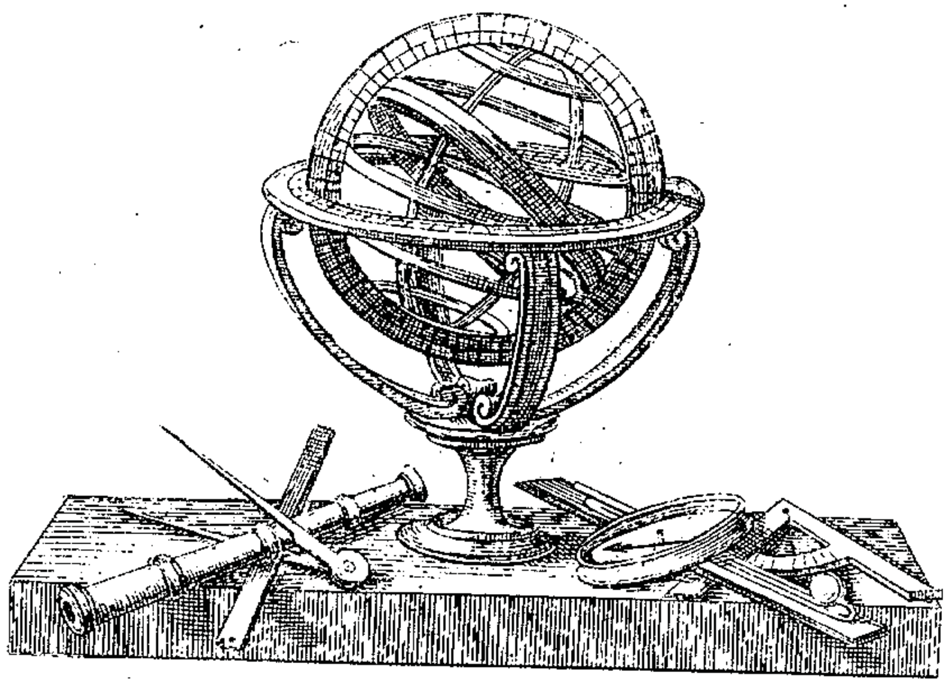
VINCENTII RICCATI

SOC. JESU

OPUSCULORUM

Ad res Physicas, & Mathematicas pertinentium

TOMUS PRIMUS.



BONONIÆ

Apud Lælium a Vulpe Instituti Scientiarum Typographum.

MDCCLVII.

SUPERIORUM AUCTORITATE.

PRÆFATIO.

QUanam de cauſſa id conſilii ceperim, ut omnia mea opuſcula ſimul collecta in publicum emitterem, paucis tibi, Benevole Lector, aperiendum mihi videtur. Annis hiſce ſeptemdecim, quibus, ut munere meo fungar, tum puram, tum mixtam matheſim doceo, plurima a me opuſcula perfecta ſunt, quorum multa aut ſeparatim typis mandata, aut in Academia Bononienſi, aliiſque collectionibus inſerta in doctorum manus pervenerunt: plura vero ſcripta manu habebam, quæ cum amicis, diſcipuliſque communicata, ab iiſdemque tranſcripta, & in aliquot Italiæ civitates delata non prorſus deliteſcebant.

Quamobrem multæ ad me, & frequentes veniebant petitiones, ut aliquod ex meis opuſcusculis huc illuc mittendum curarem. Quæ separatim edita sunt, donec suppetebant exemplaria, mittebam libentissime. Alia autem oportebat, ut viris analyseos ignaris transcribenda committerem, & transcripta magna cura diligentiaque corrigerem; quæ res maxima me molestia afficiebat, tum per sese, tum quod otium, quo non abbundo, mihi adimebat in studiis utiliter consumendum. Accedit, quod exemplaria permulta, quæ nemine corrigente in aliis civitatibus facta sunt, adeo vitiosa erant, & errorum plena, ut ne ipse quidem aliquando quidquam intelligere potuissem, nisi ea cum meo exemplari contulissem. Ut me hisce incommodis, molestiisque liberarem, statui eadem opuscula in plures tomos distributa formis imprimere, atque hoc pacto eorum, qui illa quotidie flagitant, petitionibus satisfacere.

Verumtamen ne quis forte putet, omnia mea opera se in hac collectione habiturum, aperte profiteor, me tantum epistolas, ac disquisitiones, quæ breviora quædam sunt opuscula, hic edere, non autem libros, qui sin minus magno, justo saltem volumine continentur. Quare frustra requires aut Dialogos italice conscriptos de Viribus vivis, & de actionibus potentiarum, aut Commentarium de usu motus

tra-

tractorii in conſtructione æquationum differentialium, aut Commentarium alterum de ſeriebus recipientibus ſummam algebraicam, aut exponentialem: qui libri omnes impreſſi ſunt Bononiæ, tertius typis Hæredum Conſtantini Piſarii, & Jacobi Phylippi Primodii anno 1756, primus, & alter typis Lælii a Vulpe annis 1749, 1752. Alia opuſcula omnia in plures tomos diſtributa reperies.

Nunc vero prodit tomus primus, qui, ſi excipias diſquiſitionem de centro æquilibrii, & epiſtolas duas, omnia inedita continebit. In aliis tomis edendis optandum, ut quemadmodum mea diligentia non deerit, ita ne typographæ quidem diligentia deſideretur.

IN-

INDEX OPUSCULORUM.

OPUSCULUM PRIMUM.

OPUSCULUM SECUNDUM.

OPUSCULUM TERTIUM.

OPUSCULUM QUARTUM.

OPUSCULUM QUINTUM.

OPU-

OPUSCULUM SEXTUM.

OPUSCULUM SEPTIMUM.

OPUSCULUM OCTAVUM.

OPUSCULUM NONUM.

OPUSCULUM DECIMUM.

OPUSCULUM UNDECIMUM.

OPU-

OPU,

OPUSCULUM PRIMUM.

De centro Æquilibrii. Disquisitio Physico-Mathematica. (a)

EX multis, ac prope innumeris Scriptoribus, qui de re mechanica egerunt, nullus fortasse est, qui de puncto illo verba non fecerit, ex quo si grave suspendas, omnia quiescunt in æquilibrio. Atque hujusmodi punctum ita constans esse compertum est, ut non mutetur, quacumque ratione circumvoluto corpore, dummodo ejus partes eumdem respective situm retineant.

Verum quidquid tradiderunt, illi dumtaxat hypothesi aptavere, in qua concipiuntur partium gravitates directiones habere parallelas: quæ hypothesis quamquam in iis, quæ usui hominum, & commodis serviunt, unice adhibenda est; tamen pleræque aliæ hypotheses a philosophis jamdiu consideratæ sunt, & difficillimis phænomenis explicandis accommodatæ. Quamobrem operæ pretium duximus, pulcherrimam de æquilibrii centro Theoriam promovere, & ad illas etiam hypotheses transferre, in quibus directiones potentiarum centrum petunt, quamcumque cum distantiis a centro potentiæ teneant proportionem. Quæ meditando nacti sumus, ea in hunc modum disponemus, ut primum de potentiis parallelis, deinde de illis, quæ ad centrum tendunt, verba faciamus. Quod spectat ad parallelas, eas habere centrum æquilibrii constans, firmiore fortasse, quam antea factum est, demonstratione probabimus (b); tum methodos exponemus, quibus usi sunt scriptores ad

(a) *Edita fuit hæc disquisitio primum separatim anno 1746, deinde in tertia parte secundi tomi Ac. Bon. anno 1747.*

(b) *Præstitit hoc idem aliquot post annos Rogerius Boscovichius vir doctissimus nempe anno 1751, adhibita diversissima methodo.*

hujusmodi centrum determinandum. De potentiis autem centrum petentibus quæremus, quænam hypotheses careant, quænam prædita sint centro æquilibrii constante; post, qua ratione methodi illæ, quibus inventum est centrum æquilibrii in potentiis parallelis, ad rem nostram traduci possint, breviter exponemus.

Itaque ad rem propositam propius accedentes, præmittimus hujusmodi notissimum

LEMMA.

INvenire potentiam æquivalentem duabus, quæ virgæ rigidæ applicantur.

Virgæ rigidæ AB (*Fig.* 1.) applicentur duæ potentiæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda sit. Directiones AM, BN producantur, donec concurrant in C, & transferantur potentiæ in punctum C, sumptis in earum directionibus CS = BN, CR = AM: nihil enim interest, utrum potentiæ positæ sint in locis AM, BN, aut in locis CR, CS. Hæ autem componantur facto parallelogrammo CSTR, cujus diagonalis CT æquivalentem repræsentabit. Hæc producatur, donec concurrat in K cum virga rigida AB. Perspicuum est, potentiam CT translatam in KL, & applicatam virgæ rigidæ in K æquipollere duabus potentiis AM, BN.

Ubi advertendum est, determinandam esse non solum quantitatem potentiæ æquivalentis, sed etiam punctum, ubi applicanda est: non enim æquivalet, nisi puncto K applicata.

Corollarium primum. Tres potentiæ KL, AM, BN sunt inter se ut sinus angulorum ACB, KCB, KCA. Quare diviso angulo ACB ita, ut sinus angulorum ACK, BCK sint reciproce ut ipsæ potentiæ AM, BN, invenietur punctum K, cui potentia æquivalens est applicanda.

Corollarium alterum. Ex puncto K demissis in potentiarum directiones normalibus KP, KQ, sumptoque tamquam sinu toto KC, constat KP, KQ esse sinus angulorum ACK, BCK: sed potentiæ ex cor. 1. debent esse reciproce proportionales sinibus angulorum ACK, BCK: Ergo reciproce ut perpendiculares KP, KQ.

Corollarium tertium. Si potentiæ AM, BN ad eamdem partem dirigantur, punctum K cadit inter puncta A, B. Verum si potentia AM ad unam partem solicitaret, BN ad oppositam, punctum K caderet extra puncta B, A, modo ad unam, modo ad alteram partem, ut circumstantiæ requirunt.

Corollarium quartum. Ad æquilibrium habendum satis est

effi-

efficere, ut potentia æquivalens ad oppositam plagam dirigatur. Quapropter si virga rigida ex puncto K sustentetur, potentiæ AM, BN in æquilibrio quiescent; & constabit quam potentiam exerceat fulcrum K, nimirum æqualem, & oppositam potentiæ æquivalenti KL.

Corollarium quintum. Si potentiarum directiones AM, BN concurrant in puncto C, etiam potentia ipsis æquivalens in eodem puncto concurrat, necesse est. Quare si duæ potentiæ AM, BN fuerint parallelæ, etiam æquivalens eisdem erit parallela.

DE POTENTIIS PARALLELIS.

Ex præmisso Lemmate possem omnia invenire, quæ ad potentias parallelas pertinent: satis enim esset supponere, eas esse potentias parallelas, quæ ad angulum infinite acutum in puncto infinite distante conveniunt. Ex qua suppositione liceret e vestigio colligere, distantias punctorum A, B a puncto K esse in ratione reciproca potentiarum, & potentiam æquivalentem KL esse æqualem summæ potentiarum AM, BN, si hæ ad eamdem partem dirigantur; si vero ad oppositas, earumdem differentiæ. Quæ res statim cuique patebit, qui infinitorum, & infinite parvorum Theoriam non ignoret. Tamen aliam placet moliri demonstrationem longiorem quidem, sed non inelegantem, & quæ in infinitorum Theoriam nequaquam ingreditur.

Ad demonstrationem adornandam præter præmissum Lemma indigeo dumtaxat axiomate, quod maxime simplex est, atque perspicuum. Illud autem est hujusmodi. Si duabus, aut pluribus potentiis addantur duæ, quæ æquales sint, & contrariæ, eadem prorsus erit potentia æquivalens.

Virgæ rigidæ AB (*Fig.* 2) applicentur potentiæ parallelæ AM, BN, quibus æquivalens invenienda est. Dividatur linea AB bifariam in D: & quoniam duæ potentiæ æquales, & contrariæ non immutant æquipollentem, addantur duæ potentiæ AD, BD ita, ut invenienda jam sit æquipollens quatuor potentiis AM, AD, BN, BD. Primæ duæ componantur facto parallelogrammo AMFD, & inveniatur æquivalens AF. Eodem modo facto parallelogrammo BNGD inveniatur æquivalens duabus BD, BN nempe BG. Hisce æquivalentibus substitutis invenienda jam erit potentia æquivalens duabus AF, BG. Producatur BG, donec concurrat cum AF in C, factisque RC = AF, SC = BG, completoque parallelogrammo CRTS, ducatur diagonalis TC, quæ erit potentia æquivalens potentiis AM, BN applicata in puncto K.

Jam vero ajo primo, potentiam æquipollentem TC esse parallelam potentiis AM, BN. Ex C ducatur CO parallela AB. Propter triangula similia ADF, COF erit AF : CF :: AD : CO. Item propter similitudinem triangulorum BDG, GOC erit BG : GC :: BD : CO : atqui, quum sit AD = BD, est AD : CO :: BD : CO : igitur per æqualitatem rationum AF : CF :: BG : CG sive permutando AF : BG, aut RC : RT :: CF : CG : Ergo duo triangula TRC, GCF, quæ habent angulos TRC, GCF æquales, & circa hosce angulos latera proportionalia, sunt similia : Igitur angulus RCT = CFG : Ergo TC est parallela DF, sive potentiis AM, BN. Q. E. D.

Ajo deinde, potentiam æquivalentem TC fore æqualem potentiis AM, BN. Ex punctis R, S ducantur RP, SQ parallelæ AB. Duo triangula AFD, RCP non solum sunt similia, sed etiam æqualia propter æqualitatem laterum AF, RC : Ergo CP = FD = AM. Eodem modo triangula GBD, CSQ propter æqualitatem laterum BG, SC non solum similia sunt, sed etiam æqualia : Ergo CQ = GD = BN, sed CQ = TP : Ergo TP = BN : Ergo duæ simul CP + TP = TC = AM + BN. Q. E. D.

Si potentiæ AM, BN ad oppositas plagas traherent, tunc potentia æquivalens TC differentiæ potentiarum AM, AN æqualis inveniretur.

Ajo postremo, potentias AM, BN esse in ratione reciproca distantiarum AK, BK. Namque DF, seu AM : KC :: AD : AK. Item KC : DG, seu BN :: BK : BD, seu AD. Ergo per rationem ex æquo perturbatam AM : BN :: BK : AK. Q. E. D. (a)

Si

(a) *Alia methodo nihil minus eleganti* (Fig. 7), *& breviori fortasse potest hæc propositio probari. Virgæ rigidæ* AB *applicatæ sint potentiæ parallelæ* AM, BN, *quarum æquivalens est determinanda. Divide* AM, BN *bifariam in* C, D, *atque per hæc puncta parallelas* AB *duc* EG, IF, *quæ & inter se sint æquales, & bifariam dividantur in punctis* C, D. *Claudantur parallelogramma* AEMG, BINF, *quorum diagonales sunt* AM, BN. *Constat potentiæ* AM *æquivalere duas* AE, AG, *& potentiæ* BN *æquivalere duas* BI, BF: *Igitur si inveniatur æquipollens quatuor* AE, BF, AG, BI, *eadem erit æquipollens duabus* AM, BN.

Producantur EA, FB *donec concurrant in* H, *ex quo puncto parallela potentiis* AM, BN *agatur* HK *secans* AB *in* K: *Ajo rectam* AB *in puncto* K *dividi in ratione reciproca potentiarum* AM, BN. *Namque ob similitudinem triangulorum valent duæ proportiones* AK:

Si AM, BN ad plagas contrarias solicitarent, eadem proportio omnino valeret, sed punctum K caderet post puncta B, A ad partem majoris potentiæ AM.

Post hanc demonstrationem nemini obscurum esse potest, & circa punctum K dividens lineam AB in ratione potentiarum reciproca parallelas potentias in æquilibrio manere, & easdem jure optimo collectas intelligi posse in eodem puncto K; quod nihil aliud est, quam pro duabus potentiis æquivalentem substituere ipsis æqualem. Quæ duæ proprietates latissime patent, & conveniunt potentiis, quemcumque ipsæ angulum cum linea AB efficiant, dummodo maneant parallelæ, & eisdem lineæ AB punctis applicatæ.

Quod de duabus potentiis, idem de tribus, de quatuor &c., immo de infinitis cuicumque corpori, superficiei, aut lineæ applicatis hac progressione demonstratur. Namque sint plures potentiæ A, B, D &c. (*Fig. 3.*) parallelæ applicatæ cuicumque massæ in pun-

---

HK :: EC : CA, HK : BK :: BD : DF: *Ergo quum* EC *per construct. æquet* DF, *per rationem ex æquo perturbatam fiet* AK : BK :: BD : AC, *seu* :: BN : AM.

Abscinde HS = AE, *&* HT = BF, *& duc* SP, TQ *parallelas* AB, *manifestum est, esse* SP = EC, TQ = DF: *Ergo* SP = TQ. *Produc* HQ *in* R, *ut* PR = HQ, *& junge* SR, TR. *Perspicuum est,* SR *fore æqualem, & parallelam* HT: *Ergo* HSRT *erit parallelogrammum: Igitur duabus potentiis* HS, HT, *sive* AE, BF *æquivalet potentia* HR: *sed* HR = AC + BD. *Namque* HP = AC, *&* PR = HQ = BD: *Ergo duabus potentiis* AE, BF *æquivalet potentia* HR, *quæ est & parallela potentiis* AM, BN, *& æqualis earum semisummæ, & dividit* AB *in ratione reciproca potentiarum earumdem.*

Simili methodo productis AG, BI, *donec concurrant in* L, *& ducta* LK *parallela* AM, BN *ostendam punctum* K *dividere* AB *in ratione reciproca potentiarum* AM, BN. *Quare punctum* K *idem erit ac prius, &* HK, LK *in directum jacebunt. Tum eodem instituto ratiocinio palam faciam, duabus potentiis* AG, BI *æquivalere potentiam parallelam potentiis* AM, BN, *æqualem earum semisummæ, applicandam in puncto dividente* AB *in ratione reciproca potentiarum earumdem: Ergo potentia æquivalens quatuor* AE, AG, BF, BI, *seu duabus* AM, BN *erit hisce* AM, BN *parallela, æqualis earum summæ, & applicanda in puncto* K *dividente* AB *in ratione reciproca earumdem potentiarum.* Q. E. D.

punctis A, B, D. Jungatur AB, quæ dividatur in K in ratione reciproca potentiarum A, B: demonstratum est potentias circa punctum K æquilibrium ubique facere, & in eodem puncto collectas intelligi posse. Intelligantur itaque in puncto K collectæ, & jungatur KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca A + B : D: patet circa punctum H potentias esse semper in æquilibrio; & in eodem collectas intelligi posse. Quæ ratiocinatio quum ad quotquot volueris potentias etiam infinitas extendi possit, palam est potentias parallelas ejusmodi centrum habere, circa quod non solum in æquilibrio maneant, sed etiam in eodem colligi possint, aut pro ipsis substitui una dumtaxat potentia ipsarum aggregato æqualis. Atque hoc punctum semper idem est, quacumque ratione massa convertatur, modo potentiæ maneant parallelæ, & applicatæ eisdem massæ punctis in eisdem semper respective distantiis: ut, si mota, & circumvoluta quocumque pacto massa, cujus partes eumdem respective situm retineant, ipsæ semper lineæ finienti perpendiculares exsisterent.

Hæc ipsa est hypothesis gravitatis corporum, quum eorum directiones parallelæ esse supponuntur; in qua hypothesi singulis particulis corporis æqualibus potentiæ æquales, parallelæ, & perpendiculares horizonti applicantur. Igitur intra quæcumque corpora cujuscumque figuræ punctum invariabile exsistit, circa quod corpora quomodocumque suspensa æquilibrata quiescunt, & in quo omnium partium gravitas jure optimo intelligitur collecta: quod centrum gravitatis appellatur.

Postquam demonstratum est, potentias parallelas etiam numero infinitas præditas esse centro æquilibrii constante, reliquum est, ut promissis satisfacientes methodos indicemus, quibus a doctissimis viris centrum idem est determinatum. Nemo unus non videt, rem expertem esse omnis difficultatis, si potentiæ sint numero finitæ, & solummodo negotium facessere, si sint numero infinitæ; ut si cuilibet puncto lineæ, aut superficiei, aut corporis sua potentia applicata fuerit. Duas methodos a Scriptoribus usurpatas video; prima usi sunt Varignonius in Ac. Reg. 1714., Hermannus in Phoronomia, aliique bene multi. Alteram excogitavit, & in Ac. Reg. 1731. exposuit doctissimus Clairaut vir in rebus geometricis eximius.

Quod pertinet ad primam. Sint quælibet potentiæ A, B, D &c. applicatæ cuicumque corpori, quæ potentiæ sibi ipsis semper parallelæ remaneant ex. ca. perpendiculares horizonti: ajo fore, ut ducto quolibet plano, & ex punctis A, B, D ad illud demissis perpendicularibus AM, BN, DQ, item ex H communi gravitatis

centro

centro HO, valeat æqualitas $A \cdot AM + B \cdot BN + D \cdot DQ = \overline{A+B+D} \cdot HO$.

Accommodetur, & circumvolvatur corpus simul cum plano ita, ut potentiarum directiones sint eidem normales. Tum jungatur AB, inventoque duarum potentiarum A, B æquilibrii centro K, normalis plano ducatur KP, & per punctum K ducatur RKS parallela MN ductæ in plano. Propter similitudinem triangulorum RKA, SKB erit $KB : KA :: BS : AR$; sed $A : B :: KB : KA$: Ergo $A : B :: BS : AR$: Igitur $A \cdot AR = B \cdot BS$: sed $A \cdot AR$ est excessus rectanguli $A \cdot KP$ supra $A \cdot AM$; & $B \cdot BS$ est excessus rectanguli $B \cdot BN$ supra $B \cdot KP$: Ergo $A \cdot AM : A \cdot KP$ est arithmetice sicut $B \cdot KP : B \cdot BN$: Ergo $A \cdot AM + B \cdot BN = \overline{A+B} \cdot KP$.

Jungatur jam KD, quæ dividatur in H in ratione reciproca $\overline{A+B} : D$: demittatur HO normalis plano, & ducatur per punctum H recta THV parallela PQ ductæ in plano. Propter similitudinem triangulorum KHT, DHV erit $HD : HK :: DV : KT$; sed $\overline{A+B} : D :: HD : HK$: Igitur $\overline{A+B} : D :: DV : KT$: Ergo $\overline{A+B} \cdot KT = D \cdot DV$; sed $\overline{A+B} \cdot KT$ est excessus rectanguli $\overline{A+B} \cdot KP$ supra $\overline{A+B} \cdot HO$, & $D \cdot DV$ est excessus rectanguli $D \cdot HO$ supra $D \cdot DQ$: Ergo $\overline{A+B} \cdot KP : \overline{A+B} \cdot HO$ est arithmetice ut $D \cdot HO : D \cdot DQ$: Ergo $\overline{A+B} \cdot KP + D \cdot DQ = \overline{A+B+D} \cdot HO$; sed ex prima parte $\overline{A+B} \cdot KP = A \cdot AM + B \cdot BN$: Igitur $A \cdot AM + B \cdot BN + D \cdot DQ = \overline{A+B+D} \cdot HO$. Qui progressus quum ad infinitas etiam potentias extendi possit, consequitur pro illis quoque propositionem æque valere (a).

Supervacaneum judico, advertere cum potentias ad plagam oppositam solicitantes, tum distantias cadentes ad alteram plani partem fore negativas, propterea signo — esse afficiendas. Jam vero vocentur singulæ potentiæ $= p$, earum summa $= Sp$, distantiæ singularum a plano dato $= x$, summa rectangulorum ex distantiis, & potentiis $= Spx$, distantia centri gravitatis a plano dato $= u$,

(a) *Progressum superioris demonstrationis penitus attendenti palam fiet, non esse necesse, ut lineæ* AM, BN *&c. sint plano* MQ *perpendiculares, sed satis esse, ut sint parallelæ inter se. Quæ animadversio sæpe ad inveniendum gravitatis centrum affert utilitatem.*

$= u$, erit semper $\mathrm{S}px = u \cdot \mathrm{S}p$: Ergo $u = \frac{\mathrm{S}px}{\mathrm{S}p}$. Q. E. I.

Methodum doctissimi Clairaut (*Fig.* 4) exponens, ut brevior sim, paullo alia ratione utar ab ea, quam Auctor sequutus est. Sint potentiæ quælibet parallelæ applicatæ lineæ, vel superficiei, vel corpori, quas per AEB designo, quarum æquilibrii centrum sit K; item aliæ similes designatæ per EBbe, quarum centrum æquilibrii constans sit H; omnium autem centrum sit k. Ab hisce autem punctis ad quamlibet lineam datam demittantur normales KP, kp, HO: Perspicuum est Kk : Hk : : EBbe : AEB: Sed Pp : Op : : Kk : Hk: Ergo Pp : Op : : EBbe : AEB.

Jam vero sint ut supra potentiæ parallelæ AEB, quarum quæritur centrum æquilibrii constans, applicatæ cuicumque lineæ, superficiei, aut corpori, cujus axis aliquis sit AB. Augeatur hic infinitesimo elemento Bb, cui respondeant potentiæ EBbe. Illarum centrum æquilibrii constans sit K, istarum H; omnium autem sit k: quæ tria puncta in eadem linea recta constituta sunt. Ab hisce punctis demittantur in axem perpendiculares KP, kp, HO. Potentiæ AEB vocentur $= \mathrm{S}p$; potentiæ EBbe, quæ nihil aliud sunt, quam illarum differentia $= p$, AB $= x$, AP $= u$, Pp $= du$. Ex paullo ante dictis constat fore AEB : EBbe : : OP $=$ Bp $=$ BP : Pp, sive in signis analyticis $\mathrm{S}p : p : : x - u : du$: Ergo $du \cdot \mathrm{S}p = px - ux$, sive $du \cdot \mathrm{S}p + up = px$, & integrando $u \cdot \mathrm{S}p = \mathrm{S}px$, sive $u = \frac{\mathrm{S}px}{\mathrm{S}p}$: quemadmodum etiam per methodum primam inventum est. (a)

Dum invenitur AP $= u$, nihil aliud invenitur, quam distantia centri æquilibrii K, quod quæritur, a plano transeunte per punctum A, cui sit rectus axis AB: sed si hoc modo inveniatur distantia ejusdem centri a tribus planis non parallelis, illud hac ratione determinabitur. Omitto casus, in quibus methodus fieri brevior potest, neque formulas cuilibet hypothesi applico: hæc enim obvia sunt, & ubique a Scriptoribus indicata. (b)

DE

(a) *Ad hanc quoque demonstrationem conficiendam sufficit, ut* KP, kp, HO, EB, eb *sint inter se parallelæ.*

(b) *Geometras monitos volo, me de potentiis parallelis loquentem eam unice hypothesim in disquisitione spectasse, in qua potentiæ eædem semper manent, neque mutantur, mutata earum distantia a dato plano: quam hypothesim duntaxat tractarunt scriptores, qui ante me floruerunt ad unum omnes. Sed quid vetat, quominus eas quoque potentias contemplemur, quæ cum distantia a dato plano tenent proportionem ali-*

DE POTENTIIS CENTRUM PETENTIBUS.

ANtequam potentias ad centrum tendentes considerandas suscipio, necesse est, ut solutum exhibeam hujusmodi geometricum

PROBLEMA.

In basi AB dati trianguli ABC (*Fig.* 8) dato puncto K, ducere rectam RKS ad latera terminatam ita, ut RK = SK.

Accipiatur KM = AK, & a puncto M agatur MS parallela lateri CA, quæ alterum latus CB secabit in S. Ducatur SKR; ajo hanc a puncto R divisam esse bifariam.

Demonst. Quoniam AR, MS parallelæ sunt per constructionem, triangula RKA, SKM erunt similia; sed latera homologa AK, MK ex constructione æqualia sunt: Igitur triangula RKA, SKM non solum similia sunt, sed etiam æqualia: Ergo KR = KS. Q. E. D. (a)

quam vel directam, vel reciprocam. Non est difficile his quoque formulas accommodare, per quas æquilibrii centrum determinetur.

Potentia absoluta, idest ejus valor in determinata aliqua distantia a plano dato vocetur $= p$, *distantia potentiæ a plano* $= z$, *functio distantiæ, cui proportionatur potentia* $= fz$; *distantia vestigii potentiæ in plano quocunque a puncto dato* $= x$, *& distantia centri æquilibrii* $= u$: *formula hæc valebit* $u = \frac{Spx.fz}{Sp.fz}$: *valor autem potentiæ æquivalentis applicandæ in centro æquilibrii erit* $= Sp.fz$.

Quare ut habeatur potentia absoluta applicanda centro æquilibrii, vocata hujus distantia a plano dato $= t$, *fiat* $\frac{Sp.fz}{ft}$, *hæc erit potentia absoluta. Omnia constant ex illis, quæ explicata sunt in disquisitione.*

(a) *In prima disquisitionis editione (Fig. 5) hæc legebatur problematis solutio. Ratione analytica utor, & factum suppono, quod quæritur; tum duco* RG, SF *parallelas* AB, *& concurrentes cum* CK *in punctis* G, F: *constat* RG = SF, *&* KG = KF. *Propter similitudinem triangulorum erit* CF : CK :: FS : KB. *Item* CK : CG :: KA : RG = FS: *Ergo per rationem ex æquo perturbatam* CF : CG : AK : BK: *tum dividendo, & accipiendo conse-*

Potentias tendentes ad centrum, quas modo cœpi considerare, pono crescere, vel decrescere, ut quæcumque functio distantiarum a centro, quam, ut generaliter exprimam, designabo littera f ita, ut fAC significet functionem ex distantia AC, & constantibus utcumque compositam. Verum adverte, hanc non esse unicam rationem, ex qua coalescunt potentiæ, sed aliam constantem esse, quam eædem potentiæ tenerent positæ in eisdem a centro virium distantiis. Energiam, qua prædite sunt potentiæ positæ in determinata quadam a centro distantia, quæ pro lubitu accipi potest, indicabo nomine potentiarum absolutarum. Itaque potentiæ erunt inter se in ratione composita potentiarum absolutarum, & functionum quarumlibet distantiarum a centro. Hac definitione præmissa.

Virgæ rigidæ applicentur potentiæ absolutæ (*Fig.* 1) A, B, quas eisdem litteris designo; distantiæ autem a centro C sint AC, BC: Ergo potentiæ erunt ut A . fAC : B . f . BC. Supponatur K esse punctum æquilibrii, ex quo in AC, BC demittantur normales KP, KQ, & ex centro virium C in AB pariter normalis demittatur CO. Ut æquilibrium intercedat, necesse est sese habere A . fAC : B . fBC : : KQ : KP: sed quum sint similia triangula KBQ, CBO erit KQ : CO : : KB : CB, & propter similia triangula AOC, APK, CO : KP : . CA : AK: Ergo KQ : KP in ratione KB : CB composita CA : AK : : KB . CA : KA . CB. Igitur A . fAC : B . fBC : : KB . AC : KA . BC, sive $\frac{A \cdot f AC}{AC} : \frac{B \cdot f BC}{BC}$: : KB : KA. Ut igitur habeatur punctum æquilibrii K, necesse est ut linea AB conjungens puncta, in quibus applicantur potentiæ, dividatur in ratione reciproca $\frac{A \cdot f AC}{AC} : \frac{B \cdot f BC}{BC}$. Ita-

---

quentium dimidia CF : FK : . AK : $\frac{BK - AK}{2}$, *sive* CS : SB : : AK : $\frac{BK - AK}{2}$.

Quæ proportio hanc nobis non inelegantem constructionem suppeditat. Dividatur bifariam KB *in* P, *&* *accommodetur* MN $=$ AK, *ut etiam ipsa a puncto* P *bifariam sit divisa. Jungatur* MC, *cui ex puncto* N *agatur parallela* NS. *Ex puncto* S *ducatur* SKR, *hæc ipsa erit linea, quæ quæritur. Omitto caussa brevitatis demonstrationem synthethicam, quæ ex analysi descendit.*

Verum hæc solutio in editione secunda mutata fuit, quia visa est alteri multum simplicitate, atque elegantia concedere.

Itaque punctum æquilibrii K respectu potentiarum constans erit, atque invariatum, si invariata, & constans sit prædicta ratio: quod contingere nequaquam potest nisi $\frac{f\,AC}{AC} = \frac{f\,BC}{BC}$.

Hoc autem in duplici dumtaxat hypothesi locum habet: prima quum ubique $AC = BC$, seu quum partes finitæ additæ, vel detractæ lineis AC, BC illarum æqualitatem non destruunt; quod supponit eas esse infinitas, seu centrum C infinite distare; quæ hypothesis cum ea coincidit, quæ potentiarum directiones ponit parallelas. Altera hypothesis postulat, ut $AC : BC :: f\,AC : f\,BC$: quod idem est, ac dicere, quum potentiæ crescunt in ratione distantiarum a centro. In cæteris autem hypothesibus punctum K mutat positionem in linea AB, prout ejusdem lineæ positio respectu centri mutatur.

Advertendum est, in hypothesi potentiarum crescentium ut distantiæ a centro, punctum K dividere lineam AB in ratione reciproca potentiarum absolutarum. Quapropter si hæ eædem potentiæ absolutæ concipiantur mutare directionem suam versus centrum, & parallelas directiones accipere, idem centrum æquilibrii habebunt, atque hoc constans. Quare methodi illæ, quibus in hypothesi virium parallelarum centrum æquilibrii invenimus, & huic nostræ hypothesi possunt esse adjumento. Quod confectarium etiam ex dicendis lucem accipiet.

Nunc perpendendum est, (*Fig.* 5) utrum omnes potentiæ absolutæ intelligi possint collectæ in puncto æquilibrii K, vel hoc constans sit, vel secus; sive, quod idem est, utrum potentia æquivalens duabus potentiis absolutis A, B positis in A, B sit æqualis eisdem potentiis positis in puncto K. Per punctum K ducatur ex Lemmate linea SKR, ut pars SK sit $= RK$. Producatur CK donec $KT = CK$, ducanturque RT, TS, & efformetur quadrilaterum RTSC, quod sine dubio erit parallelogrammum: Nam, quum duo triangula RKT, SKC sint similia, & æqualia, RT, CS erunt parallelæ, & æquales.

Jam vero energiæ, quibus præditæ sunt potentiæ absolutæ A, B positæ in punctis A, B, erunt inter sese ut $CR : CS$.

$$\begin{aligned} \text{Nam } CR : CA &:: RG : AK \\ CA : CB &:: CA : CB \\ CB : CS &:: BK : FS = RG: \text{ Ergo} \end{aligned}$$

$CR : CS$ in ratione $\left.\begin{array}{l} CA : CB \\ \text{composita } BK : AK \end{array}\right\} :: BK \,.\, CA : AK \,.\, CB$: sed ex supra demonstratis $BK \,.\, CA : AK \,.\, CB :: A \,.\, f\,AC : B \,.\, f\,BC$: Igitur $CR : CS :: A . fAC : B . fBC$: five ut potentiæ, quibus in punctis A, B præditæ funt potentiæ abfolutæ A, B. Q. E. D.

Itaque diagonalis CT exprimet potentiam æquipollentem duabus potentiis abfolutis A, B pofitis in punctis A, B. Jam vero producta RG, donec concurrat cum CB in H, erit $CG : CF = TG :: GH : FS = RG$: Ergo componendo $CG : CT :: GH : RH :: KB : AB$: fed quum fit ex dictis $KB : KA :: \frac{A . fAC}{AC} : \frac{B . fBC}{BC}$ erit componendo $KB : AB :: \frac{A . fAC}{AC} : \frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}$: Ergo $CG : CT :: \frac{A . fAC}{AC} : \frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}$: fed $RC : CG :: AC : KC$: Igitur $RC : CT$ in ratione compofita $\frac{A . fAC}{AC} : \frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}$; five

$AC : KC$

$$RC : CT :: A . fAC : \frac{A . KC . fAC}{AC} + \frac{B . KC . fBC}{BC}.$$

His inventis voco P energiam potentiarum abfolutarum A, B pofitarum in K. Perfpicuum eft fore $RC : P :: A . fAC : \overline{A + B} . fKC$. Igitur $CT : P :: \frac{A . KC . fAC}{AC} + \frac{B . KC . fBC}{BC} : \overline{A + B} . fKC$: Ergo potentia æquivalens duabus abfolutis A, B pofitis in A, B ad potentiam earumdem pofitarum in K eft, ut $\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC} : \frac{\overline{A + B} \; fKC}{KC}$.

Porro hæc non poteft effe ratio æqualitatis, nifi aut $AC = BC = KC$, quod verum eft in hypothefi centri infinite diftantis; aut $fAC = AC$, quod dat hypothefim potentiarum crefcentium, ut diftantiæ a centro. In ceteris hypothefibus eft femper ratio inæqualitatis. Quare ad gravitatem quod fpectat, fi duas hafce excipias, in nulla hypothefi fieri poteft, ut jure bono concipiatur collecta omnium partium gravitas in puncto æquilibrii; potentia enim æquivalens gravitatibus corporum A, B pofitorum in A, B non eft æqualis gravitati eorumdem corporum pofitorum in K.

Hypothefis autem potentiarum crefcentium, ut diftantiæ a centro, quando duabus illis ornata eft proprietatibus, quas demonftravimus convenire potentiis parallelis, fcilicet ut duæ potentiæ habeant centrum æquilibrii conftans, & ut collectæ intelligi poffint in eodem centro æquilibrii, in dubitationem cadere nullo pacto poteft, quin adhibita eadem ferie, qua ufi fumus in potentiis pa-

parallelis demonstrari idem possit de tribus, quatuor &c. immo de infinitis potentiis. Qua de re omnia corpora gravia in hac hypothesi centrum gravitatis obtinebunt, ex quo, si suspendatur quacumque ratione corpus, æquilibrium servabit, & in quo omnium partium gravitatem licet collectam intelligere.

Reliquum est, ut methodos exhibeamus, quibus in hypothesibus virium tendentium ad centrum, inveniri centrum æquilibrii potest. Duabus methodis in hypothesi virium parallelarum usi sumus. Utraque tentanda est, & rei, qua de agimus, accommodanda. Demonstravimus nuper, duabus potentiis absolutis A, B (*Fig. 6*) positis in A, B sive $\overline{A . fAC + B . fBC}$ æquivalere potentiam $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$. Quare si quæratur potentia absoluta K collocanda in puncto K efficiens idipsum, quod efficiunt potentiæ absolutæ A, B positæ in punctis A, B debebit $K . fKC$ æquare potentiam æquivalentem potentiis A, B positis in A, B: Ergo $K . fKC = KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$: Igitur $K = \frac{KC}{fKC} . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$.

Addatur jam tertia potentia D, & H sit centrum æquilibrii duarum potentiarum K, D, erunt ex prima parte potentiæ $\overline{K . fKC + D . fDC}$ æquipollentes $HC . \overline{\frac{K . fKC}{KC} + \frac{D . fDC}{DC}}$. Pro $K . fKC$, & $\frac{K . fKC}{KC}$ eorum valores substituantur, & fient $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}} + D . fDC$ æquipollentes $HC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{AC} + \frac{D . fDC}{DC}}$: atqui ex prima parte $KC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC}}$ æquipollent $\overline{A . fAC + B . fBC}$: Igitur $\overline{A . fAC + B . fBC + D . fDC}$ æquivalent $HC . \overline{\frac{A . fAC}{AC} + \frac{B . fBC}{BC} + \frac{D . fDC}{DC}}$.

