. per 8. fiet 12. $\frac{1}{2}$. siue $\frac{5}{2}$. cuius quadratum $\frac{25}{4}$. si ex 9. auferatur, (propterea quod numerus positus fuit 9 — 18.) hoc est ex $\frac{25}{4}$. reliquus erit numerus quæsitus 8 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{33}{4}$. qui videlicet detractus ex 9. & 21. relinquit quadratos $\frac{9}{4}$. & 12 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{49}{4}$. & $\frac{481}{4}$. quorum latera $\frac{3}{2}$. & $\frac{23}{2}$.

C.

100 Datis duobus numeris, alium inuenire, a quo utroque datorum deductus, quadratum relinquat.

SINT dati duo numeri 20. & 38. Ponatur numerus quæsitus 18 + 10. ut deductis 20. remaneat quadratus 18. Reliquum est, ut 18 — 10. (qui numerus relinquitur 3. subtractis 20. ex 18 + 10.

ut in

vt in formula appofita manifestum eft,) fit etiam quadratus. Statuatur latus numeri $18 - 10$. vna radix, minus quocunque vnitatebus, nimirum $18 - 2$. Huius quadratum $18 - 4$ $22 + 4$. æquale debet esse quadrato $18 - 10$. Additis 4 22 . vtrunque, erit æquatio inter $18 + 4$. & $18 - 10 + 4$ 22 . Et rursus additis 10 . vtrunque, inter $18 + 14$. & $18 + 4$ 22 . Et si auferatur 18 . vtrobique, inter 14 . & 4 22 . Diuisis ergo 14 . per 4 . fiet 1 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{9}{4}$. si addantur 20 . (quia numerus positus fuit $18 + 20$) hoc est, $\frac{16}{4}$. fiet numerus quæritus $\frac{25}{4}$. hoc est, $3\frac{1}{4}$. a quo si demantur dati numeri 20 . & 30 . reliqui erunt quadrati $1\frac{1}{4}$. & $1\frac{1}{4}$. siue $\frac{5}{4}$. & $\frac{5}{4}$. quorum latera $\frac{5}{2}$. & $\frac{5}{2}$.

$$\begin{array}{r} 18 + 20 \\ + 30 \\ \hline 18 - 10 \end{array}$$

101 Datum numerum in duos parti, & insuper quadratum numerum inuenire, qui cum utraque parte seorsum quadratum efficiat.

CI.

SIT numerus datus 40 . Cape duos numeros, quorum quadrati simul minorem numerum efficiant, quam 40 . nimirum 2 . & 4 . Vnicuique addita 1 22 . fiunt numeri 1 $22 + 2$. & 1 $22 + 4$. quorum quadrata sunt 1 $8 + 4$ $22 + 4$. & 1 $8 + 8$ $22 + 16$. Et si ab vtroque dematur 18 . remanebunt 4 $22 + 4$. & 8 $22 + 16$. partes numeri 40 . diuidendi; quippe cum quilibet horum numerorum cum 18 . faciat quadratū. Reliquum ergo est, vt dux istæ partes efficiant 40 . Efficiunt autem 12 $22 + 20$. qui numerus æqualis esse debet numero 40 . Ablatis igitur 20 . vtrobique, erit æquatio inter 12 22 . & 20 . Diuisisq. 20 . per 12 . fiet 1 22 . $\frac{5}{3}$. siue $\frac{2}{3}$. cuius quadratus $\frac{4}{9}$. siue 2 $\frac{2}{3}$. erit is, qui quæritur. Partes autem numeri 40 . videlicet 4 $22 + 4$. & 8 $22 + 16$. erunt 10 $\frac{2}{3}$. & 29 $\frac{1}{3}$. quæ simul efficiunt 40 . Et vterque cum quadrato innento 2 $\frac{2}{3}$. quadratum numerum efficit. Nam 1 $\frac{2}{3}$. cū 10 $\frac{2}{3}$. siue cum 10 $\frac{2}{3}$. facit 13 $\frac{2}{3}$. hoc est, $\frac{16}{3}$. quadratum, cuius latus $\frac{4}{3}$. Et idem quadratus 1 $\frac{2}{3}$. cum 29 $\frac{1}{3}$. siue cum 29 $\frac{1}{3}$. facit quadratum 32 $\frac{2}{3}$. siue $\frac{32}{3}$. cuius latus $\frac{4}{3}$.

102 Datum numerum in duos parti, & insuper numerum quadratum inuenire, a quo utraque pars seorsum subtracta quadratum relinquat.

CII.

SIT idem datus numerus 40 . Latus quadrati quæriti ponatur 1 22 . plus tot vnitatebus, vt earum quadratum minus sit numero 40 . nimirum 1 $22 + 1$. cuius quadratus 1 $8 + 10$ $22 + 25$. a quo deductus numerus 10 $22 + 25$. relinquit quadratum 18 . Vnus ergo numerorum, in quos diuidendus est 40 . sit 10 $22 + 25$. quandoquidem

Ff detra-

detractus ex $1\frac{3}{4} + 10\frac{2}{5} + 25$. relinquit quadratum $1\frac{3}{4}$.

Sumatur deinde alterius cuiusdam quadrati latus $1\frac{2}{5} + 4$. ita vt numerus eius absolutus 4. minor sit numero absoluto 4. prioris lateris. Quadratus huius secundi lateris est $1\frac{3}{4} + 8\frac{2}{5} + 16$. qui detractus a priori quadrato $1\frac{3}{4} + 10\frac{2}{5} + 25$. relinquit $2\frac{2}{5} + 9$. alterum numerorum, in quos diuidentus est 40. Atque ita quadratus, quem quærimus, est $1\frac{3}{4} + 10\frac{2}{5} + 25$. & partes numeri 40. sunt $10\frac{2}{5} + 25$. & $2\frac{2}{5} + 9$. Nam prior ex illo quadrato subductus relinquit quadratum $1\frac{3}{4}$. At posterior ex eodem quadrato sublatus relinquit $1\frac{3}{4} + 8\frac{2}{5} + 16$. quandoquidem hic ex illo quadrato demptus relinquit $2\frac{2}{5} + 9$. quod etiam hæc formula docet,

$$1\frac{3}{4} + 10\frac{2}{5} + 25$$

$$0\frac{3}{4} + 2\frac{2}{5} + 9$$

$$1\frac{3}{4} + 8\frac{2}{5} + 16$$

qui numerus $1\frac{3}{4} + 8\frac{2}{5} + 16$. similiter quadratus est lateris $1\frac{2}{5} + 4$. vt paulò ante patuit. Reliquum est, vt dux hæc partes $10\frac{2}{5} + 25$. & $2\frac{2}{5} + 9$. efficiant

datum numerum 40. Efficiunt autem $12\frac{2}{5} + 34$. qui numerus equalis debet esse numero 40. Ablatis ergo 34. utrobique, erit æquatio inter $12\frac{2}{5}$. & 6. Diuisiq. 6. per $12\frac{2}{5}$. fiet $1\frac{2}{5}$. Cum ergo latus quadrati quæsitum positum sit $1\frac{2}{5} + 4$. erit ipsum latus $5\frac{1}{5}$. siue $11\frac{1}{5}$. & quadratus quæsitus $12\frac{2}{5}$. siue $30\frac{2}{5}$. Partes autem numeri 40. quas posuimus $10\frac{2}{5} + 25$. & $2\frac{2}{5} + 9$. erunt 30. & 10. quæ simul faciunt numerum datum 40. & detractus ex quadrato inuentò $30\frac{2}{5}$. relinquant quadratos numeros $\frac{1}{5}$. & $10\frac{2}{5}$. siue $2\frac{2}{5}$. quorum latera $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{5}$.

CIII.

103 Tres numeros inuenire, ita vt primus cum quolibet alio dato habeat ad summam reliquorum proportionem quamcunque datam: Item secundus cum eodem dato numero ad summam reliquorum habeat quoque datam quamuis proportionem: Tertius denique cum eodem numero dato habeat ad reliquorum summam proportionem quoque datam quamcunque.

110

SIT datus numerus 73. inueniendiq. sint tres numeri, quorum primus cum 73. ad reliquorum summam habeat proportionem duplicam: Secundus cum 73. ad reliquorum summam proportionem triplam: Tertius denique cum 73. ad summam reliquorum proportionem quadruplam. Ponatur summa omnium trium $1\frac{2}{5}$. Ergo primus erit $\frac{2}{5} \times 73 = 29\frac{1}{5}$. vt cum 73. habeat $\frac{2}{5} \times 73$. numerum videlicet duplum ad $\frac{1}{5} \times 73$. summam reliquorum. Secundus autem erit $\frac{1}{5} \times 73 = 14\frac{2}{5}$. vt cum 73. habeat $\frac{1}{5} \times 73$. numerum videlicet triplum ad $\frac{1}{5} \times 73$. summam reliquorum. Tertius denique erit $\frac{1}{5} \times 73 = 14\frac{2}{5}$. vt acceptis 73. habeat $\frac{1}{5} \times 73$. numerum scilicet quadruplum ad $\frac{1}{5} \times 73$. summam reli-

reliquorum. Quibus positis, cum primus acceptis 73. habeat $\frac{1}{2}$ 2e. qui duplus esse debet summæ reliquorum duorum. Facit autem secundus $\frac{1}{2}$ 2e—73. cum tertio $\frac{1}{2}$ 2e—73. summam $\frac{1}{2}$ 2e—146. ad quam duplus esse debet numerus $\frac{1}{2}$ 2e. quem primus cum 73. habet. ac proinde numerus $\frac{1}{2}$ 2e—292. duplus prædictæ summæ $\frac{1}{2}$ 2e—146. aqualis erit numero $\frac{1}{2}$ 2e. Additis igitur 292. utrobique, æquatio erit inter $\frac{1}{2}$ 2e. & $\frac{1}{2}$ 2e + 292. Ablatisq. $\frac{1}{2}$ 2e. utrobique, inter $\frac{1}{2}$ 2e. & 292. Diuisis igitur 292. per $\frac{1}{2}$ 2e. fiet 1 2e. 120. Ergo primus numerus $\frac{1}{2}$ 2e—73. erit 7. propterea quod $\frac{1}{2}$ numeri 120. sunt 80. a quibus si auferantur 73. reliquus fit numerus 7. Secundus autem $\frac{1}{2}$ 2e—73. erit 17. quia $\frac{1}{2}$ numeri 120. sunt 90. a quibus si deducantur 73. reliquus fit numerus 17. Tertius denique $\frac{1}{2}$ 2e—73. erit 23. quippe cum $\frac{1}{2}$ numeri 120. sint 96. a quibus si tollantur 73. supersint 23. Atque hi tres numeri 7. 17. 23. problemati satisfaciunt. Nam 7. cum 73. faciunt 80. qui numerus duplus est summæ 40. ex 17. & 23. collectæ. At 17. cum 73. faciunt 90. qui numerus triplus est summæ 30. ex 7. & 23. collectæ. Denique 23. cum 73. faciunt 96. qui numerus quadruplus est summæ 24. ex 7. & 17. collectæ.

104 Tres numeros inuenire, ita ut primus cum data parte summa aliorum duorum faciat numerum datum? Item secundus cum alia data parte aliorum duorum faciat quoque quemcunque numerum datum? Tertius denique cum quavis data parte aliorum duorum faciat similiter quemlibet datum numerum.

CIII.

DEBEAT primus cum $\frac{1}{2}$. secundi ac tertij facere 42. Secundus cum $\frac{1}{2}$. primi ac tertij, 36. Tertius cum $\frac{1}{2}$. primi ac secundi, 39. Ponatur primus 1 2e. Erat ergo semissis aliorum duorum 42—1 2e. Ita enim primus cum hac semisse faciet 42. Ac proinde duplum huius semissis, nimirum 84—2 2e. erit summa secundi ac tertij.

ET quia secundus cum $\frac{1}{2}$. primi & tertij facere debet 36. si auferemus quartam partem primi, nimirum $\frac{1}{4}$ 2e. ex 36. reliqua erit quarta pars tertij, vnâ cum secundo, numerus scilicet 36— $\frac{1}{4}$ 2e. quem si detrahemus ex 84—2 2e. hoc est, ex summa secundi ac tertij, dabit reliquus numerus 48—1 $\frac{1}{2}$ 2e. tres reliquas partes quartas tertij. ac proinde tertia pars huius numeri, nimirum 16— $\frac{1}{4}$ 2e. erit quarta pars tertij, quæ cum tribus quartis prædictis, hoc est, cum 48—1 $\frac{1}{2}$ 2e. faciet totum tertium numerum 64— $\frac{1}{2}$ 2e. siue 64— $\frac{1}{2}$ 2e.

HVNC tertium si subducemus ex 84—2 2e. summa secundi ac tertij, reliquus fiet secundus 20 + $\frac{1}{2}$ 2e.

QVIA vero tertius cum $\frac{1}{2}$. primi ac secundi, id est, cum $\frac{1}{2}$ 2e.

201

Ff 2

& 1

& $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 3$. (quæ simul faciunt $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 3$.) debet facere 39.
 Facit autem tertius $64 - 2\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2}$. cum $1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 3$. numerum $61\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 59$. Nam $- 1\frac{1}{3}$. cum $+ 1\frac{2}{3}$. facit $- 2\frac{1}{3}$. vt in hac formula

$$\begin{array}{r} - 1\frac{1}{3} \\ + 1\frac{2}{3} \\ \hline - 2\frac{1}{3} \end{array}$$
 apparet. qui numerus $61\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 59$. æqualis debet
 esse numero 39. Additis ergo $2\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$. vtroque, erit
 æqualitas inter $61\frac{1}{2}$. & $39 + 2\frac{2}{3} = 41\frac{1}{3}$. Ablatisq. 39.
 vtroque, inter $26\frac{1}{2}$. siue $\frac{51}{2}$. & $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. Diuisis er-
 go $\frac{51}{2}$. per $\frac{8}{3}$. fiet 12. primus numerus. Ac
 proinde secundus, qui inuentus est $10 + 1\frac{1}{3} = 11\frac{1}{3}$. erit 24. Tertius au-
 tem inuentus $64 - 2\frac{1}{2} = 61\frac{1}{2}$. erit 36. Atque tres hi numeri 12. 24. 36.
 problema absoluunt. Facienda autem semper est æquatio cum nu-
 mero, quem tertius cum parte data aliorum facere debet, vt in no-
 stro exemplo cum 39. factum est.

- CV. 105 *Datum numerum parti in duas partes, vt prior
 cum dato alio numero ad posteriorem cum quouis
 alio dato numero proportionem habeat datam quã-
 cunque, si id fieri potest.*

DATVS numerus 100. secundus sit in duas partes, vt prior cum
 10. faciat numerum triplum numeri, quem posterior pars cum 20.
 efficit. Ponatur prior pars 12. ac proinde posterior 100 - 12 = 88.
 Prior cum 10. facit 12 + 10 = 22. & posterior cū 20. facit 88 + 20 = 108. Vt
 ergo ille huius sit triplus, necessario erit æquatio inter 12 + 10. &
 360 - 32 = 328. Additisq. 32 vtroque, inter 42 + 10. & 360. Ablatisq.
 10 vtroque, inter 42. & 350. Diuisis igitur 350 per 42. fiet 8. $350 \div 42 = 8\frac{1}{3}$.
 prior pars. Posterior autem 100 - 12 = 88. erit 12 $\frac{1}{3}$. Prior cum 10. fa-
 cit 97 $\frac{1}{3}$. numerum triplum numeri 32 $\frac{1}{3}$. ex posteriori parte, &
 10. constati.

ADDITVM est in ænigmate, [si id fieri potest] quia sæpe erit
 quæstio impossibilis. quod optime æquatio monebit. V.g. si datus
 numerus 100. diuidendus sit in duos, vt prior cum 10. faciat nume-
 rum septuplum numeri ex posteriori, & 10. constati, fieri id nullo
 modo poterit. Posita enim priori parte 12. & posteriori 100 - 12 = 88.
 prior cum 10. faciet 12 + 10 = 22. posterior aut cum 10 faciet 88 + 10 = 98.
 cuius ille non potest esse septuplus. Nam fieret æquatio inter 12 + 10. &
 840 - 72 = 768. Et additis 72. vtroque, inter 82 + 10. & 840. Ablatisq. 10.
 vtroque, inter 82. & 830. Diuisis autem 830. per 8. fieret 103 $\frac{1}{4}$. prior pars. quod est absurdum, cum maior sit
 dato numero 100.

VIDES igitur, quam expeditè operatio ipsa nos instruat, quan-
 do quæstio proposita solui possit, & quando non. id quod ad ini-
 tium huius lib. monimus.

106 Numerum inuenire, a quo detractis quotuis partibus aliquotis, si reliquus numerus per datum numerum multiplicetur, fiat numerus aequalis ei, qui ex inuento numero, & dato conflatur.

CVL

SIT inueniendus numerus, a quo detractis $\frac{1}{2}$, si reliquus numerus $\frac{1}{2}$ multiplicetur per 10: tantum fiat, quantum ex numero inuento, & dato numero 10. Ponatur numerus quæsitus 12. Detractus $\frac{1}{2}$ remanent $\frac{1}{2}$ 24. quibus multiplicatis per 10. fit numerus $\frac{1}{2}$ 240. id est, $4\frac{1}{2}$ 24. Et si ad positum numerum 12, addantur 10. fit numerus 12+10. æqualis $4\frac{1}{2}$ 24. Ablata ergo 12. vtriusque, erit æquatio inter 10. & $3\frac{1}{2}$ 24. Diuisisq. 10. per $3\frac{1}{2}$. hoc est, per $\frac{7}{2}$. fiet $\frac{1}{2}$ 24. siue $3\frac{1}{2}$. numerus quæsitus. Subductis enim $\frac{1}{2}$. inuenti numeri $\frac{1}{2}$ 24. nimirum $\frac{1}{2}$ 24. si reliquus numerus $\frac{1}{2}$ 24. nimirum $\frac{1}{2}$. eiusdem numeri inuenti, multiplicetur per 10. fiet numerus $\frac{1}{2}$ 240. siue $13\frac{1}{2}$. Et si ad inuentum numerum $\frac{1}{2}$ 24. addatur idem numerus datus 10. hoc est, $\frac{1}{2}$ 24. fiet quoque numerus $\frac{1}{2}$ 240. siue $13\frac{1}{2}$.

Hoc ænigma idem est, quod trigessimum, sed variata nonnihil pronuntiatione. supposito ænigmate tribuitur 12. 3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

107 Duos numeros in data proportionē inuenire, ut ex vno in alterum gignatur datur quiuus numerus.

CVIL

SINT inueniendi duo numeri in proportionē sesquialtera, vt ex vno in alterum gignatur numerus 40. Ponantur numeri 2 24. 3 24. in proportionē sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6 24. æqualis 40. Diuisis ergo 40. per 6. fit 1 24. $\frac{1}{2}$ 24. Et 24 $\frac{1}{2}$ 24. erit valor vnus radicis. Et quia primus numerus positus fuit 2 24. & secundus 3 24. erit primus numerus 24 $\frac{1}{2}$ 24. & secundus 24 $\frac{1}{2}$ 24. Ex vno in alterum fit numerus 24 $\frac{1}{2}$ 24. hoc est $\frac{1}{2}$ 24. siue 40.

SINT rursum inueniendi duo numeri in eadem proportionē sesquialtera, vt ex vno in alterum fiat numerus 294. Positis rursum duobus numeris 2 24. 3 24. in proportionē sesquialtera, gignetur ex vno in alterum numerus 6 24. æqualis 294. Diuisisq. 294. per 6. fit 1 24. 49. cuius radix est 7. Ergo primus numerus 2 24. erit 14. & secundus 3 24. erit 21. Atque ex 14. in 21. fit propositus numerus 294. Vides ergo aliquando numeros quæsitos esse surdos, vt in priori exemplo, & aliquando rationales, vt in posteriori.

108 Duos numeros in qualibet proportionē datos æqualiter minuire, ita vt reliquus maioris ad reliquum minoris habeat datam quamcunque proportionem, qua maior sit proportionē datorum numerorum.

CVIII.

HOC

CIX

HOC anigma idem est, quod octauum, alijs tamen verbis propositum. Nam & hic quæritur numerus, qui ex datis duobus detractus relinquitur duos numeros in data proportionem. Libuit tamen ipsam hoc tenore proponere, & aliter soluere, quam anigma octauum solutum fuit, vt discas aliorum quoque anigmatum solutiones variare. Sint ergo dati duo numeri 3. & 2. in proportionem sesquialtera minuendi æqualiter, hoc est, ab ipsis vnus idemq. numerus auferendus, vt reliqui proportionem habeant v.g. vigecuplam. Ponamus minorem imminutum decreuisse vsque ad 1. 2e. ac proinde maiorem vsque ad 20. 2e. vt hic reliquus ad illum reliquum habeat proportionem vigecuplam. Si igitur ex maiore 3. auferemus 20. 2e. remanebit numerus 3 — 20. 2e. qui auferendus est ex 3. 2e. relinquantur 20. 2e. vt in hac formula apparet

$$3 - 20 = 3 - 20$$
Item si ex minore 2. detrahemus 1. 2e. reliquus

$$2 - 1 = 2 - 1$$
erit numerus 2 — 1. 2e. qui ex 2. auferendus est, vt relinquantur 1. 2e. Quia vero ambo numeri ponuntur æqualiter imminuti, hoc est, ex vtroque idem numerus ablati ponitur, erit æquatio inter 3 — 20. 2e. & 2 — 1. 2e. Additisq. 20. 2e. vtroque, inter 3 & 2 + 19. 2e. Ablatisq. 2. vtroque, inter 2 & 19. 2e. eritq. 1. 2e. Cum igitur ex 3. auferenda sint 3 — 20. 2e. & 2 — 1. 2e. ex 2. auferendus erit ex vtroque numero numerus 1. 2e. eruntq. reliqui numeri 3. 2e. & 1. 2e. qui habent proportionem vigecuplam propositam.

CIX

CIX.

109 Duos numeros in data proportionem inuenire, ita vt qui fit ex vno in alterum cum summa quadratorum, qui ex ipsis sunt, efficiat numerum datum.

SINT inueniendi duo numeri in proportionem sesquialtera, ita vt ex vno in alterum fiat numerus, qui cum quadratis ipsorum efficiat 100. Ponantur numeri quilibet 3. 2e. & 2. 2e. in proportionem sesquialtera. Ex vno in alterum fit numerus 6. 2e. & eorum quadrati sunt 9. 2e. & 4. 2e. qui cum 6. 2e. faciunt 29. 2e. æquales 100. Diuisi vigitor 100. per 29. fit 3. 2e. ergo 1. 2e. erit 3. 2e. & 3. 2e. erunt 3. 2e. per primo numero, quem posuimus 3. 2e. & secundus numerus, qui positus fuit 2. 2e. erit 3. 2e. ad quem 3. 2e. proportionem habet sesquialteram. Ex vno in alterum fit numerus 3. 2e. hoc est, 3. 2e. & summa quadratorum 9. 2e. & 4. 2e. est 13. 2e. quæ cum 3. 2e. facit 16. 2e. hoc est, 100. 2e.

CIX

SINT rursus inueniendi duo numeri in proportionem sesquialtera, ita vt numerus, qui ex vno in alterum fit, cum summa quadratorum, qui ex ipsis sunt, faciat summam 2736. Reperita eadem operatione, erunt 19. 2e. æquales 2736. Diuisi ergo 2736. per 19. fit 144. & 1. 2e. 11. Igitur primus numerus positus 3. 2e. erit 36. & secundus, quem posuimus 2. 2e. erit 24. Ex 36. in 24. sunt 864. quæ

CIX

cum

cum quadratis 76. 1296. faciunt 1736. ipsiq. numeri inuenti 36.
 & 24. proportionem habent sesquialteram.

**110 Inuenire numerum, qui in se ductus, & productus
 in datum quemuis numerum, faciat numerum,
 qui habeat ad inuenti numeri cubum proportionem
 quancunque datam.**

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & hic productus
 in 10. faciat numerum in proportione quintupla ad inuenti numeri
 cubum, hoc est, qui quingies eius cubum contineat. Ponatur
 quæsitus numerus 1 2e. Hic in se ductus facit 1 2. & 1 8. in 10. fa-
 cit 10 8. qui numerus debet esse quintuplus cubi ex 1 2e. procreati.
 Est autem cubus numeri 1 2e. 1 2e. qui quingies sumptus facit 5 ce.
 æquales 10 8. Diuisis ergo 10. per 5. fiet 1 2e. 2. numerus quæsitus.
 propterea quod numeri Cossici sunt collaterales. Nam ex 2. in 2.
 fit 4. & ex 4. in 10. fit numerus 40. quintuplus cubi 8. ex 2. pro-
 creati.

SI numerus ductus in se, & productus in 10. debet habere pro-
 portionem sesquialteram ad cubum, erit æquatio inter 10 8. & 1 2e.
 Diuisis igitur 10. per 1 2. siue per 1 2. fiet 1 2e. 2 2. qui numerus in
 se ductus facit 4 00. & hic in 10. facit 4 000. Cubus autem nu-
 meri 2 2. est 1 024. ad quem numerus 4 000. hoc est 1 024. pro-
 portionem habet sesquialteram.

SI C. si numerus ductus in se, & productus in 10. debet ad eundem
 habere proportionem subduplam. Posito numero 1 2e. fiet ex 1 2e
 in se numerus 1 8. & ex 1 8. in 10. numerus 10 8. qui subduplus
 esse debet 1 2e. qui fit ex 1 2e in se cubice. Igitur æquatio erit inter
 10 8. & 1 2e. erig. 1 2e 20. Nam ex 20. in se, fit 400. & ex 400. in
 10. fit 4000. qui subduplus est cubi 8000. qui fit ex 20. in se cu-
 bice.

**111 Datum numerum in duas partes secare, ut prior
 multiplicata per quemuis numerum producat nu-
 merum, qui superet numerum productum ex par-
 te posteriore in quemlibet alium numerum, nume-
 ro dato, quando id fieri potest.**

SI numerus 30. diuidendus in duas partes, ut prior ducta in 10.
 procreet numerum, qui numero 20. superet numerum, quem pos-
 terior pars in 40. multiplicata producit. Ponatur prior pars 1 2e.
 ideoq. posterior 20 — 1 2e. Ex 1 2e. in 10. fit numerus 10 2e. & ex
 20 — 1 2e. in 40. fit numerus 1200 — 40 2e. quem prior productus
 superare debet numero 20. Ergo si posteriori addentur 20. fiet æqua-
 litas

litas inter 10 2e. & 120 — 40 2e. Additisq. 40 2e. vtrunque, inter 50 2e. & 120. Diuisis ergo 120. per 50. fiet 1 2e. 24 $\frac{1}{2}$. prior pars, ideoq. posterior erit 5 $\frac{1}{2}$. Prior in 10. ducta facit 244. posterior in 40. facit 224. qui ab illo superatur numero 20.

DIXIMVS in xnigmate, [quando id fieri potest] quia non semper quæstio solui potest. vt si prior productus superare debeat posteriorem productum, numero 300. reperietur æqualitas inter 1500 — 40 2e. & 10 2e. Additisq. 40 2e. vtrunque, inter 1500. & 50 2e. Diuisisq. 1500. per 50. fiet 1 2e. 30. vna pars dati numeri 30. quod est ineptum. Vbi etiam vides, ex ipsa operatione per regulam Algebræ cognosci posse, num quæstio solui possit, nec ne.

- CXII. 112 *Datum numerum in duas partes secare, vt prior in quemlibet numerum ducta faciat numerum in data proportionem ad numerum factum ex posteriori parte in quemuis alium numerum multiplicata.*

SIT numerus 40. secandus in duas partes, vt ex prior in 10. fiat numerus in proportionem subdupla ad numerum factum ex parte posteriore in 30. Ponatur prior pars 1 2e. ideoq. posterior 40 — 1 2e. Ex 1 2e. in 10. fit numerus 10 2e. qui subduplus esse debet numeri 1200 — 30 2e. producti ex 40 — 1 2e. in 30. hoc est, æquatio fiet inter 10 2e. & 1200 — 30 2e. Additisq. 30 2e. vtroque, inter 50 2e. & 1200. Diuisis ergo 1200. per 50. fiet 1 2e. 24. prior pars, ac proinde posterior erit 16. Ex 16. in 10. fit 160. qui numerus subduplus est numeri 480. facti ex 16. in 30.

- CXIII. 113 *Datum numerum in duos distribuere, vt prior diuisus per datum quemuis numerum faciat Quotientem in data proportionem ad Quotientem, qui fit ex posteriori numero per quemlibet numerum diuiso.*

SIT numerus 100. tribuendus in duos, vt prior diuisus per 10. faciat Quotientem in proportionem sextupla ad Quotientem, quem facit posterior numerus diuisus per 20. Ponatur prior 1 2e. ac proinde posterior 100 — 1 2e. Diuiso priore per 10. fit Quotiens 10 2e. Diuiso autem posteriore per 20. fit Quotiens 5 — 10 2e. Et quia ille Quotiens ad hunc debet habere proportionem sextuplam, erit æquatio inter 10 2e. & 30 — 5 2e. Et additis 5 2e. vel 10 2e. vtroque, inter 10 2e. & 30. Diuisis ergo 30. per 10. fiet 1 2e. 75. prior numerus. Posterior ergo erit 25. Diuisis 25. per 10. fit Quotiens 2 2e. Diuisis vero 25. per 20. fit Quotiens 1 2e. ad quem ille Quotiens 2 2e. vel 10 2e. proportionem habet sextuplam.

- 114 Tres numeros in continua proportione data inuenire, CXIII.
 ut numerus ex minore in medium productus ha-
 beat ad maiorem quamcunque proportionem
 datam.

INVENIENDI sint tres numeri in continua proportione sesqui-
 tertia, vt ex minore in medium fiat numerus ad maiorem in pro-
 portione quintupla. Ponantur quæſiti tres numeri 9 2e. 12 2e. 16 2e.
 in proportione ſeſquitertia. Ex 9 2e. in 12 2e. fit numerus 108 2e.
 qui debet eſſe quintuplus tertij 16 2e. Ergo æquatio erit inter 108 2e.
 & 80 2e. Diuiſiſq. 80. per 108. fiet 1 2e. $\frac{80}{108}$. ſiue $\frac{20}{27}$. propterea
 quod numeri Collici collaterales ſunt. Primus ergo numerus poſi-
 tus 9 2e. erit $\frac{20}{27}$. Secundus poſitus 12 2e. erit $\frac{24}{27}$. & tertius poſi-
 tus 16 2e. erit $\frac{32}{27}$. Ex primo in ſecundum fit numerus $\frac{20}{27} \times \frac{24}{27}$. qui
 quintuplus eſt ad $\frac{32}{27}$. ſiue ad $\frac{80}{27}$.

SI productus numerus ex primo in ſecundum debet eſſe æqualis
 tertio, erit æquatio inter 108 2e. & 16 2e. Diuiſiſ ergo 16 per 108.
 fiet 1 2e. $\frac{16}{108}$. ac proinde tres numeri quæſiti erunt $\frac{16}{108}$. $\frac{24}{108}$. $\frac{32}{108}$. ſiue
 $\frac{4}{27}$. $\frac{8}{27}$. $\frac{16}{27}$.

SI productus ex primo in ſecundum debet eſſe ſemiſſis tertij,
 erit æquatio inter 116 2e. & 16 2e. Diuiſiſ igitur 16. per 116. fiet
 1 2e. $\frac{16}{116}$. ſiue $\frac{4}{29}$. ac proinde tres numeri quæſiti erunt $\frac{4}{29}$. $\frac{8}{29}$. $\frac{16}{29}$.
 hoc eſt $\frac{4}{29}$. $\frac{8}{29}$. Atque ex $\frac{4}{29}$. in $\frac{8}{29}$. fit numerus $\frac{16}{29}$. qui ſemiſſis eſt
 tertij $\frac{16}{29}$.

- 115 Datum numerum in tres partiri, vt ſinguli in tres CXV.
 ſingulos numeros datos, vel in vnum eundemq. nu-
 merum datum multiplicati, producant tres nume-
 ros in data proportione continua.

SIT numerus datus 80. diuidendus in tres, vt primo ducto in 4.
 & ſecundo in 3. & tertio in 7. producantur tres numeri in continua
 proportione quadrupla. Ponatur prima pars 1 2e. quæ ducta in 4.
 facit 4 2e. Et quia ſecunda pars ducta in 3. debet pignere numerum
 16 2e. quadruplum videlicet numeri 4 2e. quærendus erit numerus,
 qui in 3. ductus producat 16 2e. Is erit Quotiens, ſi 16 2e. diuidan-
 tur per 3. nimirum $\frac{16}{3}$ 2e. eritq. ſecunda pars $\frac{16}{3}$ 2e. Rurſus quia
 tertia pars ducta in 7. debet procreare numerum 64 2e. quadruplū
 videlicet numeri 16 2e. quærendus erit numerus, qui in 7. ductus
 faciat 64 2e. Is erit $\frac{64}{7}$ 2e. Quotiens videlicet, ſi 64 2e. per 7. diui-
 dantur. Atque ita tres partes quæſitæ ſunt 1 2e. $\frac{16}{3}$ 2e. $\frac{64}{7}$ 2e. quæ
 ordine in 4. 3. & 7. ductæ procreant 4 2e. 16 2e. & 64 2e. in data
 proportione quadrupla continua. Reliquum iam eſt, vt prædictæ
 tres partes in vnam ſummam collectæ faciant 80. numerum datum.

G g

Faciunt

Faciunt autem $1 \frac{1}{2}$ &c. siue $\frac{3}{2}$ &c. Est ergo æquatio inter $\frac{3}{2}$ &c. & 80. Diuisa ergo 80. per $\frac{3}{2}$ fiet $1 \frac{1}{2}$ &c. prima pars quæ posita fuit $1 \frac{1}{2}$ &c. Quoniam autem secunda pars inuenta fuit $\frac{1}{2}$ &c. si $\frac{1}{2}$ &c. valor vnius radicis ducatur in $\frac{3}{2}$ &c. producat secundam partem $\frac{3}{4}$ &c. Eadem ratione, cum tertia pars inuenta sit $\frac{1}{4}$ &c. si vnius radicis valor $\frac{3}{4}$ &c. ducatur in $\frac{3}{2}$ &c. producat tertia pars $\frac{9}{8}$ &c. Atque hæc tres partes $\frac{3}{2}$ &c. $\frac{3}{4}$ &c. $\frac{9}{8}$ &c. hoc est, $1 \frac{1}{2}$ &c. $\frac{3}{4}$ &c. $\frac{9}{8}$ &c. in vnum collectæ faciunt 80. numerum datum & multiplicatæ ordinatim per 4.3.7. procreant tres numeros $\frac{4}{3}$ &c. $\frac{20}{3}$ &c. $\frac{140}{3}$ &c. in continua proportionē quadrupla.

QUANDO datus numerus 80. tribuendus est in tres, vt singulis partibus per eundem numerum quemcunque, vt per 5. multiplicatis, gignantur tres numeri in continua proportionē quadrupla. fiet id facili negotio. Nam si per anigma 49. diuidatur numerus datus 80. in tres partes continuæ quadruplas, videlicet in $\frac{10}{3}$ &c. $\frac{20}{3}$ &c. $\frac{50}{3}$ &c. & singulæ per propositum numerum 5. multiplicentur, producantur tres numeri in eadē proportionē quadrupla, $\frac{50}{3}$ &c. $\frac{100}{3}$ &c. $\frac{250}{3}$ &c. id est, 19 $\frac{2}{3}$ &c. 76 $\frac{2}{3}$ &c. 304 $\frac{2}{3}$ &c.

a schol. 19.
septimi.

CXVI. 116 Datum numerum in tres partes diuidere, vt singula per tres singulos numeros datos multiplicata producant eundem numerum: Vel vt tam priores duæ per duos datos numeros ductæ producant vñ eundemq. numerum, quam posteriores duæ per alios duos numeros datos multiplicata producant vnum quoque & eundem numerum.

SIT datus numerus 100. diuidendus in tres, vt primo ducto in 5. secundo in 2. & tertio in 6. fiant tres numeri æquales. Ponatur primus 1 &c. quo ducto in 5. sunt 5 &c. Et quædam numerum debet facere secundus ductus in 2. diuidemus 5 &c. per 2. Nam Quotiens $\frac{5}{2}$ &c. erit secundus numerus, cum in 2. ductus faciat 5 &c. Et quoniam tantundem facere debet tertius in 6. ductus diuidemus 5 &c. per 6. Quotiens enim $\frac{5}{6}$ &c. erit tertius numerus, cum in 6. ductus faciat 5 &c. Reliquum iam est, vt omnes tres partes $\frac{5}{2}$ &c. $\frac{5}{2}$ &c. $\frac{5}{6}$ &c. faciant datum numerum 100. Faciunt autem $4 \frac{1}{2}$ &c. Est ergo æquatio inter $4 \frac{1}{2}$ &c. & 100. diuisa $\frac{100}{4 \frac{1}{2}}$ &c. hoc est, per $\frac{8}{9}$ &c. fiet $1 \frac{1}{2}$ &c. $\frac{25}{9}$ &c. quæ dat primum numerum, quem posuimus 1 &c. Secundus ergo inuentus $1 \frac{1}{2}$ &c. erit $17 \frac{1}{2}$ &c. Et tertius inuentus $\frac{5}{6}$ &c. erit $19 \frac{1}{6}$ &c. Atque hi tres numeri $17 \frac{1}{2}$ &c. $19 \frac{1}{6}$ &c. $19 \frac{1}{6}$ &c. faciunt datum numerum 100. Et ductæ in 5. 2. & 6. producant tres numeros æquales $15 \frac{1}{2}$ &c. $15 \frac{1}{2}$ &c. $15 \frac{1}{2}$ &c.

S E D. si tam priores duo numeri multiplicati per 6. & 7. debeant producere duos numeros æquales, quam posteriores duo ducti in 5. & 8. Ponatur rursum primus 1 &c. & 4 &c. in 6. sunt 6 &c.

Et

Et quia tantundem facere debet secundus ductus in 5. diuidemus 672 per 3. Quotiens enim 2 24. dabit secundum numerum cum ductus in 3 faciat 672. Deinde ex secundo hoc 2 24. in 5 sunt 10 24. Et quotiens tantundem debet facere tertius ductus in 8. diuidemus 10 24. per 8. Nam Quotiens 1 24. erit tertius numerus, cum ductus in 8. gignat 10 24. Reliquum nunc est 372. ut tres hi numeri 2 24. 10 24. 1 24. faciant numerum datum 100. Faciunt autem 4 24. qui numerus aqualis esse debet 100. Diuisi ergo 100. per 4 24. id est, per 1 24. fiet 1 24. 23 24. primus numerus, qui positus fuit 1 24. Secundus igitur inuentus 2 24. erit 47 24. Et tertius inuentus 1 24. erit 29 24. Atque hi tres numeri 23 24. 47 24. 29 24. faciunt simul 100. Et priores duo ducti in 6. & 3. generant eundem numerum 141 24. Posteriores vero duo ducti in 5. & 8. procreant eundem numerum 235 24.

117 Datum numerum in tres partes distribuere, ut prima parte diuisa per quemuis numerum. Et secunda multiplicata per alium datum numerum. Ac tertia diuisa per quemcunque etiam numerum, proueniant tres numeri aequales. CXVII

SIT datus numerus 178. diuidendus in tres partes, ut tantum fiat ex diuisione primæ partis per 5. quantum ex multiplicatione secundæ per 8. & quantum ex diuisione tertiæ per 6. Ponatur prima pars 1 24. qua diuisa per 5. fit Quotiens 2 24. Et quia tantundem fieri debet ex secunda ducta in 8. diuidemus 2 24. per 8. Nam Quotiens 2 24. erit secunda pars, quæ multiplicata per 8. facit 2 24. Et quia tantundem facere debet tertia diuisa per 6. multiplicabimus 2 24. per 6. Productus enim numerus 2 24. erit tertia pars, qua diuisa per 6. Quotiens fit 2 24. Reliquum iam est, ut tres hæ partes 1 24. 2 24. 2 24. faciant datum numerum 178. Faciunt autem 2 24. 2 24. 2 24. igitur æquatio erit inter 178. & 2 24. Et si diuidantur 178 per 2 24. siue per 2 24. fiet 1 24. 87. prima pars, quam posuimus 1 24. Secunda autem erit 2. quæ habetur, si radix inuenta 80. multiplicetur per 2 24. propterea quod secunda pars inuenta fuit 2 24. Tertia denique erit 96. quæ quidem produceretur, si eadem radix inuenta 80 multiplicetur per 2 24. propterea quod tertia pars inuenta fuit 2 24. Atque hæ tres partes 80. 2. 96. conficiunt 178. numerum datum. Et siue prima per 5 diuidatur, siue secunda ducatur in 8. siue, denique tertia diuidatur per 6 produceretur semper idem numerus 16.

118 Datum numerum in tres partes secare, ut singula per singulos tres numeros datos diuisa, faciant unum eundemq. Quotientem. CXVIII

SIT datus numerus 140. tribuendus in tres partes, vt prima diuisa per 5. Et secunda per 3. Et tertia per 7. procreetur semper idem Quotiens. Ponatur prima pars 1 2e qua diuisa per 5. fit Quotiens $\frac{1}{5}$ 2e. Et quia tantundem fieri debet ex secunda parte diuisa per 3. multiplicabimus $\frac{1}{5}$ 2e per 3. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$ 2e erit secunda pars, quæ diuisa per 3. facit Quotientem $\frac{1}{5}$ 2e. Quoniam autem ex diuisione tertiæ partis per 7. debet etiam produci $\frac{1}{5}$ 2e. multiplicabimus $\frac{3}{5}$ 2e per 7. Numerus enim productus $\frac{21}{5}$ 2e erit tertia pars, qua diuisa per 7. Quotiens fit $\frac{1}{5}$ 2e. Restat, vt tres hæ partes 1 2e. $\frac{3}{5}$ 2e. $\frac{21}{5}$ 2e. simul sumptæ sint 140. Faciunt autem 3 2e. Igitur æquatio erit inter 3 2e. & 140. Diuisiſq. 140. per 3 fiet 1 2e. 80. prima pars. Secunda erit 48. quæ habetur, si inuenta radix 80. ducatur in $\frac{3}{5}$. cum secunda pars inuenta fit $\frac{3}{5}$ 2e. Tertiæ denique erit 112. quæ habetur, si eadem radix inuenta 80. ducatur in $\frac{21}{5}$. quamdoquidem tertia pars inuenta fuit $\frac{21}{5}$ 2e. Atque omnes hæ tres partes 80. 48. 112. faciunt 140. numerum propositum. Et tam prima diuisa per 5. quam secunda per 3. & tertia per 7. fit idem semper Quotiens 16.

CXIX.

119 Duos numeros in data proportionem inuenire, vt quælibet pars aliquota minoris in aliam datam partem maioris multiplicata gignat numerum quemcunque datum.

SINT inueniendi duo numeri in proportionem tripla, vt $\frac{1}{2}$. minoris in $\frac{1}{3}$. maioris ducta procreet numerum 90. Ponatur minor 1 2e & maior 3 2e, vt habeant datam proportionem triplam. Ex quarta parte minoris, nimirum $\frac{1}{4}$ 2e. in semissem maioris, id est, in $\frac{1}{2}$ 2e fit numerus $\frac{1}{2}$ 2e. æqualis 90. Diuisiſ ergo 90. per $\frac{1}{4}$. fiet 1 2e. 140. Et 1 2e erit $\sqrt[3]{8}$ 240. minor numerus. Maior erit huius triplus $\sqrt[3]{8}$ 1160. Iam $\frac{1}{4}$. minoris, videlicet $\sqrt[3]{8}$ 15. ducta in $\frac{1}{2}$. maioris, nimirum in $\sqrt[3]{8}$ 540. facit $\sqrt[3]{8}$ 8100. hoc est, numerum datum 90.

CXX.

120 Numerum inuenire, quo per datum numerum multiplicato, & per productum diuiso alio numero dato, Quotiens ad inuentum numerum datam habeat proportionem.

SIT inueniendus numerus, quo multiplicato per 5. & per productum diuiso numero 60. Quotiens ad numerum inuentum proportionem habeat sesquialteram. Ponatur numerus quæſitus 1 2e. Hoc ducto in 5 sunt 5 2e. Diuisiſ autem 60. per 5 2e. fit Quotiens $\frac{12}{5}$ 2e. qui sesquialteram proportionem habere debet ad 1 2e. Habet autem & numerus $\frac{12}{5}$ 2e. hoc est, $\frac{12}{5}$ 2e. (qui producit ex 1 2e. in $\frac{1}{5}$ 2e. siue in $\frac{1}{5}$ 2e.) ad 1 2e. proportionem sesquialteram. Est ergo æqua-

æquatio inter $\frac{12}{5}$. & $\frac{12}{5}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 120. & 158. Diuisis igitur 120 per 15. fiet 8. & 8. fit 120. erit 8. numerus, quem querimus. Nam ex 8 in 15 fit 120. per quem numerum si diuidantur 60. fit Quotiens 8. qui ad 8. sesquialteram proportionem habet: quippe cum 8. ducta in $1\frac{1}{2}$. faciat 12. in

121 Tres numeros inuenire Arithmetice proportionales, ita ut eorum summa sit data pars aliquota numeri, quæ ex eorum multiplicatione inter se, producat. Vel (quod idem est) ut numerus ex ipsorum multiplicatione productus ad eorundem summam proportionem habeat datam.

DEBEAT summa inuentorum numerorum esse $\frac{1}{2}$. numeri ex eorum multiplicatione producti, hoc est, numerus productus ad summam habere debeat proportionem quintuplam. Ponantur tres numeri quæsti 1. 2. 3. 2. qui æqualiter se excedunt numero 1. 2. Eorum summa est 6. 2. At numerus ex multiplicatione productus 6. 2. Nam ex 1. 2. in 2. fit numerus 2. 8. Et ex 2. 8. in 3. 2. fit numerus 6. 2. Et quoniam summa 6. 2. debet esse $\frac{1}{2}$. numeri 6. 2. erit æquatio inter 30. 2. & 6. 2. Diuisis igitur 30 per 6. fiet 5. (propterea quod inter 2. & 6. una denominatio, nimirum 2. est interposita) ideoque 1. 2. erit 8. 5. & 2. 2. erunt 8. 20. & 3. 2. erunt 8. 45. Itaque tres numeri inuenti sunt 8. 5. 8. 20. 8. 45. qui se æqualiter excedunt numero 8. 5. ut patet, si primus a secundo, & secundus a tertio subtrahatur. Summa eorum est 8. 180. & numerus ex eorum multiplicatione productus 8. 4500. Constat autem 8. 180. esse $\frac{1}{5}$. numeri 8. 4500. hoc est, 8. 4500. ad 8. 180. proportionem habere quintuplam: cum numerus 8. 180. ductus in 5. faciat 8. 4500.

DEBEAT etiam T. deinde numerus productus ad summam habere proportionem quadruplam. ad 1. hoc est, summa debeat esse $\frac{1}{4}$. numeri producti. Ponantur numeri proportionales Arithmetice 2. 3. 4. 2. 2. quorum summa 9. 2. & numerus productus 24. 2. Et quia 9. 2. debent esse $\frac{1}{4}$. numeri 24. 2. hoc est, hic numerus ad illum habere debeat proportionem, quam 24. ad 1. si 9. 2. multiplicentur per 12. fiet æqualitas inter 216. 2. & 24. 2. Diuisis igitur 216 per 24. fiet 9. 2. & 1. 2. 2. Erunt igitur tres numeri quæsti 6. 9. 12. quod positi sint 2. 2. 3. 2. 4. 2. Summa eorum 27. est $\frac{1}{4}$. pars numeri 648. ex eorum multiplicatione producti: propterea quod ex 27. in 24. gignatur numerus 648.

CXXII. 122 Tres numeros inuenire in continua proportione data, ut ex eorum multiplicatione gignatur datum numerus.

SINT tres numeri inueniendi continue quadrupli, vt inter se multiplicati producant numerum 27. Ponantur quilibet numeri 1 2e; 4 2e. 16 2e. in continua proportione quadrupla. Ex 1 2e in 4 2e. fit numerus 4 2e. & ex 4 2e in 16 2e. fit numerus 64 2e. aequalis 27. Diuisis ergo 27. per 64. fit 1 2e. $\frac{3}{4}$. & 1 2e. $\frac{3}{4}$. Sunt ergo tres numeri quilibet 1. $\frac{3}{4}$. $\frac{9}{16}$. hoc est, $\frac{1}{4}$. 3. 12. quadrupli, qui inter se multiplicati producant 27.

SINT rursus inueniendi tres numeri sesquialteri, qui inter se multiplicati faciant 12. Ponantur tres numeri sesquialteri 1 2e. 1 $\frac{1}{2}$ 2e. 2 $\frac{1}{2}$ 2e. hoc est, 1 2e. $\frac{1}{2}$ 2e. $\frac{3}{4}$ 2e. Ex 1 2e in $\frac{1}{2}$ 2e. fit numerus $\frac{1}{2}$ 2e. Et ex $\frac{1}{2}$ 2e. in $\frac{3}{4}$ 2e. fit numerus $\frac{3}{4}$ 2e. hoc est, $\frac{3}{4}$ 2e. aequalis 12. Diuisis ergo 12 per $\frac{3}{4}$ 2e. fiet 1 2e. $\frac{4}{3}$. & 1 2e. $\frac{4}{3}$. primus numerus, quem posuimus 1 2e. Secundus ergo positus 1 $\frac{1}{2}$ 2e. erit 1 2e. Et tertius positus 2 $\frac{1}{2}$ 2e. erit 1 2e. 40 2e. propterea quod ex 1 $\frac{1}{2}$ 2e. in 1 2e. $\frac{4}{3}$ fit 1 2e. 12. & ex 2 $\frac{1}{2}$ 2e. in 1 2e. $\frac{4}{3}$ fit 1 2e. 40 2e. Iam ex 1 2e. $\frac{4}{3}$ in 1 2e. 12. fit numerus 1 2e. 48 2e. Et ex 1 2e. 48 2e. in 1 2e. 40 2e. fit numerus 1 2e. 1920. hoc est, 12.

CXXIII. 123 Numerum inuenire, qui ductus in suam radicem quadratam producat datum numerum.

SIT inueniendus numerus, qui in suam radicem quadratam ductus faciat 4. Ponatur numerus quilibet 1 2e. Hic ductus in 1 2e. suam radicem quadratam facit 1 2e. aequalem 4. Diuisis ergo 4 per 1. fiet 1 2e. 4. eiusq. radix cubica 1 2e. 4. cuius quadratum est 16. numerus quilibet, quem posuimus 1 2e. Hic enim ductus in 1 2e. 4. suam radicem quadratam facit 1 2e. 64. hoc est, 4.

SIT deinde producendus numerus 15 $\frac{1}{4}$. inuenieturq. aequalitas inter 1 2e. & 15 $\frac{1}{4}$. Diuisis ergo 15 $\frac{1}{4}$ per 1. fiet 1 2e. 15 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{15}{4}$. cuius radix cubica $\frac{1}{4}$. & huius quadratum $\frac{1}{4}$. numerus quilibet, quem posuimus 1 2e. Atque hic in suam radicem $\frac{1}{4}$. ductus facit $\frac{15}{4}$. hoc est, 15 $\frac{1}{4}$.

CXXIII. 124 Numerum inuenire, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat datam proportionem.

SIT inueniendus numerus, cuius radix quadrata ad eiusdem radicem cubicam habeat proportionem sesquialteram. Ponatur quilibet numerus 1 2e. vt nimirum habeat vtramque radicem proportionem.

stam. Radix eius quadrata est 1 se. & radix cubica 1 se. vi. ex ipso constat, quæ ad initium cap. 1. docuimus. quia 1 se in se quadratæ facit 1 se, & 1 se in se cubicæ similiter facit 1 se. Reliquum est, ut 1 se. ad 1 se, proportionem habeat sesquialteram, hoc est, æquatio sit inter 1 se, & 1 se. quod si 1 se ad 1 se, habeat quoque sesquialteram proportionem. Diuisis igitur 1 se. per 1 se, fiet 1 se. 1 se. (quia numeri Collici sunt collaterales) cuius 1 se. est 1 se. siue 1 se. Huius radix quadrata est 1 se. hoc est, 1 se. Radix autem cubica 1 se. siue 1 se. Constat autem 1 se. ad 1 se. hoc est, 1 se. ad 1 se. habere præportionem sesquialteram. Si igitur tripla præponatur, reperietur eodem discursu æquatio inter 1 se. & 1 se. Diuisisq. 3. per 1. fiet 1 se. 3. cuius zensicubus est 27. atque huius radix quadrata 17. ad radicem cubicam 9. proportionem habet triplam.

125 Duos numeros inuenire, ut ex vno in alterum gignatur numerus, qui ad duos inuentos habeat duas proportionēs datas, maiorem tamen ad minorem, & minorem ad maiorem.

CXXV.

SINT inueniendi duo numeri, ut ex vno in alterum fiat numerus, qui ad minorem habeat proportionem triplam sesquialteram, & ad maiorem, duplam. Ponatur numerus productus 1 se. ergo minor numerus quæsitus erit 1 se. & maior 1 se. quippe cum 1 se. ad 1 se. habeat proportionem triplam sesquialteram, & duplam ad 1 se. Ex 1 se. in 1 se. fit numerus 1 se. siue 1 se. æqualis posito producto 1 se. Diuisa ergo 1 se. per 1 se. fiet 1 se. 7. numerus scilicet qui produci debet: cum numeri Collici sint collaterales. Quia vero minor inuentus fuit 1 se. erit minor 2. & maior 3 se. qui inuentus fuit 1 se. Manifestum autem est, 7. habere ad 2. proportionem triplam sesquialteram, & ad 3 se. duplam.

126 Duos numeros inuenire datam summam efficientes, ita ut alterius cum data parte, vel partibus alterius faciat quemuis numerum datum: qui minor sit, quam data summa, & maior data parte, vel partibus datis eiusdem summe data.

CXXVI.

SINT inueniendi duo numeri, quorum summa 60. ita ut prior numerus cum 1 se. posterioris faciat 50. Ponatur prior 1 se. idcoq. posterior 60. Huius 1 se. sunt 1 se. 1 se. quæ cum 1 se. addantur 1 se. debent subtrahi 1 se. ex 1 se. atque ita remanent 1 se. cum signo

signo + vt supra in subtractione dictum est. Ablatis 15 $\frac{1}{2}$ vtrobiq;
erit aequatio inter 42. & 14 $\frac{1}{2}$. Diuisis ergo 14 $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{2}$. fiet 12.
42 $\frac{1}{2}$. prior numerus: posterior autem erit 17 $\frac{1}{2}$. cuius $\frac{1}{2}$. sunt 7 $\frac{1}{2}$.
quæ cum priori parte faciunt 10.

Si prior numerus cum $\frac{1}{2}$. posterioris deberet facere 25. fieri id
non posset; quia numerus 25. minor est, quam $\frac{1}{2}$. data summæ 60.
vt experiri poteris. At si prior numerus cum $\frac{1}{2}$. posterioris debeat
facere 26. fieri id poterit. eritq. prior numerus $\frac{1}{2}$. & posterior 19 $\frac{1}{2}$.
Huius $\frac{1}{2}$. sunt 9 $\frac{1}{2}$. quæ cum priori parte faciunt 26.

Eodem pacto soluetur ænigma, si posterior numerus cum $\frac{1}{2}$. prio-
ris facere debeat datum numerum: si nimirum posterior numerus
ponatur 12. &c.

CXXVII. 127 *Quinque numeros inuenire, ita vt quatuor quomo-
dolibet sumpti sine reliquo faciant quinque nu-
meros datos: dummodo quarta pars summe pro-
positorum quinque numerorum maior sit singulis
numeris postulatis.*

INVENIENDI sint quinque numeri, ita vt quatuor sine primo
faciant 127. Et quatuor sine secundo, 119. Et quatuor sine tertio,
109. Et quatuor sine quarto, 104. Et quatuor sine quinto, 97. Vbi
vides, quarta partem summæ 516. ex datis numeris 119, 107, 104, 97.
collectæ esse 139. numerum singulis illis numeris maiorem. Quo-
niam ergo summa omnium quatuor sine quinto est minima omniū,
nimirum 97. erit necessario quintus numerus omnium maximus,
quandoquidem quintus cum quibuscumque alijs tribus facit maiorem
summam, quam 97. Ponatur ergo quintus numerus 12. ac proinde
cum alijs quatuor sine quinto faciant 97. erunt omnes quinque nu-
meri simul 97 + 12. Et quia quatuor sine quarto faciunt 104. Si ex
summa omnium 97 + 12. detrahantur 104. reliquus erit quartus
12 — 7. Deinde quia quatuor sine tertio faciunt 109. si ex eadem
summa 97 + 12. detrahantur 109. remanebit tertius 12 — 12. Rus-
sus quoniam quatuor sine secundo faciunt 119. si 119. subducantur
ex eadem summa 97 + 12. relinquetur secundus 12 — 12. Denique
quia quatuor sine primo faciunt 127. si 127. ex eadem summa 97 +
12. auferatur, remanebit primus 12 — 30. Reliquum iam est, vt
omnes hi quinque numeri inuenti faciant simul summam omnium
97 + 12. Faciunt autem 52 — 71. Tigitur æquatio erit inter 97 +
12. & 52 — 71. Additisq. 71. vtrobiq; inter 168 + 12. & 52.
Ablataq. 12. vtrinq; inter 156 + 12. Diuisis ergo 168. per 4.
fiet 12. 42. quintus numerus, quem posuimus esse 12. Ergo
quartus inuentus 12 — 7. erit 5. Et tertius inuentus 12 — 12. erit
130. Secundus autem inuentus 12 — 12. erit 20. Primus denique
qui inuentus fuit 12 — 30. erit 12. adeo vt quinque numeri quæ sit
sint

sunt ordine 12, 20, 30, 35, 42. qui enigma propositum expediunt.

Hoc enigma aliter solutum fuit in quatuor numeris in enigma-

te 129. ut & sunt octavo, nono, decimo, undecimo. ut & sunt octavo, nono, decimo, undecimo.

128 Numerum invenire, ita ut tres quadrati ex eius tri-

CXXVIII.

bus partibus datis descripti, & in unam summam collecti, efficiant ipsum numerum, inventum, vel alium quemcunque datum.

SIT. primum inveniendus numerus, ita ut tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$, descripti, & in unam summam collecti, efficiant ipsum numerum inventum. Ponatur ille numerus 120. cuius $\frac{1}{2}$ erunt 60. & $\frac{1}{3}$ erunt 40. & $\frac{1}{4}$ erunt 30. Quadrati harum partium, 60^2 , 40^2 , 30^2 , simul efficiunt 5000 . Numerus aequalis numero posito, 120. Divisa igitur 1. per 5000 , fiet $\frac{1}{5000}$ numerus quæsitus (quod numeri Coefficientes sint collaterales.) Huius $\frac{1}{5000}$ sunt $\frac{1}{1000}$, & huius quadratus $\frac{1}{1000000}$. Et $\frac{1}{1000}$ sunt $\frac{1}{1000}$, cuius quadratus $\frac{1}{1000000}$. Et $\frac{1}{1000}$ est $\frac{1}{1000}$, cuius quadratus $\frac{1}{1000000}$, qui tres quadrati faciunt summam $\frac{1}{1000000}$. Nam idem numerus produciatur ex huius numeratore in illius denominatore, & ex denominatore in numeratore, nimirum numerus 120. $120 \times 120 = 14400$.

SIT. deinde numerus inveniendus, ita ut tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$, descripti faciant numerum 3796. Huius $\frac{1}{2}$ sunt 1898, & $\frac{1}{3}$ sunt 1265, & $\frac{1}{4}$ sunt 949. Quadrati in unam summam collecti, 1898^2 , 1265^2 , 949^2 , qui numerus equalis esse debet numero 3796. Divisis ergo 3796. per 1898 , fiet 2. $1898 \times 2 = 3796$. & 1265. 60. numerus quæsitus. Huius enim $\frac{1}{2}$ est 632.5, & $\frac{1}{3}$ sunt 423.3, & 30. & quadrati horum numerorum 3600. 1796. 900. faciunt summam 1796.

SIT. denique inveniendus numerus, ita ut tres quadrati ex eius $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$, descripti summam faciant 10. Ponatur numerus quæsitus 120. Huius partes datæ sunt $\frac{1}{2}$ 60. & $\frac{1}{3}$ 40. & $\frac{1}{4}$ 30. quarum quadrati 60^2 , 40^2 , 30^2 , faciunt summam 5000 . Numerus aequalis numero 10. Divisis ergo 10. per 5000 , fiet $\frac{1}{500}$. Huius $\frac{1}{2}$ sunt $\frac{1}{1000}$, & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{1}{1500}$, & $\frac{1}{4}$ sunt $\frac{1}{2000}$, quarum partium quadrati $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{2250000}$, & $\frac{1}{4000000}$ efficiunt summam $\frac{1}{1000000}$. hoc est, 10.

129 Datum numerum in quotlibet numeros parti, ita ut quilibet sequens superet præcedentem dato numero.

CXXIX.

DATVS numerus 200. tribuendus sit in sex, ut secundus superet primum numero 5, tertius secundum numero 2, quartus tertium numero 10, quintus quartum unitate. Et sextus quintum numero 5. Ponatur primus 120. Erit igitur secundus 125. Tertius 127. Quartus 137. Quintus 147. Sextus 152.

Hh

+ 7.

+ 7. Quartus 12 + 17. Quintus 12 + 18. Et sextus 12 + 33. Hi omnes faciunt 62 + 80. quæ summa æqualis esse debet dato numero 100. Ablatis ergo 80. vtrinque, erit æquatio inter 62. & 120. Diuisioq. 120. per 6. fiet 12. 20. primus numerus. Secundus ergo erit 25. Tertius 27. Quartus 37. Quintus 38. & sextus 53. qui simul faciunt 200. & problema absoluunt.