Hic autem progressus quum produci possit in infinitum, consequitur etiam de infinitis potentiis propositionem valere. Quare si vocentur potentiæ absolute $= p$, earum distantiæ a centro virium $= z$,

$= z$, distantia centri æquilibrii a centro virium $= t$, & per signum S denotetur summa; potentiis omnibus manentibus in loco quæque suo, quas designo per $Sp \, . \, fz$ æquivalet potentia $t\,S\,\frac{t f z}{z}$, quæ debet intelligi applicata in centro æquilibrii. (a)

Si formulam aptemus hypothesi, in qua potentiæ sunt, ut distantiæ a centro, tunc $Sp \, . \, fz$ positis potentiis in suis respective locis æquivalet potentia $t\,S\,p$. Quæ formula satis indicat illud, quod alia ratione deduximus: nimirum omnes potentias absolutas sitas in centro æquilibrii idem efficere, ac facerent positæ in suo quæque loco.

Ceterum neque in hac hypothesi, neque in aliis per hanc methodum inveniri potest quantitas t, quæ est distantia centri æquilibrii a centro virium; non enim inter potentias $Sp \, . \, fz$, & $t\,S\,\frac{p f z}{z}$ datur æqualitas, sed tantum æquipollentia. Quare nisi res ad æqualitatem redigatur fieri non potest, ut æquilibrii centrum reperiatur. Redigi autem posse ad æqualitatem hac ratione existimo.

Ducatur per centrum C quælibet linea CM, ad quam ex punctis A, B, ubi duæ potentiæ applicatæ sunt, demittantur normales AM, BN, item KP ex centro æquilibrii K. Quoniam est ex demonstratis $BK : AK :: \frac{A \, . \, f\,AC}{AC} : \frac{B \, . \, f\,BC}{BC}$. Item $BK : AK :: NP : MP$ erit $NP : MP :: \frac{A \, . \, f\,AC}{AC} : \frac{B \, . \, f\,BC}{BC}$: Ergo $\frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, MP = \frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, NP$: Atqui $\frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, MP$ est differentia rectang. $\frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, MC$, & $\frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, PC$; & $\frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, NP$ est differentia rectang. $\frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, PC$, & $\frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, NC$: Igitur $\frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, MC : \frac{A \, . \, f\,AC}{AC} \, . \, PC$ est arithmetice ut $\frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, PC : \frac{B \, . \, f\,BC}{BC} \, . \, NC$: Ergo

A. fAC

(a) *Formula tradita exhibet quidem potentiam æquivalentem, quæ componitur tum ex potentia absoluta, tum ex functione distantiæ a centro virium. Quod si quæras potentiam ipsam absolutam, quæ posita in centro æquilibrii sit æquipollens reliquis potentiis in loco quæque suo, si eam voces y habebis* $y f t = t\,S\,\frac{p \, . \, f z}{z}$: *Ergo* $y = \frac{t}{f t}\,S\,\frac{p \, . \, f z}{z}$.

$\frac{A.fAC}{AC} . MC + \frac{B.fBC}{BC} . NC = PC . \overline{\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}}$.

Addatur tertia potentia D, & comparetur potentia absoluta $K = \frac{KC}{fKC} . \overline{\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}}$ cum potentia D, quarum centrum æquilibrii sit H. Ducantur HO, DQ normales rectæ CM: erit ex prima parte $\frac{K.fKC}{KC} . PC + \frac{D.fDC}{DC} . QC = OC . \overline{\frac{K.fKC}{KC} + \frac{D.fDC}{DC}}$ & pro $\frac{K.fKC}{KC}$ ejus valore substituto erit $\overline{\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC}} . PC + \frac{D.fDC}{DC} . QC = OC . \overline{\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC} + \frac{D.fDC}{DC}}$ sive ex prima parte $\frac{A.fAC}{AC} . MC + \frac{B.fBC}{BC} . NC + \frac{D.fDC}{DC} . QC = OC . \overline{\frac{A.fAC}{AC} + \frac{B.fBC}{BC} + \frac{D.fDC}{DC}}$. (a)

Qui progressus quum in infinitum produci possit, consequitur de omnibus potentiis veram esse propositionem. Quare retentis superioribus denominationibus vocentur $MC = x$, intercepta inter normalem cadentem a centro æquilibrii, & centrum virium $= u$, erit $S\frac{px.fz}{z} = u\,S\frac{p.fz}{z}$ sive $u = \frac{S\frac{px.fz}{z}}{S\frac{p.fz}{z}}$. Quæ formula prorsus valeret, etiamsi linea assumpta non transiret per centrum C. In qualibet enim parallela rectæ CM æquales partes abscinderentur a perpendicularibus, ac in CM; immo initium x, & u, modo sit unum idemque, in quolibet puncto assumi potest: quod breviter adnotasse sufficiet.

Ad methodum Doctissimi Clairaut quod spectat, ita nostræ hypothesi accommodari posse videtur. Si fuerint, (*Fig.* 4) quot volueris potentiæ, quæ tendant ad centrum C, quarum centrum æquilibrii sit K; item aliæ quarum centrum æquilibrii H; centrum autem omnium sit k: quæ tria puncta in eadem linea recta sita sint, necesse est. Ex hisce punctis in lineam positione datam AB demittantur normales KP, kp, HO. Quoniam ex demonstratis potentia æquivalens omnibus potentiis, quarum centrum K, divisa per distan-

(a) *Ad hanc quoque demonstrationem sufficit, ut rectæ* AM, BN, KP *&c. sint parallelæ inter se.*

diſtantiam K C eſt ad potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum H, diviſam per H C, ut H k : K k, erit etiam ut O p : P p.

Jam vero ſint infinitæ potentiæ tendentes ad centrum C, quarum centrum æquilibrii K quæritur. Earum aliquis axis ſit A B. Repræſentetur ab A E B ſumma rectangulorum $\frac{pfz}{z}$ ita, ut A E B $= S\frac{p \cdot fz}{z}$. Augeatur A B quantitate infiniteſima B b, cui reſpondeat B b e E, quod proinde $= \frac{p \cdot fz}{z}$. Hac additione facta, novæ etiam potentiæ adduntur, quarum centrum ſit H. Centrum autem omnium ex K tranſit in k. Vocetur K C $= t$, H C $= r$. Conſtat potentiam æquivalentem omnibus, quarum centrum K $= t\, S\frac{p \cdot fz}{z}$, & omnibus quarum centrum H $= r \cdot \frac{p \cdot fz}{z}$: Ergo prima diviſa per t ad ſecundam diviſam per r, ut O p : P p. Vocetur A B $= x$, A P $= u$, & P $p = du$. Itaque erit $S\frac{p \cdot fz}{z} : \frac{p \cdot fz}{z} :: x - u : du$, ſive $du \cdot S\frac{p \cdot fz}{z} + u \cdot \frac{pfz}{z} = \frac{px \cdot fz}{z}$: Igitur integrando $u\, S\frac{p\ fz}{z} = S\frac{px \cdot fz}{z}$; atque adeo $u = \frac{S\frac{px \cdot fz}{z}}{S\frac{p \cdot fz}{z}}$: quæ formula prorſus coincidit cum ea, quam per primam methodum ſupra invenimus (a).

Si utramque methodum ſedulo conſideres, non duas eſſe perſpicies, ſed unam eamdemque oppoſitis rationibus progredientem. Utraque enim refert potentias, earumque centra ad lineam poſitione datam; ſed prima ſyntheticam rationem iniens a duabus potentiis progreditur ad tres, deinde ad quatuor, atque ita ad infinitas: ſecunda analytica ratione utens ſupponit centrum, quod quæritur; illudque per methodum infinite parvorum, additis potentiis reſpectu reliquarum infiniteſimis, promovet: tum ad potentias duas æquipollentes tam potentiis datis, quam additis proprietatem aptat, qua reſpectu centri æquilibrii duæ potentiæ prædictæ ſunt. Verum hæc methodus inutilis fuiſſet, niſi antea per diſtantiam centri æquilibrii a centro virium ſynthetica ratione potentiarum etiam infi-

(a) *Hic quoque ſervato linearum paralleliſmo non deficit demonſtratio.*

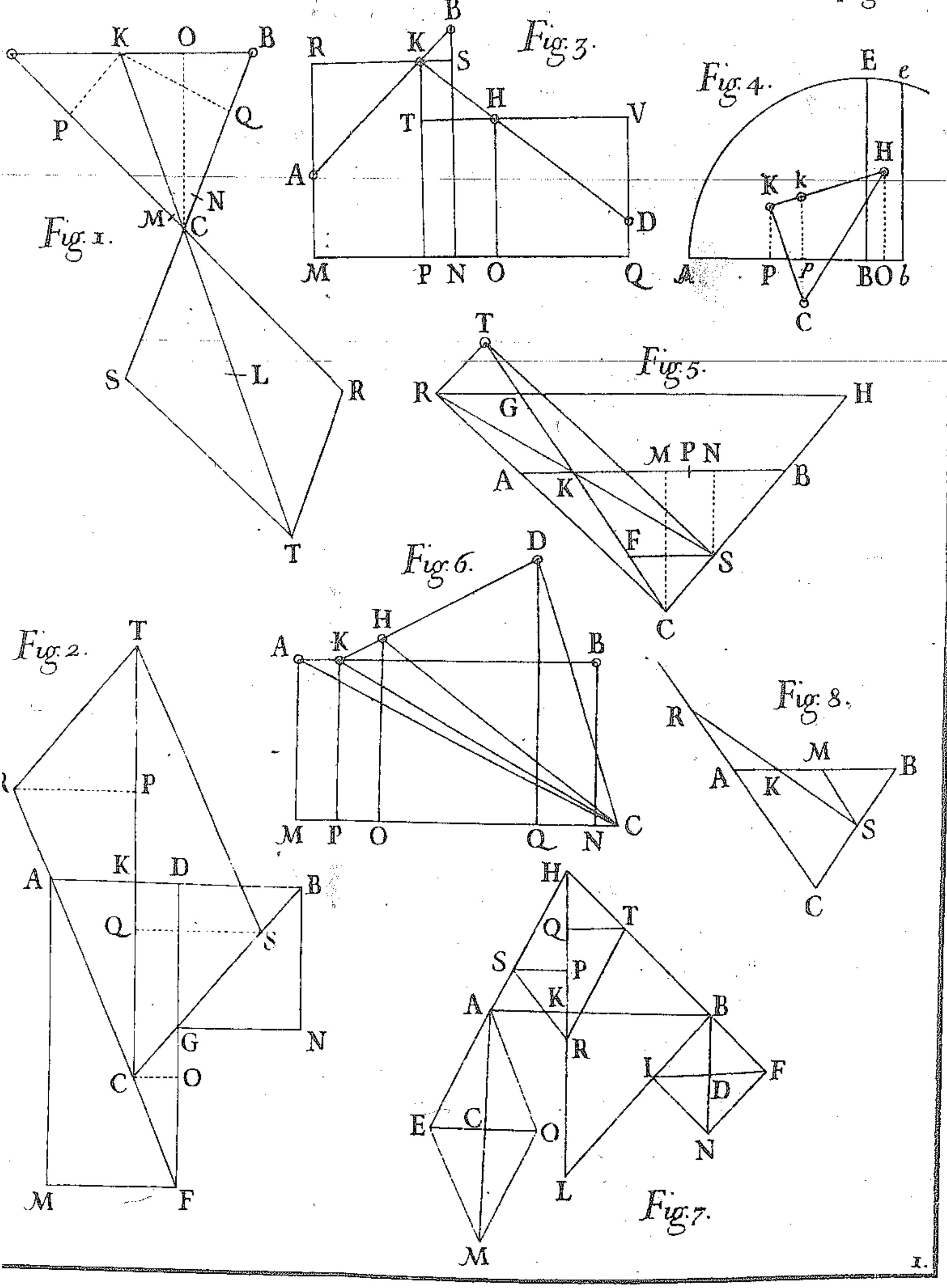


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
1.

infinitarum inventa fuisset potentia æquipollens centro æquilibrii applicanda.

Punctum illud, in quo normalis ducta a centro æquilibrii secat lineam positione datam, appellabo vestigium centri æquilibrii in linea positione data. Si per vestigium centri æquilibrii ducatur planum, cui linea positione data sit perpendicularis, in hoc plano centrum æquilibrii inexsistit quidem certe. Quoniam autem formula satis indicat, in qualibet linea positione data inveniri posse vestigium centri æquilibrii, assumantur tres lineæ non parallelæ, quarum omnium positio data sit, in quibus omnibus vestigia centri æquilibrii determinentur. Per hæc tria plana ducantur, quibus rectæ assumtæ normales sint, punctum tribus planis commune idipsum est centrum æquilibrii, quod quæritur.

Si formula contrahatur ad hypothesim potentiarum proportionalium distantiis a centro, multo fit simplicior, atque elegantior. Mutatur enim in hanc $u = \frac{Spx}{Sp}$: a qua, notandum est, distantias potentiarum a centro omnino abesse: quod indicio est, centrum æquilibrii esse constans, quamcumque positionem habeant potentiæ absolutæ respectu centri virium, dummodo eandem servent positionem inter sese. Nam finge animo, aut virgas rigidas, aut corpus, cui applicatæ sunt potentiæ, simul cum linea positione data, in qua est vestigium centri æquilibrii, quacumque ratione moveri, aut accedere, aut recedere a centro virium, aut circa aliquod punctum revolvi; profecto idem respectu potentiarum manebit centri æquilibrii vestigium: Ergo etiam centrum æquilibrii: quam proprietatem alia ratione antea demonstravimus.

Advertendum est etiam, formulas pertinentes ad hypothesim virium parallelarum, & virium crescentium ut distantiæ a centro esse unam, eandemque; ex quo colligitur, unum esse, idemque centrum æquilibrii in utraque hypothesi; quam proprietatem supra item demonstratam vidisti.

Hæc quidem de centro æquilibrii investiganda, atque demonstranda mihi proposui: ex quibus perspicuum est, duas solummodo exsistere hypotheses, in quibus non mutata potentiarum inter se positione centrum æquilibrii constans est, in eoque omnes potentiæ absolutæ collectæ intelligi jure optimo possunt. In reliquis & centrum æquilibrii mutatur, & potentia omnibus æquivalens non est æqualis energiæ omnium potentiarum in centro æquilibrii positarum. Verum rationes indicatæ sunt, & formulæ exhibitæ, per quas & potentia æquivalens, & centrum æquilibrii in hypothesi quacumque determinatur.

OPUSCULUM SECUNDUM.

De Guldini Regula ad usum centri gravitatis pertinente. Disquisitio Physico-Mathematica.

P. Paullus Guldinus Soc. Jesu Sacerdos, cujus opus de centro gravitatis apud mathematicos semper in pretio fuit, libro secundo capite octavo regulam proponit, & sequentibus capitibus pluribus exemplis illustrat, quæ deinceps ab ejus inventore regula Guldini appellata est. De hac agens Jacobus Hermannus in phoronomia pronunciat, fuisse antea a Pappo Alexandrino diserte indicatam. Perlegi Pappum, neque quidquam inveni, quod aliquam haberet cum regula Guldini similitudinem. Ut ut autem res sese habeat, quum hujusmodi regula pulcherrima mihi semper visa fuerit, constitui de ea agere pro dignitate, ut plane omnibus pateat, quam possit rei geometricæ utilitatem afferre.

Regula a Guldino proponitur hisce verbis: *Quantitas rotanda in viam rotationis ducta producit potestatem rotundam uno gradu altiorem potestate, sive quantitate rotata.* Quandoquidem intelligi sententia hæc non potest, nisi mente retineantur aliquot definitiones, quæ non paucis verbis, claris tamen ab Auctore antea præmissæ sunt, iccirco aliis vocibus eandem exponam, quæ res geometricas, & analyticas callentibus obscuræ esse non poterunt: Quantitas rotata multiplicata per viam centri gravitatis æqualis est quantitati ortæ ex rotatione.

Tametsi plures regulam hanc attigerint, atque demonstraverint, inter quos honoris caussa nominandus est Jacobus Hermannus; tamen inveni neminem, qui eidem limites constitueret, ultra quos, si progrederetur, in paralogismum incideret. Non sum nescius, Guldinum semper sua regula ita usum esse, ut cautiones necessarias ne omitteret. Verum posset aliquis facili negotio ita regulam hanc accipere, ut ea abutens in errorem laberetur. Itaque hoc mihi primum proposui in hac disquisitione, ut suos regulæ Guldini limites constituam: deinde ejus usum amplificabo adhibita præsertim infinite parvorum theoria, quæ ab obitu Guldini patefacta est.

Ad rem autem ut propius accedam, memoria tenendum est, quod post alios a me demonstratum est in opusculo superiori: nimirum si plures habeantur potentiæ parallelæ, summa rectangulorum, quæ fiunt ex singulis potentiis in suas distantias a plano dato, æqualis est rectangulo ex summa potentiarum in distantiam centri æquilibrii. Quod si potentiæ omnes æquales sint, summa distantiarum cujuscumque potentiæ a plano dato erit æqualis distantiæ centri æquilibrii toties sumtæ, quotus est numerus potentiarum. Quum autem hæc sit hypothesis gravitatis, in qua æquales materiei partes æqualibus potentiis præditæ sunt, de centro gravitatis solet pronunciari, quod ad centrum omnium potentiarum parallelarum spectat. Itaque summa distantiarum cujuslibet puncti quantitatis a plano dato æqualis est distantiæ centri gravitatis secundum numerum punctorum multiplicatæ. Hoc unice advertas velim, distantias illas tanquam negativas accipiendas esse, quæ ad alteram partem dati plani positæ sunt.

His suppositis sint plura puncta A, B, D (*Fig.* 1) æque gravia, quæ disposita sint in eadem AD, in qua eadem linea positum sit centrum C, circa quod rotanda sunt. Horum autem punctorum centrum gravitatis sit K. Fiat rotatio circa C, & corpora A, B, D describant similes arcus Aa, Bb, Dd, centrum autem gravitatis K describat arcum Kk: ajo, arcus Aa, Bb, Dd simul sumtos æquare arcum Kk toties acceptum, quotus est punctorum numerus. Itaque si numerus hic vocetur $= N$ erit $Aa + Bb + Dd = N . Kk$.

Demonstratio. Ex superiore theoremate est $CA + CB + CD = N . CK$: atqui rectæ CA, CB, CD, CK sunt proportionales arcubus Aa, Bb, Dd, Kk: Ergo hisce proportionalibus in æquatione substitutis habebimus $Aa + Bb + Dd = N . Kk$. Q. E. D.

Si aliquod ex punctis ex. ca. D (*Fig.* 2) jaceret ad alteram partem centri rotationis C tum arcus Dd non addendus, sed deducendus esset ab arcubus Aa, Bb, ut æqualitas haberetur cum producto $N . Kk$: quod sufficiat indicavisse.

Ex hisce satis manifestum est, regulam Guldini in punctis valere, dummodo omnia posita sint in eadem linea recta cum centro rotationis. Verum conditione hac defficiente si quis regulam Guldini ad demonstrandum vocaret, eadem abuteretur, & in paralogismum incideret. Quod hac ratione breviter demonstrabo. Sit centrum rotationis C, (*Fig.* 3) puncta autem A, B quæ non sint in eadem linea recta cum puncto C. Eorum centrum gravitatis sit K. Jungantur CA, CB, CK. Ducatur normalis rectæ

CK linea PQ, in quam cadant perpendiculares AP, BQ. Ex theoremate præsupposito $AP + BQ = N . CK$: atqui $CA > AP$, $CB > BQ$: Ergo $CA + CB > N . CK$, sed arcus descripti a punctis A, B, K sunt proportionales radiis CA, CB, CK: Ergo arcus descripti a punctis A, B majores sunt arcu descripto a K multiplicato per N. Q. E. D.

Ut regula Guldini in hoc quoque casu utilitate non careat, methodus hæc adhibenda videtur. Ex centro C ducta qualibet CA, facto centro C intervallo CB describatur arcus BD notans in linea CA punctum D. Intelligatur pro puncto B substitutum punctum D, quam substitutionem deinceps his, aut similibus vocibus indicabo; projiciatur circulariter punctum B in D in lineam positione datam CA. Punctorum A, D inveniatur centrum gravitatis H. Ajo arcus descriptos a punctis A, B æquare arcum descriptum a puncto H multiplicatum per N.

Demonstratio. Intelligatur fieri revolutio circa centrum C, & linea CA transire in C*a*, CB autem in C*b*, & puncta A, B, D, H describere arcus A*a*, B*b*, D*d*, H*b*. Quoniam anguli BCA, *b*C*a* sunt unus idemque angulus in diversa loca translatus, erunt æquales: Igitur ablato communi *b*CA remanebit BC*b* æquali AC*a*: Ergo arcus B*b*, D*d* eodem radio præditi erunt æquales: Atqui ex demonstratis $Aa + Dd = N . Hb$: Ergo $Aa + Bb = N . Hb$. Q. E. D.

Esto itaque regula hæc pro punctis, quæ non sunt sita in eadem linea recta cum centro rotationis. Puncta omnia in lineam pro arbitrio sumtam transeuntem per rotationis centrum circulariter projiciantur: punctorum, quæ oriuntur ex projectione centrum gravitatis reperiatur, & arcus ab hoc descriptus multiplicatus per numerum punctorum æquabit summam arcuum, qui a singulis punctis describuntur. Ex hac constructione, quo pacto inveniendum sit punctum H, seu ejus distantia a puncto C centro rotationis, obscurum esse non potest. Nam ex præsupposito theoremate $CA + CD = N . CH$: atqui $CD = CB$: Igitur $CA + CB = N . CH$. Itaque qua ratione per distantias punctorum a recta PQ determinatur distantia centri gravitatis CK: ita per distantias punctorum a centro rotationis C determinatur quæsita CH: qua cognita dato angulo rotationis definitus est arcus, qui multiplicatus per N dat aggregatum eorum arcuum, qui a punctis A, B describuntur.

Hoc unice adnotare oportet, duplici modo posse punctum B projici circulariter in lineam CA; primo modo projicitur ita, ut

puncta

puncta A, D jaceant ad eandem partem centri rotationis C ut in (*Fig.* 3); secundo modo, ut eadem puncta medium teneant centrum C ut in (*Fig.* 4). In primo casu aggregatum arcuum, qui describuntur a punctis A, B æquale est arcui descripto ab H ducto in N; in casu altero differentia arcuum a punctis A, B descriptorum æquabit arcum descriptum ab H multiplicatum per N. Quapropter si quæras summam arcuum, projice puncta ad eandem partem centri rotationis, si quæras differentiam, ad diversas partes centri rotationis puncta projiciantur.

Quæ dicta sunt pro hypothesi, quod rotatio consistat in uno eodemque plano, & circa punctum peragatur, transferenda sunt ad hypothesim, quod rotatio peragatur circa axem, & puncta minime posita sint in eodem plano, cui rectus sit axis rotationis. Etenim vel puncta omnia jacent in uno eodemque plano transeunte per axem rotationis, & tum regula Guldini locum habet, quod scilicet summa arcuum a punctis singulis descriptorum æqualis est arcui descripto ab eorum centro gravitatis ducto in punctorum numerum. Vel puncta omnia sita non sunt in eodem plano transeunte per axem rotationis; & tum concipiendum est planum aliquod per axem rotationis transiens, atque in hoc projicienda sunt puncta omnia circulariter: punctorum, quæ per hanc projectionem notantur in plano, inveniendum centrum gravitatis, cujus via per numerum punctorum multiplicata exhibebit arcus simul sumptos a singulis punctis descriptos. Quoniam in his valent non minus eædem demonstrationes, quam eædem animadversiones, quæ supra factæ sunt, legentibus fastidio esset easdem repetere.

A punctis ad lineas gradus faciendus est. Sit linea recta BA (*Fig.* 5) rotanda circa centrum C, per quod producta transit; ejus centrum gravitatis sit K, quod illam bifariam secat: ajo zonam ABba genitam in rotatione æqualem esse rectangulo ex eadem linea BA in arcum Kk descriptum a centro gravitatis K.

Demonstratio. Ex theoremate præsupposito si vocetur CB $= a$. BM $= x$, MN $= dx$, arcus M$m = y$, erit S$a + x \,.\, dx =$ CK, Sdx: atqui omnibus distantiis CM $= a + x$ proportione respondent arcus Mm, sicuti distantiæ CK arcus Kk: Ergo proportionalibus substitutis habebimus S$y\,dx =$ Kk. Sdx, positoque $x =$ BA. S$y\,dx =$ Kk. AB; in eadem autem hypothesi S$y\,dx$ æquat zonam ABba: Ergo zona AB$ba =$ Kk. AB. Q. E. D.

Si punctum B caderet in centrum rotationis C, zona transiret in sectorem circularem, cujus area propterea æquaret rectangu-

lum

lum ex radio ſectoris in analogum arcum circuli habentis pro radio dimidium radii ſectoris.

Si vero punctum B caderet ad partem oppoſitam, (*Fig.* 6) & linea A B divideretur a centro C: tum ſector deſcriptus a C A demto ſectore deſcripto a C B æqualis eſſet toti A B multiplicatæ in viam centri gravitatis. Etenim quum pars C B moveatur per directionem oppoſitam directioni C A, ſector qui oritur ex C B, tanquam negativus habendus eſt. Fallitur itaque doctiſſimus Guldinus, qui concipiens a linea C A integram revolutionem confici circa punctum C, ait, intelligendam eſſe compenetrationem circuli deſcripti a recta C B cum æquali parte circuli deſcripti a C A, ut regulæ veritas ne deficiat. Quod adeo eſt alienum a veritate, ut potius auferendus ſit circulus radii B C a circulo radii C A, ut quantitas proveniat æqualis rectæ B A in circumferentiam circuli deſcriptam a centro K.

Hoc quamquam evidens eſt per ſeſe ex dictis; tamen placet idipſum duabus animadverſionibus confirmare. Si linea C B = C A, punctum K caderet in ipſo rotationis centro C: Ergo nulla eſſet via centri gravitatis, atque adeo nullum rectangulum ex B A in viam ſui centri gravitatis. Igitur quantitas huic æquanda nulla ſit oportet: atqui ſemper erit aliqua, niſi ſuperficies deſcripta a B C deducenda ſit a ſuperficie deſcripta a C A: Igitur ad uſum regulæ P. Guldini neceſſe eſt, non addere, ſed demere circularem ſuperficiem productam a C B ab illa, quæ oritur a C A.

Præterea concipiatur linea C A (*Fig.* 7) rotanda circa punctum C, in qua accipiantur æquales partes C B, C *b*. Dividatur B A bifariam in K, & *b* A in k, & puncta K, k erunt centra gravitatum linearum B A, *b* A. Quando C B eſt dimidium *b* B, & B K eſt dimidium B A, erit tota C K dimidium totius *b* A, ſed ejuſdem dimidium eſt A k: Ergo C K = A k, & ablata communi K k remanebit C k = A K. Quare non minus B A erit dupla C k, quam *b* B dupla K k: Ergo erit B A : *b* B :: C k : k K, & componendo B A : *b* A :: C k : C K: atqui C k, C K ſunt ut arcus in rotatione circa C deſcripti a punctis k, K: Igitur B A, *b* A ſunt reciproce ut arcus deſcripti ab earum centris gravitatis. Itaque figuræ genitæ ab iſtis lineis B A, *b* A rotandis circa C, quæ æquandæ ſunt rectangulis ortis ex earundem multiplicatione in vias ſui centri gravitatis, æquales ſint oportet: quod fieri omnino non poteſt, niſi ſector genitus a C *b* detrahatur a ſectore genito a C A. Quare ad veritatem regulæ P. Guldini non neceſſe eſt, conſiderare tamquam compenetratos

cir-

circulos radiorum CA, Cb, ſed potius alterum ab altero demere. Quod mihi propoſueram demonſtrandum.

Hæc dicta ſint de lineis rotandis, quæ productæ, ſi opus eſt, tranſeunt per centrum rotationis. Nam ſi rotetur linea circa punctum, per quod non tranſit, regula Guldini incautos in paralogiſmum poſſet deducere. Verum per circularem projectionem res non difficulter abſolvetur eo ferme pacto, quo in punctis antea factum eſt. Itaque linea quælibet BA rotetur circa punctum C, (*Fig.* 8) per quod producta non tranſit, & in rotatione feratur ad ſitum ba ita, ut genita ſit ſuperficies $bBAa$ clauſa a duobus arcubus circularibus Bb, Aa, quorum radii CB, CA, & a duabus rectis AB, ab. Ut hæc ſuperficies determinetur, ducatur quælibet CA, & facto centro in C intervallo CB deſcribatur arcus BD, ut linea BA circulariter projiciatur in DA. Lineæ hujus DA ortæ ex projectione inveniatur centrum gravitatis K, quod eam dividit bifariam. Intelligatur linea DA rotari ſimul cum BA circa centrum C. Dum linea BA pervenit in ba, recta DA fertur in da, & ejus centrum gravitatis K deſcribit arcum circularem Kk. Ajo itaque ſpatium $BAab$ per rotationem genitum a recta $BA = DA \,.\, Kk$.

Demonſtratio. Triangulum mixtilineum BDA eſt prorſus æquale triangulo bda, quia, ſi arcus bd ſuperponatur arcui BD, perfecte congruit: Ergo addito communi ſpatio $DbaA$ fiet ſpatium $BbaA$ æquale $DdaA$: atqui hoc, quum gignatur ex rotatione lineæ DA tranſeuntis per rotationis centrum C, eſt æquale $DA \,.\, Kk$: Ergo etiam $BbaA$ æquat rectangulum $DA \,.\, Kk$. Q. E. D.

In circulari projectione facienda curatio habenda eſt, (*Fig.* 9) ne in errorem labamur. Etenim ſæpe in uno eodemque loco duæ lineæ tanquam compenetratæ conſiderandæ ſunt. Quando autem hoc contingat videamus. Sit linea AB rotanda circa punctum C, ex quo puncto C demittatur in illam perpendicularis CE, quo intervallo deſcribatur circulus EFe. Ducta linea CA, in hanc prius projiciatur recta AE, & habebimus lineam AF. Tum facto centro in C intervallo CB deſcribatur arcus BD, & linea BE circulariter projiciatur in FD. Manifeſtum eſt, rectam FD naſci ex circulari projectione tam lineæ AE, quam lineæ BE: quare in loco FD duæ lineæ tanquam compenetratæ intelligendæ ſunt; atque in hac hypotheſi linearum, quæ oriuntur ex projectione, centrum gravitatis eſt inveniendum.

Verum hoc ſedulo inquirendum videtur, quodnam ſpatium oriatur ex rotatione lineæ AB. Tranſeat linea rotans AB in ſitum

tum *a b* describentibus punctis A, E, B arcus similes A *a*, E *e*, B *b*. Pars A E describet spatium A E *e a* interceptum inter arcus similes A *a*, E *e*, & inter rectas æquales A E, *a e*: pars autem B E describit spatium B E *e b* interceptum inter arcus similes B *b*, E *e*, & inter rectas æquales B E, *b e*: quæ duo spatia habent communem partem E O *b e* clausam a duabus rectis æqualibus E O, *e b*, & a duobus arcubus O *b*, E *e*. Quare in eo loco duplex spatium compenetratum debet intelligi, ut spatium genitum a linea B A æquale sit rectangulo ex A F + F D in viam centri gravitatis harum linearum.

Arcus B *b* protrahatur, donec secet *a b* in *o*: manifestum est segmentum B E O = segmento *b e o*. Ergo addito communi spatio E O *b e* fiet zona B E *e b* = E O *o e*: sed prima describitur a B E, secunda ab O E: Ergo zonæ quæ describuntur a lineis æqualibus E O, E B quæ sitæ sunt ad diversas perpendicularis partes, æquales inveniuntur. Quare si separatim invenias zonas primum descriptas ab A E, deinde ab O E, habebis integram zonam descriptam ab A B. Hæc autem animadversio sæpe erit utilitati.

Juvabit etiam non raro uti projectione ad alteram partem puncti C. Sit projicienda circulariter recta A B, (*Fig.* 10.) ut zona ab ea rotando descripta determinari possit. Addatur rectæ A B linea quævis B E. Facto centro in C intervallo C E describatur semicirculus F E H, atque hac ratione linea E A erit circulariter projecta in A F. Tum facto centro in C intervallo C B describatur arcus B D, atque hoc modo adjecta linea B E circulariter projicitur in D H ad alteram partem centri rotationis C. Duarum linearum sit centrum gravitatis K: ajo, zonam descriptam a B A fore æqualem rectangulo ex A F + H D in viam K. Nam zona descripta a B A est æqualis zonæ descriptæ ab A E dempta zona descripta a B E: sed prima æquat zonam descriptam a F A, altera zonam descriptam a D H: Ergo zona descripta a B A est æqualis differentiæ zonarum, quæ describuntur a lineis F A, D H: sed hæc æquat A F + H D in viam K: Ergo zona descripta a B A est æqualis A F + H D in viam centri K. Q. E. D.

Quæ dicta sunt de lineis rectis, valent etiam de curvis. Etenim si linea B A curva esset, eædem omnino demonstrationes, atque animadversiones locum haberent.

Paucis de usu regulæ dicam amplificato per theoriam infinite parvorum. Res enim quum sit per sese facilis satis illustrabitur exemplo earum curvarum, quæ per modum conchoidis nicomedeæ generantur. Sit quælibet curva A E, (*Fig.* 11) & extra illam posi-

poſitus polus C, per quem tranſeat linea CDB, quæ ſecat curvam datam in A, & habeat partes AB, AD æquales. Ita hæc linea moveatur, ut punctum A ſemper permaneat in data curva AE, & ipſa ſemper tranſeat per polum C. A punctis B, D deſcribentur curvæ BFf, DGg. Fingamus eam perveniſſe in ſitum CGF: promoveatur in ſitum infinite proximum Cgf, & centro C deſcribantur arcus Fm, En, Go.

Vocentur $CD = b$, $DA = AB = GE = EF = a$, $CE = y$, $En = dx$. Notum eſt ſpatium $FfgG$ adæquare zonam circularem $FmoG$: quæ cum gignatur ex rotatione lineæ FG circa centrum C, cujus centrum gravitatis eſt E deſcribens arcum En, erit $= 2adx$: Ergo ſpatium $FfgG = 2adx$.

Dividatur EF bifariam in P, & centro C deſcribatur arcus Pp, qui cum ſit $: dx :: y + \frac{a}{2} : y$ erit $= dx + \frac{\frac{a}{2}dx}{y}$: Ergo zona $FmnE$, adeoque etiam ſpatium $FfeE = adx + \frac{\frac{a^2}{2}dx}{y}$.

Similiter diviſa GE in Q, deſcriptoque arcu Qq invenietur ſpatium $EegG = adx - \frac{\frac{a^2}{2}dx}{y}$.

Quapropter differentia ſpatiorum $FfeE$, $EegG$ erit $= \frac{a^2 dx}{y}$. Quum autem ex æquatione curvæ AE detur dx per y, dy, conſtat omnia quæſita ſpatia invenire poſſe.

Ponamus AE eſſe lineam rectam, & a puncto B gigni conchoidem nicomedeam ſuperiorem, a puncto D inferiorem. Vocetur $AE = t$: Ergo $CE = y = \sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}$, & $Ee = dt$. Ex ſimilitudine triangulorum Een, CeA, ſive CEA erit $En : Ee :: CA : CE$ ſive analytice $dx : dt :: a+b : \sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}$: Ergo $dx = \frac{\overline{a+b}.dt}{\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}}$. Itaque ſubſtitutis hiſce valoribus habebimus ſpatium $FfgG = 2adx = \frac{2a.\overline{a+b}.dt}{\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}} = \frac{4a}{a+b} \times \frac{\overline{a+b}^2 dt}{2\sqrt{\overline{a+b}^2 + tt}}$: quod pertinet ad quadraturam hyperbolæ.

Centro A, & ſemiaxe CA deſcribatur hyperbola æquilatera CR, cui ex puncto E ordinetur ER, ducaturque AR: notum eſt ſectorem ACR $= \int \frac{\overline{a+b}^2\, dt}{2\sqrt{\overline{a+b}^2 + t^2}}$: Ergo ſpatium BFGD ad ſectorem ACR erit ut $4a : a+b$. Q. E. I.

Differentia inter duo ſpatia $FfeE$, $EegG$ inventa eſt $= \frac{aadx}{y}$: Ergo ſubſtitutis valoribus erit $= \frac{a^2 \cdot \overline{a+b} \cdot dt}{\overline{a+b}^2 + tt} = \frac{a^2}{a+b}$ $\frac{\overline{a+b}^2\, dt}{\overline{a+b}^2 + tt}$. Quum autem $\int \frac{\overline{a+b}^2 \cdot dt}{\overline{a+b}^2 + t^2}$ ſit arcus circularis, cujus radius $CA = a+b$, tangens $AE = t$, conſtat tertiam proportionalem poſt CA, DA multiplicata per arcum, cujus radius CA, & tangens AE exhibere differentiam ſpatiorum BFEA, AEGD. Quum autem horum ſpatiorum ſumma detur ex hyperbolæ quadratura, differentia ex quadratura circuli, apparet, quodlibet ex illis ſpatiis tum a circuli, tum ab hyperbolæ quadratura pendere. Sed de his ſatis.

Conſideravimus adhuc, omnia puncta lineæ rotatæ jacere in uno eodemque plano, cui axis rotationis normalis ſit. Nunc ad eos caſus progrediamur, in quibus pars aliqua figuræ extra prædictum planum poſita eſt. Ac primo ſupponamus, figuram genitricem jacere in uno eodemque plano tranſeunte per axem rotationis: ajo, figuram genitricem multiplicatam per viam centri gravitatis exhibere productum æquale figuræ genitæ. Figura rotata vel eſt linea generans ſuperficiem, vel eſt ſuperficies generans ſolidum. Utrumque caſum breviter demonſtremus.

Quoad primum: axis rotationis ſit CDP, (*Fig.* 12) per quem tranſeat planum, in quo poſita ſit linea AB vel recta, vel curva, cujus centrum gravitatis ſit K. Ex hoc ducatur in axem perpendicularis KD. Ex quolibet puncto M ducatur pariter axi normalis MP, & ſumatur infinite parva MN. MP fiat $= x$, MN $= ds$. Ex theoremate præſuppoſito erit $Sxds =$ KD. Sds: atqui facta rotatione circa axem CP, arcus deſcripti ab M, qui dicantur $= y$, & arcus deſcriptus a K, qui dicatur $= k$ ſunt proportionales diſtantiis MP, KD. Ergo proportionalibus ſubſtitutis erit $Syds = k\,Sds = k$. AB facta $s =$ AB: atqui in hac hypotheſi $Syds$ eſt æqualis ſuperficiei genitæ ab AB: Ergo hæc ſuperficies eſt æqualis lineæ AB ductæ in arcum deſcriptum ab ejus centro gravitatis K. Q. E. D.

Sit

Sit nunc superficies ea, quæ rotatur, figura, quæ intelligatur (*Fig.* 13) divisa in sua elementa R S V T per lineas parallelas axi rotationis C D. Distantia elementi R V ab axe vocetur $= x$, elementum $= ds$. Sit autem K centrum gravitatis figuræ rotatæ, & K D distantia. Erit ex theoremate præsupposito $S\,x\,ds = KD \,.\, S\,ds$ sed x, & K D sunt proportionales arcubus simul descriptis, qui dicantur y, k: Ergo proportionalibus substitutis fiet $S\,y\,ds = k\,S\,ds$ $= RVZ \,.\, k$: sed in hac hypotesi $S\,y\,ds$ est solidum genitum in rotatione: Ergo superficies rotata in viam centri gravitatis est æqualis solido orto ex rotatione. Q. E. D.

Si pars figuræ rotatæ jaceat ad partem alteram axis rotationis, quæ figura ab hac gignitur, detrahenda est a reliqua, ut veritas a Guldini regula ne discedat: quemadmodum supra notatum est.

Quod si figura genitrix rotanda non jaceat in uno eodemque plano transeunte per axem rotationis, ut Guldini regula cum veritate consentiat, projicienda est primum circulariter figura genitrix in planum transiens per axem rotationis, tum figuræ ex circulari projectione ortæ determinandum est centrum gravitatis, demum hæc figura orta ex projectione in viam sui centri gravitatis multiplicanda, & habebimus productum æquale quantitati ortæ ex rotatione. Hujusce propositionis omittitur demonstratio, quia similis est illi, qua supra usi fuimus. Quæ autem supra factæ sunt animadversiones, eædem huc transferendæ sunt.

Ad regulæ usum accedo, in quo explicando non tam brevitatis, quam diligentiæ ratio mihi habenda est. Si figuræ rotantis, vel superficies sit vel linea, centrum gravitatis vel aliunde cognitum sit, vel brevi calculo facile cognosci possit, quod contingit in figuris rectilineis, in integro circulo, ellipsi, omnibusque figuris constantibus quatuor partibus æqualibus, & similibus, tum sine ullo artificio regula in usum traducenda est. Regula vero hæc satis docet, servata eadem distantia centri gravitatis ab axe rotationis æqualem semper oriri quantitatem, quomodocumque figura rotans constituatur, dummodo maneat in uno eodemque plano rotationis.

Quod si figura rotans habeat duas partes similes & æquales, quæ a linea recta separantur, ejus centrum gravitatis in hac recta linea positum est. Si hæc eadem linea axi rotationis parallela constituatur, non est necesse centrum gravitatis reperire, quia ubicumque positum sit, ejus distantia ab axe rotationis erit eadem.

In hac tamen methodo quantitas figuræ rotandæ data esse supponitur: quare aut ipsa simplex maxime sit oportet, aut ad simpliciores aliunde jam redacta. Quod si hoc faciendum esset, &

centrum gravitatis inveniendum, operationes iterandæ molestia non mediocri analystas afficerent. Quare satius erit in hoc casu figuram rotandam in sua elementa dividere, & quodlibet ex elementis in viam ejus centri gravitatis multiplicare; tum per methodum integralium summatoriam accipere, & figuræ genitæ quantitatem inveniemus.

Si sermo sit de lineis rotantibus, alia methodus præter hanc non videtur suppetere. Dividatur AB (*Fig.* 12) rotanda in sua elementa MN. Ducantur MP, NQ normales axi rotationis. Vocetur $r : c$ ratio radii ad circumferentum; tum fiat $r : c :: MP : \frac{c}{r} . MP$, quæ multiplicetur per $MN = ds$, & habebitur elementum superficiei genitæ $\frac{c}{r} . MP . ds$. Quum autem detur ex curvæ æquatione ds per MP, poterit integrando cognosci genita superficies.

Si vero sermo sit de superficiebus, multis modis poterunt hæ intelligi divisæ in sua elementa. Si superficies rotanda axem habeat parallelum axi rotationis, utile erit eam dividere in elementa per lineas eidem perpendiculares. Ita quum superficies rotanda ABD (*Fig.* 14) habeat AD parallelum axi rotationis EC, dividatur in sua elementa per RM, NS quæ productæ secent rotationis axem CE normaliter. Vocetur $EA = b$, $AR = x$, $RM = y$. Centrum gravitatis elementi RN sit K, cujus distantia ab axe rotationis EC erit $= b + \frac{y}{2}$. Igitur elementum solidi geniti $= \frac{c}{r} . \overline{b + \frac{y}{2}} . y\, dx$.

Quod si superficies clauderetur non a BD parallela ordinatis, sed vel a BG, vel a BF: tum ad habendum solidum genitum a $S\, \frac{c}{r} . \overline{b + \frac{y}{2}} . y\, dx$ facto $x = AD$ vel detrahendum esset solidum genitum a triangulo BDG, vel addendum quod gignitur a triangulo BDF.

Præstabit aliquando dividere superficiem in elementa per lineas parallelas axi rotationis, ut in (*Fig.* 15): quo in casu vocata $BE = b$, $BS = x$, $SN = y$; centrum K distabit ab axe rotationis distantia $= b - x$: ergo elementum solidi geniti erit $= \frac{c}{r} . \overline{b - x} . y\, dx$. Alia artificia pro circumstantiarum diversitate adhiberi poterunt, quæ quando non ignota sunt analystis, eorum industriæ relinquenda censeo.

Unum dumtaxat prætereundum non videtur, (*Fig.* 16) nimirum quum solidum quæritur, quod gignitur a superficie curva, quæ

quæ clauditur a tangentibus curvam. Sit curva quælibet A M B relata ad lineam C S, in quam deſinunt tangentes a ſingulis curvæ punctis diſcedentes, ut M R, quæritur ſolidum quod gignitur a ſuperficie, quæ clauditur ab A C, C R, parte curvæ, & ejus tangente. Ducantur infinite proximæ duæ tangentes M R, N S, & in puncto O, in quo ſe ſecant, facto centro intervallo O R deſcribatur arcus R T, elementum ſuperficiei erit ſector O R T, cujus centrum gravitatis K diſtabit ab O per duas tertias partes radii O R.

Ex puncto dato quolibet C ducantur C F, C G parallelæ, & æquales rectis M R, N S, & jungatur F G: manifeſtum eſt ſectorem F C G = O R T, & pariter ejus centrum gravitatis diſtare a puncto C per duas tertias partes C F: Ergo ductis K P, H Q normalibus eidem C S erit H Q : K P : : 2 : 1.

His poſitis quum ſolidum genitum ab O R T ſit = O R T ductum in circumferentiam radii K P, & ſolidum genitum a C F G ſit = C F G in circumferentiam radii H Q erit primum ſolidum ad alterum ut 1 : 2 : quæ ratio quum ſit conſtans valebit etiam in ſummatoriis finitis.

Sit primum A M B tractoria, cujus tangens M R ſemper eſt conſtans. Prima tangens ſit A C. Manifeſtum eſt, figuram in quam deſinunt parallelæ, & æquales tangentibus tractoriæ fore circuli circumferentiam A G: Igitur ſolidum genitum a ſpatio A C R M rotante circa C R erit ad ſolidum genitum a ſectore A C G rotante circa C E erit : : 1 : 2. Quapropter ſolidum infinite longum productum a tractoria gyrante circa ſuum aſſymptoton erit dimidium hemiſphærii habentis pro radio tangentem tractoriæ.

Sit deinde A M (*Fig.* 17) logiſtica, cujus proprietas eſt, ut ſubtangens ſit conſtans. Manifeſtum eſt, quod facta C E æquali ſubtangenti logiſticæ, & excitata normali E A; C F, C A parallelæ tangentibus R M, C A eiſdem æquales erunt: Ergo ſolidum genitum a ſuperficie A C R M eſt dimidium ſolidi geniti a ſuperficie C F A rotatione facta circa E C R: Ergo ſolidum infinite longum terminatum ad A C erit dimidium coni, cujus altitudo eſt C E = ſubtangenti logiſticæ, & cujus latus C A = tangenti C A.

Hæc ad illuſtrandam regulam Guldini ſufficiant, quæ tametſi difficilia non ſint, habent tamen non exiguam utilitatem.

OPUSCULUM TERTIUM.

De multiplici logarithmorum systemate. Disquisitio Mathematica.

QUoniam non raro a Scriptoribus mathematicis mentio fit de logarithmis cum vulgaribus, tum hyperbolicis; neque satis adhuc illis, qui geometriæ sublimiori discendæ vacant, inter utrumque genus discrimen distinctum esse videtur: iccirco gratum me omnibus facturum esse confido, si rem hanc totam clare, ac distincte ex suis principiis deducam, & fontes, ex quibus diversitas oritur, patefaciam. Quod ubi præstitero, nemini uni difficile erit, utrumque genus, prout res poscet, in usum sine paralogismo vocare. Quamquam ex comparatione inter series geometricas, & arithmeticas primum detecti sint logarithmi; tamen quum de hyperbolæ quadratura mihi sint omnino verba facienda, commodissimum mihi visum est, ex eadem quadratura theoriam omnem derivare.

Si inter asymptotos CH, CN (*Fig.* 1) ad angulum rectum concurrentes, posita sit hyperbola HBS, & in CN accipiantur lineæ quatuor CI, CL, CM, CN geometrice proportionales ita, ut sit CI : CL :: CM : CN : ajo, ductis ordinatis IP, LQ, MR, NS, spatia PILQ, RMNS fore æqualia.

Quamquam hoc notissimum est, tamen breviter demonstro. Sume elementa infinitesima I*i*, M*m*, quæ sint inter se, ut CI : CM, & ducantur ordinatæ *ip*, *mr*. Quoniam ex constructione I*i* : M*m* :: CI : CM, & ex natura hyperbolæ CI : CM est in ratione reciproca IP : MR, erit I*i* : M*m* in ratione reciproca IP : MR: Ergo rectangula P*i*, R*m* reciprocantia latera erunt æqualia. Si sumantur denuo duo nova elementa, quæ sint ut CI : CM, sive ut C*i* : C*m*, eadem ratione rectangula provenient æqualia: Ergo progressu hoc in infinitum producto palam fiet, omnia rectangula exhaurientia spatium PL æqualia esse omnibus rectangulis exhaurientibus spatium RN: Ergo spatia hæc hyperbolica PL, RN erunt æqualia. Q. E. D.

Ex quocunque puncto D ducatur ordinata DE. Quoniam differentia inter spatia EDIP, EDLQ eadem est ac differentia inter spatia EDMR, EDNS, apparet inter hæc quatuor spatia inter-

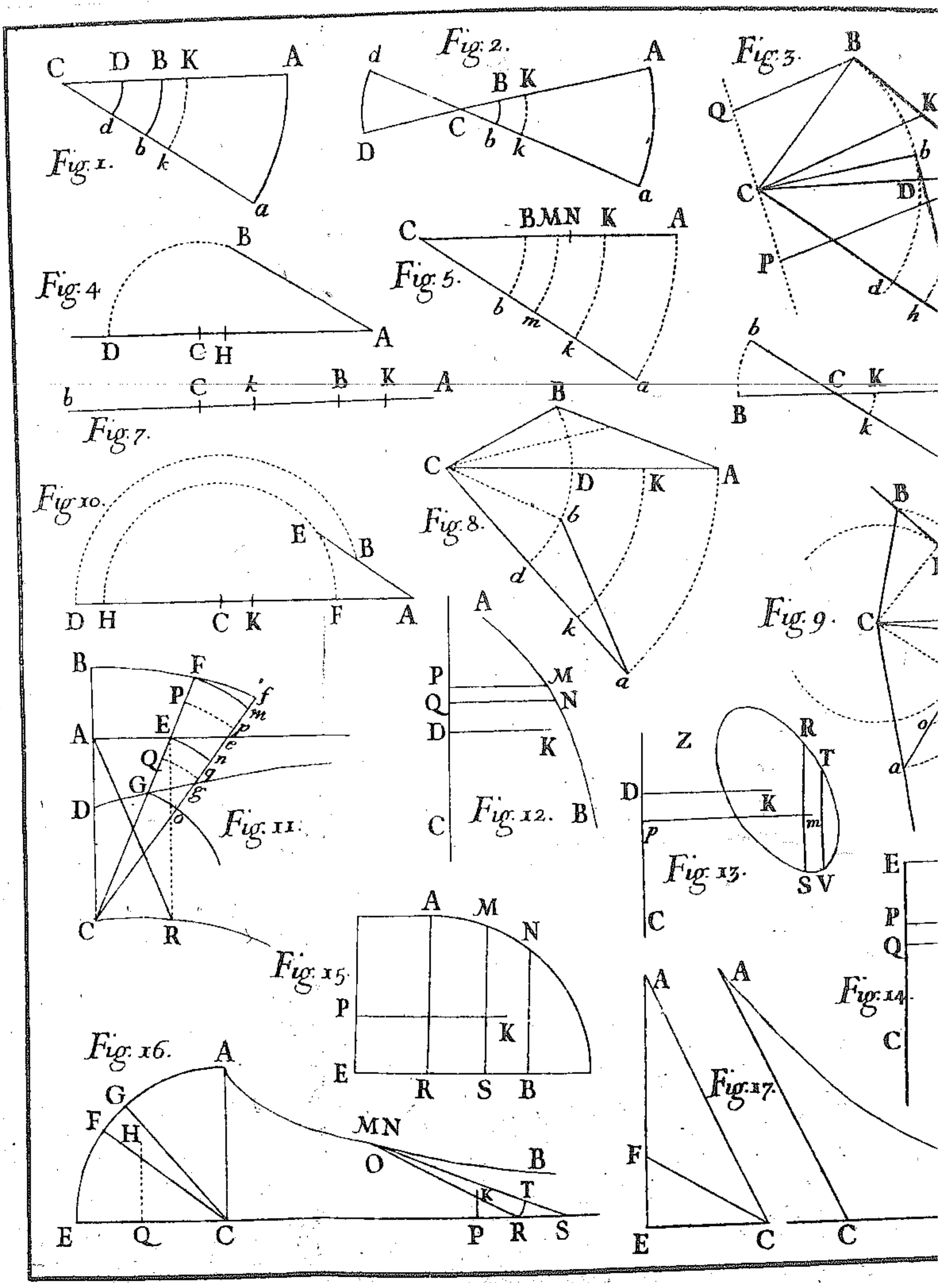
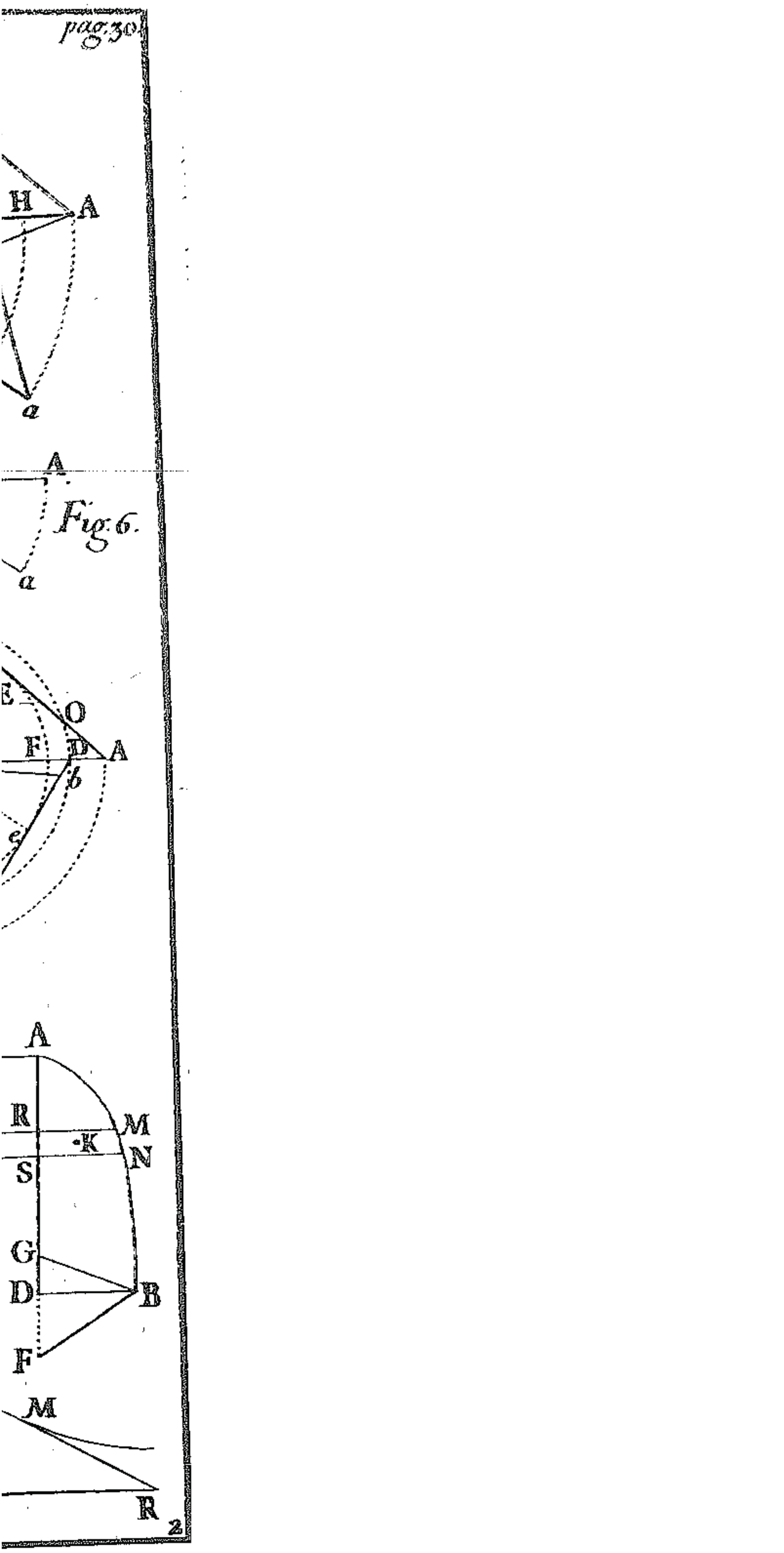


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.


pag. 30
H
A
a
A
Fig. 6.
a
E
O
F
D
A
b
e
A
R
M
K
N
S
G
D
B
F
M
R
2

tercedere proportionem arithmeticam. Itaque dum abſciſſæ ſumptæ in aſsymptoto CN, & incipientes a centro C ſunt in ratione geometrica, ſpatia hyperbolica incipientia a qualibet DE, & eiſdem abſciſſis reſpondentia tenent rationem arithmeticam. Igitur ſi accipiantur in aſsymptoto lineæ conſtituentes ſeriem geometricam, ſpatia hyperbolica conſtituent ſeriem arithmeticam.

Hiſce, quæ notiſſima ſunt, breviter attactis, deſcribatur jam nova curva HDY ejus conditionis, ut rectangulum ex data qualibet, quam vocabo $= b$, & ex ordinata TI perpetuo æquet ſpatium hyperbolicum EDIP. Quoniam hujuſce curvæ ordinatæ eam ſervant rationem, quam ſpatia hyperbolica, conſtat, eas eſſe in ratione arithmetica, quoties abſciſſæ ſunt in ratione geometrica, & efformare ſeriem arithmeticam, quoties per abſciſſas efformatur ſeries geometrica. Quamobrem abſciſſas CI, CL numeros appellant, ordinatas autem IT, LV eorundem numerorum logarithmos, & curvam HDY logiſticam, ſeu logarithmicam. Ut autem notis expeditis utamur, ad indicandum logarithmum numeri cujuſdam CI, ſive rectam IT ſcribemus $l\,CI$; ita ut littera l lineæ præfixa ejus lineæ deſignet logarithmum.

Ex ſola inſpectione figuræ apparet, $l\,CD = 0$. Numerus autem CD ex arbitratu determinari poteſt. Logarithmus autem numeri ſuperantis CD erit affirmativus, negativus autem erit logarithmus numeri minoris quam CD. Ex quibus propoſitio converſa ſtatim colligitur: nimirum logarithmus $= 0$ habet numerum $=$ CD, logarithmus affirmativus habet numerum majorem quam CD, negativus autem minorem quam CD. Quemadmodum conſideravi tanquam poſitivos logarithmos poſitos ſub linea CN, negativos, qui ſupra CN ſiti ſunt; ita hos potuiſſem conſiderare ut affirmativos, illos ut negativos. Qua in hypotheſi numeri minores quam CD haberent poſitivos logarithmos, majores haberent logarithmos negativos. Hoc autem animadvertiſſe juvabit, ubi logarithmorum ſyſtema indicabimus, quo uſus eſt Joannes Neperus doctiſſimus hujuſce methodi inventor.

Arbitraria eſt, ut ſupra diximus, determinatio numeri CD habentis logarithmum $= 0$. Verum facta hac determinatione nondum logarithmica HDY determinata eſt: ſed præterea determinanda eſt conſtans $= b$, quæ per logarithmos multiplicata exhibet ſpatia hyperbolica, aut alia quælibet conſtans, per quam ipſa b determinata remaneat: ut ſi quis determinaret numerum, cujus logarithmus aut eſſet æqualis CD, aut ad CD datam haberet proportionem. Hoc autem ſilentio prætereundum non erat, quia

ex

ex determinatione unius potius, quam alterius constantis oriuntur diversa logarithmorum systemata. Sed antequam de hoc dicimus, propositiones sunt aliquot præmittendæ.

Propositio prima. Si fuerint quatuor numeri geometrice proportionales logarithmi mediorum æquabunt logarithmos extremorum.

Constat hæc propositio ex supradictis. Nam numeri geometrice proportionales habent logarithmos proportionales arithmetice: atqui notum est, quatuor quantitates arithmetice proportionales ita esse affectas, ut extremarum summa summam æquet mediarum: Ergo si numeri sint geometrice proportionales eorum logarithmi habebunt summam extremorum æqualem summæ mediorum. Q. E. D.

Corollarium primum. Hinc constat fore $l\,\frac{bk}{f} = l\,b + l\,k - l\,f$. Nam $\frac{bk}{f}$ est quarta geometrice proportionalis post f, b, k: Ergo ejus logarithmus additus $l\,f = l\,b + l\,k$: Igitur $l\,\frac{bk}{f} = l\,b + l\,k - l\,f$.

Corollarium alterum. Si quantitas $b = k$, haberetur $l\,\frac{b^2}{f} = 2\,l\,b - l\,f$. Si $k = \frac{b^2}{f}$ erit $l\,\frac{b^3}{f^2} = 3\,l\,b - 2\,l\,f$. Immo generatim per hanc methodum inveniemus $l\,\frac{b^p}{f^{p-1}} = p\,l\,b - \overline{p+1}\,.\,l\,f$.

Corollarium tertium. Si sit $f = $ CD erit $l\,f = 0$: Ergo $l\,\frac{b^p}{f^{p-1}} = p\,l\,b$. Multa alia deduci possunt, quæ lectoris industriæ relinquuntur.

Propositio secunda. Æquationem logarithmicæ exhibere.

Ex hyperbolæ vertice principali demittatur BA normalis asymptoto CN, & fiat BA $=$ CA $= a$, CD $= f$. Sumatur CL $= mf$; m est numerus constans determinandus prout usus veniet. Numeri autem CL logarithmus est LV, quem vocabimus $= g$, ita ut sit $g = l\,mf$. Ducta vero VZ parallela CM fiat LM $=$ VZ $= x$, MR $= y$, ZX $= z$: quare $mf + x$ erunt numeri, $g + z$ logarithmi.

Ex æquatione hyperbolæ erit $\frac{a^2}{mf + x} = y$: Ergo facta multiplicatione per dx fiet $\frac{a^2\,dx}{mf + x} = y\,dx$. Quum autem spatium hyperperbolicum EDMR $= b . MX = b . \overline{g + z}$, elementum ejusdem spatii nempe $y\,dx$ debebit æquare $b\,dz$: Igitur $\frac{a^2\,dx}{mf + x} = bdz$. Ex hac æquatione differentiali determinare oportet proportionem, quæ intercedit inter numeros $mf + x$, & logarithmos $g + z$.

Corollarium. Quanquam non est animus indicare logarithmicæ proprietates, quæ ab aliis patefactæ sunt; tamen hoc omnino necessarium est animadvertere, subtangentem logisticæ acceptam in assymptoto CH fore $= \frac{a^2}{b}$; quod cuique proclive est demonstratu. Nam $\frac{a^2}{b} = \frac{\overline{mf + x} . dz}{dx}$; sed hæc est expressio subtangentis sumtæ in assymptoto: Ergo ec. Quare vocata subtangente $= c$, quod semper deinceps faciemus, æquatio logarithmicæ erit $\frac{c\,dx}{mf + x} = dz$.

Hinc deducere licet, per quamlibet logarithmicam, seu per logarithmicam cujuscumque subtangentis quadrari posse quamlibet hyperbolam. Etenim si oporteat quadrare hyperbolam æquilateram; cujus potentia sit $= a$, inveniatur tertia proportionalis post c, a, quæ vocetur $= b$, ita ut sit $b = \frac{aa}{c}$, spatium hyperbolicum erit æquale $b . \overline{g + z}$ addita, vel demta constante, prout opus fuerit. Quod si hyperbola non fuerit æquilatera, neque angulus assymptotorum rectus, tunc spatium hyperbolicum æquabit non rectangulum $b . \overline{g + z}$, sed parallelogrammum, cujus latus unum sit b, alterum autem $g + z$, quæ duo latera angulum efficiant æqualem angulo assymptotorum.

Propositio tertia. Dato numero invenire per seriem logarithmum; hoc est in nostris symbolis dato $mf + x$, invenire $g + z$. Fiat $g + z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$ ec. Ergo differentiis acceptis $dz = \frac{c\,dx}{mf + x} = B\,dx + 2Cx\,dx + 3Dx^2\,dx + 4Ex^3\,dx + 5Fx^4\,dx$ ec. Facta itaque multiplicatione per $mf + x$, & divisione per dx, fiet

$$\begin{array}{lllllll} c = mfB & + 2mfCx & + 3mfDx^2 & + 4mfEx^3 & + 5mfFx^4 & \text{ec.} \\ & Bx & + 2Cx^2 & + 3Dx^3 & + 4Ex^4 & \text{ec.} \end{array}$$

Quæ æquatio quum debeat esse identica, fiet $B = \frac{c}{mf}$, $C = \frac{-c}{2m^2f^2}$, $D = \frac{c}{3m^3f^3}$, $E = \frac{-c}{4m^4f^4}$, $F = \frac{c}{5m^5f^5}$. Itaque erit $g + z$

E $= A$

$= A + \frac{cx}{mf} - \frac{cx^2}{2m^2f^2} + \frac{cx^3}{3m^3f^3} - \frac{cx^4}{4m^4f^4} + \frac{cx^5}{5m^5f^5}$ ec. Ut valor constantis A determinetur adverti debet, quod si $x = o$, etiam $z = o$: Ergo $A = g$. Quum autem sit $A = g = lmf$, & $g + z = l\overline{mf + x}$ erit $l\overline{mf + x} = lmf$ $+ c.\overline{\frac{x}{mf} - \frac{x^2}{2m^2f^2} + \frac{x^3}{3m^3f^3} - \frac{x^4}{4m^4f^4}}$ Q. E. I.

Corollarium. Si x sumatur negativa, ita ut logarithmus quæratur quantitatis $\overline{nf - x}$, erit $l\overline{mf - x} = lmf$ $+ c.\overline{\frac{-x}{mf} - \frac{x^2}{2m^2f^2} - \frac{x^3}{3m^3f^3} - \frac{x^4}{4m^4f^4}}$ ec.

Ut usus harum serierum palam fiat, supponamus primum $m = 1$, ita ut puncta L, V coincidant cum puncto D. Tum $lf = o$: Ergo habebimus $l\overline{f + x} = c.\overline{\frac{x}{f} - \frac{x^2}{2f^2} + \frac{x^3}{3f^3} - \frac{x^4}{4f^4} + \frac{x^5}{5f^5}}$. Quæ series erit convergens, donec $x = f$: si enim x, vel tantillum superet f, tum post aliquot terminos specie convergentes sequuntur termini divergentes. Quare series utilis erit ad inveniendos logarithmos numerorum ab f usque ad $2f$. Inveniemus autem $l2f = c.\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}$ ec.

Hisce inventis ponamus $m = 2$, & erit $l\overline{2f + x} = l2f$ $+ c.\overline{\frac{x}{2f} - \frac{x^2}{2^2 . 2f^2} + \frac{x^3}{2^3 . 3f^3} - \frac{x^4}{2^4 . 4f^4}}$ ec. Quæ series convergens erit, donec $x = 2f$, quo in casu habebimus $l4f = l2f$ $+ c.\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$ ec., sive $l4f = 2l2f = 2c.\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$ ec. Quapropter per seriem inveniemus logarithmos omnium numerorum a $2f$ usque ad $4f$.

Ponamus $m = 4f$, & erit $l\overline{4f + x} = l4f$ $+ c.\overline{\frac{x}{4f} - \frac{x^2}{2 . 4^2 f^2} + \frac{x^3}{3 . 4^3 f^3} - \frac{x^4}{4 . 4^4 f^4}}$ ec. Series autem erit convergens, donec $x = 4f$, quo in casu erit $l8f = l4f + c.$

1 —

$\overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ ec.}}$ sive $l8f = 3l2f = 3c . \overline{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ ec.}}$ Atque ita deinceps progrediendo omnium numerorum logarithmos per series convergentes inveniemus.

Quod attinet ad logarithmos numerorum minorum quam f, si ponatur $m = 1$, & x negativa, invenientur eadem ratione logarithmi numerorum a f usque ad $\frac{f}{2}$: tum si ponatur $m = \frac{1}{2}$, invenientur logarithmi numerorum a $\frac{f}{2}$ usque ad $\frac{f}{4}$: atque ita deinceps.

In superioribus quædam adnotanda sunt, quæ praxim reddunt difficillimam. Series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ ec. Ex duabus seriebus componitur, quarum prima ex illis terminis constat, quibus præfigitur signum $+$, altera ex illis quibus signum $-$ præponitur. Utraque ex istis seriebus infinita est, licet earum differentia sit finita. Huic incommodo facile medemur, si reapse singulorum parium differentiam sumamus, & seriem formemus hujusmodi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + \frac{1}{11.12}$ ec. Verum hæc series lentissime convergit ita, ut oporteat sumere terminos septem & decem, ut solum ad partes millesimas perveniamus. Quare necesse erit tot operationes instituere, quot dilassare valeant quemque arithmeticum.

Quemadmodum processimus per seriem f, $2f$, $4f$, $8f$, ec., ut inveniremus primum logarithmos numerorum inter f, & $2f$, tum inter $2f$, & $4f$, atque eadem ratione deinceps: ita possumus procedere per seriem, cujus termini minus inter se differant, exempli caussa f, $\frac{3}{2}f$, $\frac{9}{4}f$, $\frac{27}{8}f$, $\frac{81}{16}f$ ec. ex qua ratione inveniemus numerorum logarithmos per series magis convergentes. Facta itaque $m = 1$, inveniemus logarithmos numerorum ab f usque ad $\frac{3}{2}f$: quo in casu extremo quum sit $x = \frac{f}{2}$, habebimus $l\frac{3}{2}f$

$$= c . \overline{\tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5}}$$ ec. quæ series aliquanto magis convergit. Tum fiat $m = \frac{3}{2}$, atque in hac suppositione inveniemus logarithmos numerorum a $\frac{3}{2}f$ usque ad $\frac{9}{4}f$, inter quos jacet $2f$, cujus logarithmus invenietur $l2f = l\frac{3}{2}f$

$$+ c . \overline{\tfrac{1}{3} - \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.3^3} - \frac{1}{4.3^4} + \frac{1}{5.3^5}}$$ ec. Deinde inveniemus logarithmum numeri $\frac{9}{4}f$, nempe $l\frac{9}{4}f = 2l\frac{3}{2}f$

 $= 2c$

$= 2c\,.\,\overline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2.\,2^2} + \frac{1}{3.\,2^3} - \frac{1}{4.\,2^4}}$ ec. Præterea faciamus $m = \frac{9}{4}$, & progrediamur uſque ad logarithmum numeri $\frac{27}{8}f$, qui erit triplus $l\,\frac{3}{2}f$. Inter hos numeros jacet numerus $3f$, cujus logarithmus erit $l\,3f = l\,\frac{9}{4}f + c\,.\,\overline{\frac{3}{4} - \frac{3^2}{2.\,4^2} + \frac{3^3}{3.\,4^3} - \frac{3^4}{4.\,4^4}}$ ec. Tum fiat $m = \frac{27}{8}f$, & inveniantur logarithmi numerorum uſque ad $\frac{81}{16}f$, atque ita deinceps.

Series autem, ut cuique patens eſt, convergerent magis magiſque, ſi progrederemur per ſeriem, cujus primi termini magis ad æqualitatem accederent, ut f, $\frac{10}{11}f$ ec. Hæc methodus utilis eſſe poteſt; ſed plures operationes inſtituendæ ſunt ad inveniendos logarithmos numerorum integrorum, quam in ea, quam paucis exponam.

Quum $l\,mf.\frac{mf+x}{mf-x} = l\,mf + l\,\overline{mf+x} - l\,\overline{mf-x}$ habebimus $l\,mf.\frac{mf+x}{mf-x} = l\,mf + 2c\,.\,\overline{\frac{x}{mf} + \frac{x^3}{3m^3f^3} + \frac{x^5}{5m^5f^5}}$ ec. Hæc ſeries magis convergens eſt, quam ſuperiores. Si ponamus $m = 1$, inveniemus $lf.\frac{f+x}{f-x} = 2c\,.\,\frac{x}{f} + \frac{x^3}{3f^3} + \frac{x^5}{5f^5} + \frac{x^7}{7f^7}$ ec. Hujuſmodi ſeries cujuſcumque numeri logarithmus quæratur, ſemper convergens eſt. Nam ſi generatim quæratur lpf, fieri debet $\frac{f+x}{f-x} = p$: Igitur $\frac{x}{f} = \frac{p-1}{p+1}$: quæ quantitas quum minor ſit quam unitas, conſequitur terminos poſteriores in ſerie ſemper anterioribus minores eſſe, & ultimum evadere infiniteſimum.

Si ex hac ſerie quæramus $l\,10f$, fiet $\frac{x}{f} = \frac{9}{11}$: quare habebimus $l\,10f = 2c\,.\,\overline{\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.\,11^3} + \frac{9^5}{5.\,11^5} + \frac{9^7}{7.\,11^7}}$ ec. Verum magis convergentes ſeries inveniemus, ſi per partes progrediamur. Pone $m = 1$, & ad inveniendum $l\,2f$, ſtatue $\frac{x}{f} = \frac{1}{3}$, & ſeriem hujuſmodi elicies $l\,2f = 2c\,.\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3.\,3^3} + \frac{1}{5.\,3^5} + \frac{1}{7.\,3^7}$ ec. quæ maxi-

maxime convergit. Invento $l2f$, nancifcemur $l4f = 2l2f$, $l8f = 3l2f$, $l16f = 4l2f$: atque ita deinceps.

Si in noftra formula fiat $m = 2$, inveniemus logarithmos numerorum, qui fiti funt inter $2f$, & $4f$, ut logarithmum numeri $3f$. In hoc autem cafu inveniemus $\frac{x}{2f} = \frac{1}{5}$. Quare erit

$$l3f = l2f + 2c \,.\, \overline{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3 \cdot 5^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 5^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 5^7}} \text{ ec.}$$

Similiter facto $m = 4$, inveniemus logarithmos numerorum inter $4f$, & $8f$. Facto item $m = 8$, inveniemus logarithmos numerorum, qui fiti funt inter $8f$, $16f$. Ut autem logarithmum numeri $10f$ inveniamus, neceffe eft ponere $\frac{x}{8f} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$: Igitur $l10f = l8f + 2c \,.\, \overline{\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7}}$ ec. Atque hac ratione progredientes logarithmos numerorum per feries maxime convergentes inveniemus.

Non fum nefcius, in plerifque logarithmis inveniendis, compendio nos uti poffe: Nam dato cujuslibet numeri logarithmo omnium numerorum, qui conftituunt feriem geometricam poft f, & datum numerum, logarithmi invenientur. Immo datis duorum numerorum logarithmis tertii, quarti ec. proportionalis dantur logarithmi. Numerus qui oritur ex multiplicatione duorum, quorum logarithmi dati funt, habet logarithmum datum: numeri, qui oritur per divifionem, fi divifor & dividendus, habet logarithmos datos, logarithmus cognofcetur. Hæc, & fimilia compendia geometræ cuilibet obvia funt. Quare ad feries non erit confugiendum, nifi ubi habeantur numeri primi. Series autem femper magis convergentes invenientur, fi ponatur mf illi numero æqualis, qui proxime præcedit numerum, cujus quæritur logarithmus.

Propofitio quarta. Dato logarithmo invenire numerum; hoc eft in noftris fymbolis dato $g + z$, invenire $mf + x$. Hanc ob rem fiat $mf + x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ ec. Ergo acceptis differentiis $dx = Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz$ ec. & multiplicando utramque partem æquationis per c, & dividendo primam per $mf + x$, alteram per feriem æqualem nancifcemur

$$\frac{c\,dx}{mf + x} = dz = \frac{c \,.\, \overline{Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz} \text{ ec.}}{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \text{ ec.}}$$

Igitur fi fiat multiplicatio per feriem dividentem, erit $Adz +$

$Bzdz$

$B z dz + C z^2 dz + D z^3 dz + E z^4 dz$ ec. $= c B dz + 2 c C z dz + 3 c D z^2 dz + 4 c E z^3 dz + 5 c F z^4 dz$ ec. Instituenda jam est collatio, ut quantitatum constantium indeterminatarum B, C, D ec. valores determinentur. Ex comparatione autem hujusmodi valores inveniuntur $B = \frac{A}{c}$, $C = \frac{A}{2c^2}$, $D = \frac{A}{2 \cdot 3 c^3}$, $E = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^4}$, $F = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot c^5}$; atque ita deinceps. Igitur fiet $mf + x = A + \frac{Az}{c} + \frac{Az^2}{2c^2} + \frac{Az^3}{2 \cdot 3 \cdot c^3} + \frac{Az^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^4}$ ec. Ad determinandum constantis A valorem, adverte fieri $x = o$, si fuerit $z = o$: Ergo fiet $A = mf$. Quare facta substitutione, & in utraque æquationis parte deletis æqualibus, erit $x = mf \cdot \overline{\frac{z}{c} + \frac{z^2}{2c^2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3\, c^3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\, c^4}}$ ec. Fac advertas mf esse numerum, cujus logarithmus est $= g$. Hisce positis.

Sit primo $g = o$, ut ejus numerus $= f$, & $m = 1$, & orietur $x = f \cdot \overline{\frac{z}{c} + \frac{z^2}{2c^2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot c^3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\, c^4}}$ ec. Ex qua æquatione quæcumque ponatur z, quæ est logarithmus numeri $f + x$, invenietur x, adeoque $f + x$. Verum satius erit per partes procedere, & ex ultima æquatione invenire numerum cujus logarithmus sit z, quæ satis parva sumatur: tum hoc numero facto $= mf$, cujus logarithmus sit $= g$, sumatur alia z exigua, & sic inveniemus numerum $mf + x$, cujus logarithmus est $g + z$: hoc definito ad alios deinceps progrediemur.

Numeri, qui ex datis logarithmis inveniuntur, dependent tum a subtangente c, tum etiam a quantitate f: quarum quantitatum, nisi altera per alteram determinetur, per partes progredi non licebit. Ut autem exemplum clarum proponamus rationis, qua per partes progredi oportet, supponamus $c = f$, quod exemplum deinceps veniet in usum. Hac statuta determinatione fiet $x = mf \cdot \overline{\frac{z}{f} + \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 f^3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 z^4}}$ ec. Pono $m = 1$, & invenio $x = f \cdot \overline{\frac{z}{f} + \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 f^3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 f^4}}$ ec. Hæc series

ries exhibebit numeros $f+x$ omnium logarithmorum, qui positi sunt inter o, & f. Quapropter posito $z=f$, invenietur $f+x$ $=f+f\,.\,\overline{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}}$ ec. Series hæc vocetur $=A$, ut sit $f+x=f+fA$.