DEBET autem datus numerus maior esse summa, quæ ex datis excessibus colligitur, si sequens quilibet excessus præcedenti addatur. Vt quia in dato exemplo, si primus numerus foret 5. secundus esset 7. tertius 17. quartus 18. & quintus 33. qui omnes faciunt 80. oportet datum numerum maiorem esse, quam 80. nimirum 81. vel 82. vel 100. vel 300. &c. Id quod ipsa operatio docebit. Si enim datus numerus esset 79. fieret æquatio inter 62 + 80. & 79. quod fieri nequit.

CXXX.

130 Duos numeros inuenire in proportionē data, ita vt alteruter ductus in quadratum alterius faciat numerum quemcumque datum.

SINT inueniendi duo numeri in proportionē tripla, ita vt alteruter ipsorum in quadratum alterius ductus faciat 192. Ponatur minor 12. ideoq. maior 32. Ex maiore 32 in quadratum minoris fit numerus 32 æqualis 192. Diuisis igitur 192 per 32 fiet 6. & 12. 4. minor numerus. Maior ergo erit 12. Nam ex 12. in 16. quadratum minoris numeri 4. fit datus numerus 192.

RVRSVS ex minore 12. in 98. quadratum maioris fit numerus 98. æqualis 192. Diuisis ergo 192. per 9. fiet 12. 21. siue 24. & 12. 4. 24. primus numerus 7. secundus vero huius triplus erit 42. In huius quadratum 42 æ 1764. si ducatur primus 42 æ 42. fiet numerus 42 æ 1764. siue 42 æ 7077888. hoc est 192.

CXXXI.

131 Duobus numeris datis, alium tertium inuenire, ita vt tres habeantur numeri, quorum bini simul sumpti, si in tertium ducantur, procreentur tres numeri Arithmetice proportionales.

DATI sint numeri 10. & 30. inueniendusq. sit tertius, ita vt bini simul sumpti, & in tertium multiplicati producant tres numeros Arithmetice proportionales. Ponatur numerus quæsitus 12. Summa ex 12. & 10. est 12 + 10. quæ ducta in tertium 30. facit 302 + 300. Summa vero ex 12. & 30. est 12 + 30. quæ ducta in tertium 10 facit 102 + 300. Summa denique ex 10. & 30. est 40. quæ ducta in tertium 12. facit 402. ita vt tres numeri procreati sint 302 + 300. 102 + 300. & 402. qui eundem debent habere excessum.

Sed quia nondum constat, quis eorum sit maximus, & quis medius, & quis minimus: statuemus $302 + 300$. esse maximum: $102 + 300$. medium, & 402 . minimum. Excessus priorum est 202 . posteriorum $300 - 302$. qui excessus æquales debent esse. Additis igitur 302 utrinque, erit æquatio inter 502 . & 300 . Diuisisq. 300 . per 50 fiet 126 . numerus quæsitus, ita ut tres numeri sint 610 . 300 . & 6 . & 10 . sit summa 16 . quæ ducta in 30 facit 480 . Et ex 6 . & 30 . sit summa 36 . quæ ducta in 10 . facit 360 . Denique ex 10 . & 30 . sit summa 40 . quæ ducta in 6 . facit 240 . Sunt autem hi tres producti 480 . 360 . 240 . Arithmeticè proportionales, cum eorum excessus sit 120 .

QVOD si statuemus maximum $302 + 300$. medium 402 . & minimum $102 + 300$. erit priorum excessus $300 - 102$. & posteriorum $302 - 300$. qui illi æqualis esse debet. Additis ergo 300 . utrobique, erit æquatio inter $600 - 102$. & 302 . Additisq. rursum 102 utrinque, inter 600 . & 402 . Diuisis igitur 600 . per 40 . fiet 15 . numerus quæsitus, eruntq. tres numeri, 15 . 10 . 30 . Nam ex 15 . & 10 . sit summa 25 . quæ ducta in 30 . facit 750 . At ex 15 . & 30 . sit summa 45 . quæ ducta in 10 facit 450 . Denique ex 10 . & 30 . sit summa 40 . quæ ducta in 15 . facit 600 . Atque hi tres numeri producti 750 . 600 . 450 . habent eundem excessum 150 .

NEQUE vero maximus esse potest 402 . & medius $302 + 300$. & minimus $102 + 300$. Nam inter priores esset excessus $102 - 300$. & inter posteriores 202 . qui æqualis esse non potest priori excessui, cum sit maior. Est ergo maximus $302 + 300$. cum etiam maior sit, quam $102 + 300$. Et uterque aliorum potest esse medius, vel minimus, ut patuit.

HOC problema solutū etiam fuit in enigmate 86. ubi dati sunt duo numeri, ita ut tres numeri producti tribus modis possint esse proportionales Arithmeticè.

132 Tres numeros inuenire, ita ut primus ac secundus cum data parte tertij. Item secundus & tertius cum parte data primi: Nec non tertius ac primus cum parte data secundi, efficiant unum eundemq. numerum datum.

TAM primus ac secundus cum $\frac{1}{2}$. tertij, quam secundus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. primi, quam tertius ac primus cum $\frac{1}{4}$. secundi debeant facere 100 . Ponatur tertius 12 . cuius $\frac{1}{2}$. cum primo & secundo debent facere 100 . ac propterea hi duo, antequam acciperent $\frac{1}{2}$. tertio, habuerunt $100 - \frac{1}{2} \cdot 12$. Et quia secundus ac tertius cum $\frac{1}{3}$. primi debent quoque facere 100 . si ex 100 . demamus tertium, nimirum 12 . erit reliquus numerus $100 - 12$. solus secundus una cum $\frac{1}{3}$. primi. Quoniam autem secundus, ac totus primus fecerunt $100 - \frac{1}{3} \cdot 12$. Et hi duo simul superant secundum, ac $\frac{1}{3}$. primi, semisse eiusdem primi: si ex $100 - \frac{1}{3} \cdot 12$. summa primi & secundi, auferemus $100 - 12$. valorem solius secundi cum $\frac{1}{3}$. primi; erit reliquus

ALITER instrui poterit æquatio, postquam inueniet fuerint par-
tes $\frac{1}{2}$ 2e. 1 2e. 30 — $1 \frac{1}{2}$ 2e. hoc scilicet modo. Quoniam ex prima
in tertiam fieri debet 1 8. numerus videlicet æqualis ei, qui fit ex
media in se. si diuidemus 1 8. per primam, id est, per $\frac{1}{2}$ 2e. fiet
Quotiens 4 2e. qui ductus in $\frac{1}{2}$ 2e. producit 1 8. Ac proinde tertia
pars erit 4 2e. æqualis nimirum alteri parti tertia inuenite 30 —
 $1 \frac{1}{2}$ 2e. Additis ergo $1 \frac{1}{2}$ 2e. utrobique, erit æqualitas inter 5 $\frac{1}{2}$ 2e. &
30. Diuisiq; 30. per 5 $\frac{1}{2}$ 2e. fiet 1 2e. 5 8. ut prius.

Ænigma hoc solucimus quoque in ænigmatæ 171. sed alio exem-
plo proposito.

434 Tres numeros inuenire, ita ut primus cum datis quib-
libet unitatibus secundum numerum faciat æqualem
ei, qui secundo superest, item secundus cum
quotcumque unitatibus tertia faciat alium num-
rum æqualem ei, qui tertio superest. Tertius de-
nique, acceptis quotuis unitatibus a primo, faciat
numerum, qui ad reliquum primi habeat propor-
tionem datam.

SVMAT primus a secundo 40. unitates: secundus a tertio 66.
unitates: tertius denique a primo 72. unitates, ita ut primus faciat
numerum æqualem reliquo secundi: secundus item æqualem ei, qui
tertio remanet: tertius autem numerum faciat quintuplum eius,
qui primo superest. Ponamus primus 1 2e. Ergo acceptis 40. a se-
cundo habebit 1 2e + 40. Ac tantumdem tunc superesse debet secun-
do. Secundus ergo antequam daret 40. primo, habuit 1 2e + 80.
qui postquam accepit 16. tertio, habebit 1 2e + 176. Ac tantun-
dem superesse tunc debet tertio, ideoq; antequam daret 16. secun-
do, habuit 1 2e + 192. qui si a primo accipiat 72, habebit 1 2e + 264.
qui numerus debet esse quintuplus numeri 1 2e — 72, qui primo
postquam dederit 72, superest. Ergo numerus huius quintuplus
5 2e + 160. æqualis erit nunc 1 2e + 264. quem tertius conficit.
Additis autem 66. utrobique, erit æquatio inter 5 2e. & 1 2e + 624.
Et ablatis 1 2e. utrobique, inter 4 2e. & 624. Diuisus ergo 624. per 4
fiet 1 2e. 156. primus numerus. Ac proinde secundus, qui inuen-
tus fuit 1 2e + 80. erit 236. Tertius vero, quem inuenimus esse
1 2e + 192. erit 348. Atque tres hi numeri problema efficiunt, ut
probare potes.

S C H O L I V M.

IN similibus questionibus proponitur aliquando problema, quod dissolui
nequit, id quod æquatio inuenta proclatæ monuit. Vt si in proposito pro-
blemate

blamare quis diceret, tertium acceptis 72. a primo subtrahere quod est numerum
reliquum primi aequalē. fieret quatio impossibilis: Nam tunc tunc haberet
ut dicitur est, 1. 72 + 264. qui aequalis nullo modo est potest numero 1. 72
+ 72. quo primo superest, nimirum 264. 264 + 72. 336. 336 + 72. 408. 408 + 72. 480. 480 + 72. 552. 552 + 72. 624. 624 + 72. 696. 696 + 72. 768. 768 + 72. 840. 840 + 72. 912. 912 + 72. 984. 984 + 72. 1056. 1056 + 72. 1128. 1128 + 72. 1200. 1200 + 72. 1272. 1272 + 72. 1344. 1344 + 72. 1416. 1416 + 72. 1488. 1488 + 72. 1560. 1560 + 72. 1632. 1632 + 72. 1704. 1704 + 72. 1776. 1776 + 72. 1848. 1848 + 72. 1920. 1920 + 72. 1992. 1992 + 72. 2064. 2064 + 72. 2136. 2136 + 72. 2208. 2208 + 72. 2280. 2280 + 72. 2352. 2352 + 72. 2424. 2424 + 72. 2496. 2496 + 72. 2568. 2568 + 72. 2640. 2640 + 72. 2712. 2712 + 72. 2784. 2784 + 72. 2856. 2856 + 72. 2928. 2928 + 72. 3000. 3000 + 72. 3072. 3072 + 72. 3144. 3144 + 72. 3216. 3216 + 72. 3288. 3288 + 72. 3360. 3360 + 72. 3432. 3432 + 72. 3504. 3504 + 72. 3576. 3576 + 72. 3648. 3648 + 72. 3720. 3720 + 72. 3792. 3792 + 72. 3864. 3864 + 72. 3936. 3936 + 72. 4008. 4008 + 72. 4080. 4080 + 72. 4152. 4152 + 72. 4224. 4224 + 72. 4296. 4296 + 72. 4368. 4368 + 72. 4440. 4440 + 72. 4512. 4512 + 72. 4584. 4584 + 72. 4656. 4656 + 72. 4728. 4728 + 72. 4800. 4800 + 72. 4872. 4872 + 72. 4944. 4944 + 72. 5016. 5016 + 72. 5088. 5088 + 72. 5160. 5160 + 72. 5232. 5232 + 72. 5304. 5304 + 72. 5376. 5376 + 72. 5448. 5448 + 72. 5520. 5520 + 72. 5592. 5592 + 72. 5664. 5664 + 72. 5736. 5736 + 72. 5808. 5808 + 72. 5880. 5880 + 72. 5952. 5952 + 72. 6024. 6024 + 72. 6096. 6096 + 72. 6168. 6168 + 72. 6240. 6240 + 72. 6312. 6312 + 72. 6384. 6384 + 72. 6456. 6456 + 72. 6528. 6528 + 72. 6600. 6600 + 72. 6672. 6672 + 72. 6744. 6744 + 72. 6816. 6816 + 72. 6888. 6888 + 72. 6960. 6960 + 72. 7032. 7032 + 72. 7104. 7104 + 72. 7176. 7176 + 72. 7248. 7248 + 72. 7320. 7320 + 72. 7392. 7392 + 72. 7464. 7464 + 72. 7536. 7536 + 72. 7608. 7608 + 72. 7680. 7680 + 72. 7752. 7752 + 72. 7824. 7824 + 72. 7896. 7896 + 72. 7968. 7968 + 72. 8040. 8040 + 72. 8112. 8112 + 72. 8184. 8184 + 72. 8256. 8256 + 72. 8328. 8328 + 72. 8400. 8400 + 72. 8472. 8472 + 72. 8544. 8544 + 72. 8616. 8616 + 72. 8688. 8688 + 72. 8760. 8760 + 72. 8832. 8832 + 72. 8904. 8904 + 72. 8976. 8976 + 72. 9048. 9048 + 72. 9120. 9120 + 72. 9192. 9192 + 72. 9264. 9264 + 72. 9336. 9336 + 72. 9408. 9408 + 72. 9480. 9480 + 72. 9552. 9552 + 72. 9624. 9624 + 72. 9696. 9696 + 72. 9768. 9768 + 72. 9840. 9840 + 72. 9912. 9912 + 72. 9984. 9984 + 72. 10056. 10056 + 72. 10128. 10128 + 72. 10200. 10200 + 72. 10272. 10272 + 72. 10344. 10344 + 72. 10416. 10416 + 72. 10488. 10488 + 72. 10560. 10560 + 72. 10632. 10632 + 72. 10704. 10704 + 72. 10776. 10776 + 72. 10848. 10848 + 72. 10920. 10920 + 72. 10992. 10992 + 72. 11064. 11064 + 72. 11136. 11136 + 72. 11208. 11208 + 72. 11280. 11280 + 72. 11352. 11352 + 72. 11424. 11424 + 72. 11496. 11496 + 72. 11568. 11568 + 72. 11640. 11640 + 72. 11712. 11712 + 72. 11784. 11784 + 72. 11856. 11856 + 72. 11928. 11928 + 72. 12000. 12000 + 72. 12072. 12072 + 72. 12144. 12144 + 72. 12216. 12216 + 72. 12288. 12288 + 72. 12360. 12360 + 72. 12432. 12432 + 72. 12504. 12504 + 72. 12576. 12576 + 72. 12648. 12648 + 72. 12720. 12720 + 72. 12792. 12792 + 72. 12864. 12864 + 72. 12936. 12936 + 72. 13008. 13008 + 72. 13080. 13080 + 72. 13152. 13152 + 72. 13224. 13224 + 72. 13296. 13296 + 72. 13368. 13368 + 72. 13440. 13440 + 72. 13512. 13512 + 72. 13584. 13584 + 72. 13656. 13656 + 72. 13728. 13728 + 72. 13800. 13800 + 72. 13872. 13872 + 72. 13944. 13944 + 72. 14016. 14016 + 72. 14088. 14088 + 72. 14160. 14160 + 72. 14232. 14232 + 72. 14304. 14304 + 72. 14376. 14376 + 72. 14448. 14448 + 72. 14520. 14520 + 72. 14592. 14592 + 72. 14664. 14664 + 72. 14736. 14736 + 72. 14808. 14808 + 72. 14880. 14880 + 72. 14952. 14952 + 72. 15024. 15024 + 72. 15096. 15096 + 72. 15168. 15168 + 72. 15240. 15240 + 72. 15312. 15312 + 72. 15384. 15384 + 72. 15456. 15456 + 72. 15528. 15528 + 72. 15600. 15600 + 72. 15672. 15672 + 72. 15744. 15744 + 72. 15816. 15816 + 72. 15888. 15888 + 72. 15960. 15960 + 72. 16032. 16032 + 72. 16104. 16104 + 72. 16176. 16176 + 72. 16248. 16248 + 72. 16320. 16320 + 72. 16392. 16392 + 72. 16464. 16464 + 72. 16536. 16536 + 72. 16608. 16608 + 72. 16680. 16680 + 72. 16752. 16752 + 72. 16824. 16824 + 72. 16896. 16896 + 72. 16968. 16968 + 72. 17040. 17040 + 72. 17112. 17112 + 72. 17184. 17184 + 72. 17256. 17256 + 72. 17328. 17328 + 72. 17400. 17400 + 72. 17472. 17472 + 72. 17544. 17544 + 72. 17616. 17616 + 72. 17688. 17688 + 72. 17760. 17760 + 72. 17832. 17832 + 72. 17904. 17904 + 72. 17976. 17976 + 72. 18048. 18048 + 72. 18120. 18120 + 72. 18192. 18192 + 72. 18264. 18264 + 72. 18336. 18336 + 72. 18408. 18408 + 72. 18480. 18480 + 72. 18552. 18552 + 72. 18624. 18624 + 72. 18696. 18696 + 72. 18768. 18768 + 72. 18840. 18840 + 72. 18912. 18912 + 72. 18984. 18984 + 72. 19056. 19056 + 72. 19128. 19128 + 72. 19200. 19200 + 72. 19272. 19272 + 72. 19344. 19344 + 72. 19416. 19416 + 72. 19488. 19488 + 72. 19560. 19560 + 72. 19632. 19632 + 72. 19704. 19704 + 72. 19776. 19776 + 72. 19848. 19848 + 72. 19920. 19920 + 72. 19992. 19992 + 72. 20064. 20064 + 72. 20136. 20136 + 72. 20208. 20208 + 72. 20280. 20280 + 72. 20352. 20352 + 72. 20424. 20424 + 72. 20496. 20496 + 72. 20568. 20568 + 72. 20640. 20640 + 72. 20712. 20712 + 72. 20784. 20784 + 72. 20856. 20856 + 72. 20928. 20928 + 72. 21000. 21000 + 72. 21072. 21072 + 72. 21144. 21144 + 72. 21216. 21216 + 72. 21288. 21288 + 72. 21360. 21360 + 72. 21432. 21432 + 72. 21504. 21504 + 72. 21576. 21576 + 72. 21648. 21648 + 72. 21720. 21720 + 72. 21792. 21792 + 72. 21864. 21864 + 72. 21936. 21936 + 72. 22008. 22008 + 72. 22080. 22080 + 72. 22152. 22152 + 72. 22224. 22224 + 72. 22296. 22296 + 72. 22368. 22368 + 72. 22440. 22440 + 72. 22512. 22512 + 72. 22584. 22584 + 72. 22656. 22656 + 72. 22728. 22728 + 72. 22800. 22800 + 72. 22872. 22872 + 72. 22944. 22944 + 72. 23016. 23016 + 72. 23088. 23088 + 72. 23160. 23160 + 72. 23232. 23232 + 72. 23304. 23304 + 72. 23376. 23376 + 72. 23448. 23448 + 72. 23520. 23520 + 72. 23592. 23592 + 72. 23664. 23664 + 72. 23736. 23736 + 72. 23808. 23808 + 72. 23880. 23880 + 72. 23952. 23952 + 72. 24024. 24024 + 72. 24096. 24096 + 72. 24168. 24168 + 72. 24240. 24240 + 72. 24312. 24312 + 72. 24384. 24384 + 72. 24456. 24456 + 72. 24528. 24528 + 72. 24600. 24600 + 72. 24672. 24672 + 72. 24744. 24744 + 72. 24816. 24816 + 72. 24888. 24888 + 72. 24960. 24960 + 72. 25032. 25032 + 72. 25104. 25104 + 72. 25176. 25176 + 72. 25248. 25248 + 72. 25320. 25320 + 72. 25392. 25392 + 72. 25464. 25464 + 72. 25536. 25536 + 72. 25608. 25608 + 72. 25680. 25680 + 72. 25752. 25752 + 72. 25824. 25824 + 72. 25896. 25896 + 72. 25968. 25968 + 72. 26040. 26040 + 72. 26112. 26112 + 72. 26184. 26184 + 72. 26256. 26256 + 72. 26328. 26328 + 72. 26400. 26400 + 72. 26472. 26472 + 72. 26544. 26544 + 72. 26616. 26616 + 72. 26688. 26688 + 72. 26760. 26760 + 72. 26832. 26832 + 72. 26904. 26904 + 72. 26976. 26976 + 72. 27048. 27048 + 72. 27120. 27120 + 72. 27192. 27192 + 72. 27264. 27264 + 72. 27336. 27336 + 72. 27408. 27408 + 72. 27480. 27480 + 72. 27552. 27552 + 72. 27624. 27624 + 72. 27696. 27696 + 72. 27768. 27768 + 72. 27840. 27840 + 72. 27912. 27912 + 72. 27984. 27984 + 72. 28056. 28056 + 72. 28128. 28128 + 72. 28200. 28200 + 72. 28272. 28272 + 72. 28344. 28344 + 72. 28416. 28416 + 72. 28488. 28488 + 72. 28560. 28560 + 72. 28632. 28632 + 72. 28704. 28704 + 72. 28776. 28776 + 72. 28848. 28848 + 72. 28920. 28920 + 72. 28992. 28992 + 72. 29064. 29064 + 72. 29136. 29136 + 72. 29208. 29208 + 72. 29280. 29280 + 72. 29352. 29352 + 72. 29424. 29424 + 72. 29496. 29496 + 72. 29568. 29568 + 72. 29640. 29640 + 72. 29712. 29712 + 72. 29784. 29784 + 72. 29856. 29856 + 72. 29928. 29928 + 72. 30000. 30000 + 72. 30072. 30072 + 72. 30144. 30144 + 72. 30216. 30216 + 72. 30288. 30288 + 72. 30360. 30360 + 72. 30432. 30432 + 72. 30504. 30504 + 72. 30576. 30576 + 72. 30648. 30648 + 72. 30720. 30720 + 72. 30792. 30792 + 72. 30864. 30864 + 72. 30936. 30936 + 72. 31008. 31008 + 72. 31080. 31080 + 72. 31152. 31152 + 72. 31224. 31224 + 72. 31296. 31296 + 72. 31368. 31368 + 72. 31440. 31440 + 72. 31512. 31512 + 72. 31584. 31584 + 72. 31656. 31656 + 72. 31728. 31728 + 72. 31800. 31800 + 72. 31872. 31872 + 72. 31944. 31944 + 72. 32016. 32016 + 72. 32088. 32088 + 72. 32160. 32160 + 72. 32232. 32232 + 72. 32304. 32304 + 72. 32376. 32376 + 72. 32448. 32448 + 72. 32520. 32520 + 72. 32592. 32592 + 72. 32664. 32664 + 72. 32736. 32736 + 72. 32808. 32808 + 72. 32880. 32880 + 72. 32952. 32952 + 72. 33024. 33024 + 72. 33096. 33096 + 72. 33168. 33168 + 72. 33240. 33240 + 72. 33312. 33312 + 72. 33384. 33384 + 72. 33456. 33456 + 72. 33528. 33528 + 72. 33600. 33600 + 72. 33672. 33672 + 72. 33744. 33744 + 72. 33816. 33816 + 72. 33888. 33888 + 72. 33960. 33960 + 72. 34032. 34032 + 72. 34104. 34104 + 72. 34176. 34176 + 72. 34248. 34248 + 72. 34320. 34320 + 72. 34392. 34392 + 72. 34464. 34464 + 72. 34536. 34536 + 72. 34608. 34608 + 72. 34680. 34680 + 72. 34752. 34752 + 72. 34824. 34824 + 72. 34896. 34896 + 72. 34968. 34968 + 72. 35040. 35040 + 72. 35112. 35112 + 72. 35184. 35184 + 72. 35256. 35256 + 72. 35328. 35328 + 72. 35400. 35400 + 72. 35472. 35472 + 72. 35544. 35544 + 72. 35616. 35616 + 72. 35688. 35688 + 72. 35760. 35760 + 72. 35832. 35832 + 72. 35904. 35904 + 72. 35976. 35976 + 72. 36048. 36048 + 72. 36120. 36120 + 72. 36192. 36192 + 72. 36264. 36264 + 72. 36336. 36336 + 72. 36408. 36408 + 72. 36480. 36480 + 72. 36552. 36552 + 72. 36624. 36624 + 72. 36696. 36696 + 72. 36768. 36768 + 72. 36840. 36840 + 72. 36912. 36912 + 72. 36984. 36984 + 72. 37056. 37056 + 72. 37128. 37128 + 72. 37200. 37200 + 72. 37272. 37272 + 72. 37344. 37344 + 72. 37416. 37416 + 72. 37488. 37488 + 72. 37560. 37560 + 72. 37632. 37632 + 72. 37704. 37704 + 72. 37776. 37776 + 72. 37848. 37848 + 72. 37920. 37920 + 72. 37992. 37992 + 72. 38064. 38064 + 72. 38136. 38136 + 72. 38208. 38208 + 72. 38280. 38280 + 72. 38352. 38352 + 72. 38424. 38424 + 72. 38496. 38496 + 72. 38568. 38568 + 72. 38640. 38640 + 72. 38712. 38712 + 72. 38784. 38784 + 72. 38856. 38856 + 72. 38928. 38928 + 72. 39000. 39000 + 72. 39072. 39072 + 72. 39144. 39144 + 72. 39216. 39216 + 72. 39288. 39288 + 72. 39360. 39360 + 72. 39432. 39432 + 72. 39504. 39504 + 72. 39576. 39576 + 72. 39648. 39648 + 72. 39720. 39720 + 72. 39792. 39792 + 72. 39864. 39864 + 72. 39936. 39936 + 72. 40008. 40008 + 72. 40080. 40080 + 72. 40152. 40152 + 72. 40224. 40224 + 72. 40296. 40296 + 72. 40368. 40368 + 72. 40440. 40440 + 72. 40512. 40512 + 72. 40584. 40584 + 72. 40656. 40656 + 72. 40728. 40728 + 72. 40800. 40800 + 72. 40872. 40872 + 72. 40944. 40944 + 72. 41016. 41016 + 72. 41088. 41088 + 72. 41160. 41160 + 72. 41232. 41232 + 72. 41304. 41304 + 72. 41376. 41376 + 72. 41448. 41448 + 72. 41520. 41520 + 72. 41592. 41592 + 72. 41664. 41664 + 72. 41736. 41736 + 72. 41808. 41808 + 72. 41880. 41880 + 72. 41952. 41952 + 72. 42024. 42024 + 72. 42096. 42096 + 72. 42168. 42168 + 72. 42240. 42240 + 72. 42312. 42312 + 72. 42384. 42384 + 72. 42456. 42456 + 72. 42528. 42528 + 72. 42600. 42600 + 72. 42672. 42672 + 72. 42744. 42744 + 72. 42816. 42816 + 72. 42888. 42888 + 72. 42960. 42960 + 72. 43032. 43032 + 72. 43104. 43104 + 72. 43176. 43176 + 72. 43248. 43248 + 72. 43320. 43320 + 72. 43392. 43392 + 72. 43464. 43464 + 72. 43536. 43536 + 72. 43608. 43608 + 72. 43680. 43680 + 72. 43752. 43752 + 72. 43824. 43824 + 72. 43896. 43896 + 72. 43968. 43968 + 72. 44040. 44040 + 72. 44112. 44112 + 72. 44184. 44184 + 72. 44256. 44256 + 72. 44328. 44328 + 72. 44400. 44400 + 72. 44472. 44472 + 72. 44544. 44544 + 72. 44616. 44616 + 72. 44688. 44688 + 72. 44760. 44760 + 72. 44832. 44832 + 72. 44904. 44904 + 72. 44976. 44976 + 72. 45048. 45048 + 72. 45120. 45120 + 72. 45192. 45192 + 72. 45264. 45264 + 72. 45336. 45336 + 72. 45408. 45408 + 72. 45480. 45480 + 72. 45552. 45552 + 72. 45624. 45624 + 72. 45696. 45696 + 72. 45768. 45768 + 72. 45840. 45840 + 72. 45912. 45912 + 72. 45984. 45984 + 72. 46056. 46056 + 72. 46128. 46128 + 72. 46200. 46200 + 72. 46272. 46272 + 72. 46344. 46344 + 72. 46416. 46416 + 72. 46488. 46488 + 72. 46560. 46560 + 72. 46632. 46632 + 72. 46704. 46704 + 72. 46776. 46776 + 72. 46848. 46848 + 72. 46920. 46920 + 72. 46992. 46992 + 72. 47064. 47064 + 72. 47136. 47136 + 72. 47208. 47208 + 72. 47280. 47280 + 72. 47352. 47352 + 72. 47424. 47424 + 72. 47496. 47496 + 72. 47568. 47568 + 72. 47640. 47640 + 72. 47712. 47712 + 72. 47784. 47784 + 72. 47856. 47856 + 72. 47928. 47928 + 72. 48000. 48000 + 72. 48072. 48072 + 72. 48144. 48144 + 72. 48216. 48216 + 72. 48288. 48288 + 72. 48360. 48360 + 72. 48432. 48432 + 72. 48504. 48504 + 72. 48576. 48576 + 72. 48648. 48648 + 72. 48720. 48720 + 72. 48792. 48792 + 72. 48864. 48864 + 72. 48936. 48936 + 72. 49008. 49008 + 72. 49080. 49080 + 72. 49152. 49152 + 72. 49224. 49224 + 72. 49296. 49296 + 72. 49368. 49368 + 72. 49440. 49440 + 72. 49512. 49512 + 72. 49584. 49584 + 72. 49656. 49656 + 72. 49728. 49728 + 72. 49800. 49800 + 72. 49872. 49872 + 72. 49944. 49944 + 72. 50016. 50016 + 72. 50088. 50088 + 72. 50

SIT datus quadratus 100. qui per ænigma 90. vel eius scholium diuidatur in duos quadratos, quod per dictum scholium ita fiet. Latus quadrati dati, nimirum 10. educatur in quemlibet numerum, vt in 5. Duplum huius numeri productum 100. diuidatur per quadratum numeri 5. assumpti auctum unitate, nimirum per 26. Quotientis enim $\frac{100}{26}$ quadratus $\frac{10000}{676}$ siue 14 $\frac{14}{676}$. erit vnus quadratus, quo dempto ex 100. quadrato dato, reliquus fiet alter quadratus 85 $\frac{14}{676}$. qui duo quadrati efficiunt 100. Lateraliter autem eorum 10. & 14. inter se multiplicata faciunt $\frac{10000}{676}$ siue 35 $\frac{14}{676}$. cuius productum numeri duplum $\frac{10000}{676}$ siue 71 $\frac{14}{676}$. erit numerus, qui queritur. Is enim adiectus ad 100. facit 171 $\frac{14}{676}$ siue $\frac{115540}{676}$ quadratum, cuius latus $\frac{339}{26}$ siue 13 $\frac{13}{26}$. Idem numerus 71 $\frac{14}{676}$ demptus ex eodem quadrato dato 100. relinquit 28 $\frac{14}{676}$ siue $\frac{1960}{676}$ numerum quoque quadratum, cuius latus $\frac{44}{26}$ siue 5 $\frac{11}{13}$.

RATIO huius operationis hæc est. Quando quadratus datus 100. diuiditur in duos quadratos, latus dati quadrati, & duo latera inuentorum quadratorum, si ad lineas contrahantur, & constituunt triangulum rectangulum; quandoquidem duo quadrata inuenta, ex eorum lateribus descripta, æqualia sunt dato quadrato. Igitur, vt in Lemmate sequenti demonstrabimus, rectangulum his comprehensum sub illis duobus lateribus, additum quadrato dato, efficit quadratum, cuius nimirum latus duobus illis lateribus æquale est: & ablatum ex eodem quadrato dato, reliquum facit quadratum, cuius videlicet latus est duorum illorum laterum differentia.

SI idem quadratus 100. distribuatur in duos quadratos 36. & 64. quorum latera 6. & 8. inter se multiplicata faciunt 48. erit huius numeri duplum 96. is, quem querimus. Hic enim adiectus ad 100. facit quadratum 196. cuius latus 14. & detractus ex 100. reliquum facit quadratum 4. cuius latus 2.

LEMMA.

IN omni triangulo rectangulo, rectangulum his sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum; vna cum quadrato lateris recto angulo oppositi, æquale est quadrato, cuius latus ex duobus lateribus componitur. Idem vero rectangulum his sub lateribus predictis comprehensum, si ex eodem quadrato lateris recto angulo oppositi detrahatur, reliquum fiet quadratum, cuius latus differentia est predictorum duorum laterum.

SIT triangulum rectangulum ABC. Dico rectangulum his sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato, cuius latus æquale sit duobus lateribus AB, AC, simul. Et si idem rectangulum his detrahatur

dratum. Ponantur duo numeri quicunque, quorum quilibet compositus sit ex vna radice, & aliquot vnitatibus, nimirum $12+1$. & $12+5$. Quadrati horum sunt $18+62+9$. & $18+102+25$. Igitur si numerus $62+9$. addatur ad 18 . qui numerus quadratus est; fit quadratus $18+62+9$. Et si numerus $102+25$. addatur ad eundem 18 . fit quadratus $18+102+25$. Ergo si minor pars numeri dati ponatur $62+9$. & maior $102+25$. satisfactum erit problemati, si hæ partes conficiant datum numerum 65 . Faciunt autem summam $162+34$. quæ æqualis debet esse 65 . Dempis 34 . utrobique, manebit æqualitas inter 162 . & 31 . Diuisis igitur 31 . per 16 . fiet $12\frac{1}{2}$ siue $1\frac{1}{2}$. cuius quadratus $3\frac{1}{4}$ siue $3\frac{1}{4}$. erit is, qui quadratur. Minor autem pars numeri dati, quam posuimus $62+9$. erit $10\frac{1}{2}$ siue $10\frac{1}{2}$. Maior vero, quæ posita fuit $102+25$. erit $22\frac{1}{2}$ siue $44\frac{1}{2}$. quæ duæ partes simul efficiunt datum numerum 65 . Et prima addita ad quadratum inuentum $3\frac{1}{4}$. facit quadratum $3\frac{1}{4}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$. Secunda autem cum eodem quadrato $3\frac{1}{4}$. facit quadratum $13\frac{1}{4}$. cuius latus $3\frac{1}{2}$.

S C H O L I U M.

HOC anigma plures solutiones admittit, pro varietate numerorum in principio assumptorum. Nam si numeri ponantur $12+1$. & $12+2$. erant eorum quadrati $18+22+1$. & $18+42+4$. Atque si minor pars numeri dati 65 . ponatur numerus $22+1$. maior verd $42+4$. satisfactum erit problemati, cum uterque numerus cum 18 . faciat quadratum. Faciunt quidem duo numeri summam $62+5$. quæ æqualis esse debet 65 . Ablatis igitur 5 . utrobique, remanebit æqualitas inter 62 . & 60 . Diuisisq. 60 . per 6 . fiet 12 . 10 . cuius quadratus 100 . est is, qui queritur, posuimus, fuit 18 . Minor vero pars numeri dati 65 . quam posuimus $22+1$. erit 21 . Maior autem posita $42+4$. erit 44 . quæ duæ partes faciunt 65 . Et prima addita quadrato inuento 100 . facit quadratum 118 . cuius latus 11 . Secunda autem cum eodem quadrato 100 . facit quadratum 144 . cuius latus 12 .

Atque in hunc modum diuidi poterit datus numerus in plures, atque alias partes, si alij atque alij numeri assumantur compositi ex 12 . & aliquot vnitatibus.

140 Datum numerum in duas partes distribuere, & insuper quadratum inuenire, a quo si duæ partes inuenta subducantur, reliqui fiant duo quadrati.

CXL.

SIT diuidendus numerus 65 . in duas partes, & inueniendus quadratus, a quo si inuenta duæ partes demantur, reliqui fiant duo numeri quadrati. Ponantur duo numeri vtrunque, vnus compositus ex vna radice & quotlibet vnitatibus, alter vero ex vna radice

minus totidem unitatibus, nimirum $12e + 1$. & $12e - 2$. Quadrati horum erunt $18 + 42e + 4$. & $18 - 42e + 4$. Ponatur ergo quadratus, qui quæritur, $18 + 42e + 4$. a quo si auferatur numerus $42e + 4$. relinquetur quadratus 18 . Quod si posterior quadratus a priori subducatur, remanebunt $82e$. Ac vicissim si $82e$. detrahantur ex eodem priori quadrato $18 + 42e + 4$. relinquetur posterior quadratus $18 - 42e + 4$. Ergo si minor pars numeri diuidendi ponatur $42e + 4$. Et maior $82e$. satisfactum erit ænigmati; quippe cum minor dempta ex quadrato $18 + 42e + 4$. relinquat quadratum 18 . Et maior ex eodem quadrato subducta relinquat quadratum $18 - 42e + 4$. Reliquum iam est, ut hæc duæ partes $42e + 4$. & $82e$. faciant numerum datum 65 . faciunt autem summam $122e + 4$. æqualem 65 . Ablati ergo 4 . utrinque, erit æquatio inter $122e$. & 61 . Diuisisq. 61 . per 122 . fiet $12e \frac{1}{2}$. Ac propterea quadratus quæsitus, quem posuimus $18 + 42e + 4$. erit $\frac{233}{4}$. cuius latus $\frac{15}{2}$. Minor autem pars numeri diuidendi posita $42e + 4$. erit $\frac{22}{3}$. siue $\frac{11}{3}$. Maior autem posita $82e$. erit $\frac{22}{3}$. vel $\frac{22}{3}$. Prior enim ex inuento quadrato $\frac{233}{4}$. subducta relinquit quadratum $\frac{17}{4}$. cuius latus $\frac{1}{2}$. Posterior autem ex eodem quadrato $\frac{233}{4}$. detracta reliquum facit quadratum $\frac{17}{4}$. cuius latus $\frac{1}{2}$.

HOC etiam ænigma plures admittit solutiones, prout videlicet in principio alij atque alij numeri assumpti fuerint pro numeris $12e + 1$. & $12e - 2$. &c.

CXLI. 141 *Datum numerum in duas partes diuidere, ita ut earum cubi faciant summam datam quamcunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.*

DATVS numerus 10. diuidendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est, quam 250. quarta pars cubi ex 10. generati. Ponatur prima pars numerus compositus ex $12e$. & semisse dati numeri, nimirum $12e + 5$. Secunda pars, semissis eiusdem numeri dati, minus $12e$, nimirum $5 - 12e$. Ita enim duæ hæc partes numerum datum 10. conficiunt. Cubi earum sunt $12e + 158 + 752e + 125$. & $125 - 752e + 158 - 12e$. Summa eorum $308 + 250$. nam $12e + 12e$, & $-12e + 12e$. Item $+752e$, & $-752e$. se mutuo interimunt: & ex 158 . & 158 . fiunt 308 . atque $125 - 125$. faciunt 250 . Hæc ergo summa $308 + 250$. æqualis esse debet 370. Ablatis 250 utrinque, remanebit æqualitas inter 308 . & 120. Diuisis igitur 120. per 30. fiet $18 \frac{4}{5}$. & $12e \frac{2}{5}$. Prima igitur pars posita $12e + 5$. erit 7. Secunda vero, quam posuimus $5 - 12e$. erit 3. Cubi harum partium 7 & 3 sunt 343. & 27 efficiuntq. 370.

SI eodem numero 10. dato, summa cuborum proponatur 400. inueniemus æquationem inter $308 + 250$. & 400. Ablatisq. 250.

utrin-

ytinque, inter 30 & 150. Diuisis igitur 150. per 30. fiet 5. & 1. & 1. & 1. & 1. Ergo prima pars posita 1. & 1. & 1. & 1. erit 5. & 1. & 1. & 1. Secunda vero posita 5. & 1. & 1. erit 5. & 1. & 1. & 1. quæ simul faciunt 10. Cubi autem harum partium (reductis, quæ reducenda sunt) sunt 200 + 5 & 32000. & 200 + 5 & 32000. quorum summa est 400. cum + 5 & 32000. & 1. & 5 & 32000. ic mutuo interimant.

S C H O L I V M.

SINE Algebra idem anigma soluetur hoc passo. Datus numerus 20. secundum sit in duas partes, quarum cubi facere debeant summam 1960. quæ maior est, quam 2000. quarta pars cubi ex 20. generati. Dematur $\frac{1}{4}$. cubi ex dato numero 20. descripti, nimirum 2000, ex 1960. summa proposita. Et reliquus numerus 960. diuidatur per 60. triplum dati numeri 20. Quotientis namq. 16. radix quadrata 4. addita. & ablata ex 10. semisse dati numeri 20. dabit partes quasitas 14. & 6. quæ simul faciunt datum numerum 20. & earum cubi 2744. & 216. faciunt 2960.

HOC etiam anigma in enigmate 1. sequentis capitis soluemus per æquationem compositam, in qua scilicet tres numeri occurrunt, quorum unus alyis duobus est æqualis.

142 Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summa minor sit dato numero. CXLII.

HOC problema ab antecedenti non differt. Nihil enim aliud hic iubetur, nisi summam laterum datam distribuere in duas partes, quarum cubi datum efficiant numerum, qui maior sit quarta parte cubi ex summa laterum data procreati. Vt si datus numerus 1960. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 20. Diuidendus erit numerus 20. in duas partes, quarum cubi faciant 1960. vt in præcedenti problemate factum est. Nam ita numerus 1960. diuisus erit in duos cubos 2744. & 216. quorum latera 14. & 6. datam summam 20. conficiunt.

SIC etiam si datus numerus 400. diuidendus sit in duos cubos, quorum latera faciant 10. inuenientur duo cubi, (reductis, quæ reducenda sunt) 200 + 5 & 32000. & 200 + 5 & 32000. quorum latera sunt 5 + 5. & 5 + 5. si nimirum summa laterum 10. diuidatur in duas partes, vt in præcedenti enigmate, vel scholio eiusdem factum est. ita vt earum cubi efficiant 400.

143 Numerum inuenire, cuius quadratus, vel multiplex quadrati datus constituat datam partem, vel partes cubi ex eodem inuento numero procreati. CXLIII.

SIT primum inueniendus numerus, cuius quadratus constituat $\frac{8}{9}$ cubi ex inuento numero procreati. Ponatur quæsitus numerus 12. cuius quadratus est 144. & cubus 1728. Vt ergo 144. constituat $\frac{8}{9}$ numeri 12. necesse est, æqualitatem esse inter 144. & $\frac{8}{9}$ 1728. Diuisa igitur 1. per $\frac{8}{9}$. fiet 12.9. numerus quæsitus (quod numeri Cossici sint collaterales.) Huius enim quadratus 81. nonam partem constituit eiusdem cubi 729.

SIT deinde inueniendus numerus, cuius quadratus constituat $\frac{1}{4}$ cubi. Iisdem positis, erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ 1728. & 144. Diuisa ergo 1. per $\frac{1}{4}$. fiet 1728.4. vel 12.9. numerus quæsitus. Huius enim quadratus $\frac{1}{4}$. constituit $\frac{1}{4}$ cubi $\frac{1}{4}$.

RVRSVS sit inueniendus numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{1}{2}$ cubi ipsius. Ponatur numerus quæsitus 12. cuius quadratus 144. & cubus 1728. Ergo æqualitas erit inter 144. & $\frac{1}{2}$ 1728. Diuisis ergo 5. per $\frac{1}{2}$. fiet 1728.35. numerus quæsitus. Huius enim quadratus est 1225. & eius quincuplum 6125. constituit $\frac{1}{2}$ cubi 42875. ex 35. procreati.

POSTREMO inueniendus sit numerus, cuius quadrati quincuplum constituat $\frac{1}{10}$ cubi ipsius. Positis iisdem, erit æquatio inter 54. & $\frac{1}{10}$ 1728. Diuisis igitur 5. per $\frac{1}{10}$. fiet 1728. hoc est, 54. numerus quæsitus. Eius enim quadratus est 2916. cuius quincuplum 14580. constituit $\frac{1}{10}$ cubi 145800.

CXLIII. 144 Numerum inuenire, qui sui cubi constituat datam partem, vel partes.

SIT primum inueniendus numerus, qui constituat $\frac{1}{4}$ sui cubi. Ponatur quæsitus numerus 12. cuius cubus 1728. Est ergo æqualitas inter 1728. & $\frac{1}{4}$ 1728. Diuisaq. 1. per $\frac{1}{4}$. fiet 1728. (quod inter 1728. & 1728. interiecta sit denominatio 4.) & eius radix quadrata, nimirum 42. erit pretium 12. Numerus ergo quæsitus est 42. Hic enim constituit $\frac{1}{4}$ sui cubi 42. 1728.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui constituat $\frac{1}{8}$ sui cubi. Positis iisdem, fiet æquatio inter 1728. & $\frac{1}{8}$ 1728. Diuisa igitur 1. per $\frac{1}{8}$. fiet 1728. & 1728. numerus quæsitus. Eius enim cubus est 248. cuius quatuor nonas continet inuentus numerus $\frac{1}{4}$.

CXLV. 145 Duos numeros in data proportionē inuenire, ita ut minor in quadratum maioris ductus producat numerum datum.

SINT inueniendi duo numeri in proportionē sesquiquinta, ita ut minore in quadratum maioris ducto, signatur numerus 4860. Ponantur numeri quæsi 52. & 62. in proportionē sesquiquinta. Minore 52. ducto in 36.8. quadratum maioris 62. fiet numerus 1808.

180 re. æqualis 4860. Diuisus ergo 4860. per 180. fiet 1 re. 27. cuius radix cubica est 3. quia inter characteres re. & N. duo medij sunt 3. & 2e. Ergo minor numerus positus 3 re. erit 15. & maior positus 6 re. erit 18. Atque ex minore 15. in 324. quadratum maioris 18. fit numerus 4860.

S I N T. rursus in eadem proportionē sexquiquinta inueniendi duo numeri, ita vt minor ductus in quadratum maioris producat 21. Positis ijsdem, inuenietur æqualitas inter 170 re. & 1. Diuisa ergo 1. per 180. fiet 1 re. $\frac{1}{180}$. & radix cubica $\sqrt[3]{\frac{1}{180}}$. Ergo minor numerus positus 3 re. faciet $\frac{3}{180}$. hoc est $\frac{1}{60}$. Maior autem positus 6 re. erit $\frac{6}{180}$. siue $\frac{1}{30}$. Atque ex minore $\frac{1}{60}$. in $\frac{1}{30}$. quadratum maioris $\frac{1}{900}$. producitur $\frac{1}{900}$. hoc est, 1. Quando enim numerator fractionis æqualis est denominatori, fractio illa unitati æquale.

146 Numerum inuenire, qui inter duos sit medius, superetq. minorem numero dato, & superetur a maiore numero alio dato quolibet, & duo extremi efficiant summam datam quamcunque.

CXLVI.

HOC ænigma simile est ænigmati 51. & 52. sed aliter propositū, atque aliter dissolutū. Inueniendus enim sit numerus medius inter duos summam efficientes 100. ita vt minorem superet numero 15. & a maiore superetur numero 9. Quoniam maior ponitur superare medium quæsitum, numero 9. Et hic medius minorem, numero 15. liquidò constat maiorem superare minorem numero 24. Si ergo data summa 100. diuidatur in duas partes, quarum excessus 24. & ad minorem addantur 15. fiet medius quæsitus. Ponatur ergo minor pars 1 re. & maior 100 — 1 re. quæ illam superare debet numero 24. Detracta 1 re. ex 100. — 1 re. reliquus fit numerus 100 — 2 re. æqualis 24. Additis ergo 2 re. vtrinq. fiet æqualitas inter 100. & 24 + 2 re. Et ablati 24. vtrobiq. inter 76. & 2e. Diuisus igitur 76. per 2. fiet 38. minor pars, ideoq. maior erit 62. Et additis 15. ad minorem 38. fiet medius quæsitus 53. Hic enim superat minorem partem numero 15. & a maiore superatur numero 9.

147 Datum numerum in quotlibet partes distribuere, ita vt vnaquaque ad sequentem habeat datam proportionem.

CXLVII.

S I T. datus numerus 10000. diuidendus in sex partes, ita vt prima ad secundam habeat proportionem æqualitatis: secunda ad tertiam duplam: tertia ad quartam triplam: quarta ad quintam proportionem æqualitatis: & quinta ad sextam proportionem quocunque

numerus quæsitus 120. qui cum $\frac{1}{2}$. faciet 121 $\frac{1}{2}$. quæ summa superare debet 100. eodem numero, quo 100. superant 120. Ergo demptis 100. ex 121 $\frac{1}{2}$. &c. 120. ex 100. remanebunt excessus æquales. hoc est, erit æquatio inter 121 $\frac{1}{2}$ 120. &c. 100. — 120. Et addita 120. vtrobique, inter 121 $\frac{1}{2}$ 100. &c. 100. Rursusq. additis 100. vtrinq. inter 121 $\frac{1}{2}$ 200. Diuisis ergo 100. per 2 $\frac{1}{2}$. fiet 120. 88 $\frac{1}{2}$. numerus quæsitus. Nam si ad ipsum addatur eius $\frac{1}{2}$. nimirum numerus 11 $\frac{1}{2}$. fiet summa 100. quæ superat 100. numero 11 $\frac{1}{2}$. quo videlicet 100. inuentum numerum 88 $\frac{1}{2}$. superant.

SIT deinde numerus inueniendus, qui cum $\frac{1}{2}$. sui ipsius superet 100. eodem numero, quo 140. ipsum numerum inuentum superant. Ponatur numerus quæsitus 120. Ergo æquatio erit inter 121 $\frac{1}{2}$ 100. &c. 140. — 120. Et addita 120. vtrinq. inter 121 $\frac{1}{2}$ 200. — 100. &c. 140. Additisq. rursus 100. vtrobique, inter 121 $\frac{1}{2}$ 200. &c. 240. Diuisis ergo 240. per 2 $\frac{1}{2}$. fiet 120. 90. numerus quæsitus. Nam si addatur eius $\frac{1}{2}$. nimirum 60. fiet summa 150. quæ superat 100. numero 50. quo videlicet 140. numerum inuentum 90. superant.

SIT denique inueniendus numerus, qui cum $\frac{1}{2}$. ipsius faciat summam, quæ eodem numero superet 40. quo numerus 10. inuentum numerum superat. Ponatur numerus quæsitus 120. Ergo æquatio erit inter 121 $\frac{1}{2}$ 40. &c. 10. — 120. Additaq. 120. vtrobique, inter 121 $\frac{1}{2}$ 40. &c. 10. Additisq. rursus 40. vtrinq. inter 121 $\frac{1}{2}$ 20. &c. 50. Diuisis ergo 50. per 2 $\frac{1}{2}$. fiet 120. 20. quæsitus numerus, qui cum ipsius $\frac{1}{2}$. faciet summam 30. quæ numerum 40. superat numero — 10. vt patet in hac formula, vbi 40.

| | |
|------|---|
| + 30 | subducta sunt a 30. Atque eodem numero — 10. superat numerus 10. inuentum numerum 20. vt constat, si 20. ex 10. subtrahantur, vt in hac altera formula cernis. Vbi rursus vides mirabilem vim |
| + 40 | |
| — 10 | |
| + 10 | Algorithmi signorum + &c. —. quamuis dici possit, hoc exemplum non posse expediri, propterea quod |
| + 20 | numerus 20. inuentus cum $\frac{1}{2}$ id est, cum 10. facit |
| — 10 | minorem summam, quam 40. |

CII. 151 Numerum inuenire, à quo si subtrahatur data pars, vel partes, relinquatur numerus tanto minor, quam datus numerus, quanto ipse inuentus numerus eundem datum numerum datum superat.

SIT inueniendus numerus, ita vt subtracta $\frac{1}{2}$ ipsius, reliquus sit numerus tanto minor quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 120. a quo subtracta $\frac{1}{2}$. reliquæ sunt 120. quæ detractæ ex 100. relinquunt 100 — $\frac{1}{2}$ 20. Et si ex 120. demantur 120. — 100. Et quia excessus ponitur æquales, erit æquatio inter 100 — $\frac{1}{2}$ 20. &c. 120. — 100.

—100. Additisq. $\frac{1}{2}$ 2e vtrunque, inter 100. & $1\frac{1}{2}$ 2e —100. Et rursus additis 100. vtrunque, inter 200. & $1\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis ergo 200. per $1\frac{1}{2}$. id est, per $\frac{3}{2}$, fiet 120. 111 $\frac{1}{2}$. numerus, qui petitur. Cuius $\frac{1}{2}$ facit 22 $\frac{1}{2}$. id est, $\frac{45}{2}$, qui numerus demptus ex 111 $\frac{1}{2}$. id est, ex $\frac{223}{2}$. relinquit $\frac{168}{2}$. hoc est, 84. qui numerus superatur a 100. numero 11 $\frac{1}{2}$. quo videlicet inuentus numerus 111 $\frac{1}{2}$. numerum 100. superat.

SIT præterea inueniendus numerus, ita vt subtractis $\frac{1}{2}$ ipsius, reliquus numerus tanto minor sit, quam 100. quanto ipse numerus inuentus maior est, quam 100. Ponatur quæsitus numerus 120. Demptis $\frac{1}{2}$. remanent $\frac{1}{2}$ 2e. Eritq. æquatio inter 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. & $1\frac{1}{2}$ 2e — 100. Additisq. $\frac{1}{2}$ 2e vtrobique, inter 100. & $1\frac{1}{2}$ 2e — 100. Et rursus additis 100. vtrunque, inter 200. & $1\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 200. per $1\frac{1}{2}$. fiet 120. 125. numerus quæsitus. Nam si ex eo tollantur $\frac{1}{2}$ ipsius, nimirum 60. remanent 75. qui a 100. superantur numero 25. quo videlicet inuentus numerus 125. superat 100.

152 Numerum inuenire, qui in se multiplicatus, & productus in datum numerum, procreet numerum, a quo si alius datus numerus subtrahatur, reliquus fiat quicumque numerus datus.

CLII.

INVENIENDVS sit numerus, qui in se ductus, & productus in 10. faciat numerum, a quo si demantur 100. remaneat numerus 300. Ponatur quæsitus numerus 120. quo ducto in se, fit 144. & hoc ducto in 10. fit numerus 1440. a quo si demantur 100. remanent numerus 1340. qui æqualis debet esse numero 300. Additis 100. vtrobique, erit æquatio inter 1040. & 400. Diuisisq. 400. per 10. fiet 40. Ergo 120. est numerus, quem quærimus. Nam in se multiplicatus facit 40. Et ex 40. in 10. fit numerus 400. a quo si subtrahantur 100. remanent 300.

153 Progressionem Arithmeticam constituere, cuius primus, & vltimus terminus dati sint, & summa progressionis data, quando id fieri potest.

CLIII.

SIT primus terminus 5. & vltimus 10. summa vero omnium terminorum 105. Hic duo oportet inuestigare, numerum videlicet terminorum, & differentiam progressionis. Ponatur numerus terminorum 120. Et quia summa ex primo, & vltimo termino collecta multiplicata per numerum terminorum producit duplum summe progressionis, vt in Arithmetica practica, nimirum in prima regula progressionum Arithmeticarum docuimus: si summam ex primo, & vltimo termino collectam, nimirum 15. ducamus in numerum terminorum, id est, in 120. faciemus 1800. cuius semissis

K k

 $\frac{1}{2}$ 2e.

$\frac{1}{2}$ 2e. est summa progressionis, æqualis summæ datæ 105. Diuisis igitur 105. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 14. numerus terminorum, quem posuimus esse 1 2e.

I A M intermedij 12. termini debent facere summam 90. nimirum 105. dempto primo termino 5. & ultimo 10. Ponatur differentia progressionis 1 2e. eruntq. 12. termini hi sequentes.

5+1 2e. 5+2 2e. 5+3 2e. 5+4 2e. 5+5 2e. 5+6 2e. 5+7 2e. 5+8 2e. 5+9 2e. 5+10 2e. 5+11 2e. 5+12 2e.

qui omnes summam faciunt 60+78 2e. æqualem numero 90. Demptis ergo 60. utrinque, erit æqualitas inter 78 2e. & 30. Diuisisq. 30. per 78. fiet 1 2e. $\frac{1}{4}$. differentia progressionis. Est ergo hæc progressio.

5. 5 $\frac{1}{4}$. 5 $\frac{2}{4}$. 6 $\frac{1}{4}$. 6 $\frac{2}{4}$. 7 $\frac{1}{4}$. 7 $\frac{2}{4}$. 8 $\frac{1}{4}$. 8 $\frac{2}{4}$. 9 $\frac{1}{4}$. 9 $\frac{2}{4}$. 10.

quippe cum constituat 14. terminos, quorum summa est 105.

QVANDO in priori operatione reperitur numerus terminorum non integer, questio erit impossibilis: quia dari non potest talis progressio, in qua primus, atque vltimus terminus sint illi, qui dati sunt, & summa progressionis illa, quæ proponitur. Vt si in eodem exemplo summa progressionis daretur 100. & primus terminus 5. atque vltimus 10. inueniremus æquationem inter 25 2e. & 100. Diuisisq. 100. per $\frac{1}{2}$. fieret 1 2e. 13 $\frac{1}{2}$. numerus terminorum, quod fieri nequit. Nam nulla est progressio Arithmetica in rerum natura, cuius primus terminus sit 5. & vltimus 10. summæq. progressionis 100.

I T A Q V E ænigma propositum intelligendum est, quando verè talis est progressio, in qua dati numeri sint primus, & vltimus terminus, & summa progressionis. Neque vero parui æstimandum est, reperire huiusmodi progressionem per præcepta Algebrae. Nam si proponeretur hæc questio. Est progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 5. & vltimus 32. summa vero progressionis 385. quis eam facile inueniet sine Algebra? quam tamen sine magno labore reperiemus, ea viâ, quam in ænigmate præscripsimus. Inuenietur enim numerus terminorum 10. & differentia progressionis 3. ita ut progressio quaesita sit hæc.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29. 32.

CLIII. 154 Progressionem Geometricam in data proportionem constituit, cuius vltimus terminus datus sit, una cum summa progressionis.

SIT constituenda progressio in proportionem sesquialtera, cuius vlti-

ultimus terminus 19683. & summa totius progressionis 55593. Ponatur primus terminus 1 2e. Et quia si primus terminus ab ultimo subtrahatur, & reliquus numerus per denominatorem proportionis, vno minus, diuidatur, atque ad Quotientem ultimus terminus adjiciatur, fit totius progressionis summa, vt in Arithmetica practica in prima regula progressionum Geometricarum scriptum est: detrahatur 1 2e id est, primus terminus, ab ultimo 19683. & residuum 15683 — 1 2e. diuidatur per $\frac{1}{2}$. hoc est, per denominatorem proportionis 1 $\frac{1}{2}$. minus vno, & ad Quotientem 39366 — 1 2e. adjiciatur ultimus terminus 19683. fietq. tota summa progressionis 59049 — 1 2e. equalis datæ summæ 55593. Additis ergo 1 2e. vtrinq. erit æqualitas inter 59049. & 55593 + 1 2e. Et ablatis vtrobiq. 55593. inter 3456. & 1 2e. Diuisis igitur 3456. per 2. fiet 1 2e. 1728. primus videlicet terminus progressionis in proportione sesquialtera. Quocirca constituetur hæc progressio septem terminorum, qui omnes faciunt datam summam 55593.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.

155 Progressionem Geometricam in data proportione constituere, cuius primus terminus datus sit, una cum progressionis summa.

CLV.

SIT datus primus terminus proportionis sesquialteræ 1728. & summa progressionis 55593. Ponatur ultimus terminus 1 2e. a quo si primus dematur, remanet numerus 1 2e. — 1728. quo diuiso per $\frac{1}{2}$. fit Quotiens 2 2e. — 3456. Addito ergo ultimo termino 1 2e. fit summa progressionis 3 2e. — 3456. vt in Arithmetica practica diximus, æqualis datæ summæ 55593. Additisq. 3456. vtrobiq. erit æquatio inter 3 2e. & 59049. Diuisis ergo 59049. per 3. fiet 1 2e. 19683. Ultimus terminus, totaq. progressio erit hæc.

1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683. &c.

HAE C etiam duo proxima ænigmata intelligenda sunt, si verè in rerum natura tales progressionēs Geometricæ existant, in quibus ultimus terminus, vel primus sint illi, qui proponuntur, & summa progressionis sit quoque illa, quæ datur. Vnde si quaeretur progressio in proportione sesquialtera, cuius summa 1000. & ultimus terminus 500. foret questio inexplicabilis, cum nulla talis progressio existat. quod experiri poteris. Sed si quaeratur progressio Geometrica in proportione sesquialtera, cuius ultimus terminus sit 68 $\frac{1}{2}$. & summa progressionis 197 $\frac{1}{2}$. quia talis progressio in rerum natura existit, ponemus primum terminum 1 2e. qui demptus ex ultimo termino 68 $\frac{1}{2}$. relinquit 68 $\frac{1}{2}$ — 1 2e. quo numero diuiso per $\frac{1}{2}$. id est, per denominatorem proportionis minus vno, fit

Kk 2

Quo-

Quotiens $\frac{197}{2} = 98 \frac{1}{2}$. — 2 2e. & addito ultimo termino 68 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{197}{2} + 68 \frac{1}{2}$. fit numerus $\frac{265}{2} = 132 \frac{1}{2}$. — 2 2e. æqualis summæ progressionis 197 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{265}{2}$. Additis igitur 2 2e. vtroque, erit æquatio inter 2 2e + $\frac{265}{2}$. & $\frac{265}{2}$. Ablatisq. $\frac{265}{2}$ vtrunque, inter 2 2e. & $\frac{265}{2}$. Diuisis igitur $\frac{265}{2}$ per 2. fiet 1 2e. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

4. 6. 9. 12 $\frac{1}{2}$. 16 $\frac{1}{2}$. 20 $\frac{1}{2}$. 24 $\frac{1}{2}$. 28 $\frac{1}{2}$. 32 $\frac{1}{2}$.

SIC etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportionem sesquialtera, inuenietur vltimus terminus 68 $\frac{1}{2}$. Atque ita, si a 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino 68 $\frac{1}{2}$. &c. Et sane præclarum est, ex vltimo termino inuenire primum, & ex primo vltimum, etiam si intermedij nondum sint cogniti.