Supponatur jam $m=\overline{1+A}$, & fiet $x=\overline{1+A}\,.\,f\,.\,\overline{\frac{z}{f}+\frac{z^2}{2f^2}+\frac{z^3}{2.3f^3}}+\frac{z^4}{2.3.4f^4}$ ec. Series ista utilis erit inveniendis numeris, qui respondent logarithmis $f+z$ sitis inter f, & $2f$, si z indatur valor positus inter o, & f. Quare si ponatur $z=f$, fiet $x=\overline{1+A}\,.\,f\,.\,\overline{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}}$ ec. $=\overline{1+A}$ $.\,Af$. Itaque $\overline{1+A}\,.\,f+x=\overline{1+A}\,.\,fA+AA\,.\,f$ $=\overline{AA+2A+1}\,.\,f=\overline{A+1}^{2}\,.\,f$; qui est numerus, cujus logarithmus æquat $2f$.

Si statuas $mf=\overline{A+1}^{2}\,.\,f$, eodem modo invenies, numerum, cujus logarithmus æquat $3f$, esse $=\overline{A+1}^{3}\,.\,f$. Per seriem autem elicies numeros omnium logarithmorum, qui siti sunt inter $2f$, & $3f$; atque ita in infinitum.

Ita si invenire desideras numerum, cujus logarithmus sit $=$ $\frac{5}{2}f$, fac invenias prius numerum, cujus logarithmus sit $=2f$, qui numerus demonstratus est $=\overline{A+1}^{2}\,.\,f$. Tum fac $m=\overline{A+1}^{2}$, & $z=\frac{1}{2}f$: Ergo $x=\overline{A+1}^{2}.\,f.\,\overline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2.2}+\frac{1}{2^3.2.3}+\frac{1}{2^4.2.3.4}}$ ec.; quæ series si vocetur B, erit $x=\overline{A+1}^{2}.\,f.\,B$: Ergo $\overline{A+1}^{2}f$ $+x$, qui est numerus logarithmi dati, erit $=\overline{A+1}^{2}.\,\overline{B+1}\,.\,f$. Simili ratione uti debes, cujuscumque valoris sit tangens c.

Hisce præmissis advertendum est, logarithmorum systema non minus dependere a quantitate f, cujus logarithmus $=o$, quam deinceps vocabimus protonumerum, quam a quantitate c, quæ est subtangens logisticæ, & subtangens systematis ex analogia appellari potest. Quoniam systema mutari potest ex utriusque quantitatis mutatione, considerandum est, quibusnam conditionibus hujusmodi systematum mutationes peragantur.

Primum mutetur protonumerus eadem manente logisticæ subtantangente. Constituta ut supra hyperbola (*Fig.* 2) EBR, & sumpto protonumero CD $= f$, describatur logistica, cujus ordinata MX ducta in $b = \frac{aa}{c}$ æquet spatium hyperbolicum EDMR. Deinde sumto protonumero CF $=$ F, describatur alia logistica, cujus ordinata MZ in eandem b ducta æquet spatium hyperbolicum GFMR. Igitur b. XZ æquabit spatium hyperbolicum EDFG: atqui hoc spatium constans est: Ergo XZ ubique constans erit, atque adeo æqualis FH. Quare logarithmi systematis, in quo protonumerus minor est, superabunt eorundem numerorum logarithmos in systemate, ubi major est protonumerus, per quantitatem constantem æqualem FH. Quantitas autem FH est logarithmus numeri CF $=$ F, sumtus in systemate, in quo protonumerus est CD $= f$.

Quamobrem dato quocumque logarithmorum systemate, cujus protonumerus $= f$, invenientur facillime logarithmi alterius systematis, cujus protonumerus sit F. Etenim in systemate protonumeri f, inveniatur logarithmus numeri F: qui logarithmus dematur ab omnibus logarithmis systematis protonumeri f, & invenientur logarithmi systematis protonumeri F. Si F $> f$, in systemate protonumeri f, lF erit positivus, adeoque subtractio facienda est. Si vero F $< f$, idem lF erit negativus; quare mutato signo subtractio in additionem transibit.

Si vero unus idemque servetur protonumerus, & subtangens logarithmicæ mutetur, videndum est quamnam mutationem subeat logarithmorum systema. Iisdem prorsus suppositis cum eodem protonumero (*Fig.* 3) CD $= f$, describatur primum logistica DX, cujus ordinata ducta in b æquet spatium hyperbolicum ita, ut b. MX $=$ EDMR. Item alia logistica describatur DZ, cujus ordinata ducta in B æquet spatium hyperbolicum, ut sit B. MZ $=$ EDMR: Igitur b. MX $=$ B. MZ: Igitur MX : MZ :: $\frac{1}{b} : \frac{1}{B}$. Ergo logarithmi in duobus systematibus sunt in ratione constanti, hoc est in ratione reciproca earum quantitatum, quæ ductæ in logarithmos æquant spatium hyperbolicum: sed istæ quantitates sunt reciproce, ut logarithmicæ subtangentes: Ergo logarithmi in duobus systematibus, de quibus agimus, sunt directe ut subtangentes. Quare datis unius systematis logarithmis facile est alterius cujusque systematis per regulam trium, ut ajunt, logarithmos invenire; dummodo datæ sint subtangentes.

Quod si datum sit systema, cujus protonumerus sit f, subtangens vero c, & alterum systema inveniendum sit, cujus protonumerus sit F, subtangens autem C: primo ex dato systemate inve-

nia-

niatur ſyſtema protonumeri F, & ſubtangentis c; tum fiat $c : C$, ut ſinguli logarithmi modo inventi ad logarithmos, qui quæruntur. Noti itaque fient logarithmi omnes, qui quæruntur. Quoad praxim in dato ſyſtemate inveni logarithmum numeri F. Hunc deme ex datis logarithmis, tum inveni quartas proportionales poſt c, C, & logarithmos datos ea quantitate minutos; & quæſitos logarithmos invenies.

Hoc unice adverto: hoc problema: Dato logarithmorum ſyſtemate aliud ſyſtema invenire, in quo manentibus ceteris, mutetur protonumerus, eſt problema plerumque tranſcendens. Etenim FH, (*Fig.* 2) quæ detrahenda eſt ex logarithmis dati ſyſtematis, non datur plerumque niſi tranſcendenter per protonumerum novi ſyſtematis CF. Addidi plerumque, quia, ſi in ſyſtemate protonumeri CD logarithmus numeri CF, nimirum FH habeat rationem effabilem ad CD, quod aliquando contingit, problema algebraicum eſt. Verum alterum hoc problema, manente eodem protonumero, & dato uno logarithmorum ſyſtemate, invenire aliud ſyſtema diverſæ ſubtangentis, eſt pure algebraicum, dummodo ſubtangentes ſint altera per alteram algebraice datæ.

Adverte hanc conditionem, quam appoſuimus, ſi ex ſubtangentibus altera per alteram data ſit. Nam ſi habeatur ſyſtema logarithmorum, in quo præter protonumerum data ſit tangens logiſticæ, & quæratur ſyſtema logarithmorum, in quo poſito eodem protonumero datus ſit dati numeri logarithmus, hoc nonniſi traſcendenter obtinebitur, & viceverſa, ſi ex hoc primum quæratur logarithmorum ſyſtema. Etenim ſubtangens logiſticæ ex dato logarithmo dati numeri, nonniſi tranſcendenter habetur. Quo pacto autem ex dato logarithmo numeri dati, inveniatur ſubtangens, & viceverſa, adhibitis ſeriebus expoſitis non eſt difficile cognoſcere. Hoc autem invento ex uno ſyſtemate alium nanciſcemur.

Quod ſi poſito eodem protonumero, unius ejuſdemque numeri in uno ſyſtemate logarithmus ſit $= q$, in alio $= Q$, omnes logarithmi eorundem numerorum in duobus ſyſtematibus erunt in directa ratione $q : Q$. Quare dato uno ſyſtemate algebraice alter determinabitur.

Hinc oritur duplex genus logarithmorum. Vel enim datur protonumerus, & ſubtangens ſyſtematis; vel datur protonumerus ſyſtematis cum logarithmo dati numeri. Primum vocabimus ſyſtema logarithmorum generis hyperbolici, alterum generis vulgaris. Si unus idemque ſit protonumerus, nullus eſt tranſitus ab uno ſyſtemate ad aliud, niſi per quantitates tranſcendentes.

F Ve-

Verum ut ejus systematis, cujus tabulæ exhibent logarithmos, conditiones cognoscamus, quid sit basis logarithmica explicandum est. Basis logarithmica dicitur numerus ille, cujus logarithmus æquat protonumerum. Quapropter si datus sit protonumerus cum basi logarithmica, logarithmorum systema erit generis vulgaris; neque ab hoc fiet transitus ad systema generis hyperbolici, nisi per quantitates transcendentes. Itaque transcendentia erunt hujusce-modi problemata. Data basi logarithmica invenire subtangentem systematis, & data subtangente invenire systematis basim logarithmicam.

Hisce generatim expositis opportunum erit, ut de duobus illis systematibus, quæ in usu posita sunt, distinctius, & enucleatius verba faciamus. Systema logarithmorum vulgarium ponit logarithmum quantitatis cujuslibet f, quam statuit protonumerum, esse æqualem nihilo, basim autem logarithmicam esse $= 10f$, cujus scilicet logarithmus æquat protonumerum f. Systema autem logarithmorum hyperbolicorum, quo utuntur passim, convenit cum vulgari in hoc, quod ponit $lf = o$, sed ejusdem subtangentem ponit $= f$. Quo pacto alterum systema ad alterum redigatur, oportet cognoscere.

Quamobrem hoc primum investigemus, necesse est, ut in systemate vulgari subtangentem determinemus. Ex supradictis invenimus $l10f = l8f + 2c \cdot \overline{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3 \cdot 9^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 9^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 9^7} \text{ ec.}}$; atqui $l8f = 3l2f$, & $l2f = 2c \cdot \overline{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 3^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 3^7} \text{ ec.}}$

Ergo $l10f = 6c \cdot \overline{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 3^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 3^7} \text{ ec.}}$ $+ 2c \cdot \overline{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3 \cdot 9^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 9^5} + \tfrac{1}{7 \cdot 9^7} \text{ ec.}}$ Prima ex hisce seriebus fiat $= A$, altera $= B$, ut sit $l10f = 6Ac + 2Bc$: atqui $l10f = f$ in systemate vulgari: Ergo $f = 6Ac + 2Bc$, atque adeo $c = \frac{f}{6A + 2B}$. Inventa est itaque subtangens vulgaris systematis. Q. E. I.

Series duæ A, B maxime convergunt, & nullo negotio ad fractiones decimales rediguntur.

Quum semper posito eodem protonumero f logarithmi eorundem numerorum in diversis systematibus sint inter se, ut systematum

matum subtangentes, logarithmi hyperbolici ad logarithmos vulgares erunt, ut $f : \frac{f}{6A + 2B}$, sive ut $6A + 2B : 1$.

Jam ad logarithmos hyperbolicos convertendus est animus, & in illis invenienda est basis logarithmica: quam ob rem solvendum est hoc problema: Posito non minus protonumero, quam subtangente $= f$ invenire numerum, cujus logarithmus sit $= f$.

Solutio ex supradictis est perquam facilis. Namque si ponamus $\frac{z}{f}$, seu $\frac{z}{c} = 1$, inveniemus $x = f . \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}}$ ec. atque adeo $f + x$ numerus respondens logarithmo $= f$, erit æqualis $f + f . \overline{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}}$ ec., quæ series satis convergit. Quod si quæreretur numerus, cujus logarithmus æquaret 2, 3, aut $4f$; tum per partes esset procedendum, quemadmodum supra satis docuimus.

Adverte in tabulis cum logarithmorum hyperbolicorum, tum logarithmorum vulgarium protonumerum f æqualem poni unitati. Tabulæ logarithmorum vulgarium constructæ sunt, & absolutæ a multis, præsertim a Briggio, & Ulaquio, qui usi sunt subsidiis, quæ maxime distant a nostris seriebus. Tabulæ vero logarithmorum hyperbolicorum desiderantur. Optandum autem esset, ut aliquis hunc laborem susciperet, & eas præsertim, quæ desunt tabulæ, per computum perficeret, atque communi utilitati in lucem emitteret.

Nihil jam reliquum est, nisi ut respondeamus quærenti, ad quodnam genus pertineant logarithmi exhibiti in suis tabulis a doctissimo Joanne Nepero logarithmorum inventore. Respondeo, eos pertinere ad genus logarithmorum hyperbolicorum, sive ad illos, in quibus algebraice data supponitur subtangens systematis. Sinum totum ipse facit protonumerum, cujus scilicet logarithmus $= o$ Idem sinus totus exprimitur a Nepero per numerum 1000000. Sinus autem anguli gr. 89 -- 59′, qui exprimitur per numerum 999999, logarithmus ponitur $= 1$: Ergo quantum decrescit numerus, tantum augetur logarithmus, si sinus totus minimo decremento afficiatur.

Supponamus itaque CD (*Fig.* 4) esse sinum totum, & protonumerum systematis. Decrescat hic minimo elemento De, & ducatur ed parallela assymptoto logisticæ, quæ erit logarithmus numeri Ce. Ex Neperi suppositione D$e = de$. Ducatur DdT,

quæ

quæ propter proximitatem punctorum D, d tanquam tangens conſiderari poteſt: Igitur CT erit tanquam ſubtangens conſideranda. Igitur quum ſit $CT : CD :: eD : ed$, erit $CT = CD$: Ergo ſubtangens ſyſtematis eſt protonumero æqualis. Quæ proprietas pertinet ad genus logarithmorum hyperbolicorum.

Non minus ſyſtema logarithmorum hyperbolicorum, quam Neperianum ſupponit ſubtangentem æqualem protonumero. Sed inter duo ſyſtemata hoc maxime intereſt, quod in illo numeri majores, quam protonumerus, habent logarithmos poſitivos, minores habent negativos; contra in Neperiano numeri minores, quam protonumerus, præditi ſunt logarithmis poſitivis, majores negativis.

Atque ex his ſatis ſuperque patet diſcrimen inter ſyſtemata logarithmorum, atque aperta eſt methodus efformandi tabulas logarithmorum tum vulgarium, tum hyperbolicorum. De eorum autem uſu paſſim Scriptores loquuntur, neque in præſentia quidquam attingere decrevi.

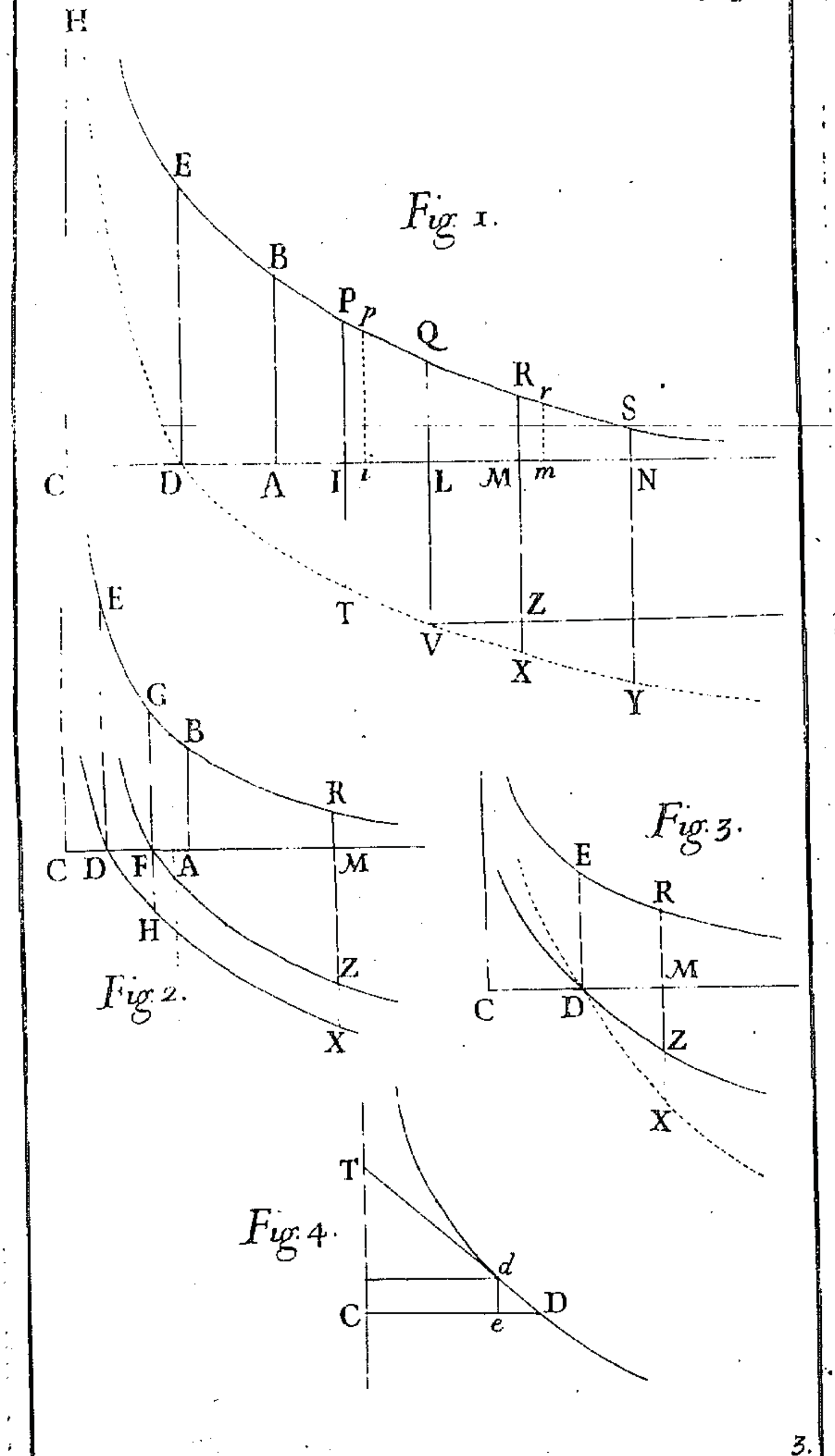


Fig. 1.
H
E
B
P p
Q
R r
S
C
D
A
I
i
L
M
m
N
T
V
Z
X
Y
Fig. 2.
E
G
B
R
C D F A
M
H
Z
X
Fig. 3.
E
R
M
C
D
Z
X
Fig. 4.
T
d
C
e
D

OPUSCULUM QUARTUM.

De quarumdam æquationum radicibus. Disquisitio-Mathematica. De harum expressione Analitica.

PARS PRIMA.

QUa methodo resolvantur æquationes secundi gradus, Arabes, ut notum est, nos docuerunt. Scipio Ferreus, ut narrat Cardanus, methodum adinvenit resolvendæ æquationis cubicæ, cujus radicem unam exhibuit per formulam, quæ a Cardano nomen accepit. Denique Raphael Bombellus in sua algebra exposuit, qua ratione æquatio quadrato-quadratica ope æquationis cubicæ resolvatur. Hanc autem methodum a Ludovico Ferrariensi inventam esse, affirmat Wolfius. Æquationes altiorum graduum nulla adhuc methodo resolvi potuerunt generatim, neque inveniri formula earum radicem exprimens. Quare deficiente œcumenica methodo non injuria in eo operam collocarunt analystæ, ut conditiones cognoscerent, quibus positis æquationes resolutionem accipiant.

Resolvuntur autem primo, quum spoliatæ secundo termino carent omnibus aliis terminis, si ultimum excipias: deinde quum unus tantum terminus ex mediis adest, in quo exponens incognitæ dimidium est exponentis termini primi, quod contingere nequit, nisi hic exponens sit numerus par: post resolvuntur, quum ex mediis adsunt termini duo ita, ut exponentes incognitæ in tribus terminis sint, ut 3, 2, 1; quod postulat exponentem maximum divisibilem esse per 3: demum quum medii termini tres sunt, & incognitæ exponentes sunt ut 4, 3, 2, 1; quod obtineri nequit, nisi primi termini exponens dividi possit per 4.

Nemo unus non videt, conditiones istas angustis admodum finibus contineri in omnibus æquationibus, sed præsertim in illis, in quibus incognitæ exponens maximum est numerus primus. In his enim præter primam conditionem nulla haberi potest, sub qua resolutionem accipiant. Versabam jamdudum animo, in omnibus æquationibus, in illis etiam, quarum gradus a numero primo indicatur, determinari posse conditiones, quibus positis earum radix una ea ratione exprimi possit, qua Cardani radix cubica exprimitur,

tur. Ut rem exemplo declarem, judicabam adesse æquationem quinti gradus, cujus radix hanc formam haberet $\sqrt[5]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[5]{a - \sqrt{b}}$. Verum difficilis videbatur methodus hujusmodi conditiones determinandi. Sed non ita pridem methodus sese mihi obtulit, non inelegans, quæ me docuit, quænam æquationes cujuscumque gradus radicem accipiant expressam analytice eo modo, quo radix cubica. Hoc autem inventum, quisque cognoscet, in omnibus æquationibus utilitatem habere, sed præcipue in illis, in quibus exponens maximum incognitæ est numerus primus. Rem igitur aggrediens incipiam ab æquationibus gradus alterius, deinde ad altiores progrediar.

Pono $x = m + n$, quam æquationem elevo ad quadratum, & fit $xx = mm + 2mn + nn$, sive $xx - 2mn \begin{array}{l} - m^2 \\ - n^2 \end{array} = o$. Hujus radix est $x = m + n$, cui etiam addere possumus $x = - m - n$, ut radicem extrahenti palam fiet.

Ad æquationes cubicas progredior, & $x = m + n$ elevo ad potestatem tertiam $x^3 = m^3 + 3m^2 n + 3mn^2 + n^3$. Quam æquationem hoc pacto dispono $x^3 = m^3 + 3mn . \overline{m + n} + m^3$, & ad eandem partem translatis terminis substituo x pro binomio $m + n$, & invenio $x^3 - 3mnx \begin{array}{l} - m^3 \\ - n^3 \end{array} = o$, cujus radix una erit $x = m + n$. Ad hanc æquationem unica hæc conditio requiritur, ut secundus terminus desit, quod semper obtinere possumus.

Ut æquationes gradus quarti expediam, effero ad quartam potestatem $x = m + n$, & invenio $x^4 = m^4 + 4m^3 n + 6m^2 n^2 + 4mn^3 + n^4$: quæ æquatio hac ratione est distribuenda $x^4 = m^4 \begin{array}{l} + 4mn . \overline{m + n}^2 \\ - 2m^2 n^2 \end{array} + n^4$. Pro $m + n$ pono x, & translatis terminis nanciscor $x^4 - 4mnx^2 + 2m^2 n^2 \begin{array}{l} - m^4 \\ - n^4 \end{array} = o$, cujus radix una est $x = m + n$. In hac æquatione hæc conditio necessaria est, ut deficiente secundo termino desit etiam quartus, & nulla potestas impar incognitæ x reperiatur.

Æquatio hac conditione prædita per alias methodos, ut notum

tum eſt negotio nullo reſolvitur. Poteſt enim conſiderari x^2, ut incognita, & addito dimidii coefficientis quadrato reſolvi per extractionem radicis. Sed eam ad noſtrum canonem æquationis quadraticæ reducamus hoc modo $\overline{x^2 - 2mn}^2 - 2m^2n^2 \begin{array}{l} - m^4 \\ - n^4 \end{array} = o$, quam habere eandem formam cum quadratica, tibi conſtabit; ſi pro x, m, n ſubſtituas in quadratica $x^2 - 2mn$, m^2, n^2. Quare habebimus $x^2 - 2mn = m^2 + n^2$, & $x^2 - 2mn = - m^2 - n^2$. Quorum prima exhibet radices duas $x = m + n$, $x = - m - n$. Altera præbet $x = \overline{m - n} . \sqrt{-1}$, $x = \overline{-m + n} . \sqrt{-1}$.

Elevetur ad quintam poteſtatem $x = m + n$, & orietur $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$. Hæc autem ita erit diſponenda $x^5 = m^5 \begin{array}{l} + 5mn . \overline{m + n}^3 \\ - 5m^2n^2 \overline{m + n} \end{array} + m^3$. Ejce binomium $m + n$ ſubſtituta æquali quantitate x, & tranſpoſitis terminis invenies $x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x \begin{array}{l} - m^5 \\ - n^5 \end{array} = o$, cujus una radix eſt $x = m + n$. Conditiones in æquatione inſunt duæ. Prima petit, ne termini omnes non abſint, in quibus incognita parem tenet dimenſionem. Altera exigit, ut coefficiens termini x^3 elatum ad quadratum exhibeat quintuplum coefficientis termini x.

Sexta poteſtas æquationis $x = m + n$ erit $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Hæc ita diſponatur $x^6 = m^6 \begin{array}{l} + 6mn . \overline{m + n}^4 \\ - 9m^2n^2 . \overline{m + n}^2 \\ + 2m^3n^3 \end{array} + n^6$. Si transferas terminos facta ſubſtitutione x pro $m + n$, habebis $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2 - 2m^3n^3 \begin{array}{l} - m^6 \\ - n^6 \end{array} = o$; in qua præter conditiones requirentes, ut omnis terminus abſit, in quo x ad imparem poteſtatem aſcendit, neceſſe eſt, ut coefficiens termini x^2 ſit æquale quadrato coefficientis termini x^4 diviſo per 4.

Æquatio inventa duobus modis reſolvi poteſt ope æquationis cubicæ, & quadraticæ. Primo modo reducetur ad canonem æquationis quadraticæ per hujuſmodi formam $\overline{x3 - 3mnx}^2 \begin{array}{l} - 2m^3n^3 \\ - m^6 \end{array}$

$\begin{matrix}-m^6\\-n^6\end{matrix}=0$, cujus radices erunt $x^3-3mnx=m^3+n^3$, $x^3-3mnx=-m^3-n^3$, quarum prima ex canone æquationis cubicæ habet radicem $x=m+n$, altera radicem $x=-m-n$. Deinde perduci potest ad canonem radicis cubicæ hoc modo $\overline{x^2-2mn}^3-3m^2n^2.\overline{x^2-2mn}\begin{matrix}-m^6\\-n^6\end{matrix}=0$, quæ, si consideretur tanquam incognita x^2-2mn, est æquatio cubica, cujus radicem ex superioribus constat esse $x^2-2mn=m^2+n^2$. Hæc autem pertinet ad canonem æquationis quadraticæ, & duas hasce radices habet $x=m+n$, $x=-m-n$.

Quum agitur de æquatione gradus septimi, æquationis $x=m+n$ potestas septima ita est distribuenda

$$x^7=m^7\begin{array}{l}+7mn.\overline{m+n}^5\\-14m^2n^2.\overline{m+n}^3\\+7m^3n^3.\overline{m+n}\end{array}+n^7,$$

quæ facta consueta substitutione, & translatis terminis in hanc vertitur

$$x^7-7mnx^5+14m^2n^2x^3-7m^3n^3x\begin{matrix}-m^7\\-n^7\end{matrix}=0.$$

Hæc caret terminis omnibus, in quibus x ad parem potestatem ascendit. Præterea si coefficientis termini x^5 divisi per 7 primum quadratum sumas, & multiplices per 14, habebis coefficiens termini x^3; deinde sumas cubum, & multiplices per 7, obtinebis coefficiens termini x. Æquatio his conditionibus prædita habebit pro radice $x=m+n$.

Postquam ad octavam potestatem elevaveris $x=m+n$, æquationem ita distribue

$$x^8=m^8\begin{array}{l}+8mn.\overline{m+n}^6\\-20m^2n^2.\overline{m+n}^4\\+16m^3n^3.\overline{m+n}^2\\-2m^4n^4\end{array}+n^8,$$

cujus terminos si transferas, & pro $m+n$ ponas x, fiet

$$x^8-8mnx^6+20m^2n^2x^4-16m^3n^3x^2+2m^4n^4\begin{matrix}-m^8\\-n^8\end{matrix}=0,$$

cujus radix una est $x=m+n$. Ab hac absunt termini omnis pote-

statis

ſtatis imparis, & terminorum poteſtatis paris coefficientes determinati ſunt uno determinato.

Inventam æquationem ad canonem æquationis quartæ perduces, ſi ita diſponas $\overline{x^2 - 2mn}^4 - 4m^2n^2 . \overline{x^2 - 2mn}^2 + 2m^4n^4 \begin{smallmatrix} - m^4 \\ - n^4 \end{smallmatrix} = o.$

Nam ſi in æquatione, quam invenimus, gradus quarti pro x ſcribas $x^2 - 2mn$, & pro m, n ſcribas m^2, n^2, hæc ipſa exurget. Quare habebimus $x^2 - 2mn = m^2 + n^2$, & $x^2 - 2mn = -m^2 - n^2$, quæ pertinent ad canonem æquationis quadraticæ. Potes etiam eam primum referre ad æquationem quadraticam, atque æquationes duas deducere gradus quarti hoc modo

$\overline{x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2}^2 - 2m^4n^4 \begin{smallmatrix} - m^8 \\ - n^8 \end{smallmatrix} = o$, quæ habet haſce radices

$$x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 = m^4 + n^4$$

$x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 = -m^4 - n^4$, quæ ex canone æquationis quartæ tractantur.

Ad æquationem gradus noni inveniendam eadem methodo utere, atque hanc obtinebis

$x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x \begin{smallmatrix} - m^9 \\ - n^9 \end{smallmatrix} = o$, cujus radix una eſt $x = m + n$.

Hanc per æquationem gradus tertii reſolves, ſi hoc pacto diſtribuas

$\overline{x^3 - 3mnx}^3 - 3m^3n^3 . \overline{x^3 - 3mnx} \begin{smallmatrix} - m^9 \\ - n^9 \end{smallmatrix} = o$, cujus radix una erit $x^3 - 3mnx = m^3 + n^3$, quæ item pertinet ad noſtram gradus tertii, & habet radicem $x = m + n$.

Mirabuntur fortaſſe nonnulli, me uſque ad æquationem gradus noni methodum produxiſſe, quæ cæteroquin non videtur difficilis intellectu. Verum hoc mihi maxime neceſſarium viſum eſt, ut eas, quibus æquationes noſtræ præditæ ſunt, conditiones determinarem. Quiſque videt, æquationes viduatas ſecundo termino carere ſimiliter terminis quarto, ſexto, aliiſque tenentibus ſedes pares. Quare æquatio gradus imparis nullum habebit terminum, in quo x obtineat poteſtatem parem; contra in æquationibus paribus nullus erit terminus, in quo x teneat imparem dimenſionem. Ultimus terminus communis omnibus eſt $-m^p - n^p$: p eſt exponens maximum incognitæ x. Præterea in æquationibus paribus adest terminus $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$, qui censendus est coefficiens quantitatis x^0.

Termini, qui existunt in æquatione, si excipias m^p, n^p, quibus semper signum — præfigitur, signa habent alternantia. Quapropter in æquationibus paribus termino $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$ præfigendum erit signum $+$, si p sit numerus pariter par, ideſt ex hac serie 4, 8, 12, 16 ec.: contra scribendum erit $-$, si p sit numerus impariter par, nimirum ex serie 2, 6, 10, 14 ec. In coefficientibus habetur gradatim mn, m^2n^2, m^3n^3 ec. Verum numeri his præfigendi non ita facile inveniuntur, si excipias illum, qui multiplicat mn, quem constat esse semper $= p$. Ut ceteros inveniam, ex octo illis casibus, quos supra tractavi, efformo tabulam hoc modo.

In primo ordine horizontali colloco mn, m^2n^2, m^3n^3 ec., quibus numeri qui quæruntur sunt præfigendi. In prima columna verticali, quæ est ad sinistram, numeris romanis exprimo gradum æquationis, cui numeri, qui sequuntur, conveniunt. Scribo numeros, qui in octo casibus consideratis inventi sunt, non omisso 2 in æquationibus paribus, qui ducendus est in $m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}x^0$.

Si perpendo columnam verticalem subjectam mn, video, eam esse seriem arithmeticam crescentem per unitatem, ejusque terminos semper æquales esse numeris gradum æquationis indicantibus. Quare produci poterit nullo negotio addendo cuilibet numero unitatem. Quilibet numerus ejus columnæ, quæ subest m^2n^2, est summa cum numeri, qui supra ipsum positus est in eadem columna, tum ejus, qui in columna proxima ad sinistram posita per duas sedes superior est. Ita in gradu quinto numerus quæsitus $= 2 + 3$; in gradu sexto $= 5 + 4$; in gradu septimo $= 9 + 5$, atque ita deinceps. Hac autem ratione in altioribus gradibus hanc columnam sum prosequutus. Similis lex valet in omnibus aliis columnis. Quilibet enim numerus est æqualis numero superiori ejusdem columnæ, & numero antecedentis columnæ, qui respondet gradui per binarium minori. Ex hac methodo efformavi etiam in gradibus superioribus tabulam, quam tibi exhibeo, quæ nullo negotio pro-

produci potest quousque libuerit. Ex hac autem tabula æquationem cujuscumque gradus efformabis, cujus radix una erit $= m + n$: quam æquationem deinceps canonicam appellabimus.

Antequam ad usum venio, hoc unice advertere oportet, æquationes illas, in quibus exponens maximum incognitæ est numerus primus, nullo modo resolvi ope æquationum graduum inferiorum. Verum si exponens maximum sit numerus compositus, æquationes absolvuntur per multiplicem resolutionem æquationum, quarum gradus indicantur a numeris componentibus, ut constat ex illis casibus, quos supra tractavimus. Ita quando $8 = 2.\,4$, æquatio canonica octavi gradus resolvitur resolutis duabus gradus secundi, & quarti, vel quia $8 = 2.\,2.\,2$, resolvitur resolutis tribus gradus secundi. Ita æquatio gradus noni resolvitur resolutis duabus gradus tertii, quum $9 = 3.\,3$. Hac autem de causa dixi antea, methodum hanc utilitatem habere in omnibus æquationibus, sed præcipue in illis, quarum gradus exprimitur a numero primo.

Formularum, quas canonicas vocavimus, usus postremo declarandus est. Æquatio quælibet cujuscumque gradus, quæ careat terminis omnibus in sedibus paribus excepto ultimo, & quæ terminorum existentium coefficientes proportionales habeat terminis mn, m^2n^2, m^3n^3 ec. multiplicatis per numeros nostræ tabulæ gradui æquationis convenientes, hæc inquam æquatio recipiet radicem similem radici æquationis cubicæ. Radix autem hæc invenitur per collationem æquationis datæ cum æquatione canonica.

Ut methodum declaremus, exordiamur ab æquatione gradus secundi. Sit proposita æquatio $x^2 \pm 2a - b = o$. Confer hanc cum canonica, & invenies $\pm a = -mn$, $-b = -m^2 - n^2$: atqui ex prima erit semper $\frac{a^2}{m^2} = n^2$: Ergo $-b = -m^2 - \frac{a^2}{m^2}$, qua reducta obtinemus $m^4 - bm^2 = -a^2$, & addito dimidii coefficientis quadrato $m^4 - bm^2 + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - a^2$, extractaque radice $m^2 - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{bb}{4} - aa}$, sive $m = \sqrt{+\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$. Eandem prorsus formulam invenies pro valore n. Verum quum duplex adsit signum in prima radice extracta, signo $+$ ad valorem m, signo $-$ ad valorem n utemur: quod ubique fieri posse constabit. Quare fiet $m = \sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$, $n = \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - aa}}$.

Quoniam radix quadrata unitatis est duplex, nempe $+1$, -1, iccirco cum m, tum n duplicem habebit valorem. Ii autem erunt hujusmodi, si signum radicale eam indicet, quæ respondet unitatis radici quadratæ $+1$.

Valores m

$$\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$$

$$-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}.$$

Valores n

$$\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}$$

$$-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}.$$

Quare quatuor modis combinari potest m cum n. Ut omnem ambiguitatem de medio tollamus, & criterium statuamus, quo combinationes utiles ab inutilibus secernamus; fac advertas, eos esse valores conjungendos, qui simul multiplicati exhibent $-a$, si in æquatione proposita valeat signum superius; contra conjungendos eos, qui multiplicati exhibent $+a$, si in æquatione valeat signum inferius. Ex hoc criterio sequentes radicum valores determinavimus, quibus addidimus eos, qui oriuntur ex immediata radicis extractione.

Æquationis $xx-2a-b=o$ radices

$$x=\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}+\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=\sqrt{2a+b}$$

$$x=-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=-\sqrt{2a+b}$$

Æquationis $xx+2a-b=o$ radices

$$x=\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}-\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=\sqrt{-2a+b}$$

$$x=-\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}+\sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-aa}}=-\sqrt{-2a+b}.$$

Quisque cognoscit, radicem eandem infinitis modis exprimi posse. Etenim quum species a non dependeat a specie b, terminus ultimus in æquatione ita distribui potest, ut a sit quælibet quantitas ad libitum sumta. Sit enim æquatio $xx-g=o$. Eam ita distribuam $xx-2f-g+2f=o$: f autem sumitur prout libet. Erit

$f=$

	mn	m^2n^2	m^3n^3	m^4n^4	m^5n^5	m^6n^6	m^7n^7
II	2						
III	3						
IV	4	2					
V	5	5					
VI	6	9	2				
VII	7	14	7				
VIII	8	20	16	2			
IX	9	27	30	9			
X	10	35	50	25	2		
XI	11	44	77	55	11		
XII	12	54	112	105	36	2	
XIII	13	65	156	182	91	13	
XIV	14	77	210	294	196	49	2

$f = \mp a$, $2f - g = -b$. Hisce substitutis loco a, b in nostris radicibus, provenient formulæ, quæ erunt diversæ pro speciei f diversitate.

Tractatis æquationibus gradus alterius, transeo ad æquationes gradus tertii. Itaque sit $x^3 - 3ax - b = o$. Confer hanc cum canonica, & invenies $-mn = -a$, $-m^3 - n^3 = -b$: quare $-m^3 - \frac{a^3}{m^3} = -b$, sive $-a^3 = m^6 - bm^3$, quæ resoluta dabit $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = m^3 - \frac{b}{2}$, sive $m = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Eodem prorsus calculo determinabis $n = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$.

Quælibet radix tertia tres valores habere potest. Ut hos exprimamus, adverte, tres esse valores radicis cubicæ unitatis, nempe 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Quare si per radicale signum illa radix intelligatur, quæ primæ respondet ex tribus radicibus unitatis, sequentes inveniemus

Valores m	Valores n
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

Novem

Novem modis combinari possunt valores hujusmodi. Ut inutiles rejiciamus, eos conjungemus duntaxat, qui simul multiplicati dant $+a$. Hoc usurpato criterio æquationis propositæ radices exurgunt hujusmodi

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Censeo non esse prætermittendum discrimen, quod intercedit inter æquationes gradus imparis, ac gradus paris. Nam in æquatione gradus imparis, si a transeat in negativam mutatur radix quadrata, quæ primum elicitur. Quum enim includat a elatam ad potestatem imparem, terminus hic erit positivus, si a sit positiva, negativus, si a negativa sit. Quare non est necesse distinguere casus duos a positivæ, & a negativæ; una enim, eademque formula utriusque radicem exhibet per solam mutationem signorum. Non ita accidit æquationibus paribus: nam vel a sit positiva, vel negativa, elevata ad potestatem parem eodem signo afficitur: Quapropter per solam mutationem signorum utriusque casus radices obtinere non possumus, & necessarium est, alterum ab altero distinguere, & separatim radices exhibere, quemadmodum præstitimus in quadratis.