CLVI. 156 *Datum numerum in duos parti, vt primus aliquoties, vt libet, sumptus sit multiplex datus secundus aliquoties, vt libet, sumpti: Vel vt secundus aliquoties, vt libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, vt libet sumpti.*

SIT datus numerus 40. diuidendus primum in duos, vt primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus 1 2e. & secundus 40 — 1 2e. Triplum primi 3 2e. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri 160 — 4 2e. Erat ergo æquatio inter 3 2e. & 320 — 8 2e. Additisq. 8 2e. vtrunque, inter 11 2e. & 320. Diuisis ergo 320 per 11 fiet 1 2e. 19 $\frac{1}{11}$ primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{10}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 43 $\frac{1}{11}$.

SIT deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, vt secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4 2e. duplus erit primi ter sumpti, id est, 3 2e. hoc est, æqualis erit 6 2e. Additis ergo 4 2e. vtroque, æquatio erit inter 160. & 10 2e. Diuisisq. 160 per 10. fiet 1 2e. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius, nimirum 48.

CLVII. 157 *Tres numeros in Arithmetica progressionem inuenire, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione genitus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

SINT

SINT inueniendi tres numeri Arithmetica constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsi, 12e. 22e. 32e. habentes eundem excessum 12e. Ex multiplicatione eorum fit numerus 62e. triplus summæ eorum 62e. hoc est æqualis 182e. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 32. 3. propterea quod inter 2e. & 542e. medius est character 3. ac propterea 12e. erit 32. & 22e. erunt 42. & 32e. erunt 52. ita vt tres numeri quæsi sint 32. 42. 52. habentes eundem excessum 12. qui inter se multiplicati faciunt 5272. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet 5272.

QUANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt ipsdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6e. & 542e. Diuisis igitur 54 per 6. fiet 12. 9. & 12e. 3. atque tres numeri quæsi erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati giunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

158 Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet unitatibus a secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis unitatibus a tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet unitatibus a primo, faciat numerum æqualem residuo primi, minus dato numero.

CLVIII.

CAPIAT primus a secundo 4. & secundus a tertio 3. & tertius a primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 32 + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. a tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat 1/3 sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 32 + 2. habebitq. tunc primus 62 + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 62. Deinde secundus, acceptis 3. a tertio, habebit 32 + 9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 12 + 3. & antequam daret 3. habuit 12 + 6. qui si accipiat 10. a primo, habebit 12 + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedant tertio unitates 14. tum demum faciet 12 + 30. numerum æqualem residuo primi 62 - 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 12 + 40. & 62. Ablataq. 12 vtrobique, inter 40. & 52. Diuisus ergo 40 per 5. fiet 12. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus

62.

Quotiens $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. — 2 2e. & addito ultimo termino 68 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{2 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. fit numerus $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$ — 2 2e. æqualis summæ progressionis 197 $\frac{1}{2}$. siue $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. Additis igitur 2 2e. utrobique, erit æquatio inter 2 2e + $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. & $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. Ablatisq. $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$ utrinque, inter 2 2e. & $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$. Diuisis igitur $\frac{4 \frac{1}{2} \cdot 4}{2 \frac{1}{2}}$ per 2. fiet 1 2e. 4. primus progressionis terminus. Vnde sic stabit progressio.

$$4. 6. 9. 13 \frac{1}{2}. 20 \frac{1}{2}. 30 \frac{1}{2}. 45 \frac{1}{2}. 68 \frac{1}{2}.$$

S I C etiam si detur primus terminus 4. & summa progressionis in proportionem sesquialtera, inuenietur ultimus terminus 68 $\frac{1}{2}$. Atque ita, si a 4. continuetur proportio sesquialtera, consistendum erit in octauo termino 68 $\frac{1}{2}$. &c. Et sane præclarum est, ex ultimo termino inuenire primum, & ex primo ultimum, etiam si intermedij nondum sint cogniti.

- CLVI. 156 *Datum numerum in duos parti, ut primus aliquoties, ut libet, sumptus sit multiplex datus secundum aliquoties, ut libet, sumpti: Vel ut secundus aliquoties, ut libet, sumptus sit datus multiplex primi aliquoties, ut libet sumpti.*

S I T datus numerus 40. diuidendus primum in duos, ut primus ter sumptus faciat numerum duplum secundi quater sumpti. Ponatur primus 1 2e. & secundus 40 — 1 2e. Triplum primi 3 2e. duplum esse debet quadrupli secundi, hoc est, numeri 160 — 4 2e. Erit ergo æquatio inter 3 2e. & 320 — 8 2e. Additisq. 8 2e. utrinque, inter 11 2e. & 320. Diuisis ergo 320 per 11 fiet 1 2e. 29 $\frac{1}{11}$ primus numerus. alter ergo erit 10 $\frac{1}{11}$. Triplum primi est 87 $\frac{3}{11}$. qui numerus duplus est, quadrupli secundi, id est, 47 $\frac{7}{11}$.

S I T deinde idem numerus 40. tribuendus in duos, ut secundus quater sumptus sit duplus primi ter sumpti. Ergo secundus quater sumptus, id est, numerus 160 — 4 2e. duplus erit primi ter sumpti, id est, 3 2e. hoc est, æqualis erit 6 2e. Additis ergo 4 2e. utrobique, æquatio erit inter 160. & 10 2e. Diuisisq. 160 per 10. fiet 1 2e. 16. primus numerus. alter ergo erit 24. Quadruplum huius, nimirum 96. duplum est tripli illius, nimirum 48.

- CLVII. 157 *Tres numeros in Arithmetica progressionem inuenire, ut numerus ex mutua eorum multiplicatione generatus ad eorundem summam habeat datam proportionem.*

SINT inueniendi tres numeri Arithmetica constituentes progressionem, vt numerus ex mutua eorum multiplicatione productus, triplus sit summæ eorundem. Ponantur tres numeri quæsi, 1 2e. 2 2e. 3 2e. habentes eundem excessum 1 2e. Ex multiplicatione eorum sit numerus 6 2e. triplus summæ eorum 6 2e. hoc est, æqualis 18 2e. Diuisis ergo 18 per 6 fiet 3. 3. propterea quod inter 2e. & 2e. medius est character 3. ac propterea 1 2e. erit 3 3. & 2 2e. erunt 3 12. & 3 2e. erunt 3 27. ita vt tres numeri quæsi sint 3 3. 3 12. 3 27. habentes eundem excessum 3 3. qui inter se multiplicati faciunt 3 972. qui numerus triplus est summæ eorundem, numeri videlicet 3 108.

QVANDO denominator proportionis, quam productus numerus ad summam habere debet, est numerus quadratus, explicabitur quæstio in numeris rationalibus. Vt iisdem positis, si numerus productus debeat habere proportionem noncuplam, inuenietur æquatio inter 6 2e. & 54 2e. Diuisis igitur 54 per 6. fiet 1 8 9. & 1 2e. 7. atque tres numeri quæsi erunt 3. 6. 9. qui inter se multiplicati gi-gnunt numerum 162. noncuplum eorum summæ 18.

158 Tres numeros inuenire, vt primus acceptis quotlibet unitatibus a secundo, faciat numerum multiplicem quemcunque eius, qui secundo remanet: Secundus vero, acceptis quotuis unitatibus a tertio, faciat numerum etiam multiplicem quemcunque eius, qui tertio superest: Tertius denique acceptis quotlibet unitatibus a primo, faciat numerum æqualem residuo primi, minus dato numero.

CLVIII.

CAPIAT primus a secundo 4. & secundus a tertio 3. & tertius a primo 10. ita vt primus faciat duplum eius, qui secundo superest: Secundus autem triplum eius, qui tertio superest: Tertius denique æqualem residuo primi, minus 14. Ponatur secundus 3 2e + 6. vt dare possit 4. primo, & acceptis 3. a tertio, numerum conficiat triplum eius, qui tertio remanet, id est, numerum faciat, qui habeat $\frac{1}{2}$ sine fractione. Igitur si secundus primo det 4. remanebunt ei 3 2e + 2. habebitq. tunc primus 6 2e + 4. eius duplum, ac proinde, antequam acciperet 4. habuit 6 2e. Deinde secundus, acceptis 3. a tertio, habebit 3 2e + 9. numerum triplum eius, qui tertio superest. Tertius ergo tunc habebit 1 2e + 3. & antequam daret 3. habuit 1 2e + 6. qui si accipiat 10. a primo, habebit 1 2e + 16. qui numerus æqualis esse debet residuo primi, minus 14. hoc est, si accedat tertio unitates 14. tum demum faciet 1 2e + 30. numerum æqualem residuo primi 6 2e - 10. Additis ergo 10. vtrinque, fiet æquatio inter 1 2e + 40. & 6 2e. Ablataq. 1 2e. vtroque, inter 40. & 5 2e. Diuisus ergo 40 per 5. fiet 1 2e. 8. Primus ergo numerus, quem posuimus, 6 2e.

62. erit 48. Secundus vero positus $3 \times 2 + 6$. erit 30. Tertius denique positus $1 \times 2 + 6$. erit 14. Nam primus, acceptis 4. a secundo, habebit 51. qui numerus duplus est 26. qui secundo superest. Secundus autem, sumptis 3. a tertio, habebit 33. numerum triplum 11. qui tertio superest. Tertius denique, acceptis 10. a primo, habebit 24. qui numerus æqualis est residuo primi 38. — 14.

QVOD si tertius, acceptis 10. a primo, debeat habere numerum præcise æqualem residuo primi, inuenietur $1 \times 2 = \frac{1}{2}$. Et tres numeri erunt $31 \frac{1}{2}$, $21 \frac{1}{2}$, $11 \frac{1}{2}$. Aequatio porro inuenta docebit, quando questio est impossibilis.

- CLIX. 159 Duos numeros inuenire, ita ut primus, acceptis quotlibet unitatibus a secundo, superet residuum secundi dato numero: At secundus acceptis quotuis unitatibus a primo, faciat numerum multiplicem datum eius, qui primo remanet, ac præterea contineat datum numerum.

CAPIAT primus a secundo 10. Secundus vero 3. a primo: faciatq. primus numerum, qui residuum secundi superet numero 9. Secundus vero numerum faciat triplum residui primi, & insuper contineat 9. unitates. Ponatur primus 1×2 . qui acceptis 10. a secundo, habebit $1 \times 2 + 10$. qui numerus residuum secundi superare debet numero 9. Ergo secundo remanent $1 \times 2 + 11$, ac proinde antequam primo daret 20. habuit $1 \times 2 + 31$. Hic acceptis 3. a primo, habebit $1 \times 2 + 34$. qui numerus triplus esse debet residui primi, & insuper continere 9. Ablatis ergo 9. erit reliquus numerus $1 \times 2 + 25$. triplus residui primi. Est autem residuum primi $1 \times 2 = 3$. Igitur æquatio erit inter $1 \times 2 + 25$. & $3 \times 2 = 9$. Additisq. 9. vtrinque, inter $1 \times 2 + 34$. & 3×2 . Ablataq. 1×2 . vtroque, inter 34. & 2×2 . Diuisus ergo 34. per 2. fiet 17. primus numerus. Secundus ergo erit 48. nimirum $1 \times 2 + 31$. Ac primus 17. acceptis 10. a secundo, habebit 57. qui numerus residuum secundi 28. superat numero 9. Secundus autem 48. acceptis 3. a primo, habebit 51. qui numerus triplum residui primi 14. superat numero 9.

- CLX. 160 Numerum inuenire, per quem si datus numerus diuidatur, ex Quotiente in quemuis datum numerum tantum fiat, quantum ex inuenio numero in alium quemuis numerum datum.

SIT datus numerus 36. diuidendus per inuentum numerum, ita ut Quotiens in 24. ductus tantum faciat, quantum numerus inuentus in 54. ductus faciat. Ponatur numerus questus 1×2 . per quem si diui-

si diuidatur numerus 36. fit Quotiens $\frac{1}{2}$, qui ductus in 24. facit $\frac{1}{2}$ numerum aequalem numero 54 2e. qui fit exposito numero 22e. in 14. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 864. & 54 3. Diuisis igitur 864. per 54. fiet 16. & 1 2e. 4. numerus quæsitus. Diuiso enim dato numero 36. per 4. fit Quotiens 9. qui ductus in 24. facit 216. numerum æqualem ei, qui fit ex inuento numero 440 54.

Item inueniendus fit numerus, per quem si diuidatur datus numerus 40. fiat Quotiens, qui ductus in 8. tantum faciat, quantum inuentus numerus facit in 50. ductus. Ponatur quæsitus numerus 3 2e. per quem si diuidatur numerus 40. fit Quotiens $\frac{4}{5}$, qui ductus in 8. facit $\frac{32}{5}$ numerum aequalem numero 50 2e. qui fit exposito numero 1 2e. in 50. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 320. & 50 3. Diuisis ergo 320 per 50. fiet 1 2. 6 3. huc $\frac{1}{5}$. & 1 2e. $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ numerus quæsitus. per quem si diuidatur datus numerus 40. hoc est, $\sqrt{8}$ 1600. fit Quotiens $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$, qui ductus in 8. hoc est, in $\sqrt{8}$ 64. producit numerum, $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ 900. qui æqualis est numero $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ 2500. qui fit ex numero inuento $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ in 50. id est, in $\sqrt{8}$ 2500. Quod enim æquales sint numeri $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ 900. & $\sqrt{8}$ $\frac{1}{5}$ 2500. liquet, cum in crucem multiplicati producant eundem numerum $\sqrt{8}$ 256000.

161 Tres numeros continuè proportionales in data proportionē inuenire, quorum quadrati in vnā summā collecti faciant datum numerum.

CLXI.

SINT inueniendi tres numeri continuè sesquitercij, quorum quadrati faciant 4329. Ponantur quæsitæ numeri 9 2e. 12 2e. 16 2e. in proportionē sesquitercia. Forū quadrati 81 3. 144 3. 256 3. faciunt summam 481 3. æqualem 4329. Diuisis ergo 4329. per 481. fiet 1 2. 9. & 1 2e. 3. Ergo primus numerus positus 9 2e. est 27. secundus 36. & tertius 48. quorum quadrati 729. 1296. 2304. faciunt summam 4329.

SINT rursus inueniendi tres numeri continuè dupli, quorum quadrati faciant 6000. Ponantur tres quæsitæ numeri 1 2e. 2 2e. 4 2e. Forū quadrati 1 3. 4 3. 16 3. faciunt summam 21 3. æqualem 6000. Diuisis ergo 6000. per 21. fiet 1 2. $\frac{2000}{7}$. & 1 2e. $\sqrt{8}$ $\frac{2000}{7}$. Numeri ergo quæsitæ in proportionē dupla sunt $\sqrt{8}$ $\frac{2000}{7}$. $\sqrt{8}$ $\frac{4000}{7}$. $\sqrt{8}$ $\frac{8000}{7}$. quorum quadrati $\frac{8000}{7}$. $\frac{32000}{7}$. $\frac{128000}{7}$. faciunt $\frac{168000}{7}$. hoc est, 6000.

162 Tres numeros continuè proportionales in data proportionē inuenire, ita ut parte data maximi numeri in partem datam medij multiplicata, & hoc producto in partem datam minimi ducto, procreetur datus numerus.

CLXII.

SINT

SINT inueniendi tres numeri continuè sesquialteri, ita vt tertia parte maximi ducta in semissem medij, & hoc numero producto in quartam partem minimi multiplicato, fiat numerus 576. Ponantur tres numeri quæsi sesquialteri, 4 2e. 6 2e. 9 2e. Ex $\frac{1}{3}$. maximi id est, ex 3 2e. in semissem medij, id est, in 3 2e. fit numerus 9 2e. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 1 2e. fit numerus 9 2e. æqualis 576. Diuisis ergo 576. per 9. fiet 1 2e. 64. cuius radix cubica 4. Ergo tres numeri quæsi, cum positi sint 4 2e. 6 2e. 9 2e. erunt 16. 24. 36. Atque ex tertia parte maximi, id est, ex 12. in semissem medij, id est, in 12. fit numerus 144. & ex hoc in $\frac{1}{4}$. minimi, id est, in 4. fit 576.

CLXIII. 163 Numerum inuenire, cuius data dua partes inter se multiplicata producant numerum, quo diuiso per datum numerum, fiat Quotiens, qui contineat partem datam; vel partes radice quadrata numeri inuenti.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{4}$. inter se multiplicatæ faciant numerum, quo diuiso per 17. exeant $\frac{1}{3}$. radice quadratæ numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1 2e. Ex eius $\frac{1}{3}$. in $\frac{1}{4}$. id est, ex $\frac{1}{12}$. fit numerus $\frac{1}{12}$. quo diuiso per 17. fit numerus $\frac{1}{204}$. æqualis duabus tertijs radice quadratæ numeri inuenti 1 2e. hoc est, duabus tertijs numeri $\frac{1}{3}$ 2e. hoc est, numero $\frac{1}{9}$. qui facit $\frac{1}{9}$. numeri $\frac{1}{3}$ 2e. produciturq. ex ductu $\frac{1}{3}$ 2e. in $\frac{1}{4}$. id est, in $\frac{1}{12}$. Itaque æquatio inuenta est inter $\frac{1}{3}$ 2e. & $\frac{1}{12}$. Igitur & æquatio erit inter eorum quadrata $\frac{1}{9}$. & $\frac{1}{144}$. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 419904 2e. & 9 2e. Diuisis ergo 419904. per 9. fiet 1 2e. 46656. (quia inter 2e. & 288. medij sunt duo characteres 2. & 2e.) & 1 2e. 36. numerus quæsitus. Nam ex 12. eius tertia parte in 9. eius quartam partem fit numerus 108. quo diuiso per 17. fit Quotiens 4. qui facit $\frac{1}{3}$. radice quadratæ numeri inuenti 36. quæ radix est 6.

CLXIII. 164 Numerum inuenire, cuius pari data in se multiplicata, & productus numerus in aliam partem datam ductus procreet quadratum numerum inuenti numeri.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{3}$. in se faciat numerum, quæ ductus in $\frac{1}{4}$. eiusdem numeri inuenti producat quadratum numeri inuenti. Ponatur quæsitus numerus 1 2e. Huius $\frac{1}{3}$. nimirum $\frac{1}{3}$. ducta in se facit $\frac{1}{9}$. qui numerus ductus in $\frac{1}{4}$. facit numerum $\frac{1}{36}$. æqualem quadrato numeri positi 1 2e. hoc est, numero 1 2e. ita vt æquatio sit inter $\frac{1}{9}$. & 1 2e. quæ per multiplicationem in crucem redu-

reducitur ad hanc inter 1 et 8. & 792. Diuisis ergo 75. per 1. fiet 1 75. (quod Cossici numeri collaterales sunt) numerus quæsitus. Nam eius quinta pars, 15. ducta in se facit 225. qui numerus ductus in 25. tertiam partem eiusdem numeri 75. facit 1625. quadratum inuenti numeri 75.

165 Numerum inuenire, cuius pars data in aliam partem datam multiplicata producat datum numerum.

CLXY.

SIT inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. ducta in $\frac{1}{4}$. faciat 384. Ponatur quæsitus numerus 120. Ex $\frac{1}{2}$. in $\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{1}{2}$. æqualis 384. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 8. & 9216. Diuisis igitur 9216 per 1. fiet 1 8. 9216. & 120. 96. numerus quæsitus. Nam ex 24. quarta eius parte, in 16. eiusdem partem sextam fit numerus 384. datus.

ITEM. fit inueniendus numerus, cuius $\frac{1}{2}$. in $\frac{1}{4}$. ducta faciat 1000. Ponatur numerus quæsitus 120. Ex $\frac{1}{2}$. in $\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{1}{2}$. æqualis 1000. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 1 8. & 1400. Diuisis ergo 1400. per 1. fiet 1 8. 2400. cuius radix quadrata, 48. 2400. erit numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{2}$. est 48. 150. & $\frac{1}{4}$. 48 $\frac{25}{2}$. quæ partes inter se multiplicatæ progrediunt 48 $\frac{10000}{2}$. hoc est, 48 10000. siue 10000. datus.

S C H O L I V M.

SINE Algebra soluetur hoc problema hac ratione. Denominatores partium inter se multiplicentur, & productus numerus in datum numerum ducatur. Radix enim quadrata huius producti erit numerus quæsitus. Vt in priori exemplo, ex 4. in 6. fit 24. & ex 24. in 384. fit 9216. cuius radix quadrata 96. dabit numerum quæsitum.

QVOD si proponantur tres partes inter se multiplicandæ, ita ut producant numerum datum, multiplicandi erunt partium denominatores inter se, & productus numerus in datum numerum ducendus. Huius enim numeri radix cubica dabit numerum quæsitum. Vt si quæritur numerus, cuius partes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. inter se multiplicata producant 72000. Multiplicatis denominatoribus inter se, fit numerus 24. Et ex 24. in 72000. fit numerus 1728000. cuius radix cubica 120. dabit numerum quæsitum. Nam eius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. nimium 60.40.30. inter se multiplicata faciunt 72000.

EODEM modo progrediendum est, si quatuor partes aliquotæ proponantur inter se multiplicandæ: sed ex ultimo producto extrahenda est radix quinquiesima. Et si quatuor proponantur, erunda est radix sexagesima. Et sic de alijs in infinitum. Nam ex ultimo producto semper extrahenda est radix, cuius exponenti æqualis est numerus partium aliquotarum. Vt si dentur 10. partes aliquotæ, extrahenda erit radix centesima. Et si dentur 12.

radix xvi. fixa. hinc. *Ex. Qua de re consilio. qua cap. 1. scripsi. de progressibus numerorum Cassiorum.*

- CLXVI. 166 *Tres numeros inuenire, et bini quilibet multiplicati inter se gignant tres datos numeros.*

XXIX

EX primo in secundum fiat 240. Ex primo in tertium 660. Et ex secundo in tertium, 1380. Ponatur primus numerus 120. Per quem si diuidatur numerus 240. productus ex primo in secundum, fiet secundus $2\frac{1}{2}$. Nam hic Quotiens ductus in diuisorem 120. producit diuisum 240. Eadem ratione erit tertius $5\frac{1}{2}$. Quotiens videlicet diuisoris numeri 660. per 120. Iam vero ex secundo $2\frac{1}{2}$ in tertium $5\frac{1}{2}$. fit numerus $13\frac{1}{2}$. aequalis 1380. Hac aequatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 138400. & 13808. Diuisi ergo 138400. per 13808. fiet 10. 114 $\frac{1}{2}$. (quod inter N. & 8. medius fit vnus character 20) & 120 erit 114 $\frac{1}{2}$. primus scilicet numerus, qui positus fuit 120. Et si per hunc primum, id est, per 114 $\frac{1}{2}$. diuidatur primus numerus productus 240. hoc est, 114 $\frac{1}{2}$ 7600. fiet Quotiens 101 $\frac{1}{2}$. secundus videlicet numerus. Et si per eundem primum numerum 114 $\frac{1}{2}$. diuidatur secundus numerus productus 660. hoc est, 114 $\frac{1}{2}$ 3995. dabit Quotiens 101 $\frac{1}{2}$. tertium numerum. Ex primo 114 $\frac{1}{2}$. in secundum 101 $\frac{1}{2}$. fit 114 $\frac{1}{2}$ 57600. hoc est, 240. Et ex eodem primo 114 $\frac{1}{2}$. in tertium 101 $\frac{1}{2}$. fit 114 $\frac{1}{2}$ 3995. hoc est, 660. Ac tandem ex secundo 101 $\frac{1}{2}$. in tertium 101 $\frac{1}{2}$. fit 101 $\frac{1}{2}$ 190400. id est, 1380.

- CLXVII. 167 *Datis duobus numeris, alium tertium inuenire, qui cum minore numerum faciat aequalem ei, quem inuenienti data pars cum maiore efficit.*

DATI sint duo numeri 12. & 20. inueniendusque, sic alius, qui cum 12. tantum faciat, quantum eius $\frac{1}{2}$. cum 20. Ponatur numerus quatuordecim 14. Igitur 12 + 14. aequalia erunt 20 + $\frac{1}{2}$ 14. Ablatis $\frac{1}{2}$ 14. verique, erit aequatio inter 12 + $\frac{1}{2}$ 14. & 20. Et ablatis 12. utrobique, inter $\frac{1}{2}$ 14. & 8. Diuisi ergo 8 per $\frac{1}{2}$. fiet 16. numerus, quem inquirimus. Nam additus ad 12. facit 28. & eius $\frac{1}{2}$. nimirum 6. cum 20. faciunt similiter 26.

- CLXVIII. 168 *Numerum inuenire, ita ut quadrati quocunque partium ipsius simul sumpti consiciant summam inuenito numero aequalem, vel ipsius multiplicem.*

SIT primus inueniendus numerus, ita ut quadrati ex eius $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{4}$. descripta summam faciant inuenito numero aequalem. Ponatur numerus

numerus quæsitus 12. cuius partes nominatæ sunt $\frac{1}{2}$ 2e. $\frac{1}{3}$ 3e. & $\frac{1}{4}$ 4e. & earum quadrati $\frac{1}{4}$ 8. $\frac{1}{9}$ 8. $\frac{1}{16}$ 8. qui simul faciunt $\frac{1}{4}$ 8. quæ summa æqualis est 12. Divisa ergo 12. per $\frac{1}{4}$ 8. fit 12. numerus quæsitus. Nam eius $\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{4}$ 8. eiusque quadratus $\frac{1}{16}$ 8. & $\frac{1}{9}$ est $\frac{1}{9}$ 8. eiusque quadratus $\frac{1}{81}$ 8. & $\frac{1}{16}$ est $\frac{1}{16}$ 8. eiusque quadratus $\frac{1}{256}$ 8. qui omnes tres quadrati faciunt $\frac{1}{4}$ 8. numerum æqualem inuento numero $\frac{1}{4}$ 8. quippe cum tantum fiat ex denominatore huius in numeratorem illius quantum ex numeratore in denominatore.

SIT deinde inveniendus numerus, ita ut quadrati ex eius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ procreati faciant numerum decuplum numeri inveniendi. Ponatur numerus 12. cuius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ sunt $\frac{1}{2}$ 6. & $\frac{1}{3}$ 4. & quadrati $\frac{1}{4}$ 8. & $\frac{1}{9}$ 8. qui simul faciunt summam $\frac{1}{4}$ 8. æqualem 12. Divisus ergo 12. per $\frac{1}{4}$ 8. fit 12. numerus quæsitus. Nam quadrati 36 & 64. ex eius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ descripti faciunt summam 100. decuplam numeri inveniendi.

169 Numerum invenire, qui ductus in datam ipsius partem producat datum numerum quemcunque.

SIT inveniendus numerus, qui ductus in $\frac{1}{2}$ ipsius producat 90. Ponatur inveniendus numerus 12. & $\frac{1}{2}$ 6. fit numerus $\frac{1}{2}$ 8. æqualis 90. Divisus igitur 90. per $\frac{1}{2}$ 8. fit 12. & 12. $\frac{1}{2}$ 6. numerus quæsitus. Eius $\frac{1}{2}$ sunt $\frac{1}{2}$ 6. ut patet, si $\frac{1}{2}$ 12. ducatur in $\frac{1}{2}$ hoc est, in $\frac{1}{2}$ 6. nam ex $\frac{1}{2}$ 12. in $\frac{1}{2}$ 6. fit $\frac{1}{2}$ 6. hoc est, $\frac{1}{2}$ 6. hoc est, 90.

170 Datum numerum in duos partiri, ut eorum quadrati summam datam conficiant, maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti, & minorem quadrato eiusdem numeri.

SIT numerus 40. diuidendus in duos, quorum quadrati faciant 928. numerum maiorem, quam 800. qui semis est quadrati ex 40. procreati, & minorem quam 1600. qui quadratus est eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 20. & alter 20. + 12. ut cum illo faciat 40. Quadrati horum duorum numerorum 400 + 402 + 12. & 400 + 402 + 12. faciunt 28 + 800. numerum æqualem 928. Ablatis ergo 800 utrobique, erit æquatio inter 28 & 128. Divisus 128 per 2 fit 12. & 12. 8. Ergo primus numerus positus 20. + 12. erit 32. & alter, quem posuimus 20. + 12. erit 32. Atque quadrati horum numerorum 12. & 28. nimirum 144 & 784. faciunt 928.

Hoc enigma soluimus etiam per compositam æquationem in æquatione 35. sequentis cap. 30.

CLXXI.

171. *Datum numerum in tres partes continue proportionales diuidere, ita vt productus numerus ex prima in tertiam ad productum ex prima in secundam habeat proportionem datam.*

HOC enigma solutum fuit etiam in problemate 133. sed pro alio exemplo:

Si T. datus numerus 39. diuidendus in tres continue proportionales; ita vt numerus factus ex primo in tertium habeat ad numerum ex primo in secundum factum proportionem duplam sesquialteram. Ponatur secundus 12. ideoq. primus ac tertius simul 39.

a 10. septimi

12. Ex secundo 12. in se fit 12. quantum nimirum fit ex primo in tertium. Et quia hic productus debet esse duplex sesquialter ad eum, qui fit ex primo in secundum 12. fiet ex primo in secundum numerus 24. (quod 12. ad 24. proportionem habeat duplam sesquialteram, vt constat, si 12. diuidatur per 2. 2. denominatore proportionis duplæ sesquialteræ.) Quo diuiso per secundum 12. fit Quotiens 2. siue 2. qui ductus in diuisorem, id est, in 12. producit 24. ac proinde primus numerus erit 24. quo ablato ex summa primi ac tertij, id est, ex 39. — 24. reliquus erit tertius numerus 15. in quem si educatur primus 24. productur numerus 360. 24. 15. æqualis numero 18. qui fit ex medio 12. in se. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 25 8. & 390 24. — 14 8. Et additis 14 3. vtriusque, erit æquatio inter 390 24. & 19 8. Diuisis igitur 390. per 39. fiet 12 10. (quod numeri Cofici sunt collaterales.) numerus scilicet medius. Primus ergo positus 24. nimirum 24. diuis per 5. erit 4. ut tertius, qui inuentus est 15. hoc est, 195 — 7 24. diuis per 5. erit 25. ita vt tres partes numeri 39. sint 4. 10. 25. continue proportionales. Et qui fit ex primo in tertium, vel ex secundo in se, nimirum 100. proportionem habet duplam sesquialteram ad numerum 40. qui fit ex primo in secundum.

XXIX

b 17. septimi

QVONIAM vero, datis tribus numeris continue proportionalibus, numerus, qui fit ex medio in se, ad productum ex primo in medium, eandem habet proportionem, quam tres dati numeri: propterea quod medius multiplicans se, & primum producit duos illos productos; soluetur hoc enigma propositum facilius, si per enigma 49. datus numerus secetur in tres numeros continue proportionales in proportione data. Ita enim numerus factus ex primo in tertium, hoc est, ex secundo in se, habebit ad factum ex primo in secundum proportionem datam, eandem nimirum, quam tres numeri habent. Vt in dato exemplo, secundus erit datus numerus 39. in tres numeros continue duplos sesquialteros, hoc modo. Ponantur tres numeri in proportione continua dupla sesquialtera 12.

2 1 2.

$6\frac{1}{2}$ & $6\frac{1}{2}$ 2e. quorum summa $9\frac{1}{2}$ 2e. æqualis esse debet dato numero 39. Diuisus ergo 39. per $9\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 4. primus numerus, qui positus fuit 1 2e. Secundus ergo positus $2\frac{1}{2}$ 2e. erit 10. & tertius, quem posuimus $6\frac{1}{2}$ 2e. erit 25.

172 Datum numerum in duos parti, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex dato primo numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata secundi dati numeri minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos.

CLXXII.

SIT datus numerus 10. distribuendus in duos, inter quos $\frac{1}{8}$ 1. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex vno in alium fiat 1. Ponatur minor pars 5 — 1 2e. & maior 5 + 1 2e. vt earum summa sit 10.

Ex vna in alteram sit numerus 25 —

1 2e. vt in hac formula appareat, æqua-

lis 1. Addito 1 2e. vtrobiq; fiet æqua-

lio inter 25 & 1 2e. Ablataq; vtro-

bique, inter 24 & 1 2e. Diuisis ergo 24.

per 1 fiet 1 2e. 24. & 1 2e. $\frac{1}{8}$ 24. Ergo

minor pars posita, 5 — 1 2e. erit 5 —

$\frac{1}{8}$ 24. Maior autem posita 5 + 1 2e. erit

5 + $\frac{1}{8}$ 24. Atque hæc duæ partes inter se multiplicatæ faciunt

1. vt hic cernitur. Fiet enim multiplicatio,

— 24. quadratus posterioris particule subtra-

hetur ex 15. quadrato prioris particule, vt

cap. 22. docuimus. Igitur $\frac{1}{8}$ 1. medio loco

proportionalis est inter 5 — $\frac{1}{8}$ 24. & 5 +

$\frac{1}{8}$ 24. cum tam hi duo inter se multiplicati, quam ille $\frac{1}{8}$ 1. in

se, faciat 1.

P O R R O hoc idem ænigma soluemus per compositam quoque

æquationem in sequenti cap. ænigmate 38.

173 Datum numerum diuidere in duos, vt eorum qua-

drati summam faciant, qua productum ex eorum

multiplicatione superet dato numero.

SIT datus numerus 8. diuidendus in duos, vt summa ex eorum

quadratis collecta excedat productum numerum ex eorum multi-

plicatione mutua, numero 20. Ponatur minor numerus 4 — 1 2e. &

maior 4 + 1 2e. vt simul faciant 8. Quadrati sunt 1 2e. + 16 — 3 2e. &

2 2e. + 16 + 3 2e. facientes summam 2 2e. + 32. cum — 8 2e. & + 8 2e. se

mutuo

$$\begin{array}{r}
 5 - 1 \text{ 2e} \\
 5 + 1 \text{ 2e} \\
 \hline
 + 5 \text{ 2e} - 1 \text{ 8} \\
 25 - 5 \text{ 2e} \\
 \hline
 25 - 2 \text{ 8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 - \frac{1}{8} \text{ 24} \\
 5 + \frac{1}{8} \text{ 24} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 - 1 \text{ 2e} \\
 5 + 1 \text{ 2e} \\
 \hline
 20
 \end{array}$$

a 20. septimi

CLXXIII.

mutuò tollant. Hæc summa excedere debet productum ex vno in alterum numero 20. Est autem hic productus 16 — 1 8. vt in appropria formula apparet qui cum 20. faciet numerum 36 — 1 8. æqualem quadratorum summa 2 8 + 32. Addito ergo 1 8. vtriusque, erit æqualitas inter 3 8 + 32. & 36. Ablatisq. 32. vtriusque, inter 3 8. & 4. Diuisis ergo 4. per 3. fiet 1 8. $\frac{1}{3}$. & 1 2. $\frac{1}{3}$. Cum ergo minor numerus sit positus 4 — 1 2. erit ipse numerus minor 4 — $\frac{1}{3}$. Maior autem positus 4 + 1 2. erit 4 + $\frac{1}{3}$. qui duo numeri faciunt 8. & quadrati sunt 17 $\frac{1}{9}$ — $\frac{1}{9}$ & 17 $\frac{1}{9}$ + $\frac{1}{9}$. vt in hisce formulis apparet. quorum summa est 34 $\frac{2}{9}$. quæ superat

$$\begin{array}{r}
 4 - \frac{1}{3} \\
 4 - \frac{1}{3} \\
 \hline
 16 - \frac{1}{9} \\
 17 \frac{1}{9} - \frac{1}{9}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 + \frac{1}{3} \\
 4 + \frac{1}{3} \\
 \hline
 16 + \frac{1}{9} \\
 17 \frac{1}{9} + \frac{1}{9}
 \end{array}$$

productum 14 $\frac{2}{9}$. ex vno in alterum, numero dato 20. Productus autem hic 14 $\frac{2}{9}$. habetur, si 5. quadratus posterioris particulæ dematur ex 16. quadrato prioris particulæ, vt cap. 23. traditum est, & altera hæc formula indicat.

SIT rursus datus numerus 40. distribuendus in duos, quorum quadrati summam faciant, quæ numerum ex eorum multiplicatione factum superet numero 403. Ponatur minor numerus 20 — 1 2. & maior 20 + 1 2 facientes summam 40. Quadrati sunt 1 8 + 400 — 40 2. & 1 8 + 400 + 40 2. quorum summa 2 8 + 800. superans numero 403 numerum 400 — 1 8. productus ex vno in alterum. qui productus habetur, si quadratus 1 8. posterioris particulæ dematur ex 400. quadrato prioris particulæ, vt in hac formula cernis, traditumq. est cap. 23. Itaq. si ad hunc productum addentur 403. fiet æquatio inter 2 8 + 800. summam quadratorum, & 803 — 1 8. Additoq. 1 8. vtriusque, inter 3 8 + 800. & 803. Ablatisq. 800. vtriusque, inter 3 8. & 3. Diuisis igitur 3. per 3. fiet 1 8. 1. & 1 2. 1. Erit ergo minor numerus, quem posuimus 20 — 1 2. 19. & maior positus 20 + 1 2. erit 21. qui problema efficiunt.

HOC etiam problema soluemus per compositam æquationem in ænigmatæ 39. sequentis cap.

SI numerus proponeretur 20. diuidendus in duos, vt summa, quadratorum superet numerum ex partium multiplicatione productum

ductum numero 30. foret problema impossibile, ut ex ipsa solutione discas.

174 Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum multatum eodem dato numero producat quemuis datum numerum.

SIT inueniendus numerus, cuius quadratus auctus octonario, si ducatur in eundem quadratum multatum eodem octonario, producat 6497. Ponatur numerus quæsitus 12. Eius quadratus auctus octonario erit 1848. multatus vero eodem octonario, 18—8. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 188—64. ut hic vides, si 64. quadratus posterioris particulæ, dematur ex 188. particulæ prioris. qui prodestus æqualis esse debet dato numero 6497. Additis ergo 64. utrobique, æquatio erit inter 188. & 6561. Diuisisq. 6561. per 1. fiet 188. 6561. & radix eius zenfizenfica 9. numerus quæsitus. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & multatus octonario, 73. sitq. numerus 6497. ex 89. in 73.

SIT iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æquatio inter 188. & 74. Diuisis ergo 74. per 1. fiet 188. 74. & radix Zenfizenfica 188—74. numerus quæsitus. Eius enim quadratus 188 5476. auctus octonario est 188 5476+8. & multatus octonario, 188 5476—8. qui duo numeri æquivalent his duobus 188 74+8. & 188 74—8. atque hi duo inter se multiplicati producant 10. ut hic vides: quippe cum 64. quadratus posterioris particulæ detractus ex 74 quadrato particulæ prioris relinquat 10.

S C H O L I U M.

ATQVE hæc dicta sunt de anigmatibus, quæ per simplicem aequationem enodantur. Ad similitudinem enim horum Anaxagoras Lellor aliam, quæquis voluerit, formare poterit. Quare nunc alia anigmata proponemus, in quibus solvendi sunt æquationes composita.

AENIGMATA VARIA NVMERORVM

abstractorum per Algebram enodanda, in quibus æquatio inter tres numeros, quorum vnus alijs duobus æqualis est, occurrat: quæ quidem composita æquatio dicitur.

Cap. XXX.

- I. *I Datum numerum in duas partes distribuere, vt earum cubi datam summam, quæ maior sit, quarta parte cubi ex dato numero procreati, efficiant.*



O C. ænigma, quod fuit 141. præcedentis cap. soluenus hic aliter, nimirum per æquationem compositam, in qua vnus numerus Cossicus duobus Cossicis numeris reperitur æqualis: & in qua, eruenda est radix ex numero composito, vel diminuto, vt in cap. 12. traditum est. Id quod etiam fiet in alijs huius cap. ænigmatibus. Sit ergo datus numerus 10. diuidendus in duas partes, quarum cubi faciant summam 370. quæ maior est, quam 250. quarta pars cubi ex dato numeri 10. procreati. Ponatur prima pars 1 2e. & secunda 10 — 1 2e. Cubi harum partium sunt 1 2e. & 1000 — 300 2e + 30 8 — 1 2e. quorum summa 1000 — 300 2e + 30 8. (Nam + 1 2e. & — 1 2e. se mutuo interinunt) æqualis esse debet 370. Additis 300 2e vtrobi-que, fiet æquatio inter 1000 + 30 8. & 300 2e + 370. Et ablatis 370. vtrinque, inter 630 + 30 8. & 300 2e. Et rursum ablatis 630. vtrinque, inter 30 8. & 300 2e — 630. Diuisis autem singulis hitce numeris per numerum maioris characteris Cossici, nimirum per 30. vt circa finem cap. 10. præcepimus, erit æquatio inter 1 8. & 10 2e — 21. quam sic resolues ex doctrina cap. 12. Semissis numeri radicem 5. facit quadratum 25. a quo demptis 21. propter signum — remanet numerus 4. cuius radix quadrata 2. addita ad 5. semissem. numeri radicem dabit maiorem radicem 7. Et eadem radix 2. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Huiusmodi enim numeri, in quibus numerus absolutus affectus est signo —. duplicem radicem habent, vt cap. 12. tradidimus. Partes ergo numeri dati 10. sunt 7. & 3. quarum cubi 343. & 27. summam datam 370. efficiunt. vt etiam in ænigmate 141. præcedentis cap. inuentum est.

SI eodem numero dato, cuborum summa proponatur 400. inueniemus æquationem vltimam inter 1 8. & 10 2e — 20. quam ita resol-

resolues. Semissis numeri radicem 5. facit quadratum 25. a quo demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix quadrata $\sqrt{5}$ 5. addita ad 5. semissim numeri radicem dabit maiorem radicem $\sqrt{5}$ 5 + 5. Et eadem radix $\sqrt{5}$ 5. dempta ex eadem semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5 — $\sqrt{5}$ 5. vt in eodem xigmate 141. antecedentis cap. inuenimus.

QVO pacto autem xigma hoc sine Algebra soluendum sit, dictum est supra in xigmate 141. precedentis cap.

2 *Datum numerum in duos cubos distribuere, quorum laterum summa data est: dummodo quarta pars cubi huius summa minor sit dato numero.*

II.

HOC problema cum antecedenti coincidit, vt in xigmate 142. cap. precedentis diximus.

3 *Numerum inuenire, qui cum dato numero suum quadratum efficiat.*

III.

DATVS numerus sit 156. oporteatq. inuenire numerum, qui additus ad 156. conficiat quadratum ipsius numeri inuenti. Ponatur numerus quæsitus 12. cuius quadratum 144. cui æqualis debet esse 12 + 156. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 156. facioq. 156 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem $\sqrt{\frac{201}{4}}$. hoc est, ad 12 $\frac{1}{2}$. addo semissim numeri radicem, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioq. pretium 12.13. qui est numerus quæsitus. Nam 13 cum 156. facit 169. quadratum numeri 13.

SIT rursus inueniendus numerus, qui cum 50. faciat suum quadratum. Ponatur numerus quæsitus 12. cuius quadratum 144. cui æqualis debet esse 12 + 50. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo 50. facioq. 50 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{201}{4}$. ad cuius radicem, hoc est, ad $\sqrt{\frac{201}{4}}$. addo semissim numeri radicem, nimirum $\frac{1}{2}$. efficioq. pretium 12. $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$. numerum scilicet quæsitum. Huius enim quadratus est $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$. vt in hac formula apparet, hoc est, $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50 \frac{1}{4}$. quantum videlicet sit ex numero inuenito $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$. vna cum dato numero 50. Constat enim etiam numerus $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50 \frac{1}{4}$. Apposui formulam multiplicationis numeri inuenti $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$. in se quadratè, vt videas, quo pacto quadratus sit productus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2} \\ \hline + \sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2} \\ \frac{201}{4} + \sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{4} \\ \hline \frac{201}{4} + \sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{4} \end{array}$$

IV.

III. 4 Numerum inuenire, cuius quadratus cum dato numero
conficiat ipsius numeri inuenti Zensizensum, siue qua-
drati quadratum.

SIT datus numerus 83232. oporteatq. inuenire numerum, qui cum 83232. efficiat quadrati quadratum ipsius. Ponatur quæsitus numerus 17. cuius quadratus 18. & quadrati quadratus est 188. æqualis 18+83232. Semissis numeri zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum, id est, ad $\frac{1}{4}$. addo numerum 83232. efficiturq. 83232 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1883232}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{1883232}{4}$. addo semissem numeri zensorum, nimirum $\frac{1}{2}$. efficiturq. $\frac{1883232}{4}$. hoc est, 289. quadratum, cuius radix 17. est numerus quæsitus, ut prope finem cap. 12. declaratum est. Nam characteres Cossici 88.8. N. non sunt collaterales, sed inter quosuis duos medius est vnus: propterea primo loco inuenitur valor vnus quadrati, deinde radix eruitur, quæ offert numerum, quem inquirimus. Atque ita numeri inuenti 17. quadratus 289. cum dato numero 83232. efficit quadrati quadratum 835232. numeri inuenti 17.

V. 5 Numerum inuenire, cuius cubus cum dato numero con-
ficiat sui cubi quadratum, vel sui quadrati cubum.

SIT datus numerus 7526792. inueniendusq. alius, cuius cubus cum dato numero efficiat inuenti numeri cubi quadratum, vel (quod idem est) quadrati cubum. Ponatur quæsitus numerus 17. cuius cubus 18. & zensicubus 188. æqualis 18+7526792. atque ex hoc numero composito eruenda est radix zensicubica, hoc modo. Semissis numeri medij characteris 88. nimirum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. Addito numero 7526792. fit numerus 7526792 $\frac{1}{4}$. vel 20107169. ad cuius radicem quadratam $\frac{7526792}{4}$. addo semissem prædictam $\frac{1}{2}$ numeri medij characteris 88. facioq. $\frac{7526792}{4}$. id est, 2744. radicem quadratam huius numeri 188+7526792. propter characterem 88. qui in maximo characterè Cossico reperitur. Huius denique radicis quadratæ 2744. radix cubica 14. propter alium characterem 88. in maximo characterè positum, dabit numerum quæsitum, ut cap. 12. prope finem docuimus. Huius enim cubus 2744. additus dato numero 7526792. constat suum zensicubum, vel quadrati cubum, 7529536.

VI. 6 Inuenire duos numeros constantes datum numerum, ita
ut ex ductu vnus in alterum gignatur alius quiniis
datus numerus.

DATA summa sit 25. & productus numerus 84. Ponatur vnus numerus 1 2e. ideoq. alter 25 — 1 2e. qui simul additi faciunt 25. Ex vno vero in alterum sit numerus 25 2e — 1 8. æqualis 84. Addito 1 8. verobique, erit æqualitas inter 25 2e. & 1 8 + 84. Ablatisq. 84. vtrinque, inter 25 2e — 84. & 1 8. atque ex numero 25 2e — 84. elicienda est radix zensica, hac ratione. Semissis numeri radicū $\frac{25}{2}$. facit quadratum $\frac{625}{4}$. ex quo dempto numero 84. hoc est $\frac{176}{4}$. propter signum —. remanet numerus $\frac{449}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{176}{4}$. addo prædictam semissem numeri radicem, videlicet $\frac{25}{2}$. efficiq. $\frac{43}{2}$. hoc est 21. vnum ex numeris quæsitis. alter ergo erit 4, qui etiam inuenietur, si vltima radix inuenta $\frac{17}{2}$. detrahatur ex prædicta semisse numeri radicem, nimirum ex $\frac{25}{2}$. Nam numerus 25 2e — 84. duplicem radicem habet, propter signum —. quo absoluitur numerus 84. afficitur. Iam duo numeri 21. & 4. inuenti faciunt summam datam 25. & ex vno in alterum procreatur datus numerus 84.

7 Numerum inuenire, cuius zensizensus cum dato numero efficiat numerum in data proportionione ad quadratum numeri inuenti.

VII.

DATVS numerus sit 1183. inueniendusq. sit alius numerus, cuius quadrati quadratus cum 1183. faciat numerum, qui ad quadratum inuenti numeri proportionem habeat, quam 176. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 1 2e. cuius zensizensus 1 88. & quadratus, siue zensus 1 8. Erit ergo æquatio inter 1 88 + 1183. & 176 8. quandoquidem vnus zensizensus cum 1183. debet ad 1 8. proportionem habere, quam 176. ad 1. hoc est, æqualis esse 176 8. Ablatis igitur 1183. vtrinque, erit æquatio inter 1 88. & 176 8 — 1183. Ex numero hoc 176 8 — 1183. sic radicem zensizensicam eruemus. Semissis numeri medij characteris 8. est 88. ex cuius quadrato 7744. si tollantur 1183. propter signum —, remanent 6561. ad cuius radicem quadratam 81. si addatur prædicta semissis 88. fiet quadratus 169. cuius radix 13. dabit numerum quæsitum. Nam eius zensizensus 18561. cum dato numero 1183. facit numerum 19744. qui ad 169. quadratum inuenti numeri proportionem habet, quam 176. ad 1.

SED quoniam numerus 176 8 — 1183. duplicem habet radicem zensizensicam, maiorem scilicet & minorem, vt cap. 12. traditum est, maior est inuenta 13. quæ problemati satisfacit. Minor autem habebitur, si 81. radicem quadratam residui 6561. subtrahemus ex prædicta semisse 88. Reliqui enim numeri 7. radix quadrata, nimirum 8 7. erit minor radix zensizensica, numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus est 7. & zensizensus 49. qui cum 1183. facit numerum 1232. qui ad quadratum 7. proportionem habet eandem, quam 176. ad 1.

VIII.

8 Numerum inuenire, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, qui ad suum cubum proportionem habeat datam.

SIT datus numerus 1068664111. inueniendusq. sit alius numerus, cuius zensicubus cum dato numero faciat numerum, cuius proportio ad cubum inuenti numeri proportionem habeat eandem, quam 100000. ad 1. Ponatur quæsitus numerus 126. cuius cubus 126. & zensicubus 1826. Erit ergo æqualitas inter 1826 + 1068664111. & 10000026. quandoquidem 1826 + 1068664111. ad 126, proportionem habere debet eandem, quam 100000. ad 1. Ablatis igitur 1068664111. utrobique, remanebit æqualitas inter 1826. & 10000026 — 1068664111. atque adeo ex 10000026 — 1068664111. eruenda erit radix zensicubica hoc modo: Semissis numeri cuborum est 50000. a cuius quadrato 2500000000. si dematur numerus propositus, propter signum —, remanebit numerus 1431335889. ad cuius radicem quadratam 37833. si addatur semissis prædicta 50000. habebitur radix quadrata 87833. Cuius radix cubica 57833. dabit numerum quæsitum, iuxta doctrinam cap. 12. Nam eius cubus est 87833. & zensicubus 7714635889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 8783300000. qui ad cubum 87833. proportionem habet eandem, quam 100000. ad 1.

Et quoniam numerus 10000026 — 1068664111. duplicem habet radicem zensicubicam, quarum maior inuenta est 57833. satisfaciens ænigmati proposito. Minor ita reperietur. Ultima radix quadrata inuenta 37833. Ex prædicta semisse 50000. numeri cuborum detrahatur. Residui namq. 12167. radix cubica 23. erit minor radix satisfaciens quoque ænigmati proposito. Nam eius cubus est 12167. & zensicubus 148035889. qui cum dato numero 1068664111. facit numerum 1216700000. qui ad cubum 12167. eandem proportionem habet, quam 100000. ad 1.

IX.

9 Duos numeros in dato excessu inuenire, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur numerus datus quicunque.

SIT datus excessus 6. & numerus datus 475. Ponatur minor numerus 126. & maior idcirco 126 + 6. Ex illo in hunc fit numerus 1826 + 626. æqualis 475. Ablatis ergo 626. utrobique, erit æquatio inter 1826. & 475 — 626. Radicem ergo ex hoc numero ita eruemus. Semissis numeri radicem 3. facit quadratum 9. ad quod addicio numerum 475. qui intelligitur affectus signo +. Et ex confecto numero 484. capio radicem quadratam 22. Ex qua demo prædictam semissem 3. numeri radicem, propter signum —. Reliquis enim numerus 19. erit pretium 126. Ergo 126 + 6. valebit 25. Atque

que hi duo numeri 19. & 25. sunt quæſiti. Habent enim exceſſum datum 6. & ex vno in alterum producitur numerus 475.

SIT rursus datus exceſſus 6. & datus numerus 500. Iſdem poſitis, erit productus numerus $18 + 62$. æqualis 500. Et ablati 62, vtrunque, erit æquatio inter 18 . & $500 - 62$. Semiffis numeri radicem 3. facit quadratum 9. quod additum ad 500. facit 509. a cuius radice quadrata $\sqrt{509}$. ſi dematur prædicta ſemiffis 3. fiet minor numerus quæſitus $\sqrt{509} - 3$. Addito dato exceſſu 6. fiet maior $\sqrt{509} + 3$. Ex minore in maiorem fit numerus $509 - 9$. vt in hac formula apparet, id eſt,

$$\begin{array}{r} 500. \text{ quia } - \sqrt{4581}. \quad \& + \sqrt{4581}. \\ \text{ſe mutuo interimunt. Vel certe, quia} \\ \text{vt cap. 12. traditum eſt, ſi 9. quadra-} \\ \text{tum poſterioris particulæ auferatur} \\ \text{ex 509. quadrato prioris particulæ,} \\ \text{remanet numerus productus 500.} \end{array}$$

10 Numerum inuenire, cuius quadrati multiplex quæſitus vnâ cum eiſdem numeri quadrato quadrati faciat datum numerum.

SIT inueniendus numerus, cuius quadrati quinquuplum vnâ cum eiſdem quadrato quadrato efficiat 535086. Ponatur quæſitus numerus 12. cuius quadratus 144. quinquies ſumptus facit 720. qui numerus vnâ cum eiſdem numeri 12. Zenſenſo, ad eſt, cum 128. æqualis eſſe debet numero 535086. Quoniam igitur æquatio eſt inter $128 + 144$. & 535086. Ablatis 144. vtrunque remanebit æquatio inter 128. & 535086 $- 144$. atque ex 535086 $- 144$ 534942. elicienda eſt radix Zenſenſica, hunc in modum. Semiffis numeri Zenſorum $\frac{1}{2}$. facit quadratum $\frac{1}{4}$. ad quem adiectus numerus datus 535086. facit $535086 \frac{1}{4}$. hoc eſt, $\frac{535086 \cdot 4 + 1}{4}$. a cuius radice quadrata $\sqrt{\frac{535086 \cdot 4 + 1}{4}}$. ſi prædicta ſemiffis $\frac{1}{2}$. dematur, propter ſignum, remanebit radix quadrata $\frac{1}{2} \sqrt{535086 \cdot 4 + 1}$. hoc eſt, 729. cuius radix quadrata 27. erit radix Zenſenſica numeri 535086 $- 144$. 534942. nimirum numerus, quem inquirimus. Nam eiſus quadratus 729. quinquies ſumptus facit 3645. qui numerus cum 53441. Zenſenſo inuenti numeri 27. facit numerum datum 535086.

11 Numerum inuenire, cuius cubus, cum eiſdem Zenſenſico bo faciat datum numerum.

SIT inueniendus numerus, cuius cubus cum eiſdem Zenſenſico faciat 129503906. Ponatur quæſitus numerus 12. cuius cubus 128. & Zenſicubus 128. Oportet ergo exiſtere æquationem inter $128 + 128$. & 129503906. ablatoque 128 vtrunque inter 128 &

& 1291503906 — 117. Et quo numero eruenda est radix Zenscubica, hoc modo. Semissis numeri medij. Cossici est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. Si addatur datus numerus, fit numerus 1291503906 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1291503906}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{22117}{2}$. si dematur predicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit radix Zenscubica $\frac{22117}{2}$. id est, 35937. cuius radix cubica 33. erit radix Zenscubica numeri 1291503906 — 117. nimirum numerus, qui queritur. Nam eius cubus 35937. cum eiusdem Zenscubo 1291467969. facit numerum 1291503906.

XII. 12 Datum numerum in duas partes diuidere, ut maior per minorem diuisa, & minore per maiorem, summa Quotientum sit data.

NUMERVS 100. diuidendus fit in duas partes, vt maior diuisa per minorem, & minore per maiorem, duo Quotientes faciant summam 2 $\frac{1}{4}$. Ponatur vna pars 12. & altera 100 — 12. Diuisa hac per illam, fit Quotiens $\frac{100-12}{12}$. Et illa per hanc diuisa, Quotiens fit $\frac{12}{100-12}$. quorum Quotientum summa $\frac{100-12}{12} + \frac{12}{100-12}$. aequalis esse debet numero 2 $\frac{1}{4}$. siue $\frac{11}{4}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 218002 — 2182. & 910000 — 182002 + 1822. Additis autem 2182 vtrique, fiet æquatio inter 218002. & 910000 — 182002 + 4002. Et additis 182002 vtrobique, inter 400002. & 910000 + 4002. Et ablati 910000. vtrobique, inter 400002 — 910000. & 4002. Et diuisis singulis numeris per numerum signo 2 affectum, id est, per 400. æqualitas erit inter 1002 — 2275. & 12. Radix ergo quadrata ita eruetur: Semissis numeri radicem est 50. a cuius quadrato 2500. si detrahantur 2275. propter signum — reliquus fiet numerus 225. ad cuius radicem quadratam 15. si addatur predicta semissis 50. fiet pretium radicis 65. maior pars. Minor ergo erit 35. quæ etiam habebitur, (quoniam numerus propositus 1002 — 2275. duplicem radicem habet) si radix quadrata 15. proxime inuenta, auferatur ex predicta semisse 50. Itaque partes quæ sitæ sunt 65. & 35. Et diuisa illa per hanc, & hac per illam, fiunt Quotientes 1 $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{4}$. quæ summam faciunt 2 $\frac{1}{4}$.

XIII. 13 Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius multatus numero dato quocunque proportionem datam habeat.

SIT inueniendus numerus, ad quem quadratus ipsius multatus numero 264. proportionem habeat decuplam. Ponatur quæsitus numerus 12. cuius quadratus 12. si prius ab eo subducantur 264. ad 12. proportionem habere debeat decuplam, ita vt æquatio sit inter

inter 10 &c. & 18 — 164. Et additis 164. vtrinque, inter 10 &c. + 164. & 18. quæ ita expeditur. Semissis numeri radicem 5. quadratum facit 25. & additis 164. fit numerus 189. ad cuius radicem quadratam 17. si prædicta semissis 5. addatur, fit pretium vnius radicis 22. numerus videlicet quæsitus. Nam eius quadratus 484. si amiserit 164. fiet 320. qui numerus decuplus est numeri 32.

14 Numerum inuenire, ad quem quadratus ipsius auctus dato numero proportionem habeat datam.

XIII.

SIT inueniendus numerus, ad quem ipsius quadratus auctus numero 110. proportionem habeat, quam 27. ad 1. Ponatur numerus quæsitus 12. cuius quadratus 144. si ei addentur 110. ad 1. 27 proportionem habere debeat eandem, quam 27. ad 1. ita ut æquatio fit inter 144 + 110. & 272. Ablatisq. 110. vtrinque, inter 144. & 272 — 110. quam ita resolues. Semissis numeri radicem 12. quadratum facit 144. a quo si auferantur 110. id est, 34. reliquus fit numerus 110. ad cuius radicem quadratam 10. si addetur prædicta semissis 12. fiet maior radix 22. id est, 22. Et si proxime inuenta radix 12. auferetur a prædicta semisse 12. reliqua fiet minor radix 10. hoc est, 10. Nam hæc æquatio duplicem habet radicem. Atque ita vterque numerus 22. & 10. problemati proposito satisfaciet. Quadratus enim 484. numeri 22. auctus numero 110. fit numerus 594. qui ad 22. eandem proportionem habet, quam 27. ad 1. Item quadratus 100. numeri 10. auctus numero 110. fit 120. qui numerus ad 10. proportionem eandem habet, quam 27. ad 1.

IVX

15 Duos numeros inuenire, quorum quadrati datam

XV.

summam conficiant: & ydem numeri inter se multiplicati producant numerum, ad quem quadratorum summa habeat proportionem datam.

SVMMA quadratorum data fit 180. quæ ad productum numerum proportionem habeat duplam sesquialteram: atque idcirco cum 180. ad 72. habeant proportionem duplam sesquialteram, productus numerus ex vno in alterum fit 72. qui numerus 72. habetur: si 180. diuidantur per 2. denominatorem datæ proportionis. Ponatur vnus numerus quæsitus 12. & alter 12. ut ex vno in alterum fiant 72. qui numerus 72. habetur per diuisionem 72. per 12. quæ admodum si inueniendus fit numerus, qui ductus in 8. faciat 48. si diuidantur 48. per 8. inuenitur numerus 6. qui ductus in 8. facit 48. Iam quadrati posteriorum numerorum 12. & 6. sunt 144. & 36. quorum summa 180. æqualis esse debet 180. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 128 + 512. & 1808. Ablatisq. 512. vtrinque, erit æquatio inter

libnq2.18

libnq2.02 d

libnq2.02 3

ter

ter 188. & 1808 — 5184. cuius radicem ita inuenies. Semissis numeri medij, qui gerit characterem 8. est 90. a cuius quadrato 8100. si demantur 5184. fiet reliquus numerus 2916. ad cuius radicem 54. si addatur semissis prædicta 90. fiet summa 144. cuius radix quadrata 12. iuxta doctrinam cap. 12. erit maior radix. Et si proxime inuentam radicem 54. demes ex semisse prædicta 90. reliquus erit numerus 36. cuius radix 6. dabit minorem radicem. quæ etiam habetur. si 72. diuidantur per priorem radicem inuentam 12. Itaq. duo quæsti numeri sunt 12. & 6. qui inter se multiplicati faciunt 72. ad quem numerum summa data quadratorum ex ipsis procreatorum, qui sunt 144. & 36. nimirum 180. proportionem habet duplam sequalteram, quemadmodum propositum est.

XVI.

16 Datus numerum in tres numeros continui proportionalis datus, ita ut producti ex primo in secundum cum producto ex secundo in tertium, quæ cum eo, qui fit ex tertio in primum faciat quicunq. numerum datum.

SIT datus numerus 76. diuidendus. ita ut tres producti efficiant 1824. Quoniam datis tribus numeris continui proportionalibus.

a 1. secundi.

qui fit ex medio in summam omnium, æqualis est eis, qui sunt ex medio in primum, & ex medio in tertium, & ex medio in se, hoc

b 10. septimi

est. ex tertio in primum, cum hic æqualis sit ei, qui fit ex medio in se: si datus numerus producendus 1824. per datum numerum diuidendum 76. diuidatur, erit Quotiens 24. medius numerus proportionalis: quippe cum Quotiens 24. ductus in diuisorem 76. id est, in summam omnium trium, gignat numerum diuisum 1824. qui nimirum æqualis ponitur tribus productis, quos diximus. Dempto ergo hoc medio 24. ex 76. summa omnium, reliqua fiet summa primi & tertij, 52. Ponatur ergo primus 12. eritq. propterea tertius 52 — 12. ita ut tres numeri proportionales sint 12. 24. 52 — 12.

c 10. septimi

Igitur qui fit ex 12 in 52 — 12. id est, 522 — 12. æqualis erit numero 76. qui ex medio 24. fit in se. Addito ergo 12 utrinque, erit æquatio inter 522. & 12 + 176. Ablatiq. 176. utrobique, inter 522 — 176. & 12. quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicem est 16. a cuius quadrato 676. si demantur 576. remanet numerus 100. ad cuius radicem quadratam 10. si addatur prædicta semissis 16. fiet pretium radicis 36. primus numerus. tertius autem erit 16. nimirum 52 — 12. ita ut tres numeri proportionales sint, 36. 24. 16. facientes summam 76. & tres producti ex primo in secundum, & ex secundo in tertium, & ex tertio in primum. efficiunt 1824.

Quoniam vero numerus 522 — 176. duplicem habet radicem, reperitur minor, si radicem quadratam inuentam 10. ex prædicta semisse

semisse 26. auferatur. Relinquetur enim pretium vnus radicis 16. primus numerus, tertius autem erit 36. nimirum $52 - 16$. Eruntq. rursus tres numeri proportionales 16. 24. 36. qui prius, inuerso tamen ordine.

17 *Datis duobus numeris siue aequalibus, siue inaequalibus, altum inuenire, qui utrilibet eorum additus faciat summam, quae ducta in additum, hoc est, in inuentum, producat quadratum alterius numeri.*

XVII.

HOC problema soluius in lineis, in scholio propos. 36. lib. 3. Euclidis.

SINT dati duo numeri 10. & 12. inueniendusq. sit alius, qui additus primum ad 10. faciat numerum, qui ductus in additum. prodeat quadratum alterius 12. nimirum 144. Ponatur numerus quæsitus 12. Addito numero 10. fit numerus 22. qui ductus in 12. facit 264. qui numerus æqualis esse debet 144. Ablatis 102 utrobique, erit æquatio inter 18. & 144. — 102. quam ita resolues. Semissis numeri radicem 6. facit quadratum 36. & additis 144. fit numerus 180. a cuius radice quadrata 13. si prædicta semissis 6. auferatur, propter signum — remanebit pretium radicis 8. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 10. facit 18. qui numerus ductus in 8. facit 144. quadratum alterius numeri dati 12.

DEINDE inueniendus sit numerus, qui additus ad 12. faciat numerum, qui ductus in additum producat 100. quadratum alterius numeri 10. Ponatur quæsitus numerus 12. qui cum 12. facit 24. Hic ductus in 12. facit numerum 288. — 122. æquale 100. Ablatis 122. utrobique, erit æquatio inter 18. & 100. — 122. quam ita resolues. Semissis numeri radicem 6. facit quadratum 36. additisq. 100. fit numerus 136. cuius radice quadrata 11. 36. si detrahas semissem prædictam 6. relinquetur pretium radicis 8. 136. — 6. numerus quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 20. 136 + 6. qui numerus ductus in inuentum 8. 136 — 6. producit numerum 100. quæ quidem multiplicatio perficietur, vt cap. 23. scripsimus, si quadratum posterioris particulæ 6. nimirum 36. auferatur ex 136. quadrato prioris particulæ.

SINT denique duo numeri æquales 8. & 8. ponaturq. inuentus 12. Ex 12. & 8. fit numerus 20. qui ductus in 12. facit 240. + 82. numerum æqualem 64. quadrato numeri 8. Ablatis 82 utrobique, erit æquatio inter 18. & 64. — 82. Semissis numeri radicem 4. ad cuius quadratum 16. additis 64. fit numerus 80. a cuius radice quadrata 8. 80. si dematur prædicta semissis 4. remanet numerus 76. — 4. qui quæritur. Hic additus ad 8. facit summam 84. quæ ducta in inuentum, vel additum 8. 80 — 4. facit 64. quadratum numeri 8. vt hæc sequens formula.

N n

docet.

$$\begin{array}{r} 18 \ 80 - 4 \\ 18 \ 80 + 4 \\ \hline 64 \end{array}$$

docet. Nam 16. quadratus posterioris particule 4. ablati ex 80. quadrato prioris particule 18. 80. relinquit 64.

XVIII.

18 Numerum inuenire medium inter numerum quotlibet unitatibus maiorem, & alium numerum quotius unitatibus minorem, ita ut extremi duo inter se multiplicati faciant datum quemcunque numerum.

SIT inueniendus numerus medius inter numerum, qui ipsum nouenario superet, & alium numerum, quem ipse ternario superet, ita ut extremi inter se multiplicati faciant 133. Ponatur quæritus numerus medius 12. inter 12 + 9. & 12 - 3. Ita enim a prioris superatur nouenario, & posteriorem ternario superat. Hi duo extremi inter se multiplicati faciunt numerum 18 + 6. 12 - 3. 12. æqualem 133. Additis 27. vtrobiq; fiet æqualitas inter 18 + 6. 12. & 160. Ablatisq; 6. 12. vtrinq; inter 18. & 160 - 6. 12. quæ ita absoluetur. Semissis numeri radicem est 3. ad cuius quadratum 9. additis 160. fit numerus 169. a cuius radice quadrata 13. si auferatur semissis prædicta 3. relinquetur pretium 12. 10. numerus scilicet medius quæritus. eruntq; extremi 19. & 7. atque inter se multiplicati faciunt 133.

SIT rursus inquirendus numerus medius inter duos, ut prius, ita ut extremi inter se multiplicati faciant 40. Inueniuntur rursus extremi 12 + 9. 80. 12 - 3. qui inter se multiplicati faciunt numerum 18 + 6. 12 - 3. 12. æqualem 40. Additis ergo 27. vtrobiq; erit æquatio inter 18 + 6. 12. & 67. Ablatisq; 6. 12. vtrinq; inter 18. & 67. fit numerus 76. a cuius radice quadrata 8. 76. si dematur prædicta semissis 3. propter signum - relinquetur pretium radicis 18. 76 - 3. numerus medius 3. qui quadratur a quo si detrahantur 3. fiet minor extremus 18. 76 - 6. & si addantur 9. fiet maior extremus 27. 76 + 6. qui extremi inter se multiplicati faciunt 76 - 6. 27. 76 + 6. 27. æqualem 40. Nam 18. 76 - 6. 27. 76 + 6. 27. 76. se mutuo interinunt, vel apposita formula apparet. Vel etiam, quia 16. quadratum posterioris particule 6. demptum ex 76. quadrato prioris particule relinquit 40. vt cap. 23. docuimus.

H O C. problema soluimus etiam cap. præcedenti enigmata 246. per simplicem æquationem.

18. 76 - 6. 27. 76 + 6. 27. 76. æqualem 40.

19 Numerum inuenire, qui duos alios excedat datis numeris, ita ut duo illi inter se multiplicati producant numerum, qui inuentum dato numero excedat.

XIX.

XX

SIT querendus numerus, qui duos alios superet numeris 8. & 6. ita ut illi duo inter se multiplicati procreent numerum quaternario maiorem numero indento. Ponatur numerus, qui queritur 12. Duo ergo illi minores erunt 12 — 8. & 12 — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 18 — 122 + 48. aequalem 122 + 4. ut nimirum positum 12. superet quaternario. Ablatis 4 vtriusque, erit æquatio inter 8 — 122 + 44. & 122. Et additis 122 vtriusque, inter 18 + 44. & 152. Et ablatis 44 vtriusque, inter 18. & 152 — 44. Semissis numeri radicem est 12. a cuius quadrato 144. ablati 44. siue 100. propter signum — remanet numerus 44. ad cuius radicem quadratam 22. si prædicta semissis 12. addatur, fiet pretium radicis 34. hoc est, 11. numerus queritus. Ergo duo numeri minores erunt 3. & 5. qui inter se multiplicati faciunt 15. hoc est, 11 + 4.

QUIA vero numerus hic 152 — 44. duplicem radicem habet, si radix quadrata ultimo loco inuenta 22. dematur ex prædicta semisse 12. reliqua fiet minor radix 10. hoc est, 4. numerus queritus. a quo si auferes 8. & 6. erunt duo alij numeri minores — 4. & — 2. qui inter se multiplicati faciunt — 8. qui numerus inuentum numerum 4. superat quaternario. Vbi vides, numeros etiam absurdos, siue fictos, hoc est, minores nihilo, satisfacere ænigmati propositum. quod alicui fortassis mirum videri possit.

.XXX

S C H O L I V M.

IN ænigmatibus huius similibus accidit nonnunquam, æquationem inueniri simplicem: tunc nimirum, quando in numerum productum ex multiplicatione duorum numerorum coefficientum reperitur numerus absolutus equalis excessui dato; quia tunc aufertur ille numerus absolutus, remanetq. æquatio inter 8. & 122. quod studiosum Lectorum manifestum volo, ne turbetur, cum viderit aliquando occurrere æquationem duplicem, & aliquando simplicem, in vtriusque exemplis eiusdem ænigmati. Sit enim querendus numerus, qui alios duos superet numeris 8. & 6. ita ut duo illi inter se multiplicati procreent numerum, qui inuentum numerum excedat numero 48. Ponatur numerus queritus 12. Duo ergo illi minores erunt 122 — 8. & 122 — 6. qui inter se multiplicati faciunt numerum 18 — 122 + 48. aequalem 122 + 48. Ablatis 48. vtriusque, erit equalitas inter 18 — 122. & 122. additisq. 122. vtriusque, inter 18. & 242. quæ æquatio simplex est. Divisis ergo 15. per 1. fiet 12225. (quod numeri coefficienti 8. & 6. redieratiles sunt) ni-

Na 2

mirum

facit numerum 404 — 4. hoc est, 400. quia — 18 6464. & + 6464. se mutuo interinunt, vt altera formula monstrat.

IT. M. sic inquirendus numerus, cuius quadruplum cum eiusdem quadrato faciat 780. Posita 1 2e erit eius quadruplum 4 2e vna cum eius quadrato 1 8e numerus 1 8 + 4 2e. aequalis 780. Subtrahisq. 4 2e vtriusque, erit aequatio inter 1 8. & 780 — 4 2e. Semissis numeri radicem est 2. ad cuius quadratum 4. additis 780. fit numerus 784. a cuius radice quadrata 28. si tollatur praedicta semissis 2. fiet 1 2e. 26. numerus, quem inquiremus. Eius quadruplum 104. vna cum eiusdem quadrato 676. facit 780.

22 Dato quouis numero, duos alios inuenire, qui inter se multiplicati producant datum ipsum numerum, & quadrati omnium trium faciant datam summam, quancunque

XXII.

SIT. datus numerus 8. inueniendi. sint alij duo, qui inter se multiplicati faciant ipsum numerum 8. & quadrati omnium trium faciant 101 2. oportet quadratos duorum numerorum inuentorum facere 37 2. vt patet, si dati numeri 2. quadratus 64. detrahatur ex 101 2. summa omnium trium. Ponatur vnus numerorum, qui queruntur 1 2e. Et quia alter in hunc ductus debet sacere 2. si 8. diuidatur per 1 2e, erit Quotiens 4 2. alter numerus. Nam ductus in diuisorem 1 2e. producet 8. Quadrati horum duorum numerorum 1 2e & 4 2e sunt 1 8. & 8 2e. qui summam faciunt 101 2. aequalis 37 2. Philo. 4 2e. quae aequatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 9 8 & 376. & 342 8. Ablatisq. 176. vtriusque, erit aequatio inter 9 8. & 340 8. — 176. Diuisis omnibus numeris per numerum 9. caractere maximo 88. insignitum, fiet aequatio inter 1 88 & 38 8 — 64. Semissis numeri Zenforum est 1 2e. a cuius quadrato 440 2e. hoc est, a 356 2 2e. Si demantur 64. remanent 1 91 2 2e. hoc est, 1 44 2 2e. ad cuius radicem quadratam 1 2e. si addatur praedicta semissis Zenforum 1 2e. fiet 1 8 2 2e. (quia inter Cossicos numeros binos medij sunt singuli) hoc est, 36. cuius radix quadrata 64. est vnus numerorum, quem posuimus 1 2e. ac proinde alter numerus, quem posuimus 4 2e. hoc est, 8. diuisa per 1 2e. nuntiat per 6. erit 1 2. Qui etiam hoc modo reperietur. Quoniam numerus 1 44 2 2e. — 64. duplicem habet radicem, si radix quadrata 1 2e. vltimo loco inuenta tollatur ex praedicta semisse 1 2e. reliquus erit alter Zenfus 1 2e. siue 4 2e. cuius radix quadrata 8. siue 1 2. offerret alterum numerum. Itaq. duo numeri quae sit sunt 6. & 1 2. qui inter se multiplicati faciunt 8. & eorum quadrati 36. & 1 2e. siue 1 2. faciunt 37 2. ac proinde quadrati omnium trium numerorum 8. 6. 1 2. faciunt summam 101 2.

XXIII.

23. Duos numeros inuenire datam efficientes summam, & qui inter se multiplicati producant datum numerum, qui maior non sit quadrato ex semisse data summa descripto.

V E I.

Datum numerum in duos distribuere, ut ex vno in alterum gignatur datus quicunque numerus, qui maior non sit quadrato semissis dati numeri.

XXX.

QVAERENDI sunt duo numeri consistentes summam 100. Vel (quod idem est.) Datus numerus 100. secandus sit in duos, qui inter se multiplicati faciant 10. Ponatur vnus numerus 1 26. Ideoq. alter 100 — 1 26. Hi inter se multiplicati faciunt numerum 100 26 — 1 2. aequalem 10. Addito 1 2. vtriusque, erit aequalitas inter 100 26. & 10 + 1 2. Ablatisq. 10. vtriusque, inter 100 26 — 10. & 1 2. Semissis numeri radicum est 50. ac cuius quadrato 2500. ablati 10 remanet numerus 2490. ad cuius radicem quadratam $\sqrt{2490}$. si addatur praedicta semissis 50. fiet 1 26. $\sqrt{2490} + 50$. vnus numerus. Alter ergo erit $\sqrt{2490} + 50$. Nam ablati 50. ex 100 + 100. remanent — $\sqrt{2490} + 50$. hoc est, 50 — $\sqrt{2490}$. Si autem inueniatur $\sqrt{2490}$. vtriusque formula indicat. Itaq. duo numeri quæsti sunt $\sqrt{2490} + 50$. & 50 — $\sqrt{2490}$. qui faciunt summam 100. quippe cum + $\sqrt{2490}$. & — $\sqrt{2490}$. se mutuo destruant. Et ex vno in alterum, hoc est, ex 50 + $\sqrt{2490}$. in 50 — $\sqrt{2490}$. gignitur numerus 10. vt hæc formula indicat. quæ multiplicatio fit, si quadratum 2490. posterioris particulæ dematur ex 2500. quadrato particulæ prioris, vt cap. 23. dictum est.

QVONIAM vero æquatio inuenta duplicem habet radicem, inueniemus eosdem numeros per alteram radicem minorem. Si namq. radix quadrata $\sqrt{2490}$. ultimo loco inuenta dematur ex praedicta semisse 50. fiet 1 26. 50 — $\sqrt{2490}$. vnus videlicet numerorum, quos quærimus. alter erit 50 + $\sqrt{2490}$. qui nihil minus remanet, si numerus 50 — $\sqrt{2490}$. detrahatur ex 100. vt in hac formula vides. 50 + $\sqrt{2490}$. Atque ita inuenti sunt iidem numeri 50 — $\sqrt{2490}$. & 50 + $\sqrt{2490}$. ordine tamquam inuerso.

DEBET autem numerus productus datus non maior esse quadrato, qui ex semisse datæ summæ, vel dati numeri gignitur. quia quadratus

dratus semissis maior est numero, qui ex partibus inæqualibus pro-
portitur. cum hic una cum quadrato intermedie sectionis, æqualis
sit illi quadrato. Unde numerus 12. diuidi non potest in duas par-
tes, ut ex earum multiplicatione producatur numerus 40. Et quod
pulchre nos deest notamus. Postea enim una parte 12. de altera
12 — 12. fiet æquatio inter 12. & 12 — 40. Et quia ex 36. qua-
drato semissis numeri radicum aufertur, nequit numerus absolutus
40. pronunciari, quætionem esse impossibilem. *namque inter duo*

a scholæ
noni.

**24 Numerum inuenire, cuius quadratus ab alio numero
superetur dato numero, & alium excedat alio nume-
ro dato, ut extremi inter se multiplicati producant
datum quemlibet numerum.**

XXIII.

imiquel. os

QVAERENDVS sit numerus, cuius quadratus superetur quincie-
rio ab alio numero, & alium quendam superet binario, & quo
extremi inter se multiplicati faciant 338. Ponatur numerus ille
12. cuius quadratus 144. Maior ergo erit 12 + 5. & minor 12 — 1
qui duo inter se multiplicati gignunt numerum 133. 12 + 5 = 17
æqualem 338. Additisq. 10. utrobique, erit æquatio inter 17 + 5
38. & 338. Et ablatis 38. utrinque, inter 17. & 338. — 38 = 300
Quærenda ergo est radix zenfzenfica, hoc modo. Serui sis numeri
zenforum est 2. ad cuius quadratum 4. additis 338. sine 4. dabitur
sit numerus 342. cuius radicem quadratam 342. si dematur, prædi-
cta semissis 17. remanet numerus 325. hoc est 49. cuius radix quadra-
ta 7. dabit numerum quæsitum. Huius enim quadratus 49. est inter
34. quinario maiorem, & 47. binario minorem, sitq. ex 47. in 34
numerus datus 338.

**25 Numerum inuenire, a cuius quadrato quadrati subtra-
cti quoties quadrati eiusdem numeri, relinquunt do-
ctum numerum quemcunque.**

XXV.

imiquel. os d

QVAERENDVS sit numerus, cuius quatuor quadrati subtrac-
ti ab eiusdem quadrato relinquunt 205. Ponatur numerus 12.
cuius quadratus 144. & quatuor quadrati 48. detracti ex 144. nunt
rati ex quadrati quadrato positi numeri 12. relinquunt numerum 136
— 48. æqualem 205. Additisq. 48. utrobique, erit æquatio inter
12 + 48 = 60. & 205. Ruenda ergo est radix zenfzenfica, hoc modo.
Semissis numeri zenforum est 2. ad cuius quadratum 4. additis
205. sine 4. dabitur sit numerus 209. cuius radicem quadratam 209. additis
prædictæ semissis 2. sit numerus 211. cuius radix quadrata 14. dabit
numerus, qui quæritur. Huius enim quatuor quadrati, 196. dempti
ex eiusdem zenfzenso 209. relinquunt 205. numerum datum.

cap. 24. dictum est, & in hac formula apparet, sit numerus

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{3} (\sqrt{3} 12500 + 150) \\
 \sqrt{3} (150 - \sqrt{3} 12500) \\
 \hline
 - 12500 - \sqrt{3} 281250000 \\
 + \sqrt{3} 281250000 + 12500 \\
 \hline
 \text{Productus. } \sqrt{3} 10000
 \end{array}$$

$\sqrt{3} 10000$. hoc est, datus numerus 100. Item quadrati $\sqrt{3} 12500 + 150$. & $150 - \sqrt{3} 12500$. faciunt summam 300. ut manifestum est.

PRAEDICTA autem multiplicatio facilius conficietur, per ea, quae cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita constituantur.

Nam si 12500. quadratum posterioris particulae dematur ex 12500. quadrato particulae prioris 150. remanebit numerus 10000. Praeposito ergo signo $\sqrt{3}$. fiet productus numerus $\sqrt{3} 10000$.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{3} (150 + \sqrt{3} 12500) \\
 \sqrt{3} (150 - \sqrt{3} 12500) \\
 \hline
 \sqrt{3} 10000
 \end{array}$$

L E M M A.

DVO numeri inter se multiplicati procreant numerum medium proportionalem inter eorum quadratos, in proportionem ipsorum numerorum.

SINT enim duo numeri A, & B. Ex A, in B, fiat C, & ex A, in se, fiat quadratus D, & ex B, in se quadratus E.

Dico C, medium proportionalem esse inter D, & E. A. 3. B. 4. C. 12. D. 9. E. 16.

& E, id est, E, C, D, esse continue proportionales in proportionem B, ad A. Quoniam

enim A, multiplicans B, & A, fecit C, & D, & B, & A, ad D, ut B, ad A. a 17. septimi

Item quia B, multiplicans B, & A, fecit E, & C, & A, & B, ad C, ut B, ad A. b 17. septimi

B, ad A. Igiter E, C, D, continue proportionales sunt in proportionem B, ad A. quod est propositum.

C O R O L L A R I U M.

HINC fit, si duo numeri se mutuo multiplicantes producant aliquem numerum, quadratos ipsorum numerorum se mutuo multiplicantes producere quadratum numeri producti. Cum enim numerus 12 ex 3. in 4. productus sit medio loco proportionalis inter eorum quadratos 9. & 16. & fiet ex 9. in 16. quadratus numeri 12.

O o

S C H O.

c 10. septimi

S C H O L I U M.

IDEM hoc enigma 26. soluetur sine precedenti Lemmate, hac ratione. Ponatur in priori exemplo unus numerorum 12. ideoq. alter erit $\frac{72}{12}$. et ex motus eorum multiplicatione produratur numerus 78. Quadrati eorum 12. & $\frac{72}{12}$ faciunt summam $\frac{144}{12} + \frac{72}{12}$. Aequalem 205. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 12 & 6084. & 2052. Ablatisq. 6084. utroque, erit æquatio inter 12 & 2052. — 6084. ut prius.

RVRSVS in posteriori exemplo ponatur unus numerorum 12. eritq. alter $\frac{100}{12}$. ut eorum multiplicatio faciat 100. Quadrati eorum 12. & $\frac{100}{12}$ faciunt summam $\frac{144}{12} + \frac{100}{12}$. Aequalem 200. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 12 & 10000. & 2000. Ablatisq. 10000. utrobique, erit æquatio inter 12 & 2000. — 10000. ut supra.

XXVII. 27 Duos numeros inuenire facientes summam datam, quorum quadrati faciant quoque datam summam.

SIT summa numerorum 19. & quadratorum 205. Ponatur primus numerus 12. ideoq. secundus 19 — 12. Quadrati eorum 12. & 361 — 382 & 12. faciunt summam 361 — 382 & 12. æqualem 205. Additis 382. utrobique, erit æquatio inter 361 & 12. & 382 & 205. Et ablati 205. utrinque, inter 156 & 12. & 382. Et rursum ablati 156. utrinque, inter 12 & 382 — 156. Diuisi q. omnibus per 2. numerum zenforum, erit æquatio inter 12. & 192 — 78. quam ita resolues. Semissis numeri radicem est $\frac{12}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{144}{4}$. detractis 78. hoc est. $\frac{144}{4} - 78$. remanet numerus $\frac{66}{4}$. ad cuius radicem quadratam $\frac{7}{4}$. si addatur prædicta semissis $\frac{12}{2}$. fiet maior radix (quia numerus Cosicus duas radices habet) $\frac{12}{2}$. id est, 13. primus numerus quæsitus. Secundus ergo erit 6. nimirum 19 — 12. qui numerus 6. erit quoque minor radix, quæ habebitur, si vltima radix inuenta $\frac{7}{4}$. ex prædicta semisse $\frac{12}{2}$. detrahatur, remanet enim numerus $\frac{12}{4}$. siue 6. Numeri ergo qui quærentur, sunt 13. & 6. quorum summa 19. & summa quadratorum 205.

RVRSVS summa numerorum sit 30. & quadratorum 600. Posito primo numero 12. & secundo 30 — 12. faciunt quadrati summam 900 — 602 & 12. æqualem 600. Additis 602. utrinque, erit æquatio inter 900 & 12. & 602 & 600. Et ablati 600. utrobique, inter 300 & 12. & 602. Et rursum ablati 300. utrinque, inter 12 & 602 — 300. Diuisi q. omnibus numeris per 2. numerum Zenforum, æquatio erit inter 12. & 302 — 150. cuius radix ita nota fiet. Semissis numeri radicem est 15. a cuius quadrato 225. demptis 150. remanet numerus 75. ad cuius radicem quadratam

¶ 75. si addetur prædicta semissis 15. fiet maior radix 78 75 + 15. prior numerus, qui positus est 12. Et si eadem radix quadrata 78 75 tollitur ex prædicta semisse 15. reliqua fiet minor radix 15 — 78 75. qui numerus æqualis est posteriori numero 30 — 12. Nam si ex 30. detrahatur radix inuenta 78 75 + 15. remanebit numerus 15 — 78 75. ut hæc formula docet. Præterq. duo numeri quæsti 78 75 + 15. & 15 — 78 75. quorum summa est 30. & quadratorum summa 600. ut dux hæc formulæ indicant.

$$\begin{array}{r}
 78\ 75 + 15 \\
 78\ 75 + 15 \\
 \hline
 + 78\ 16875 + 225 \\
 75 + 78\ 16875 \\
 \hline
 300 + 78\ 67500
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 15 - 78\ 75 \\
 15 - 78\ 75 \\
 \hline
 - 78\ 16875 + 75 \\
 225 - 78\ 16875 \\
 \hline
 300 - 78\ 67500
 \end{array}$$

DEBET autem summa quadratorum esse maior semisse quadrati, qui ex data summa numerorum gignitur, & minor quadrato eiusdem summae. Itaq. si summa numerorum proponeretur 30. & quadratorum 400. foret quæstio impossibilis. Nam summa quadratorum maior non est semisse quadrati 900. ex data summa 30. producti. Atque ita occurreret vltima æquatio inter 12. & 30 75 — 150 quæ resolui nequit. Nam ex 225. quadrato semissis numeri radicem auferri non possunt 250. &c.

¶ QVOD si quadratorum summa sit maior quadrato summae numerorum propositorum, solui etiam non poterit problema, nisi concedamus, vnum numerum esse maiorem ipsa summa; & alterum minorem nihilo. Ut si summa detur 40. & summa quadratorum 1602. Ponemus vnum numerum 12. & alterum 40 — 12. Quadrati eorum 12. & 1600 — 80 24 + 12. faciunt summam 1600 — 80 24 + 12. æqualem 1602. Additis 80 24. utrobique, erit æquatio inter 1600 + 12. & 80 24 + 1602. Ex ablati 1600. utrinque, inter 2 24. & 80 24 + 12. Diuisisq. omnibus per 12. numerum Zenforum, inter 12. & 40 24 + 12. Iam semissis numeri radicem est 20. ad cuius quadratum 400. si addatur 1. fiunt 401. Et si ad 78 401. addatur prædicta semissis 20. fiet 12. 20 + 78 401. prior numerus, quem posuimus 12. qui demptus ex 40. reliquus fiet numerus posterior 20 — 78 401. ut in hac formula videre licet. Vbi vides priorem numerum 20 + 78 401. maiorem esse, quam 40. cum 78 401. maior sit, quam 20. posteriorē verò 20 — 78 401. minorem esse nihilo, nimirum 20. — 10 24. quorum utrumque ineptum est. Et tamen quæstioni satisfaciunt. Nam simul efficiunt summam 40. cum + 78 401. & — 78 401. se mutuo interimant: & eorum quadrati 801 + 78 641600. & 801 —

$$\begin{array}{r}
 40 + 78\ 0 \\
 20 + 78\ 401 \\
 \hline
 20 - 78\ 401
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 00\ 2 \\
 78\ 641
 \end{array}$$

18 641600. summam faciant 1602. Simile quid habuisti in ænigmate 149. superioris capituli. Vides ergo, numeros minores nihilo non esse frustra excogitatos: quippe cum per illos ænigmata quoque dissoluantur.

XXVIII. 28 *Datum numerum in duos partiri, ut eorum quadrati datam summam efficiant.*

HIC nihil aliud queritur, nisi ut duo numeri inueniantur efficientes datum numerum, ita ut eorum quadrati efficiant quoque datam summam, quod in antecedente ænigmate factum est.

XXIX. 29 *Datum numerum in tres numeros continuè proportionales partiri, quorum medius datus sit; cuius tamen quadratus maior non sit quadrato semissis illius numeri, qui relinquitur, detracto dato medio ex dato numero.*

SIT numerus 182, diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 78. Ponatur primus numerus 12e, ac proinde tertius 205 — 12e, ut duo hi faciant simul 205, qui numerus relinquitur, detracto dato medio 78, ex dato numero 182. Ex primo 12e, in tertium 205 — 12e, fit numerus 205 2e — 12e, qui aequalis erit quadrato medij, numero videlicet 6084. Addito ergo 12e, utrobique, erit æquatio inter 205 2e, & 12e + 6084. Et ablatis 6084, utrobique, inter 205 2e — 6084, & 12e, quæ æquatio ita resoluetur. Semissis numeri radicem est 22 2/3, a cuius quadrato 22 2/3 2/3, si demantur 6084, hoc est, 22 1/3, remanebit numerus 12 1/3, ad cuius radicem quadratam 12 1/3, si addatur semissis prædicta 22 2/3, fiet maior radix 12 1/3, hoc est, 169. Et si prædicta radix 12 1/3, tollatur, ex prædicta semisse 22 2/3, relinquetur minor radix 2 2/3, id est 36. Sunt ergo tres numeri continuè proportionales 16, 78, 169. 16 + 78 + 169 = 300. SIT rursus datum numerus 100, diuidendus in tres continuè proportionales, quorum medius sit 30. Ponatur primus 12e, ac proinde tertius 70 — 12e, ut duo hi faciant simul 70, quæ numerus relinquitur, detracto dato medio 30, ex dato numero 100. Ex primo 12e, in tertium 70 — 12e, fit numerus 70 2e — 12e, qui aequalis erit quadrato medij, numero videlicet 900. Addito ergo 12e, utrobique, erit æqualitas inter 70 2e, & 12e + 900. Ablatisq. 900, utrobique, inter 70 2e — 900, & 12e, quam æquationem ita expecta dies? Semissis numeri radicem est 35, a cuius quadrato 1225, demantur 900, remanet numerus 325, ad cuius radicem quadratam ablatam prædicta semisse 35, fiet maior radix 35 + 35 = 70. Et si eadem radix 35 35, demantur ex semisse prædicta 35, relinquetur minor radix

b 10. septimi

radix 35. — $\sqrt{8325}$. Itaque tres numeri quæfiti sunt 35. — $\sqrt{8325}$.
 $30. \sqrt{8325} + 35.$ continuè proportionales faciētes summam 100.
 Et qui fit ex primo in tertium, æqualis est quadrato medij, numero videlicet 900. ut hæc formula indicat. Quæ multiplicatio expeditior erit per ea, quæ cap. 23. dicta sunt, si numeri multiplicandi ita ordinentur, ut hæc altera formula monstrat. Nam si 325. quadratum posterioris particule tollitur ex 1225. quadrato prioris particule 35. reliquus fiet numerus 900.

$$\begin{array}{r} 35 - \sqrt{8325} \\ - 325 - \sqrt{8398125} \\ + \sqrt{8398125} + 1225 \\ \hline 900 \end{array}$$

SI in eodem exemplo medius numerus datur 40. erit quæstio impossibilis. Nam posito primo numero 12. & tertio 60 — 12. fiet ex primo in tertium numerus 602 — 12. æqualis quadrato medij, nimirum numero 1600. Et reducta æquatione, erit æqualitas inter 12. & 602 — 1600. quod fieri nequit. Nam semissis numeri radicem est 30. a cuius quadrato 900. detrahi non possunt 1600. &c. Ratio est, quia numerus 1600. quadratus medij dati 40. maior est quadrato 900. semissis numeri 60. qui relinquitur, detracto medio dato 40. ex dato numero 100.

Datum numerum in duas partes dividere, ita ut earum cubi faciant summam datam quancunque, quæ maior sit quarta parte cubi ex dato numero descripti.

DATUS numerus 10. dividendus sit in duas partes, quarum cubi faciant 370. qui numerus maior est quarta parte cubi ex 10. descripti, maior videlicet numero 250. Ponatur prima pars 12. & secunda 10 — 12. Cubi harum partium sunt 12. & 1000 — 3002 — 302 — 12. quorum summa 1000 — 3602 — 302. æqualis esse debet numero 370. Additis 3002 utrinque, fiet æquatio inter 1000 + 302. & 3602 + 370. Et ablatiis 370. utrobique, inter 630 + 302. & 3602. fit rursus ablatiis 630. utrinque, inter 302. & 3002 — 630. Divisiis autem singulis hisce numeris per numerum 20. totum, id est, per 30. erit æquatio inter 12. & 102 — 21. quam sic resolves. Semissis numeri radicem 5. facit quadratum 25. a quo demptis 21. remanet numerus 4. ad cuius radicem quadratam 2. addita prædicta semisse 5. fiet maior radix 7. Et eadem radix 2. dempta ex semisse prædicta 5. reliquam faciet minorem radicem 3. Partes ergo numeri dati 10. sunt 2. & 7. quarum cubi, 22. & 27. faciunt summam 370.

HOC idem xigma fuit 141. capitis 29. præcedentis, sed solutum aliter, quam hic, nimirum per simplicem æquationem, quæ occurrat propter variam numerorum positionem.

Ibidem quoque docuimus, quo pacto xigma hoc solui possit sine Algebra.

XXXI.

31 *Datum numerum in duos numeros distribuere, ut idem sit excessus inter quadratum maioris, & quadratum minoris, qui inter quadratum dati numeri, & quadratum maioris partis.*

SIT *datus numerus 30. Ponatur maior eius pars 12. & minor 30 — 12. Tres quadrati sunt 900. 12. & 900 — 602 + 12. Excessus 900. supra 12. est 900 — 12. Excessus 12. supra 900 — 602 + 12.*

+ 0 + 02 + 12
+ 900 — 602 + 12
— 900 + 602 + 02

Est 602 — 900. ut in hac formula subtractionis manifestum est. Est igitur æquatio inter hos excessus, id est, inter 900 — 12. & 602 — 900. Additisq. 900. utrobique, inter 1800 — 12. & 602. Et rursus addito 12. utrinque, inter 1800. & 12 + 602. Ablatisq. 602 utrobique, inter 1800 — 602. & 12. Radix ita inuenietur. Semissis numeri radicem est 30. ad cuius quadratum 900. additis 1800. fit numerus 2700. a cuius radice quadrata 2700. si prædicta semissis 30. dematur, remanebit præsumptum unius radicis 2700 — 30. maior scilicet pars. qua detracta ex dato numero 30. relinquetur minor pars 60 — 2700.

ut in hac formula subtractionis apparet. Iam tres quadrati sunt 900. 3600 — 2700000. & 6300 — 2700000. qui se mutuo excedunt hoc eodem numero 2700000 — 2700. ut in hisce formulis subtractionum perspicuum est.

+ 900 + 2700
+ 3600 — 2700000
— 2700 + 2700000

+ 3600 — 2700000
+ 6300 — 2700000
— 2700 + 2700000

IN posteriori formula, quoniam 2700000. & 2700000. commensurabiles sunt, cum maiore per minorem diuisa fiat Quotiens rationalis 2700. hoc est, a. si minor a maiore subtrahatur, reliquus erit numerus 2700000. Hæc omnia clara sunt, si considerentur ea, quæ de subtractione signorum + & —. & de subtractione radicem surdarum dicta sunt.

32 Datum numerum in duas partes distribuere, ut maioris partis quadratus cum minore parte faciat datum numerum quemcunque, minorem tamen quadrato dati numeri.

XXXII.

SIT diuidendus datus numerus 10. in duas partes, ut quadratus maioris partis cum parte minore faciat 73 $\frac{1}{4}$. Ponatur maior pars 12. & minor 10 — 12. Quadratus maioris partis est 144. qui cum minore parte facit summam 144 + 10 = 154. æqualem numero 73 $\frac{1}{4}$. Ablatis 10. utrobique, erit æquatio inter 144 — 12. & 63 $\frac{1}{4}$. Aditæq. 12 utrinque, inter 144. & 12 + 63 $\frac{1}{4}$. Radix ita eruetur. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 63 $\frac{1}{4}$. fit numerus 64. ad cuius radicem quadratam 8. si addatur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. fiet pretium vnius radicis 8 $\frac{1}{2}$. maior pars, minor ergo erit 1 $\frac{1}{2}$. Nam quadratum maioris partis 8 $\frac{1}{2}$. est 72 $\frac{1}{4}$. & addita minore parte 1 $\frac{1}{2}$. fit numerus 73 $\frac{1}{4}$.

Q V O D si minor pars statuatur 12. & maior 10 — 12. erit quadratus maioris partis 100 — 102 + 144. Addita vero minore parte 12. fit summa 100 — 102 + 144. æqualis numero 73 $\frac{1}{4}$. Additis ergo 102 utrobique, erit æquatio inter 144 + 100. & 192 + 73 $\frac{1}{4}$. Ablatisq. 73 $\frac{1}{4}$. utrinque, inter 144 + 26 $\frac{1}{4}$. & 192. Ablatisq. rursum 26 $\frac{1}{4}$. utrobique, inter 144. & 192 — 26 $\frac{1}{4}$. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. a cuius quadrato $\frac{1}{4}$. ablati 26 $\frac{1}{4}$. hoc est, $\frac{1}{4}$. remanet numerus $\frac{1}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{1}{2}$. addita ad prædictam semissim $\frac{1}{2}$. facit maiorem radicem $\frac{1}{2}$. id est 17 $\frac{1}{2}$. quæ inutilis est, cum non possit esse pars dati numeri 10. Minor ergo radix (quia numerus Cossicus 192 — 26 $\frac{1}{4}$. duplicem radicem habet) problema soluet. quæ reperietur, si radix quadrata ultimo loco inuenta $\frac{1}{2}$. dematur ex prædicta semisse $\frac{1}{2}$. Reliquus enim numerus 1 $\frac{1}{2}$. erit minor radix, offerens minorem partem numeri 10. maiorq. propterea erit 8 $\frac{1}{2}$. veluti prius.

Vides ergo, non semper utramque radicem, quam Cossicus numerus habet, assumi posse, ad problematis propositi solutionem. Maior tamen radix inuenta $\frac{1}{2}$. quamuis ad problema propositum non pertineat, optime tamen respondet huius æquationi inter 144. & 192 — 26 $\frac{1}{4}$. Nam eius radicis quadratus est $\frac{1}{4}$. æqualis 192 — 26 $\frac{1}{4}$. cum 192. faciant $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. a quibus si demantur 26 $\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{1}{4}$. remanet numerus $\frac{1}{4}$.

33 Datum numerum extrema, ac media ratione secare.

XXXIII.

SIT datus numerus 10. ita secandus, ut proponitur: hoc est, ut minor pars, & maior, ac datus numerus 10. sint continue proportionales,

MXXX

tionales, siue (quod idem est) ut quadratus maioris partis æqualis sit numero, qui ex minore parte in datum numerum produciatur. Ponatur maior pars 125. & minor 10 — 125. Quadratus maioris partis est 15625. æqualis numero 10000 — 1025. qui fit ex minore parte 10 — 125. in 10. Semissis numeri radicem est 5. ad cuius quadratū 25. additis 100. fit numerus 125. a cuius radice quadrata 125. si tollatur prædicta semissis 5. reliqua fiet radix 125 — 5. maior pars, qua ablata ex 10. reliqua fiet minor pars 15 — 125. ut in hac formula apparet. Nam quadratum maioris partis est 150 — 12500. ac tantundem fit ex minore parte in 10. ut duæ hæ formulæ multiplicationum demonstrant.

$$\begin{array}{r}
 125 \times 125 = 15625 \\
 10 \times 10 = 100 \\
 \hline
 15625 - 100 = 15525 \\
 15525 \div 10 = 1552.5 \\
 1552.5 + 10 = 1562.5 \\
 1562.5 - 5 = 1557.5 \\
 1557.5 \times 2 = 3115 \\
 3115 \div 2 = 1557.5
 \end{array}$$

S C H O L I U M.

SINE Algebra dividetur numerus datus extrema ac media ratione, hoc modo. Ad quadratum numeri adieciatur eiusdem quadrati quarta pars, & ex radice quadrata numeri conflati dematur semissis dati numeri. Reliquus enim numerus erit maior pars, qua dempta ex numero dato, reliqua fiet minor pars. Hac praxi colligitur tum ex solutione huius problematis, tum ex figura propof. 1. lib. 2. Eucl.

XXXIII.

34 Datum numerum in duos numeros partiri, ita ut quadratus maioris ad quadratum minoris proportionem habeat datum.

SIT numerus 30. secandus in duos, ut maioris quadratus ad quadratum minoris proportionem habeat duplam sesquiquartam. Ponatur maior 125. & minor 30 — 125. Quadratus illius est 15625. duplus sesquiquartus ad quadratum huius, nimium ad 900 — 6025 + 125. Si ergo hic quadratus multiplicetur per 125. erit æquatio inter 125 & 1900000000. quæ per multiplicationem in cruce reduceretur ad hanc inter 425 & 8100 — 54025 + 925. Additis igitur 54025 utrobique, erit æquatio inter 425 + 54025 & 8100 + 925. Ablatisq. 425. utrinque, inter 54025 & 8100 + 525. Et rursum ablatis 8100. utrinque, inter 525 & 14025 — 8100. Divisisq. omnibus per 5. erit æqualitas inter 125 & 10825 — 1620. Semissis numeri

MXXX

numeri radicem est 54. a cuius quadrato 2916. demptis 1620. remanet numerus 1296. cuius radix quadrata 36. addita ad prædictam semissem 54. facit maiorem radicem 90. quæ ad ænigma soluendum apta non est. cum non possit esse pars numeri dati 30. Si ergo eadem radix quadrata 36. dematur ex prædicta semisse 54. reliqua fiet minor radix 18. nimirum maior numerus quæsius. Minor ergo erit 12. Nam 32. quadratus illius ad huius quadratum 144. proportionem habet duplam sesquiquartam.

VBI etiam vides. quamvis Cossicus numerus duplicem radicem habeat. non tamen semper utramque assumi posse. licet maior ad vnguem etiam respondeat æquationi. Nam 8100. quadratus maioris radicis 90. æqualis est 10820 — 1620. cum 10820 efficiant 9720. a quibus si demantur 1620. relinquuntur 3100.

35 Datum numerum in duos numeros parti. et eorum quadrati summam datam consiciant. maiorem tamen semisse quadrati ex dato numero geniti. & minorem quadrato eiusdem numeri.

XXXV.

SIT numerus 40. diuidentus in duos. quorum quadrati faciant 928. qui numerus maior est. quam 800. semissis quadrati ex 40. procreati. & minor. quam 1600. quadratus eiusdem numeri 40. Ponatur vnus numerorum 12. & alter 40 — 12. Quadrati sunt 144. & 1600 — 8020 + 144. qui summam faciunt 2184 + 1600 — 8020. æqualem 928. Additis 8020. utrobique. erit æquatio inter 2184 + 1600. & 8020 + 928. Et ablatis 928. utrinque. inter 2184 + 672. & 8020. Et rursum ablatis 672. utrobique. inter 2184. & 8020 — 672. Diuisisq. omnibus per 2. inter 1092. & 4020 — 336. Semissis numeri radicem est 20. a cuius quadrato 400. demptis 336. remanet numerus 64. cuius radix quadrata 8. addita ad prædictam semissem 20. facit maiorem radicem 28. hoc est. maiorem numerum. Minor autem erit 12. quem etiam exhibet minor radix. Nam si quadrata radix inuenta 8. dematur ex prædicta semisse 20. remanent 12. Iam quadratus 784. maioris numeri 28. cum 144. quadrato minoris numeri 12. facit datam summam 928.

HOC ænigma solum etiam fuit in ænigmate 170. præcedentis cap. per æquationem simplicem.

36 Duos numeros in dato excessu inuenire. quorum quadrati datam summam efficiant. quæ maior tamen sit quadrato dati excessus.

XXXVI.

SIT datus excessus 11. & summa quadratorum 281. quæ maior est quadrato 121. dati excessus 11. Ponatur minor numerus 12. ideoq. maior 12 + 11. Quadrati 144. & 144 + 22 + 121. faciunt

Pp

sum-

summam $28 + 22 = 50$. æqualem 121. Ablatis 121. utrobique, erit æqualitas inter $28 + 22 = 50$. & 160. Dempisq. rursus $22 = 2$. vtrunque, inter 28 . & $160 - 22 = 138$. Diuisisq. omnibus per 2. inter 14 . & $80 - 11 = 69$. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 80. siue $\frac{320}{1}$. fit numerus $\frac{321}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{1}{4}$. ablata prædicta semisse $\frac{1}{2}$. remanet valor vnius radicis $\frac{1}{2}$. hoc est, 5. minor numerus. Maior autem erit 16. Atque horum duorum numerorum quadrati 25. & 256. faciunt 281.

SIT rursus datus excessus 11. & summa quadratorum 122. maior quadrato 121. excessus dati 11. Ponatur minor numerus iterum 12. & maior 12 + 11. Quadrati horum numerorum faciant, vt prius, summam $28 + 22 = 50$. æqualem 122. Ablatis 121. utrobique, erit æquatio inter $28 + 22 = 50$. & 1. Et ablatis rursus $22 = 2$ vtrunque, inter 28 . & $1 - 22 = -21$. Diuisisq. omnibus per 2. inter 14 . & $\frac{1}{2} - 11 = -10.5$. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. addita $\frac{1}{4}$. siue $\frac{1}{4}$. fit numerus $\frac{13}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{1}{4}$. dempta prædicta semisse $\frac{1}{2}$. relinquetur pretium vnius radicis $\frac{1}{4}$. minor numerus, & additis 11. siue, $\frac{44}{4}$. fiet maior numerus $\frac{57}{4}$. Quadrati horum numerorum faciunt summam 122 vt hæ formulæ multiplicationum indicant.

$$\begin{array}{r} 14 \frac{1}{2} + 14 \frac{1}{2} \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \frac{1}{2} + 14 \frac{1}{2} \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \frac{1}{2} + 14 \frac{1}{2} \\ \hline 28 \end{array}$$

Nam $\frac{13}{4}$. & $\frac{57}{4}$. faciunt $\frac{70}{4}$. hoc est, 17.5. & radices surdæ se mutuo destruunt.

XXXVII. 37 Dato numero, alium inuenire, per quem si diuidatur datus numerus, fiat Quotiens superans inuentum numerum dato numero.

SIT datus numerus 60. inueniendusq. sit alius, per quem si diuidatur 60. fiat Quotiens superans inuentum diuisorem numero 7. Ponatur numerus, qui quæritur, 12. Quotiens ergo erit $\frac{60}{12} = 5$. qui superat diuisorem 12. numero $\frac{60}{12} - 12 = 0$. (vt patet, si 12. detrahatur ex $\frac{60}{12}$. qui æqualis debet esse dato numero 7. ita vt æquatio sit inter $\frac{60}{12} - 12$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $60 - 12 \times 7$. & 72. Addito ergo 12. utrobique, erit æquatio inter 60. & 12×7 . Et ablatis 72 vtrunque, inter 12. & $60 - 72 = -12$. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 60. siue $\frac{240}{1}$. fit numerus $\frac{241}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{1}{4}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. remanebit pretium vnius radicis

cis

cis 12. hoc est, 5. numerus quæsitus. Nam diuisis 60. per 5. fit Quo-
tiens 12. qui diuisorem 5. numero 7. superat.

38 Datum numerum in duos numeros partiri, vt ex vno in alterum fiat alius datus numerus minor quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati: hoc est, ita vt radix quadrata dati numeri secundi minoris quarta parte quadrati ex primo dato numero procreati sit medio loco proportionalis inter duos numeros inuentos. XXXVIII.

SIT datus numerus 10. diuidendus in duos, inter quos 5. sit medio loco proportionalis, hoc est, vt ex eorum multiplicatione, producat numerus 10. Ponatur vnus numerorum 12. & alter 10—12. Ex eorum multiplicatione fit numerus 102—12. æqualis 10. Addito 12. vtrique, fiet æquatio inter 102. & 12+10. Et ablatis 10. vtrunque, inter 102—10. & 12. Semissis numeri radicem est 5. a cuius quadrato 25. demptis 10. fit reliquus numerus 15. ad cuius radicem quadratam 5. addita prædicta semissis 5. facit maiorem radicem 5+5. eademq. radix quadrata detracta ex prædicta semisse 5. reliquam facit minorem radicem 5—5. Atque hi duo numeri 5+5. & 5—5. faciunt summam 10. & ex vno in alterum fit quoque 10. vt in hac formula multiplicationis manifestum est. Nam — 5. 375. & + 5. 375. se mutuo interimunt: & ex additione + 25. & — 15. fit numerus 10.

| | |
|---|------------|
| | 5 — 5 |
| | 5 + 5 |
| | + |
| | 25 — 5 |
| | 375 |
| + | 5 375 — 15 |
| | 10 |

HOC idem ænigma soluius per simplicem æquationem in præcedenti cap. ænigmate 172.

MULTIPLICATIO quoque prædicta numeri 5 — 5. in 5+5. perficietur, si 15. quadratus posterioris particulæ ex 25. quadrato prioris particulæ detrahatur, vt cap. 23. declaratum est. Idem hoc ænigma solutum fuit in ænigmate 23. alio tamen exemplo proposito.

39 Datum numerum diuidere in duos, vt eorum quadrati summam faciant, quæ productum ex eorum multiplicatione superet dato numero. XXXIX.

SIT datus numerus 30. & excessus datus 228. Ponatur vnus numerorum 12. & alter 30—12. Quadrati sunt 12. & 18+900

— 60 2e. qui summam faciunt $28 + 900 = 60$ 2e. quæ superare debet numerum productum ex 1 2e. in 30 — 1 2e. hoc est, numerum 30 2e — 1 2e. excessu 228. ita vt æqualitas sit inter $28 + 900 = 60$ 2e. & 30 2e + 228 — 1 2e. Et addito 1 2e. vtriusque, inter $28 + 900 = 60$ 2e. & 30 2e + 228. Et additis 60 2e vtriusque, inter $28 + 900$. & 90 2e + 228. Et ablati 228. vtriusque, inter $28 + 672$. & 90 2e. Et rursum ablati 672. vtriusque, inter 28 . & 90 2e — 672. Diuisiſq. omnibus per 3. inter 1 2e. & 30 2e — 224. Semissiſ numeri radicem est 15. a cuius quadrato 225. demptis 224. superest 1. cuius radix quadrata 1. addita ad prædictam semissem 15. facit maiorem radicem 16. Eadem vero ex semisse prædicta 15. detracta relinquit minorem radicem 14. Itaq. quæſitæ partes numeri 30. sunt 16. & 14. Quadrati enim earum 256. 196. summam faciunt 452. quæ numerum 224. factum ex ductu 16. in 14. superat numero 228.

HOC idem problema soluimus per simplicem æquationem in ænigmatæ 176. præcedentis capituli, proposito tamen alio exemplo.

SI numerus diuidendus proponeretur 30. & excessus 30. fieret problema impossibile, vt ipsa operatio docebit.

XL. 40 Datum numerum partiri in duos, quorum radices quadrata habeant differentiam datam, cuius tamen quadratus minor sit numero dato.

SIT datus numerus 30. diuidendus in duos, quorum radices quadratæ habeant differentiam 5. Ponatur minoris radix 1 2e. ideoq. maioris radix 1 2e + 5. vt se excedant quinario. Quadrati harum radicem 1 2e. & 1 2e + 10 2e + 25. faciunt summam $28 + 10$ 2e + 25. æqualem 30. Ablatis 25. vtriusque, manebit æqualitas inter $28 + 10$ 2e. & 5. Ablatisq. rursum 1 2e. & 5 — 5 2e. Semissiſ numeri radicem est 2 1/2. a cuius quadrato 25. additis 5. sine 25 sit numerus 15. a cuius radice quadrata 3 1/2. dempta prædicta semisse 2 1/2. fiet pretium radicis 1 2e. minoris scilicet numeri radicis. Additis ergo 5. fiet maioris numeri radix 3 1/2 + 1 1/2. quæ dux radices se mutuo excedunt quinario. Et in se ductæ quadratæ faciunt numeros, qui queruntur, 15 + 25 = 40. & 15 + 25 = 40. qui faciunt 30. numerum datum.

IDE M ænigma solui etiam potest per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur minoris numeri radix 1 2e. & maioris 3 1/2. vt hæc illam superet quinario. Ambæ in se ductæ quadratæ faciunt $15 + 25 = 40$. & $15 + 25 = 40$. quorum summa $28 + 10$ 2e. æqualis est 30. Ablatis 25. hoc est, 12 1/2 vtriusque, manebit æquatio inter 1 2e. & 17 1/2. Diuisiſq. 17 1/2 per 2. fiet 8 3/4. & 1 2e. 3 1/2. Cum ergo minoris numeri radix posita sit 1 2e. erit ipsa radix minoris numeri 1 2e. Et maioris numeri radix

$\sqrt{8} + \frac{1}{2}$. cum posita sit $12 + \frac{1}{2}$. Invenitur ergo sunt eadem radices, quæ prius, &c.

41 Datum numerum dividere in duos, quorum radices inter se multiplicata faciant datum quemcunque numerum. XLI.

SIT datus numerus 12. secundus in duos, quorum radices inter se multiplicata faciant 5. Ponatur unus numerorum 12, & alter 12 — 12. Erunt eorum radices, $\sqrt{8} + 12$. & $\sqrt{8} (12 - 12)$. Hæ inter se multiplicata faciunt $\sqrt{8} (12 - 12) = 12$ qui numerus aqualis esse debet numero 5. Igitur & eorum quadrati 122 — 12. & 25. æquales erunt. Additoq. 12. utrobique, erit æquatio inter 122 & 12 + 25. Et ablatis 25. utrinque, inter 122 — 25. & 12. Semissis numeri radicem est 6.2 cuius quadrato 36. demptis 25. superest numerus 11. ad cuius radicem quadratam $\sqrt{8} 11$. addita prædicta semisse 6. fiet maior radix $\sqrt{8} 11 + 6$. sine 6 + $\sqrt{8} 11$ id est, maior numerus quæsitus. Et si eadem $\sqrt{8} 11$. tollatur ex semisse prædicta 6. reliqua fiet minor radix 6 — $\sqrt{8} 11$. nimirum minor numerus quæsitus. Atque duo hi numeri 6 + $\sqrt{8} 11$. & 6 — $\sqrt{8} 11$. faciunt propositum numerum 12. & eorum radices sunt $\sqrt{8} (6 + \sqrt{8} 11)$ & $\sqrt{8} (6 - \sqrt{8} 11)$ quæ inter se multiplicata faciunt $\sqrt{8} 25$. id est, 5. ut hæc formula monstrat. Nam si earum quadrata 6 + $\sqrt{8} 11$. & 6 — $\sqrt{8} 11$. inter se multiplicentur, (quod fiet, si 11. quadratum posterioris particula ex 36. quadrato particula prioris detrahatur, ut cap. 23. dictum est) fiet productus $\sqrt{8} 25$. id est, 5.

P E R simplicem æquationem solvemus idem ænigma, hoc modo. Ponatur unus numerus 6 + 12. & alter 6 — 12. quorum radices $\sqrt{8} (6 + 12)$ & $\sqrt{8} (6 - 12)$ inter se multiplicare faciunt numerum $\sqrt{8} (6 + 12) \sqrt{8} (6 - 12)$ ut hæc formula indicat, æqualem numero 5. Igitur & eorum quadrati 36 — 12. & 25. æquales erunt. Additoq. 12. utrobique, erit æquatio inter 36. & 12 + 25. Ablatisq. 25. utrobique, inter 11. & 12. Divisis ergo 11. per 1. fiet 12. 11. & 12. $\sqrt{8} 11$. Et quia unus numerorum positus fuit 6 + 12. erit ipse numerus 6 + $\sqrt{8} 11$. Alter veto, quem posuimus 6 — 12. erit 6 — $\sqrt{8} 11$. quemadmodum supra.

42 Dato numero, invenire alium, qui cum dato efficiat quadratum numeri inveni. XLII.

SIT

112

SIT datus numerus 40. Ponatur inuentus numerus 12. cuius quadratus 144. Ergo 12 + 40. aequalia sunt 18. Semifis numeri radicem est 3. ad cuius quadratum 9. additis 40. fit numerus 49. id est, 7². ad cuius radicem quadratam 49. addita predicta semifis 3. fiet pretium 12. $\sqrt{8} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ nimirum numerus quæritus, qui cū dato numero 40.

facit $\sqrt{8} \frac{1}{2} + 40 \frac{1}{2}$. qui numerus aqualis est quadrato numeri inuenti $\sqrt{8} \frac{1}{2} + 1$. Nam hic in se ductus (vt appositā formula docet) producit numerū $\frac{1}{2} + \sqrt{8} \frac{1}{2}$. hoc est, 40 $\frac{1}{2} + \sqrt{8} \frac{1}{2}$. Propterea quod hæ minutie $\sqrt{8} \frac{1}{2}$. & $\sqrt{8} \frac{1}{2}$. aequales sunt.

SIT rursus datus numerus 110. Ponatur numerus quæritus 12. Ergo 12 + 110. aequalia sunt 18. Semifis numeri radicem est 3. ad cuius quadratum 9. additis 110. fit numerus 119. id est, 11². ad cuius radicem quadratam 121. addita predicta semifis 3. fiet pretium 12. hoc est, 12. numerus quæritus. Huius enim quadratus 144. aqualis est numero conflato. ex dato 110. & inuenito 11.

HOC problema propositum etiam fuit in ænigmatē 3. huius cap. in alijs tamen numeris.

XLIII.

43 Datum numerum in duos partiri, vt summa quadratorum cum producto ex vno in alterum faciat datum numerum quemcunque.

SIT datus numerus diuidendus 20. & quadrati cum producto ex vna parte in alteram faciant 309. Ponatur vnus numerorum 12. & alter 10 — 12. Quadrati faciunt summam 144 + 400 — 402. quæ cum producto ex vno in alterum, id est, cum 202 — 18. facit numerum 18 + 400 — 202. aequalem 309. Additis 202 vtrobique, erit æquatio inter 18 + 400. & 202 + 309. Et ablati 309, vtrobique, inter 18 + 91. & 202. Et rursum ablati 91. vtrobique, inter 18. & 202 — 91. Semifis numeri radicem est 10. a cuius quadrato 100. ablati 91. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. addita predicta semifis 10. fit maior radix 13. Et eadem radice 3. dempta ex predicta semifis 10. reliqua fiet minor radix 7. Dux ergo partes numeri 20. sunt 13. & 7. Nam earum quadrati 169. & 49. vna cum 91. producto ex vno in alterum faciunt 309.

IDEM. exequemur per simplicem æquationem, hoc modo. Ponatur maior pars 10 + 12. & minor 10 — 12. vt simul conficiant 20. Quadrati sunt 144 + 202 + 100. & 18 — 202 + 100. facientes summam 282 + 100. quæ cum producto ex vna parte in alteram, nimirum cum 100 — 18 (qui productus habetur, si 18. id est, quadratus posterioris particule dematur ex 100. quadrato prioris particule, vt hic

112

ut hic apparet) facit numerum $18 + 300$. æqualem 309. Ablatis ergo 300. utrobique, manebit æqualitas inter 18 , & 9 . Diuisisq. 9. per 1. fiet 18 . 9. & 12 . 3. Ergo maior pars posita $10 + 12$ erit 22. Minor autem posita $10 - 12$. erit 7. veluti prius.

44 Numerum inuenire, qui in datum numerum ductus faciat numerum æqualem ei, quem inuenti numeri quadratus cum quolibet numero, qui minor sit quadrato ex semisse dati numeri procreato facit.

XLIII.

SIT inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 20. numero scilicet minore, quam quadratus semissis numeri 20. Ponatur numerus quæsitus 12 . qui ductus in 20. facit 240 . æquales $18 + 20$. nimirum quadrato ex 12 . procreato, vñ cum 20. Ablatis 20. utrobique, manebit æqualitas inter $20 - 20$. & 18 . Semissis numeri radicem est 5. a cuius quadrato 25. demptis 20. remanet numerus 5. cuius radix $\sqrt{5}$. addita prædictæ semissi 5. facit $\sqrt{5} + 5$. maiorem radicem. Et eadem radix dempta ex prædicta semisse 5. reliquam faciet minorem radicem 5. $\sqrt{5} - 5$. Atque vterque numerus $\sqrt{5} + 5$. & $\sqrt{5} - 5$. problema conficit. Nam multiplicatio $\sqrt{5} + 5$. in 20. facit $20\sqrt{5} + 100$. quantum nimirum fit ex $20 + \sqrt{5} 200$. quadrato numeri $\sqrt{5} + 5$. vñ cum 20. Item ex $\sqrt{5} - 5$. in 20. fit numerus $20\sqrt{5} - 100$. æqualis quadrato $20 - \sqrt{5} 200$. numeri $\sqrt{5} - 5$. vñ cum 20.

ITEM sit inueniendus numerus, qui ductus in 20. tantum faciat, quantum eius quadratus cum 84. Ponatur quæsitus numerus 12 . Ex 12 in 20. fit numerus 240 . æqualis $18 + 84$. nimirum quadrato ex 12 . procreato, vñ cum 84. Ablatis 84. utrobique, manebit æqualitas inter $20 - 84$. & 18 . Semissis numeri radicem est 10. a cuius quadrato 100. demptis 84. superest numerus 16. cuius radix 4. addita ad prædictam semissem 10. facit maiorem radicem 14. Ablata vero ex eadem semisse reliquam facit minorem radicem 6. Atque numerus vterque 14. & 6. problema soluit. Nam ex 14. in 20. fit numerus 280. æqualis ei, quem eius quadratus 196. cum 84. facit. Item ex 6. in 20. fit numerus 120. æqualis ei, quem eius quadratus 36. cum 84. efficit.