Venio ad æquationem gradus quarti, quam generatim ita expono $x^4 \pm 4ax^2 + 2aa - b = o$. Facta comparatione hujus cum canonica invenio $-mn = \pm a$, $-m^4 - n^4 = -b$, in qua eliminata specie n fiet $-m^4 - \frac{a^4}{m^4} = -b$, sive $m^8 - bm^4 = -a^4$, quæ resoluta dabit $m^4 - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}$, demum

$m = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$. Calculus idem determinabit

$n = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$.

Radix

Radix quarta unitatis quadrupla eſt, nempe $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. Quare ſi ſignum radicale radicem illam deſignet, quæ reſpondet unitatis radici $+1$, hoſce inveniemus quatuor

Valores m	Valores n
$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}\cdot\sqrt{-1}$	$\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}\cdot\sqrt{-1}$
$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}\sqrt{-1}$	$-\sqrt[4]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}\cdot\sqrt{-1}$.

Ex his valoribus m, n, qui ſimul multiplicati exhibent $-a$, radices præbebunt æquationis propoſitæ, quum valet ſignum ſuperius. Qui vero ſimul multiplicati dant $+a$, præbent radices æquationis, quum valet ſignum inferius. Radices haſce modo hoc determinatas paullo infra invenies.

Quæ dicta ſunt antea, ſatis oſtendunt æquationem propoſitam poſſe reſolvi per duplicem reſolutionem æquationis quadraticæ; eſt enim 4 numerus compoſitus ex 2. 2. Eam autem hoc pacto conſtat eſſe diſtribuendam $\overline{x^2 \pm 2a}^2 - 2a^2 - b = o$, cujus, ſi conſideretur ut incognita $x^2 \pm 2a$, hæ ſunt radices

$$x^2 \pm 2a = \sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} + \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$

$$x^2 \pm 2a = -\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} - \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.$$ Voca

cauſa brevitatis $\sqrt{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} + \sqrt{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}} = c$.

Radices autem utriuſque $x^2 \pm 2a - c = o$, $x^2 \pm 2a + c = o$, ex quadratica invenies tam pro caſu ſigni ſuperioris, quam pro

caſu

casu signi inferioris. Ex his methodis quæsitarum radicum hujusmodi expressiones determinavi.

Æquationis $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = o$ radices

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$
$$= \sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$
$$= -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= -\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

Æquationis $x^4 + 4ax^2 + 2a^2 - b = o$ radices

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$
$$= -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$x =$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = \sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \,.\, \sqrt{-1} - \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \,.\, \sqrt{-1}$$

$$= -\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} + \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}$$

$$x = -\sqrt[4]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \,.\, \sqrt{-1} + \sqrt[4]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \,.\, \sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}} - \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - a^2}}\,.$$

Si pro ſumma duarum radicum ſecundi gradus unicam radicem ſubſtituas, quæ habetur in æquatione ſecundi gradus, vel ſi propoſitam æquationem more uſitato reſolvas ad modum æquationis ſecundi gradus, alio modo multo ſimpliciori eaſdem radices exprimes; quod ſolum adnotaſſe, ſufficiet.

Ad quinti gradus æquationem progredior, quæ eſt hujuſmodi $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - b = o$. Hæc comparata cum canonica præbebit æquationes duas $-mn = -a$, $-m^5 - n^5 = -b$, ex quibus elicies

$$m = \sqrt[5]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^5}}\,, \quad n = \sqrt[5]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^5}}\,.$$

Quinque ſunt unitatis radices quintæ, nimirum 1,

$$\frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},\ +\frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},\ +\frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Qua de re quinque cum m, tum n valores invenientur, ex quibus illi

illi radicem propositæ æquationis expriment, qui simul multiplicati præbent $+a$. Ex hoc criterio radices determinavi: quas, ut brevioribus formulis complectar, pono m, n æquales radicibus illis, quæ respondent unitatis radici quintæ $+1$. Hoc supposito en tibi æquationis nostræ radices.

$$x = m \quad + n$$

$$x = m \cdot \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m \cdot \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} + n \cdot \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Si æquationem gradus sexti $x^6 \pm 6ax^4 + 9a^2x^2 \pm 2a^3 - b = 0$ comparemus cum canonica, easdem ut semper æquationes nanciscemur, ex quibus determinabimus

$$m = \sqrt[6]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}, \quad n = \sqrt[6]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}.$$

Radices sextas unitas habet sex, nimirum

$$+1, \; -1, \; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \; \frac{+1-\sqrt{-3}}{2}, \; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \; \frac{+1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Itaque sex valores cum m, tum n habebit: atque illi conjungendi erunt, qui simul multiplicati dant $-a$ pro casu signi superioris, dant $+a$ pro casu signi inferioris. Ex hoc criterio valores conjungendos determinavi, in quibus m, n eas radices indicant, quæ unitatis radici $+1$ respondent. Eos autem paullo infra invenies.

Duobus aliis modis docuimus sexti gradus æquationem resolvi posse: primo modo resoluta primum æquatione cubica, deinde quadratica; secundo modo resoluta primum quadratica, deinde cubica. Ad primum resolutionis modum instituendum, ita disponenda est æquatio $\overline{x^2 \pm 2a}^3 - 3a^2 \cdot \overline{x^2 \pm xa} - b = 0$, cujus ex æquatione cubica tres constat esse radices, scilicet facta

$p =$

$$p = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^6}}, \ \& \ q = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^6}}$$

$$x^2 \pm 2a = p + q$$

$$x^2 \pm 2a = p \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$x^2 \pm 2a = p \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$. Voca primam radicem c, secundam $\overset{\mathrm{I}}{c}$, tertiam $\overset{\mathrm{II}}{c}$, & habebuntur tres æquationes quadraticæ tam pro casu signi superioris, quam pro casu signi inferioris, quibus resolutis orientur æquationis sexti gradus radices sex, quas paullo infra ponam secundo loco.

Ad alterius modi resolutionem habendam oportet æquationem ita disponere $\overline{x^3 \pm 3ax}^2 \pm 2a^3 - b = o$, cujus radices pro casu signi inferioris si voces $f = \sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} + \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$ erunt $x^3 - 3ax = f$, $x^3 - 3ax = -f$; pro casu autem signi superioris, si voces $g = \sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} - \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$, erunt $x^3 + 3ax = g$, $x^3 + 3ax = -g$. Quum autem singulæ hæ æquationes tres radices exhibeant, obtinebimus pro utroque casu radices sex, quæ requiruntur. Has autem tertio loco scribam.

Æquationis $x^6 - 6ax^4 + 9a^2x^2 - 2a^3 - b = o$ radices

$$x = m + n = \sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} + \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}}$$

$$x = -m - n = -\sqrt{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} - \sqrt{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} =$$

$$\sqrt[3]{-\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{fb}{4} - a^3}} - \sqrt[3]{-\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - a^3}}$$

 $x =$

$$x = m \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + n \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \sqrt{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-aa}} -$$

$$\sqrt{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c}{4}-aa}} = \sqrt[3]{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt{\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + n \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-aa}}$$

$$-\sqrt{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-a^2}} = \sqrt[3]{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \,.\, \frac{1-\sqrt{-3}}{2} + n \,.\, \frac{1+\sqrt{-5}}{2} = \sqrt{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-aa}}$$

$$+ \sqrt{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-aa}} = \sqrt[3]{\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \,.\, \frac{1+\sqrt{-3}}{2} + n \,.\, \frac{1-\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}-aa}}$$

$$-\sqrt{\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}-a^2}} = \sqrt[3]{-\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-a^3}} \,.\, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Æqua-

Æquationis $x^6 + 6ax^4 + 9a^2 x^2 + 2a^3 - b = o$ radices

$$x = m - n = \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} - \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} + \sqrt[3]{\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}}$$

$$x = -m + n = -\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}} + \sqrt{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{cc}{4} - aa}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}}$$

$$x = m \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{-\frac{c''}{2} + \sqrt{\frac{c''^2}{4} - aa}}$$

$$-\sqrt{-\frac{c''}{2} - \sqrt{\frac{c''^2}{4} - a^2}} = \sqrt[3]{\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{-\frac{c'}{2} + \sqrt{\frac{c'^2}{4} - aa}}$$

$$+ \sqrt{-\frac{c'}{2} - \sqrt{\frac{c'^2}{4} - aa}} = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = m \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{-\frac{c'}{2} + \sqrt{\frac{c'^2}{4} - aa}}$$

$$-\sqrt{-\frac{c'}{2} - \sqrt{\frac{c'^2}{4} - aa}} = \sqrt[3]{\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$x =$

$$x = m \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\sqrt{-\frac{c''}{2} + \sqrt{\frac{c''^2}{4} - aa}}$$

$$+\sqrt{-\frac{c''}{2} - \sqrt{\frac{c''^2}{4} - a^2}} = \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{\frac{gg}{4} + a^3}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ex hisce exemplis, quæ diligenter persequutus sunt, perspicuum est, qua methodo altiores æquationes sint pertractandæ. In æquationibus autem gradus imparis $x^p - pa^{p-2}$ ec. $-b = o$ invenies semper radicem hanc

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}},$$ in qua

radicalia signa eas exprimunt radices, quæ respondent unitatis radici p^{esima} $+1$. In æquationibus paribus, quæ secundum terminum affectum habent signo $-$, ut $x^p - p^a x^{p-2}$ ec. $-b = o$,

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} + \sqrt[p]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$$

$$x = -\sqrt{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}.$$

Quæ vero secundum terminum habent affectum signo $+$, ut $x^p + pax^{p-2}$ ec. $-b = o$, duas hasce radices recipiunt

$$x = \sqrt[p]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} - \sqrt[p]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$$

$$x = -\sqrt[p]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} + \sqrt[p]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}},$$ in quibus

omnibus eæ radices a signis radicalibus designantur, quæ respondent unitatis radici p^{esima} $+1$. Quisque videt, harum radicum inveniri posse formulas alias, si p sit numerus compositus, nempe resol-

resolvendo plures æquationes eorum graduum, qui indicantur a numeris componentibus. Sed hac ratione formulæ longissimæ fiunt.

Ad alias æquationis radices eruendas necesse esset, cognoscere alias radices p^{esimas} unitatis; deinde harum singulas multiplicare tum per $\sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$, tum per $\sqrt[p]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$: demum illæ conjungendæ erunt, quæ simul multiplicatæ exhibent $+a$, si p sit impar; vel posito p pari, si in secundo termino insit $+$, quæ exhibent $-a$, contra quæ dant $+a$, si in secundo termino insit $-$. Quibus rite perspectis satis constat, quænam sint æquationes, cujus radix ad minimum una potest exprimi ad modum radicis cubicæ cardanicæ.

Quandoquidem in æquationibus gradus paris, nullus in incognita x adest exponens impar, videbam, facto $xx = z$, oriri æquationem gradus imparis omnibus terminis instructam. Quare suspicabar, ex hac methodo novas æquationes gradus imparis resolutionem accipere. Sed quum rem ad calculum revocavi, cognovi æquationem oriri, quæ, si spolietur secundo termino, caret quarto, sexto, aliisque tenentibus sedes pares. Quare æquatio nulla resolvi potest per hanc methodum, quæ prius non esset in potestate. Hoc autem uno aut altero exemplo inverso calculo ostendam.

Sit æquatio tertii gradus $z^3 - 3a^2 z - b = o$, quæ ad nostram canonicam pertinet. Ponatur $x^2 \pm 2a = z$, factaque substitutione proveniet $x^6 \pm 6ax^4 + 9a^2 x \pm 2a^3 - b = o$, quæ est nostra canonica gradus sexti. Tertii gradus æquatio prædita est tribus radicibus

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}$$

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \sqrt[3]{+\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^0}}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{+\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^6}}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

Qua-

Quapropter erit

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{2} - a^6}} \mp 2a + \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \mp 2a$$
$$+ \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x^2 = \sqrt[3]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \mp 2a$$
$$+ \sqrt[3]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

Singulæ hæ formulæ quadratum continent completum, cujus radices extrahi possunt. His autem extractis habebuntur sex radices æquationis sexti gradus tum pro casu signi superioris, quam pro casu signi inferioris. Eas autem in utroque casu exhibeo

Æquationis $x^6 - 6ax^4 + 9a^2x^2 - 2a^3 - b = o$ radices

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$$

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$\pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Singulæ hæ formulæ duas radices præbent, quarum una a signis superioribus, altera ab inferioribus indicatur.

Æqua-

Æquationis $x^6 + 6ax^4 + 9a^2x^2 + 2a^3 - b = 0$ radices

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}}$$

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\mp \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt[6]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$\mp \sqrt[6]{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^6}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Duas ut supra in formulis singulis radices habes. Hæ vero radices eædem sunt cum illis, quas antea invenimus.

Inveniamus etiam hac ratione radices æquationis decimi gradus. Itaque sit æquatio gradus quinti $z^5 - 5a^2z^3 + 5a^4z - b = 0$, quæ, ut cuique clarum est, in nostra canonica continetur. Pono $x^2 \pm 2a = z$, & facta substitutione invenio $x^{10} \pm 10ax^8 + 35a^2x^6 \pm 50a^3x^4 + 25a^4x^2 \pm 2a^5 - b = 0$, quæ eadem est cum æquatione nostra canonica gradus decimi.

Si voces $m = \sqrt[5]{+\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{2} - a^{10}}}$, & $n = \sqrt{+\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{10}}}$, ex resolutione æquationis quinti gradus invenies

$$x^2 = m \pm 2a + n$$

$$x^2 = m \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n \cdot \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n \cdot \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x^2 = m \,.\, \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4} \pm 2a + n \,.\, \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

Formulæ iſtæ omnes habent quadratum completum, cujus radices extrahere licet in utraque hypotheſi ſigni ſuperioris, & inferioris. Quare æquationis

$$x^{10} - 10ax^8 + 35a^2x^6 - 50a^3x^4 + 25a^4x^2 - 2a^5 - b = 0$$

hujuſmodi erunt radices

$$x = \pm\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n} \; \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \pm \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Æquatio vero

$$x^{10} + 10ax^8 + 35a^2x^6 + 50a^3x^4 + 25a^4x^2 + 2a^5 - b = 0$$

haſce continet radices

$$x = \pm\sqrt{m} \mp \sqrt{n}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5-\sqrt{5}}{2}}}$$

$$x = \pm\sqrt{m} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} \mp \sqrt{n} \,.\, \overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}$$

$x =$

$$x = \pm\sqrt{m}\,.\,\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}} + \sqrt{n}\,.\,\overline{\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{-5+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Singulæ formulæ duas exhibent radices, quarum una a ſignis ſuperioribus, alia ab inferioribus indicatur. Ex his autem facile colliges, æquationes gradus paris, tametſi in æquationes gradus inferioris converti poſſint, tamen nullius æquationis reſolutionem præbere, quæ ex noſtra methodo non eſſet in poteſtate.

De earumdem Radicum constructione.

PARS ALTERA.

Ut eam, quam radices analytice expositæ recipiunt, constructionem patefaciam, necesse est, ut prius de sinibus, & cosinibus cum circularibus, tum hyperbolicis pauca dicam. Si in circulo, cujus radius CA (*Fig.* 2) accipiatur arcus quilibet AF, & ex puncto F demittatur in CA normalis FD, notum est, radium, seu semiaxem CA appellari sinum totum, rectam FD sinum arcus AF, & interceptam CD ejus cosinum. Quum autem sector ACF æquet dimidium rectanguli ex sinu toto & arcu AF, constat, duplum sectoris ACF divisi per sinum totum arcui AF esse æqualem. Itaque FD vocari potest sinus, CD cosinus dupli sectoris divisi per sinum totum.

Per analogiam sinus, & cosinus ex circulo traduci possunt ad hyperbolam æquilateram. Describatur hyperbola æquilatera, cujus semiaxis CA (*Fig.* 1) radio circuli sit æqualis, & ex centro C ad punctum quodlibet F in curva positum, agatur recta CF, & ex eodem puncto F demittatur FD in axem CA productum. Si vocetur CA sinus totus hyperbolicus, FD vocari poterit sinus hyperbolicus, CD cosinus dupli sectoris ACF divisi per sinum totum. Hæ sunt nominum definitiones.

Sed non ita facile est in praxi multiplicare, atque dividere sectores hyperbolicos, quemadmodum circulares, qui arcubus circuli, a quibus clauduntur, sunt semper proportionales. Quamobrem methodus aperienda est, qua idipsum per praxim non difficilem efficiamus. Agatur assymptoton hyperbolæ CK, faciens, ut notum est, cum axe CA angulum semirectum, & ex punctis A, F demittantur in assymptoton AK, FH. Quoniam ex hyperbolæ proprietate rect. AKC = rect. FHC, etiam triangulum AKC = triang. FHC: sunt enim hæc triangula rectangulorum dimidia: ergo dempto communi triangulo COK reliquum erit triang. AOC æquale trapezio OKHF. Addatur utrique parti triangulum mixtilineum AOF, & orietur sector CAF æqualis spatio hyperbolico AKHF. Ex hac demonstratione aperte constat, hyperbolicos sectores æquales esse spatiis, quæ continentur inter AK, ejusque parallelam, assymptoton, & curvam; & illorum summas, ac differenferentias æquales esse summis istorum, ac differentiis. Quare qui spatia hæc hyperbolica noverit multiplicare, atque dividere, idipsum nullo negotio præstabit etiam in sectoribus hyperbolicis.

Si in assymptoto fiant ut CK : CG :: CH : CP, & agantur ordinatæ GE, HF, PN, nemo unus est, qui nesciat, fore spatium AKGE = FHPN. Quare, si in assymptoto accipiatur series geometrice proportionalium, spatia hisce abscissis respondentia crescent in continua arithmetica proportione. Itaque supposita inventione quantitatum proportionalium nihil facilius est, quam prædicta spatia multiplicare, atque dividere. Sint duo spatia AKGE, AKHF, quibus unicum æquale inveniendum sit. Fac ut CK : CG :: CH : CP, & age ordinatam PN, idipsum spatium, quod quæritur, est AKPN. Inveniendum sit spatium, quod æquet differentiam AKPN, AKHF. Pone ut CH : CP :: CK : CG, & age GE, spatium AKGE prædictorum spatiorum æquabit differentiam.

Notissima sunt corollaria, quæ ex his principiis descendunt, neque ad ulteriora festinantes fas est in his immorari. Hoc solum attingam. Posito m numero integro, ut habeas spatium æquale m. AKGE, post CK, & CG tot continuo proportionales accipe, quot sunt unitates in $m - 1$, & spatium ultimæ respondens idipsum est, quod postulatur. Contra si cupias spatium $= \frac{\text{AKPN}}{m}$, sume inter CK, & CP tot medias proportionales, quot sunt unitates in $m - 1$, & spatium primæ respondens erit pars m^{esima} spatii AKPN. Generalius si velis determinare spatium $\frac{n}{m}$. AKPN, sume tot medias proportionales, quot unitates insunt in $m - 1$, & harum mediarum sume eam, quæ est in sede n^{esima}, & spatium huic respondens id ipsum est, quod quæris.

Quæ dicta sunt de spatiis clausis ab ordinatis assymptoto, transfer ad sectores hyperbolicos eisdem æquales.

Quoniam termini seriei geometricæ vocantur numeri, termini respondentes seriei arithmeticæ vocantur logarithmi, si numeri accipiantur in hyperbolæ assymptoto, spatia respondentia, vel sectoris hyperbolici divisi per quamlibet constantem spectari possunt ut logarithmi. Verum quid vetat, quominus constantem, per quam dividitur sector, ita determinemus, ut logarithmus respondeat sectori hyperbolico, quemadmodum arcus respondet sectori circulari? Certe hac ratione melius fiet satis analogiæ. Itaque quemadmodum arcus æqualis est circulari sectori diviso per dimidium sinus

to-

totius: ita logarithmum ponemus æqualem ſectori hyperbolico diviſo per dimidium ſinus totius. Deinceps autem ſicut ſumimus in circulo ſinus, & coſinus arcuum, quos ſinus, & coſinus circulares vocamus, ita in hyperbola ſumemus ſinus, & coſinus logarithmorum, quos ſinus, & coſinus hyperbolicos appellabimus. Logarithmos vero in hyperbola perinde deſignabimus, ac arcus in circulo.

Sed paucis adverte, quænam futuræ ſint conditiones ejus, quo utimur, logarithmorum ſyſtematis. Vocato ſinu toto $CA = r$, erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$ qui erit protonumerus, ſcilicet numerus ille, cujus logarithmus $= o$. Subtangens autem conſtans ſyſtematis invenitur eſſe $= r$, ſcilicet ſinui toti. Hos autem logarithmos, quando analogi ſunt arcubus circularibus, vocabo logarithmos analogos.

His prænotatis ſinuum & coſinuum proprietates perſequamur. Sinus, & coſinus hyperbolicos per hæc ſigna notabo Sh, Ch. Primo datis duorum logarithmorum φ, π ſinibus, & coſinibus quæritur ſinus, & coſinus logarithmi $\varphi + \pi$. Sit $CB = Ch.\varphi$, $BE = Sh.\varphi$, $CD = Ch.\pi$, $DF = Sh.\pi$. Supponatur $CM = Ch.\overline{\varphi+\pi}$, & $MN = Sh.\overline{\varphi+\pi}$. BE, DF, MN producantur, & concurrant cum aſſymptoto in punctis I, L, Q. Ex punctis E, F, N agantur aſſymptoto normales EG, FH, NP. Quum propter angulum ſemirectum ACK ſit $BI = CB$, $DL = CD$, $MQ = CM$, conſtat fore $EI = Ch.\varphi - Sh.\varphi$, $FL = Ch.\pi - Sh.\pi$, $NQ = Ch.\overline{\varphi+\pi} - Sh.\overline{\varphi+\pi}$. Deinde quando vocata eſt $CA = r$, erit $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Item $GI = \frac{Ch.\varphi - Sh.\varphi}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Ch.\pi - Sh.\pi}{\sqrt{2}}$, & $PQ = \frac{Ch.\overline{\varphi+\pi} - Sh.\overline{\varphi+\pi}}{\sqrt{2}}$. Poſtremo $CI = \sqrt{2}.Ch.\varphi$, $CL = \sqrt{2}.Ch.\pi$, & $CQ = \sqrt{2}.Ch.\overline{\varphi+\pi}$. Quapropter $CG = \sqrt{2}.Ch.\varphi - \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}} = \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}}$, $CH = \frac{Ch.\pi + Sh.\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Ch.\overline{\varphi+\pi} + Sh.\overline{\varphi+\pi}}{\sqrt{2}}$: atqui ex ſupra demonſtratis debet eſſe $CK : CG :: CH : CP$. Igitur $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{Ch.\varphi + Sh.\varphi}{\sqrt{2}} :: \frac{Ch.\pi + Sh.\pi}{\sqrt{2}} : \frac{Ch.\overline{\varphi+\pi} + Sh.\overline{\varphi+\pi}}{\sqrt{2}}$,

& facto

& facto transitu ab analogia ad æqualitatem fiet $Cb.\overline{\varphi+\pi}+Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi+Sb.\pi}}{r}$.

Invento hoc primo theoremate aliud nanciscemur ope localis æquationis hyperbolæ, nempe $\overline{Cb}^2-\overline{Sb}^2=rr$: Ergo $\overline{Cb.+Sb}.\overline{Cb.-Sb.}=rr$, sive $Cb.+Sb.=\frac{rr}{Cb.-Sb.}$. Quapropter valoribus substitutis habebimus $\frac{rr}{Cb.\overline{\varphi+\pi}-Sb.\overline{\varphi+\pi}}=\frac{r^3}{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}$, sive $Cb.\overline{\varphi+\pi}-Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{r}$: quod est theorema alterum.

Si alterius theorematis æquationem primum addas, deinde demas ab æquatione primi theorematis obtinebis $Cb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}.\overline{Cb\pi+Sb.\pi}+\overline{Cb.\varphi-Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{2r}=\frac{Cb.\varphi.Cb\pi,+Sb.\varphi.Sb.\pi}{r}$; $Sb.\overline{\varphi+\pi}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi+Sb.\pi}-(\overline{Cb.\varphi-Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}}{2r}=\frac{Cb.\varphi.Sb.\pi+Cb.\pi.Sb.\varphi}{r}$. Q. E. Inv.

Quod si quæras sinus, & cosinus differentiæ duorum logarithmorum φ, π, nempe $Cb.\overline{\varphi-\pi}$, $Sb.\overline{\varphi-\pi}$, eædem formulæ valebunt, dummodo pro $Cb.\pi$, $Sb.\pi$ ponas $Cb.-\pi$, $Sb.-\pi$. Verum ut valores habeas per datos $Cb.\pi$, $Sb.\pi$, adverte $Cb.-\pi=Cb.\pi$, & $Sb.-\pi=-Sb.\pi$. Quare nulla alia formulis mutatio facienda erit, nisi signum mutare ante $Sb.\pi$.

A sinibus, & cosinibus hyperbolicis ad circulares gradum faciamus. In circulo, cujus sinus totus, seu radius $CA=r$, capiatur arcus $AE=\varphi$, & arcus $AF=\pi$; tum arcus $AN=AE$
$+AF$

$+ AF = \varphi + \pi$. Ex datis finibus, & cofinibus arcuum φ, π, quæritur finus, & cofinus arcus $\varphi + \pi$. Agatur radius CF, cui fit normalis NQ. Conftat $CQ = Cc.\varphi$, & $NQ = Sc.\varphi$: nam per has notas cofinus, & finus circulares defigno. Quandoquidem eft $CD : CF :: CM : CO$ erit analytice $Cc.\pi : r :: Cc.\overline{\varphi + \pi} : CO = \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi}$: Ergo $QO = Cc.\varphi - \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi}$: atqui $QN : QO :: CD : DF$, five $Sc.\varphi : Cc.\varphi - \frac{r.Cc.\overline{\varphi + \pi}}{Cc.\pi} :: Cc.\pi : Sc.\pi$, five $Sc.\varphi.Sc.\pi = Cc.\varphi.Cc.\pi - r.Cc.\overline{\varphi + \pi}$, & reducta æquatione $Cc.\overline{\varphi + \pi} = \frac{Cc.\varphi.Cc.\pi - Sc.\varphi.Sc.\pi}{r} =$

$$\frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi + \sqrt{-1}.Sc.\pi} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi - \sqrt{-1}\,Sc.\pi}}{2r}.$$

Ad inveniendum finum ita inftitue analyfim. Ob fimilitudinem triangulorum habetur hæc proportio $CD : DF :: CM : MO$, in qua fi pro $CM = Cc.\overline{\varphi + \pi}$ ponatur valor paullo ante inventus, obtinetur $Cc.\pi : Sc.\pi :: \frac{Cc.\varphi.Cc.\pi - Sc.\varphi.Sc.\pi}{r} : MO$.

Itaque $MO = \frac{Cc.\varphi.Sc.\pi}{r} - \frac{Sc.\varphi.\overline{Sc.\pi}^2}{r.Cc.\pi}$: Igitur $NO = Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi.Sc.\pi}{r} + \frac{Sc.\varphi.\overline{Sc.\pi}^2}{r.Cc.\pi}$. Atqui valet hæc proportio $NQ : NO :: CD : CF$, & analytice $Sc.\varphi : Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi.Sc.\pi}{r} + \frac{Sc.\varphi.\overline{Sc.\pi}^2}{r.Cc.\pi} :: Cc.\pi : r$: Ergo facta æquatione $r.Sc.\varphi = Cc.\pi.Sc.\overline{\varphi + \pi} - \frac{Cc.\varphi.Cc.\pi.Sc.\pi + Sc.\varphi.\overline{Sc.\pi}^2}{r}$, five æquatione reducta $\frac{r^2.Sc.\varphi - Sc.\varphi.\overline{Sc.\pi}^2 + Cc.\varphi.Cc.\pi.Sc.\pi}{r.Cc.\pi} = Sc.\overline{\varphi + \pi}$. Atqui ex circuli æquatione locali $r^2 - \overline{Sc.\pi}^2 =$

Cc.

$\overline{Cc.\pi}^2$: Ergo $Sc.\overline{\varphi+\pi} = \dfrac{Sc.\varphi.Cc.\pi + Cc.\varphi.Sc.\pi}{r} =$

$$\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi} - [\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{2r\sqrt{-1}}$$

Si poſtremam hanc æquationem exprimentem $Sc.\overline{\varphi+\pi}$ multiplicatam per $\sqrt{-1}$ primum addas æquationi exhibenti $Cc.\overline{\varphi+\pi}$, deinde ab eadem detrahas, duo hæc theoremata nanciſceris.

$$Cc.\overline{\varphi+\pi}+Sc.\overline{\varphi+\pi}.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi}-Sc.\overline{\varphi+\pi}.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}}{r}.$$

Si quæras ſinum, & coſinum arcus $\varphi-\pi$, ſatis erit, in ſuperioribus formulis mutare ſignum $Sc.\pi$, reliquis non mutatis. Ratio, quæ tradita eſt in quantitatibus hyperbolicis, valet etiam in circularibus.

Formulæ quatuor, quas dixi quatuor theoremata exhibere, ingentem præſtant uſum in multiplicandis, ac dividendis cum logarithmis, tum arcubus circularibus. Etenim poſito $\varphi=\pi$ proveniunt quatuor æquationes

$$Cb.2\varphi+Sb.2\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^2}{r}$$

$$Cb.2\varphi-Sb.2\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^2}{r}$$

$$Cc.2\varphi+\sqrt{-1}.Sc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^2}{r}$$

$$Cc.2\varphi-\sqrt{-1}.Sc.2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^2}{r}.$$

Fiat æquationum additio, ac ſubtractio, quam ſignorum ambiguitas videtur poſtulare

$$Cb.2\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^2+\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^2}{2r}$$

$$Sb.\,2\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{2} - [\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{2}}{2r}$$

$$Cc.\,2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc\varphi}^{2} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2}}{2r}$$

$$\sqrt{-1}.\,Sc.\,2\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{2}}{2r}.$$

Deinde fiat æquationum additio, ac ſubtractio, poſtquam extracta fuerit radix quadrata, & invenietur

$$\frac{\overline{Cb.2\varphi + Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}} + \overline{Cb.2\varphi - Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Cb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cb.2\varphi + Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}} - [\overline{Cb.2\varphi - Sb.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Sb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.2\varphi + \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}} + \overline{Cc.2\varphi - \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Cc.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.2\varphi + \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}} - [\overline{Cc.2\varphi - \sqrt{-1}.Sc.2\varphi}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2r}^{\frac{1}{2}}} = Sc.\varphi\sqrt{-1}.$$

Duobus logarithmis, aut arcubus circularibus φ, π tertius μ addatur, & theoremata præbebunt æquationes

$$Cb.\overline{\varphi+\pi+\mu} + Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cb.\overline{\varphi+\pi} + Sb.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}}{r}$$

$$Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} - Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cb.\overline{\varphi+\pi} - [Sb.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cc.\overline{\varphi+\pi} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu} - \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu} = \frac{\overline{Cc.\overline{\varphi+\pi} - \sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi}}.\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r}.$$

Sub-

Subſtitue pro $Cb.\overline{\varphi+\pi}+Sb.\overline{\varphi+\pi}$, item pro $Cb.\overline{\varphi+\pi}-Sb.\overline{\varphi+\pi}$ valores, quos prima duo theoremata præbent. Quod faciendum eſt etiam in quantitatibus circularibus. Orientur porro nova hæc quatuor theoremata

$$Cb.\overline{\varphi+\pi+\mu}+Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb\varphi}.\overline{Cb.\pi+Sb\pi}.\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}}{r^2}$$

$$Cb.\overline{\varphi+\pi+\mu}-Sb.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}.\overline{Cb.\pi-Sb.\pi}.\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}}{r^2}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu}+\sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi+\sqrt{-1}.Sc.\pi}.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r^2}$$

$$Cc.\overline{\varphi+\pi+\mu}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\varphi+\pi+\mu}=\frac{\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}.\overline{Cc.\pi-\sqrt{-1}.Sc.\pi}.\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}}{r^2}.$$

Ponantur æquales φ, π, μ, factaque ut antea æquationum additione, & ſubductione naſcentur

$$Cb.3\varphi=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^3+\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^3}{2r^2}$$

$$Sb.3\varphi=\frac{\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}^3-[\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}^3}{2r^2}$$

$$Cc.3\varphi=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3+\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3}{2r^2}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.3\varphi=\frac{\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3-[\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}^3}{2r^2}.$$

Si antequam addas, & ſubtrahas æquationes, extrahas tertii gradus radicem, invenies

$$\frac{\overline{Cb.3\varphi+Sb.3\varphi}^{\frac{1}{3}}+\overline{Cb.3\varphi-Sb.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=Cb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cb.3\varphi + Sb.3\varphi}^{\frac{1}{3}} - [\overline{Cb.3\varphi - Sb.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}} = Sb.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.3\varphi + \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cc.3\varphi - \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}} = Cc.\varphi$$

$$\frac{\overline{Cc.3\varphi + \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}} - [\overline{Cc.3\varphi - \sqrt{-1}.Sc.3\varphi}^{\frac{1}{3}}}{2.r^{-\frac{2}{3}}} = Sc.\varphi.\sqrt{-1}.$$

Hic autem progressus potest, ut perspicuum est, in infinitum produci. Quare hæ formulæ generatim valebunt

$$Cb.n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} - [\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Sc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sc.n\varphi.\sqrt{-1} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Si n est numerus integer, aut unitas divisa per numerum integrum, res est clarissime demonstrata. In reliquis numeris ex inductione probata remanet.

Quod si cui hoc genus demonstrationis minus arridet, afferam primum pro numeris fractis, cujus numerator non sit unitas, deinde pro negativis demonstrationem clarissimam ex superioribus deductam. Sit fractio $= \frac{n}{m}$. Constat ex superioribus

$$Cb.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb.\frac{\varphi}{m} + Sb.\frac{\varphi}{m}}^{n} + \overline{Cb.\frac{\varphi}{m} - Sb.\frac{\varphi}{m}}^{n}}{2r^{n-1}}$$

Sb.

$$Sb.\frac{n\phi}{m}=\frac{\overline{Cb.\frac{\phi}{m}+Sb.\frac{\phi}{m}}^{\,n}-(\overline{Cb.\frac{\phi}{m}-Sb\;\frac{\phi}{m}}^{\,n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.\frac{n\phi}{m}=\frac{\overline{Cc.\frac{\phi}{m}+\sqrt{-1}.Sc.\frac{\phi}{m}}^{\,n}+\overline{Cc.\frac{\phi}{m}-\sqrt{-1}.Sc.\frac{\phi}{m}}^{\,n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\phi}{m}=\frac{\overline{Cc.\frac{\phi}{m}+\sqrt{-1}.Sc.\frac{\phi}{m}}^{\,n}-(\overline{Cc.\frac{\phi}{m}-\sqrt{-1}.Sc.\frac{\phi}{m}}^{\,n}}{2r^{n-1}}$$

Atqui ex supra demonstratis

$$Cb.\frac{\phi}{m}=\frac{\overline{Cb.\phi+Sb.\phi}^{\,\frac{1}{m}}+\overline{Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Sb.\frac{\phi}{m}=\frac{\overline{Cb.\phi+Sb\;\phi}^{\,\frac{1}{m}}-(\overline{Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Cc.\frac{\phi}{m}=\frac{\overline{Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,\frac{1}{m}}+\overline{Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{\phi}{m}=\frac{\overline{Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,\frac{1}{m}}-(\overline{Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}.$$

Qui valores si in superioribus æquationibus substituantur, expurgatis, ut par est, æquationibus invenientur

$$Cb.\frac{n\phi}{m}=\frac{\overline{Cb.\phi+Sb.\phi}^{\,\frac{n}{m}}+\overline{Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

Sb.

$$Sb.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{\frac{n}{m}} - [\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$Cc.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\varphi}{m} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}} - [\overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}.$$

Quod erat demonstrandum.

Quoad numeros negativos fac advertas, quod antea etiam notavi, cosinum logarithmi, aut arcus negativi eundem esse, ac cosinum positivi; contra sinum logarithmi, aut arcus negativi esse quidem æqualem sinui positivi, sed tamen negativum. Quamobrem valebunt hujusmodi formulæ

$$Cb.-n\varphi = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.-n\varphi = -\frac{[\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{n} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.-n\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\varphi = -\frac{[\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Quæ formulæ in duas fractiones transmutari possunt, in quibus negativum sit divisoris exponens, in hanc formam

$$Cb.-n\varphi = \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{-n}}$$

Sb.

$$Sb.-n\phi = \frac{-r^{-n+1}}{\overline{2.Cb.\phi+Sb.\phi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{\overline{2.Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,-n}}$$

$$Cc.-n\phi = \frac{r^{-n+1}}{\overline{2.Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{\overline{2.Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\phi = \frac{-r^{-n+1}}{\overline{2.Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n}} + \frac{r^{-n+1}}{\overline{2.Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n}}.$$

Si redigas fractiones hujusmodi ad eundem denominatorem, & pro communi divisore $\overline{Cb.\phi}^2 - \overline{Sb.\phi}^2$, aut $\overline{Cc.\phi}^2 + \overline{Sc.\phi}^2$ substituas rr illi æqualem ex natura hyperbolæ, & circuli, invenies æquationes quatuor, quæ probandæ sunt: scilicet

$$Cb.-n\phi = \frac{\overline{Cb.\phi+Sb.\phi}^{\,-n} + \overline{Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Sb.-n\phi = \frac{\overline{Cb.\phi+Sb.\phi}^{\,-n} - (\overline{Cb.\phi-Sb.\phi}^{\,-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Cc.-n\phi = \frac{\overline{Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n} + \overline{Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\phi = \frac{\overline{Cc.\phi+\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n} - (\overline{Cc.\phi-\sqrt{-1}.Sc.\phi}^{\,-n}}{2r^{-n-1}}.$$

Quamobrem veritas formularum, quas præmisimus, demonstrata est in omnibus numeris rationalibus. Quod spectat ad irrationales, potest ea demonstrari adhibito calculo infinitesimali. Sed quum hoc ad præsens institutum nostrum minime pertineat, satis est illam ex inductione probasse.

Postquam ea, quæ necessaria visa sunt, de sinibus, & cosinibus tum hyperbolicis, tum circularibus demonstravimus, ad nostrarum radicum constructionem propius accedamus. Radices hujusmodi, uti constat ex prima parte, plerumque hanc habent formam $x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\,\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\,\frac{1}{p}}$, in qua p est nu-

numerus indicans gradum æquationis, ex qua radix extracta est. Hæc in qualibet hypothesi construenda est per sinus, & cosinus. Quod, ut elegantius fiat, divido æquationem per 2, ut sit

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$$, atque determino $\frac{x}{2}$ dimidium radicis quæsitæ.