45 Numerum inuenire, qui ad quemuis datum numerum additus faciat summam, quæ ducta in numerum inuentum faciat numerum datum quemcunque.

XLV.

SIT

S I T inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, producat numerus 189. Ponatur numerus quæsitus 12. Additis 12. fit numerus 24 + 12. qui ductus in inuentum, nimirum in 12. facit numerum 288 + 122. æqualem 189. Ablatis 122 utrobique, erit æquatio inter 12. & 189 — 122. Semissis numeri radicem est 6. ad cuius quadratum 36. additis 189. fit numerus 225. a cuius radice 15. ablata prædicta semisse 6. manet valor 12. 9. numerus videlicet quæsitus. Hic enim additus ad 12. facit 24. & ex 24. fit 9. fit datus numerus 189.

I T E M sit inueniendus numerus, quo addito ad 12. & summa ducta in numerum inuentum, fiat numerus 400. Ponatur 12. Additis 12. fit numerus 24 + 12. qui ductus in 12. facit numerum 288 + 122. æqualem 400. Ablatisq. 122 utrobique, manet æquationis inter 12. & 400 — 122. Semissis numeri radicem est 6. ad cuius quadratum 36. additis 400. fit numerus 436. a cuius radice, 21. si dematur prædicta semisse 6. reliqua fiet æquatio vnus

ad 436. si dematur prædicta semisse 6. reliqua fiet æquatio vnus quem inquirimus. Nam si addatur ad 12. + 12. fiet numerus 24 + 12. ut in hac formula

$$\begin{array}{r} 24 + 12 \\ \hline 36 \end{array}$$
videt. Hic autem numerus 36 + 6. multiplicatus per inuentum numeri 12. facit numerum datum 400. ut hinc altera formula docet. quæ multiplicatio fiet, si 36. quadratus posterioris particulæ 6. subducatur a 436. quadrato prioris particulæ, ut cap. 13. declaratum fuit.

XLVI.

46 *Datum numerum in duas partes secage; et numerum procreatus ex vna in alteram ductus in quadratum dati numeri faciat numerum quemcunque datum.*

S I T numerus datus 20. secundus in duos, ut numerus ex eorum multiplicatione procreatus, si ducatur in 400. quadratum dati numeri, efficiat 300. Ponatur vnus numerus 12. & alter 30. — 12. Ex 12. in 20. — 12. fit numerus 202 — 12. Et hic ductus in 400. facit 80002 — 4002. qui æqualis esse debet 300. Additis 4002 utrobique, erit æquatio inter 80002. & 300 + 4002. Et ablatis 300. utrinque, inter 4002. & 80002 — 300. Diuisis omnibus per 400. erit æquatio inter 12. & 102 — 3. Semissis radicem est 10. a cuius quadrato 100. siue 202. demptis 3. remanent 199. additis semissi prædictæ 10. facit maiorem radicem 10 + 10. & ablata ex eadem semisse 10. relinquit radicem minorem 10 — 10. quæ sunt partes quæsitæ. Nam ex vna in alteram fit numerus 10. a nimirum posterioris particulæ quadratum 100. dematur ex 100. siue ex 202. quadrato prioris particulæ. At ex 10. in 400. quadratum dati numeri 20. fit numerus 8000. hoc est. 300.

47 Numerum inuenire, cuius quadratus auctus dato numero, si ducatur in eundem quadratum multatus alio numero dato, producat datum numerum quemcunque.

XLVII.

INVENIENDVS sit numerus, cuius quadratus octonario auctus, si ducatur in eundem quadratum multatus ternario, producat 6942. Ponatur quæsitus numerus 12. Eius quadratus 18. auctus octonario, erit 18 + 8. multatus vero ternario, 18 — 3. Hi duo numeri inter se multiplicati faciunt 188 + 58 — 24. vt in hac formula vides. qui numerus æqualis esse debet numero 6942. Additis ergo 24. vtroque, erit æqualitas inter 188 + 58 & 6966. Et ablatis 58. vtrunque, inter 188. & 6966 — 58. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 6966. hoc est, $\frac{27324}{4}$. sit summa, $\frac{27324}{4}$. ex cuius radice quadrata $\frac{167}{2}$. detracta semisse prædicta $\frac{1}{2}$. remanent $\frac{165}{2}$. hoc est, 81. vnus Zensus, cuius radix 9. dabit pretium vnus radices pro numero quæsito. Nam eius quadratus 81. auctus octonario facit 89. & multatus ternario, 78. seq. ex 89. in 78. numerus datus 6942.

Si iisdem positis, produci debeat numerus 10. reperietur æqualio inter 188. & 34 — 58. Iam sic. Semissis numeri Zensorum est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 34. hoc est, $\frac{1}{4}$. sit summa $\frac{1}{4}$. a cuius radice quadrata $\sqrt{\frac{1}{4}}$. detracta prædicta semisse $\frac{1}{2}$. fiet 18. $\sqrt{\frac{1}{4}}$ — $\frac{1}{2}$. & huius radix quadrata, $\sqrt{18}$ ($\sqrt{\frac{1}{4}}$ — $\frac{1}{2}$) numerus quæsitus. Nam eius quadratus $\sqrt{18}$ — $\frac{1}{2}$. auctus octonario, siue $\frac{1}{2}$. facit $\sqrt{18}$ — $\frac{1}{2}$. Multatus vero ternario, siue $\frac{1}{2}$. facit $\sqrt{18}$ — $\frac{1}{2}$. qui duo numeri inter se multiplicati producant numerum 10. vt hac formula indicat. Nam si $\frac{1}{2}$. quadratus posterioris particulæ detrahatur ex $\frac{1}{2}$. quadrato particulæ prioris remanent $\frac{1}{2}$. hoc est, 10.

$$\begin{array}{r}
 18 + 8 \\
 18 - 3 \\
 \hline
 - 38 - 24 \\
 188 + 58 \\
 \hline
 188 + 58 - 24
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{18} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 \sqrt{18} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
 \hline
 \frac{1}{2} \text{ siue } 10.
 \end{array}$$

JIVIX

AENIGMATA VARIA NVMERORVM

ad res materiales contractorum, cum nonnullis exemplis ad secundas radices pertinentibus. Cap. XXXI.



PROPONEMVS in hoc cap. præter ænigmata, quæstiones nonnullas alias non admodum difficiles, quarum aliquæ non solum per regulam Falsi, verum etiam per solam regulam Trium expediri possunt; ut præstantia regulæ Algebræ magis eluceat: quippe quæ omnes Arithmeticæ regulas complecti videatur. Hinc igitur exordiamur.

- I. 1. *Summam pecunia, quam in sacculo habeo, existimas quidam astantium valere 600. aur. Cuius errorem sic corrigo. Si ad meam pecuniam accederent partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, & a summa detraberetur $\frac{1}{6}$, eiusdem moa pecunia, tunc haberem 600. aureos. Quæstio est, quanta sit mea pecunia.*

PONATUR esse 120 aur. Si accedant partes $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ 20 & 40: quæ faciunt summam 120 & 60. fiet tota pecunia 180. Ablata autem $\frac{1}{6}$ 30 reliquæ fient 150. æquales 600. Divisi igitur 600. per 4. fiet 150. 300. Atque hæc est pecunia in meo sacculo. Nam si accedant partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, nimirum aurei 150. 100. & 75. fiet summa aur. 625 & dempta $\frac{1}{6}$ nimirum aur. 104. reliquus erit numerus 600.

- II. 2. *Viator quidam conficit quotidie 9. miliaria. Alius de cetero post die elapsi idem iter instituit, ex eodem loco, conficitq. quotidie 14. miliaria. Queritur, quolo die posterior priorem assequetur.*

PONATUR, ambos simul futuros in 120 dierum. Ergo prior ultra 90. miliaria, quæ in decem diebus absolvit, conficit in 120 dierum, præterea 90. miliariorum, quandoquidem singulis diebus 9. miliaria conficit. Posterior autem conficiens quotidie 14. miliaria, conficiet in 120 dierum, 140 miliariorum. Et quia in 120 dierum tota miliaria prior necessario confecerit, una cum 90. quæ in 10. diebus absolvit, quot posterior in 120 dierum; quandoquidem

quidem tunc simul futuri sunt: erit æquatio inter $92 + 90$. & 142 . Ablatisq. 92 . utrobique, inter 90 . & 52 . Diuisis ergo 90 . per 5 . fiet 12 . 18 . Igitur post 18 . dies conuenient. Nam prior in 18 . diebus absoluit miliaria 162 . additisq. 90 . quæ in præcedentibus 10 . diebus confecit, fient 252 . miliaria, quot uidelicet posterior in 18 . diebus absoluit.

S C H O L I V M.

HÆC porro questio in numeris abstractis ita proponitur. Quæritur numerus, qui ductus in 9 . & ad prædictum additis 90 . numerus efficiat æqualem 142 . quæ ex eodem numero 10 . 12 . multiplicato gignitur. Huius quæritur numerus, & 20 . erunt $92 + 90$. æqualis numero 142 . Ab hac ergo 92 . utrobique, reperietur æqualitas inter 90 . & 52 . Diuisisq. 90 . per 5 . fiet 12 . 18 . numerus, quem quærimus. Nam hic ductus in 9 . facit 102 . & additis 90 . fit numerus 192 . æqualis ei, qui fit ex 12 . in 14 .

3 Viator singulis diebus 9 . miliaria conficit: alius vero decimo post die elapso idem iter ingreditur. Quæritur quot miliaria absoluet hic, ut priorem assequatur in 18 . diebus.

III.

PONATVR 12 miliariorum. Ergo in 18 . diebus conficiet 182 . miliariorum. Cui ergo prior singulis diebus conficiens 9 . miliaria, absoluit in 10 . diebus 102 . miliaria: & additis 90 . quæ perambulauit in prioribus 10 . diebus, fit manifestum, eum confecisse 192 . miliaria. Est ergo æquatio inter 182 . & 192 . Diuisisq. 10 . per 18 . fiet 12 . 14 . arque tot miliaria conficere debet posterior, ut in 18 . diebus priorem assequatur.

4 Interrogatus quidam, quæ sit hora diei; ita respondit. Dimidiata pars horarum à media nocte usque ad hoc instans elapsarum addita ad tres quartas horarum futurarum ad sequentem mediam noctem, indicabit numerum horarum, quem quæris. Quæritur ergo, quæ sit hora.

III.

PONATVR 12 horarum à media nocte præteritarum. Cum ergo ab una media nocte ad aliam mediam noctem effluent horæ 24 præterierunt vigæ ad mediam noctem insequentem horæ 14 — 12 . Huius numeri $\frac{2}{3}$. faciunt 16 . quibus si addatur $\frac{1}{4}$ 12 . horarum, præteritarum, siue $\frac{3}{4}$ 12 . fiet numerus 22 . æqualis 12 . Quæ æquatio per multiplicationem in cruce reducitur ad hanc inter

4 2e. & 7 1 — 1 2e. Additaq. 1 2e vtrunque, erit æquatio inter 7 1. & 5 2e. Diuisis ergo 7 1. per 5. fiet 1 2e. 14 2. numerus horarum, quæ a media nocte vsque ad horam quæstionis effluxerunt. Ac proinde erit tunc hora 1. & Min. 24. a meridie: cum 1. hora contineat 60. Min. quod ita probatur. Dimidiata pars horarum 14 2. a media nocte præteritarum facit horas 7 1. quibus si addatur 2. horarum 9 2. quæ supersunt vsque ad mediam noctem, nimirum 7 1. fient horæ 14 2.

EODEM modo procedemus, si sermo sit de horis ab occasu Solis, more Italarum. Nam si quis responderit, eam tunc instare horam, quæ ex 4. horarum a proximo Solis occasu elapsarum additis ad semissem horarum, quæ vsque ad alterum occasum Solis supersunt, conficitur: Ponemus 1 2e. horarum a proximo occasu præteritarum. Cum ergo ab vno occasu ad alium occasum fluant horæ 14 superserunt vsque ad sequentem occasum horæ 14 — 1 2e. Huius numeri semissem facit 21 2e. hoc est, 42 2. quæ addita ad 1 2e. horarum elapsarum faciet 43 2. qui numerus aequalis est 1 2e. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 4 2e. & 43 2. Ablataq. 1 2e vtrobique, erit æquatio inter 48. & 3 2e. Diuisisq. 48. per 3. fiet 1 2e. 16. numerus horarum ab occasu præteritarum. quod ita probatur. Tres quartæ horarum 16. elapsarum faciunt 12. horas, quibus si addatur 2. horarum 8. quæ vsque ad alterum occasum supersunt, nimirum 4. fient horæ 16.

V.

S. Quidam habet duas mensuras vini, quarum una valet 12. nummos. Et altera 15. Vult autem ex vtroque vino miscere vnam mensuram, cuius pretium sit 13. nummorum. Queritur, quantum vini de qualibet mensura recipiendum sit.

.IIII

PONAM 1 2e partium mensuræ vilioris vini. Et pretiosioris vini mensuram 1 — 1 2e. Tunc institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Prioris vini | mensura | numm. | mens. | numm. |
|-------------------|---------|-------|------------|-------------------|
| | 1 | 12 | 1 2e ? | facit 12 2e. |
| Posterioris vini. | 1 | 15 | 1 — 1 2e ? | facit 15 — 15 2e. |

Nam si 1. mensura prioris vini valet 12. numm. 1 2e vnus mensuræ eiusdem vini valebit 12 2e numm. Et si 1. mensura posterioris vini valet 15 numm. 1 — 1 2e mens. eiusdem vini valebit 15 — 15 2e numm. Igitur 1 2e mens. prioris vini, & 1 — 1 2e mens. posterioris valebunt 15 — 3 2e numm. quod pretium æquiualebit 12 numm. Additis ergo 3 2e vtrobique, erit æquatio inter 3 2e + 12. & 15. Ablatisq. 13 vtrunque, inter 3 2e & 2. Diuisis ergo a per 3 fiet 1 2e. 2. De

$\frac{7}{8}$. De viliori igitur vino recipiendæ sunt $\frac{7}{8}$. vnus mensuræ, & de præstantiori $\frac{1}{8}$. vnus mensuræ quod sic probatur.

| | | | | |
|-----------------|-------|-------|---------------|----------|
| Prioris
vini | mens. | numm. | mens. | numm. |
| | 1 | 12 | $\frac{7}{8}$ | valent 8 |

| | | | | |
|----------------------|-------|-------|---------------|-----------|
| Posterioris
vini. | mens. | numm. | mens. | numm. |
| | 1 | 15 | $\frac{1}{8}$ | valent 5. |

Nam $\frac{7}{8}$. vnus mensuræ prioris vini valebunt 8. numm. & $\frac{1}{8}$. mensuræ vini posterioris, 5. numm. atque idcirco 1. mensura mixta, 13. numm.

6 *Mensura vini valet 10. numm. Quantum ergo aquæ commiscendum est vni mensuræ, ut 1. mensura mixta valeat 7. numm.*

VI.

PONE 12 mensuræ aquæ. Deinde institue regulam Trium hoc modo.

| | | | | |
|-------------|------------|-------|-------------|------------|
| mens. vini. | mens. aquæ | numm. | mens. mixta | numm. |
| 1 | + 12 | 10 | 13 | valent 13. |

Nam si 1. mensura vini vnâ cum 12 mensuræ aquæ valet 10 numm. 1. mensura ex vino & aqua mixta valebit $\frac{10}{13}$. Itaq. æquatio erit inter $\frac{10}{13}$. & 7. quæ per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 10. & 7 + 72. Ablatisq. 7. vtroque, æquatio erit inter 3 & 72. Diuisiq. 3 per 7. fiet $12\frac{2}{7}$. Ac tantum aquæ vnus mensuræ commiscendum est cum 1. mensura vini, ut 1. mensura mixta valeat 7. numm. quod ita probatur.

| | | | |
|-------------------------|-------|-------|----------|
| mens. ex vino
& aqua | numm. | mens. | numm. |
| $1\frac{2}{7}$ | 10 | 1 | valent 7 |

Nam si 1 mensura vini cum $\frac{2}{7}$. vnus mensuræ aquæ valet 10. numm. 1. mensura sola mixta valebit 7. numm.

7 *Sunt in quodam vaseculo 20. mensura vini, quarum qualibet valet 12. numm. Infunditur deinde vaseculo illi aqua, donec vaseculum vino illo & aqua repleatur. Et tunc 1. mensura mixta valet 10. numm. Quaritur, quanta sit capacitas illius vaseculi.*

VII.

PONE mensuras 20 + 12 vnus mensuræ. Deinde institue regulam Trium sic.

mens.

| mens.
vini | mens.
aquæ | numm. | mens. mixta | numm. |
|---------------|---------------|-------|-------------|-------|
| 20 | 12 | 240 | 1. ? | 240 |

Nam si 1 mensura vini valet 12 numm. mensura vini 20 + 12 mens. aquæ simul valebunt 240 numm. Igitur 1 mensura mixta valebit 240 numm. atque ita inuenta est æquatio inter 240 & 10. quæ per multiplicationem in cruce[m] reducitur ad hanc inter 240 & 200 + 10 12. Et ablati 200 utrinque, manebit æqualitas inter 40 & 10 12. Diuisisq. 40. per 10. fiet 1 2. 4. atque tot mens. aquæ infusæ sunt illi vasculo, ita ut totum vasculum capiat 24. mensuras, quod probatur sic.

| mens. vini
& aquæ | numm. | mens. | numm. |
|----------------------|-------|-------|-------|
| 24 | 240 | 1. ? | 10. |

Nam si 24. mensuræ ex vino & aqua valent 240 numm. propterea quod 1 mens. vini valet 12 numm. valebit 1 mens. mixta 10 numm.

VIII.

8 Duo tabellarij ex duabus ciuitatibus, inter quas intercipiuntur Leucæ 140. eodem die proficiscuntur, alter versus alterum. Vnus quolibet die conficit 8. Leucas, alter vero 6. Leucas. Quæstio est, quando conuenient, sibiq. mutuo occurrent.

PONE in 12. dierum & institue regulam Trium sic:

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|------|-------|------|-------|
| 1 | 8 | 12 ? | 8 2e |
| 1 | 6 | 12 ? | 6 2e |

Prior ergo in 12 dierum conficiet 8 2e. Leucarum. Et posterior 6 2e. atque ambo simul emensi erunt 14 2e leucarum, hoc est, leucas 140. Est ergo æquatio inter 14 2e. & 140. Diuisis igitur 140. per 14. fiet 1 2. 10. Atque decimo die peracto conuenient, quod sic proba.

| Dies | Leucæ | Dies | Leucæ |
|------|-------|------|-------|
| 1 | 8 | 10 ? | 80 |
| 1 | 6 | 10 ? | 60 |

Nam prior in 10. diebus conficiet 80 leucas, & posterior 60. quæ simul totum spatium intermedium leucarum 140. constituunt.

9 Quidam permutans 568. aureos, pro eis recipit quatuor genera monetarum. Primi generis moneta 7. faciunt 1. aur. Secundi generis, 18. Tertiij, 21. & quarti 28. Recipit autem ex quolibet genere eundem numerum monetarum. Quaritur, quotiana monetas cuiuslibet generis accipiat.

IX.

PONATUR: 1 2e monetæ cuiuslibet, & regula Trium instituat quater sic.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|------|------|--------|-------------------|
| 7 | 1 | 1 2e ? | $\frac{1}{7}$ 2e |
| 18 | 1 | 1 2e ? | $\frac{1}{18}$ 2e |
| 21 | 1 | 1 2e ? | $\frac{1}{21}$ 2e |
| 28 | 1 | 1 2e ? | $\frac{1}{28}$ 2e |

Nam si 7 mon. faciunt 1 aur. 1 2e mon. faciet $\frac{1}{7}$ 2e. aur. & sic de reliquis. Faciunt autem fractiones in quarto loco descriptæ numerum $\frac{1}{568}$ 2e aur. æqualem numero 568. aur. Diuisis ergo 568. per $\frac{1}{568}$. fiet 1 2e. 2016. atque tot monetas ex quolibet genere recipiet. quod sic probō.

| Mon. | aur. | Mon. | aur. |
|------|------|--------|------|
| 7 | 1 | 2016 ? | 288 |
| 18 | 1 | 2016 ? | 112 |
| 21 | 1 | 2016 ? | 96 |
| 28 | 1 | 2016 ? | 72 |

Nam 2016. mon. primi generis faciunt 288 aur. Secundi autem generis, 112 aur. Tertiij, 96 aur. & quarti 72 aur. qui omnes faciunt summam 568 aur.

10 Mercator quidam emit lanam, & ceram pro 124. aur. Constant autem 100. libra lana 7. aur. & 100. lib. cera 14. aur. emitq. duplo plures lib. lana, quam cera. Quæstio est, quot lib. utriusque res emerit.

X.

PONE: 1 2e librarum ceræ, & 1 2e librarum lanæ: & institue bis regulam Trium, hoc modo.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|----------|------|------------------|--------------------|
| 100 lanæ | 7 | 1 2e lib. lanæ ? | $\frac{1}{100}$ 2e |
| 100 ceræ | 14 | 1 2e lib. ceræ ? | $\frac{1}{100}$ 2e |

Erit

Erit ergo inuenta æquatio inter $\frac{33}{100}$ æ aur. & 124 aur. Diuisisq. 124. per $\frac{33}{100}$. fiet 1 æ. 442 $\frac{2}{3}$. atque tot lib. ceræ emir, & lanæ lib. 885 $\frac{1}{3}$. quod ita probatur.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|----------|------|-------------------|------|
| 100 lanæ | 7 | 885 $\frac{1}{3}$ | 62 |
| 100 ceræ | 14 | 442 $\frac{2}{3}$ | 62 |

Ita enim pro lana, ac cera expendit 124. aur.

- XI. 11 Emit quidam aliquot vlnas panni, quas iterum vendidit. Emit autem 5. vlnas pro 7. aur. & vendidit 7. vlnas pro 11. aur. lucratusq. est hac mercatura 100. aur. Queritur, quotnam fuerint illæ vlnæ.

PONE 1 æ vlnarum, & institue regulam Trium bis.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|------|------|------|------------------|
| 5 | 7 | 1 æ | $\frac{11}{7}$ æ |
| 7 | 11 | 1 æ | $\frac{11}{7}$ æ |

Vides, si $\frac{1}{7}$ æ aur. quos expendit, detrahantur ex $\frac{11}{7}$ æ aur. quos recepit, relinqui $\frac{4}{7}$ æ aur. pro lucro. Est ergo æquatio inter $\frac{1}{7}$ æ aur. & 100. aur. Diuisisq. 100. per $\frac{4}{7}$. fiet 1 æ. 583 $\frac{1}{3}$. vln. atque tot fuerunt vlnæ emptæ, atque venditæ, quod sic probo.

| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. |
|------|------|-------------------|-------------------|
| 5 | 7 | 583 $\frac{1}{3}$ | 816 $\frac{2}{3}$ |
| 7 | 11 | 583 $\frac{1}{3}$ | 916 $\frac{2}{3}$ |

Vbi cernis, eum lucratum esse 100. aureos.

- XII. 12 Emit quidam aliquot vlnas panni, expendens 11. aur. pro 7. vlnis. Et totum pannum iterum vendidit, coactusq. est dare 5. vlnas pro 7. aureis: perdiditq. in hac mercatura 100. aur. Quaritur, quot vlnas emerit, ac vendiderit.

Pone 1 æ. vln. &c. vt prius. & institue regulā Triū bis, hoc modo.

| vln. | aur. | vln. | aur. |
|------|------|------|------------------|
| 7 | 11 | 1 æ | $\frac{11}{7}$ æ |
| 5 | 7 | 1 æ | $\frac{7}{5}$ æ |

Igitur

eritq. æquatio inter 84 se lib. & 600. lib. Diuisa igitur 600. per 84. fiet 1 se. 7 1/2 lib. Atque tot lib. dedit pro 1. aur. vt damnum fecerit 18. aur. in 102. aur. & 600. libris. quod sic probat. 001 28
odotq dñ bonp . xibmcy de . xipmz mntuñ anly

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|------|------|------|------|
| 600 | 77 | 600 | 702 |
| 84 | 18 | 84 | 18 |

Vbi vides expensas fuisse 102. aur. pro 600. lib. Et pro eisdem receptos fuisse 84. aur. id est, 102 — 18.

III
XV.

15. Tres mercatores inuunt societatem. Primus ponit 40. aur. per 2. menses. Secundus 20. aur. per 3. menses. Tertius summam quandam aur. per 3. menses. Lucrati sunt autem 3276. aur. de quibus primo obtulerunt 1040. aur. Secundo 1300. & tertio 936. Quarta quot aureos tertius posuerit.

Ponatur 1 se. aureorum. 32 1 1
aur. 32 1 mens 1 019 lucrum aur. 3276 aur. 3276
20 5 3276 1300 secundi
1040 936 tertii
Per multiplicationem aureorum in tempus, reducentur numerus ad regulam Trium hoc modo.

| THE | lib. | THE | lib. |
|-----------|------|------|---------|
| 80 | 3276 | 1040 | primi |
| 100 | 3276 | 1300 | secundi |
| 3 se. vel | 3276 | 936 | terti |

VT autem inueniatur æquatio, & pretium 1 se. inueniendus est numerus primus in regula Trium, qui nimirum summa est trium numerorum 80, 100, & 3 se. hoc modo. Quoniam ita se habet primus ille numerus inueniendus ad 80. vt 3276. ad 1040. * fiet idem numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium. Si ergo 161080. productus ex secundo 80. in tertium 3276. diuidatur per quartum 1040. exibat primus 152. Ex quo si dematur summa ex 80. & 100. collecta, nimirum 180. remanebit pretium 3 se. videlicet 72. Diuisis ergo 72. per 3. fiet 1 se 24. numerus aur. quos tertius posuit. quæ pecunia ducta in 3. menses facit 72. &c.

Pretium 1 se. hoc etiam modo reperietur. Inuento primo numero 19. septimi 10 152. b erit numerus 135872. factus ex primo 152. in quartum 936. æqualis

æqualis numero. 9818. 20. factio ex secundo 3 20. in tertium 3276.
Diuisis igitur 235872. per 9818. fiet 2 20. 24. vt prius.

16 Tres socij volunt inter se distribuere 455. aur. ea con-
ditione, vt quoties primus recipit 2. toties secundus
recipiat 3. Et quoties secundus recipit 4. toties ter-
tius recipiat 5. Quaritur, quot aureos quilibet reci-
piat ex illa summa 455. aureorum,

XVI

PONE primum accipere 1 20. Et secundum 1 2 20. vt habeat
numerum sesquialterum ad primum. Tertium vero
1 2 20. vt habeat numerum sesquiquartum ad secun-
dum. Erit ergo æquatio inter 4 1 2 20. & 455. Diuisis
igitur 455 per 4 1 2. fiet 1 20. 104. numerus primi. Se-
cundus ergo accipiet 156. nimirum 1 2 20. Tertius
vero 195. nimirum 1 2 20. quod sic probatur. Tres numeri 104.
156. 195. faciunt summam 455. diuidendam. Et quoties 2. sunt in
104. toties 3. sunt in 156. Et quoties 4. sunt in 156. toties 5. sunt
in 195. cum idem Quotiens fiat, diuidendo 104 per 2. & 156 per 3.
Item diuidendo 156 per 4 & 195 per 5.

EADEM via tenenda est, si plures socij fuerint: vt si fuerint qua-
tuor, & quoties tertius accipit 6. toties quartus accipiat 7. ponent
de crunt 1 2 20. pro quarto, vt habeat numerum sesquiseptimum ad
tertium. Si igitur diuidendi sint aurei 21840. erit æquatio inter
6 1 2 20. & 21840. Diuisis igitur 21840. per 6 1 2. fiet
1 20. 3318. portio primi, quem posuimus accipere
1 20. Portio secundi erit 1 2 20. id est, 4992. Portio
tertij erit 1 2 20 nimirum 6240. Portio denique quar-
ti erit 1 2 20. hoc est, 7280. quod probabis, vt prius.
Nam omnes quatuor portiones faciunt summam di-
uidendam 21840. & idem Quotiens fit, diuidendo 3318. per 2. &
4992. per 3. Atque idem quoque, diuidendo 4992 per 4. & 6240
per 5. Denique idem etiam, diuidendo 6240 per 6. & 7280 per 7.

17 Habeo quatuor auri fragmenta, quæ æquivalent au-
reis 164. Et primum in valore duplum est secundi:
secundum triplum terij: & tertium quadruplum
quarti. Quaritur valor singulorum fragmentorum.

XVII

PONE quartum, sive minimum 1 20. aur. tertium 4 20. secundum
12 20. & primum 24 20. Sunt ergo 41 20. æquales 164 aur. Diuisisq;
164 per 41. fiet 4 20. & atque tot aureis æquualet minimum frag-
mentum, sive quartum: atque idcirco tertium valebit 16 aur. se-
cundum

Rr 1

cundum 48. & primum 96. qui quidem aurei faciunt summam 144
& seruat proportionem in quaestione expressas.

XVIII.
172

18 Tres socij confidunt totam suam pecuniam, atque ita colligunt 100. aur. Est autem pecunia primi subduple pecunia secundi: & pecunia secundi subtriplex pecunie tertij. Queritur, quantum quisque contulerit.

PONE primum contulisse 12. Secundum 32. & tertium 62. Eruntq. 92. æquales 100 aur. Diuisis igitur 100 per 92. fiet 12. pecunia primi: Secundi pecunia, idcirco erit 32. & tertij 66. quæ tres, summæ faciunt 100 aur. seruantq. proportionem in quaestione expressas.

XIX.

19 Moriens quidam testamentum condit. relinquitq. 3000. aur. distribuendos inter uxorem, filium, & duas filias, hac conditione, ut portio filij sit dupla portionis matris: & portio matris dupla quoque portionis vnius filie. Queritur, quanta sit vniuscuiusque portio.

PONATUR portio vnius filie 12. matris 32. & filij 42. Erunt ergo 86. æquales 3000. aur.

| | | | | | |
|--------|---|-----------|---------|------|--------|
| Portio | { | filie 12 | id est, | 375 | } aur. |
| | | filie 12 | | 375 | |
| | | matris 32 | | 750 | |
| | | filij 42 | | 1500 | |

Diuisisq. 3000. per 86. fiet 12. 375. portio vnius filie. atque idcirco portio matris 750. & filij 1500.

XX.

20 Mercator quidam qualibet parte tertia sua pecunia lucratur 10. eiusdem pecunia. Deinde qualibet parte tertia eiusdem pecunia lucratur 1/2. lucri prioris. Et sic omnibus computatis, inuenit 864. aur. Queritur quanta fuerit illa pecunia, & quantum utrumque lucrum.

PONATUR 12. pecunie. Ergo primū lucrum fuit 12. quod quidem qualibet 1/2. lucrat est 12. Deinde secundum lucrum fuit 12. prioris lucri 12. omnium 12. hoc est, 12. quod quidem qualibet 1/2. lucrat est 1/2. prioris lucri. Iam 12. 12. & 12. faciunt summam 36. æqualem 864 aur. Diuisis ergo 864 per

per $1\frac{1}{2}$. fiet $1\frac{1}{2}$. 720. atque tot aureos habuit mercator ille. Ergo
lucrum primum $\frac{1}{10}$ 2e. fuit 108 aur. Et lucrum secundum $\frac{1}{10}$. fuit
36 aur. quæ duo lucra cum 720 aur. faciunt 864 aur.

- 21 Mercator quidam qualibet parte quarta sua pecunia
lucratur $\frac{1}{10}$. eiusdem pecunia. Deinde qualibet par-
te tertia eiusdem pecunia lucratur $\frac{1}{10}$. summa ex ea-
dem pecunia, & lucro collecta. Et sic singulis com-
putatis, inuenit mercator ille 400. aur. Queritur,
quanta fuerit illa pecunia, & quantum utrumque
lucrum.

XXI.

PONE pecuniam fuisse 1 2e. Ergo primum lucrum fuit $\frac{1}{10}$ 2e.
hoc est, $\frac{1}{10}$ 2e. Deinde secundum lucrum fuit $\frac{1}{10}$ 2e. sue $\frac{1}{10}$ 2e. nimi-
rum $\frac{1}{10}$. summæ $\frac{1}{10}$ 2e. ex priori lucro, & 1 2e. collectæ. Iam 1 2e.
 $\frac{1}{10}$ 2e. & $\frac{1}{10}$ 2e. faciunt summam $1\frac{1}{10}$ 2e. æqualem 400. aur. Diuisis
ergo 400 per $1\frac{1}{10}$. fiet 1 2e. 256 $\frac{1}{10}$. aur. atque tot aur. habuit mer-
cator ille. Primum autem lucrum $\frac{1}{10}$ 2e. fuit aur. 51 $\frac{1}{10}$. Secundum
vero lucrum $\frac{1}{10}$ 2e. fuit 92 $\frac{1}{10}$. quæ duo lucra cum 256 $\frac{1}{10}$. faciunt
400. aur.

XXIX

- 22 Mercator quidam qualibet parte quarta sua pecunia
lucratur $\frac{1}{10}$. eiusdem pecunia. Deinde singulis par-
tibus quintis eiusdem pecunia prioris lucratur $\frac{1}{25}$.
eiusdem pecunia. Atque ita singulis computatis, in-
uenit 2136. aur. Queritur, quanta fuerit illa pecu-
nia, & quantum utrumque lucrum.

XXII.

XXX

PONE pecuniam fuisse 1 2e. Ergo primum lucrum fuit $\frac{1}{10}$ 2e. si-
ue $\frac{1}{10}$ 2e. Secundum vero $\frac{1}{10}$ 2e. Iam 1 2e. $\frac{1}{10}$ 2e. & $\frac{1}{10}$ 2e. faciunt
summam $1\frac{1}{10}$ 2e. æqualem 2136 aur. Diuisis igitur 2136 per $1\frac{1}{10}$
fiet 1 2e. 1620 aur. pecunia mercatoris. Ergo primum lucrum $\frac{1}{10}$ 2e.
fuit 216 aur. Secundum vero $\frac{1}{10}$ 2e. fuit 300 aur. quæ duo lucra
cum 1620 aur. faciunt summam 2136 aur.

- 23 Tria poma aurea venduntur 11. denariolis. Queritur
quot poma vendantur pro 572. denariolis.

XXIII.

HÆC questio per regulam Trium expedietur hoc modo.

| | | | |
|--------|-----------|--------|-----------|
| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
| 11 | 3 | 572 | 156 |

Per

318 C A P . XXXII

Per Algebram vero soluetur, si pro quarto numero inueniendo in
 19. septimi regula Trium ponatur 1 2e. pomorum. Et quia tantum fit ex pri-

| | | | |
|--------|-----------|--------|-----------|
| Denar. | pom. aur. | Denar. | pom. aur. |
| 11 | 3 | 571 | 1 2e |

mo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit numerus 11 2e
 productus ex primo in quartum, aequalis numero 1716. producto ex
 secundo in tertium. Diuisis ergo 1716. per 11. fiet 1 2e. 136. nume-
 rus pomorum, quæ constant 571 denar. Vides ergo excellentiam
 Algebræ etiam in quæstionibus regulæ Trium. quod etiam in se-
 quenti exemplo apparebit.

XXIII. 24 *Libra 47. quarundam mercium constant aur. 30. Qua-
 ritur, quanti constabunt 100. libra.*

PONATUR 1 2e. vt hic vides.

| | | | |
|------|------|------|------|
| lib. | aur. | lib. | aur. |
| 47 | 30 | 100 | 1 2e |

Est ergo æquatio inter 47 2e. & 3000. Diuisis ergo 3000 per 47 fiet
 1 2e. 63 $\frac{1}{47}$. aur.

XXV. 25 *Est massa quadam argenti pondus habens marcarum
 7. quarum qualibet continet 5. semiuncias puri argen-
 ti, & 11. semiuncias cupri. Commiscetur autem mas-
 sa illi liquata alia massa cupri puri ponderis 21. mar-
 carum. Quaritur quantum argenti puri habitura
 sit qualibet marca illius massæ nouæ 28. marcarum.*

HIC certum est, pauciores semiuncias puri argenti contineri in
 28. marcis, quam in 7. quippe cum semiuncie in his contentæ di-
 stributæ sint æqualiter inter 28. marcas. Et quia in illis 7. ponun-
 tur 35. semiuncie puri argenti, diuisis his per 28. reperientur in
 qualibet marca 1 $\frac{1}{4}$. semiuncie puri argenti. Si igitur 1 marca pon-
 dus habet 26. semiunciarum, erunt in qualibet marca 14 $\frac{1}{2}$. semiun-
 cie cupri. Hoc autem ita esse, facile probabitur. Nam pondus 21.
 marcarum cupri puri, faciet 336. semiuncias cupri: Et si accedant
 77. semiuncie in prioribus 7 marcis contentæ, fient semiuncie cupri
 413. qui numerus etiam producit ex 14 $\frac{1}{2}$. (quot nimirum semiun-
 cias cupri in qualibet marca inesse diximus) in 28. marcas. Sed
 vt quæstio hæc soluat per Algebram, sic stabit exemplum ad regu-
 lam Trium inuersam.

arg.

arg. mix. arg. pur. 30 arg. mix. arg. pur.
 7. marc. 7. semiunc. 28. marc. 7. semiunc. 12.
 Et quoniam in regula Trium inuersa, numerus factus ex primo in
 secundum aequalis est numero facto ex tertio in quartum, propte-
 rea quod tertius numerus in regula Trium ordinaria debet tenere
 primum locum, ut in Arithmetica practica diximus: erit aequatio
 inter 35. & 28 12. Diuisusq. 35 per 28 fiet 12. puti argenti semian-
 cix 12. ut prius.

26 *Quinque conuictiores singulis hebdomadis soluent* 11. XXVL.
aur. quantum ergo soluent 18. conuictiores in 40.
diebus.

HAE C. questio spectat ad regulam Trium compositam, quae ad

| Conuict. Dies | aur. | Conuict. Dies | aur. |
|---------------|------|---------------|------|
| 7 | 11 | 40 | 18 |

regulam Trium simplicem reducitur per multiplicationem conuicti-
 orum in tempus, ut hic.

| Conuict. | aur. | Conuict. | aur. |
|----------|------|----------|------|
| 35 | 11 | 720 | 12 |

Nam tantum soluet vnus in duobus diebus, quantum duo in vno.
 Et tantum vnus in 35. diebus, quantum 5. in septem, atque haec est
 ratio, cur dicta multiplicatio fieri debeat. Posito igitur quarto nu-
 mero 12. erit aequatio inter 35 12. & 720. Diuisis ergo 720. per
 35. fiet 12. 12. 3. aur. quot nimirum 18. conuictiores in 40. die-
 bus soluent.

27 *Pro tribus ponderibus aequalibus vehendis per leucas 7.* XXVII.
debentur vectori 11. grossi, quorum quilibet valet de-
nariolos 25. Quaro iam, quot similia pondera sint
vehenda per 40. leucas pro 400. grossis.

HAE C. etiam questio ad regulam Trium compositam pertinet,
 ut hic vides.

| Grossi | Pond. Leuc. | Grossi | Pond. Leuc. |
|--------|-------------|--------|-------------|
| 11 | 3 | 400 | 40 |

Pone 12. Pond. vehendorum, & reduc regulam ad regulam Trium
 ordi-

ordinariam per multiplicationem pond. in spatium itinerarium :
quandoquidem tantum solucodum est pro 7. pondere per 1 Leucas,
quantum pro 3 pond. per 1 Leucam : & tantum per 1 pond. per 1
Leuc. quantum pro 3 pond. per 7 Leuc. quam reductione hic cernis .

Grossi sup ni 0 Pond. Grossi sic 400 Pond. 400
Erit igitur æquatio inter 440 26. & 8409. Divisus ergo 8409 per
440. fiet 19 $\frac{1}{11}$. Pond. vehenda per 40 Leucas pro 400 grossis
Nam si pro 3. pond. per 7. Leucas solvantur 11. grossi, pro 19 $\frac{1}{11}$
pond. per 7 Leucas solvantur 70 grossi, vt hic vides

Pond. Grossi Pond. Grossi
3 11 19 $\frac{1}{11}$ 70
Deinde si per 7 Leucas solvantur 70 grossi, per 40 Leucas solvantur
400 grossi, vt hic vides .

Leuc. Grossi Leuc. Grossi
7 70 40 400

XXVIII. 28 Tres sartores perficiunt 7. tunicas 14. diebus. Quot
igitur diebus duo sartores perficient 8. tunicas?

Pone 1 26. dierum.
Sart. Dies Tunic. Sart. Dies Tunic.
3 14 8 2 8
Reductis numeris per multiplicationem ad regulam Trium ordina-
riam, vt hic.

42 7 32 8
Erit æquatio inter 336 & 14 26. Divisus ergo 336 per 14. fiet 24
24. dies, in quibus duo sartores 8. tunicas perficient. Nam si 3. sar-
tores in 14. diebus perficiunt 7. tunicas, duo sartores in 14. diebus,
nimirum in eodem tempore, perficient 4 $\frac{2}{3}$. tunicas, vt hic cernitur.

Sart. tunic. Sart. tunic.
3 7 2 4 $\frac{2}{3}$
Deinde si tunicæ 4 $\frac{2}{3}$. absoluantur 14. diebus, tunicæ 8. absoluen-
tur diebus 24. vt hic constat.

tunic. Dies tunic. Dies
4 $\frac{2}{3}$ 14 8 24
29 Ser-

29 *Seruo cuidam promisit quidam eius pro 12. mensibus mercedem 10. aur. & 1. tunicam. Post 7. autem menses dedit illi tunicam, & 2. aur. Quanti ergo aestimata est tunica illa?*

XXIX.

PONE eius pretium esse 1 2e. aur. Et dic. Si 12. menses poscunt 1 2e + 10 aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesq. $\frac{12+10}{12}$ aur. Rursum dic. Si 7. menses poscunt 1 2e + 2 aur. quantum postulat 1. mensis? inueniesq. $\frac{12+2}{7}$ aur. ut hic vides.

| Mensis | Aurei | Mensis | Aurei |
|--------|-----------|--------|-----------|
| 12 | 1 2e + 10 | 7 | 1 2e + 2 |
| 7 | 1 2e + 2 | 12 | 1 2e + 10 |

XXX

Erit ergo æquatio inter $\frac{12+10}{12}$ & $\frac{12+2}{7}$. cum uterque numerus sit merces 1. mensis. quæ æquatio per multiplicationem in crucem, reducitur ad hanc inter 7 2e + 70. & 12 2e + 24. Ablatis ergo 24 utrinque, erit æquatio inter 7 2e + 46. & 12 2e. Rursumq. ablatiis 7 2e. utrobique, inter 46 & 1 2e. Diuisis igitur 46 per 5. fiet 1 2e. 9 $\frac{1}{2}$ aur. pro pretio tunice. Nam hac ratione merces 12. mensium erit 19 $\frac{1}{2}$ aur. nimirum 10 aur. & tunica. Igitur merces 7 mensium erit 11 $\frac{1}{2}$ aur. ut hic vides. nimirum 2. aur. & pretium tunice 9 $\frac{1}{2}$ aur.

| Mensis | aur. | Mensis | aur. |
|--------|------------------|--------|------------------|
| 12 | 19 $\frac{1}{2}$ | 7 | 11 $\frac{1}{2}$ |

XXX.

30 *Ciuis quidam seruo suo pigro ita mercedem 30. dierum constituit, ut laboranti singulis diebus dare velit 7. grossos: ociantem vero mulctare 5. grossis. Ratione autem inita post 30. dies, seruus ille neque recipit aliquid, neque domino aliquid reddit. Quot igitur diebus laborauit, & quot laborare intermisit?*

PONE 1 2e. dierum laboris, ideoq. 30 — 1 2e dierum otij. Et institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Dies | grossi | Dies | grossi |
|-----------|--------|------------|------------|
| Laboris 1 | 7 | 1 2e? | 7 2e |
| Otiij 1 | 5 | 30 — 1 2e? | 150 — 5 2e |

ss Quia

Quia igitur tantum meruit, quantum demeruit, erit æquatio inter 7 2e. & 150 — 5 2e. Additisq. 5 2e utrobique, inter 12 2e. & 150. Divisis ergo 150 per 12. fiet 1 2e. 12 ½ dies laboris, & otij 17 ½. quod ita probatur.

| Dies | grossos | Dies | grossos |
|-----------|---------|--------|---------|
| Laboris 1 | 7 | 12 ½ 2 | 87 ½ |
| Otij 1 | 5 | 17 ½ 2 | 87 ½ |

Vbi vides, tantam esse mercedem, quanta est multa.

XXXI. 31 Mercator quidam vendidit 20. libras partim croci, & partim zinziberis, aureis 45. Vendidit autem 1 lib. croci aureis 3. & 1 libram zinziberis ½ aur. Quæstio est, quot libra croci vendita sint, & quot zinziberis.

TONE 1 2e librarum croci, ideoque 20 — 1 2e librarum zinziberis, & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|-----------|------|------|-------------|-----------|
| Croci 1 | | 3 | 1 2e 2 | 3 2e |
| Zinzib. 1 | | ½ | 20 — 1 2e 2 | 20 — 1 2e |

Æquatio igitur est inter summam ex 3 2e aur. & 20 — 1 2e aur. collectam, & 45 aur. Est autē illa summa 10 + ½ 2e aur. (Nam 20 — 1 2e æquivalent numero 10 — ½ 2e. cui si addantur 3 2e aur. fit summa 10 + ½ 2e.) Igitur æquatio est inter aur. 10 + ½ 2e aur. & 45. aur. Ablatisq. 10 aur. utrobique, inter ½ 2e. & 35. Divisis igitur 35 per ½. fiet 1 2e. 14. Atque tot lib. croci vendite sunt, 2e proinde 6 lib. zinziberis. quod ita probatur.

| | lib. | aur. | lib. | aur. |
|-----------|------|------|------|------|
| Croci 1 | | 3 | 14 2 | 42 |
| Zinzib. 1 | | ½ | 6 2 | 3 |

Vbi vides ex pretio 14 lib. croci, & 6 lib. zinziberis colligi 45. aureos.

XXXII. 32 Negociator quidam habet duo genera monetarum numero 560. quæ æquivalent 160. aureis. Quædam illarum monetarum valent ½. aur. & reliquarum quali-

qualibet $\frac{1}{2}$ aur. Quaritur numerus priorum, ac posteriorum.

PONE 1 2e. priorum, & posteriorum 560 — 1 2e. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|--------|---------------|--------------|-------------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 2e ? | $\frac{1}{2}$ 2e |
| <hr/> | | | |
| | $\frac{1}{2}$ | 560 — 1 2e ? | $\frac{1}{2}$ 2e — 1 2e |

Quarti numeri inuenti æquivalent 160 aur. Summa illorum numerorum facit aur. $140 + \frac{1}{2}$ 2e. (Nam $\frac{1}{2}$ 2e — 1 2e, æquivalent numero 140 — $\frac{1}{2}$ 2e. cui si addatur $\frac{1}{2}$ 2e. fit summa 140 + $\frac{1}{2}$ 2e.) Est igitur æquatio inter aur. $140 + \frac{1}{2}$ 2e. & 160 aur. Ablatisq. 140 vtrinque, inter $\frac{1}{2}$ 2e. & 20. Diuisis igitur 20 per $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 240. atque tot monetæ sunt prioris generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{2}$ aur. posterioris autem generis, quarum singulæ valent $\frac{1}{2}$ aur. sunt 320. quod ita probatur.

| Monet. | aur. | Monet. | aur. |
|--------|---------------|--------|------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | 240 ? | 80 |
| <hr/> | | | |
| | $\frac{1}{2}$ | 320 ? | 80 |

Vbi cernis, numeros in quarto loco positos facere 160. aur.

33 Quidam lanio boues emit, qui interrogatus, quantum emerit, respondit: Quanto 10. boues emi pluris 40. aureis, tanto 18. boues emissem pluris 96. aureis. Quaritur de pretio.

XXXIII.

H AE C quaestio soluetur per modum regule Algebrae sine numeris Collicis, & sine positione 1 2e. quod sane peregregium videri possit. quod etiam in proximis tribus quaestionibus, quæ sequuntur, faciemus. Quoniam igitur boues 10 — 40 aur. excessus est pretij 10. bouum supra 40 aur. quippe cum dicat lanio, se amplius 40 aur. expendisse, quos non debuisset expendere. Item boues 18 — 96 aur. excessus est pretij 18. bouum supra 96 aur. quos non debuisset expendere. atque hi duo excessus æquales ponuntur: erit æquatio inter boues 10 — 40 aur. & boues 18 — 96 aur. Additisq. 96 aur. vtrouque, inter boues 10 + 96 aur. & boues 18. (Nam ex 96. additis ad — 40. fit summa + 56.) Et ablatis 10 bouibus vtrinque, inter 56 aur. & 8 boues. Diuisis ergo 56 per 8. fiet pretium 1 bouis 7 aur. quod ita probatur. 10 boues valebunt 70 aur. ablatisq. 40 aur.

quos ultra iustum pretium expendit, remanent aur. 30 pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt 126 aur. detractisq. 96 aur. quos non debuerat expendere, remanent similiter 30 aur. pro pretio 18 boum.

Si dixisset lanio ille, se 10 boues tanto emisse pluris 40 aur. quanto emere potuisset 18 boues minoris 96 aur. existeret æquatio inter boues 10 — 40 aur. & aur. 96. — 18 bobus. quia ille esset excessus pretij 10 boum ultra 40 aur. hic autem excessus aur. 96. ultra pretium 18 boum. Additis igitur 18 bobus utrinque, erit æquatio inter 18 boues — 40 aur. & 96 aur. Additisq. rursum 40 aur. utrobique, inter 18 boues, & 136 aur. Diuisis ergo 136 per 18, fiet pretium 1 bouis aur. $4\frac{2}{3}$. quod probatur sic. Boues 10, valebunt aur. 48 $\frac{2}{3}$. & demptis 40 aur. remanent aur. 8 $\frac{2}{3}$. pro pretio 10 boum. Item 18 boues valebunt aur. 87 $\frac{2}{3}$. quibus demptis ex 96. remanent similiter aur. 8 $\frac{2}{3}$. pro pretio 18 boum.

Sic si dicas. Emi 4 grossis — 3 ouis, 41 oua. erit æquatio inter 4 gros. — 3 ouis, & 41 oua. Additisq. 1 ouis utrobique, inter 4 gros. & 44 oua. Diuisis igitur 44 per 4, fiet Quotiens 11, atque tot oua ementur 1 grosso.

Item si dicas. 4 grossi — 3 denar. faciunt 97 denariolos, siue nines 1 gros. facere 25 denar.

Item si dicat quis, 4 aur. + 125 gros. facere aur. 10 $\frac{1}{2}$. Demptis 4 aur. utrobique, erit æquatio inter 125 gros. & 6 $\frac{1}{2}$ aur. Diuisis ergo 6 $\frac{1}{2}$ aur. per 125 gros. fiet Quotiens $\frac{1}{20}$ aur. valor 1 grossi, hoc est, 1 grossi facit $\frac{1}{20}$ vnius aurei. Quod si diuides 125 grossi. per 6 $\frac{1}{2}$ aur. fiet Quotiens 20. atque tot grossi facient 1. aureum.

XXXIII.

34 Quando 7. vlna cuiusdā panni emuntur 4 $\frac{1}{2}$. aur. emuntur eodem pretio 17. vlnæ aur. 10. grossi. 18 $\frac{2}{3}$. Quæstio est, quot grossi faciant 1. aur.

QUONIAM eadem est proportio 7 vln. ad 4 $\frac{1}{2}$ aur. quæ 17 vln. ad aur. 10 grossi. 18 $\frac{2}{3}$. collocabimus hos quatuor numeros proportionales hoc ordine.

| | | | |
|------|-----------------|------|----------------------|
| vlnæ | aur. | vlnæ | aur. grossi. |
| 7 | 4 $\frac{1}{2}$ | 17 | 10. 18 $\frac{2}{3}$ |

a 19. septimi

* Et quia tantum fit ex primo in quartum, quantum ex secundo in tertium, erit æquatio inter 70 aur. + 130 grossi. & $\frac{1}{2}$ aur. siue 76 $\frac{1}{2}$ aur. Ablatisq. 70 aur. utrobique, inter 130 grossi. & 6 $\frac{1}{2}$ aur. Diuisis ergo 130 per 6 $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens 20. atque tot grossi æquuae lent 1. aurco.

35 Quidam recipit a mercatore crocum pro 10. aur. Dein de rursum ab eodem accipit 24. lib. croci. Tandem reddit

reddat mercatori 30. lib. croci, & mercator, supputato pretio croci, restituit ei 14. aur. Quæritur pretium 1. lib. croci.

HIC vides 10 aur. + 24 lib. esse totum debitum, quod emptor mercatori debet. Similiter 30 lib. — 14 aur. Est ergo æquatio inter 10 aur. + 24 lib. & 30 lib. — 14 aur. Additisq. 14 aur. vtrouque, inter 24 aur. + 24 lib. & 30 lib. Ablatisq. 24. lib. vtrinque, inter 24 aur. & 6 lib. Diuisis igitur 24 per 6. fiet Quotiens 4. atque tot aurei faciunt pretium 1. libræ. quod sic probatur.

Pro 10 aur. emuntur libræ 2 $\frac{2}{3}$. atque ita emptor recepit a mercatore lib. 26 $\frac{2}{3}$. quæ valent 106 aur. Si igitur mercatori restituantur 30 lib. debebit mercator emptori lib. 3 $\frac{1}{3}$. cum hic solum receperit lib. 26 $\frac{2}{3}$. Valent autem 3 $\frac{1}{3}$ lib. aur. 14. quos mercator emptori restituit.

36 Cuius quidam inuenit, nescio quot, pauperes ante ianuam domus suæ: quibus ē denarioli, quos in manu habet, septenos erogat denarios. quo facto, supersunt ei in manu 24. denarioli. Quod si cuiuslibet dare voluisset 9. defuissent illi 32. denarioli. Quæritur, quot pauperes fuerint; & quot denarios cuius ille habuerit in manu.

XXXVI.

HIC vides, 7. summas denariorum, quarum quilibet æqualis est numero pauperum, + 24 denar. æquales esse toti numero denariorum; quos cuius ille in manu habebat: propterea quod tot denarioli, quot sunt pauperes, vnā summā constituunt; ac proinde toties 7. denarioli, quot sunt pauperes, constituent 7. summas. Eodem modo 9. summas denariorum, quarum quilibet æqualis est eidem numero pauperum, — 32 denar. æquales erunt toti numero denariorum, quos ille cuius habebat in manu. Ergo æquatio erit inter 7. summ. + 24. & 9. summ. — 32. Additisq. 32. vtrinque, inter 7. summ. + 56. & 9. summ. Ablatisq. 7. summ. ex 9. inter 56. & 2. summ. Diuisis ergo 56 per 2. fiet Quotiens 28. numerus pauperum. Nam si cuiuslibet dentur 7. denar. erogati erunt 196 denar. Et quia tunc superfuert 24 denar. habuit cuius ille in manu 220 denar. Quod si cuiuslibet dare voluisset 9 denar. oportuisset illum habere in manu 252 denar. Defuissent ergo illi 32. denarioli.

37 Pro 70. summis librarum quarundam mercium penditur veltigal 1. summa — 32. aur. Et pro 200. sum-

XXXVII.

*mis penditur 1. summa + 20. aur. Quæritur, quanti
1. summa constet.*

PONE 1 2e aur. & institue regulam Trium bis, hoc modo.

| Summæ | aur. | Summa | aur. |
|-------|-----------|-------|----------------------|
| 70 | 1 2e — 32 | 1 2 | $\frac{12 - 12}{70}$ |
| 100 | 1 2e + 20 | 1 2 | $\frac{12 + 20}{70}$ |

Nam si pro 70. summ. penditur vestigial 1 2e — 32 aur. pro 1. summa pendetur $\frac{12 - 12}{70}$ aur. &c. Atque ita erit æqualitas inter $\frac{12 - 12}{70}$ aur. & $\frac{12 + 20}{70}$ aur. cum uterque numerus sit vestigial 1. summæ. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 100 2e — 6400 aur. & 70 2e + 1400 aur. Additis igitur 6400q utrobique, erit æquatio inter 100 2e & 70 2e + 7800. Ablatisq. 70 2e utrinque, inter 130 2e & 7800. Diuisis ergo 7800 per 130. fiet 1 2e. 60 aur. pro pretio vnius summæ. quod sic probatur. Pro 70 summis pendetur vestigial 28 aur. nimirum 1 2e — 32 aur. Et pro 100. summis pendetur vestigial 80 aur. nimirum 1 2e + 20 aur. Ut hic apparet.

| Summæ | aur. | Summæ | aur. |
|-------|------|-------|------|
| 70 | 18 | 100 | 80 |

XXXVIII. 38 *Vlnæ 10. panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 88. atque eodem pretio 2. vlna panni rubri cum 4. vlnis panni nigri constant aur. 32. Quæstio est de pretio 1. vlnæ.*

PONATUR 1 2e pretium 1. vlnæ panni rubri. Constabuntq. 10 vlnæ 10 2e ac proinde 4 vlnæ panni nigri constabunt 88 aur. — 10 2e. Vlnæ vero 2. panni rubri constabunt 2 2e. ideoq. 4 vlnæ panni nigri, 32 aur. — 2 2e. Erit ergo æquatio inter 88 aur. — 10 2e & 32 aur. — 2 2e. cum uterque numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri. Additis igitur 10 2e utrobique, erit æquatio inter 88 aur. & 32 aur. + 8 2e. Ablatisq. 32 aur. utrinque, inter 56 aur. & 8 2e. Diuisis ergo 56 per 8. fiet 1 2e. 7 aur. pro pretio vnius vlnæ panni rubri. quod probatur. Nam 10 vlnæ valebunt aur. 70. propterea q. 4. vlnæ panni nigri, aur. 18. qui cum 70. faciunt 88 aur. Igitur 1 vlna panni nigri valebit aur. 4 $\frac{1}{2}$. Atque hoc pretio 2 vlnæ panni rubri cum 4. vlnis panni nigri valebunt aur. 32.

QVOD si 10. vlnæ panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constent aur. 88. atque eodem pretio 2 vlnæ panni rubri cum 6 vlnis panni nigri constent aur. 41. constabunt 4. vlnæ panni nigri aur. 88 — 10 2e.

10 2e. Et 6. vlnx panni nigri, aur. 41 — 2 2e. si nimirum ponatur 1 2e. pro pretio 1 vlnx panni rubri, vt prius. Sed non erit æquatio inter aur. 88 — 10 2e. & aur. 41 — 2 2e. cum prior numerus sit pretium 4 vlnarum panni nigri, posterior vero 6 vlnarum. Oportet ergo prius inuestigare pretium 4 vlnarum ex pretio 6 vlnarum, per regulam Trium, hac ratione.

| Vlnx | aur. | Vlnx | aur. |
|------|-----------|------|-------------|
| 6 | 41 — 2 2e | 4 ? | 1 2e — 2 2e |

Inuenieturq. 4 vlnarum pretium $\frac{164}{3}$ aur. atque ita inuenta, erit æquatio inter aur. 88 — 10 2e & aur. $\frac{164}{3}$ aur. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter aur. 528 — 60 2e. & aur. 164 — 8 2e. Additisq. 60 2e vtroque, inter 528 aur. & aur. 224 — 8 2e. Et ablatis 164 aur. vtrique, inter 364 2e. & 364 aur. Diuisis ergo 164 per 52. fiet 1 2e. 7 aur. pro pretio 1 vlnx panni rubri, veluti prius.

Et si 10 vlnx panni rubri cum 4 vlnis panni nigri constarent 88 aur. vt prius, sed 2 vlnx panni rubri cum 4 vlnis panni nigri valeant tantum 20 aur. inuenires pretium 1 2e. 8 1/2 pro pretio 1 vlnx panni rubri, quod probare potes. Nam 10 vlnx panni rubri valebunt 85 aur. & 4 vlnx panni nigri, aur. 3. ideoque 1 vlna 1/4 aur. Atque ita 2 vlnx panni rubri valebunt aur. 17. qui cum 3 aur. nimirum cum pretio 4 vlnarum, faciunt 20 aur.

39 Mercator in tribus nundinis eandem aurcorum summam exponens, lucratus est in singulis 1/3 sua summæ aurcorum. Deinde ad alias se conferens nundinas lucratus est 1/10 eiusdem sue summæ priori lucro aucta. Atque ita depredendit se habere 1287. aur. Quæritur summa aurcorum, quos initio habuit. XXXIX.

PONATUR 1 2e. Et quia in singulis nundinis lucratus est 1/3 2e. habebit post illas tres nundinas aur. 1 1/3 2e. hoc est, 1 1/3 2e. Deinde quia cum 1 1/3 2e lucratus est 1/3 2e id est, 1/9 2e. si hoc lucrum ad 1 1/3 2e adijciatur, fiet summa $\frac{10}{9}$ 2e. quam ultimo loco habuit. quæ æqualis est 1287 aur. Diuisis ergo 1287 per $\frac{10}{9}$ fiet 1 2e. 720 summa aurcorum illius mercatoris. Nam eius 1/3. quas in tribus nundinis est lucratus, sunt 270 aur. qui cum 720. faciunt 990 aur. cum quibus tandem lucratus est 1/10. nimirum 222 2/3. hoc est, 297 aur. qui cum 990. faciunt aur. 1287.

IN numeris abstractis proponetur hæc questio hunc in modum. Inuenire numerum, qui cum 1/3. ipsius, & cum 1/10. huius summæ faciat 1287. Hic enim numerus inuenietur 720. &c.

40 In exercitu Imperatoris peditum numerus octuplo maior est numero equitum. In hos distribuuntur aur. 392000. ita ut quini singulis peditibus, & 16. cuilibet equiti dentur. Quaritur, quot sint pedites, & quot equites,

PONATUR 1 2e equitum, ideoq. 8 2e peditum, instituaturq. regula Trium bis, hoc modo.

| Eques | aur. | Equitum | aur. |
|-------|------|---------|-------|
| 1 | 16 | 1 2e ? | 16 2e |
| Pedes | 8 | 8 2e ? | 40 2e |

Erunt igitur 56 2e aur. æquales 392000 aur. Quare diuisis 392000 per 56. fiet 1 2e. 7000. numerus equitum. ideoq. pedites fuerunt 56000. octies plures. Nam ita distributi erunt equitibus aur. 12000. & peditibus aur. 280000: qui cum illis faciunt 392000. aur.

XLI. 41 Tres milites prædam quandam aureorum aequaliter inter se diuidere volebant. Sed oborta lite, ut fit, ad manus ventum est, & tantum quisque rapuit, quantum per vim potuit. Deinde lite composita, numerarunt singuli pecunias suas, ac tandem deprehenderunt, primum acceptis 5. a secundo, habere numerum aequalem numero aureorum, qui secundo supersunt: Secundum vero, acceptis 7. a tertio, habere numerum aequalem residuo tertij. Tertium denique, acceptis 9. a primo, habere numerum triplum eius, qui tertio superest. Quaritur summa aureorum in illa præda repertorum, & quantum quisque rapuerit.

PONE primum rapuisse 1 2e. Acceptis ergo 5. a secundo, habuit 1 2e + 5. qui numerus æqualis dicitur esse residuo secundij. Antequam secundus igitur dedit 5. primo, habuit 1 2e + 10. Acceptis autem 7. a tertio, habuit 1 2e + 17. ac tantundem fuit residuum tertij. Igitur antequam tertius dedit 7. primo, habuit 1 2e + 24. Acceptis vero 9. a primo, habuit 1 2e + 33. qui numerus triplus esse dicitur eius, qui primo remanet, hoc est, 1 2e — 9. Ergo huius triplum 3 2e — 27. æquale est 1 2e + 33. Additisq. 27 utrobique, erit æquatio inter 1 2e + 60. & 3 2e. Ablataq. 1 2e utrinque, inter 60.

& 2 2e.

Et 2. Diuisis ergo 60 per 2. fiet 30. numerus primus. Numerus autem secundus, qui inuentus est 12. + 10. fuit 40. Tertius autem, qui inuentus est, rapuisse 12. + 24. habuit 54. Et summa aureorum fuit 124. quod probare poteris. Nam primus, acceptis 5. a secundo, habebit 35. quor nimirum secundo superfluit. Et secundus, acceptis 7. a tertio, habebit 47. quor videlicet tertio superfluit. Tertius denique, acceptis 9. a primo, habebit 63. qui numerus triplus est residui primi; nimirum 21. tamis 124. aut. in tres æquales partes distribuantur, obuepiant cuilibet militi 41. 2/3.

IIIIX

XLV

XLII

42 Quatuor socij marsupium inuenerunt aureis plenum, e quibus quilibet partem sorte fortuna accepit. Sed cum singuli suos aureos numerarent, cognouerunt, primum, acceptis 25. a secundo, habere numerum æqualem residuo secundi. Secundum vero, acceptis 30. a tertio, habere numerum triplum residui tertij. Tertium autem, acceptis 40. a quarto, habere numerum duplum residui quarti. Quartum denique, acceptis 50. a primo, habere numerum triplum residui primi, ac præterea 5. Quæritur aureorum summa, e quor quisque accepit.

IIIIX

SOL. primum accepisse 12. Accipis ergo 35. a secundo, habebit 12 + 35. ac totidem supererunt secundo, ac proinde secundus, antequam dedit 25. primo, habuit 12 + 25. Accipis autem 30. a tertio, habebit 12 + 30. Remanserunt ergo tertio 12 + 26. ut ille numerus huius sit triplus: ac proinde tertius antequam dedit 30. secundo, habuit 12 + 56. Accipis autem 40. a quarto, habebit 12 + 96. qui numerus duplus esse debet residui quarti: ac proinde quarto tunc superfluerunt 12 + 48. Et antequam daret 40. tertio, habuit 12 + 88. Hic denique, acceptis 50. a primo, habebit 12 + 138. qui numerus semper 3. triplus esse debet numeri 12. + 50. qui primo superest. Ergo huius triplum 3. erit 120. æquale est 12 + 138. Additis ergo 150. verobique, erit æqualitas inter 320. & 12 + 183. Ablatis, 12. utrinque, inter 318. & 183. Diuisis igitur 183. per 2. fiet 91. 1/2. 100. numerus primus. Ergo secundus 12 + 50. erit 150. Tertius autem 12 + 56. erit 90. Quartus denique 12 + 88. erit 104. Ita namque primus cum 25. secundi habebit 125. ac tantum etiam remanet secundo. Secundus vero cum 30. tertij habebit 180. numerum scilicet triplum numeri 60. qui tertio superest. Tertius denique cum 40. quarti habebit 230. qui numerus duplus est numeri

T

65. qui

65. qui quarto superest. Quartus denique cum 50. primi habebit 155. qui numerus, demptis 5. triplus est numeri 50. qui primo superest.

XLIII.

43 In exercitu casareo ex Germanis, Vngaris, & Italis conftrato, sunt quidem Germani 25000. Vngari vero faciunt 1. Germanorum, atque Italarum. Itali denique faciunt 1. Germanorum, atque Vngarorum. Quæritur numerus Vngarorum, & Italarum, & quantus sit totus exercitus.

XLII

PONE pro Vngaris 1 2e. Ergo Germani simul cum Italis erunt 2 2e. fit totus exercitus 3 2e. Quia vero Itali faciunt 1. Germanorum cum Vngaris: sunt autem Vngari cum Germanis 1 2e + 25000. faciunt Itali 1 2e + 25125. Quoniam igitur Germani sunt 25000. & Vngari 1 2e. atque Itali 1 2e + 25125. erit totus exercitus 1 1 2e + 25125. æqualis 3 2e. Ablatis ergo 1 1 2e. veròbique, erit æquatio inter 25125. & 1 1 2e. Divisq. 25125. per 1 1 2e. fiet 1 2e. 15000. numerus Vngarorum. Itali vero erunt 5000. nimirum 1. Germanorum, atque Vngarorum, qui simul faciunt 40000. totusq. exercitus erit 45000.

XLIIII.

44 Sunt duo Duces, quorum unus milites habet pauciores 40. quam alter. Et uterque suis militibus 1200. aur. distribuat, quo factò evenit, ut prioris Ducis milites singuli haberent 5. aur. amplius, quam milites Ducis posterioris. Quæstio est, quot milites uterque Dux habeat, & quot aureos singuli milites accipiant.

PONATUR 1 2e militum pauciorum, & 1 2e + 40. plurium. Si per hos milites dividantur 1200 aur. sicut Quotientes 1120. & 1120. numeri videlicet aureorum, qui singulis obvenierunt. Et quoniam quilibet priorum habet 5. amplius, quam posteriorum quilibet: si posteriori Quotienti addantur 5. fiet summa 1125. (ut in hac formula vides) æqualis priori Quotienti 1120. Hæc æquatio per multiplicacionem in crucem reducitur ad hanc

inter 1200 2e + 48000. & 5 2e + 1400 2e. Ablatisq. 1200 2e. utrinque, inter 48000. & 5 2e + 200 2e. Et rursum ablatis 200 2e. utrobique, inter 48000 — 200 2e. & 5 2e. Divisq. omnibus per 5. inter 9600 — 40 2e. & 1 2e. Semis numerus radicum est 20. ad cuius quadratum 400. additis 9600. fit numerus 10000. a cuius radice quadrat

imp. 28

3 T

ta 100.

ta 700. si auferatur prædicta semissis 20. remanet pretium 120. 80. uumerus scilicet militum pauciorum. Ergo plures erunt 120. nimirum 40. amplius, quam 80. quod probatur. quia diuisis 1200 per 80. fit Quotiens 15. atque tot aureos singuli militum 80. accipiunt. Diuisis autem 1200 per 120. fit Quotiens 10. numerus uidelicet aureorum, quos singuli militum 120. accipiunt. Vbi vides, quemlibet priorum habere 5. amplius, quam quemlibet posteriorum.

45 *Due Societates, quarum altera alteram 4. hominibus superat præcæm aureorum summam viritum diuidunt. In singulos minoris Societatis cedunt 8. aurei amplius, quam in singulos maioris. Aureorum autem summa numerum sociorum utriusque societatis superat aureis 172. Quaritur summa aureorum, ac Sociorum.*

XLV.

PONATUR pro minore Societate, 120 hominum, ac propterea pro maiore, 120 + 4. Eritq. summa aureorum 120 + 176. quæ summa diuisa per 120 & per 120 + 4. facit Quotientes $\frac{120+176}{120}$ & $\frac{120+176}{120+4}$. Numeros scilicet aureorum, qui cuilibet obuenerunt. Et quia prior Quotiens superat posteriorem 8 aureis: si ad posteriorem addantur 8 aur. fiet summa $\frac{120+176}{120+4} + 8$ (vt in hac formula vides) æqualis priori Quotienti $\frac{120+176}{120}$. Quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $\frac{120+176}{120} = \frac{120+176}{120+4} + 8$ Ablatis autem 24. utrobique, erit æquatio inter $8 + 120$ & $24 + 184 + 704$. Et rursus ablatis 184 utrobique, inter $8 + 120$ & 704 . Et ablatis rursus 24 utrobique, inter $8 + 120$ & $704 - 24$. Diuisisq. omnibus per 8. inter 120 & 88. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 88, siue $\frac{1}{4} + 88$ fit numerus $88\frac{1}{4}$ a cuius radice quadrata $9\frac{1}{2}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{2}$. superit pretium 120. hoc est, 8. numerus minoris Societatis: maioris autem numerus Sociorum erit 12. nimirum 120 + 4. Summa denique aureorum erit 192. nimirum 120 + 176. quod probatur. Nam diuisis aureis 192. per 8. & 12. sunt Quotientes 24. & 16. quorum ille hunc superat 8. aureis.

46 *Mercator quidam ad nundinas ter profectus, prima negotiatione lucratus est summam æqualem suæ pecuniæ, ita ut post primam negotiationem habuerit duplum suæ pecuniæ. Deinde in secunda negotiatione*

XLVI.

*lucratur est radicem quadratam eius dupli; ad prae-
res 2. aureos. In tertia denique negotiatione lucra-
tus est quadratum totius prioris summa, & in super-
4. aureos. Atque ita deprehendisse habere 510. au-
reos. Queritur summa pecunia, quam initio habuit.*

XIX

PONE illum post secundam negotiationem habuisse 12, cum
quā lucratus est in tertia negotiatione eius quadratum, ac prae-
4 aur. ita ut lucrum hoc fuerit 18 + 4. Igitur post tertiam nego-
tiationem habuit summam 18 + 12 + 4. aequalem 34. aut. Ablat-
us 4. utrinque, erit aequatio inter 18 + 12. & 306. Ablatq. rur-
sus 12. utrobique, inter 18 & 306. — 12. Setissis numeri radicē
erit 17. ad cuius quadratum $\frac{1}{2}$. additis 306. fit numerus 306 $\frac{1}{2}$. hoc est
 $\frac{612}{2}$. a cuius radice quadrata $\frac{24}{2}$. si tollatur praedicta semissis $\frac{1}{2}$. re-
manet pretium 12, hoc est, 24. Atque tot aureos post secun-
dam negotiationem habuit. Et quia hoc fuit lucrum radicis pecu-
niae, quam post primam negotiationem habuit, praeterea 2 aurei:
demptis 4 supererunt 20. nimirum lucrum radicis pecuniae 16. Quam
habuit post negotiationem primam. Ergo illa pecunia posuitur 18.
cuius radix quadrata 12. Erig. lucrum post secundam negotia-
tionem, 18 + 12 aequale 30. Ablata autem 12. utrobique, erit aequa-
tio inter 18 & 20. — 12. Semissis numeri radicem est 10. ad cuius
quadratum $\frac{1}{2}$. additis 20. hoc est, $\frac{40}{2}$. fit numerus 20. a cuius radice
quadrata 4. dempta praedicta semisse $\frac{1}{2}$. supererit pretium 16. hoc
hoc est, 4. Atque tantum fuit lucrum secundae negotiationis, 12.
Ablatis igitur 4. & 2. ex 22. (nimirum ex pecunia, quam post se-
cundam negotiationem habuit) supererunt 16. ac tantum habuit post
primam negotiationem, quae pecuniae dicitur esse dupla illius, quam
ad pondus attulit: ac proinde initio habuit 8 aur. quod probatur.
Nam post primam negotiationem habuit 16 aur. & post secundam
22. nimirum radicem numeri 16. & praeterea 2. hoc est 6. quae cum
16 facit 22. Cum his lucratus est quadratum, nimirum 484. ac
praeterea 4. atque ex 22. 484. & 4. colligitur summa 510 aur.

XLVII.

*47 Visum est hoc loco artificium, quo Archimedes argenti
quantitatem aurea corona permixtam deprehendit,
per regulam Algebra explicare.*

XLIX

CAPIANTVR igitur dux massae, auri una, & altera argenti,
aequalis ponderis cum corona. Deinde vas aeneum affabre factum
aqua impletur, & immissa corona, 100 librarum, ponimus effu-
xisse 65 lib. aquae. Repleto postea vase iterum aqua, immissam
massam auri puri 100. librarum eiecisse 60. libras aquae. Denique
iterum repleto vase aqua, immissam massam puri argenti eiecisse 90
lib. aquae. Ponatur 12 lib. argenti contineri in corona, ac proin-
de lib.

de lib. auri 100 — 12. & instituitur regula Trium bis, hoc
modo, dil. 95 dil. 95 dil. 95 dil. 95
dil. 95 dil. 95 dil. 95 dil. 95

| lib. | aquæ | lib. | lib. |
|-------------|------|----------|---------------------|
| Auri 100 | 60 | 100 — 12 | $\frac{10000}{100}$ |
| Argent. 100 | 90 | 12 | $\frac{100}{100}$ |

Reperies enim libras auri 100 — 12 ejcere libras aquæ $\frac{10000}{100}$
si 100 lib. auri ejciunt 60 lib. At 12 lib. argenti ejcere libras
aquæ $\frac{100}{100}$, si 100 lib. argenti ejciunt 90 lib. aquæ. Hæ lib. aquæ
ejectæ faciunt $\frac{10000}{100}$ lib. aquæ (Quoniam fractiones $\frac{10000}{100}$
& $\frac{100}{100}$ eundem habent denominatorem, satis est addere numerato-
res, & summæ conflare 600 + 30 2e. supponere eundem denomina-
torem 100) æquales 65 lib. quas corona ejcit. Hæ æquario inter
 $\frac{10000}{100}$ & 65. per multiplicationem in crucem reducitur ad
hanc inter 6000 + 30 2e. & 6500. Ablatisq. 6000. remanet, erit
æquatio inter 30 2e. & 500. Divisis ergo 500 per 30. fiet 12. 16 $\frac{2}{3}$.
utque tot lib. argenti in corona permixtæ fuerunt: ac propterea
solum 83 $\frac{1}{3}$ lib. auri in eadem reperuntur, quod probatur, vt
hic vides.

| lib. | aquæ | lib. | aquæ |
|-------------|------|------------------|---------------------|
| Argent. 100 | 90 | 16 $\frac{2}{3}$ | $\frac{10000}{100}$ |
| Auri 100 | 60 | 83 $\frac{1}{3}$ | 50 |

Reperies enim libras argenti 16 $\frac{2}{3}$. ejcere lib. aquæ 15. & libras
auri 83 $\frac{1}{3}$. ejcere lib. aquæ 50 quæ cum 15 faciunt 65 quot videli-
cet lib. aquæ effluunt, si coronâ in aquam imponatur.

S C H O L I U M.

EODEM modo solvetur hæc questio. Sunt tres massa eiusdem ponde-
ris, nimirum 10. librarum: Una auri puri, altera argenti puri, & ter-
tia ex auro, argenteoque mixta. Primum autem ejcit $\frac{1}{3}$ lib. aquæ: Secunda
 $\frac{1}{2}$ lib. aquæ: ac tertia $\frac{1}{4}$ lib. aquæ. Nam sic instituitur regula trium bis, si
in tertia massa ponatur 12. lib. argenti, ac proinde auri lib. 10 — 12.

| | | | |
|-----------------|-------------------------|-------------------|----------------------------|
| Auri lib. 10 | aquæ lib. $\frac{1}{3}$ | 10 — 12 lib. auri | aq. lib. $\frac{100}{100}$ |
| Argent. lib. 10 | aquæ lib. $\frac{1}{2}$ | 12 lib. argenti | aq. lib. $\frac{100}{100}$ |

Nam duo numeri in quarto loco faciunt summam $\frac{10000}{100}$ lib. aquæ æqua-
lem $\frac{1}{2}$ lib. aquæ, quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad
hanc inter 12000 & 3200 + 6880 2e. Et ablati 3200. utrobique, erit æ-
quatio inter 8800 & 6880 2e. Divisis ergo 8800 per 6880. fiet 12. 1 $\frac{2}{3}$.
aque tot lib. argenti sunt in tertia massa, ac proinde in eadem erunt lib.
8 $\frac{1}{3}$ auri, quod probatur, vt hic vides.

Somp

Argent.

Argent. lib. 10

aq. lib. $\frac{1}{2}$ arg. lib. $1\frac{1}{2}$ aq. lib. $\frac{1}{2}$

Auri lib. 10

aq. lib. $\frac{1}{2}$ aur. lib. $8\frac{1}{2}$ aq. lib. $\frac{1}{2}$

Invenietur argenti lib. $1\frac{1}{2}$, eijcere aqua lib. $\frac{1}{2}$. & auri lib. $8\frac{1}{2}$, eijtere aqua lib. $\frac{1}{2}$. qua cum illis faciunt $\frac{1}{2}$ libr. aqua.

Q V O D si quis desideraret magis accuratam rationem deprehendendi quantitatem auri, & argenti in corona illa, vel in tertia massa proxime dicta, et legat eruditissimum libellum Marini Ghisaldi Patritij Ragusini, qui inscribitur Promotus Archimedes. Vbi in propos. 17. varias causas errorum, qui in praedicto Archimedis artificio, committi possunt, enumerat. Deinde in propos. 18. magis accuratum artificium demonstrat.

- XLVIII. 48 Tres mercatores lucrati sunt 700. aur. quos inter se ita distribuerunt, habita ratione pecunia, quam quisque ad negotiationem attulit, ut portio secundi superaret portionem primi aureis 12. portio vero tertij portionem secundi aureis 16, Quæritur, cuiusque portio quantæ fuit.

PONATUR portio primi 1 æ eritq. propterea portio secundi 1 æ + 12, & tertijs 1 æ + 28. Hæ tres portiones simul faciunt 3 æ + 40. æquales 700. Ablatis 40 utrobique, erit æquatio inter 3 æ. & 660. Divisis igitur 660 per 3. fiet 1 æ. 220. portio primi. Portio autem secundi erit 232. & tertijs 248. quæ omnes simul faciunt 700.

- XLIX. 49 Tres lusores, quorum quisque certam summam aureorum attulit, eam sortem habuerunt, et statim primus lucratus sit $\frac{1}{2}$. secundi: Deinde secundus $\frac{1}{3}$. tertijs: tertius denique $\frac{1}{4}$. primi. Atque ita contigit, ut singuli haberent 700. aur. Quæritur, quot quisque aureos ad ludum attulerit.

PONATUR pecunia primi 1 æ. qui si det $\frac{1}{2}$ æ tertio, supererunt ei $\frac{1}{2}$ æ, quæ cum $\frac{1}{2}$. secundi debent facere 700. Ergo $\frac{1}{2}$. secundi est 700 — $\frac{1}{2}$ æ. atque ideo huius duplum attulit, nimirum 1400 — $1\frac{1}{2}$ æ. Nam ita, postquam perdidit $\frac{1}{2}$. remanebunt illi 700 — $\frac{1}{2}$ æ qui numerus cum $\frac{1}{3}$. tertijs debet facere 700. Ergo $\frac{1}{3}$. tertijs est $\frac{1}{2}$ æ; ideoq. ad ludum attulit $2\frac{1}{2}$ æ, siue $\frac{5}{2}$ æ. qui si amisit $\frac{1}{4}$. supererunt ei $\frac{3}{4}$ æ quæ cum $\frac{1}{4}$. primi, nimirum cum $\frac{1}{4}$ æ. habebit $\frac{1}{2}$ æ quales 700. Divisis igitur 700 per $\frac{1}{2}$. fiet 1 æ. 400. pecunia videlicet primi. Ac proinde secundus, qui inventus est attulisse 1400 — $1\frac{1}{2}$ æ. attulit ad ludum aur. 800. Et tertius aur. 900. nimirum $2\frac{1}{2}$ æ. quod

quod probatur. Nam si primus amittat $\frac{1}{2}$, supererunt 300. aur. qui cum $\frac{1}{2}$, aureorum 800. quos secundus attulit, faciunt 700 aur. Item $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum 400. aurei cum $\frac{1}{2}$. tertij, id est, cum 300. facit similiter 700 aur. Ac denique $\frac{1}{2}$. tertij, postquam amiserit $\frac{1}{2}$, nimirum 600 aur. cum $\frac{1}{2}$. primi, id est, cum 100. facit quoque 700. aureos.

50 *Quidam habet duo vasa aurea, & vnum operculum, cuius pretium est 150. aur. quod additum ad pretij primi vasis facit pretium triplum pretij secundi vasis. Additum vero idem operculum vasi secundo facit pretium aequale pretio primi vasis. Quastio est de pretio utriusque vasis.*

L.

PONATUR pretium primi 12e. Ergo 12e + 150. tripla sunt pretij secundi vasis, ideoq. eius estimatio est $\frac{1}{3}$ 2e + 50 aur. Cui si accedat operculum 150 aur. erit eius tunc pretium $\frac{1}{3}$ 2e + 200 aur. aequale 12e. nimirum pretio primi vasis. Ablata $\frac{1}{3}$ 2e. utrinque, erit æquatio inter $\frac{1}{3}$ 2e. & 200. Diuisis igitur 200 per $\frac{1}{3}$, fiet 12e. 300 aur. pretium scilicet primi vasis. Secundi autem vasis pretium, quod inuenit, est $\frac{1}{3}$ 2e + 50 erit 150 aur. quod probatur. Nam 300 aur. hoc est, pretium primi vasis, cum pretio operculi, id est, cum 150. faciunt summam 450. triplam pretij secundi vasis, nimirum 150 aur. At 150. aur. pretium videlicet secundi vasis, cum operculo, siue cum 150 aur. faciunt summam 300 aur. æqualem pretio primi vasis.

51 *Quidam emit, nescio quot, perdices, ita ut si emisset seorsum illarum $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{2}$. & insuper 6. haberet 100. perdices. Quæritur numerus perdicum.*

L I.

PONATUR 12e, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{2}$. faciunt $\frac{3}{2}$ 2e, quæ cum 6. faciunt $\frac{3}{2}$ 2e + 6. æqualia 100. Ablatis 6 utrobique, erit æquatio inter $\frac{3}{2}$ 2e. & 94. Diuisis igitur 94 per $\frac{3}{2}$, fiet 12e. 120. numerus videlicet perdicum empearum. Nam eius $\frac{1}{2}$. est 40. & $\frac{1}{2}$. est 30. & $\frac{1}{2}$. est 14. quæ omnes partes cum 6. faciunt summam 100 perdicum.

52 *Alexander Magnus, cum quadam die familiariter cum Calisthene philosopho ageret de atate sua, & amicorum suorum Ephesionis, & Clyti, ita differuit. Ego, inquit, Ephesionem meum duobus annis antecedo: At Clytus amborum annos sua atate comprehendit.*

L I I.

dit, & præterea annos quatuor. Cui Calisthenes. Cum pater meus vixerit annos 96. iucunda mihi fuit ista relatio, o Rex. Nam annos trium vestrum ætas eius præcipue habuit. Queritur, qua ætate Alexander colloquium istud habuerit, & quot annos tam Ephestio, quam Clytus tunc habuerit.

PONATUR pro annis Ephestionis 12. Igitur anni Alexandri fuerunt 12+1. & Clyti 12+6. qui omnes faciunt annos 42+3 æquales 96. Ablatis 8 utrobique, erit æquatio inter 42 & 88. Diuisis igitur 88 per 4. fiet 12. anni nimirum Ephestionis. Alexander igitur habuit 14. annos. Clytus vero 50. qui anni in vnam collecti summam faciunt 96 annos.

LIII.

53 Nicanor ea pugna, qua interijt, occurrit Iuda Machabeo, agmine quadrato collecto. ex Syrorum auxiliariis militibus, atque ijs, quos secum adduxerat. Cæsa sunt autem ex eo agmine 35000. Reliqui fuga elapsi sunt, quorum numerus fuit 156. ultra numerum auxiliorum militum Syrorum. Quæstio est, quot militibus occurrerit Nicanor Machabeo, & quot habuerit milites auxiliares, quot item secum adduxerit.

PONATUR pro agmine illo quadrato 18. in quo computati sunt milites cæsi 35000. Item numerus fuga seruatorum 156. & numerus milicum auxiliorum incognitus. Ponatur hic numerus 12 cui si addantur milites cæsi 35000. & 156. fuga seruati, conflabitur summa 12+35156. æqualis 18. nimirum toti agmini quadrato. Semissis numeri radicem est 4. ad cuius quadratū 16. additis 35156. hoc est, 35172. conficietur numerus 35192 ad cuius radicem quadratam 18. si addatur prædicta semissis numeri radicem, nimirum 4. fiet 12. hoc est, 188. numerus videlicet auxiliorum militum. ipsi vero secum adduxit 35156. atque idcirco totum agmen quadratum comprehendit 35344. qui numerus quadratus est habens radicem 188.

LIIII.

54 Quidam habet 4. massas ex argento. & cupro mixtas. Pondus primæ continet 11. marcas, quarum qualibet conflatur ex 9. semiuncijs puri argenti, & 7. semiunc. cupri puri: quia 1. marcæ statuiamus comprehendere 16. semiuncias. Pondus secundæ massæ est 15. marca-

rum, quarum singula continent 7. semiunc. argenti, & 9. semiunc. cupri. Pondus tertia massa habet 24. marcas, quarum singula constant 10. semiunc. argenti, & 6. semiunc. cupri. Pondus denique quarta massa est 136. marcarum, quarum singula continent 14. semiunc. argenti, & 2. semiunc. cupri. Vult autem ex hisce massis constare unam, additis aliquot marcis argenti, ita ut qualibet marca contineat 15. semiunc. puri argenti, & 1. semiunc. puri cupri. Quastio iam est, quantum argenti puri admiscendum sit illis massis, & quot marcas massa noua sit habitura.

PONATVR 12. marcarum puri argenti addendarum. Quoniam vero omnes marcae mixtae in illis 4. massis contentae sunt 186. & omnes semiunciae puri argenti 2348. & cupri 618. ut hic vides.

| Marcae mixtae | Semiunciae puri arg. | Semiunc. puri cupri. |
|---------------|----------------------|----------------------|
| 12 | 99 | 77 |
| 24 | 105 | 135 |
| 136 | 1904 | 144 |
| 186 | 2348 | 618 |

Cum enim prima massa marcarum 12. quaelibet marca contineat 9 semiunc. argenti puri, & cupri 7 semiunc. erunt in tota illa massa, 99 semiunc. argenti puri, & 77 semiunc. puri cupri, &c. instituenda erit regula trium hoc modo.

Marcae mixtae Mar. pu. arg. Semiun. cupri. Mar. mix. Semiun. cup.
 $186 + 12.$ $618.$ 1291 $186 + 12.$

Hoc est, Marcae mixtae $186 + 12.$ marcarum puri arg. continent 618 semiunc. cupri, (quia in massa conflanda comprehenduntur 618 semiunc. cupri; quot videlicet in 4 massis compositis continentur, cum nulla noua semiunc. cupri accedat) quot ergo semiunc. cupri continebit 1 marca noua mixta? Inuenies enim $\frac{186+12}{186} \times 618$ semiunc. cupri, quae fractio aequiualeat 1 semiunc. cupri: propterea, quod in una marca noua mixta contineatur tantum 1 semiunc. cupri ex hypothesi. Haec aequatio per multiplicationem in crucem, reducetur ad hanc inter 618. & $186 + 12.$ Ablatisque 186. utrobique, erit aequatio inter 442. & 12. Erunt ergo 12. 442. atque tot marcae argenti puri admiscendae sunt, ut singulae marcae comprehendant 15 semiunc. puri arg. & 1 semiunc. cupri. quod sic probatur. Quoniam in 4 illis massis propositis continentur 186 marcae mixtae,

ea, si addantur inuentæ 442 marcæ argenti puri, sient marcæ mixtæ 628. arque idcirco quælibet habebit 1 semiunc. cupri, quod in omnibus simul sint 628 semiunc. cupri.

ET quia vna marca posita est 16 semiunciarum, comprehendent 442 marcæ puri arg. semiuncias 7072. quibus si addantur semiuncie 2348 puri argenti, quæ in 4 massis propositis reperiuntur, sient 9420. semiunc. puri argenti. quæ distributæ in 628 marcas nouæ massæ conflata, dabunt cuilibet marcæ 15 semiuncias argenti puri.

HÆC eadem questio facile etiam expedietur sine Algebræ auxilio. Quoniam enim in 4 massis propositis habentur 628 semiuncie cupri, necesse est, vt massa noua conflanda sit totidem marcarum, vt nimirum cuilibet 1 semiuncia cupri possit assignari. Si igitur 186 marcæ mixtæ, quas 4. illæ massæ continent, detrahantur ex 628. supererunt 442 marcæ puri argenti addendæ ad 186 marcas, vt fiat numerus marcarum 628. in noua massa conflata comprehensarum.

QVOD si massa ex 4. propositis conflanda sit cum argento addito, vt singulæ marcæ contineant 13 semiuncias puri arg. & 3 semiunc. cupri: Diuisis 628 semiuncijs cupri per 3. exibit numerus marcarum in noua massa, 209 $\frac{1}{3}$. Ita enim quælibet marca 3 semiunc. cupri continebit. Si igitur ex 209 $\frac{1}{3}$. demantur marcæ 186. in 4. primis massis contentæ, reliquus fiet numerus 23 $\frac{1}{3}$. marcarum puri arg. addendarum: constabiturq. numerus 209 $\frac{1}{3}$. marcarum in massa noua comprehensarum: quarum quælibet 13 semiunc. arg. puri comprehendet. Nam in marcis 209 $\frac{1}{3}$. continentur semiuncie 2724 $\frac{1}{3}$. ex quibus si demantur 628. siue 1248 semiunc. cupri puri in massa noua contentæ, remanebunt 2476 $\frac{1}{3}$ semiunc. argenti puri: quibus in 209 $\frac{1}{3}$ marcas distributis, prouenient cuilibet marcæ 13 semiunc. puri argenti.

SI verò massa ex eisdem 4 massis conflanda sit, cum cupro addito, vt singulæ marcæ contineant 12 semiunc. argenti puri, & 4 semiunc. cupri puri: erit cuprum adijciendum, non autem argentum, quia distributis 2348 semiunc. argenti, quæ in 4. illis massis existit, in 186 marcas, reperiuntur in quolibet marca plures semiuncie argenti, quam 12. nimirum 12 $\frac{1}{3}$. Diuisis igitur 2348 semiunc. argenti puri per 12. exibit in Quotiente numerus marcarum in noua massa, 195 $\frac{2}{3}$. Sic enim quælibet marca continebit 12 semiunc. argenti puri. Dempstis autem marcis 186. quas illæ 4. massæ complectuntur, remanebunt 9 $\frac{2}{3}$ marcæ cupri addendæ, vt conficiatur noua massa marcarum 195 $\frac{2}{3}$. quarum quælibet 4 semiunc. cupri continebit. Nam in marcis 195 $\frac{2}{3}$. continentur 2476 $\frac{1}{3}$ semiuncie. E quibus si demantur 2348 semiunc. argenti, hoc est, 2448. relinquentur 28 $\frac{2}{3}$ semiunc. cupri, quibus distributis in 195 $\frac{2}{3}$ marcas, prouenient cuilibet marcæ 4 semiunc. cupri.

I AM verò si queratur, quantum cupri addendum sit quatuor illis massis, vt in quolibet marca nouæ massæ conflata reperiatur 15 semiunc. puri cupri, & 1 argenti: instituenda erit regula Trium hoc modo, posita 126 marcarum puri cupri.

Marcæ

Mar. mix. Mar. pu. cup. Semiunc. arg. Mar. mix. Sem. arg. pu.
 $186 + 1 \text{ ze}$ 2348 12 2144

Eritq. quartus numerus æqualis 1 semiuncie argenti puri: quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad hanc inter 2348 & $186 + 1 \text{ ze}$. Ablatisq. 186 utrobique, erit æquatio inter 2162 & 1 ze . Erit ergo 1 ze 2162 . numerus videlicet marcarum cupri admiscendarum, ut singulæ mar. contineant 15 semiunc. cupri, & 1 argenti. Quoniam enim in 4. illis massis existunt 186 . mar. & additis proximè inuentis 2162 . fiet numerus marcarum 2348 . ac proinde quilibet habebit 1 semiunc. argenti: quippe cum in omnibus simul sint 2348 semiunc. argenti. Et quia 2162 mar. puri cupri comprehendunt semiunc. 34592 . si addantur 618 semiunc. cupri in quatuor prioribus massis contentæ, fient 34592 semiunc. quibus distributis in 2348 marcas nouæ massæ constatæ, congruent cuilibet mar. 15 semiuncie cupri.

Si autem quæstio sit, quantum argenti contineat 1 marca, si 4. illæ massæ consentur, & nihil eis addatur: sic stabit regula Trium.

| | | | |
|-----------|---------------|-----------|---------------|
| Mar. mix. | Semiunc. arg. | Mar. mix. | Semiunc. arg. |
| 186 | 2348 | 12 | 2144 |

Continebit ergo 1 marca semiunc. arg. $12 \frac{1}{4}$. & proinde semiunc. cupri $3 \frac{1}{4}$.

Si C. si quærat, quantum cupri contineat 1 marca, sic stabit regula.

| | | | |
|-----------|----------------|-----------|-----------------|
| Mar. mix. | Semiunc. cupri | Mar. mix. | Semiunc. cupri |
| 186 | 618 | 12 | $3 \frac{1}{4}$ |

Continebit enim 1 marca semiunc. cupri puri $3 \frac{1}{4}$. ideoq. $12 \frac{1}{4}$ semiuncias puri argenti.

Et si quæstio sit, cuius ponderis massa continens in qualibet marca 3 semiunc. argenti, & 12 cupri, commiscenda sit illis 4 massis, ut singulæ mar. nouæ massæ constatæ contineant 1 semiunc. argenti, & 12 cupri, ponatur pro numero marcarum addendarum 1 ze & pro numero semiunc. argenti in illa massa contentarum, 3 ze . quia numerus semiunciarum in illa massa triplus est numeri marcarum, quandoquidem qualibet marca comprehendere dicitur 3 semiunc. argenti. Sic igitur stabit regula Trium.

| | | | | | |
|-----------|----------------|---------------|----------------|-----------|-----------|
| Mar. mix. | Mar. mix. | Semiunc. arg. | Sem. arg. | Mar. mix. | Sem. arg. |
| 186 | 1 ze | 2348 | 3 ze | 12 | 2144 |

Quartus enim numerus æquabitur 5 semiuncijs argenti, quot nimirum

rum i massa massæ nouæ includere debet. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $1348 + 32e$. & $930 + 52e$. Ablatisq. 930 vtrobique, erit æquatio inter $1418 + 32e$ & $52e$. Ablatisq. rursum $32e$ vtrunque, inter 1418 . & $22e$. Diuisis igitur 1418 per 22 . fiet 64 . 709 . numerus marcarum, quas massâ quinta commiscenda continebit. Additis igitur 186 marcas quatuor priorum massarum, fiet noua massa marcarum 895 . quarum quælibet continet 5 semiunc. argenti, & 11 cupri. quod sic probatur. Dûc 895 marcas in 16 semiunc. faciesq. 14320 . semiuncias partim argenti, & partim cupri in massa noua marcarum 895 . contentas. Deinde duc easdem marcas 895 . in 5 . semiunc. argenti, quas quælibet marca continere debet, faciesq. semiunc. argenti 4475 . in noua illa massa contentas. Denique duc easdem marcas 895 . in 11 . semiunc. cupri, quas quælibet marca continere debet, efficiesq. 9845 . semiunc. cupri quæ cum 4475 semiunc. argenti faciunt 14320 . quot nimirum semiuncie in vniuersum continentur in 895 . marcis.

LV.

55 Duo Societatem inunt: quorum secundus duplo plus pecunia secum affert, quam primus, ac præterea 5. aur. Lucratifunt autem 960. aur. ex quibus primo obuenerunt aur. 300. & secundo 660. Quantum ergo singuli imposuerunt.

SOLV. pro primo $12e$. ideoque pro secundo $22e + 5$. Summa zimboborum est $32e + 5$. qua lucrati sunt 960 . aur. Institue ergo regulam trium sic.

 $32e + 5$

960

 $12e$ $22e + 5$

Inuenies enim primum, qui posuit $12e$. lucrari 300 . qui numerus æqualis est 300 . aur. qui primo obuenerunt. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter $9602e$. & $9002e + 1500$. Ablatis igitur $9002e$ vtrobique, remanebit æquatio inter $602e$. & 1500 . Diuisis igitur 1500 per 60 . fiet $12e$. 25 . pro aureis, quos primus posuit. Ergo secundus posuit 55 . aur. quod probatur. Amborum enim summa est 80 aur. Ergo regula trium sic stabit bis.

30

960

25

300

80

960

55

7

660

2

660

LVI.

56 Duo habent pecuniam, nimirum 200. aur. simul, & pecunia secundi diuisa per pecuniam primi facit Quotientem $2\frac{1}{2}$. Quæstio est, quantam quisque pecuniam habeat.

HABET quæstio cum sequentibus ad secundas radices pertinet. Ponatur pro primo 12, & pro secundo 1 A. Resoluenda ergo est secunda radix in primam hoc modo. Quoniam ambo habent 100. aur. erit æquatio inter 12 + 1 A, & 100. Ablataq. 12 utrinque, inter 1 A, & 100 — 12. Erit igitur 1 A, resoluta in 100 — 12. Quare pono denuo numerum primi 12, & secundi 100 — 12. qui simul faciunt 100. aur. Diviso iam numero secundi per numerum primi, fit Quotiens $\frac{100-12}{12}$, æqualis $1\frac{1}{3}$. hoc est $1\frac{1}{3}$. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 400 — 122, & 32. Additisq. 12 utrobique, erit æquatio inter 400, & 52. Divisis ergo 400 per 5, fiet Quotiens 80. numerus prioris. Ergo secundus habebit 120. nimirum 100 — 12. quo numero diviso per 80, fit Quotiens $1\frac{1}{2}$.

Aliter, Ponatur numerus secundi 12, & primi 1 A. Ergo iterum erit æquatio inter 12 + 1 A, & 100. aur. Ablataq. 12 utrobique, inter 1 A, & 100 — 12. atque ita 1 A, resoluta est in 100 — 12. Pono ergo denuo pro secundo 12, & pro primo 100 — 12. Diviso illo per hunc fit Quotiens $\frac{100-12}{12}$, æqualis $1\frac{1}{3}$. quæ æqualitas per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 12, & 600 — 32. Additisq. 32 utrinque, erit æquatio inter 12, & 600. Divisis ergo 600 per 5, fiet 120. pro numero secundi. Primus ergo habet 80. nimirum 100 — 12. ut prius.

§7 Septem mercatores debent cuiusdam creditori pecuniam hoc modo, Sex, excluso septimo, debent simul

LVII.

994. aur.

Deinde sex, excluso primo, debent 882. aur.

Sex, excluso secundo, debent aur. 952.

Sex, dempto tertio, debent aur. 896.

Sex, excluso quarto, debent aur. 910.

Sex, excluso quinto, debent aur. 840.

Sex denique, excepto sexto, debent aur. 1036.

Quæritur iam, quanta sit summa totius debiti, & quantum quisque debeat.

PRIMUM quia excluditur debitum septimi a tota summa: si pro debito septimi ponatur 12. erit summa totius debiti 994 + 12. aur.

Deinde quia excluditur debitum primi: si pro eo ponatur 1 A, erit summa totius debiti aur. 882 + 1 A.

Tertio quia excluditur debitum secundi, pone pro eo 1 B, aur. eritq. summa totius debiti aur. 952 + 1 B.

Quarto quia eximitur debitum tertij, si pro eo ponatur 1 C, aur. erit summa totius debiti aur. 896 + 1 C.

Quin-

Quinto quia subicitur debitum quarti, si pro eo ponatur 1 D, aur. erit totius debiti summa aur. $910 + 1 D$.

Sexto quia supprimitur debitum quinti, si pro eo ponatur 1 E, aur. habebitur summa totius debiti $840 + 1 E$, aur.

Septimo denique, quia non exprimitur debitum sexti, si pro eo ponatur 1 F, aur. erit summa totius debiti $1036 + 1 F$, aur.

Quia igitur summa omnium, hoc est, totum debitum septies ponitur, ut hic vides, habebimus sex æquationes, si superiores cum singulis inferioribus conferemus, propterea quod quodlibet totum sibiipsum est æquale. Videlicet.

Primum $994 + 1 2e$. æqualia sunt $382 + 1 A$. Igitur ablatis 382. utrobique, erit æquatio inter $112 + 1 2e$, & $1 A$. Cum ergo pro debito primi posita sit 1 A; erit debitum primi aur. $112 + 1 2e$.

Deinde eodem modo æquatio erit inter $994 + 1 2e$, & $952 + 1 B$. Ablatisq. 952 utrinque, inter $42 + 1 2e$, & $1 B$, ac proinde debitum secundi $42 + 1 2e$.

Tertio similiter æquatio erit inter $994 + 1 2e$, & $896 + 1 C$. Ablatisq. 896 utrinque, inter $98 + 1 2e$, & $1 C$: ideoq. debitum tertij erit $98 + 1 2e$.

Quarto pari ratione erit æquatio inter $994 + 1 2e$, & $840 + 1 D$. Ablatisq. 840 utrobique, inter $154 + 1 2e$, & $1 D$. Debitumq. quartij erit aur. $84 + 1 2e$.

Quinto non secus erit æquatio inter $994 + 1 2e$, & $840 + 1 E$. Ablatisq. 840 utrobique, inter $154 + 1 2e$, & $1 E$: proptereaq. debitum quinti erit aur. $154 + 1 2e$.

Sexto non aliter æquatio erit inter $994 + 1 2e$, & $1036 + 1 F$. Ablatisq. 994 utrobique, inter $1 2e$, & $42 + 1 F$. Rursumq. ablatis 42 utrinque, inter $1 2e$ — 42. & $1 F$. ideoq. debitum sexti erit aur. $1 2e$ — 42.

Et quia pro debito septimi posita fuit 1 2e. erunt omnium debita hæc, quæ faciunt summam

| | | |
|---------------|--------------|---|
| Debitum primi | $112 + 1 2e$ | 7 2e + 448. aur. æqualem |
| Secundi | $42 + 1 2e$ | $994 + 1 2e$. cum hic etiam |
| Tertij | $98 + 1 2e$ | numerus toti debito equalis sit, ut paulo ante diximus. |
| Quarti | $84 + 1 2e$ | Ablata ergo 1 2e. |
| Quinti | $154 + 1 2e$ | utrinque, erit æquatio inter |
| Sexti | $1 2e$ — 42 | $6 2e + 448$. & 994 . Ab- |
| Septimi | $1 2e$ | latisq. rursum 448 utro- |

bique. inter $6 2e$, & 546 . Divisis igitur 546 per 6. fiet 1 2e. 91. debitum septimi, quod fuit 1 2e. Hinc facile debita aliorum elicies.

Quoniam enim debitum primi fuit $112 + 1 2e$. erit ipsum debitum 103. summa nimirum ex 91. & 12. conflata. Sic etiam debita sexti

sexti erit 49. nimirum $12^2 - 42$. & sic de ceteris, vt hic cernis.

| | | | | | |
|---------|---------|-----|--------|---|--------------|
| Debitum | Primi | 203 | } aur. | Summa om-
nium, seu totū
debitum. | { 1085. aur. |
| | Secundi | 133 | | | |
| | Tertij | 189 | | | |
| | Quarti | 175 | | | |
| | Quinti | 145 | | | |
| | Sexti | 49 | | | |
| | Septimi | 91 | | | |

Probatio. Dempito debito septimi ex toto debito. debebunt 6. alij aur. 994. Item dempto debito primi ex eodem debito toto, debebunt 6. alij, aur. 882. & sic de ceteris.

38 Duo socij habent duos numeros aureorum, quorum summa à summa quadratorum ex ipsis procreatorum subtracta, relinquit 78. Addita verò ad numerum, ex eorum multiplicatione productum facit 39. Quaeritur, qui sint isti numeri.

LVIII.

HANC quæstionem per sequentem figuram explicabimus, vbi quadratum rectæ AC, diuisum est in duo quadrata, & duo complementa, quorum quodlibet inter duo quadrata medium proportionale est, vt in Lemmate propof. 14. lib. 10. Eucl. demonstrauimus, & supra quoque in numeris in Lemmate ænigmati 26. cap. 30. ostendimus. Ponatur ergo minor numerus 12: nimirum linea AB, & maior 1A, nimirum linea BC. Summa autem ex ipsis constata, nimirum linea AC, ponatur 1B. Eritq. quadratum rectæ AB, 12. Et quoniam summa numerorum 1B, subtracta ex duobus quadratis rectarum AB, BC, relinquit 78. facient duo illa quadrata $78 + 12$. Ita enim si ex illis demetur 1B, relinqueretur 78. Igitur quadratum rectæ BC, erit $78 + 12$. Si enim duo quadrata faciunt $78 + 12$, vt diximus, erit solum quadratum rectæ BC, $78 + 12 - 12$.

Deinde quia summa numerorum AB, BC, nimirum 1B, addita ad productum ex eorum multiplicatione, id est, ad complementum AD, facit 39. erit complementum hoc $39 - 12$. Ita namq. si addatur 12, fiet ipsum complementum 39.

| | | |
|---|----------------|-----------|
| A | $39 - 12$ | 12 |
| | $78 + 12 - 12$ | $39 - 12$ |
| B | | |
| C | | |

Quia

Quia vero quadratum rectæ AC, quæ valet 1 B, constat ex duobus quadratis rectarum AB, BC, id est, ex $78 + 1 B$, & ex duobus complementis, hoc est, ex $78 - 1 B$, estq. quadratum rectæ AC, ex 1 B, procreatum 1 B. erit æquatio inter 1 B. & 156 — 1 B, qui numerus constat ex $78 + 1 B$, id est, ex duobus quadratis, & ex duobus complementis, hoc est, ex $78 - 1 B$. Huius autem numeri 156 — 1 B, radix non aliter inuestigabitur, quam ex numero 156 — 172, ac si hic æqualis esset 1 B. nimirum hoc pacto. Semissis numeri radicem est $\frac{1}{2}$. ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$. additis 156, hoc est, $\frac{312}{4}$. fit numerus $\frac{624}{4}$. a cuius radice quadrata $\frac{25}{4}$. si dematur prædicta semissis $\frac{1}{4}$. remanebit pretium 172. $\frac{25}{4}$. hoc est 12. ac tantum valet recta AC, hoc est, 1 B, summa numerorum 172. & 1 A.

JIIIV

a 10. septimi

Quoniam igitur 1 B, est 12. complementum 39 — 1 B, erit 27. & quadratum maius $78 + 1 B - 1 B$. erit 90 — 1 B. estq. complementum 27. medium proportionale inter quadratum hoc maius 90 — 1 B. & quadratum minus 1 B. ut initio diximus: si ducatur 90 — 1 B. in 1 B. fiet numerus 90 B — 1 B. æqualis quadrato ex 27. descripto, nimirum numero 729. Addito ergo 1 B. utrobique, erit æquatio inter 90 B. & $729 + 1 B$. & ablatis 729. utrobique, inter 90 B — 729. & 1 B. Huius numeri 90 B — 729. radicem, Zenfizenficam ita inueniemus. Semissis numeri Zenforum est 45. a cuius quadrato 2025. si demantur 729. remanet numerus 1296. ad cuius radicem 36. si addatur prædicta semissis 45. fit 1 B. 81. maior, minor autem erit 9. si nimirum ex prædicta semisse 45. dematur inuenta radix 36. Zenforum autem 81. & 9. radices quadrata sunt 9. & 3. numeri quæsi. Nam eorum quadrati sunt 81. & 9. a quorum summa 90. si ipsorum numerorum summa 12. detrahatur, reliquus fit numerus 78. Et si eadem summa 12. addatur ad 27. numerum ex eorum multiplicatione productum, fit summa 39.

PORRO postquam inuentum fuit, 1 B, summam numerorum 172, & 1 A, esse 12. facilius inueniemus utrumque numerorum 172, & 1 A, seorsum, per ænigma 172. cap. 29. Quoniam enim complementum, quod fit ex AB, in CB, inuentum est 27. si numerus 12. diuidatur in duas partes, ut ex vna in alteram fiat numerus 27. qui non maior est quarta parte quadrati ex numero 12. facti, ut in prædicto ænigmate docuimus, inuenietur vna pars 3. & altera 9. Idem quoque efficietur per ænigma 38. cap. 30.

V E L, si numerus 12. per ænigma 170. cap. 29. vel 35. cap. 30. diuidatur in duos numeros, quorum quadrati simul faciant 90. summam videlicet duorum quadratorum rectarum AB, CB, quæ inuenta est 90. reperientur iterum duæ partes 3. & 9.

S C H O L I U M.

EX hoc ænigmate facile intelligitur, eum, qui quæstiones per Algebrae solvere vult, debere optime esse exercitatum in Geometria scientia, cap. 1. diximus. Hoc enim ænigma ab eo, qui Geometriam ignorat, vix, aut nullo modo soluetur, ut patet.

59 Duo socij habent duas summas aureorum. Quadrati numeri ex summis procreati faciunt 340. Sed ipsa summa inter se multiplicata faciunt $\frac{1}{2}$. maioris quadrati. Quæstio est, quanta sint ista summa.

LIX.

PONATVR maior summa 1 2e, & minor 1 A. Quadrati sunt 1 8. & 1 A 8. qui simul facere debent 340. Igitur 1 8. erit 340 — 1 A 8. & 1 A 8, erit 340 — 1 8. Duo vero numeri inter se multiplicati faciunt numerum 1 2e A, æqualem $\frac{1}{2}$ 8. hoc est, $\frac{1}{2}$. maioris quadrati, qui est 1 8. Si igitur æquatio est inter 1 2e A, & $\frac{1}{2}$ 8. erit quoque æquatio inter horum numerorum quadrata, nimirum inter 1 8 A 8. & $\frac{1}{4}$ 8 8. quæ æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad æquationem inter 49 8 A 8, & 36 8 8. Et per depressionem signi 8, primæ radices, erit æquatio inter 49 A 8, & 36 8. Ac per regulam Trium, si 36 8. æquivalent 49 A 8. æquialebit 1 8. numero $\frac{49 \times 8}{36}$, vt hic vides, abiecto signo 8. in primo ac tertio numero.

36

49 A 8

1 8

 $\frac{49 \times 8}{36}$

Et quoniam 1 A 8. fuit æqualis numero 340 — 1 8. erit quoque æquatio inter 1 A 8. & 340 — $\frac{49 \times 8}{36}$, quandoquidem 1 8. inuentus fuit æqualis numero $\frac{49 \times 8}{36}$. Additis igitur $\frac{49 \times 8}{36}$. vtrobiq; , erit æquatio inter 1 A 8 + $\frac{49 \times 8}{36}$, & 340. Cum ergo 1 A 8. faciat $\frac{1}{4}$ A 8. (quod $\frac{1}{4}$ 8. & 1. euales sint numeri.) erit æquatio inter $\frac{1}{4}$ A 8. & 340. Diuisis ergo 340. per $\frac{1}{4}$ 8. fiet 1 A 8. 144. cuius radix 12. erit vnus numerorum, nimirum summa pecuniæ minor, pro qua posuimus 1 A, cuius quadratum 1 A 8. Quia vero quadratum maioris summe fuit 340 — 1 A 8. Si pretium 1 A 8. nimirum 144. dematur ex 340. reliquum fiet quadratum maioris summe 196. cuius radix est 14. alter numerorum, nimirum maior summa, quam posuimus 1 2e. Itaq; primus habet 14. aur. & secundus 12. Quadrati enim horum numerorum 196. 144. faciunt 340. & ex 14. in 12. fit numerus 168. hoc est, $\frac{1}{2}$. maioris quadrati 195.

60 Tres socij habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberem 100. aur. Secundus vero dicit tertio, si mihi dares $\frac{1}{3}$. tua pecunie, haberem 100. aur. Tertius denique dicit primo, si mihi dares $\frac{1}{4}$. tua pecunia, haberem 100. aur. Quaritur, quantum quisque eorum habeat.

LX.

PONATVR primi pecunia 1 2e. aur. secundæ 1 A. aur. & tertij 1 B. aur. Primus ergo cum $\frac{1}{2}$. secundi habebit 1 2e + $\frac{1}{2}$ A. qui nu-

X x

merus

merus æqualis est 100. aur. Demptra ergo 1 2e vtrunque, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A. & 100 aur. — 1 2e. ideog. & inter dupla, nimirum inter 1 A, & 100 aur. — 2 2e. Atque ita pro secundo, loco 1 A, pono 100 aur. — 2 2e. qui secundus cum $\frac{1}{2}$. tertij, habebit 100 aur. — 2 2e + $\frac{1}{2}$ B, qui numerus etiam æqualis est 100 aur. Additis ergo 2 2e vtrobique, erit æqualitas inter 100 aur. + $\frac{1}{2}$ B, & 100 aur. + 2 2e. Et ablatis 100 vtrobique, inter 100 aur. + $\frac{1}{2}$ B, & 2 2e. Et rursum ablatis 100 vtrunque, inter $\frac{1}{2}$ B, & 2 2e — 100. ideog. & inter tripla, nimirum inter 1 B, & 6 2e — 100 aur. Atque ita pro tertio. loco 1 B, pono 6 2e — 100 aur. Hic tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, id est, cū $\frac{1}{2}$ 2e. habebit 6 $\frac{1}{2}$ 2e — 100. numerum etiam æqualem 100 aur. Additis igitur 100 vtrobique, erit æquatio inter 6 $\frac{1}{2}$ 2e. & 400. Diuisis ergo 400 per 6 $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 64. atque tot aureos habet primus. Secundus autem, qui inuentus est habere 100 — 2 2e habet aur. 72. Tertius denique, qui deprehensus est habere aur. 6 2e — 100. habet 84 aur. Ita enim tam primus 64. cum $\frac{1}{2}$. secundi 72. id est, cum 36. quam secundus 72. cum $\frac{1}{2}$. tertij 84. id est, cum 18. quam tertius 84. cum $\frac{1}{2}$. primi 64. id est, cum 16. habebit 100 aur.

LXI.

61 Tres habent pecuniam. Primus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. dupla mea summa. Secundus dicit reliquis, si adhuc haberetis 100. aur. esset summa vestrorum aur. mea summa tripla. Tertius reliquis dicit, si adhuc haberetis 100. aur. summa vestrorum aur. esset summa mea quadrupla. Quaritur, quantum quisque habeat.

PONATUR primi pecunia 1 2e, & aliorum duorum simul 1 A. Hi duo cum 100 aur. habebunt summam duplam pecuniz primi. Ergo æquatio erit inter 2 2e. & 1 A + 100. Et ablatis 100 vtrobique, inter 2 2e — 100. & 1 A. ac proinde secundus, ac tertius, qui ponuntur habere 1 A, habebunt 2 2e — 100. Et si addatur summa primi, quæ est 1 2e, erit summa omnium trium 3 2e — 100.

Ponatur deinde summa secundi 1 B. habebuntq. propterea primus ac tertius 3 2e — 100 — 1 B, quandoquidem omnes tres habent 3 2e — 100. Et quia summa primi ac tertij, vnâ cum 100 aur. tripla est summe secundi; erit æquatio inter 3 2e — 1 B. (Nam si addantur 100. ad 3 2e — 100 — 1 B, fit summa 3 2e — 1 B) & 3 B. Addita igitur 1 B, vtrunque, erit æqualitas inter 3 2e & 4 B: atque idcirco & inter subquadrupla, hoc est, inter $\frac{1}{2}$ 2e. & 1 B. ac proinde secundus, qui habet 1 B, habebit $\frac{1}{2}$ 2e.

Denique pro summa tertij ponatur 1 C. habebuntq. propterea, reliqui duo 3 2e — 100 — 1 C, quandoquidem omnes tres habent 3 2e — 100 aur. Et quoniam summa primi ac secundi, vnâ cum 100

aur.

aur. quadrupla est summæ tertij, erit æquatio inter $3\text{ }2\text{e} = 1\text{ }C$. (Nam si addantur 100. ad $3\text{ }2\text{e} = 100 = 1\text{ }C$, sit summa $3\text{ }2\text{e} = 1\text{ }C$.) & 4 C. Additaq. 1 C. vtrinq. erit æquatio inter $3\text{ }2\text{e}$. & 5 C. ideoq. & inter subquintupla, hoc est, inter $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$. & 1 C. ac proinde tertius habebit $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$.

Itaque cum primus habeat 1 2e. secundus $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$, & tertius $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$, habebunt omnes tres simul 1 $\frac{7}{5}\text{ }2\text{e}$. siue $\frac{17}{5}\text{ }2\text{e}$. Habebant autem omnes tres simul etiam $3\text{ }2\text{e} = 100$. Est igitur æquatio inter $\frac{17}{5}\text{ }2\text{e}$. siue $1\text{ } \frac{7}{5}\text{ }2\text{e}$. & $3\text{ }2\text{e} = 100$. Additisq. 100 vtrinq. inter $1\text{ } \frac{7}{5}\text{ }2\text{e} + 100$. & $3\text{ }2\text{e}$. Ablatisq. $1\text{ } \frac{7}{5}\text{ }2\text{e}$ vtrobique, inter 100. & $\frac{17}{5}\text{ }2\text{e}$. Diuisis igitur 100 per $\frac{17}{5}$. fiet 1 2e. 153 $\frac{1}{5}$ aur. pecunia primi. Secundus autem habens $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$. habebit 115 $\frac{1}{5}$. Et tertius habens $\frac{1}{5}\text{ }2\text{e}$ habebit 92 $\frac{1}{5}$. Nam secundus ac tertius vnâ cum 100. habebunt 307 $\frac{1}{5}$. qui numerus duplus est numeri 153 $\frac{1}{5}$. quem habet primus. Item primus ac tertius vnâ cum 100. habebunt 346 $\frac{1}{5}$. qui numerus triplus est numeri 115 $\frac{1}{5}$. quem habet secundus. Secundus denique ac primus, vnâ cum 100. habebunt 369 $\frac{1}{5}$ aur. qui numerus quadruplus est numeri 92 $\frac{1}{5}$. quem habet tertius.

62 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si habuc haberem 100. aur. fieret mea summa aqualis duabus summis vestris. Secundus reliquis dicit, si haberem aabuc 100. aur. summa mea esset vestra summa dupla. Tertius denique ait ad reliquos, si aabuc haberem 100. aur. summa mea fieret summa vestra tripla. Quaritur, quantum quisque habeat.*

LXII.

PONATUR primi summa 1 2e. Ergo cum 100. habebit 1 2e + 100 ac tanta erit summa secundi & tertij, omnesq. tres habebunt 2 2e + 100. Ponatur summa secundi 1 A. Ergo cum 100. habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summæ primi ac tertij, quæ est 2 2e + 100 = 1 A. (quia cum omnes tres habeant 2 2e + 100. si tollatur 1 A, summa videlicet secundi, remanebit summa primi ac tertij 2 2e + 100 = 1 A.) Ac proinde æquatio erit inter 1 A + 100. & 4 2e + 100 = 1 A. Additisq. 1 A, vtrobique, inter 3 A + 100. & 4 2e + 100. Et ablatis 100. vtrinq. inter 3 A. & 4 2e + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit æquatio inter 1 A. & $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + \frac{100}{3}$. Ac proinde cum secundus positus sit habere 1 A, erit eius summa $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + \frac{100}{3}$. Ponatur denique summa tertij 1 B. Ergo cum 100. habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summæ primi ac secundi, quæ est $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + \frac{100}{3}$. conflata ex 1 2e summa primi, & $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + \frac{100}{3}$ summa secundi. Igitur æquatio erit inter 1 B + 100. & $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + \frac{100}{3}$. hoc est, inter 1 B. & $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e} + 100$. Ablatisq. 100. vtrobique, inter 1 B. & $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e}$. Ac proinde tertij summa, quæ posita fuit 1 B, erit $\frac{4}{3}\text{ }2\text{e}$.

X x 2

Itaq.

Itaq. cum primus habeat $1\frac{1}{2}$, secundus $\frac{2}{3}$ & tertius $\frac{1}{3}$, habebunt omnes tres $9\frac{1}{6}$ & $1\frac{1}{2}$. Habebant autem omnes tres etiam $1\frac{1}{2}$ & 100 . Est igitur aequatio inter $9\frac{1}{6}$ & $1\frac{1}{2}$ & 100 . Ablatisq. $1\frac{1}{2}$ utrobique, inter $7\frac{1}{6}$ & $99\frac{1}{2}$. Ablatisq. rursum $1\frac{1}{2}$, hoc est, $33\frac{1}{6}$, utrobique, inter $7\frac{1}{6}$ & $66\frac{1}{6}$. Diuisis igitur $66\frac{1}{6}$ per $7\frac{1}{6}$, fiet $9\frac{1}{6}$ summa primi. Secundus autem habens $1\frac{1}{2}$ & $33\frac{1}{6}$, habebit $45\frac{1}{6}$. Tertius denique habens $\frac{1}{3}$ habebit $63\frac{1}{6}$. Ita namq. primus cum 100 , faciet $109\frac{1}{6}$ summam æqualem summæ secundi ac tertij. Secundus vero cum 100 , faciet summam $145\frac{1}{6}$, duplam summæ primi ac tertij. Tertius denique cum 100 , faciet $163\frac{1}{6}$ summam triplam summæ primi ac secundi.