In hypothesi prima statuo tam a, quam b positivam. Duplicem casum in hac distinguamus oportet: nam si $\frac{bb}{4} > a^p$, nihil imaginarii formula continebit; si vero $\frac{bb}{4} < a^p$, aderit radix imaginaria. In primo casu comparanda est cum expressione cosinus logarithmi submultipli, nempe cum $Cb.\frac{\varphi}{p} =$

$$\frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}} + \overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}.$$ In secundo casu comparanda erit cum formula cosinus arcus submultipli, nimirum cum

$$Cc.\frac{\varphi}{p} = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{1}{p}} + \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}.$$

Fiat primi casus collatio, & habentur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Cb.\varphi + Sb.\varphi}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Cb.\varphi - Sb.\varphi}{r^{1-p}}:$$ Igitur facta additione, & subtractione æquationum

$\frac{b}{2} = \frac{Cb.\varphi}{r^{1-p}}$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Sb.\varphi}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Cb.\varphi}^2 - \overline{Sb.\varphi}^2 = rr$: Ergo substitutis valoribus $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^p = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, sive $a^p = r^{2p}$, sive $a^{\frac{1}{2}} = r$. Quapropter $\frac{x}{2}$ erit $Cb.\frac{\varphi}{p}$ existente φ eo eo logarithmo, cujus cosinus $= \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & sinu toto $= a^{\frac{1}{2}}$.

Hujusmodi itaque oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera (*Fig.* 1), cujus sinus totus, seu semiaxis AC $= a^{\frac{1}{2}}$, abscinde CM $= \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & excitetur sinus MN. Ex punctis A, N in assymptotum demittantur normales AK, NP. Inter CK, CP inveniantur tot mediæ proportionales, quot sunt unitates in $p-1$, quarum prima sit CG. Ex G duc GE perpendicularem assymptoto, tum sinum EB, qui determinat cosinum CB $= \frac{x}{2}$.

Si p sit numerus impar, prima ex mediis proportionalibus inter CK, CP, unicum tantum valorem habet realem: quare una tantum erit æquationis radix realis. Si vero p sit numerus par, prima ex mediis proportionalibus duos valores æquales habet alterum positivum, alterum negativum, nempe CG, Cg: quare etiam Cb. $\frac{\varphi}{p}$ duos valores æquales habet nempe CB, Cb primum positivum, secundum negativum: igitur etiam $\frac{x}{2}$. Ratio constructionis ex superioribus abunde perspicua est.

Fiat alterius casus comparatio, & ex duabus æquationibus

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc \,.\, \varphi + \sqrt{-1} \,.\, Sc \,.\, \varphi}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc \,.\, \varphi - \sqrt{-1} \,.\, Sc \,.\, \varphi}{r^{1-p}}$$

invenies $\frac{b}{2} = \frac{Cc \,.\, \varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc \,.\, \varphi}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Cc \,.\, \varphi}^2 + \overline{Sc \,.\, \varphi}^2 = rr$: Ergo $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, sive $a^p = r^{2p}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit $Cc \,.\, \frac{\varphi}{p}$, dummodo sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & $Cc \,.\, \varphi = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$.

Ex his pleno alveo fluit constructio. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius (*Fig.* 2) $CA = a^{\frac{1}{2}}$ capiatur $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ducatur sinus MN, erit AN arcus $= \varphi$. Arcus hic in tot partes dividatur, quot unitates insunt in numero p, quarum prima sit $AE = \frac{\varphi}{p}$. Agatur sinus EB, cosinus $CB = \frac{x}{2}$.

Non unus tantum arcus AN, sed infiniti alii existunt arcus, quorum cosinus est $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, nempe facta circumferentia circuli $= c$, & arcu $AN = \varphi$ omnes arcus φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$, $3c + \varphi$ ec. imo & alii φ, $-c + \varphi$, $-2c + \varphi$, $-3c + \varphi$ ec., qui, ut vides, numero infiniti sunt, quos pariter si dividas in partes p, invenies novos arcus $A2E$, $A3E$ ec. quorum cosinus $C2B$, $C3B$ exhibent novos valores radicis $\frac{x}{2}$.

Ne tamen putes, reales valores radicis $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos: tot enim sunt, quot unitates exsistunt in numero p. Namque si $p = 2$ divisio arcus $AN = \varphi$ bifariam exhibet punctum primum, divisio arcus $c + \varphi$ præbet punctum secundum, quod opponitur ex diametro puncto primo. Si dividatur arcus $2c + \varphi$ in primum punctum denuo divisio cadit, si dividatur arcus $3c + \varphi$ divisio cadit in secundum punctum: atque ita deinceps ceteræ omnes divisiones non nova, sed eadem duo puncta semper determinant, per quæ duæ tantum radices reales $\frac{x}{2}$ exhibentur. Si $p = 3$, divisio trium arcuum φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$ in partes æquales tres, tria puncta E, $2E$, $3E$; reliquorum autem arcuum divisiones in hæc eadem puncta cadent. Quare tres dumtaxat habentur radices æquationis reales. Idem dic de casibus reliquis. Nam per divisionem arcuum numero p inveniuntur puncta numero p: reliquæ divisiones eadem puncta præbent: quare $\frac{x}{2}$ tot valores habebit, quot unitates insunt in numero p. Quod quum notissimum sit, pluribus explicandum non judico.

Primæ hypothesi affinis est altera, in qua supponitur quidem a positiva, at b negativa. In hac si speciei b mutetur signum, hanc induit formam æquatio

$x =$

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{2};$$ quæ comparanda eſt cum coſinu logarithmi ſubmultipli, ſi $\frac{bb}{4} > a^p$, cum coſinu arcus ſubmultipli, ſi $\frac{bb}{4} < a^p$. Comparatio præbet valores eoſdem, ac hypotheſis prima, cum hoc tantum diſcrimine, quod coſinus φ provenit negativus, exiſtente ſinu poſitivo. Quare in caſu $\frac{bb}{4} > a^p$ hujuſmodi oritur conſtructio. Deſcripta hyperbola æquilatera (*Fig. 3*), cujus ſinus totus CA $= a^{\frac{1}{2}}$, abſcinde CM $= -\frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, quæ quoniam negativa inventa eſt ſumitur ad partem coſinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN, quæ ſumitur ad partes ſinuum poſitivorum, quia ſinus inventus eſt poſitivus. Ex N in aſymptotum CK demittatur normalis NP. Inter CK, & CP inveniantur tot mediæ proportionales, quot ſunt unitates in numero $p-1$, quarum prima ſit CG. Normalis aſſymptoto ſit GE, & normalis axi ſit EB, coſinus CB, qui negativus eſt, erit $= \frac{x}{2}$.

Quoniam CG eſt prima ex mediis proportionalibus inter CK poſitivam, & inter CP negativam, non ſemper realis eſt, ſed aliquando imaginaria. Itaque neceſſarium eſt hoc determinare. Si p ſit numerus impar, inter CK, & CP inveniendæ erunt mediæ proportionales numero pares: atqui inter quantitatem poſitivam, & negativam numero pares mediæ proportionales poſſibiles ſunt & reales, quarum prima ſemper negativa eſt: Ergo ſi p eſt numerus impar, CG erit realis, & negativa: Ergo etiam CB æqualis radici $\frac{x}{2}$ eſt realis, & negativa.

Verumtamen ſi p ſit numerus par, numero impares mediæ proportionales erunt inveniendæ: atqui inter quantitatem poſitivam, & negativam numero impares mediæ proportionales non omnes reales ſunt, ſed prima, tertia, quinta ec. ſunt imaginariæ: Ergo quum CG prima eſſe debeat, erit imaginaria, adeoque etiam CB $= \frac{x}{2}$. Itaque in primo caſu ſecundæ hypotheſis, ſi p

 ſit

ſit impar, adeſt una tantum radix realis negativa, ſi p ſit par, radices omnes ſunt imaginariæ.

In ſecundo caſu ejuſdem hypotheſis quum ſcilicet $\frac{bb}{4} < a^p$, hæc habetur conſtructio, quæ docet, omnes omnino radices eſſe reales. Deſcripto circulo (*Fig.* 4), cujus ſinus totus, ſeu radius $= a^{\frac{1}{2}}$ abſcindatur negativus coſinus $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & excitetur poſitivus ſinus MN. Arcus AN dividatur in partes æquales numero p, quarum prima ſit AE. Ducto ſinu EB, determinetur coſinus CB, qui erit una radix $= \frac{x}{2}$. Vocato arcu AN $= \varphi$, accipiantur arcus φ, $c + \varphi$, $2c + \varphi$ ec. tot, quot ſunt unitates in p, & facta horum arcuum diviſione in partes æquales numero p, determinantur puncta E, 2E, 3E ec., quæ determinant omnes radices æquationis CB, C2B, C3B ec. Superfluum eſſet plures arcus accipere, quia eadem prorſus puncta in diviſione redirent.

Tertia hypotheſis, in qua b poſitiva ſit, a negativa, plures caſus nos diſtinguere jubet. Primus caſus ſtatuet numerum p imparem. In hoc mutato ſigno ſpeciei a, æquatio hanc induet formam

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ quum nihil imaginarii contineat, ad hyperbolam eſt referenda. Nonemo primoribus oculis formulam intuens fortaſſe judicabit, eam comparandam eſſe cum expreſſione coſinus logarithmi ſubmultipli. Sed ſi comparationem inſtituat, cognoſcet ſtatim, ſinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat conſtructionem eſſe impoſſibilem, ſed formulam non per coſinum, ſed per ſinum hyperbolicum eſſe conſtruendam. Quod ex eo poteras quoque colligere, quia ſi ſecus fieret, ſinus major eſſet coſinu, quod in hyperbola omnino impoſſibile eſt.

Itaque ut formulam referamus ad ſinum, ita eam diſponimus

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ compa-

ran-

randa est cum sequenti $Sb.\frac{\varphi}{p} = \frac{\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}} - [\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}$.

Collatio sufficit æquationes duas

$$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2} = \frac{Cb.\varphi + Sb.\varphi}{r^{1-p}}$$

$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2} = \frac{Cb.\varphi - Sb.\varphi}{r^{1-p}}$, ex quibus propter ambiguitatem signorum provenit $\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} = \frac{Cb.\varphi}{r^{1-p}}$, $\frac{b}{2} = \frac{Sb.\varphi}{r^{1-p}}$: atqui

$$\overline{Cb.\varphi}^2 - \overline{Sb.\varphi}^2 = rr: \text{ Ergo}$$

$$\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = a^p = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}: \text{ Ergo } a^{\frac{1}{2}} = r.$$

Describe hyperbolam, cujus sinus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$; duc AK (*Fig.* 1) normalem assymptoto; accommoda sinum $MN = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, & demitte in assymptotum normalem NP. Inter CK, CP inveni CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot sunt unitates in numero $p-1$. In casu autem p imparis hæc semper realis est, & unica. Ex G fit GE perpendicularis assymptoto, & ex E ducatur sinus EB, qui erit $= \frac{x}{2}$ nempe radici quæsitæ.

Quum p est numerus par, admonuimus in prima parte mutari formulam aliquantum, & hanc valere

$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$, quam constat ad sinum esse referendam. In hac vel $\frac{bb}{4} > a^p$, & formula nihil continebit imaginarii, atque hic erit tertiæ hypothesis casus alter; vel $\frac{bb}{4} < a^p$, & imaginaria radix formulam afficiet.

In secundo casu comparanda est cum formula sinus logarithmi sub-

submultipli. Comparatio autem instituta dabit $\frac{b}{2} = \frac{Ch.\varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Sh.\varphi}{r^{1-p}}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Quare constructio parum differt a superiore. Nam descripta ut supra (*Fig.* 1) hyperbola abscinde $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc sinum MN, & ex N perpendicularem assymptoto NP. Inter CK, & CP determina CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot unitates continet $p-1$; tum ordina assymptoto rectam GE, & axi sinum EB, hic æquabit $\frac{x}{2}$ æquationis radicem.

Quoniam $p-1$ ponitur numerus impar, duæ erunt primæ mediæ proportionales inter CK, CP, æquales quidem, sed altera positiva, altera negativa, nempe CG, Cg: quare duæ etiam radices $= \frac{x}{2}$, nempe EB positiva, & eb negativa.

Si in formula superiori $\frac{bb}{4} < a^p$, imaginariæ radices apparebunt. Elegantiæ caussa ita disponatur

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$ Ut

hæc possit comparari cum expressione sinus arcus submultipli, multiplicetur per $\sqrt{-1}$

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \sqrt{-1}.\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}.$$

Si $\sqrt{-1}$ elevetur ad potestatem p parem potest exhibere & $+1$, & -1. Dabit $+1$, si p sit ex hac serie 4, 8, 12, 16, 20 ec. hoc est pariter par. Præbebit -1, si p sit ex serie 2, 6, 10, 14, 18 ec. idest impariter par.

Sit p pariter par, atque hic sit tertiæ hypothesis casus tertius. In hoc casu $\sqrt{-1}$ elevata ad potestatem p, & opportune multiplicat nihil mutat terminos. Erit itaque

$\frac{x}{2}$

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Fiat collatio cum expressione arcus submultipli, & oriuntur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi + \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$$

$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\varphi - \sqrt{-1}.Sc.\varphi}{r^{1-p}}$. Ex quibus propter ambiguitatem signorum hæ nascuntur $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\varphi}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\varphi}{r^{1-p}}$: Ergo $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = a^p = \frac{\overline{Cc.\varphi}^2 + \overline{Sc.\varphi}^2}{r^{2-2p}} = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}$: Ergo $a^{\frac{1}{2}} = r$.

Constructio similis est superiori. Nam in circulo (*Fig.* 2) cujus sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, sume cosinum $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc sinum MN. Arcum AN divide in partes æquales numero p, quarum prima sit AE, sinus $EB = \frac{x}{2}$. Radix hæc realis non est unica, sed tot habentur, quot unitates sunt in numero p. Inveniuntur per divisionem arcuum φ, $c+\varphi$, $2c+\varphi$, $3c+\varphi$ ec., ut ex superioribus manifestum est, si $AN = \varphi$.

Hujusce hypothesis casus quartus, & ultimus ponit, numerum p esse impariter parem, quo in casu quum $\sqrt{-1}$ elata ad potestatem p præbeat -1, formula in hanc mutatur

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{(-\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{-\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si hæc conferatur cum expressione sinus arcus submultipli eædem determinationes provenient, quæ in casu superiore cum hoc tantum

tum discrimine, quod tam $Cc.\varphi$, quam $Sc.\varphi$ negativus exurget. Quare hæc orietur constructio.

In circulo, cujus sinus totus (*Fig.* 8) $CA = a^{\frac{p}{2}}$, ad partes cosinuum negativorum abscinde $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc MN ad partes negativorum sinuum. Arcum AaN divide in partes æquales numero p, quarum prima sit AE, cujus sinus $EB = \frac{x}{2}$ unam ex quæsitis radicibus. Reliquas eodem modo invenies per divisionem arcuum $c+\varphi$, $2c+\varphi$, $3c+\varphi$ ec., quemadmodum supra determinavimus posito arcu $AaN = \varphi$.

Quartam, & ultimam hypothesim, in qua non minus a, quam b negativa est, quia similis est priori, breviter expedio. In primo casu supponente p numerum imparem hæc habetur formula

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}-\frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}+\frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}}}{2}:$$

quæ collata cum expressione sinus logarithmi submultipli easdem determinationes præbet ac in hypothesi superiore cum hoc tantum discrimine, quod $Sb.\varphi$ (*Fig.* 5) evadit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes negativorum sinuum applicetur $MN = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ducta in assymptotum normali NP inveniatur CG prima ex tot mediis proportionalibus, quot unitates sunt in $p-1$, quæ existente p impari unica est. Agatur assymptoto normalis GE, & sinus EB, qui æquabit radicem $\frac{x}{2}$.

In secundo casu, quum p est par, & $\frac{bb}{4} > a^p$ hæc formula valet

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}} - \overline{(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ præbet easdem determinationes, sed tam $Cb.\varphi$, quam $Sb.\varphi$ evadit negativus. Quare ad partes cosinuum negativorum accipienda est

est $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agendus sinus MN ad partes negativorum, & ducenda normalis assymptoto NP. Inter CK positivam, & CP negativam invenienda esset prima ex mediis proportionalibus $p-1$. Verum quum p est numerus par, hæc est imaginaria. Quare in hoc casu radices omnes $\frac{x}{2}$ imaginariæ sunt.

In tertio casu, ubi $\frac{bb}{4} < a^p$, & p est numerus pariter par, formula est hujusmodi

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)}^{\frac{1}{p}} - \overline{\left(-\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

in qua $C c.\varphi$ negativus est, & $S c.\varphi$ positivus (*Fig.* 4). Quare in eodem circulo radii $= a^{\frac{1}{2}}$, sume negativum cosinum CM $= \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & positivum sinum MN. Divide arcum $AN = \varphi$ in partes æquales numero p, quarum prima sit AE. Hujus sinus EB æquabit radicem $\frac{x}{2}$, & similis divisio arcuum $c + \varphi$, $2c + \varphi$, $3c + \varphi$ ec. reliquas radices præbebit.

In quarto casu, in quo iisdem suppositis p est numerus impariter par, formula hæc obtinetur

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\overline{\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}}^{\frac{1}{p}} - \overline{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)}^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si fiat collatio cum expressione sinus arcus submultipli, invenietur $C c.\varphi$ positivus, at $S c.\varphi$ negativus. Quare ad partes positivorum cosinuum (*Fig.* 6) sumpto $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agatur sinus negativus MN. Arcus $AaN = \varphi$ dividatur in partes æquales p, quarum prima sit AE. Ejus sinus EB exhibet radicem $\frac{x}{2}$. Reliquas radices

M (omnes

(omnes enim ſunt reales) invenies per diviſionem arcuum $c + \phi$, $2c + \phi$, $3c + \phi$ ec., quemadmodum ſupra monuimus.

Si p ſit numerus compoſitus, monuimus in prima parte æquationem reſolvi poſſe reſolutis pluribus ejus gradus, quem indicant numeri componentes. Hoc ipſum conſtructio tradita edocere potuiſſet. Hæc enim innititur omnis vel in diviſione arcus circularis in partes æquales numero p, vel in inventione tot mediarum proportionalium inter duas datas, quot ſunt unitates in numero $p - 1$. Utrumque autem problema per partes reſolvi poteſt, ſi p ſit numerus compoſitus. Nam quod ſpectat ad arcum circularem: ſit p numerus compoſitus ex numeris r, s. Dividatur primum arcus in partes æquales numero r; tum ſingulæ hæ partes dividantur in partes numero s. Manifeſtum eſt, arcum fore diviſum in partes numero $rs = p$. Idem dic ſi plures, quam duo, eſſent numeri componentes.

Quod pertinet ad inventionem plurium mediarum proportionalium: inter duas datas fac invenias medias proportionales numero $r - 1$, quæ ſimul cum duabus datis efficient quantitates numero $r + 1$; & inter has quantitates inerunt intervalla numero r. In ſingulis intervallis tot proportionales medias colloca, quot habet unitates $s - 1$. Numerus harum proportionalium æquabit $rs - r$, qui numerus additus numero earum, quæ antea inventæ ſunt nempe cum $r - 1$ dat ſummam $rs - r + r - 1 = rs - 1 = p - 1$. Idem ratiocinium valet, ſi plures, quam duo, eſſent numeri componentes.

Non deſunt methodi cum geometricæ, tum mechanicæ dividendi arcum in partes æquales, & inveniendi plures medias proportionales inter duas datas. Quare conſtructio hæc noſtra, quæ utitur vel diviſione arcus in partes æquales, vel inventione plurium mediarum proportionalium, æquationem, ut ajebant veteres, ad locos jam reſolutos perducit. Non ſum neſcius, æquationes, quas conſtruximus per ſinus, aut coſinus hyperbolicos, poſſe ſine eorum auxilio per medias proportionales abſolvi. Etenim formula $\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}$, quam ſolum æquationes reſolutæ continent, inventis mediis proportionalibus $p - 1$ inter duas datas conſtruitur. Pone enim $\frac{b}{2} = f^p$, & $a = g^2$, formula mutabitur in hanc,

$f^p +$

$\overline{f^p \pm \sqrt{f^{2p} - g^{2p}}}^{\frac{1}{p}}$, sive $\overline{f^{p-1} . f \pm \sqrt{ff - \frac{g^{2p}}{f^{2p-2}}}}^{\frac{1}{p}}$, atqui hæc est prima ex mediis proportionalibus $p-1$ inter duas datas f primam, & $f \pm \sqrt{ff - \frac{g^{2p}}{f^{2p-2}}}$ ultimam. Ad hanc autem methodum necesse est confugere in illis casibus, in quibus nostra deficit. Namque si aut $a = o$, aut $\frac{bb}{4} - a^p = o$, nostræ formulæ fiunt simpliciores; sed ipsa earum simplicitas non sinit, ut sinus, & cosinus hyperbolici habeant utilitatem. Quare immediate per inventionem mediarum proportionalium æquatio erit construenda.

Exceptis duobus hisce casibus satius judicavi, adhibere methodum cosinuum, & sinuum hyperbolicorum tum quia perelegans mihi visa est, tum quia custodit mirifice analogiam cum constructione, quæ absolvitur per divisionem arcus circularis.

Omittendum non est, quod in determinato quovis circulo, atque hyperbola peragi constructio potest. Namque sit circulus, aut hyperbola, cujus sinus totus sit $= f$. Fiat ut $a^{\frac{1}{2}} : f :: \frac{b}{a^{\frac{p-1}{2}}} : \frac{fb}{a^{\frac{p}{2}}}$. Quum $\frac{b}{a^{\frac{p-1}{2}}}$ debeat esse sinus, aut cosinus arcus, seu logarithmi φ sumpto sinu toto $= a^{\frac{1}{2}}$, erit $\frac{fb}{a^{\frac{p}{2}}}$ sinus, aut cosinus arcus, seu logarithmi respondentis sumpto sinu toto $= f$. Hunc autem vocemus $= \pi$. Inveniatur sinus, aut cosinus arcus, seu logarithmi $\frac{\pi}{p}$. Tum denuo fiat $f : a^{\frac{1}{2}}$ ita sinus, aut cosinus arcus, seu logarithmi $\frac{\pi}{p}$ ad sinum, aut cosinum arcus, seu logarithmi $\frac{\varphi}{p}$, qui fiet cognitus: igitur cognita quoque fiet radix $\frac{x}{2}$.

Hæc animadversio viam sternit ad inveniendas nostrarum æquationum radices ope tabularum, quarum aliquæ jam constructæ sunt, aliquæ haud difficulter construi possunt. Loquamur primum de illis æquationibus, quæ construuntur per divisionem arcuum circularium; tabulas enim arcuum constructas habemus. Sed quoniam in tabulis non habemus sinus, aut cosinus arcuum superantium quadrantem, hæc animadvertenda erunt. Si arcus minor sit quadrante, sinum, & cosinum habet positivum: si major sit quadrante, minor semicircumferentia, habet sinum, & cosinum æqualem sinui, & cosinui arcus semicircumferentiam complentis, sed sinus positive accipiendus est, negative cosinus. Si arcus superet semicircumferentiam, sed minor sit tribus quadrantibus habebit sinum, & cosinum eosdem, ac arcus, qui est differentia inter datum & semicircumferentiam, sed uterque negative capiendus est; denique si arcus major sit tribus quadrantibus, habebit sinum negativum, & cosinum positivum, at eosdem, ac arcus, qui simul cum illo circumferentiam compleat. Idem ordo redit, si accipiantur arcus circumferentia majores. Quare viceversa si tam sinus, quam cosinus positivus sit, ~~arcus minor erit quadrante; si sinus positivus,~~ cosinus negativus, arcus minor erit semicircumferentia, sed major quadrante; si uterque negativus est, arcus superabit semicircumferentiam, sed deficiet a tribus quadrantibus; demum si cosinus positivus sit, sinus negativus, arcus major erit quadrantibus tribus, sed minor circumferentia: arcus autem minor quadrante habens æqualem sinum, & cosinum æquabit differentiam inter circumferentiam, aut semicircumferentiam & arcum quæsitum. Hisce autem arcubus potes circumferentiam integram toties addere, quoties volueris.

His animadversis considerato sinu toto $f = 1$ inveni in tabulis cosinum $= \frac{b}{a^{\frac{p}{2}}}$, cui respondebit arcus minor quadrante in tabulis. Accipe vel hunc, vel differentiam semicircumferentiæ, & hujus, vel summam semicircumferentiæ & hujus, vel differentiam inter hunc & circumferentiam, prout sinus, aut cosinus negativi, aut positivi exposcunt. Hac ratione determinabis arcum π; inveni in tabulis arcum $\frac{\pi}{p}$, cujus sinum, aut cosinum ex iisdem tabulis determinabis. Hunc multiplica per $a^{\frac{x}{2}}$, & invenies per approximationem radicem $\frac{x}{2}$. Eodem modo reliquas radices nancisceris.

Eodem modo æquationes illas approximando resolves, quæ indigent

digent ſinibus, & coſinibus hyperbolicis. Sed prius neceſſe eſſet tabulam conſtruere ſinus hoſce & coſinus exhibentem. In prima columna conſtituendi eſſent numeri unitate tum majores, tum minores. In ſecunda eorum logarithmi deſumpti in eo ſyſtemate, in quo protonumerus $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, ſubtangens $= 1$, quorum inveniendorum rationem alio loco docui. Imo ex ipſis logarithmis, qui vulgo dicuntur hyperbolici, hi, quos analogos voco, facillime deducuntur. In tertia, & quarta columna collocandi ſunt ſinus, & coſinus hyperbolici, quorum inveniendorum methodum expeditam ſeries exhibebunt. Columnis his addere potes quintam, & ſextam continentem tangentes, & ſecantes hyperbolicas, quæ tametſi reſolvendis noſtris æquationibus non inſerviant, tamen in permultis aliis inquiſitionibus habere poſſunt utilitatem.

Quiſque videt, logarithmos numerorum majorum quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$ poſitivos fore, eorumque ſinus, & coſinus eſſe pariter poſitivos. Verum numeri minores, quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmos habebunt negativos, quorum coſinus poſitivi erunt, ſinus autem negativi. Negativos numeros tabula non complectitur. Sed hæc tenenda ſunt. Si numerus negativus ſit, & minor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmus negativus erit, coſinus negativus, ſinus autem poſitivus. Si numerus negativus major ſit $\frac{1}{\sqrt{2}}$, logarithmus, ſinus, & coſinus erunt negativi. Cæterum logarithmi, ſinus, & coſinus reſpondentes numeris negativis æquales ſunt illis, qui reſpondent numeris poſitivis.

Si conſtructas haſce tabulas haberemus, hoc modo invenirentur æquationum radices. Inveni in tabulis ſinum, aut coſinum, prout calculus poſtulat, æqualem $\frac{b}{a^{\frac{p}{2}}}$, ſumo enim $f = 1$. Si tam ſinus, quam coſinus fuerit poſitivus, accipe illum, qui reſpondet numero majori quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si coſinus fuerit poſitivus, ſinus negativus, illum accipe, qui reſpondet numero minori quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tum cape in tabula logarithmum reſpondentem, qui in primo

caſu

casu positivus erit, in altero negativus. Si tam sinus quam cosinus foret negativus, primus logarithmus accipiendus esset, sed negative. Si cosinus negativus foret, sinus positivus, capiendus esset alter, sed negative. Inventum ita logarithmum π divide in partes p, & huic parti æqualem accipe in tabula logarithmum, cui respondentem sinum, aut cosinum nota; hunc multiplica per $a^{\frac{1}{2}}$, & invenies per approximationem radicem $\frac{x}{2}$.

Verum hanc regulam tene, ne utens tabulis incidas in errorem. Si p sit numerus impar, una semper habetur radix realis, quæ, si exprimatur per cosinum, positiva erit, $C\,b.\,\varphi$ existente positivo, si exprimatur per sinum, $S\,b.\,\varphi$ positivo existente, & versa vice. Si p sit numerus par, aut duplex erit radix positiva & negativa, aut nulla; duplex, si $C\,b.\,\varphi$ positivus fuerit, nulla, si idem fuerit negativus. ~~Hanc tibi regulam sequenti tabulæ vero proxi-~~mas radices suppeditabunt.

Quæ dicta sunt de nostris æquationibus, complectuntur æquationes omnes tertii gradus, quæ ut nostro canoni subsint, nihil requiritur aliud, nisi ut careant secundo termino. Hæc autem conditio semper potest obtineri. Quamobrem æquationes omnes tertii gradus resolvuntur per divisionem arcus circularis, aut logarithmi analogi in partes tres; seu si ad constructionem geometricam mavis accedere, per divisionem arcus in tres partes, aut per inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas. Quæ autem æquationes altiorum graduum simili methodo resolvantur, opusculum hoc planissime declaravit. (*a*)

OPU-

(*a*) *Scripsi initio hujus opusculi, methodum resolvendi æquationem quadrato-quadraticam, quæ legitur in opere Rafaelis Bombellii, a Christiano Wolfio tribui Ludovico cuidam Ferrariensi. Quum Wolfii auctoritati non admodum siderem, interrogavi Joannem Andream Barottum, quem Ferrariensium litteratorum monumenta collegisse accipio, quisnam esset Ludovicus hic Ferrariensis, & quonam argumento tam illustris inventio illi esset referenda. Respondit vir humanissimus æque, ac doctissimus, falli sine dubio Wolfium, & ad Ludovicum de Ferrariis, qui patria Ferrariensis non est, eam methodum pertinere, ut apertis verbis testatur Hieronymus Cardanus. Reapse Cardanus lib. x de Arithmetica cap. 39 regula secunda:* Alia, *inquit*, est regula nobilior præcedente, & est Ludovici de Ferrariis, qui eam me rogante invenit, & per eam habemus omnes æstimationes formæ capitulorum quad-quadrati, & quadrati rerum, & numeri, vel quad-quadrati, cubi, quadrati, & numeri ec.

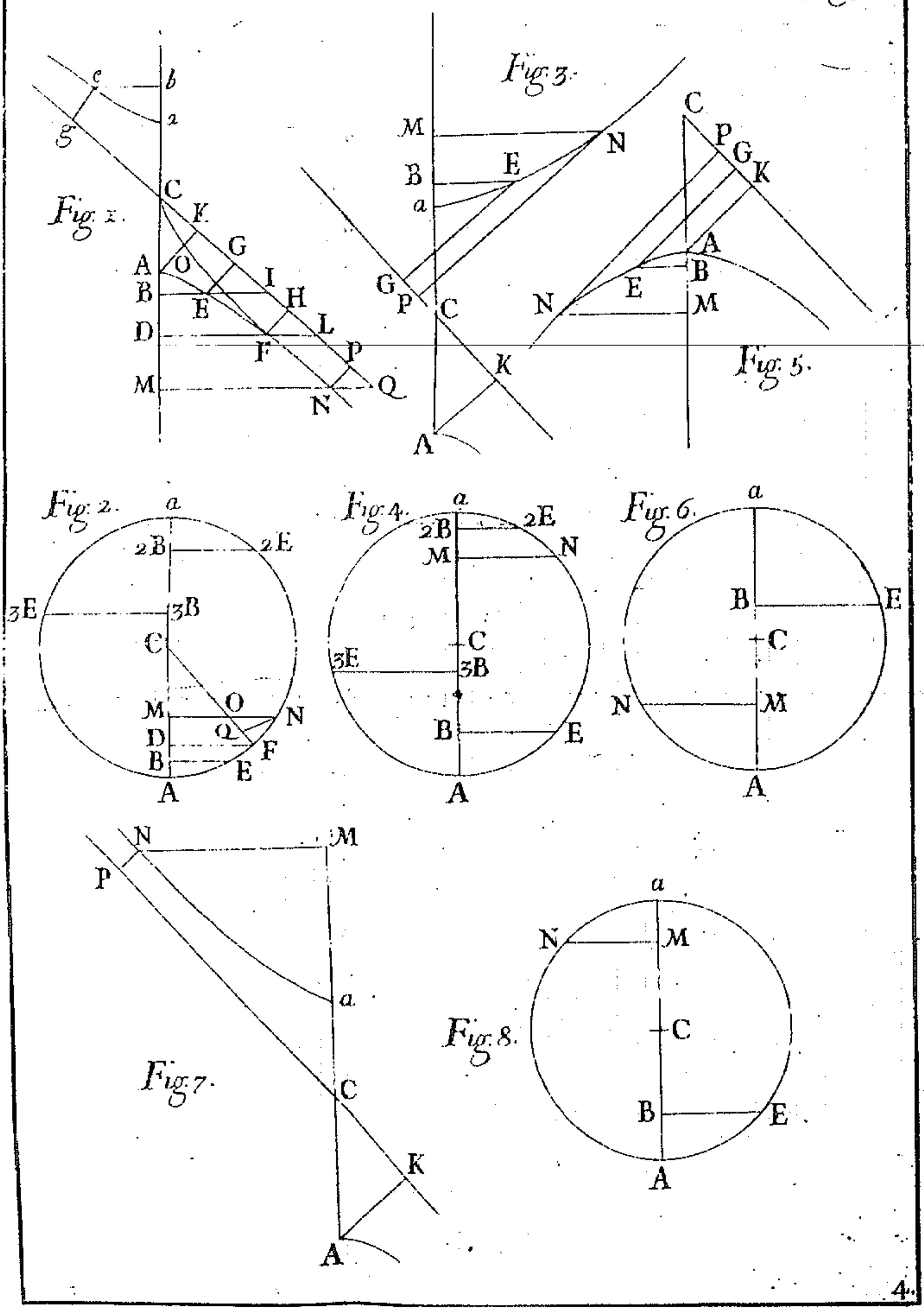


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
4.

OPUSCULUM QUINTUM.

Solutio Problematis ad methodum Tangentium inversam pertinentis. Disquisitio mathematica.

PRopositum olim fuerat in familiari sermone a viro in rebus analyticis satis versato problema pertinens ad Tangentium inversam methodum, quod a se tentatum sæpius ajebat, solutum autem esse ingenue negabat. Problema vero (*Fig.* 1) erat hujusmodi. Datis duobus punctis A, C, quorum alterum sit in data recta CI, invenire curvam AGF transeuntem per punctum A, cujus proprietas sit, ut ducta tangente qualibet GT pars curvæ AG æquet rectam CT.

Hoc ubi mihi renunciatum est, cœpi pro virili parte rem aggredi, neque non ex sententia. Namque brevi solutionem nactus, quam in hoc opusculo primum exponam, eam viri clarissimi, qui problema proposuerat, judicio, atque censuræ subjeci.

Deinceps hac solutione perfecta problema magis late patens mihi proposui; quum scilicet pars curvæ AG esset ad rectam CT in qualibet data ratione. Quod problema majus mihi negotium fecit: nam & in separandis incognitis æquationis differentialis, & in concillanda calculo facilitate, atque elegantia, otii, atque operæ fateor me multum consumpsisse. Sed novas sæpius methodos in periculum traducens, atque utilia quædam analyseos adjumenta in subsidium vocans, quid tandem assequutus fuerim, penes æquum lectorem Geometram judicium sit. Ego jam ad rem propius accedens, primum naturam ejus curvæ patefaciam, quæ postulat ut AG æquet CT, deinde earum, quæ postulant, ut eæ lineæ sint in qualibet data ratione.

Verum ad præparandam analysim omnes quotquot sunt conjungens ita communi quadam notione enunciandum puto, quod propositum est.

PROBLEMA.

Datis duobus punctis A, C, quorum alterum positum est in data recta CI, oportet invenire curvam AGF transeuntem per pun-

punctum A, cujus proprietas sit, ut ducta qualibet tangente GT pars curvæ AG sit ad rectam CT in constanti qualibet ratione.

Si conjungantur puncta A, C linea recta, perspicuum est ab hac tangi curvam in puncto A. Per idem punctum A agatur AB parallela CI, & ex puncto C in hasce parallelas ducatur perpendicularis CB. Ex quolibet puncto G quæsitæ curvæ AGF intelligatur ducta tangens GT; item ex puncto g priori infinite proximo ducatur alia tangens gt, quæ producta cum priori concurret in puncto i. Facto centro in i intervallo it describatur minimus arcus circuli tl. Ex punctis G, g agantur GO, go parallelæ BC. Item parallela rectæ AB sit GK secans og in b, quæ concurrat in K cum linea, quæ ex puncto T ducitur parallela BC.

Quum pars curvæ AG ad rectam CT debeat esse in definita quadam ratione, quam nominabo $1 : n$, etiam elementum Gg ad elementum Tt erit in eadem ratione $1 : n$: Ergo T$t = n$. Gg. Sed productis GT, BC donec concurrant in H est Tt : Tl : : TH : CT, sive : : Gg : Gb: Ergo quando T$t = n$. Gg, necesse est, ut T$l = n$. Gb. Sed notum est, duarum tangentium GT, gt differentiam $= -$ Gg $-$ Tl: Ergo tangentium differentia $= -$ Gg $- n$. Gb. Ergo invenitur per methodum summatoriam tangens GT $=$ M $-$ AG $- n$. AO. M est constans addita, quæ ut determinetur, advertendum est fieri GT $=$ AC evanescentibus AG, AO. Quare tangens GT $=$ AC $-$ AG $- n$. AO.

Similiter GK $=$ AB $-$ CT $-$ AO $=$ AB $- n$. AG $-$ AO.

Jam vero GT : GK : : Gg : Gb, sive AC $-$ AG $- n$. AO : AB $- n$. AG $-$ AO : : Gg : Gb. Vocetur jam AC $= a$, AB $= b$, AG $= s$, AO $= x$, G$g = ds$, O$o =$ G$b = dx$. Quare habebitur formula $a - s - nx : b - ns - x : : ds : dx$, ex qua oritur æquatio

$$(1)\ \frac{a - s - nx}{b - ns - x} \cdot dx = ds.$$

Hæc æquatio pertinet ad omnes curvas, quæcumque tandem sit proportio curvæ AG ad rectam CT. Verum analysi hoc pacto præparata oportet jam separare casus, & singulos seorsim pertractare. Supponamus primum curvam AG rectæ CT æqualem esse oportere; qua in hypothesi fiet $n = 1$; Ergo æquatio prima mutabitur in secundam.

$$(2)\ \frac{a - s - x}{b - s - x} \cdot dx = ds.$$

In hoc præcipue collocanda est opera, ut in secunda æquatione incognitæ separentur. Quam ob rem methodum censeo ineundam lon-

longiorem quidem, sed rei, qua de agimus, magis accommodatam. Sit $BC = c$, & locum habebit æquatio

$$(3)\ aa = bb + cc.$$

Item sit $GO = y$, & $KT = c - y$. Ob angulum rectum K erit $GT^2 = GK^2 + TK^2$, sive analytice

$$aa - 2a.\overline{s+x} + \overline{s+x}^2 = bb - 2b.\overline{s+x} + \overline{s+x}^2 + cc - 2cy + yy:$$

Ergo deletis delendis

$aa - 2a.\overline{s+x} = bb - 2b.\overline{s+x} + cc - 2cy + yy$: atque hac dempta ex tertia fiet $s + x = \frac{2cy - yy}{2a - 2b}$. Quo expeditior fiat methodus accipe æquationem

$$(4)\ \frac{2cy - yy}{2a - 2b} = z.$$

Itaque erit $s + x = z$: quam formulam tanquam subsidiariam adhibens, fac arceas ab æquatione secunda speciem s, & fiet $\frac{a-z}{b-z}.dx = dz - dx$, sive $adx - zdx + bdx - zdx = bdz - zdz$, sive $2dx = \frac{b-z}{\frac{a+b}{2} - z}.dz = dz + \frac{\overline{\frac{a-b}{2}}.-dz}{\frac{a+b}{2} - z}$.

Quam æquationem si integres, obtinebis formulam

(5) $2x = z + l\,\overline{\frac{a+b}{2} - z}$: qui logarithmus accipiendus est in logistica, cujus subtangens $= \frac{a-b}{2}$, atque ita accipiendus, ut, dum evanescit x, etiam z evanescat.

Ex præmissa Analysi, atque præparatione oritur hujusmodi constructio. Ductis duabus lineis parallelis (*Fig.* 2) LP, VR, quarum distantia $= \frac{a+b}{2}$, cum assymptoto VR describe logisticam ML, cujus subtangens sit $= \frac{a-b}{2}$. Curva hæc secabit alteram ex parallelis in L: ex quo puncto inclinetur LR ad angulum semirectum, & ducatur LV parallelis perpendicularis. Si ex quolibet puncto M ducantur MNP, & MQ, altera normalis, altera parallela rectæ LP; tunc MP, vel LQ repræsentantibus z, MN repræsentabunt $2x$. Nam quum $\frac{a+b}{2} - z$ minor sit $\frac{a+b}{2}$, cujus logarithmus poni debet $= o$, logarithmus $\frac{a+b}{2} - z$ tanquam negativus accipiendus est, ac propterea detrahendus a z, ut inveniatur $2x$.

N Si

Si jam formulam quartam tibi proponas, nimirum $\frac{2cy - yy}{2a - 2b} = z$, invenies $2cy - yy = \overline{2a - 2b}.z$, sive $cc - 2cy + yy = cc - \overline{2a + 2b}.z = \overline{2a - 2b}.\frac{a+b}{2} - z$, quæ est ad parabolam, atque hoc pacto construitur. Accipe $VS = c$, & vertice S parametro $2a - 2b$, hoc est quadrupla subtangentis logisticæ, describe parabolam, quæ transeat per punctum L necesse est. Jam vero $LQ = z$, $XQ = y$.

Igitur si curvam construas, cujus absciffæ æquent dimidium rectarum MN, ordinatæ autem æquent XQ (*Fig.* 1), ea curva orietur, quam quærimus; quæ composita est ramis duobus similibus, & æqualibus MGF, mgf, qui ex una parte habent pro asymptoto rectam CI, ex altera in infinitum recedunt a lineis, BA, ba.

Si hujusce curvæ, quam descripsimus, aveas habere æquationem differentialem in quintam æquationem introduc valorem z datum per quartam, & habebis $2x = \frac{2cy - yy}{2a - 2b} + l\,\overline{\frac{a+b}{2} - \frac{2cy + yy}{2a - 2b}}$. Qua differentiata post necessarias operationes invenies æquationem

(6) $2dx = \frac{dy.\overline{c - y}}{a - b} - \frac{dy.\overline{a - b}}{c - y}$ pro æquatione differentiali curvæ quæsitæ.

Brevior adhuc fiet, si ponas $c - y = u$, & $-dy = du$, & fiet æquatio curvæ quæsitæ.

(7) $2dx = \frac{-udu}{a - b} + \frac{du.\overline{a - b}}{u}$.

Descendamus jam ad alterum casum, quando scilicet AG est: CT : : AB : AC; quo in casu necesse est, ut sit $b : a : : n : 1$, sive $b = na$. Jam vero ad separandas indeterminatas in formula prima $\frac{a - s - nx}{b - ns - x}.dx = ds$ fac utaris substitutione, quæ continetur in æquatione

(8) $b - ns - x = zx$:

Ergo $\frac{b - x - zx}{n} = s$, & $\frac{-dx - zdx - xdz}{n} = ds$, quibus valoribus in æquatione prima substitutis erit $\frac{na - b + x + zx - n^2x}{nzx}.dx = \frac{-dx - zdx - xdz}{n}$, & multiplicando per n, & delendo termi-

nos

nos $na - b$, qui ex hypothesi sese destruunt erit $\frac{\overline{x + zx - n^2 x}}{zx} . dx$ $= - dx - zdx - xdz$, sive $\overline{1 + z - n^2 + z + z^2} . dx = - xzdz$, ex qua provenit

(9) $\frac{dx}{x} = \frac{-zdz}{z^2 + 2z + 1 - n^2}$.

Hæc autem æquatio, in qua incognitæ separatæ sunt, ut integrabilis fiat, disponenda est in hunc modum

$\frac{dx}{x} = \frac{\frac{1-n}{2n} dz}{z + 1 - n} + \frac{\frac{1+n}{2n} . - dz}{z + 1 + n}$, qua integrata cum additione constantis Q, factoque transitu a logarithmis ad numeros habebitur æquatio

(10) $x = \frac{Q . \overline{z + 1 - n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z + 1 + n}^{\frac{1+n}{2}}}$.

Jam vero quum sit KT : KG :: bg : bG, sive analytice $c - y : b - ns - x :: dy : dx$, erit $\frac{dy}{c - y} = \frac{dx}{b - ns - x}$: ex æquatione octava substitue pro $b - ns - x$, ejus valorem xz, & habebis $\frac{dy}{c - y}$ $= \frac{dx}{xz}$: in quam introduc valorem $\frac{dx}{x}$ datum in æquatione nona, & invenies $\frac{dy}{c - y} = \frac{-dz}{zz + 2z + 1 - nn}$; quam, ut integres, ita dispone $\frac{dy}{c - y} = \frac{-\frac{1}{2n} dz}{z + 1 - n} + \frac{\frac{1}{2n} dz}{z + 1 + n}$. Qua integrata cum additione constantis P, factoque transitu a logarithmis ad numeros habetur

(11) $\frac{P}{c - y} = \frac{\overline{z + 1 + n}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{z + 1 - n}^{\frac{1}{2n}}}$.

Verum sine ulla limitatione proponamus nobis æquationem secundam $\frac{a - s - nx}{b - ns - x} . dx = ds$: ad quam resolvendam usurpetur primo substitutio, quæ continetur in æquatione

(12) $x = t - \frac{b + na}{nn - 1}$, quæ dabit

$$\frac{a+\frac{nb-nna}{nn-1}-s-nt}{b+\frac{b-na}{nn-1}-ns-t}\,.\,dt=ds\text{, sive }\frac{\frac{nb-a}{nn-1}-s-nt}{\frac{n^2b-na}{nn-1}-ns-t}\,.\,dt=ds.$$

Quæ æquatio prorsus similis est secundæ pro casu, quod $b=na$, ut consideranti palam fiet.

Itaque si per eandem methodum utaris substitutione

(13) $\frac{n^2b-na}{nn-1}-ns-t=tz$ invenies æquationes

(14) $\frac{dt}{t}=\frac{-zdz}{zz+2z+1-nn}$, & (15) $t=\frac{Q\,.\,\overline{z+1-n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}$, in

quibus, si ponatur valor t datus per x in æquatione 12, prodibunt æquationes

(16) $\frac{dx}{x+\frac{b-na}{nn-1}}=\frac{-zdz}{zz+2z+1-nn}$,

(17) $x+\frac{b-na}{nn-1}=\frac{Q\,.\,\overline{z+1-n}^{\frac{1-n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}$.

Jam vero, ut supra ostensum est, quum sit $c-y:b-x-ns::dy:dx$ erit ex æquatione duodecima $c-y:b+\frac{b-na}{nn-1}-t-ns=\frac{n^2b-na}{nn-1}-t-ns::dy:dx=dt$, sive ex decima tertia $c-y:tz::dy:dt$: Ergo $\frac{dy}{c-y}=\frac{dt}{tz}$: Ergo ex decimaquarta $\frac{dy}{c-y}=\frac{-dz}{zz+2z+1-nn}$. Ex qua integrata provenit æquatio

(18) $\frac{P}{c-y}=\frac{\overline{z+1+n}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{z+1-n}^{\frac{1}{2n}}}$.

Æquationes duæ decima septima, & decima octava tanquam universales accipi possunt, ac debent; nam si valeret æquatio $b=na$, terminus constans additus quantitati x in æquatione decima septima se se destrueret; atque adeo convenirent cum æquatione decima, ac undecima, quæ pro ea hypothesi inventæ sunt.

Danda nunc est opera, ut ex æquationibus decimaseptima, & decima octava nova æquatio eruatur inter coordinatas x, y.

Ita-

Itaque ex decimaoctava æquatione oritur $\frac{P^{2n}}{\overline{c-y}^{2n}} = \frac{z+1+n}{z+1-n}$, sive $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} = \frac{z+1-n}{z+1+n}$, ex qua duæ

(19) $\frac{\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}} = \frac{\overline{z+1-n}^{\frac{1+n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}$,

(20) $\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{z+1+n} = z+1-n$.

Ex decimas ima provenit $x + \frac{b-na}{nn-1} = \frac{\overline{Q.z+1-n}^{\frac{1+n}{2n}}}{\overline{z+1+n}^{\frac{1+n}{2n}}}$. $\overline{z+1-n}^{-1}$, in quam introductus valor datus in decimanona præbet $x \frac{+b-na}{nn-1} = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}} . \overline{z+1-n}^{-1}$: Ergo

$z+1-n = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}}$, & $z+1+n = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} + 2n$.

Qui valores introducti in æquationem vigesimam dabunt

$\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{\frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} + 2n} = \frac{Q.\overline{c-y}^{1+n}}{P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}}$, sive

$\frac{\overline{c-y}^{2n}}{P^{2n}} . \overline{Q.\overline{c-y}^{1+n} + 2n.P^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}}} = Q.\overline{c-y}^{1+n}$,

& dividendo per $\overline{c-y}^{2n}$, & multiplicando per P^{2n}

$Q.\overline{c-y}^{1+n} + 2nP^{1+n}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}} = Q.P^{2n}.\overline{c-y}^{1-n}$,

denique transferendo $Q.\overline{c-y}^{1+n}$, & dividendo per Q erit

(21) $\frac{2n.P^{1+n}}{Q}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}} = P^{2n}.\overline{c-y}^{1-n} - (\overline{c-y}^{1+n}$,

quæ æquatio exhibens quæsitarum curvarum naturam algebraica est, ubi numerus n est rationalis. Excipe tamen hypothesim, in qua $n=1$, ad quam, ut cuique perspicuum est, hæc formula ne-

qua-

quaquam se se extendit; sed casus iste solutus est initio hujus opusculi.

Nihil jam reliquum est, nisi ut constantium P^{2n}, & $\frac{P^{1+n}}{Q}$ valores determinentur. Quoniam evanescente s, tam x quam y debet evanescere, fiet pro hac hypothesi in æquatione duodecima $t = \frac{b-na}{nn-1}$: Ergo ex æquatione decima tertia $\frac{n^2b-na}{nn-1} - \frac{b+na}{nn-1} = z.\frac{b-na}{nn-1}$, sive $\frac{n^2b-b}{b-na} = z$, qui valor facto $y=o$ introductus in decimam octavam exhibet

$$\frac{P}{c} = \frac{\overline{n^2b-b+b-na+nb-n^2a}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{n^2b-b+b-na-nb+n^2a}^{\frac{1}{2n}}} = \frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2n}}.\overline{b-a}^{\frac{1}{2n}}}{\overline{n-1}^{\frac{1}{2n}}.\overline{b+a}^{\frac{1}{2n}}}.\ \text{Igitur}$$

$$(22)\ P^{2n} = \frac{c^{2n}.\overline{n+1}.\overline{b-a}}{\overline{n-1}.\overline{b+a}}.$$

Si hic valor in vigesimam primam introducatur, factis x, $y = o$, fiet $\frac{2n.P^{n+1}}{Q}.\frac{b-na}{nn-1} = \frac{c^{1+n}.\overline{n+1}.\overline{b-a}}{\overline{n-1}.\overline{b+a}} - c^{1+n}$: Ergo

$$\frac{2n.P^{n+1}}{Q}.\frac{b-na}{nn-1} = c^{1+n}.\frac{\overline{n+1}.\overline{b-a} - (\overline{n-1}.\overline{b+a}}{\overline{n-1}.\overline{b+a}}:\ \text{Igitur}$$

$$\frac{2n.P^{n+1}}{Q}.\frac{b-na}{nn-1} = c^{1+n}.\frac{\overline{2b-2na}}{\overline{n-1}.\overline{b+a}}:\ \text{Igitur}$$

$$(23)\ \frac{2nP^{n+1}}{Q} = \frac{\overline{2n+2}.c^{1+n}}{b+a}.$$

Valores constantium inventi in vigesima secunda, & vigesima tertia æquatione in vigesimam primam introducantur, ut habeatur legitima æquatio earum curvarum, quas quærimus

$$\frac{c^{1+n}.\overline{2n+2}}{b+a}.\overline{x+\frac{b-na}{nn-1}} = \frac{c^{2n}.\overline{n+1}.\overline{c-a}}{\overline{n-1}.\overline{b+a}}.\overline{c-y}^{1-n} - (\overline{c-y}^{1+n}$$

sive

$$(24)\ x+\frac{b-na}{nn-1} = \frac{c^{n-1}.\overline{b-a}}{2n-2}.\overline{c-y}^{1-n} - \frac{c^{-1-n}.\overline{b+a}}{2n+2}.\overline{c-y}^{1+n}.$$

Quæ

Quæ a vigesima quarta æquatione curvæ exprimuntur partim algebraicæ sunt, partim transcendentes, & exponentiales: omnes tamen non difficilis constructionis. Ego vero ut tandem finem huic opusculo faciam, eas dumtaxat construendas assumam, quæ gignuntur, quum n numerus integer est vel par, vel impar. Quam ob rem ita æquationem disponendam judico

$$\frac{na - b}{nn - 1} - x = \frac{\overline{a - b} \,.\, \overline{c}^{\,n-1}}{\overline{2n - 2} \,.\, \overline{c - y}^{\,n-1}} + \frac{\overline{b + a} \,.\, \overline{c - y}^{\,n+1}}{\overline{2n + 2} \,.\, c^{n+1}}.$$

Quæ ut simplicior fiat, pono $\frac{na - b}{nn - 1} - x = z$, & $e - y = u$, ex quibus substitutionibus oritur æquatio multo simplicior

$$(25) \quad z = \frac{\overline{a - b} \,.\, c^{n-1}}{\overline{2n - 2} \,.\, u^{n-1}} + \frac{\overline{b + a} \,.\, u^{n+1}}{\overline{2n + 2} \,.\, c^{n+1}}.$$

Æquatione hoc pacto disposita instituo duas novas æquationes

$$(26) \quad \frac{\overline{a - b} \,.\, c^{n-1}}{\overline{2n - 2} \,.\, u^{n-1}} = r \qquad (27) \quad \frac{\overline{a + b} \,.\, u^{n+1}}{\overline{2n + 2} \,.\, c^{n+1}} = t,$$

ex quibus resultat æquatio

$$(28) \quad z = r + t.$$

Ex præparatione hujusmodi oritur constructio. Assumpta PQ $= c$ erigantur duæ normales (*Fig.* 3, 4) QX, QY, quarum prima $= \frac{a - b}{2n - 2}$, altera $= \frac{a + b}{2n + 2}$. Tum rectæ PQ erecta perpendiculari indefinita PN inter assymptotos PN, PQ describatur hyperbola ordinis $\overline{n - 1}^{\,esimi}$ transiens per punctum X; & vertice P describatur parabola ordinis $\overline{n + 1}^{\,esimi}$ transiens per punctum Y: tum sit PV $= u$, erit VR $= r$, VS $= t$: Ergo RS $= t + r$ $= z$ ex æquatione vigesima octava. Igitur si describatur curva, cujus altera ex coordinatis sit PV, altera RS, hæc illa ipsa erit, quam quærimus.

Sed antequam progredimur, oportet determinare positionem alterius rami cum hyperbolæ, tum parabolæ. Si numerus n est impar, tum $n + 1$, tum $n - 1$ erit par. Quare ejus rami positio ea erit, quam indicat (*Fig.* 3). Verum si n est numerus par, quoniam tam $n + 1$, quam $n - 1$ impar est, ejus rami positio tum

tum in hyperbola, tum in parabola in (*Fig.* 4) determinatur. Quapropter in primo casu vel PV $= u$ positivæ sint, vel negativæ, RS $= z$ semper positivæ existunt; sed in altero casu si PV $= u$ positivæ sunt, RS $= z$ item erunt positivæ, at si illæ negativæ erunt, istæ quoque erunt negativæ.

Hisce constitutis difficile minime est videre in casu n imparis oriri curvam MAGF, cujus progressus exponitur a (*Fig.* 1); at in casu n paris curvam gigni, cujus progressus ob oculos ponitur a (*Fig.* 5). Recta $Zz = Qq = 2QP$, & $ZA = XY$, sicuti $za = xy$. Ramus autem $fgam$ similis est, & æqualis FGAM, & eodem modo positus respectu lineæ Zz, sed in primo casu ad easdem partes, in secundo ad oppositas jacet. Hæc autem sufficiant pro solutione hujusce problematis; quæ enim reliquæ sunt constructiones, eadem prorsus methodo peraguntur.

OPU-

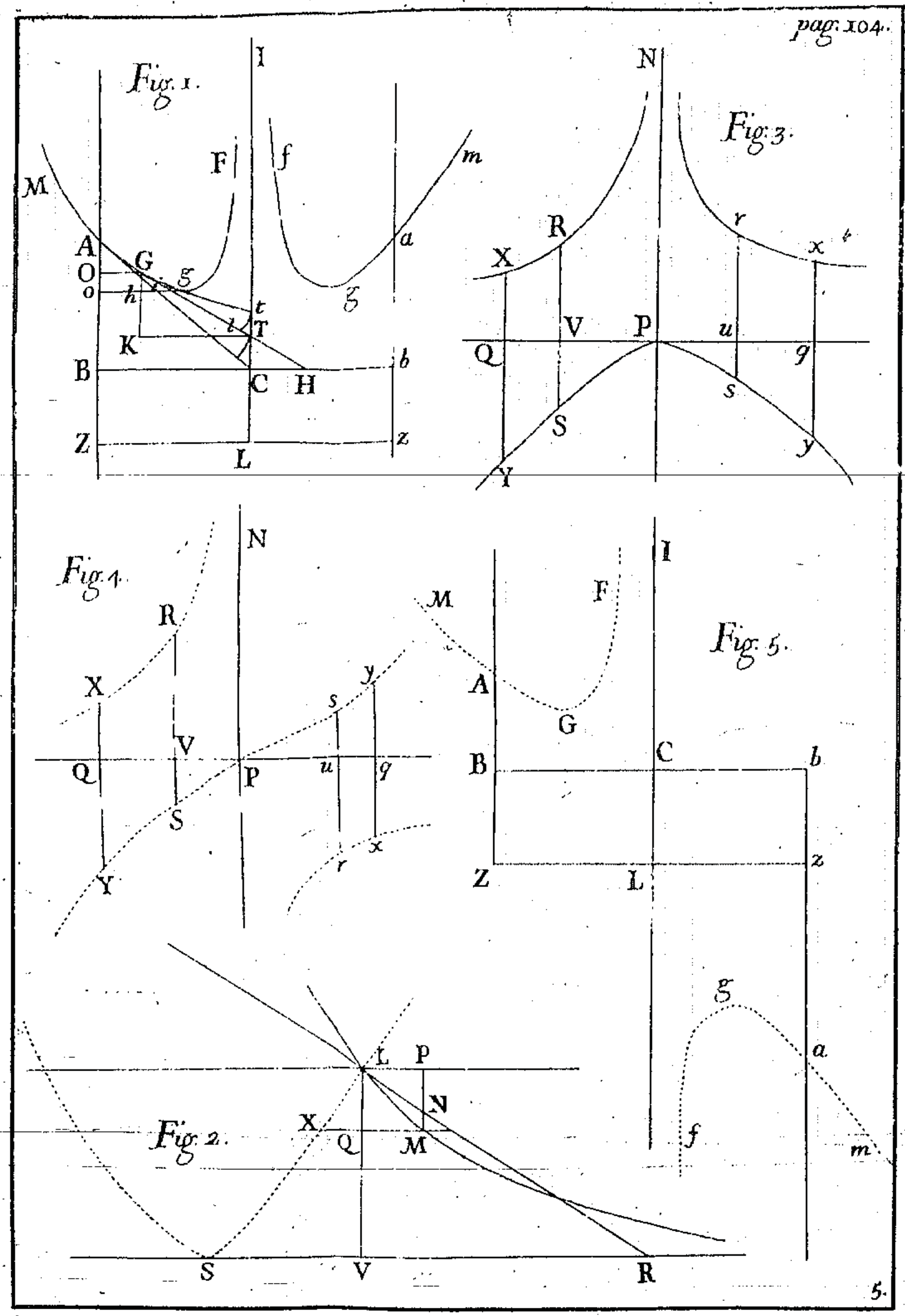


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

OPUSCULUM SEXTUM.

Epistolæ tres, in quibus æquationes aliquæ differentiales evolvuntur per series.

EPISTOLA PRIMA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Universitate P. Philosophiæ P.

S. P. D.

OCcurrunt sæpenumero, ut nosti vir doctissime, ejusmodi formulæ differentiales, quæ tametsi tanquam difficillimæ negliguntur ab analystis, tamen si opportuna methodo tractentur, non ineleganter evolvuntur. Hujus generis est formula

(I) $du = \frac{adx}{z}$, in qua z datur per x in æquatione

(II) ec. $S\frac{dx}{z}\,S\frac{dx}{z}\,S\frac{dx}{z}\,S\frac{xdx}{z} = z$. Etenim methodus mihi cognita est, qua invenitur x per seriem ex sola u, & constantibus coalescentem. Hanc autem methodum ad te scribere constitui, ut quanti facienda sit, ex tuo judicio cognoscam.

In formula II pro $\frac{dx}{z}$ substitue $\frac{du}{a}$; æquales enim esse hasce quantitates, formula I docet. Oritur autem æquatio

(III) ec. $S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{xdu}{a} = z$, atqui ex formula I $z = \frac{adx}{du}$: Ergo ec. $S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{xdu}{a} = \frac{adx}{du}$: Igitur multiplicando per $\frac{du}{a}$, & integrando fiet

(IV) ec. $S\frac{du}{a}S\frac{du}{a}S\frac{du}{a}S\frac{du}{a}S\frac{x\,du}{a}=x$, in qua formula numerus ſignorum S unitate ſuperat numerum ſignorum eorumdem, quæ inſunt in formula II.

Ex formula IV facillime invenietur ope ſerierum x data per u. Fiat enim

(V) $x=A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4+Fu^5$ ec.

Supponamus, in formula II unicum adeſſe ſignum ſummatorium, duplex in IV, ut fiat

$$S\frac{du}{a}S\frac{x\,du}{a}=A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4+Fu^5 \text{ ec.}$$

Differentietur æquatio, & multiplicetur per $\frac{a}{du}$, ut ſit

$$S\frac{x\,du}{a}=aB+2aCu+3aDu^2+4aEu^3+5aFu^4+6aGu^5 \text{ ec.}$$

Facta iterum differentiatione, eademque multiplicatione, orietur

$$x=2a^2C+2.3a^2Du+3.4a^2Eu^2+4.5a^2Fu^3+5.6a^2Gu^4+6.7a^2Hu^5 \text{ ec.}$$

quæ ſeries debet eſſe identica cum ſerie præſuppoſita æquationis V.

Si duarum ſerierum termini comparentur, invenietur

$$C=\frac{A}{2a^2}\qquad E=\frac{A}{2.3.4\,a^4}\qquad G=\frac{A}{2.3.4.5\,6.a^6}\quad\text{ec.}$$

$$D=\frac{B}{2.3.a^2}\qquad F=\frac{B}{2.3.4.5.a^4}\qquad H=\frac{B}{2.3.4.5.6.7.a^6}\quad\text{ec.},$$

ex quibus determinationibus conſtat, duas quantitates A, B indeterminatas manere, quæ in ſingulis caſibus erunt determinandæ. Quapropter habebimus

$$x=\begin{matrix}A+\frac{Au^2}{2a^2}+\frac{Au^4}{2.3.4\,a^4}+\frac{Au^6}{2.3.4.5.6.a^6}\text{ ec.}\\ Bu+\frac{Bu^3}{2.3.a^2}+\frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4}+\frac{Bu^7}{2.3.4.5.6.7.a^6}\text{ ec.}\end{matrix}$$

Supponamus deinde in æquatione II duo ineſſe ſigna ſummatoria, tria in IV. Factis iiſdem operationibus, quibus in caſu ſuperiore uſi ſumus, perveniemus ad æquationem

$$S\frac{x\,du}{a}=2a^2C+2.3a^2Du+3.4Eu^2+4.5Fu^3+5.6Gu^4 \text{ ec.}$$

Ergo differentiando, & dividendo per $\frac{du}{a}$ orietur

$x=$

$x = 2.3.a^3 D + 2.3.4.a^3 Eu + 3.4.5.a^3 Fu^2 + 4.5.6.a^3 Gu^3 + 5.6.7.a^3 Hu^4$ ec. quæ ſeries identica ſit oportet cum ſerie V.

Quapropter ſi comparentur termini, obtinebuntur ſequentes determinationes

$$D = \frac{A}{1.2.3.a^3} \quad G = \frac{A}{1.2.3.4.5.6.a^6} \quad K = \frac{A}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.a^9} \text{ ec.}$$

$$E = \frac{B}{2.3.4.a^3} \quad H = \frac{B}{2.3.4.5.6.7.a^6} \quad L = \frac{B}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.a^9} \text{ ec.}$$

$$F = \frac{C}{3.4.5.a^3} \quad I = \frac{C}{3.4.5.6.7.8.a^6} \quad M = \frac{C}{3.4.5.6.7.8.9.10.11.a^9} \text{ ec.,}$$

ex quibus determinationibus conſtat, tres quantitates A, B, C indeterminatas manere. Itaque erit

$$\begin{aligned} & A + \frac{Au^3}{1.2.3.a^3} + \frac{Au^6}{1.2.\ldots 5.6.a^6} + \frac{Au^9}{1.2.\ldots 8.9.a^9} \text{ ec.} \\ x = {} & Bu + \frac{Bu^4}{2.3.4.a^3} + \frac{Bu^7}{2.3.\ldots 6.7.a^6} + \frac{Bu^{10}}{2.3.\ldots 9.10.a^9} \text{ ec.} \\ & Cu^2 + \frac{Cu^5}{3.4.5.a^3} + \frac{Cu^8}{3.4.\ldots 7.8.a^6} + \frac{Cu^{11}}{3.4.\ldots 10.11.a^9} \text{ ec.} \end{aligned}$$

Si tria adſint ſigna ſummatoria in æquatione II, quatuor in IV, eadem inſtituta analyſi inveniemus.

$S\frac{x\,du}{a} = 2.3.a^3 D + 2.3.4.a^3 Eu + 3.4.5.a^3 Fu^2 + 4.5.6.a^3 Gu^3$ ec.

Hæc differentietur, & multiplicetur per $\frac{a}{du}$, ut fiat

$x = 2.3.4.a^4 E + 2.3.4.5.a^4 Fu + 3.4.5.6.a^4 Gu^2 + 4.5.6.7.a^4 Hu^3$ ec.,

cujus termini comparati cum terminis ſeriei V exhibent

$$E = \frac{A}{1.2.3.4.a^4} \quad I = \frac{A}{1.2.3.\ldots 7.8.a^8} \quad N = \frac{A}{1.2.3.\ldots 11.12.a^{12}} \text{ ec.}$$

$$F = \frac{B}{2.3.4.5.a^4} \quad K = \frac{B}{2.3.4.\ldots 8.9.a^8} \quad O = \frac{B}{2.3.4.\ldots 12.13.a^{12}} \text{ ec.}$$

$$G = \frac{C}{3.4.5.6.a^4} \quad L = \frac{C}{3.4.5.\ldots 9.10.a^8} \quad P = \frac{C}{3.4.5.\ldots 13.14.a^{12}} \text{ ec.}$$

 H =

$$H = \frac{D}{4.5.6.7.a^4} \quad M = \frac{D}{4.5.6\ldots 10.11.a^8} \quad Q = \frac{D}{4.5.6\ldots 14.15.a^{12}} \text{ ec.,}$$

in quo casu quatuor quantitates A, B, C, D adhuc determinandæ supersunt. Quapropter habebimus

$$x = \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{Au^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{Au^8}{1.2.3\ldots 7.8.a^8} + \frac{Au^{12}}{1.2.3\ldots 11.12.a^{12}} \text{ ec.} \\ Bu + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} + \frac{Bu^9}{2.3.4\ldots 8.9.a^8} + \frac{Bu^{13}}{2.3.4\ldots 12.13.a^{12}} \text{ ec.} \\ Cu^2 + \frac{Cu^6}{3.4.5.6.a^4} + \frac{Cu^{10}}{3.4.5\ldots 9.10.a^8} + \frac{Cu^{14}}{3.4.5\ldots 13.14.a^{12}} \text{ ec.} \\ Du^3 + \frac{Du^7}{4.5.6.7.a^4} + \frac{Du^{11}}{4.5.6\ldots 10.11.a^8} + \frac{Du^{15}}{4.5.6\ldots 14.15.a^{12}} \text{ ec.} \end{array} \right.$$

Methodus jam satis aperte docet, quo pacto coefficientes seriei V suppositæ in reliquis casibus determinandi veniant. Ita si quatuor signa summatoria in formula II, quinque in IV reperiantur, quinque quantitates indeterminatæ remanebunt, nimirum A, B, C, D, E, ex quibus aliæ omnes determinationem accipient hac ratione.

$$x = \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{Au^5}{1.2.3.4.5.a^5} + \frac{Au^{10}}{1.2.3\ldots 9.10.a^{10}} + \frac{Au^{15}}{1.2.3\ldots 14.15.a^{15}} \text{ ec.} \\ Bu + \frac{Bu^6}{2.3.4.5.6.a^5} + \frac{Bu^{11}}{2.3.4\ldots 10.11.a^{10}} + \frac{Bu^{16}}{2.3.4\ldots 15.16.a^{15}} \text{ ec.} \\ Cu^2 + \frac{Cu^7}{3.4.5.6.7.a^5} + \frac{Cu^{12}}{3.4.5\ldots 11.12.a^{10}} + \frac{Cu^{17}}{3.4.5\ldots 16.17.a^{15}} \text{ ec.} \\ Du^3 + \frac{Du^8}{4.5.6.7.8.a^5} + \frac{Du^{13}}{4.5.6\ldots 12.13.a^{10}} + \frac{Du^{18}}{4.5.6\ldots 17.18.a^{15}} \text{ ec.} \\ Eu^4 + \frac{Eu^9}{5.6.7.8.9.a^5} + \frac{Eu^{14}}{5.6.7\ldots 13.14.a^{10}} + \frac{Eu^{19}}{5.6.7\ldots 18.19.a^{15}} \text{ ec.} \end{array} \right.$$

Ex qua progressione tempore brevi, tenuique labore in casibus magis compositis coefficientes seriei V determinabis.

Idem

Idem dicas velim de æquatione

(VI) $du = \frac{-a\,dx}{z}$, si u data sit per x in formula

(VII) ec. $S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-dx}{z}\,S\frac{-x\,dx}{z} = z$. Namque eandem usurpans methodum invenies

(VIII) ec. $S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{du}{a}\,S\frac{x\,du}{a} = -x$: ex qua præsupposita iterum serie V iidem prorsus coefficientes exurgent, sed cum aliqua varietate signorum. Namque coefficientes, qui indeterminati remanent, & qui in nostris seriebus constituunt primam columnam verticalem, si signo $+$ afficiantur, qui formant secundam columnam verticalem, afficientur signo $-$, qui tertiam, signo $+$, atque ita deinceps alternantibus semper signis verticalium columnarum ita, ut illis, quæ tenent sedes impares, præfigendum sit signum $+$, illæ vero, quæ occupant sedes pares, signo $-$ sint afficiendæ.

Ex his, quæ in hac epistola dilucide explicata sunt, proclive est cognitu, æquationis II utramque indeterminatam x, z datam reperiri per series ex tertia indeterminata u coalescentes. Etenim posita $du = \frac{a\,dx}{z}$ inventa est supra x æqualis seriei expresse per u. Sit porro $x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$ ec.,
cujus seriei coefficientes in singulis casibus determinavimus. Fiat differentiatio, & erit

$dx = B\,du + 2Cu\,du + 3Du^2\,du + 4Eu^3\,du$ ec. Ergo

$\frac{a\,dx}{du} = z = aB + 2aCu + 3aDu^2 + 4aEu^3$ ec.,

per quam seriem z definita est.

Quæ quum ita sint, si unicum dumtaxat signum summatorium habeatur in æquatione II, fiet

$$z = \begin{array}{lllll} & +\frac{Au}{a} & +\frac{Au^3}{2.3.a^3} & +\frac{Au^5}{2.3.4.5.a^5} & \text{ec.} \\ aB & +\frac{Bu^2}{2a} & +\frac{Bu^4}{2.3.4.a^3} & +\frac{Bu^6}{2.3.4.5.6.a^5} & \text{ec.} \end{array}$$

Si

Si in eadem æquatione duo inexistant signa summatoria, habebimus

$$\begin{aligned} & + \frac{A u^2}{1.2.a^2} + \frac{A u^5}{1.2.3.4.5.a^5} + \frac{A u^8}{1.2\ldots7.8.a^8} \text{ ec.} \\ z = aB \quad & + \frac{B u^3}{2.3.a^2} + \frac{B u^6}{2.3.4.5.6.a^5} + \frac{B u^9}{2.3\ldots8.9.a^8} \text{ ec.} \\ 2aCu \; & + \frac{C u^4}{3.4.a^2} + \frac{C u^7}{3.4.5.6.7.a^5} + \frac{C u^{10}}{3.4\ldots9.10.a^8} \text{ ec.} \end{aligned}$$

In casibus autem magis compositis series nanciscemur secundum eam, quæ conspicua est, progressionem.

Idem dicendum est de æquatione VII, in qua supposita x eidem seriei æquali invenietur

$z = -aB - 2aCu - 3aDu^2 - 4aEu^3$ ec. Per quam facile cognosces in singulis casibus easdem prorsus series oriri cum aliqua tamen varietate signorum. Nam in terminis, qui constituunt primam, tertiam, quintam, & alias impares columnas verticales, habebitur signum $-$, in illis, qui formant secundam, quartam, & alias columnas pares, relinquendum est signum $+$.

Posset theorema alia ratione enunciari; nempe data formula $du = \pm \frac{a\,dx}{z}$ inveniri poterit x per seriem compositam ex solis u, quum z data fuerit per x in sequenti æquatione

$$\frac{\pm x\,dx}{\text{ec. } D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z\,dz}{dx}} = z.$$

Nam hæc ad sequentem reducitur

$x = \pm \frac{z}{dx}$. ec. $D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z}{dx} D \pm \frac{z\,dz}{dx}$, in qua si pro $\pm \frac{z}{dx}$ substituatur $\frac{a}{du}$, & pro dz substituatur $D \pm \frac{a\,dx}{du}$, fiet

$$x = \frac{a}{du}. \text{ ec. } D \frac{a}{du} D \frac{a}{du} D \frac{a}{du} D \frac{a}{du} D \pm \frac{a\,dx}{du}.$$

Hæc æquatio si tractetur methodo illa, qua antea usi fuimus, dabit variabilem x æqualem seriei infinitæ compositæ ex sola u. Nimirum supponenda est x æqualis seriei, cujus coefficientes sint inde-

indeterminati: tum instituenda est æquatio inter hanc seriem, & formulam $= x$ modo inventam: demum alternatim multiplicanda est series per $\frac{du}{a}$, & integranda, donec invenies aliam seriem $= x$, quæ collata cum superiore coefficientes determinabit.

Series quæ hac ratione enascentur, eædem prorsus invenientur cum illis, quas ex prima methodo descripsimus. Neque hoc mirum videri debet, namque utraque methodus easdem formulas adhibet, sed diverso modo dispositas. Æquationem secundæ methodi, in qua z datur per x, ita distribue

$$\pm \frac{x\,dx}{z} = \text{ec. } \overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,D \pm \frac{z\,dz}{dx}}}}\,.$$

Quam æquationem integra, & multiplica per $\pm \frac{dx}{z}$, ut habeas

$$\pm \frac{dx}{z}\,S \pm \frac{x\,dx}{z} = \text{ec. } \overline{D \pm \frac{z}{dx}\,\overline{D \pm \frac{z}{dx}\,D \pm \frac{z\,dz}{dx}}}\,.$$

Has autem operationes toties perage, quoties opus fuerit, & invenies

$$\text{ec. } \overline{S \pm \frac{dx}{z}\,\overline{S \pm \frac{dx}{z}\,\overline{S \pm \frac{dx}{z}\,\overline{S \pm \frac{dx}{z}\,S \pm \frac{x\,dx}{z}}}}} = z,$$

quæ æquatio illa ipsa est, in qua datam supposuimus x per z in prima methodo.

De hoc theoremate, postquam illud examinaveris diligentius, quodnam sit judicium tuum, ut mihi scribas, rogo. Fac valeas.

Patavium ad Cl. Josephum Suzzium
Bononiæ 3 kal. Octobris 1752.

EPI-

EPISTOLA ALTERA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Universitate P. Philosophiæ P.

S. P. D.

Quamquam methodus æquationum evolvendarum plurimi semper mihi facienda visa est, quia usuvenire potest, ut problema aliquod non cognita methodo insolutum relinquatur: tamen a plerisque contemnitur, nisi insignis aliquis usus protinus pateſiat. Itaque ne in horum hominum reprehensionem incurram, ejus theorematis, de quo tibi scripsi, usum in casu maxime simplici aperiam.

Quamobrem in formula II, & VII, suppono unicum inesse signum summatorium ita, ut utraque hanc formam accipiat $S \pm \frac{xdx}{z} = z$: signum superius pertinet ad æquationem II, inferius ad VII: Igitur facta differentiatione $\pm \frac{xdx}{z} = dz$, sive $\pm\, xdx = zdz$, & integrando primum sine additione constantis, & eliminando communem divisorem z, erit $\pm\, x^2 = z^2$, in qua ne incurramus in imaginaria, assumendum est signum superius. Extracta itaque radice fiet $x = z$. Quare formula I (assumendum est enim signum superius) erit $du = \frac{zdx}{x}$: quæ æquatio pertinet ad logarithmicam ita, ut x existentibus numeris, u sint eorum logarithmi.

In prioribus litteris inveni

$$x = \begin{cases} A + \dfrac{Au^2}{2.a^2} + \dfrac{Au^4}{2.3.4.a^4} \text{ ec.} \\[2ex] Bu + \dfrac{Bu^3}{2.3.a^2} + \dfrac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} \text{ ec.} \end{cases}$$

Ut duorum coefficientium A, B determinationem faciamus, advertentendum est primo, facta $u = o$, arbitrarium esse valorem x, seu posse pro libito eligi quemcumque numerum, cujus logarithmus $u = o$. Sit hic numerus $= f$: Ergo posita $u = o$, debebit $x = f$: sed posita $u = o$, habetur $x = A$: Igitur $A = f$. Determinata quantitate A, ut B etiam determinetur, fac deinde advertas $\frac{dx}{du} = \frac{x}{a}$: Ergo posita $u = o$, & $x = f$ erit $\frac{dx}{du} = \frac{f}{a}$. Jam vero si æquatio inventa differentietur, & dividatur per du, & fiat $u = o$, invenietur $\frac{dx}{du} = B$: Ergo $B = \frac{f}{a}$.