LXIII.

63 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. haberem summam æqualem reliquæ vestra summa. Secundus reliquis dicit, si de vestra summa remoueretis 100. aur. esset mea summa reliquæ vestra dupla. Tertius denique dicit reliquis, si de vestra summa remoueretis 100. aur. mea summa esset reliquæ vestra summa tripla. Queritur vnus cuiusque summa.

PONATUR primi pecunia $1\frac{1}{2}$. Ergo reliqui duo simul habebūt $1\frac{1}{2}$ & 100 , vt amotis 100 , habeant reliquam summam æqualem summæ primi. Omnesq. tres simul habebunt $1\frac{1}{2}$ & 100 .

Ponatur pecunia secundi 1 A. quæ dupla est pecunia primi ac tertij, si remoueant 100 aur. Habent autem primus ac tertius $1\frac{1}{2}$ & 100 — 1 A. (cum enim omnes tres habeant $1\frac{1}{2}$ & 100 , si dematur 1 A, summa secundi, reliqua fiet summa primi ac tertij $1\frac{1}{2}$ & 100 — 1 A.) & amotis 100 , habebunt $1\frac{1}{2}$ — 1 A. cuius numeri dupla est 1 A, summa secundi. Ergo aequatio erit inter $4\frac{1}{2}$ & 2 A. & 1 A. ut additis 2 A. utrinque, inter $4\frac{1}{2}$, & 3 A. Et omnibus diuisis per 3 , inter $\frac{3}{2}$ & 1 A. Ac proinde summa secundi, quem posuimus habere 1 A, erit $\frac{3}{2}$.

Ponatur denique summa tertij 1 B, quæ tripla est summa primi ac secundi, si remoueant 100 aur. Habent autem primus & secundus $\frac{3}{2}$ & amotis 100 , habebunt $\frac{3}{2}$ — 100 , cuius numeri triplum $\frac{9}{2}$ & 300 , æquale erit summæ tertij 1 B. Ergo tertius habet $7\frac{1}{2}$ — 300 .

Itaq. cum primus habeat $1\frac{1}{2}$, secundus $\frac{3}{2}$, & tertius $7\frac{1}{2}$ — 300 , habebunt omnes tres simul $9\frac{1}{2}$ — 300 . Habebant autem omnes tres quoque simul $1\frac{1}{2}$ & 100 . Aequatio ergo est inter $9\frac{1}{2}$ — 300 , & $1\frac{1}{2}$ & 100 . Additisq. 300 , utrinque inter $9\frac{1}{2}$, & $1\frac{1}{2}$ & 400 . Ablatisq. $1\frac{1}{2}$, utrobique, inter $7\frac{1}{2}$, & 400 . Diuisis ergo 400 , per $7\frac{1}{2}$, fiet $1\frac{1}{2}$ & $54\frac{1}{6}$ pecunia primi. Secundus vero habens $\frac{3}{2}$ habet

habebit $72 \frac{1}{2}$. Et tertius habens $72 \frac{1}{2} + 300$, habebit $81 \frac{1}{2}$, quod probatur. Nam si ex $154 \frac{1}{2}$, summa secundi ac tertij, reijciantur 100, remanebit summa $54 \frac{1}{2}$, æqualis summæ primi. Et si ex $136 \frac{1}{2}$ summæ primi ac tertij, abijciantur 100, reliqua erit summa $36 \frac{1}{2}$, subdupla summæ secundi $72 \frac{1}{2}$. Si denique ex $127 \frac{1}{2}$, summa primi ac secundi remoueat 100, remanebit summa $27 \frac{1}{2}$, subtripla summæ tertij $81 \frac{1}{2}$.

64 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si de mea summa remouerem 100, aur. summa vestra esset reliqua mea summa quadrupla. Secundus dicit reliquis, si de mea summa abijcerem 100, aur. vestra summa esset reliqua mea summa tripla. Denique tertius reliquis dicit, si de mea summa anferrem 100, aur. esset vestra summa reliqua mea summa dupla. Quæritur vniuscuiusque summa.

LXIII.

PONATUR pecunia primi $12 + 100$. Ergo secundus ac tertius habebunt 42 . vt hæc summa quadrupla sit summæ primi, si prius abiecerit 100, aur. omnesq. tres habebunt $52 + 100$.

Ponatur deinde pecunia secundi $1A + 100$, vt abiectis 100, reliqua summa $1A$, sit subtripla summæ primi ac tertij: quæ est $52 + 100 = 1A + 100$. ita vt æquatio sit inter $3A$, & $52 + 100 = 1A + 100$. Et addita $1A + 100$, vtinque, inter $4A + 100$, & $52 + 100$. Ablatisq. 100 vtrobique, inter $4A$, & 52 . Diuisisq. his duobus numeris per 4, erit æquatio inter $1A$, & 13 . Cum ergo secundus positus sit habere $1A + 100$, habebit $132 + 100$.

Ponatur denique summa tertij $1B + 100$, vt abiectis 100, reliqua summæ sit subdupla summæ primi ac secundi: quæ est $212 + 100$, ita vt æquatio sit inter $2B$, & $212 + 100$. Diuisis ergo omnibus per 2, erit $1B$, æqualis $106 + 100$. Cum ergo tertius positus sit habere $1B + 100$, habebit $206 + 100$.

Itaque cum primus habeat $12 + 100$, Secundus $132 + 100$, & tertius $206 + 100$, habebunt omnes tres simul $340 + 100$. Hæbebant autem omnes tres etiam simul $52 + 100$. Acquatio igitur est inter $340 + 100$, & $52 + 100$. Ablatisq. 100 vtrobique, inter $340 + 100$, & 52 . Et rursus ablati $340 + 100$ vtinque, inter 300 , & 132 . Diuisis igitur 300, per 13 , fiet 12 , $184 \frac{1}{2}$. Primus ergo qui positus est habere $12 + 100$, habebit $184 \frac{1}{2}$ aur. Secundus vero habens $132 + 100$, habebit $310 \frac{1}{2}$ aur. Tertius denique habens $206 + 100$, habebit $407 \frac{1}{2}$ aur, quod probatur. Nam si primus remoueat 100, de sua summa, erit reliquus numerus $184 \frac{1}{2}$, subquadruplus summæ secundi ac tertij, quæ est $738 \frac{1}{2}$. Et si secundus de summa abijciat 100, erit reliquus numerus $210 \frac{1}{2}$, subtriplus summæ primi ac tertij, quæ est $691 \frac{1}{2}$. Denique si tertius de

sua

sua summa remoueat 100. erit reliquus numerus $307 \frac{1}{11}$. subduplus summx primi ac secundi, quæ est $615 \frac{1}{11}$.

LXV.

65 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam meam reliquæ summæ quintuplam. Secundus dicit reliquis, si vobis darem 100. aur. fieret vestra summa reliquæ meæ summæ sextupla. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem 100. aur. faceretis summam reliquæ meæ summæ septuplam. Queritur vniuscuiusque summa.

LXXI

PONATUR pecunia primi $12 + 100$. Ergo reliqui duo habebunt $52 - 100$. vt si primus eis det 100. habebunt 52 . numerum videlicet quintuplum reliqui numeri primi. Omnesq. tres simul habebunt 62 .

Ponatur secundi pecunia $1A + 100$. vt postquam alijs duobus dederit 100. reliqua $1A$, sit subsextupla summx aliorum cum illis 100. aur. quos a secundo acceperunt. Habent autem primus ac tertius $62 - 1A + 100$. ac propterea cum 100. aur. secundi habebunt $62 + 100 - 1A + 100$. qui numerus septicuplus est $1A$, hoc est æqualis $6A$. Additis ergo $1A + 100$. vtroque erit æquatio inter $62 + 100$. & $7A + 100$. Ablatisq. 100. vtroque, inter 62 . & $7A$. Diuisisq. duobus hisce numeris per 7. erunt $\frac{2}{7}2$. æquales $1A$. Ergo secundus, quem posuimus habere $1A + 100$. habebit $\frac{2}{7}2 + 100$.

Ponatur denique pecunia tertij $1B + 100$. vt postquam alijs duobus dederit 100. aur. reliqua $1B$, sit subseptupla summx primi, ac secundi vna cum 100. aur. quos a tertio acceperunt. Habent autem primus ac secundus $\frac{2}{7}2 + 100$. ideoq. cum 100. aur. tertij habebunt $\frac{2}{7}2 + 100 + 100$. qui numerus septuplus est $1B$, hoc est, æqualis $7B$. Diuisisq. $\frac{2}{7}2 + 100$. & $1B$. Ergo tertius, quem posuimus habere $1B + 100$. habebit $\frac{2}{7}2 + 100$.

Itaque cum primus habeat $12 + 100$. Secundus $\frac{2}{7}2 + 100$. & tertius $\frac{2}{7}2 + 100$. habebunt omnes tres simul $2\frac{2}{7}2 + 300$. Habebant autem & omnes tres simul 62 . Est igitur æqualitas inter $2\frac{2}{7}2 + 300$. & 62 . Ablatisq. $2\frac{2}{7}2$ vtrunque inter 300 . & 62 . Diuisis igitur 238 per $3\frac{2}{7}$. fiet 12 . $88 \frac{1}{7}$. Primus ergo, cui dedimus $12 + 100$. habebit $188 \frac{1}{7}$. Secundus autem, qui inuenitus est habere $\frac{2}{7}2 + 100$. habebit $177 \frac{1}{7}$. Tertius denique habens $\frac{2}{7}2 + 100$. habebit $166 \frac{1}{7}$. quod probatur. Nam si primus det 100. aur. alijs duobus, habebunt alij duo $442 \frac{1}{7}$. qui numerus quintuplus est reliquæ summx primi $88 \frac{1}{7}$. Et si secundus alijs duobus det 100. aur. habebunt alij duo $414 \frac{1}{7}$. qui numerus

numerus sextuplus est summæ reliquæ secundi $75 \frac{1}{4}$. Denique si tertius alijs duobus det. 100. aur. habebunt alij duo $464 \frac{1}{4}$. qui numerus septuplus est reliquæ summæ tertij $66 \frac{1}{4}$.

66 *Tres pecuniam habent. Primus reliquis dicit, si vos daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestra summa reliquæ aequalis. Secundus reliquis dicit, si daretis mihi 100. aur. fieret mea summa vestra summa reliquæ dupla. Tertius denique dicit reliquis, si mihi daretis 100. aur. fieret mea summa reliquæ vestra summa tripla. Quaritur uniuscuiusque summa.*

III VI
LXVI.

PONATUR pecunia primi 1 2e. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus habebit 1 2e + 100. ac tantundem habebunt tunc alij duo. atque idcirco antequam dederint 100. aur. habuerunt 1 2e + 200. Omnesq. tres habebunt 2 2e + 200.

Ponatur pecunia secundi 1 A. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summæ reliquæ primi, ac tertij, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est 2 2e + 200 = 1 A. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt 2 2e + 100 = 1 A. Huius ergo duplum 4 2e + 100 = 2 A, æquale erit 1 A + 100. Et additis 2 A, utrobique, æquatio erit inter 4 2e + 200. & 3 A. + 100. Et ablatis 100. utrinque, inter 4 2e + 100. & 3 A. Diuisisq. duobus hæc numeris per 3. erit æquatio inter $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. & 1 A. Secundus ergo habet $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. quoniam posuimus eum habere 1 A.

Ponatur denique pecunia tertij 1 B. qui si acceperit 100. aur. ab alijs duobus, habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summæ reliquæ primi ac secundi, quæ antequam dederint 100. aur. alijs duobus, est $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. & postquam dederint 100. aur. alijs duobus, habebunt $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. Huius ergo triplum 7 2e + 200 æquale est 1 B + 100. Et additis 200. utrinque, æqualitas erit inter 7 2e, & 1 B + 300. Ablatisq. 300 utrobique, inter 7 2e = 300. & 1 B. Tertius igitur, quem posuimus habere 1 B, habebit 7 2e = 300.

Itaq. cum primus habeat 1 2e. Secundus $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. & tertius 7 2e = 300. habebunt omnes tres simul $9 \frac{1}{3}$ 2e = $\frac{100}{3}$. Habebant autem & omnes simul 1 2e + 200. Est ergo æqualitas inter $9 \frac{1}{3}$ 2e = $\frac{100}{3}$. & 1 2e + 200. Ablatisq. 2 2e utrobique, inter $7 \frac{1}{3}$ 2e = $\frac{100}{3}$. & 200. Additisq. $\frac{100}{3}$ utrinque, inter $7 \frac{1}{3}$ 2e, & $\frac{1400}{3}$. Diuisis igitur $\frac{1400}{3}$ per $7 \frac{1}{3}$. fiet 1 2e. $63 \frac{1}{3}$. pecunia primi. Secundus vero, qui inuentus est habere $\frac{4}{3}$ 2e + $\frac{100}{3}$. habebit 118 $\frac{1}{3}$. Tertius denique, quem inuenimus habere 7 2e = 300. habebit 145 $\frac{1}{3}$. quod probatur. Nam primus cum 100. habebit summam 163 $\frac{1}{3}$. æqualem summæ reliquorum, si prius dederint 100. aur. Secundus vero cum 100. faciet summam 118 $\frac{1}{3}$. duplam reliquorum summæ, postquam

III VI

quam 100. aur. dederint. Tertius denique cum 100. faciet summam
245 $\frac{1}{4}$. triplam summæ reliquorum, postquam dederint 100. aur.

- LXVII. 67 *Tres habent pecuniam. Dicit primus reliquis. Si mihi daretis $\frac{1}{2}$. vestra summa, haberem 100. aur. Secundus vero dicit reliquis, si mihi daretis $\frac{1}{2}$. vestra summa, haberem 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si mihi daretis $\frac{1}{2}$. vestra summa, haberem 100. aur. Quaritur pecunia uniuscuiusque.*

PONATUR pecunia primi 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. Ergo reliqui duo habebunt $\frac{1}{2}$ 2e. Ita enim si dent $\frac{1}{2}$. nimirum $\frac{1}{2}$ 2e, primo, habebit primus 100. aur. Omnesq. tres simul habebunt 100 + $\frac{1}{2}$ 2e.

Ponatur secunda pecunia 1 A, habebuntq. primus ac tertius 100 + $\frac{1}{2}$ 2e — 1 A, qui si secundo dent $\frac{1}{2}$. nimirum $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{2}$ 2e — $\frac{1}{2}$ A. habebit secundus 1 A + $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{2}$ 2e — $\frac{1}{2}$ A, hoc est, $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{2}$ 2e qui numerus æqualis est 100. aur. Si ergo auferantur $\frac{1}{2}$ 2e. utrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ 2e, & $\frac{1}{2}$ 2e. Ablatisq. $\frac{1}{2}$ 2e vtrinque, inter $\frac{1}{2}$ A, & $\frac{1}{2}$ 2e — $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisisq. duobus hisce numeris per $\frac{1}{2}$. erit æqualitas inter 1 A, & 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. Secundus ergo habebit 100 — $\frac{1}{2}$ 2e.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quia primus ac secundus habent 200 — $\frac{1}{2}$ 2e. si tertius dent $\frac{1}{2}$. nimirum 50 — $\frac{1}{2}$ 2e. habebit tertius 1 B + 50 — $\frac{1}{2}$ 2e, qui numerus æqualis est 100. aur. Ablatisq. 50. vtrinque, erit æqualitas inter 1 B — $\frac{1}{2}$ 2e, & 50. Additisq. $\frac{1}{2}$ 2e utrobique, inter 1 B, & 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. Tertius igitur habebit 50 + $\frac{1}{2}$ 2e.

Itaq. cum primus habeat 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. Secundus 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. & tertius 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. habebunt omnes tres simul 250 — $\frac{1}{2}$ 2e. Habebant autem omnes tres simul etiam 100 + $\frac{1}{2}$ 2e. Est igitur æquatio inter 250 — $\frac{1}{2}$ 2e. & 100 + $\frac{1}{2}$ 2e. Additisq. $\frac{1}{2}$ 2e utrobique, inter 250. & 100 + $\frac{1}{2}$ 2e. Ablatisq. 100 vtrinque, inter 150. & $\frac{1}{2}$ 2e. Diuisis igitur 150. per $\frac{1}{2}$. fiet 1 2e. 70 $\frac{1}{4}$. Primus igitur habens 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. habebit 29 $\frac{1}{4}$. Secundus autem habens 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. habebit 64 $\frac{1}{4}$. Tertius denique habens 50 + $\frac{1}{2}$ 2e. habebit 76 $\frac{1}{4}$. Nam tam primus cum $\frac{1}{2}$ summæ reliquorum duorum, quam secundus cum $\frac{1}{2}$. summæ aliorum duorum, & quam tertius cum $\frac{1}{2}$. summæ aliorum duorum habet 100. aur.

- LXVIII. 68 *Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. mea summa, haberetis 100. aur. Secundus vero reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. mea summa, haberetis 100. aur. Tertius denique reliquis dicit, si vobis darem $\frac{1}{2}$. mea pecunia, haberetis 100. aur.*

V E L

Secundus, ac tertius dicunt primo, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. At primus, ac tertius dicunt secundo, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. Denique primus, ac secundus dicunt tertio, si nobis dares $\frac{1}{2}$. tua pecunia, haberemus 100. aur. Queritur cuiuscuiusque summa.

PONATUR pecunia primi 1 2e. Ergo reliqui duo habebunt 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. vt accipientes $\frac{1}{2}$. primi, nimirum $\frac{1}{2}$ 2e. habeant 100. Omnesq. tres habebunt $\frac{1}{2}$ 2e + 100.

Ponatur pecunia secundi 1 A, eritq. summa primi ac tertij $\frac{1}{2}$ 2e + 100 — 1 A. Et si acceperint $\frac{1}{2}$. secundi, nimirum $\frac{1}{2}$ A, habebunt $\frac{1}{2}$ 2e + 100 — 1 A + $\frac{1}{2}$ A, qui numerus æqualis est 100. Additis ergo 1 A, vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ 2e + 100 + $\frac{1}{2}$ A, & 100 + 1 A. Ablatisq. 100 vtrunque, inter $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{2}$ A. & 1 A. Et rursus ablata $\frac{1}{2}$ A, vtrobique, inter $\frac{1}{2}$ 2e, & $\frac{1}{2}$ A. Diuisioq. vtroque numero per $\frac{1}{2}$. inter $\frac{1}{2}$ 2e. & 1 A. Habet ergo secundus $\frac{1}{2}$ 2e.

Ponatur pecunia tertij 1 B. Et quoniam primus & secundus habent $\frac{1}{2}$ 2e. Si acceperint $\frac{1}{2}$. tertij, habebunt $\frac{1}{2}$ 2e + $\frac{1}{2}$ B. summam æqualem 100 aur. Ablatisq. $\frac{1}{2}$ 2e vtrobique, erit æquatio inter $\frac{1}{2}$ B. & 100 — $\frac{1}{2}$ 2e. Diuiso ergo vtroque numero per $\frac{1}{2}$. erit 1 B, æqualis 400 — 7 2e. Tertius ergo habet 400 — 7 2e.

Itaq. cum primus habeat 1 2e. secundus $\frac{1}{2}$ 2e, & tertius 400 — 7 2e. habebunt omnes tres 400 — $\frac{3}{2}$ 2e. Habebant autem & omnes simul $\frac{1}{2}$ 2e + 100. Si igitur vtrunque addantur $\frac{3}{2}$ 2e. erit æqualitas inter 400. & $\frac{3}{2}$ 2e + 100. Ablatisq. 100 vtrobique, inter $\frac{3}{2}$ 2e. & 300. Diuisis igitur 300 per $\frac{3}{2}$. fiet 1 2e. 52 $\frac{1}{2}$. pecunia primi. Secundi pecunia, qui inuentus est habere $\frac{1}{2}$ 2e. erit 39 $\frac{1}{2}$. aur. Tertius denique habens 400 — 7 2e. habebit 34 $\frac{1}{2}$ aur. quod probatur. quia tam secundus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. primi, quam primus ac tertius cum $\frac{1}{2}$. secundi, & quam primus & secundus cum $\frac{1}{2}$. tertij habent 100. aur.

69 *Tres mercatores Societatem ineunt per 12. menses. Primus imponit 100. aur. Secundus 200. aur. & tertius 300. aur. Post menses autem duos imponit primus aliquot libras piperis, cuius 3. libræ valent 1. aur. Et post menses quatuor secundus imponit massam argenti, cuius 1. marca valet 7. aur. Transactis 12. mensibus, recipit primus ex lucro 50. aur. secundus 110. aur. & tertius 90. aur. ita vt totum lucrum fuerit*

LXIX.

250. aur. *Quaritur, quot libras piperis primus imposuerit, & quot marcas argenti secundus.*

PONE primum imposuisse 1 2e librarum piperis: Et secundum 1 A, marcarum argenti. Cum ergo tres libræ piperis valeant 1 aur. valebit 1 2e lib. aur. $\frac{1}{2}$ 2e. Et cum 1. marca argenti valeat 7 aur. valebit 1 A marcarum aur. 7 A, vt hic vides.

| lib. | aur. | lib. | aur. |
|-------|------|-------|------------------|
| 3 | 1 | 1 2e | $\frac{1}{2}$ 2e |
| Marca | aur. | Marc. | aur. |
| 1 | 7 | 1 A | 7 A |

Et quia pecunia cuiusque multiplicanda est in tempus, si 100. aur. primi ducantur in 12. mens. fiet numerus 1200. Et ex 200. aur. secundi in 12. mens. fiet numerus 2400. & ex 300. aur. tertij in 12. mens. fiet numerus 3600. Rursus ex $\frac{1}{2}$ 2e. primi in 10. mens. quibus in Societate stetit, (nam post duos menses imposuit $\frac{1}{2}$ 2e. aur. hoc est, 1. lib. piperis) fiet numerus $\frac{1}{2}$ 2e. aur. Et ex 7 A, in 8. mens. quibus in commercio steterunt, (nam post 4. mens. imposuit 1 A, marc. quæ valet 7 A) fiet numerus 56 A marc. Igitur numerus primi est 1200 + $\frac{1}{2}$ 2e. Secundi 2400 + 56 A marc. & tertij 3600, qui tres numeri faciunt 7200 + $\frac{1}{2}$ 2e + 56 A. Vnde sic stabit exemplum ad regulam Trium ter repetitam.

$$7200 + \frac{1}{2} 2e + 56 A \quad 250 \quad \begin{cases} 1200 + \frac{1}{2} 2e & 50 \\ 2400 + 56 A & 110 \\ 3600 & 90 \end{cases}$$

hoc est, si 7200 + $\frac{1}{2}$ 2e + 56 A, lucrantur 250. aur. quid lucrantur aur. 1200 + $\frac{1}{2}$ 2e. & quid aur. 2400 + 56 A. & quid aur. 3600? Erunt autem lucra aur. 50, 110, & 90. vt in quaestione positum est. Ergo tantum fiet ex primo numero in quartum, quantum ex secundo in tertios. Fit autem ex primo in quartum 90. numerus 648000 + 300 2e + 5040 A. qui æqualis erit numero 900000. qui fit ex secundo 250. in tertium 3600. Ablatis igitur 648000. vtrobique, erit æquatio inter 300 2e + 5040 A. & 252000. Et ablatis 300 2e vtrunque, inter 5040 A. & 252000 — 300 2e. Diuisisq. duobus hisce numeris per 5040. fiet 1 A, 50 — $\frac{1}{2}$ 2e. Ac prouide 56 A facient 2800 — 3 $\frac{1}{2}$ 2e. quibus additis ad 7200 + $\frac{1}{2}$ 2e. siue + 3 $\frac{1}{2}$ 2e. fiet numerus 10000. qui primum locum obtinebit in regula trium, pro numero 7200 + $\frac{1}{2}$ 2e + 56 A. vt alios etiam numeros Cossicos resolvere possis, vt hic cernis.

| | | | |
|-------|-----|----------------|-----|
| 10000 | 250 | 1100 + 12 2e ? | 50 |
| | | 1400 + 56 A ? | 110 |
| | | 3600 ? | 90 |

Nam ex 10000. in 110. fit numerus 1100000. æqualis numero 600000 + 14000 A, facto ex 250. in 1400 + 56 A. Ablatis ergo 600000. vtrunque, erit æqualitas inter 500000. & 14000 A. Diuisiq. duobus hñce numeris per 14000. fiet 1 A, 35 $\frac{1}{2}$ marc. argenti. Denique ex 10000. in 50. fit numerus 500000. æqualis numero 300000 + 20000 2e. facto ex 250. in 1200 + 12 2e. Ablatis ergo 300000. vtrobique, erit æqualitas inter 200000. & $\frac{20000}{12}$ 2e. Diuisiq. 200000. per $\frac{20000}{12}$ 2e. fiet 1 2e. 140. libræ piperis. quod probatur sic. 35 $\frac{1}{2}$ mar. argenti valebunt aur. 250. & 140. lib. piperis aur. 80. vt hic vides.

| | | | |
|-------|------|--------------------|------|
| Marcæ | aur. | Marcæ | aur. |
| 1 | 7 | 35 $\frac{1}{2}$? | 250 |
| Lib. | aur. | Lib. | aur. |
| 3 | 1 | 240 ? | 80 |

Et quia aurei 250. steterunt in commercio 8. menses: ductis 250 in 8. fit numerus 2000. qui addendus est ad 1400. loco 56 A. vt numerus tertius in medio fit 4400. Item quia aur. 80. steterunt in commercio 10. menses: ductis 80. in 10. fit numerus 800. qui ad 1200. addendus est loco 12 2e. vt numerus tertius in supremo loco fit 2000. Vnde sic denuo stabit exemplum.

| | | | |
|-------|-----|--------|-----|
| 10000 | 250 | 1000 ? | 50 |
| | | 4400 ? | 110 |
| | | 3600 ? | 90 |

Vbi vides, tres numeros tertios facere 10000. primum numerum regulæ Trium: eosdemq. lucrificare 50. 110. & 90. &c.

70 Tres mercatores ineunt Societatem. Primus imponit 35. aur. amplius, quam secundus. At secundus, ac tertius simul imponunt 84. aur. Lucrum commune est 66. aur. ex quibus tertius pro parte sui lucri recipit aur. 21. Quæstio est, quantum quisque imposuerit, & quantum tam primus, quam secundus de lucro receperit.

LXX.

PONE, primum imposuisse 1 2e + 35. aur. Secundum 1 2e.
Y y 2 aur.

aur. vt primus ultra huius summam imposuerit præterea 35. aur. Et tertium aur. 84 — 1 2e. vt summa secundi ac tertij faciat 84. aur. Deinde ponatur lucrum primi 1 A; & secundi 1 B. Et quoniam lucrum tertij est 21.aur. sic statib exemplum.

a 19. septimi

Et quoniam tantum fit ex primo numero in quartum, quantum ex secundo in tertium: Fit autem numerus 2499 + 21 2e. ex primo 119 + 1 2e in quartum infimum: Et ex secundo 66. in tertium infimum 84 — 1 2e. fit numerus 5544 — 66 2e. qui illi æqualis est. Additis igitur 66 2e vtrique; fiet æquatio inter 2499 + 87 2e. & 5544. Et ablatis 2499. vtroque, inter 87 2e. & 3045. Diuisis ergo 3045. per 87. fiet 1 2e. 35. ac proinde primus imposuit 70. aur. nimirum 1 2e + 35. Et secundus 35. nimirum 1 2e. Et tertius 49. nimirum 84 — 1 2e. Et primus numerus regulæ erit 154. Ergo iam ita statib exemplum.

Ex 154. in 1 A, fit numerus 154 A, æqualis numero 4620. facto ex 66. in 70. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 A, 30. Item ex 154. in 1 B, fit numerus 154 B, æqualis numero 2370. facto ex 66. in 35. Diuiso ergo vtroque numero per 154. fiet 1 B, 15. Recepit ergo primus de lucro 30. aur. & secundus 15. aur. quod ita probatur.

154 66 { 70? 30
 35? 15
 49? 21

A E N I G M A T A V A R I A

ad figuras Geometricas pertinentia.

Cap. XXXII.

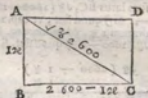


N extremo hoc cap. reducentur ad vsum omnia ferè illa, quæ de numeris Irrationalibus præcepta sunt: quippe cum ænigmata proponenda sint varia de figuris Geometricis, in quibus plerunque latera, diametri, atque arcæ per numeros, surdos explicari solent. Horum ænigmatum primum sit hoc.

I. *Est rectangulum quoddam altera parte longius ABCD, cuius area continet palmos 120. diameter vero palm. $\sqrt{8}$ 2600. Quaruntur latera.*

I.

* QVONIAM quadrata laterum AB, BC, æqualia sunt quadrato a 47. primi. diametri AC. quod est 2600. si quadratum lateris AB, ponatur $1\frac{1}{2}$, erit quadratum lateris BC, $2600 - 1\frac{1}{2}$. Ergo latera ipsa erunt $\sqrt{8}$ $1\frac{1}{2}$, & $\sqrt{8}$ $(2600 - 1\frac{1}{2})$ quæ inter se multiplicata producent aream BD, nimirum palm. 120. vt cap. 1. lib. 3. Geom. præst. diximus, atque idcirco quadrata laterum $1\frac{1}{2}$, & $2600 - 1\frac{1}{2}$. inter se multiplicata, producent quadratum arcæ, nimirum 14400. ex coroll. Lemmatis ænig. 26. cap. 30. Cum ergo ex $1\frac{1}{2}$. in $2600 - 1\frac{1}{2}$ fiat $2600\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$. erit æquatio inter 14400. & $2600\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}$. Additoq. $1\frac{1}{2}$. vtrinque, inter $1\frac{1}{2} + 14400$. & $2600\frac{1}{2}$. Ablatisq. 14400. vtroque, inter $1\frac{1}{2}$. & $2600\frac{1}{2} - 14400$. Iam sic. Semissis numeri radicem est 1300. a cuius quadrato 1690000. subtractis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam $\sqrt{8}$ 1675600. si addatur prædicta semissis 1300. fiet $1\frac{1}{2}$. $1300 + \sqrt{8}$ 1675600. Et si eadem radix ex prædicta semisse detrahatur, reliqua fiet minor radix 1300. $\sqrt{8}$ 1675600. (quia hæc æquatio duplicem habet radicem, propter signum — quo numerus absolutus afficitur.) Ergo minoris lateris AB, quadratum erit $1300 - \sqrt{8}$ 1675600. maioris autem lateris BC, quadratum erit $1300 + \sqrt{8}$ 1675600. quod etiam relinquatur, si quadratum 1300. $\sqrt{8}$ 1675600. lateris AB, detrahatur ex 2600.



$$\begin{array}{r}
 1600 + \text{Jg } 0 \\
 1300 - \text{Jg } 1675600 \\
 \hline
 1300 + \text{Jg } 1675600
 \end{array}$$

diametri. Et si eorum latera $\text{Jg } (1300 - \text{Jg } 1675600)$ & $\text{Jg } (1300 + \text{Jg } 1675600)$ inter se multiplicentur, produci aream rectanguli $\text{Jg } 14400$. hoc est, 120. palm. quæ multiplicatio fiet, si quadratum posterioris particulæ

$$\begin{array}{r}
 \text{Jg } (1300 - \text{Jg } 1675600) \\
 \text{Jg } (1300 + \text{Jg } 1675600) \\
 \hline
 \text{Jg } 14400
 \end{array}$$

quæ cap. 13. & 24. scripsimus, atque in hac formula apparet.

ALITER. Posito quadrato minoris lateris AB, 1 2e. & idcirco quadrato maioris lateris 1600 — 1 2e. erunt ipsa latera $\text{Jg } 1$ 2e, & $\text{Jg } (1600 - 1$ 2e) quæ inter se multiplicata facient aream 120. palm.

Faciunt autem $\text{Jg } (1600$ 2e — 1 3) vt hic vides, quæ multiplicatio fiet, si ipsa quadrata 1600 — 1 2e. & 1 2e. inter se multiplicentur, & producto numero signum Jg . præfigatur. Est igitur æquatio inter 120. & $\text{Jg } (1600$ 2e — 1 3) atque ideo & inter eorum quadrata 14400. & 1600 2e — 1 3. vt supra, &c.

ALITER. Ponatur minus latus AB, 1 2e. ideoq. eius quadratum 1 3. Erit igitur quadratum maioris lateris BC, 1600 — 1 3. & ipsum latus BC, $\text{Jg } (1600 - 1$ 3.) Ducatur AB, 1 2e. in BC, $\text{Jg } (1600 - 1$ 3.) quod fiet, vt cap. 16. dictum est, si 1 2e. reducat ad quadratum 1 3, præponaturq. signum Jg . Nam si $\text{Jg } 1$ 3. ducatur in $\text{Jg } (1600 - 1$ 3) quod fiet, si eorum quadrata 1 3. & 1600 — 1 3. inter se multiplicentur, vt cap. 16. dictum est, produceretur numerus $\text{Jg } (1600$ 3 — 1 33) pro area rectanguli 120. Ergo æquatio erit inter $\text{Jg } (1600$ 3 — 1 33) & 120. ac proinde

$$\begin{array}{r}
 \text{Jg } (1600 - 1 \text{ } 3) \\
 1 \text{ } 3 \\
 \hline
 \text{Jg } (1600 \text{ } 3 - 1 \text{ } 33)
 \end{array}$$

& inter eorum quadrata 1600 3 — 1 33. & 14400. Et addito 1 33. utrobique, inter 1600 3. & 1 33 + 14400. Ablatisq. 14400. utrinque, inter 1600 3 — 14400. & 1 33. Iam sic radicem Zenfizenficam eruenus. Semissis numeri Zenforum est 1300. a cuius quadrato 1690000. demptis 14400. remanent 1675600. Ad huius numeri radicem quadratam $\text{Jg } 1675600$. si addatur prædicta semissis 1300. fiet 1 3. 1300 + $\text{Jg } 1675600$. Et si eadem radix ex prædicta semisse dematur, relinquetur minus quadratum 1300 — $\text{Jg } 1675600$. Ergo maioris lateris BC, quadratum erit 1300 + $\text{Jg } 1675600$. & minoris lateris AB, quadratum erit 1300 — $\text{Jg } 1675600$. & radix maior erit $\text{Jg } (1300 + \text{Jg } 1675600)$ & minor, $\text{Jg } (1300 - \text{Jg } 1675600)$ vt supra, &c.

a 47. primi. ALITER. Quoniam quadrata laterum AB, BC, faciunt 1600. & ex

& ex vno latere in aliud fit area 120. inueniendi erunt per ænigma 26. cap. 30. duo numeri, qui inter se multiplicati faciant 120. & eorum quadrati faciant 1600. quod ita fiet. Ponatur minor numerus quadratus 12. & maior 1600 — 12. Et quoniam per Lemma ænigmatis 26. cap. 30. numerus 120. quem latera quadratorum 12. & 1600 — 12. producant, medio loco proportionalis est inter ipsa quadrata; erit numerus 16008 — 122. factus ex 12 in 1600 — 12. a 20. septimi æqualis quadrato numeri 120. hoc est, numero 14400. Est ergo æquatio inter 16008 — 122. & 14400. Additoq. 122. vtrobiq. inter 16008. & 122 — 14400. Et ablati 14400. vtrunque, inter 16008 — 14400. & 122. vt supra, &c.

- 2 *Campus altera parte longior habet latera in proportionem septupla: & eorum quadrata simul sumpta ad eorum summam proportionem habent centuplam. Quaruntur latera, area, & diameter.*

II.

PONATUR minus latus 12. & maius 72. quorum summa 82 & quadrata 12. 49. summam faciunt 508. centuplam summae 82. Igitur æquatio est inter 508. & 8002. Diuisis ergo 800. per 50. fiet 12.16. minus latus. Maius erit 112. in proportionem septupla. Ergo area erit 1792. producta ex vno latere in aliud. Diameter vero erit 128. Hoc est, quadrata laterum 12. & 12544. facient summam 12800. centuplam summae laterum 16. & 112. quæ est 128. ac quadratum diametri erit 12800. summa duorum quadratorum laterum, ac proinde diameter 128.

- 3 *Est rectangulum 4500. palmorum, & longitudo tripla est latitudinis. Quaruntur latera, & diameter.*

III.

PONATUR latitudo 12. & longitudo 32. Hæc latera inter se multiplicata producant aream 384. æqualem 4500. Diuisis ergo 4500 per 3. fiet 1500. & 12. 1500. latitudo rectanguli: & eius triplum 12. 3500. erit eiusdem longitudo. Ex latitudine in longitudinem fit area 12. 350000. hoc est, 4500. Diametri autem quadratum erit 15000. æquale duobus quadratis laterum, & ipsa diameter erit 1500.

- 4 *Est parallelepipedum, hoc est, columna quadrilatera palmorum 3375. Altitudo ad longitudinem basis, & hæc longitudo ad latitudinem basis proportionem habet sesquialteram. Quaruntur mensura.*

IIII.

PONATVR altitudo 9 12. longitudo 6 12. & latitudo 4 12. in continua proportione sesquialtera. Latitudo in longitudinem facit basem 24 8. & hæc in altitudinē facit aream parallelepipedī 216 12. æqualem 3375. Diuisis igitur 3375 per 216. fiet 1 12. 15 12. & 1 12. cubica 2 12. Ergo 9 12. facient 21 12. altitudinem: Et 6 12. facient 15. longitudinem basis: Et 4 12. facient 10. latitudinem basis. quæ mensuræ inuicem multiplicatæ faciunt 3375.

- V. 5 *Est parallelepipedum basem habens quadratam, cuius latus subdecuplum est altitudinis parallelepipedī, cuius area continet 6780. palmos. Queritur basis, & altitudo.*

PONATVR latus basis 1 12. ideoq. altitudo parallelepipedī 10 12. Ex 1 12. in se fit 1 8. nimirum basis quadrata, quæ ducta in altitudinem, id est, in 10 12. facit 10 12. areā scilicet parallelepipedī æqualem 6780. Diuisis igitur 6780. per 10. fiet 1 12. 678. & 12. 12. 678. latus basis. quod in se ductum facit 12 459684. aream basis. Altitudo vero ad latus decuplam habens proportionem erit 12 678000. quæ ducta in areā basis, id est, in 12 459684. facit 12 311665752000. aream totius parallelepipedī, nimirum 6780.

- VL 6 *Est superficies rectangula habens longitudinem quadruplam latitudinis, & aream 576. Queruntur latera.*

PONATVR minus 1 12. & maius 4 12. Hæc inter se multiplicata producunt 4 8. aream rectanguli æqualem 576. Diuisis ergo 576 per 4. fiet 1 8. 144. & 1 12. 12. minus latus. Maius ergo erit 48.

- VII. 7 *Est columna quadrangula rectangula, cuius basis latera proportionem habent sesquitertiam, & altitudo ad latus maius basis proportionem habet duplam, superbi-partientem tertias: soliditas denique columna continet palm. 93312. Queruntur dimensiones singula.*

PONATVR latus minus basis 3 12. & maius 4 12. altitudo vero 10 12. ut ad maius latus 4 12. habeat proportionem duplam superbi-partientem tertias, & maius latus ad minus sesquitertiam. Hi tres numeri inter se multiplicati producunt 128 12. soliditatem videlicet columnæ æqualem 93312. Diuisis igitur 93312 per 128. fiet 1 12. 729. & 1 12. 9. Ergo latus minus basis, quod posuimus 3 12. erit

erit 27. & maius 4 2e, erit 36. altitudo vero 10 2 2e. erit 96. Atque tres hæ dimensiones inter se multiplicatz faciunt arcam 933 12.

8 *Sunt due turres inaequales supra duas bases quadratas erectæ. Latera basium proportionem habent sesquiterciam, qualem etiam habent & altitudines & soliditates: ipsæque altitudines permutatim sunt laterum basium duplæ. Soliditates denique ambarum turrium simul complectuntur palm. 21000. Quarum dimensiones singula.*

VIII.

PONATUR latus minoris basis 3 2e, & maioris 4 2e, vt hoc ad illud proportionem habeat sesquiterciam sine fractione. Eritq. minor basis 9 8. & maior 16 8. Et quia altitudines laterum basium sunt permutatim duplæ. hoc est, altitudo turris maioris basis dupla est lateris basis minoris, & altitudo turris minoris basis dupla est lateris maioris basis; erit illa 6 2e, & hæc 3 2e, habebuntq. proportionem sesquiterciam, eandem nimirum, quam latera basium habent, eritq. turris minoris basis altior, quam turris maioris basis. Quoniam verò, vt in sequenti Lemmate demonstrabimus, duo numeri multiplicantes per crucem duos numeros, qui habeant duplicatam proportionem priorum numerorum, producant duos numeros in eadem cum illis proportionem: habentq. bases duplicatam, & altitudinum: sit vt maior altitudo 8 2e X 16 8 96 ce
3 2e ducta in minorem basem 9 8. producat 72 ce, turrim minoris basis, & minor altitudo 6 2e, ducta in maiorem basem 16 8, producat 96 ce turrim maioris basis; quæ per prædictum Lemma sequens habebunt eandem proportionem sesquiterciam, quam ipsæ altitudines, vel latera basium habent: eritq. propterea turris maioris basis, & minoris altitudinis maior, ac turris minoris basis, & maioris altitudinis minor. Atque ambæ turres simul consiciunt 168. ce. summâ æqualem 21000. Diuisis ergo 21000 per 168. fiet 1. ce. 125. & 1 2e. 5. Ideoq. latus maioris turris, quod positum est 4 2e, erit 30. palm. Et latus minoris turris positum 3 2e, erit 15. palm. Et reliquæ dimensiones erunt, vt in hac formula positz sunt. Vbi vides, & latera basium, & altitudines, soliditatesq. turrium habere proportionem sesquiterciam, & bases ipsas proportionem superseptupartietem nonas, duplicatam scilicet pro-

a 15. quinti.

b 20. sexti.

Latus basis turris minoris.
Latus basis turris maioris.
Basis minoris turris.
Basis maioris turris.
Altitudo minoris turris.
Altitudo maioris turris.
Soliditas minoris turris.
Soliditas maioris turris.

15.
20.
225.
400.
40.
30.
900.
12000.

Z z

portio-

portionis sesquiteritix. Soliditates denique ambarum turrium conficere palm. 11000. ut enigma proponit.

.III

L E M M A.

SI duo numeri in duos, qui habeant proportionem duplicatam illorum, per crucem multiplicentur, habebunt producti eandem, quam ipsi numeri, proportionem.

SINT duo numeri quicumque 8. & 6. proportionem sesquiteritiam habentes: & alij duo 16. & 9. habentes proportionem duplicatam proportionis sesquiteritix, nimirum supersepartientem nonas, ut hic apparet 16. 12. 9.

Fiatque 72. ex 8. in 9. & 96. ex 6. in 16.

Dico esse 96. ad 72. ut 8. ad 6. Cui enim 16.

& 9. habeant proportionem duplicatam pro-

portionis 8. ad 6. cadet inter illos medius

proportionalis 12. in proportione 8. ad 6. ac

proinde cum sit, ut primus 8. ad secundum 6. ita tertius 16. ad quartum 12.

fit idem numerus ex primo 8. in quartum 12. qui ex secundo 6. in tertium

16. nimirum 96. Item cum sit, ut primus 8. ad secundum 6. ita tertius 12.

ad quartum 9. fit idem numerus 72. ex primo 8. in quartum 9. qui ex se-

cundo 6. in tertium 12. Quo circa cum 96. fiat ex 12. in 8. & 72. ex 12.

in 6. erit eadem proportio 96. ad 72. qua 8. ad 6.

HINC fit, minorem altitudinem ducendam esse in maiorem basem, & mai-

orem altitudinem in minorem basem, ut soliditates procreata eandem habeant

proportionem, quam altitudines, ac propterea maiorem turrem habere mino-

rem altitudinem: minorem vero turrem altitudinem maiorem. Propter hanc

causam dictum est in enigmate, altitudines esse permutatim duplas late-

rum basium.

IX.

9 Est triangulum rectangulum, cuius basis (voco basem,

latus recto angulo oppositum) continet palm. 52. La-

tera autem proportionem habent duplam superbipar-

tientem quintas. Queruntur duo latera.

PONATUR minus 5 1/2, & maius 12 1/2, ut sine fractione pro-

portionem habeant duplam superbipartientem quintas: Quadrata

laterum sunt 15 1/4, & 144 1/4, quæ simul faciunt summam 169 1/2,

æquale quadrato basis, numero scilicet 2704. Diuisis igitur 2704

per 169. fiet 16. & 1 1/2, 4. Minus ergo latus 5 1/2, erit 20. palmi.

& maius 12 1/2, erit 48 palm. quod probatur. Nam duo quadrata

laterum 400. & 2704. faciunt 2704. quadratum basis.

10 Est altera parte longius, cuius area 500. palm. & duo X.
latera simul faciunt 100. palm. Queruntur latera.

PONATVR vnum 120, & alterum 100—120. Hac multiplicata inter se faciunt 10020—120, aream rectanguli æqualem 500. Addito ergo 120, vtrique, erit æquatio inter 10020, & 120 + 500. Ablatiss 500, vtrobique, inter 10020—500, & 120. Ita autem radix Zenisca eruetur. Semissis numeri radicem est 50, a cuius quadrato 2500, demptis 500, remanet numerus 2000, ad cuius radicem $\sqrt{2000}$ si addatur prædicta semissis 50, fiet maior radix 50 + $\sqrt{2000}$. Est si eadem radix $\sqrt{2000}$, ex prædicta semisse dematur, reliqua fiet minor radix, 50 — $\sqrt{2000}$. Est igitur maius latus 50 + $\sqrt{2000}$, minus autem 50 — $\sqrt{2000}$, quod etiam habebitur, si maius detrahatur ex 100, summa laterum, vt hic videtur. quod probatur, quia duo latera 50 + $\sqrt{2000}$, & 50 — $\sqrt{2000}$, faciunt 100, & inter se multiplicata producent aream 500, quæ multiplicatio fiet, vt cap. 23. traditum est, si 2000, quadratum posterioris particulæ subducatur ex 2500, quadrato particulæ prioris, vt apposta formula indicat.

$$\begin{array}{r} 100 + \sqrt{2000} \\ 50 + \sqrt{2000} \\ \hline 50 - \sqrt{2000} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 + \sqrt{2000} \\ 50 - \sqrt{2000} \\ \hline 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 + \sqrt{8} 0 \\ 50 + \sqrt{8} 1000 \\ \hline 50 - \sqrt{8} 1000 \\ \hline \text{atur, quia duo latera} \\ \hline 50 + \sqrt{8} 1000 \\ 50 - \sqrt{8} 1000 \\ \hline 500 \end{array}$$

11 *Est rectangulum, cuius diameter 180. & majus la-
tus ad minus proportionem habet triplam. Quarun-
tur latera, & area.* XI.

PONATUR minus latus 12e, & maius 32e, quorum quadrata
 144, & 1024, faciunt summam 1168, æqualem quadrato diametri, 247. primi.
 hoc est, numero 180. Diuisis ergo 180. per 10. fiet 18, & 12e,
 18 latus minus. Maius ergo erit 36. illius triplum. Area
 autem erit 36 x 108. id est, 3888.

12 *Est triangulum rectangulum, cuius unum latus est* XII
 $\sqrt{8} \ 18 + 3$. *Alterum autem latus, & basis simul fa-*
ciunt $\sqrt{8} \ 162 + 9$. *Quaruntur singula latera.*

PONATVR, alterum latus incogni-
tum 12e, erit, propterea bafis $\sqrt{8} 162$
+ 9 = 12e. Quadrata laterum funt 18,
& 27 $\sqrt{8} 648$. quæ fimul æqualia,
funt quadrato bafis, nimirum numero
243 = 18 12 + 18 $\sqrt{8} 648$ vt dux

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} \ 18 + 3 \\ \sqrt{8} \ 18 + 3 \\ \hline + 18 + \sqrt{8} \ 162 + 9 \\ + 18 + \sqrt{8} \ 162 \\ \hline 27 + \sqrt{8} \ 648 \end{array}$$

b 47-primi.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{8} 162 + 9 = 120 \\
 \sqrt{8} 162 + 9 = 120 \\
 \hline
 - \sqrt{8} 1628 - 920 + 18 \\
 + \sqrt{8} 13122 + 81 - 920 \\
 \hline
 + 162 + \sqrt{8} 13122 - \sqrt{8} 1628 \\
 \hline
 + 243 - 1820 + 18 + \sqrt{8} 12488 - \sqrt{8} 6488
 \end{array}$$

vt dux proposita formulae multiplicationis quadratae indicant. Si ergo utrinque auferatur $\sqrt{8} 648$. erit aequatio inter $18 + 27$. & $243 - 1820 + 18 + \sqrt{8} 41472 - \sqrt{8} 6488$. Nam si auferatur $\sqrt{8} 648$. a $\sqrt{8} 12488$ (quae commensurabiles sunt, habentes proportionem non-cuplam, propterea quod, si $\sqrt{8} 12488$. diuidatur per $\sqrt{8} 648$. Quotiens fit $\sqrt{8} 81$. id est, 9.) reliqua fiet $\sqrt{8} 41472$. Ablatoq. 18 utrinque, inter 27 . & $243 - 1820 + \sqrt{8} 41472 - \sqrt{8} 6488$. Ablatisq. rursum 27 . utrobique, inter 0 . & $216 - 1820 + \sqrt{8} 41472 - \sqrt{8} 6488$. Et additis utrobique 1820 . & $\sqrt{8} 6488$. inter $1820 + \sqrt{8} 6488$. hoc est, inter $\sqrt{8} 6488 + 1820$. & $216 + \sqrt{8} 41472$. Diuiso ergo hoc numero per illum, (abiectionis signis Cossicis 20 . & 8 , ex diuisore. quia totum hoc aggregatum $\sqrt{8} 6488 + 1820$, est numerus radicum, quod in creatione numeri quadrati basis, numerus $\sqrt{8} 6488$. factus sit ex 120 , in $\sqrt{8} 162$. bis; ac propterea numerus $\sqrt{8} 6488$. conferri debeat pro numero radicum. Consule ea, quae prope finem cap. 26. scripsimus. Abijciuntur autem signa Cossica 20 . & $\sqrt{8}$, ex diuisore. quemadmodum si aequatio sit inter 20 . & 520 , vt diuidantur 20 . per 5 . abijciatur signum 20 , propterea quod 520 , est numerus radicum; sicuti $\sqrt{8} 6488 + 1820$ proueniet aestimatio 120 , nimirum alterius lateris trianguli, quod positum fuit 120 .

VT autem haec diuisio fiat, multiplicandus est tam diuisor $\sqrt{8} 648 + 18$. quam numerus diuidentus per $\sqrt{8} 648 - 18$, vt cap. 23. docuimus. Ita enim fiet nouus diuisor 324 . & nouus diuidentus $\sqrt{8} 3359232 + 1296$. quae multiplicationes hic cernuntur.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{8} 648 + 18 \\
 \sqrt{8} 648 - 18 \\
 \hline
 324
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 216 + \sqrt{8} 41472 \\
 \sqrt{8} 648 - 18 \\
 \hline
 - 3888 - \sqrt{8} 13436928 \\
 + \sqrt{8} 30233088 + \sqrt{8} 26873856 \\
 \hline
 \sqrt{8} 3359232 + 1296
 \end{array}$$

IN priori multiplicatione aufertur quadratum 324 . posterioris particulae 18 . ex 648 . quadrato prioris particulae, vt cap. 23. docuimus. In posteriori vero detraximus $\sqrt{8} 13436928$. ex $\sqrt{8} 30233088$. (quia commensurabiles sunt, habetq. posterior numerus ad priorum proportionem sesquialteram) factusq. est residuus numerus $\sqrt{8} 3359232$. Item ex $\sqrt{8} 26873856$. id est, ex 5184 . dempsimus 3888 . factusq.

factusq. est totus productus $\sqrt{8}$ 3359232 + 1296.

Iam vero si diuidatur $\sqrt{8}$ 3359232. per 324. hoc est, per $\sqrt{8}$ 104976. fiet Quotiens $\sqrt{8}$ 32. Et diuisis 1296. per 324. fit Quotiens 4. Preteritum ergo 1296. est $\sqrt{8}$ 32 + 4. atque tantum est alterum latus trianguli quæsitum, quod posuimus esse 1296. Basis vero angulo recto opposita, quam statuiimus $\sqrt{8}$ 162 + 5 — 1296. erit $\sqrt{8}$ 50 + 5. qui numerus relinquitur, si radix inuenta $\sqrt{8}$ 32 + 4. deprehatur ex $\sqrt{8}$ 162 + 9. nimirum ex summa lateris sumpta faciunt 75 + $\sqrt{8}$ 5000. quadratum basis inuentæ $\sqrt{8}$ 50 + 5. Sunt enim duo illa quadrata 27 + $\sqrt{8}$ 648. & 48 + $\sqrt{8}$ 2048.

ALIUD exemplum facilius. Sit vnum latus 4. & summa alterius lateris cum base sit 8. Ponatur alterum latus incognitum 1296. ac proinde basis 8 — 1296. Quadrata duorum laterum 16. & 1296. sunt a 47. primi. simul sumpta æqualia quadrato basis, numero videlicet 64 — 16296 + 1296. Ablato ergo 1296 vtrunque, erit æquatio inter 16. & 64 — 16296. Additisq. 16296 vtroque, inter 16 + 16296. & 64. Ablatisq. 16. vtrunque, inter 16296. & 48. Diuisis ergo 48. per 16. fiet 1296. pro altero latere. Ac proinde diameter 8 — 1296. erit 5. quod probatur, cum quadrata laterum 16. & 9. æqualia sint quadrato 25. basis. Area vero trianguli erit 6. semissis nimirum numeri 12. producti ex vno latere in aliud.

13 Est circulus, cuius diameter 120. & ex quodam puncto circumferentia demissa perpendicularis ad diametrum est $\sqrt{8}$ (2925 — $\sqrt{8}$ 405000.) Quarantur partes diametri.

XIII.

PONATUR minor pars

BD, 1296. ideoq. maior CD,

120 — 1296. Et quia, ex scho-

lio propof. 13. lib. 6. Eucl.

AD, est media proportiona-

lis inter BD, CD; b erit re-

ctangulum sub BD, CD,

æquale quadrato ex AD.

Fit autem ex BD, 1296, in

CD, 120 — 1296. numerus

120296 — 1296. Hic ergo aqua-

lis est quadrato rectæ AD, nimirum numero 2925 — $\sqrt{8}$ 405000.

Addito ergo 1296. vtrouque, erit æquatio inter 120296, & 1296

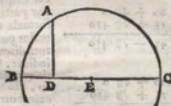
+ 2925 — $\sqrt{8}$ 405000. Ablatisq. 2925 — $\sqrt{8}$ 405000. vtrunque, in-

ter 1296, & 120296 — 2925 — $\sqrt{8}$ 405000. Ex hoc ergo numero sic radi-

cem quadratam eruemus. Semissis numeri radicem est 60. & cuius

quadrato 3600. demptis 2925 — $\sqrt{8}$ 405000. remanet numerus 675 +

$\sqrt{8}$ 405000. vt in hac formula vides. ad cuius radicem quadratâ, quæ



b 17. sexti.

est

$$\begin{array}{r} 3600 + \sqrt{8} 0 \\ 2925 - \sqrt{8} 405000 \\ \hline 675 + \sqrt{8} 405000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 + \sqrt{8} 0 \\ 60 + \sqrt{8} (675 + \sqrt{8} 405000) \\ \hline 60 - \sqrt{8} (675 + \sqrt{8} 405000) \end{array}$$

I A M vero vt æstimationem vtriusque portionis $60 + \sqrt{8} (675 + \sqrt{8} 405000)$ & $60 - \sqrt{8} (675 + \sqrt{8} 405000)$ inuenias, eruenda est radix ex hoc Binomio $675 + \sqrt{8} 405000$. vt ad finem cap. 28. docuimus, hoc videlicet modo. Diuidatur maior particula 675. in duas partes per Lemma cap. 28. quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati minoris particulæ $\sqrt{8} 405000$. quod ita fiet. Semissis numeri diuidendi 675. est $\frac{225}{2}$. ex cuius quadrato $\frac{41125}{4}$. detracta quarta parte quadrati minoris particulæ, quæ est $\frac{405000}{4}$. remanet numerus $\frac{10000}{4}$. cuius radix quadrata $\frac{225}{2}$. addita semissi prædictæ $\frac{225}{2}$. facit $\frac{450}{2}$. hoc est, 450. maiorem partem: Et eadem radix $\frac{225}{2}$. dempta ex eadem semisse $\frac{225}{2}$. relinquit $\frac{225}{2}$. hoc est, 225. minorem partem. Atque hæc duæ partes 450. 225. inter se multiplicatæ producant 101250. quartam partem quadrati 405000. minoris particulæ $\sqrt{8} 405000$. Radices autem partium 225. & 450. copulatæ per signum +, hoc modo. $\sqrt{8} 225 + \sqrt{8} 450$. hoc est, $15 + \sqrt{8} 450$. dabunt radicem Binomij $675 + \sqrt{8} 405000$. ad quam radicem si addatur numerus 60. semissis nimirum numeri radicem, fiet maior radix $75 + \sqrt{8} 450$. pro maiore portione CD. Et si ex eadem semisse

$$\begin{array}{r} 60 + \sqrt{8} 0 \\ 15 + \sqrt{8} 450 \\ \hline 45 - \sqrt{8} 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 + \sqrt{8} 0 \\ 75 + \sqrt{8} 450 \\ \hline 45 - \sqrt{8} 450 \end{array}$$

materia Sinuum.

SIT igitur in eadem figura diameter BC, 2000. vt sinus totus sit 1000. Et AD, sit sinus grad. 20. nimirum 342. Quæruntur sinus versû arcuum AB, AC, & sinus complementi DE. Pro BD, ponatur 120. eritq. propterea CD, 2000 — 120. Et quoniam AD, est media proportionalis inter BD, CD ex scholio propof. 13. lib. 6. Eucl. erit numerus 200020 — 120. factus ex BD, in CD, æqualis quadrato ex

AD,

AD, nimirum numero 116964. Additoq. 18. vtrinq. erit æquatio inter 20002. & 18 + 116964. Ablatisq. 116964. vtrobique, inter 18. & 20002 — 116964.

I A M sic. Semissis numeri radicem est 1000. è cuius quadrato 1000000. dempsit 116964. remanet numerus 883036. ad cuius radicem quadratam 883036. si prædicta semissis 1000. addatur, fiet maior radix 1000 + 883036. pro maiori portione CD. Et si eadem radix ex eadē semisse 1000 dematur, reliqua fiet minor radix 1000 — 883036. pro minori parte BD. quæ etiam habebitur, si maior portio ex tota diametro 2000. subtrahatur, vt in hac formula vides. Itaq. si omnia,

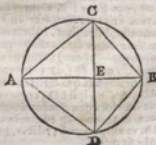
| |
|---------------|
| 2000 + 883036 |
| 1000 + 883036 |
| 1000 — 883036 |

hæc in numeris absolutis desiderentur, cum numeri 883036. maior radix sit 940. & minor 939. erit CD, 1940. maior quam vera, & 1939. minor quam vera. Item BD, erit 60. minor quam vera, & 61 maior, quam vera. Quòd si auferatur semidiameter CE, 1000. ex 1940. relinquetur sinus complementi 940. maior, quam verus, & 939. minor, quam verus, &c.

INVENTIS porro segmentis BD, CD, si ducantur rectæ AB, AC, inueniuntur ipse chordæ, ex propof. 47. lib. 1. Eucl. cum triangula fiant rectangula ABD, ACD, &c. In priori exēplo reperietur chorda AB, 883036 (1400 — 883036) & chorda AC, 883036 (2000 + 883036) &c.

XXIII.
 14 Est circulus, cuius diameter diuiditur per lineam perpendicularem ad diametrum extrema ac media ratione, & una è duabus chordis minoribus est 150 — 184500. Quæstio est, quanta sit diameter, & quanta eius portiones, & reliqua linea.

PONATUR EB, minor pars diametri AB, 12. Et quia AB, secta est in E, extrema ac media ratione, estq. maius segmentum AE, erit AE, media proportionalis inter AB, & EB: * Est autem & BC, media proportionalis inter easdem AB, EB. Igitur AE, BC, æquales sunt. Ponitur autem BC, 150 — 84500. Igitur & AE, est 150 — 84500. * Cum ergo CE, sit media proportionalis inter AE, EB, erit numerus 1502 — 845008. factus ex AE, in EB, æqualis quadrato ex CE, ideoq. recta



a coroll. 8. sexti.

b coroll. 8. sexti.

c 17. sexti.

CE,

CE, erit $\sqrt{8}$ (150 2e — $\sqrt{8}$ 4500 8.) Est autem eadem CE, $\sqrt{8}$ (27000 — $\sqrt{8}$ 405000000 — 1 8) propterea quod 1 8, quadratum rectæ EB, demptum ex 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000, quadrato rectæ BC, & reliquum facit 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000 — 1 8. quadratum rectæ CE. Igitur æqualia sunt duo quadrata 150 2e — $\sqrt{8}$ 4500 8. & 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000 — 1 8. quippe cum utrumque quadrato rectæ CE, ostensum sit æquale. Addito ergo 1 8. utrinque, erit æquatio inter 1 8 + 150 2e — $\sqrt{8}$ 4500 8. & 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000. Et ablatis 150 2e utrobique, inter 1 8 — $\sqrt{8}$ 4500 8. & 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000 — 150 2e. Et si addatur $\sqrt{8}$ 4500 8. utrobique inter 1 8. & 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000 — 150 2e + $\sqrt{8}$ 4500 8. Ex hoc numero Cossico ita eliciemus pretium 1 2e. Totus numerus est instar numeri Cossici diminuti, cuius portio 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000. pro numero absoluto habetur, & altera portio — 150 2e + $\sqrt{8}$ 4500 8. pro numero radicem. Nam $\sqrt{8}$ 4500 8. est etiam numerus radicem, ut in ænigmate 12. diximus, & ad finem cap. 16. docuimus. Itaque dimidium numeri radicem erit — 75 + $\sqrt{8}$ 1125. ad cuius quadratum 6750 — $\sqrt{8}$ 25312500. si addantur 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000. fit numerus 33750 — $\sqrt{8}$ 632812500. a cuius radice quadrata auferenda est semissis numeri radicem, quæ fuit — 75 + $\sqrt{8}$ 1125. ut habeatur valor 1 2e.

ITA autem ex Residuo hoc 33750 — $\sqrt{8}$ 632812500. radicem quadratam eruimus. Secetur maius nomen 33750. in duas partes, quæ inter se multiplicatæ producant quartam partem quadrati nominis minoris, quæ quarta pars est 158203125. quod ita fiet, iuxta doctrinam Lemmatis cap. 18. Ex 284765625. quadrato semissis maioris nominis 33750. detraharur dicta quarta pars 158203125. Et reliqui numeri 126562500. radix quadrata 11250. addatur, & detraharur ex 16875. semisse numeri 33750. Nam numeri producti 28125. 5625. erunt partes quæ sitæ, quæ inter se multiplicatæ faciunt 158203125. Atque hæ partes copulatæ per signum — dabunt radicem propositi Residui, præposito tamen signo $\sqrt{8}$. utrique parti, hoc modo $\sqrt{8}$ 28125 — $\sqrt{8}$ 5625. ut ad finem cap. 18. tradidimus: hoc est, $\sqrt{8}$ 28125 — 75. Ab hac radice detrahendum est dimidium numeri radicem 75 + $\sqrt{8}$ 1125. propter signum — quo numerus radicem afficiebatur. Fietq. numerus reliquus $\sqrt{8}$ 40500 — 150. pro pretio 1 2e, hoc est, pro linea EB. Cum ergo AE, ipsi CB, æqualis, sit 150 — $\sqrt{8}$ 4500. erit tota diameter $\sqrt{8}$ 18000. quia $\sqrt{8}$ 40500; & $\sqrt{8}$ 4500. commensurabiles sunt, habentes proportionem triplam, & minore ex maiore subducta, relinquitur $\sqrt{8}$ 18000. At CE, erit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 1620000000 — 36000) numerus videlicet factus ex AE, in EB. Denique AC, erit $\sqrt{8}$ ($\sqrt{8}$ 4050000000 — 9000) cum eius quadratum æquale sit duobus quadratis rectarum AE, CE. Et quia AC, æqualis est AD, & CE, ipsi ED, cognitæ erunt omnes lineæ huius figuræ. Atque ita vides duo quadrata rectarum AC, EC, nimirum $\sqrt{8}$ 405000000 — 9000. & 27000 — $\sqrt{8}$ 405000000. facere 18000. quadratum diametri AB, ut vult proposit. 47. lib. 1. Eucl. b cum angulus ACB, in semicirculo sit rectus.

ALITER. Quoniam maius segmentum AE, æquale ipsi CB, est 150— $\sqrt{8}$ 4500. si ponatur EB, 1 2e. erit tota diameter AB, 150— $\sqrt{8}$ 4500+1 2e. Atque ita quadrato maioris segmenti AB, 27000— $\sqrt{8}$ 405000000. æqualis erit numerus 150 2e— $\sqrt{8}$ 4500 8+1 8. factus ex EB, id est, ex 1 2e. in totam AB, id est, in 150— $\sqrt{8}$ 4500+1 2e. Et transpositis particulis huius æquationis, ut supra, reperietur iterum æquatio inter 1 8. & 27000— $\sqrt{8}$ 405000000—150 2e+ $\sqrt{8}$ 4500 8, &c.

ALITER. Ponatur tota diameter AB, 1 2e, eritq. minus segmentum EB, 1 2e—150— $\sqrt{8}$ 4500. Atque ita numerus 1 8—150 2e— $\sqrt{8}$ 4500 8. factus ex 1 2e, id est, ex AB, in 1 2e—150— $\sqrt{8}$ 4500. id est, in EB, æqualis erit quadrato 27000— $\sqrt{8}$ 405000000. restat AE. Et additis utrobique 150 2e— $\sqrt{8}$ 4500 8. æquatio erit inter 1 8. & 27000— $\sqrt{8}$ 405000000+150 2e— $\sqrt{8}$ 4500 8. Ex hoc ergo numero Cossico ita radicem extrahemus. Totus numerus intelligatur compositus ex duabus particulis, quarum prior 27000— $\sqrt{8}$ 405000000. est instar numeri absoluti, & posterior+150 2e— $\sqrt{8}$ 4500 8. instar numeri radicem. Dimidium numeri radicem est 75— $\sqrt{8}$ 1125. ad cuius quadratum 6750— $\sqrt{8}$ 25312500. si addantur 27000— $\sqrt{8}$ 405000000. fit numerus 33750— $\sqrt{8}$ 632812500. ad cuius radicem quadratam $\sqrt{8}$ 28125—75. (quæ inuenietur, ut supra) si addatur semissis numeri radicem 75— $\sqrt{8}$ 1125. fiet 1 2e— $\sqrt{8}$ 18000. pro diametro AB, quantam videlicet supra inuenimus, &c.

S C H O L I U M.

IN prima solutione huius ænigmati, quando ex $\sqrt{8}$ 28125—75. radice huius Residui 33750— $\sqrt{8}$ 632812500. detrahimus 75+ $\sqrt{8}$ 1125. dimidium numeri radicem, diximus relinqui numerum $\sqrt{8}$ 40500—150. quod mirum non est. Nam totum illud dimidium 75+ $\sqrt{8}$ 1125. affici intelligendum est signo—. propterea non solum 75. detracta a—75. faciunt—150. sed etiam $\sqrt{8}$ 1125. addita ad $\sqrt{8}$ 28125. facit $\sqrt{8}$ 40500. quia cum numeri $\sqrt{8}$ 28125. &— $\sqrt{8}$ 1125. habeant signa contraria, ille nimirum signum +, hic vero intelligatur habere signum—. loco subtractionis fieri debet additio, ut cap. 4. docuimus. Et quidem rectè hoc modo factam esse detractionem, clarissimè tellatur solutio ænigmati, quippe cum omnes lineæ inueniunt respondere experientia. Quod etiam hoc exemplo perspicuum fiet. Sit enim $\sqrt{8}$ 100—6. radix alicuius residui, a qua detrahendum sit dimidium numeri radicem 4+ $\sqrt{8}$ 9. quod affectum erat signo—. ita ut + $\sqrt{8}$ 9. intelligatur esse— $\sqrt{8}$ 9. Videt ergo, ex detractione 4. ex—6. relinqui—10. & ex subtractione— $\sqrt{8}$ 9. a $\sqrt{8}$ 100. relinqui 13. ita ut totum residuum sit 13—10. hoc est, 3. Nam $\sqrt{8}$ 100—6. facit 4. & 4— $\sqrt{8}$ 9. facit 1. Censet autem ex detractione 1. a 4. relinqui 3.

I N hoc eodem ænigmati vides, quando numerus radicem est compositus,

affectusq. signo — dimidio numeri radicum proponendum esse signum —
 et quadratū multiplicetur, quod etiam fieri intelligitur in alijs aequationibus,
 ubi numerus radicum simplex est, affectusq. signo —. Vt si numerus radicum
 est — 10 2e. rursus scribitur est — 1, qua in se ducta facit 25. ac si non habe-
 ret primum signum —. Atque hac consuetudine, cur in superioribus non affe-
 ctum fuerit dimidio numeri radicum signum —, etiam si numerus radicum il-
 lo affectus fuerit, quia nuncum semper producit quadratum cum signo +,
 sine dimidio numeri radicum prapositionis signum —. sine non.

XV. 15 Est quadratum, cuius latus est 7. Queritur diameter.

a schol. 47. **QVADRATVM** lateris est 49. cuius duplum est quadratum dia-
 metri. Igitur quadratum diametri erit 98. & ipsa diameter 14 98.

XVI. 16 Est quadratum, cuius diameter est 18 98. Queritur
 latus.

b schol. 47. **QVONIAM** quadratum diametri duplum est quadrati lateris 2
 estq. quadratum diametri 98. erit quadratum lateris 49. & latus ip-
 sum 14 49. hoc est, 7.

XVII. 17 Est quadratum, cuius diameter & latus faciunt sum-
 mam 6. Queruntur diameter ac latus.

o schol. 47. **PONATVR** latus 1 2e. ac proinde diameter 6 — 1 2e. Et quia
 quadratum diametri duplum est quadrati lateris: Estq. quadratum
 lateris 1 8. & quadratum diametri 36 — 1 2e + 1 8. erit aequatio in-
 ter 1 8, & 36 — 1 2e + 1 8. Ablatoq. 1 8. vtrunque, inter 1 8. & 36
 — 1 2e.

Iam sic. Semissis numeri radicum est 6. ad cuius quadratum 36.
 si addantur 36. fit numerus 72. a cuius radice 18 72. si praedicta se-
 missis 6. dematur, reliqua fiet aestimatio 1 2e. 18 72 — 6. atque tan-
 tum erit latus. quod demptum ex 6. reliquam
 faciet diametrum 12 — 18 72. vt in hac formula
 vides. quod probatur. quia quadratum diame-
 tri 216 — 18 41472. duplum est quadrati lateris
 108 — 18 10368. Et diameter ac latus faciunt
 summam 6.

XVIII. 18 Est quadratum, cuius latus ductum in diametrum facit
 10. Queruntur latus ac diameter.

PONATVR latus 1 2e. ideoq. diameter 10. Nam ex 1 2e in 1 2e.
 fiunt 10. qui numerus 10 est Quotiens, si 10. per 1 2e. diuidantur.

Ita enim Quotiens ductus in diuisorem 12. producit numerum diuisum 10. Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 18. & quadratum diametri $\frac{100}{18}$. erit æqualitas inter 18. & $\frac{100}{18}$. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad hanc inter 188. & 100. Diuisis ergo 100. per 18. fiet 188.50. & 12. $\frac{188}{18}$ 50. pro latere. Quia vero diameter posita fuit 18. hoc est, 10. diuisa per 12. si diuidantur 10. per $\frac{188}{18}$ 50. nimirum per pretium 12. fiet Quotiens 188 200. pro diametro. quod probatur. Nam ex latere 188 50. in diametrum 188 200. fit numerus 188 10000. id est, 10. Et 188 40000. quadratum diametri duplum est quadrati lateris 188 2500.

a schol. 47.
primi.

19 Est quadratum, cuius diameter superat latus numero 3. Quaruntur latus, ac diameter.

XIX.

PONATVR latus 12. ideoq. diameter 12 + 3. Et quia quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 18. & quadratum diametri 18 + 6 12 + 9. erit æquatio inter 18. & 18 + 6 12 + 9. Ablatoq. 18 vtrunque, inter 18. & 6 12 + 9. Semissis numeri radicem est 3. ad cuius quadratum 9. additis 9. fit numerus 18. ad cuius radicem 18 3. si addatur prædicta semissis 3. fiet 12. $\frac{18}{12}$ 18 + 3. pro latere. Diameter autem erit 18 + 6. quod probatur. quia quadratum diametri 54 + 18 2592. duplum est quadrati lateris 27 + 18 648. Et diameter latus superat numero 3.

b schol. 47.
primi.

20 Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam inter diametrum & latus facit 5. Quaruntur diameter ac latus.

XX.

PONATVR latus 12. ac propterea differentia inter diametrum ac latus $\frac{12}{2}$. quæ habetur ex diuisione 15. per 12. ut nimirum Quotiens ductus in diuisorem 12. producat numerum diuisum 15. Quia ergo diameter excedit latus hac differentia, erit diameter 12 + $\frac{12}{2}$. Quoniam autem quadratum diametri duplum est quadrati lateris: estq. quadratum lateris 18. & quadratum diametri $\frac{1800}{18}$ 100 + 225. erit æquatio inter 18. & $\frac{1800}{18}$ 100 + 225. quæ per multiplicationem in crucem reducitur ad æquationem inter 188. & 188 + 308 + 225. Ablato ergo 188. vtrunque, erit æquatio inter 188. & 308 + 225. Ex hoc numero radicem Zenfizenficam sic eruemus. Semissis numeri Zenforum est 15. ad cuius quadratum 225. additis 225. fit numerus 450. ad cuius radicem quadratam 18 450. si addatur prædicta semissis 15. fiet 18. $\frac{18}{18}$ 450 + 15. & 12. $\frac{18}{18}$ ($\frac{18}{18}$ 450 + 15) ut ad finem cap. 12. traditum est, atque tantum est latus: cuius quadrati 18 450 + 15. duplum dabit quadratum diametri 18 1800 + 30. ac proinde diameter erit 18 ($\frac{18}{18}$ 1800 + 30) quod probatur. Nam si latus ex

c schol. 47.
primi.

diametro subtrahatur, remanebit differentia $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ 1800 + 30) — $\frac{1}{2}$ 1800 ($\frac{1}{2}$ 450 + 15) quæ ducta in latus $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ 450 + 15) producit numerum 45. Consule caput 24. ubi hæc multiplicatio expresse habetur.

XXI. 21 Est rectangulum, cuius area est 30. & proportio laterum sesquialtera. Quærentur latera, & diameter.

PONATVR minus latus 1 2e. ideoq. maius 3 2e. sesquialterum ad illud. Ex multiplicatione laterum inter se, fit numerus 6 2e. area rectanguli, æqualis areæ datæ 30. Diuisis igitur 30. per 6. fiet 1 2e. & 1 2e. $\frac{1}{2}$ 5. Et quia minus latus posuimus esse 1 2e. erit minus latus $\frac{1}{2}$ 10. numerus videlicet duplus radicis, numeri scilicet $\frac{1}{2}$ 5. Cum ergo maius latus positum sit 3 2e. erit maius latus $\frac{1}{2}$ 45. numerus scilicet triplus vnus radicis, quæ fuit $\frac{1}{2}$ 5. Quia vero quadrata laterum 20. & 45. simul æqualia sunt quadrato diametri, erit quadratum diametri 65. & ipsa diameter $\frac{1}{2}$ 65. quod probatur, quia ex latere $\frac{1}{2}$ 20. in latus $\frac{1}{2}$ 45. fit numerus $\frac{1}{2}$ 900. hoc est, 30. quantam videlicet posuimus aream rectanguli.

XXII. 22 Est rectangulum, cuius area 80. & differentia laterum 2. Quærentur latera, ac diameter.

PONATVR minus latus 1 2e. ideoq. maius 1 2e + 2. Hæc latera inter se multiplicata faciunt aream 1 2e + 2 2e. æqualem areæ datæ 80. Ablatis igitur 2 2e. vtrobiq. erit æqualitas inter 1 2e. & 80 — 2 2e. Semissis numeri radicem est 1. ad cuius quadratum 1. additis 80. fit numerus 81. a cuius radice 9. si prædicta semissis 1. dematur, reliqua fiet æstimatio 1 2e. 8. pro minore latere: Maius ergo erit 10. excedens illud binario. Ex latere 8. in latus 10. fit area proposita 80. Duovero quadrata laterum 64. & 100. æqualia sunt quadrato diametri, ac propterea quadratum diametri erit 164. ipsaq. diameter $\frac{1}{2}$ 164.

XXIII. 23 Est rectangulum, cuius area 80. & summa duorum laterum 20. Quærentur latera, & diameter.

PONATVR vnum latus 1 2e. ideoq. alterum 20 — 1 2e. Hæc inter se multiplicata faciunt aream 20 2e — 1 2e. æqualem areæ datæ 80. Addito ergo 1 2e vtrobiq. erit æquatio inter 1 2e + 80. & 20 2e. Ablatisq. 80. vtrinq. inter 1 2e. & 20 2e — 80. Semissis numeri radicem est 10. a cuius quadrato 100. demptis 80. remanet numerus 20. ad cuius radicem $\frac{1}{2}$ 20. addita prædicta semisse 10, fiet 1 2e. $\frac{1}{2}$ 20 + 10. maior pro vno latere. Atque eadem radix $\frac{1}{2}$ 20. dempta ex prædicta semisse 10. reliquam faciet minorem radicem 10 — $\frac{1}{2}$ 20, quæ etiam habebitur, si latus inuentum $\frac{1}{2}$ 20 + 10. detrahatur ex 20.

summa

summa laterum, ut hic vides. Latera inuenta
 $10 + \sqrt{8} 20$. & $10 - \sqrt{8} 20$. inter se multiplicata
 producant aream 80. proposita. quæ mul-
 tiplicatio facile fiet, si per doctrinam cap.
 23. 10. quadratum particulæ posterioris de-
 trahatur ex 100. quadrato particulæ maioris,
 ut in secunda hac formula vides. Iam qua-
 drata laterum $120 + \sqrt{8} 8000$. & $120 - \sqrt{8} 8000$.
 æqualia sunt quadrato diametri: ideoq.
 quadratum diametri erit 240. & ipsa dia-
 meter $\sqrt{8} 240$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{8} 0 + 20 \\ \sqrt{8} 10 + 10 \\ \hline - \sqrt{8} 10 + 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 + \sqrt{8} 20 \\ 10 - \sqrt{8} 20 \\ \hline 80 \end{array}$$

a 47. primi.

24 Est rectangulum, cuius diameter 30. & summa late- XXIII.
 rum 42. Quarantur latera, & area.

PONATVR vnum latus 12. ac proinde alterum 42—12. Ho-
 rum quadrata 144. & 1764—8424+144. æqualia sunt quadrato
 diametri: atque idcirco æquatio erit inter 24+1764—8424. & 900.
 Et additis 8424 utrobique, inter 8424+900. & 24+1764. Abla-
 tisq. 900 utrinque, inter 8424. & 24+864. Et rursus ablati 864.
 utrinque, inter 144. & 8424—864. Diuisisq. omnibus per 2. inter
 144. & 4224—432. Semissis numeri radicum est 21. a cuius quadra-
 to 441. demptis 432. remanet numerus 9. ad cuius radicem 3. ad-
 dita prædicta semisse 21. fiet radix maior 24. pro latere maiore: Ea-
 demq. radix 3. dempta ex prædicta semisse 21. relinquet minorem
 radicem 18. pro minore latere. quod etiam habebitur, si latus ma-
 ius inuentum 24. subtrahatur ex 42. summa laterum. Iam ex 24. in
 18. fit area 432. Vbi etiam vides quadrata laterum 576. & 324. effi-
 cere 900. quadratum diametri propositæ 30.

b 47. primi.

25 Est rectangulum, cuius area cum diametro facit 15. &
 differentia laterum est $\sqrt{8} 5$. Quarantur latera, dia- XXV.
 meter, & area.

PONATVR minus latus 12— $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. (qui numerus $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$ est
 semissis datæ differentie $\sqrt{8} 5$.) & maius 12+ $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. Ita enim hoc
 excedit illud differentia $\sqrt{8} 5$. cum minus a maiore subductum re-
 linquat $\sqrt{8} 5$. ut in hac formula vides. Nam
 $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. & $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. debent addi, propter diuer-
 sa signa + & —, quæ additio fit, si $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$ du-
 plicetur, & duplato numero $\sqrt{8} 2 \frac{1}{2}$. hoc est,
 $\sqrt{8} 5$. superioris numeri signum + intelliga-
 tur præpositum, ut cap. 4. diximus. Ex latere 12— $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. in la-
 tus 12+ $\sqrt{8} 1 \frac{1}{2}$. fit area 144—14. Et quia area cum diametro facit
 15. Si ex hac summa detrahatur dicta area 144—14. remanebit dia-
 meter

$$\begin{array}{r} 12 + \sqrt{8} 1 \frac{1}{2} \\ 12 - \sqrt{8} 1 \frac{1}{2} \\ \hline \sqrt{8} 5 \end{array}$$

meter $16 \frac{1}{2} = 18$. cuius quadratum erit $188 + 264 \frac{1}{4} = 30 \frac{1}{2} 8$. quod serua.

Quia vero quadratum lateris minoris $12 = 18 \frac{1}{2}$ est $18 \frac{1}{2} 8$. Et quadratum lateris maioris $12 = 18 \frac{1}{2}$ est $18 \frac{1}{2} 8$. Quae duo quadrata conficiunt $188 + 264 \frac{1}{4}$. qui numerus equalis erit quadrato diametri supra seruato, numero videlicet, $188 + 264 \frac{1}{4} = 30 \frac{1}{2} 8$. Additis ergo $30 \frac{1}{2} 8$ vtrunque, erit equalitas inter $34 \frac{1}{2} 8 + 264 \frac{1}{4}$. & $188 + 264 \frac{1}{4}$. Et ablatis $264 \frac{1}{4}$ vtroque, inter $34 \frac{1}{2} 8$ & $188 + 264 \frac{1}{4}$. Et rursus ablatis $264 \frac{1}{4}$ vtrunque, inter $34 \frac{1}{2} 8$ & 188 . Iam sic. Semissis numeri Zenforum est $17 \frac{1}{2}$. a cuius quadrato $297 \frac{1}{4}$ demptis $264 \frac{1}{4}$ remanet numerus 36 . cuius radix 6 . dempta ex praedicta semisse $17 \frac{1}{2}$. relinquit minorem Zenforum $11 \frac{1}{2}$. & minorem radicem $11 \frac{1}{2}$. Ergo minus, latus positum $12 = 18 \frac{1}{2}$. erit $18 \frac{1}{2} 8$. Maius vero, quod posuimus $12 = 18 \frac{1}{2}$. erit $18 \frac{1}{2} 8$. Quae duo

$$\begin{array}{r} 18 \frac{1}{2} 8 + 18 \frac{1}{2} 8 \\ 18 \frac{1}{2} 8 + 18 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 36 \frac{1}{2} 8 + 36 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 72 \frac{1}{2} 8 + 72 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 144 \frac{1}{2} 8 + 144 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 288 \frac{1}{2} 8 + 288 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 576 \frac{1}{2} 8 + 576 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1152 \frac{1}{2} 8 + 1152 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2304 \frac{1}{2} 8 + 2304 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 4608 \frac{1}{2} 8 + 4608 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 9216 \frac{1}{2} 8 + 9216 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 18432 \frac{1}{2} 8 + 18432 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 36864 \frac{1}{2} 8 + 36864 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 73728 \frac{1}{2} 8 + 73728 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 147456 \frac{1}{2} 8 + 147456 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 294912 \frac{1}{2} 8 + 294912 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 589824 \frac{1}{2} 8 + 589824 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1179648 \frac{1}{2} 8 + 1179648 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2359296 \frac{1}{2} 8 + 2359296 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 4718592 \frac{1}{2} 8 + 4718592 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 9437184 \frac{1}{2} 8 + 9437184 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 18874368 \frac{1}{2} 8 + 18874368 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 37748736 \frac{1}{2} 8 + 37748736 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 75497472 \frac{1}{2} 8 + 75497472 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 150994944 \frac{1}{2} 8 + 150994944 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 301989888 \frac{1}{2} 8 + 301989888 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 603979776 \frac{1}{2} 8 + 603979776 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1207959552 \frac{1}{2} 8 + 1207959552 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2415919104 \frac{1}{2} 8 + 2415919104 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 4831838208 \frac{1}{2} 8 + 4831838208 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 9663676416 \frac{1}{2} 8 + 9663676416 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 19327352832 \frac{1}{2} 8 + 19327352832 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 38654705664 \frac{1}{2} 8 + 38654705664 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 77309411328 \frac{1}{2} 8 + 77309411328 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 154618822656 \frac{1}{2} 8 + 154618822656 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 309237645312 \frac{1}{2} 8 + 309237645312 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 618475290624 \frac{1}{2} 8 + 618475290624 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1236950581248 \frac{1}{2} 8 + 1236950581248 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2473901162496 \frac{1}{2} 8 + 2473901162496 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 4947802324992 \frac{1}{2} 8 + 4947802324992 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 9895604649984 \frac{1}{2} 8 + 9895604649984 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 19791209299968 \frac{1}{2} 8 + 19791209299968 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 39582418599936 \frac{1}{2} 8 + 39582418599936 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 79164837199872 \frac{1}{2} 8 + 79164837199872 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 158329674399744 \frac{1}{2} 8 + 158329674399744 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 316659348799488 \frac{1}{2} 8 + 316659348799488 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 633318697598976 \frac{1}{2} 8 + 633318697598976 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1266637395197952 \frac{1}{2} 8 + 1266637395197952 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2533274790395904 \frac{1}{2} 8 + 2533274790395904 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5066549580791808 \frac{1}{2} 8 + 5066549580791808 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 10133099161583616 \frac{1}{2} 8 + 10133099161583616 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 20266198323167232 \frac{1}{2} 8 + 20266198323167232 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 40532396646334464 \frac{1}{2} 8 + 40532396646334464 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 81064793292668928 \frac{1}{2} 8 + 81064793292668928 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 162129586585337856 \frac{1}{2} 8 + 162129586585337856 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 324259173170675712 \frac{1}{2} 8 + 324259173170675712 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 648518346341351424 \frac{1}{2} 8 + 648518346341351424 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1297036692682702848 \frac{1}{2} 8 + 1297036692682702848 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2594073385365405696 \frac{1}{2} 8 + 2594073385365405696 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5188146770730811392 \frac{1}{2} 8 + 5188146770730811392 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 10376293541461622784 \frac{1}{2} 8 + 10376293541461622784 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 20752587082923245568 \frac{1}{2} 8 + 20752587082923245568 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 41505174165846491136 \frac{1}{2} 8 + 41505174165846491136 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 83010348331692982272 \frac{1}{2} 8 + 83010348331692982272 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 166020696663385964544 \frac{1}{2} 8 + 166020696663385964544 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 332041393326771929088 \frac{1}{2} 8 + 332041393326771929088 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 664082786653543858176 \frac{1}{2} 8 + 664082786653543858176 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1328165573307087716352 \frac{1}{2} 8 + 1328165573307087716352 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2656331146614175432704 \frac{1}{2} 8 + 2656331146614175432704 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5312662293228350865408 \frac{1}{2} 8 + 5312662293228350865408 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 10625324586456701730816 \frac{1}{2} 8 + 10625324586456701730816 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 21250649172913403461632 \frac{1}{2} 8 + 21250649172913403461632 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 42501298345826806923264 \frac{1}{2} 8 + 42501298345826806923264 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 85002596691653613846528 \frac{1}{2} 8 + 85002596691653613846528 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 170005193383307227693056 \frac{1}{2} 8 + 170005193383307227693056 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 340010386766614455386112 \frac{1}{2} 8 + 340010386766614455386112 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 680020773533228910772224 \frac{1}{2} 8 + 680020773533228910772224 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1360041547066457821544448 \frac{1}{2} 8 + 1360041547066457821544448 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2720083094132915643088896 \frac{1}{2} 8 + 2720083094132915643088896 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5440166188265831286177792 \frac{1}{2} 8 + 5440166188265831286177792 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 10880332376531662572355584 \frac{1}{2} 8 + 10880332376531662572355584 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 21760664753063325144711168 \frac{1}{2} 8 + 21760664753063325144711168 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 43521329506126650289422336 \frac{1}{2} 8 + 43521329506126650289422336 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 87042659012253300578844672 \frac{1}{2} 8 + 87042659012253300578844672 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 174085318024506601157689344 \frac{1}{2} 8 + 174085318024506601157689344 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 348170636049013202315378688 \frac{1}{2} 8 + 348170636049013202315378688 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 696341272098026404630757376 \frac{1}{2} 8 + 696341272098026404630757376 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1392682544196052809261514752 \frac{1}{2} 8 + 1392682544196052809261514752 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2785365088392105618523029504 \frac{1}{2} 8 + 2785365088392105618523029504 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5570730176784211237046059008 \frac{1}{2} 8 + 5570730176784211237046059008 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 11141460353568422474092118016 \frac{1}{2} 8 + 11141460353568422474092118016 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 22282920707136844948184236032 \frac{1}{2} 8 + 22282920707136844948184236032 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 44565841414273689896368472064 \frac{1}{2} 8 + 44565841414273689896368472064 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 89131682828547379792736944128 \frac{1}{2} 8 + 89131682828547379792736944128 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 178263365657094759585473888256 \frac{1}{2} 8 + 178263365657094759585473888256 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 356526731314189519170947776512 \frac{1}{2} 8 + 356526731314189519170947776512 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 713053462628379038341895553024 \frac{1}{2} 8 + 713053462628379038341895553024 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1426106925256758076683791106048 \frac{1}{2} 8 + 1426106925256758076683791106048 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2852213850513516153367582212096 \frac{1}{2} 8 + 2852213850513516153367582212096 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5704427701027032306735164424192 \frac{1}{2} 8 + 5704427701027032306735164424192 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 11408855402054064613470328848384 \frac{1}{2} 8 + 11408855402054064613470328848384 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 22817710804108129226940657696768 \frac{1}{2} 8 + 22817710804108129226940657696768 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 45635421608216258453881315393536 \frac{1}{2} 8 + 45635421608216258453881315393536 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 91270843216432516907762630787072 \frac{1}{2} 8 + 91270843216432516907762630787072 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 182541686432865033815525261574144 \frac{1}{2} 8 + 182541686432865033815525261574144 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 365083372865730067631050523148288 \frac{1}{2} 8 + 365083372865730067631050523148288 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 730166745731460135262101046296576 \frac{1}{2} 8 + 730166745731460135262101046296576 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1460333491462920270524202092593152 \frac{1}{2} 8 + 1460333491462920270524202092593152 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2920666982925840541048404185186304 \frac{1}{2} 8 + 2920666982925840541048404185186304 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5841333965851681082096808370372608 \frac{1}{2} 8 + 5841333965851681082096808370372608 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 11682667931703362164193616740745216 \frac{1}{2} 8 + 11682667931703362164193616740745216 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 23365335863406724328387233481490432 \frac{1}{2} 8 + 23365335863406724328387233481490432 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 46730671726813448656774466962980864 \frac{1}{2} 8 + 46730671726813448656774466962980864 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 93461343453626897313548933925961728 \frac{1}{2} 8 + 93461343453626897313548933925961728 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 186922686907253794627097867851923456 \frac{1}{2} 8 + 186922686907253794627097867851923456 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 373845373814507589254195735703846912 \frac{1}{2} 8 + 373845373814507589254195735703846912 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 747690747629015178508391471407693824 \frac{1}{2} 8 + 747690747629015178508391471407693824 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1495381495258030357016782942815387648 \frac{1}{2} 8 + 1495381495258030357016782942815387648 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 2990762990516060714033565885630775296 \frac{1}{2} 8 + 2990762990516060714033565885630775296 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 5981525981032121428067131771261550592 \frac{1}{2} 8 + 5981525981032121428067131771261550592 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 11963051962064242856134263542523101184 \frac{1}{2} 8 + 11963051962064242856134263542523101184 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 23926103924128485712268527085046202368 \frac{1}{2} 8 + 23926103924128485712268527085046202368 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 47852207848256971424537054170092404736 \frac{1}{2} 8 + 47852207848256971424537054170092404736 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 95704415696513942849074108340184809472 \frac{1}{2} 8 + 95704415696513942849074108340184809472 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 191408831393027885698148216680369618944 \frac{1}{2} 8 + 191408831393027885698148216680369618944 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 382817662786055771396296433360739237888 \frac{1}{2} 8 + 382817662786055771396296433360739237888 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 765635325572111542792592866721478475776 \frac{1}{2} 8 + 765635325572111542792592866721478475776 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1531270651144223085585185733442956951552 \frac{1}{2} 8 + 1531270651144223085585185733442956951552 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 3062541302288446171170371466885913903104 \frac{1}{2} 8 + 3062541302288446171170371466885913903104 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 6125082604576892342340742933771827806208 \frac{1}{2} 8 + 6125082604576892342340742933771827806208 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 12250165209153784684681485867543655612416 \frac{1}{2} 8 + 12250165209153784684681485867543655612416 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 24500330418307569369362971735087311224832 \frac{1}{2} 8 + 24500330418307569369362971735087311224832 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 49000660836615138738725943470174622449664 \frac{1}{2} 8 + 49000660836615138738725943470174622449664 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 98001321673230277477451886940349244899328 \frac{1}{2} 8 + 98001321673230277477451886940349244899328 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 196002643346460554954903773880698489798656 \frac{1}{2} 8 + 196002643346460554954903773880698489798656 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 392005286692921109909807547761396979597312 \frac{1}{2} 8 + 392005286692921109909807547761396979597312 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 784010573385842219819615095522793959194624 \frac{1}{2} 8 + 784010573385842219819615095522793959194624 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1568021146771684439639230191045587918389248 \frac{1}{2} 8 + 1568021146771684439639230191045587918389248 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 3136042293543368879278460382091175836778496 \frac{1}{2} 8 + 3136042293543368879278460382091175836778496 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 6272084587086737758556920764182351673556992 \frac{1}{2} 8 + 6272084587086737758556920764182351673556992 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 12544169174173475517113841528364703347113984 \frac{1}{2} 8 + 12544169174173475517113841528364703347113984 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 25088338348346951034227683056729406694227968 \frac{1}{2} 8 + 25088338348346951034227683056729406694227968 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 50176676696693902068455366113458813388455936 \frac{1}{2} 8 + 50176676696693902068455366113458813388455936 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 100353353393387804136910732226917626776911872 \frac{1}{2} 8 + 100353353393387804136910732226917626776911872 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 200706706786775608273821464453835253553823744 \frac{1}{2} 8 + 200706706786775608273821464453835253553823744 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 401413413573551216547642928907670507107647488 \frac{1}{2} 8 + 401413413573551216547642928907670507107647488 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 802826827147102433095285857815341014215294976 \frac{1}{2} 8 + 802826827147102433095285857815341014215294976 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 1605653654294204866190571715630682028430589952 \frac{1}{2} 8 + 1605653654294204866190571715630682028430589952 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 3211307308588409732381143431261364056861179904 \frac{1}{2} 8 + 3211307308588409732381143431261364056861179904 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 6422614617176819464762286862522728113722359808 \frac{1}{2} 8 + 6422614617176819464762286862522728113722359808 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 12845229234353638929524573725045456227444719616 \frac{1}{2} 8 + 12845229234353638929524573725045456227444719616 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 25690458468707277859049147450090912454889439232 \frac{1}{2} 8 + 25690458468707277859049147450090912454889439232 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 51380916937414555718098294900181824909778878464 \frac{1}{2} 8 + 51380916937414555718098294900181824909778878464 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 102761833874829111436196589800363649819557756928 \frac{1}{2} 8 + 102761833874829111436196589800363649819557756928 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 205523667749658222872393179600727299639115513856 \frac{1}{2} 8 + 205523667749658222872393179600727299639115513856 \frac{1}{2} 8 \\ \hline 4110$$

Ponatur minus latus 12 — 1. (Est autem 1. semissis differentie laterum) & maius 12 + 1. Ita enim hoc excedet illud binario, cui minus a maiore sublatum relinquitur 2. ut hic vides $\frac{12}{2} = 6$ & $\frac{13}{2} = 6.5$. Quadrata laterum sunt 144 — 12 + 1. & 169 — 12 + 1. $\frac{144}{2} = 72$ & $\frac{169}{2} = 84.5$. quæ faciunt summam 156 + 1. æqualem quadrato diametri. Ex 12 — 1. in 12 + 1. fit area $\frac{144}{2} = 72$. quæ cum diametro debet facere 58. Si ergo ex 58. dicta area detrahatur, reliqua fiet diameter 59 — 1. 8. cuius quadratum est 3481 — 118 8. Et quia paulo ante idem quadratum inuentum est 144 + 1. erunt duo hæc quadrata inter se æqualia. Additis ergo 118 8 vtroque, erit æquatio inter 188 + 3481. & 120 8 + 3479. Ablatisq. 2 vtrinq. inter 188 + 3479. & 120 8, & rursum ablati 3479 vtroque, inter 188, & 120 8 — 3479. Semissis numeri Zensorum est 60. a cuius quadrato 3600. detractis 3479. remanet numerus 121. cuius radix 11. detracta a prædicta semisse 60. relinquit 49. minorem Zensum: ac proinde minor radix erit 7. Cum ergo minus latus positum sit 12 — 1. & maius 12 + 1. erit illud 6. & hoc 8. quorum differentia est 2. Ex 6 in 8 fit area 48. quæ cum diametro facere debet 58. Detractis igitur 48 ex 58 reliqua fiet diameter 10. quæ etiam reperietur, si laterum quadrata 36 & 64 in unam summam 100 colligantur, quæ æqualis erit quadrato diametri, ideoq. diameter erit 10, id est, 10.

a 47. primi.

IVXX

De Ioh. 8. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

b 47. primi.

HIC etiam cum maiore radice, quæ est 10 71. (quia superior radix 11. addita ad prædictam semissim 60 facit 71. maiorem Zensum, maior propterea radix erit 10 71) nihil efficiet: nam latera, erunt 10 71 — 1. & 10 71 + 1, maiora quam 6 & 8. ideoq. maiorem aream continebunt, quam 48. atque eorum quadrata maius quadratum diametri constituent, quam 100. ac proinde diameter maior erit quam 10. atque ideo area cum diametro maiorem summam conficiet, quam 58. Vbi etiam vides, non posse semper assimi vtramque radicem ad problematis solutionem, ut paulo ante diximus.

26 Est rectangulum, cuius unum latus est 6. & quod sit ex altero latere in diametrum est 80. Quaruntur alterum latus, ac diameter, una cum area.

XXVI.

PONATUR alterum latus 12. Quadrata laterum 6 & 12, sunt 36 & 144. quorum summa 180 + 36. æqualis erit quadrato diametri. Et quia ex latere incognito in diametrum fit numerus 80. si 80 diuidantur per 12 latus ignotum, fiet Quotiens $\frac{80}{12}$ ac tanta erit diameter: quippe cum ex Quotiente hoc $\frac{80}{12}$ in 12, diuisorem producat numerus diuisus 80. ideoq. quadratum diametri erit $\frac{80^2}{12^2}$ æquale priori quadrato eiusdem diametri inuento 180 + 36. Hæc æquatio per multiplicationem in crucem reducetur ad hæc inter 188 + 36 3, & 6400. Ablatis ergo 36 3 vtroque, erit æquatio inter 188, & 6400 — 36 3. Semissis numeri Zensorum est 18. ad cuius quadra-

c 47. primi.

IVXX

quadratum 324. additis 6400. fit numerus 6724. a cuius radice 82. fit prædicta semiffis 18. tollatur, relinquetur pretium 18. 64. Ergo 122 erit 8. latus quæsitum. Nam ex latere 6. in latus 8. fit area 48. Et quadrata laterum 36. & 64. faciunt quadratum diametri 100. ideoq. diametris erit 10. Vbi vides, ex latere 8. inuenio in diametrum 10. fieri 80.

XXVII. 27 Est triangulum æquilaterum ABC , cuius area 60. Quaruntur latus BC , ac perpendicularis AD .

¶ schol. 26. **¶** QVONIAM AD , secat BC , bifariam, ponatur BD , 122, & quodlibet laterum 122. eritq. quadratum BD , 18, & quadratum

¶ 47. primi. lateris AB , 48. Cum ergo duo quadrata BD , AD , æqualia sint qua-



drato AB , erit quadratum AD , 38, & ipsa AD , 18 38. Ex BD , 122, in AD 18 38. fit area trianguli ABC , vt cap. 1. lib. 4. Geom. Pract. demonstrauimus, nimirum 18 38. vt hic apparet: quia 122. 18 38. quadranda est, & quadrato 122. 18. præponendum signum 18. atque ita 18 3. 8. multiplicanda in 18 18. vt ad finem cap. 26. scripsimus. Et quia area posita est 60. erit æquatio inter 60. & 18 38. ideoq. & inter eorum quadrata 3600. & 3 88. Diuisis ergo 3600. per 3. fiet 188. 1200. & 188 1200. erit pretium 122, hoc est, lineæ BD , ac proinde totum latus BC , erit 188 19200. nimirum duplum 188 1200. Ve enim dupletur 188 1200. ducenda est per Zenfizen sum binarij, nimirum per 16. Quoniam autem area 60. producit ex BD , 188 1200. in AD , fit 60. hoc est, radix 188 12960000. diuidatur per 188 1200. fiet Quotiens 188 10800. pro perpendiculari AD . quod probatur. Nam ex 188 1200. in 188 10800. fit 188 12960000. hoc est, 60. area proposita.

¶ ALIUD exemplum. Sit area trianguli 18 243. Positis iisdem, inuenietur æqualitas inter 18 243. & 18 38. ac proinde & inter eorum quadrata 243. & 3 88. Diuisis ergo 243. per 3. fiet 188. 81. cuius 188, est 3. quantitas lineæ BD , ac proinde totum latus BC , erit 6. Quod si diuidatur area 18 243. per BD , quæ est 3. hoc est, per 18 9. fiet Quotiens 18 27. pro perpendiculari AD . quod probatur. quia ex BD , 3. id est, ex 18 9. in AD , 18 27. fit 18 243. area proposita.

XXVIII. 28 Est triangulum æquilaterum ABC , cuius perpendicularis AD , est 6. Quarantur latus BC , & area.

7. PONATUR BD, 12, inuenieturq. AD, $\sqrt[3]{8}$ 3, ut in precedenti enigmatē. Et quia eadem AD, posita est 6. erit aquatio inter 6. & $\sqrt[3]{8}$ 3. Si ergo diuidatur 6. per $\sqrt[3]{8}$ 3. numerus maioris characteris 8. fiet 12. $\sqrt[3]{8}$ 12. pro recta BD, quia ut ad finem cap. 26. diximus 1 numerus $\sqrt[3]{8}$ 3, est numerus radicum, & non Zenforum.

Vel sic. Quoniam aequatio est inter 6. & $\sqrt{36}$ 36, erit quoque aequatio inter eorum quadrata 36. & 36. Divisis ergo 36 per 3. fiet 12. & 12. $\sqrt{12}$ 12. pro linea BD. Atque idcirco totum latus BC, erit $\sqrt{48}$ 48. duplum videlicet $\sqrt{12}$ 12. Arque autem erit $\sqrt{48}$ 48. numerus scilicet productus ex BD, $\sqrt{12}$ 12. in AD, 6. id est, in $\sqrt{36}$ 36.

ALIUD exemplum. Sit perpendicularis AD , 3.

Postea iisdem, reperietur æquatio inter 3. & $\sqrt{3}$ 3. Divisis igitur 3. per $\sqrt{3}$ 3. qui est numerus radicum, ut dictum est, fiet 1 se, $\sqrt{3}$ 3. pro recta BD, totumq. latus BC, erit $\sqrt{3}$ 12.

Vel sic, quia æquatio est inter 3 & $\sqrt{8} \ 3 \ 8$, erit quoque æquatio inter eorum quadrata 9 & $3 \ 8$. Diuisis ergo 9 per 3 fiet $1 \ 8 \ 3$. & $1 \ 26$, $\sqrt{8} \ 3$ pro recta BD , totumque latus BC , erit $\sqrt{8} \ 12$. Area autem erit $\sqrt{8} \ 27$. numerus uidelicet productus ex ED , $\sqrt{8} \ 3$. in AD , 3 id est, in $\sqrt{8} \ 9$. quod verum esse, liquido constat, cum quadratum lateris, nimirum 12 . ad quadratum perpendicularis, id est, ad 9 . proportionem habeat sequitertiam, ut vult Eucl. propof. 12. lib. 13.

29 Est Rhombus $ABCD$, cuius area 60. & proportio
diametrorum AC , BD , sesquiquarta. Quarun-
tur latui, & diametri.

XXIX.

PONATUR maior diameter AC, 5 te, ideoq. minor BD, 4 te a schol. 34.
Quia igitur diametri in Rhombo se mu- primi.

Quia igitur diagonetri in Rhombo se mutuo diuidunt bifariam, arque angulos etiā bifariam: erit AE, diuidens in Isoscele ABD, angulum A, bifariam, ad BD, perpendicularis. Igitur cum area trianguli ABD, producat ex AE, in BE, ut propos. 2. lib. 4. Geom. Pract. ostendimus; & area trianguli CBD, ex CE, hoc est, ex AE, in DE; producat tota area Rhombi ex AE, in BD. Eodemq; modo eadem area producat ex BE, in AC. Fit autem ex BE, a 2e. in AC, 1 2e, numerus 10 8. Igitur aequatio erit inter 60. & 10 8, quod uterque numerus fit area Rhombi. Diuisis ergo 60. per 10. fiet 1 8, 6. & 1 2e, 8 6. Igitur AC, posita 1 2e, erit 8 150. Et BD, posita 4 2e, erit 8 96. quod probatur, quia ex BE, 8 24. (semisse diagonetri BD, 8 96) in AC, 8 150. fit area Rhombi 8 3600, id est, 60. Atque ita cognita est utraque diagonetis.

Deinde quia AE, EB, sunt $28\frac{1}{2}$. & $\sqrt{28\frac{1}{2}}$ 24. & earum quadrata

B b b

 $37\frac{1}{2}$

247. primi. $37\frac{1}{2}$. & 24. quæ simul faciunt $61\frac{1}{2}$. summam^a aequalem quadrato
latus AB, erit latus AB, $\sqrt{61\frac{1}{2}}$.

XXX. 3^o Est Rhombus $ABCD$, cuius area 60. & diuisa
maiore diametro AC , per minorem BD , Quo-
tiens est $1 \frac{1}{2}$. Queruntur diametri, & latus.

QVONIAM ex BE, in AC, fit area Rhombi; fiet ex BD, in AC, duplum areæ, nimirum 120. Ponatur ergo minor diameter BD, 120; iteq. maior diameter AC, 120. ut diuisa per BD, faciat Quo-
 tientem 1. Ex BD, 120, in AC, 120, fit numerus 120. qui æqua-
 lis erit 120. Per multiplicationem ergo in crucem, erit æqualitas
 inter 5 & 480. Diuisi igitur 480 per 5, fiet 120. & 120, 960.
 pro diametro BD, quæ posita fuit 120. At vero AC, posita 120,
 erit 120. quia 120 multiplicata per 1, id est, per 1, facit
 120. Vel etiam, si ad 120, adijcitur 1, nimirum 121, fit sum-
 ma 121. Atque ita inuenta sunt diametri BD, AC, 120 & 121.
 quod probatur. quia ex 121, scilicet diametri BD, in
 120, diametrum AC, fit area Rhombi 3600. hoc est, 60. Dein-
 de quia AB, EB, sunt 120 & 121. & 121, facient earum quadrata
 14400 & 14641. summam 29041, æqualem quadrato lateris AB: propte-
 reaq. latus AB, erit 120 & 121.

A P P E N D I X.

HAEC sunt, studiose Lector, quae de regula Algebra, eiusque explanatione scribenda mihi visa sunt: qui plura requirit, ab alijs huius regule scriptoribus petat. Non gravabor tamen appendicis loco subiungere quatuor aenigmata Ptolemaei: ex libro primo Epigrammatum graecum desumpta, & quintum aliud Euclidis, a scriptis ipsius Epigrammatibus graecis, cum eorum interpretatione, non quidem de verbo ad verbum, sed ut res clarior fieret, expresso illorum sensu duntaxat. Aenigmata Ptolemaei, sunt haec.

1. DE PALLADIS STATVA, QVOTNAM
illa auri talenta appendat.

НЕТ ОУ.

Παλλὰς ἐγὼ τέλειον σφυρέλατον, αὐτὰρ ὁ χυσεῖς

ΑΙΖΟΥΝ ΠΙΛΑΤΟΥ ΔΩΡΟΣ ΑΝΙΣΤΟΠΑΛΩΝ.

Ημεῖς μὲν χρυσὸν λαίστες, ἰσθὰ τινος

Θέωπιν, καὶ δύναται μᾶλλον ἵσχυα Σόλων.

Ἀντὶς ἐσοδὼς θυμίσον, τὰ δ' λοιπὰ τέλαρτε

Ἐνθάδε, ἐν τῇ γῇ, ὅπου Δαίδαλός τε.

PAL-

PALLAS ego sum, malleo hunc in modum fabrefacta: sed aurum munus est iuuenum, qui in studio versantur Poetices. Dimidium quidem auri partem contulit Charisius: Octauam vero Thespis: Decimam debine Solon: Et vigesimam Themison: Reliqua autem nouem talenta, & mercedem item, quae artifice debebatur, contulit Aristodicus.

Quaritur de toto pondere statuae, & quot quisque talenta contulerit.

PONATVR pondus statuae 12 talentorum auri. Ergo Charisius contulit $\frac{1}{2}$ 12 tal. Thespis $\frac{1}{4}$ 12. Solon $\frac{1}{5}$ 12. Themison $\frac{1}{10}$ 12, & Aristodicus 9. talenta. quae omnes partes conficiunt $\frac{1}{2}$ 12 + 9. summam aequalem 12. Ablatis igitur $\frac{1}{2}$ 12 vtrunque, aequalitas erit inter 9. & $\frac{1}{2}$ 12. Diuisis igitur 9 per $\frac{1}{2}$ fiet 12. 40. Atque tot talentorum fuit statua. Charisius ergo contulit 10. talenta, nimirum semissem totius ponderis. Thespis 5. talenta, octauam scilicet partem. Solon 4. talenta, nimirum partem decimam. Themison denique 2. talenta, partem videlicet vigesimam. quae omnes partes cum 9. talentis, quae contulit Aristodicus, conficiunt 40. talenta.

2. DE AVGEAE ARMENTIS, QVOTNAM boues fuerint.

II.

Δὲ πρὸς.

Λυγέλλω ἱερέῃ μέγα δῖος Ἀλλυδίας.

Πανδὸν βουκόλων διζήμενος, ὅς δ' ἀπ' αὐτῆς.

Ἀρξίμω Ἀλκυόνας φίλος ἦεναι τῶνδε,

Μῆρ' δ' ἐξ ὧν γὰρ ἔχοντο πρὶν Δυσπύρρον.

Διδοῦναι δ' ἀπὸ τοῦ Ταρξίππου παρ' ἑρῶν,

Ἀμφὶ δ' ὑπὸ Ἡλιδῶ δῖος ἐκαστὸν ἐμείδεται.

Αὐτὰρ ἐπεὶ Ἀργεῖα ἠρχίσσεται σφολύματα,

Λοιπὸν δ' αὖλ' ἄνευ ἀγέλας ποδὶ πρὸς ἄκρον.

AVGEAM interrogavit generosus Hercules de multitudine armentorum, cui ille respondit. Media horum pars, amice, circa fluuium Alpheum pasitur: octaua autem circa Saturni collem: ceterum duodecima procul binc iuxta loca Taraxippi extrema: At vigesima eorum

Bbb 2

pari

pars circa Elidem pascitur: trigesimam vero in Arcadia ego reliqui. Reliqua autem quinquaginta numero armenta videas ipse.

Quaestio est de numero bouum, & quotnam in singulis locis fuerint.

PONATVR numerus bouum 12. Ergo iuxta fluium Alpheum fuerunt $\frac{1}{2}$ 12 bouum: Et circa collem Saturni $\frac{1}{4}$ 12. At iuxta Taraxippi extrema $\frac{1}{4}$ 12. Circa vero Elidem montem $\frac{1}{20}$ 12. Et in Arcadia $\frac{1}{4}$ 12: & apud Augeam 50. boues. quae omnes partes conficiunt $\frac{1}{2}$ 12 + 50. summam aequalem 12. Ablatis igitur $\frac{1}{2}$ 12 utrobique, aequalitas erit inter 50. & $\frac{1}{2}$ 12. Diuisis ergo 50. per $\frac{1}{2}$ 12. fiet 12. 240. pro numero omnium bouum. quorum semissis 120. fuit circa fluium Alpheum: & 50. boues nimirum $\frac{1}{4}$ circa collem Saturni: Et $\frac{1}{4}$ nimirum 20. iuxta Taraxippi extrema: At iuxta Elidem montem 12. nimirum $\frac{1}{20}$ in Arcadia denique boues 8. pars videlicet $\frac{1}{10}$. Atque omnes hi boues cum 50. qui prope Augeam fuerunt, faciunt 240.

III.

3. LEONIS AENEI CANALES.

Τίσιον.

Χάλκρεος εἰμι λέων, κροῦναι δὲ μοι θυμὸν ἀνδρῶν.

Καὶ σῖμα σὺν ᾧ δέντρον διέτρεπον πόδες.

Παῖδάς τε καὶ τρεῖς δὲ ἡμέαι διέβη θυμῶν,

Καὶ λαὸν Ἰωνῶν, καὶ ποταμὸν δέντρον.

Ἀρκίον ἔξ ὅσων ἐπὶ τοῦ σῖμα, ἐν δ' ἄμα πάντα,

Καὶ σῖμα καὶ γλῆσσας, καὶ δέντρα, εἰπὶ τίσιον:

AENEVS ego sum Leo: canales vero mihi sunt oculi duo: & os cum palma dextri pedis. Implent autem craterem eundem, dexter quidem oculus duobus diebus: sinister vero tribus: Et palma quatuor diebus: Porro sex horis os implere eum potest. Haec igitur simul omnia & os, & oculi, & palma, die quanto tempore eundem craterem impleant?

PONATVR pro tempore 12, horarum. atque dicatur.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|------|---------|------|---------|
| 48 | 12 | 12 | 1 |
| 72 | | 12 | 1 |
| 96 | | 12 | 1 |
| 120 | | 12 | 1 |

Si 48.

Si 48. horis impletur 1. Crater, in 1 2e horarum implebitur $\frac{1}{2}$ 2e Crateris: & sic de reliquis, vt in regula trium quater adhibita vides. Atque omnes hæ partes faciunt $\frac{1}{2}$ 2e. vnus Crateris, æquales 1. Crateri. Si igitur 1. diuidatur per $\frac{1}{2}$ 2e, fiet 1 2e. $\frac{2}{1}$ 2e. hoc est Ho-
ræ 4 $\frac{2}{1}$ 2e, quibus Crater implebitur. quod probatur. vt hic vides.

| Hor. | Crater. | Hor. | Crater. |
|-----------------------------|---------|--------------------|--|
| 48 }
72 }
96 }
6 } | 1 | 4 $\frac{2}{1}$ 2e | $\frac{1}{2}$ 2e
$\frac{1}{2}$ 2e
$\frac{1}{2}$ 2e
$\frac{1}{2}$ 2e |

Nam si oculus dexter 48. horis implet 1. Craterem, horis 4 $\frac{2}{1}$ 2e. implebunt $\frac{1}{2}$ 2e. Crateris vnus, &c. atque omnes istæ partes Crateris conficiunt vnā craterem.

4. DE STATVIS ZETHI, AMPHIONIS, IIII. ac matris ipsorum Antiopes.

Τέτατος.

Αμω μιν ἄμιν εἶκοι μινά ἀκωνί,
Ζῆθός τε Χ' ὃ εὐαίμων, λῶ δ' μιν καὶ βῆ
Τρίνη, το τριπλάσιον πῶδ' Ἀμφίονος
Ἐξ ἑπτὰ δ' ἀνδρῶν, μισθὸν δ' ἑπταίους ταῦτα μιν.

A M B O quidem nos viginti minas appendimus,
Zethus pariter, & meus consanguineus. At si de meis
minis tertiam partem: minarum vero Amphionis quartam
sumpseris, sex in summa inuentis, matris pondus reperies.
Quæstio est, quot minas tum Zethus, tum Amphion eius
consanguineus appenderis.

PONE pro Zetho 1 2e minarum: ideoq. pro Amphione minas
10 — 1 2e. faciesq. tertiam partem Zethi $\frac{1}{3}$ 2e, & quartam partem
Amphionis 5 — $\frac{1}{4}$ 2e, quæ summam faciunt 5 + $\frac{1}{3}$ 2e, æqualem 6.
Ablatis igitur 5. vtrobiq. erit æquatio inter $\frac{1}{3}$ 2e. & 1. Diuisa
ergo 1. per $\frac{1}{3}$ 2e, fiet 1 2e. 12. atque tot minarum fuit statua Zethi.
Amphionis vero 8. & Antiopes 6. quæ minæ omnes faciunt 26.

V. 5. EVCLIDIS GEOMETRICVM.

Ευκλείδου Γεωμετρικόν.

Ημίσεος εἰς ἑσὶν πορίσασθαι δύοσι ἑκάστου
 Αὐτὸν ἄλλος συνάγεσθαι ἐπ' αὐτῶν πορίσασθαι
 Τῶν δ' ἡμετέρων ἀρχῶν ἐκείνων ἐκείνων.
 Μῆτερ τι κλαίεις; ἀποφύγεσθαι αὐτὸν κόπον:
 Εἰ μίσην ἔμοι δοῖς: διπλάσιον σίσεις ἔργον.
 Εἰ δ' ἔν' ἀπλάτῳ, πάντως ἐλάττω φολάζεις.
 Εἰπέ τι μίσην ἔστιν Γεωμετρικὴν ἐπίνοιαν.

IBANT Mulus, & Asina vinum portantes: Asi-
 na autem ex dolore ponderis sui ingemiscebat. Qua re
 visa, Mulus grauitur ingemiscentem Asinam sic interro-
 ganit. Mater cur ita lamentaris, cur puella instar la-
 crimas fundis? Mensuram mihi vnā si dederis, duplo,
 quam tu, plus fustulero: sin vero tu à me vnā acceperis,
 idem planè, quod ego, pondus feres. Mensuram itaque peri-
 tissime Geometer dicas volo.

Alia versio.

Mula, Asinaque duos imponit seruulus vtres
 Impletos vino, segnemque ut vidit Asellam
 Pondere defessam vestigia figere tarda
 Mula regat: Quid chara parens cunctare, gemisque?
 Vnam ex vtres tuamensuram si mihi reddas.
 Duplum oneris tunc ipsa feram: Sed si tibi tradam
 Vnam mensuram, fient aqualia vtrique
 Pondera. Mensuras dic docte Geometer istas.

Alia versio.

Mulus portabat vinum comitatus Asella.
 Hæc oneris quaritur pondera vassa sui.
 Ille graues matris gemitus miratur, & inquit,
 Cur adeo lachrymis lumina massa fluunt?
 Mollis.

Mollities teneras, mater, decet illā puellas,

Quas premit insuetus, debilitatque labor.

Unam mensuram si nostros fundis in vires,

Ipse tui vini pondera dupla seram:

Sin unam contra nostros de sacce leuabis

Partem, tunc æquum pondus vterque feret.

Dic mihi mensuras, o doctus Geometer istas,

Non aliter Phæbi nomine dignus eris.

PONITUR pro mensuris muli 1 2e. ac proinde pro mensuris asinæ
 $\frac{1}{2}$ 2e + 1 $\frac{1}{2}$. Ita enim si mulo dederit 1. mensuram, habebit mulus
 1 2e + 1. quod pondus duplum erit reliquo pondèri asinæ, nimirum
 $\frac{1}{2}$ 2e + 1 $\frac{1}{2}$. At si mulus asinæ det 1. mensuram, erit reliquum pon-
 dus muli 1 2e — 1. æquale pondèri asinæ, quod tunc erit $\frac{1}{2}$ 2e + 1 $\frac{1}{2}$.
 Addatur 1. utrobique, fietq. æquatio inter 1 2e. & $\frac{1}{2}$ 2e + 1 $\frac{1}{2}$. Abla-
 taq. $\frac{1}{2}$ 2e. utrinque, erit æqualitas inter $\frac{1}{2}$ 2e. & 1 $\frac{1}{2}$. Diuisis igitur
 $\frac{1}{2}$ 2e. per $\frac{1}{2}$ fiet 1 2e $\frac{1}{2}$. hoc est, 7. pro mensuris muli. Asina ergo
 habens $\frac{1}{2}$ 2e + 1 $\frac{1}{2}$. portabit mensuras 3 $\frac{1}{2}$. & 1 $\frac{1}{2}$. nimirum 5. quod
 probatur. Nam si mulo det asina 1. mensuram, habebit mulus 8.
 mensuras, quæ duplæ sunt 4. mensuratum, quæ asinæ supersunt.
 At si mulus det asinæ mensuram 1. portabit vterque 6. mensuras.

F I N I S.



ROMÆ, Apud Bartholomæum Naudæum.

Anno M. DC. VIII.

SUPERIORVM PERMISSV.

188
REGISTRVM.

a b c d.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R
S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll
Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vv Xx
Yy Zz.

Aaa Bbb.

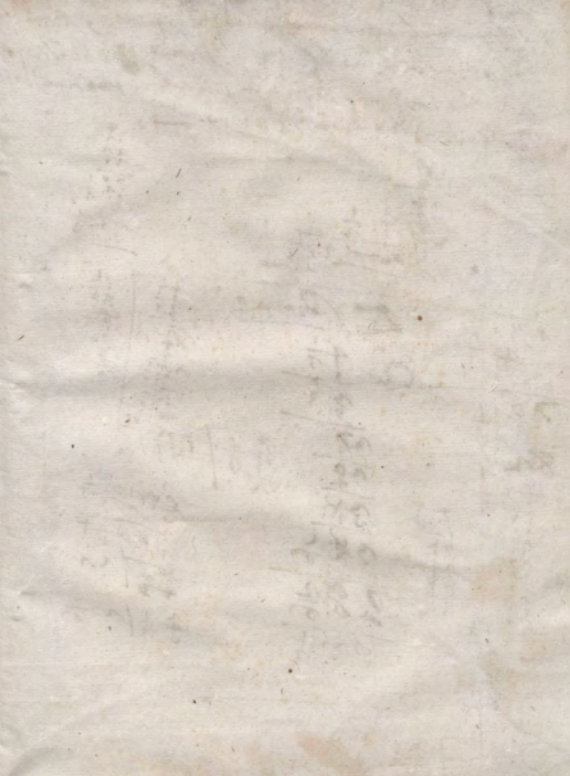
Omnes sunt Duerniones, præter
d, Ternionem.



ROMÆ, Apud Bartholomæum Zannettum.

Anno M. DC. VIII.

SVPERIORVM PERMISSV.



167 | 10

100.3

6000
210
600000
1307260
1369990000

1000000
1000000
750000
05000000