Hisce determinationibus effectis habebimus

$$x = f + \frac{fu}{a} + \frac{fu^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{2.3.a^3} + \frac{fu^4}{2.3.4.a^4} \text{ ec.}$$

Si per Nu exprimatur numerus, cujus logarithmus sit $= u$, erit $Nu = x$: Igitur

$$Nu = f + \frac{fu}{a} + \frac{fu^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{2.3.a^3} + \frac{fu^4}{2.3.4.a^4} \text{ ec.},$$ per quam dato logarithmo invenietur numerus. In extractione radicis æquationis $xx = zz$ posset accipi signum — hoc modo $-x = z$: quo in casu prodiisset $-du = \frac{adx}{x}$: quare u fieret negativa, & termini impares nostræ seriei signo — afficerentur.

Quod si fieret $f = a$, tum logarithmi hyperbolici sumendi essent. Sed quum de logarithmis, & de multiplici logarithmorum systemate opus. 3 fusius loquutus fuerim, hæc in præsentia adnotasse sufficiat.

Quare ad alia progredientes æquationem inventam $\pm xdx = zdz$ integremus cum additione constantis, ut habeamus $b \pm \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2}$, sive $2b \pm x^2 = z^2$. Si valeat signum superius, b esse potest cum negativa tum positiva: propterea si fiat $2b = \pm aa$, erit $xx \pm aa = zz$, sive $\sqrt{xx \pm aa} = z$, ex qua oriuntur duæ formulæ $du = \frac{adx}{\sqrt{xx + aa}}$, $du = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$. In utraque, ut constat ex prioribus litteris, valet.

P $\qquad$ $x =$

$$x = \frac{A + \frac{Au^2}{2.a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} + \frac{Au^6}{2.3.4.5.6.a^6} \text{ ec.}}{Bu + \frac{Bu^3}{2.3.a^2} + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} + \frac{Bu^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}}$$

Si inferius signum accipiatur, ut imaginaria vitentur, b tanquam positiva accipienda erit: quare posita $2b = aa$ fiet $aa - xx = zz$, & $\sqrt{aa - xx} = z$. Æquatio itaque orietur $du = \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, pro qua series inventa hanc formam accipiet

$$x = \frac{A - \frac{Au^2}{2a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} - \frac{Au^6}{2.3.4.5.6.a^6} \text{ ec.}}{Bu - \frac{Bu^3}{2.3.a^2} + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} - \frac{Bu^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}}$$

Ut in his seriebus quantitates A, B determinationem accipiant, advertamus $\frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$ esse elementum arcus circularis expressum per sinum, aut cosinum, sive quod idem est, u esse arcum circularem, cujus sinus, aut cosinus $= x$: potest enim $\sqrt{aa - xx}$ accipi cum positive, tum negative. Sed ut analogia cum hyperbola clarior fiat, ita propositionem exprimamus. In æquatione $du = \frac{-adx}{\sqrt{aa - xx}}$, u exprimit duplum sectorem circularem ACF (*Fig.* 1) divisum per radium CA $= a$, existente aut GF, aut CG $= x$, Similiter in æquatione $du = \frac{adx}{\sqrt{xx \mp aa}}$, u designat (*Fig.* 2) duplum sectorem hyperbolicum ACF divisum per semiaxem CA $= a$, existente GF $= x$, si valeat signum superius, CG $= x$, si valeat inferius. Quando autem in circulo GF (*Fig.* 1) dicitur sinus, CG cosinus quantitatis u: ita per analogiam in hyperbola GF (*Fig.* 2) vocari potest sinus hyperbolicus, CG cosinus hyperbolicus quantitatis u, seu dupli sectoris ACF divisi per CA. Ad designandos autem sinus, & cosinus circulares quantitatis u utar his signis S$c.u$, C$c.u$. Signa autem S$b.u$, C$b.u$ significabunt sinus, & cosinus hyperbolicos.

His suppositis si x significet cosinum tam in circulo, quam in in hyperbola, posita $u = o$, est $x = a$, & $\frac{dx}{du} = o$. Contra si x denotet sinum, posita $u = o$, est $x = o$, & $\frac{dx}{du} = 1$. His cognitis apparet

pro cosinu $A = a$, $B = o$,

pro sinu $A = o$, $B = 1$. Hæ determinationes hujusmodi series suppeditant

$$Cb.u = a + \frac{u^2}{2a} + \frac{u^4}{2.3.4\,a^3} + \frac{u^6}{2.3.4.5.6.a^5} \text{ ec.}$$

$$Sb.u = u + \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u^5}{2.3.4.5.a^4} + \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}$$

$$Cc.u = a - \frac{u^2}{2.a} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6.a^5} \text{ ec.}$$

$$Sc.u = u - \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u}{2.3.4.5.a^4} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7.a^6} \text{ ec.}$$

Cosinui hyperbolico addatur, ac detrahatur sinus hyperbolicus, & fiet

$$Cb.u \pm Sb.u = a \pm u + \frac{u^2}{2a} \pm \frac{u^3}{2.3.a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} \pm \frac{u^5}{2.3.4.5.a^4} \text{ ec.},$$

quæ series, quum indicet numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= u$, constat $Cb.u \pm Sb.u$ æquare numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= u$.

Quod si multiplicata expressione sinus circularis per $\sqrt{-1}$ eædem fiant operationes, proveniet $Cc.u \pm \sqrt{-1}.Sc.u$

$$= a \pm u\sqrt{-1} - \frac{u^2}{2a} \mp \frac{u^3\sqrt{-1}}{2.3.a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^3} + \frac{u^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5.a^4} \text{ ec.}$$

quæ series oritur, quotiescumque in superiore pro u substituatur $u\sqrt{-1}$. Quapropter $Cc.u \pm \sqrt{-1}.Sc.u$ æquat numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est quantitas imaginaria, nempe $u\sqrt{-1}$.

Si posito i æquali numero infinito, binomium $\overline{1 \pm \frac{u}{ia}}^{\,i}$ methodo notissima evolvatur in seriem, fiet

$$1 \pm \frac{iu}{ia} + \frac{i.\overline{i-1}.u^2}{2\,i^2\,a^2} \pm \frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.u^3}{2.3.i^3\,a^3} + \frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.\overline{i-3}.u^4}{2.3.4.i^4\,a^4} \pm \text{ec.}$$

atqui quum i infinitus sit numerus, erit $i-1$, $i-2$, $i-3$ ec. semper $= i$: Ergo facta substitutione, & opportuna divisione habebimus

$$\left(1 \pm \frac{u}{ia}\right)^i = 1 \pm \frac{u}{a} + \frac{u^2}{2.a^2} \pm \frac{u^3}{2.3.a^3} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \frac{u^5}{2.3.4.5.a^5} \text{ ec.}$$

atqui hæc series $= \frac{Cb.u \pm Sb.u}{a}$ ex superioribus: Ergo $\frac{Cb.u \pm Sb.u}{a}$ $= \left(1 \pm \frac{u}{ia}\right)^i$. Quapropter ex combinatione signorum inveniemus

$$\frac{2\,Cb.u}{a} = \left(1 + \frac{u}{ia}\right)^i + \left(1 - \frac{u}{ia}\right)^i$$

$$\frac{2\,Sb.u}{a} = \left(1 + \frac{u}{ia}\right)^i - \left[1 - \frac{u}{ia}\right]^i.$$

Similì ratione si evolvamus in seriem binomium $\left(1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right)^i$ inveniemus, illud æquale esse seriei

$$1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{a} - \frac{u^2}{2\,a^2} \mp \frac{u^3\sqrt{-1}}{2.3.a^3} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \frac{u^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5.a^5} \text{ ec.}:$$

quæ series quum æquet $\frac{Cc.u \pm \sqrt{-1}\,Sc.u}{a}$, orietur $\frac{Cc.u \pm \sqrt{-1}\,Sc.u}{a}$ $= \left(1 \pm \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right)^i$; ex qua ob ambigua signa inveniemus

$$2\,Cc.u = \left(1 + \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right)^i + \left(1 - \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right)^i$$

$$2\sqrt{-1}.Sc.u = \left(1 + \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right)^i - \left[1 - \frac{u\sqrt{-1}}{ia}\right]^i, \text{ sive}$$

2 Sc.

$$2\,Se.\,u = \frac{\overline{1+\frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i} - [\overline{1-\frac{u\sqrt{-1}}{ia}}^{\,i}}{\sqrt{-1}}.$$ Quæ expressiones tametsi omnes involvant quantitatem infinitam i, & illæ, quæ ad circulum pertinent etiam quantitates imaginarias; tamen quum inventus fuerit earum valor realis, maximam in calculo habent utilitatem.

Hæc dicta sufficiant ad ostendendum usum non contemnendum theorematis in superioribus meis litteris demonstrati. Si quid reprehendendum invenias, vir doctissime, rogo te etiam, atque etiam, ut me admoneas. Vale.

Patavium ad Cl. Josephum Suzzium
Bononiæ Postridie Idus Nov. 1752.

EPISTOLA TERTIA

VINCENTIUS RICCATUS

JOSEPHO SUZZIO

In Patavina Universitate P. Philosophiæ P.

S. P. D.

Admonui in primis, quas ad te misi litteras, æquationis ec. $S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{xdx}{z}}} = z$ indeterminatam utramque x, z inveniri per seriem, quæ ex tertia quantitate u componatur: quæ animadversio plurimum conducit ad inveniendos respondentes valores x, z. Quoniam vero si sequamur methodum productam ab Eulero tom 6 Ac. Petropolitanæ, eadem formula in aliam transformari potest, eandem utilitatem in formulas transformatas licet derivare.

Fac igitur $x = c^{Sydt}$, $z = c^{Sydt}m$, in quibus c est quantitas, cujus logarithmus unitatem æquat, m autem est quantitas indeterminata, quæ in analyseos progressu determinanda erit per t, aut y. Facta primæ formulæ differentiatione invenies $dx = c^{Sydt}ydt$, quæ si dividatur per alteram erit $\frac{dx}{z} = \frac{ydt}{m}$. In æquatione igitur hosce valores substitue, ut obtineas ec. $S\frac{ydt}{m}\overline{S\frac{ydt}{m}\overline{Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m}}} = c^{Sydt}m$.

Supponamus primo, in hac unicum inesse signum summatorium, ut sit $Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}m$: Ergo sumptis differentiis $c^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}.\overline{dm + mydt}$: Ergo $1 = \frac{m}{ydt}.\overline{dm + mydt}$.

Si in supposita æquatione duo existant signa summatoria, & voces $\frac{m}{ydt}.\overline{dm + mydt} = n$, eadem methodo invenies $Sc^{Sydt}\frac{ydt}{m} = c^{Sydt}n$, ex qua acceptis differentiis orietur $z = \frac{m}{ydt}.\overline{dn + nydt}$.

Simi-

Similiter vocando $\frac{m}{ydt} \cdot \overline{dn + nydt} = p$, ubi tria adſint ſigna ſummatoria, nanciſceris $1 = \frac{m}{ydt} \cdot \overline{dp + pydt}$.

Si ſigna ſummatoria exiſtant quatuor, reperies $1 = \frac{m}{ydt} \cdot \overline{dq + qydt}$, facta $q = \frac{m}{ydt} \cdot \overline{dp + pydt}$: atque ita in infinitum.

Ut harum æquationum indeterminatæ y, t inveniantur per ſeries compoſitas ab indeterminata u, memento in primis litteris poſitam fuiſſe

$x = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4$ ec., hujuſque feriei coefficientes pro ſingulis caſibus fuiſſe determinatos. Si accipiantur differentiæ, fiet

$dx = Bdu + 2Cudu + 3Du^2du + 4Eu^3du$ ec. $= \frac{zdu}{a}$ ut ex eiſdem litteris conſtat. Quare

$z = a \,.\, \overline{B + 2Cu + 3Du^2 + 4Eu^3}$ ec., cujus differentias ſumentes invenimus

$dz = a \,.\, \overline{2Cdu + 2.3Dudu + 3.4Eu^2du}$ ec. quæ fiat $= \frac{sdu}{a}$, ut

$s = a^2 \,.\, \overline{2C + 2.3Du + 3.4Eu^2}$ ec. Quantitates tres x, z, s datæ ſunt omnes per u ope ſerierum. Quapropter t, y datæ invenientur per u, ſi datæ inveniantur per x, z, s: quod ſæpe fieri poſſe, quomodocumque m ſit data per t, y, induſtrius analyſta cognoſcet.

Si m detur per ſolam t, prima ex æquationibus inventis erit finita, ſecunda infiniteſima ordinis primi, tertia ſecundi, atque ita deinceps. Quod tibi conſtabit, ſi quantitates m, n, p, q ec., quæ omnes dantur per t, y ejicias ab æquationibus. Verum ſi m detur aut per ſolam y, aut per y, t, æquatio prima erit in primo ordine differentialium, altera in ſecundo, tertia in tertio, atque ita deinceps.

Ut exemplum aliquod afferamus oſtendens, quo pacto t, y inveniendæ ſint per x, z, s, ſupponamus $m = t$. Quoniam eſt $x = c^{Sydt}$, & $z = c^{Sydt}t$, hæc dividatur per primam, & fiet $\frac{z}{x} = t$: Ergo inventa eſt t data per x, z. Ut invenias y, accipe

æqua-

æquationem $x = c^{Sydt}$, transi a numeris ad logarithmos $lx = Sydt$, accipe differentiam $\frac{dx}{x} = ydt$: Ergo $y = \frac{dx}{xdt}$; sed quum sit $t = \frac{z}{x}$, erit $dt = \frac{xdz - zdx}{x^2}$: Ergo $y = \frac{xdx}{xdz - zdx}$: atqui $dx = \frac{zdu}{a}$, $dz = \frac{sdu}{a}$: Ergo $y = \frac{xz}{xs - z^2}$. Q. E. I.

Si fuerit $m = y$, divide æquationem $z = c^{Sydt}y$ per $x = c^{Sydt}$, & fit $\frac{z}{x} = y$; quare inventa est y. Ut inveniatur t accipe, ut supra, æquationem $\frac{dx}{x} = ydt$: Ergo $\frac{dx}{yx} = dt$; sed probatum est $xy = z$: Ergo $\frac{dx}{z} = dt$: atqui $dx = \frac{zdu}{a}$: Ergo $\frac{du}{a} = dt$, sive $\frac{u}{a} = t$. Q. E. I.

Quod dictum de formulis, in quas transformatur æquatio ec $S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{dx}{z}\overline{S\frac{xdx}{z}}} = z$, opportune applicandum est illis, in quas transformatur æquatio ec. $S - \frac{dx}{z}\overline{S - \frac{dx}{z}\overline{S - \frac{xdx}{z}}} = z$. Eæ autem, adhibitis substitutionibus $x = c^{S-ydt}$, $z = c^{S-ydt}m$, invenientur

$$x = \frac{m}{ydt}.\overline{dm - mydt}, \text{ \& posita } n = \frac{m}{ydt}.\overline{dm - mydt}$$

$$x = \frac{m}{ydt}.\overline{dn - nydt}, \text{ factaque } p = \frac{m}{ydt}.\overline{dn - nydt}$$

$x = \frac{m}{ydt}.\overline{dp - pydt}$: atque ita deinceps in infinitum. In his enim sæpe definientur t, y per x, z, s, dummodo in seriebus eos coefficientes ponas, qui pro hoc casu sunt determinati. Sed adverte, in hoc casu esse $dx = \frac{-zdu}{a}$, & fortasse utilius esset ponere $dz = \frac{-sdu}{a}$.

Claudam hanc epistolam exponens, quomodo ex tradita doctrina colligatur valor tangentis tam hyperbolicæ, quam circularis datus per u æquantem duplum sectorem divisum per semiaxem; hæc autem quantitas u in circulo eadem est ac arcus circularis. Quæ res quamquam notissima est, tamen juvat ex positis princi-

piis

piis deducere. Primæ ex æquationibus inventis ad hanc adhibito signo ambiguo reducuntur

$1 = \frac{m}{y\,dt} \cdot \overline{dm \pm m y\, dt}$. Ponatur $m = y$, & fiet $1 = \frac{1}{dt} \cdot \overline{dy \pm y^2 dt}$:

Ergo $dt = \frac{dy}{1 \mp y^2}$, sive sumendo $a = 1$, $dt = \frac{a^2\, dy}{a^2 \mp y^2}$.

Si y sit æqualis tangenti AD, notum est (*Fig.* 1, 2) t esse quantitatem, quæ multiplicata per semiaxem $CA = a$, dat duplum sectorem ACF hyperbolicum, si valeat signum superius, circularem, si valeat inferius. Methodo autem supra tradita inveniemus $y = \frac{az}{x}$, & $t = u$. Quare etiam u æquabit duplum sectorem ACF divisum per CA.

Itaque, si pro x, z ponantur series inventæ, orietur

$$y = a \cdot \frac{\begin{array}{l} + \frac{Au}{a} \pm \frac{Au^3}{2.3.a^3} \\ \pm aB + \frac{Bu^2}{2a} \pm \frac{Bu^4}{2.3.4.a^4} \end{array} \text{ ec.}}{\begin{array}{l} A \pm \frac{Au^2}{2a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} \\ Bu \pm \frac{Bu^3}{2.3.a^2} + \frac{Bu^5}{2.3.4.5.a^4} \end{array} \text{ ec.}}$$

in qua æquatione si $u = o$, debet etiam $y = o$: atqui, facta $u = o$, invenitur $y = \frac{a^2 B}{A}$: Ergo $B = o$: Igitur

$$y = a \cdot \frac{\frac{Au}{a} \pm \frac{Au^3}{2.3.a^3} + \frac{Au^5}{2.3.4.5.a^5} \pm \text{ec.}}{A \pm \frac{Au^2}{2a^2} + \frac{Au^4}{2.3.4.a^4} \pm \text{ec.}}$$

& facta divisione per A

$$y = a \cdot \frac{\frac{u}{a} \pm \frac{u^3}{2.3.a^3} + \frac{u^5}{2.3.4.5.a^5} \pm \text{ec.}}{1 \pm \frac{u^2}{2a^2} + \frac{u^4}{2.3.4.a^4} \pm \text{ec.}}$$

 Hæc

Hæc formula ex elementis facile deducitur per sinus, & cosinus: nam cosinus est ad sinum ut semiaxis ad tangentem. Si autem expressiones sinus, & cosinus adhibeantur, quæ in secunda epistola inventæ sunt, eadem formula exurget, quod methodi nostræ veritatem ostendit.

Quam utilitatem hæc inventa habere possint, tibi vir clarissime, judicandum relinquo. Interea bonas facultates, ut soles, amplifica, ita tamen ut cures valitudinem tuam.

Patavium ad Doc. Josephum Suzzium
Bononiæ 5 kal. Decem. 1752.

OPU-

Fig. 1.

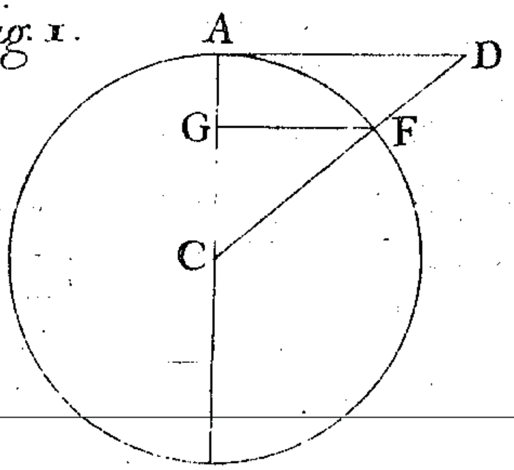
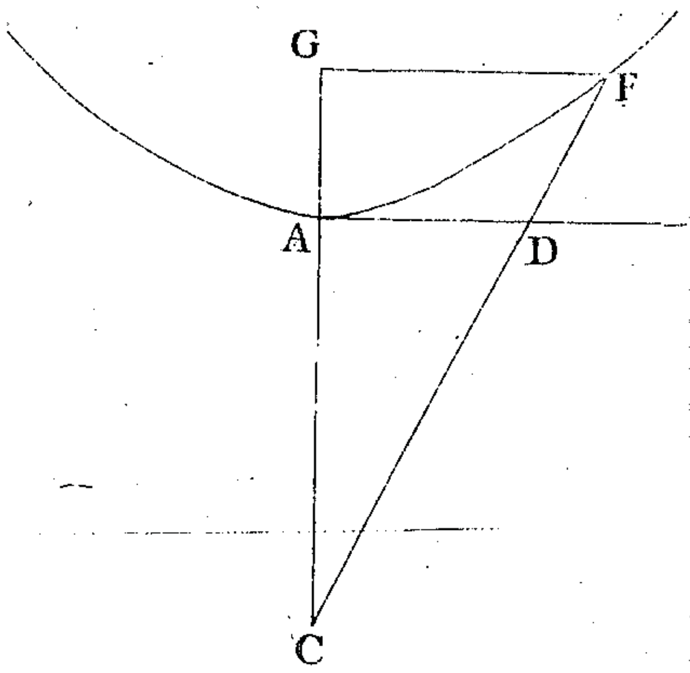


Fig. 2.



OPUSCULUM SEPTIMUM.

EPISTOLA

Exhibens ſolutionem Problematis Kepleriani ſecandi ſemicirculum in data ratione per lineam ductam ex quocumque puncto diametri.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

JORDANO COM. RICCATO

FRATRI CARISSIMO

S. P. D.

ALiquot abhinc menſes, quum ſimul eſſemus, & de rebus geometricis, ac phyſicis loqueremur, ſi recte memoria tenes, ſermo incidit de problemate Kepleriano, ſecandi ſcilicet ſemicirculum ex quocumque diametri puncto in data ratione. Dicebam, præter plures ſolutiones arithmeticas rei aſtronomicæ accommodatas, duas a me lectas fuiſſe ſolutiones geometricas, quarum altera utitur cycloide protracta, altera quadratrice tſchirnhauſiana. Primam invenies in Vallisio, atque Newtono, alteram in opuſculo Hermanni, quod editum eſt *in Ac. Petrop.* T. I. Mirabaris, neminem in hujuſce problematis ſolutione uſum fuiſſe aut vulgari cycloide, aut curva ſinuum, quæ duæ curvæ inter circuli quadratrices maxime tuta ac ſimplici ratione delineantur. Quum autem ſignificaſſem, a me olim per cycloidem problema hoc ſolutum fuiſſe, petiiſti, ut quum Bononiam veniſſem, tecum meam ſolutionem communicarem.

Tandem abſolutis aliquot ſtudiis, quibus, ut noſti, diſtentus ſum, adverſaria mea evolvens, cupitam ſolutionem inveni, quam dum attentius legebam, cepi conſiderare, utrum aliam invenire poſſem per curvam ſinuum. Inveni nullo negotio, atque ita ſimpliplicem, ac elegantem, ut nulli ex iis, quæ extant, mihi concedere videatur. Utramque vero accipe.

Datum semicirculum ADB (*Fig.* 1) per lineam discedentem ex quolibet diametri puncto S, nimirum SO dividere in data ratione.

Descripta sit cyclois BFQ, cujus circulus genitor sit BDA. Primum ejus basim AQ divide in E in ratione data: tum erecta EG æquali, & parallela AB describatur semicirculus GFE secans cycloidem in F, & agatur FD parallela AQ. Constat BD : DA seu GF : FE esse in ratione data AE : EQ. Ex H ducatur radius HK parallelus AQ, & abscindatur KI = CS. Semiaxibus GH, HI describatur Ellypsis GIE, cujus ordinatæ erunt ad ordinatas circuli sicut HI : HK. Ellypsis autem secet cycloidem in L, ex quo puncto ducatur LO parallela AQ, & agatur SO: ajo ab hac semicirculum dividi in data ratione.

Demonstratio. Producatur LO in M, & P, & signetur punctum N, in quo GE ab hac linea secatur, & ducantur CO, CD. Quoniam FD seu OM = arcum BD, LO = BO, facta subductione erit LM = OD: sed ex Ellypsis proprietate MN : LM :: HK : KI, sive substitutis æqualibus PO : OD :: CO : CS: Ergo PO . CS = CO . OD: Ergo triangulum COS = sectori COD: addito igitur sectore BCO fiet spatium BSO = sectori BCD: Ergo BSO ad semicirculum ut sector BCD ad semicirculum, ut BD ad BDA, ut AE : AQ: Ergo dividendo BSO : SOA :: AE : EQ hoc est in ratione data. Q. E. D.

Postquam solutionem exposui, quæ perficitur ope vulgaris cycloidis, eam producam, quæ utitur curva sinuum. Sit semicirculus BKA (*Fig.* 2) dividendus in data ratione per lineam SO. Intelligatur descripta curva sinuum EKQ, in cujus medio elegantiæ caussa situs concipiatur circulus BKA. Dividatur basis EQ in puncto H in data ratione. Jungatur KS, cui ex puncto H agatur parallela HL secans curvam sinuum in puncto L. Ex L ducatur LO parallela basi, & jungatur SO: ajo, ab hac in data ratione semicirculum esse divisum.

Demonstratio. Ex punctis L, H duc ordinatas LM, HF; ex F age FD parallelam basi, & duc radios OC, DC. Ex similitudine triangulorum LHM, KSC erit KC : CS :: LM : MH: sed quum ex curvæ sinuum natura EH = BD, EM = BO erit MH = DO: Ergo KC, seu CD : CS :: LM : DO: Igitur CD. DO = LM . CS, sive sector COD = triangulo COS: ergo addito sectore COB fiet BOS = BDC; sed CBD : CDKA : ut

arcus

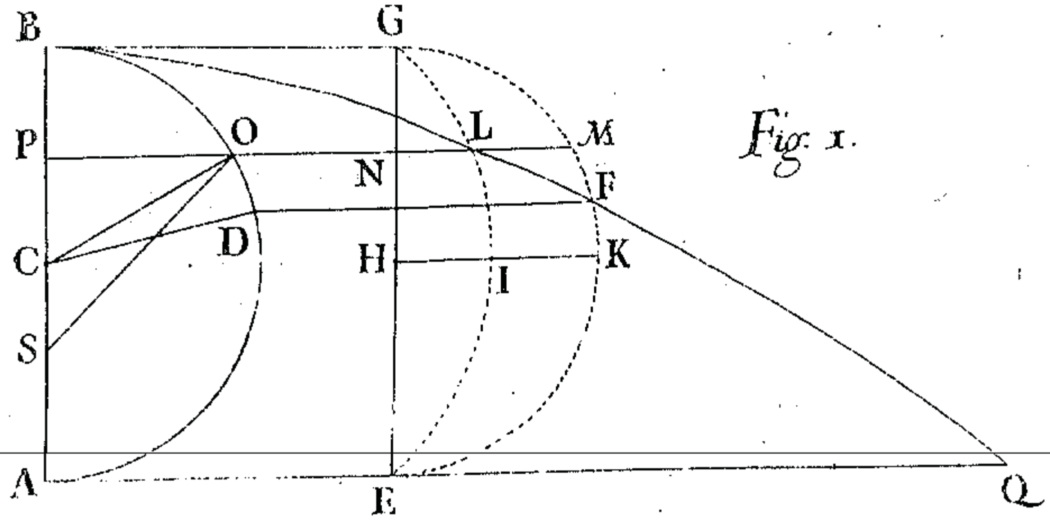


Fig. 1.

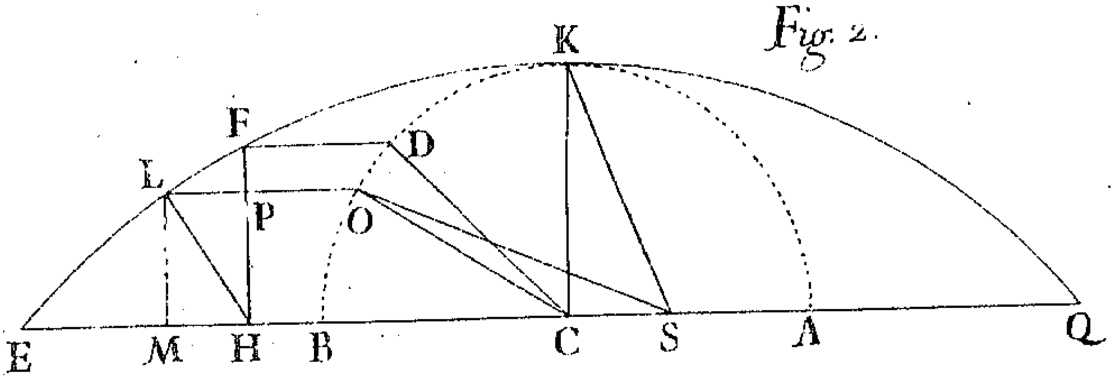


Fig. 2.

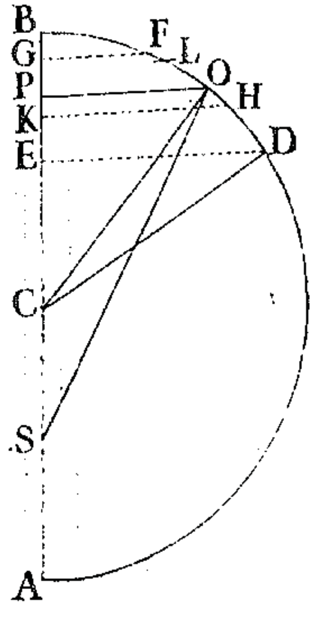


Fig. 3.

arcus BD : DKA : : EH : HQ : ergo BSO : SOKAO : : EH : HQ, hoc est in ratione data. Q. E. D.

Methodus a nobis usurpata, quæ innititur in æqualitate inter sectorem OCD (*Fig. 3*), & triangulum OCS exhibet modum appropinquandi ad verum valorem arcus BO. Namque ea æqualitas suppetit hanc analogiam CO : OP : : CS : DO. Quum autem OP sit tam incognita quam arcus BO: est enim ejus sinus, loco ejus ponamus ED, qui est sinus arcus dati BD, & obtinebimus pro quarta proportionali arcum DF majorem justo DO. Vocetur itaque radius $= r$, CS $= b$, arcus BD $= a$, ejus sinus DE $= Sa$: per notam S enim sinum intellectum volo. Quare sit $r : Sa :: b : DF = \frac{bSa}{r}$ majorem justo DO. Subducatur DF ab arcu BD, & fiet BF $= a - \frac{bSa}{r}$ minor justo BO.

Fiat iterum $r : \overline{Sa - \frac{bSa}{r}} :: b : DH = \frac{b}{r} . \overline{Sa - \frac{bSa}{r}}$ minorem justo DO: arcus autem BH invenitur $= a - \frac{b}{r} . \overline{Sa - \frac{b}{r} Sa}$, qui est major justo BO.

Iterum institue analogiam

$$r : \overline{Sa - \frac{b}{r} . \overline{Sa - \frac{b}{r} Sa}} :: b : DL = \frac{b}{r} . \overline{Sa - \frac{b}{r} . \overline{Sa - \frac{b}{r} Sa}}$$

majorem justo DO: Ergo fiet cognitus arcus BL minor justo, qui tamen ad verum valorem BO magis propinquus erit. Quæ methodus si producatur ad verum valorem arcus BO ultra quoscumque limites accedet. Quando autem datis arcubus sinus inveniuntur, methodus nullam habere potest difficultatem.

Puncto D a puncto B recidente, accidet sæpe, ut in prima operatione inveniatur DF minor justo, in altera DH justo major: atque ita deinceps.

Verum quum valores duos satis propinquos vero valori arcus BO nactus fueris, utile erit, vocare in auxilium methodum duplicis falsæ positionis, per quam erroribus correctis tam propinquum valorem erues, ut exactiorem res astronomica desiderare non possit. De hisce solutionibus sententiam tuam expecto. Vale.

Dat. Bononiæ tertio Kal. Februarii anni 1751.
Tarvisium ad Co: Jordanum Riccatum.

OPU-

OPUSCULUM OCTAVUM.

EPISTOLA

Physico-mathematica, in qua ostenditur, in quacunque actionis hypothesi, spatia peracta a gravi successivis temporibus æqualibus esse, ut numeri impares.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

POMPEJO DE PELLEGRINIS

S. P. D.

SI tempus, quo mobile actum a gravitate constante motu accelerato descendit, divisum intelligatur in numerum infinitum minimorum æqualium tempusculorum, & si recipiatur hypothesis, quod initio horum tempusculorum accipiat corpus ab impulsu gravitatis novum gradum velocitatis, certissimum est, Pompei clarissime, spatia successivis hisce tempusculis confecta servare proportionem numerorum naturalium, qui in tabula a serie A exprimuntur. Si vero tempus idem dividatur in partes finitas æquales, certum item est, spatia successivis hisce æqualibus temporibus peracta esse in progressione numerorum imparium. Quamquam geometrica, quam afferebam, demonstratio a te ferme invito assensum extorquebat: tamen in hoc transitu ab una ad aliam progressionem aliquid obscuri latere adhuc, judicabas.

Dum hac de re nudius tertius loquebamur, illud semel atque iterum respondi, nullo modo in dubium revocandam esse demonstrationem geometricam; animadvertendum esse, si termini seriei A bini, aut terni sumantur, exurgere series B, C a serie numerorum naturalium admodum diversas; quare non esse mirandum, prodire seriem numerorum imparium, si seriei A termini accipiantur infiniteni. Cur hoc dicerem, nihil habebam aliud præter ratiocinium geometricum, quod tibi explicaveram. Nunc autem planam demon-

demonstrationem ad te mitto, quam ex ipsa serierum natura meditando deduxi.

Sit series A numerorum naturalium, in qua quilibet terminus a sequente unitate superatur. Hujusce seriei accipio terminos binos, eosque in summam colligo, ut oriatur series B; quæ est series arithmetica, habens 4 pro differentia inter terminos proximos. Si accipiantur in eadem serie A termini primum terni, tum quaterni, post quini atque ita deinceps, prodibunt series C, D, E, F ec., quæ sunt omnes series arithmeticæ, & earum differentias exprimunt numeri 9, 16, 25 ec. Series differentiarum, quam verticalem constitui, eadem est cum serie quadratorum numerorum naturalium.

Fac reducas series omnes B, C, D ec. ad eam formam, ut primus earum terminus exprimatur per unitatem: quod obtinebis, si dividas seriem B per 3, seriem C per 6, seriem D per 10, atque ita deinceps. Hoc pacto novæ efformabuntur series, in quibus secundus terminus erit 2 addita fractione, quæ continetur in serie H, cujus primus terminus pertinet ad seriem prodeuntem ex B, secundus ad eam, quæ nascitur ex C, atque ita de aliis. Quare per seriem H hujusmodi series facile efformabuntur. Etenim quum omnium primus terminus sit $= 1$, *differentia* per quam hic a secundo, & omnes antecedentes a consequentibus superantur erit $1 + \frac{1}{3}$ in prima, $1 + \frac{3}{6}$ in altera, atque ita deinceps. Quare si termini sumerentur infiniteni, hujusmodi differentia erit $1 +$ terminus seriei H, qui in infinita sede collocatur.

Ut hujusmodi terminus reperiatur, oportet seriei H naturam investigare. Ex serie A summando terminos omnes antecedentes formetur, ut moris est, series K. Quisque videt seriem H nasci ex K, si quilibet ejus terminus per sequentem dividatur. Sed si terminorum numerus vocetur $= n$; terminus generalis seriei K, ut a plurimis demonstratur, est $= \frac{n \cdot \overline{n+1}}{2}$: Ergo terminus subsequens erit $= \frac{\overline{n+1} \cdot \overline{n+2}}{2}$: Igitur seriei H terminus generalis $= \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot \overline{n+1}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2}} = \frac{n}{n+2}$. Itaque si numerum n ponas infinitum, habebis terminum seriei H in infinita sede collocatum: atqui in hac hypothesi 2 est incomparabilis cum n infinito: Ergo terminus

minus positus in sede infinita $= \frac{n}{n} = 1$. Quapropter differentia ejus seriei, quæ oritur acceptis seriei A terminis infinitenis, redactoque primo termino ad unitatem, prodit $= 1 + 1 = 2$. Si hac differentia formetur series I, orietur series numerorum imparium. Q. E. D.

Potuissem fortasse facilius determinare terminum generalem seriei H, si eandem convertissem in seriem L. Hujus enim terminum generalem primo intuitu apparet esse $= \frac{n}{n+2}$. Sed malui eundem deducere ex serie K, quæ nihil aliud continet, quam primos terminos serierum A, B, C, D ec. Spero fore, ut ab hac demonstratione mens tua obscuritate omni liberetur. Velim tibi persuadeas, me nihil omissurum, quòd tibi, tuisque studiis esse possit utilitati. Fac valeas.

Ex Col. S. Luciæ pridie idus Novembris 1749.

OPU-

Series

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	A
3	7	11	15	19	23	27	31	35											B
6	15	24	33	42	51														C
10	26	42	58																D
15	40	65																	E
21	57																		F
28	77																		G

$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{21}{28}$				H
1	3	6	10	15	21	28			K
1	3	5	7	9	11	13	15	17	I
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$				L

OPUSCULUM NONUM.

Epistolæ duæ agentes de æquationibus cubicis resolutionem admittentibus.

EPISTOLA PRIMA

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

In Bononiensi Scientiarum Instituto Geographiæ, & Nauticæ P.

S. P. D.

IN monumentis Academiæ Regiæ Parisiensis pertinentibus ad annos 1741, & 42, quæ non ita pridem ad me pervenerunt, in lucem emissa est disquisitio analytica Nicolæ viri doctissimi, in qua agens de æquationibus gradus tertii demonstrat, radices tres æquationis $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = o$ ita exprimi posse, ut nulla appareat quantitas imaginaria, imo unam ex radicibus, per quam reliquæ duæ inveniuntur, esse $x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = o$. Methodus, qua vir clarissimus utitur, ingeniosa est vel maxime. Namque primum Cardani formulam, quæ includit imaginaria, ob oculos sibi proponit; tum duas radices tertias, ex quibus eadem formula coalescit, convertit in series duas infinitas; post seriebus simul additis quantitates omnes imaginarias eliminat; demum novæ seriei naturam considerans ejus summam expressione algebraica determinat, quæ caret imaginariis.

Theorema hoc aliquot ante annos detexeram methodo diversissima, quæ quanquam subtilitate Nicolæ methodo concedit, tamen videtur elegantia, ac simplicitate præstare. Methodum meam ad te, Jacobe ornatissime, scribere decrevi, ut videas, quo pacto longe diversis viis ad eandem veritatem veniamus. Hanc ob rem hæc duo Lemmata præmitto.

Lemma primum. Radix tertia quantitatis $2m - 2m\sqrt{-1}$ est $-\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$.

Demonstratio. Elevetur ad potestatem cubicam quantitas $-\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$, & invenietur $-m - 3m\sqrt{-1} + 3m - m\sqrt{-1} = 2m - 2m\sqrt{-1}$. Igitur $\sqrt[3]{2m - 2m\sqrt{-1}} = -\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$. Q. E. D.

Lemma secundum. Radix tertia quantitatis $2m + 2m\sqrt{-1}$ est $-\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{m}\,.\,\sqrt{-1}$.

Demonstratio eadem methodo perficietur.

Hisce suppositis considero æquationem œcumenicam gradus terti nempe $x^3 - px + q = o$, cujus radicem unam invenit Scipio Ferreus, ut scripsit Cardanus, idest $x + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. Ut utraque radix tertia contineatur in canone duorum lemmatum, quæ præmissa sunt, oportet, ut $\frac{q}{2} = 2m$, & $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = 2m\sqrt{-1}$: Ergo $\frac{q}{2} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, sive $\frac{qq}{4} = -\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}$, sive $qq = \frac{2p^3}{27}$, demum extracta radice $q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. Qui valor si substituatur in æquatione gradus tertii, fiet $x^3 - px + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = o$, cujus radix ex formula Cardani erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \frac{p}{2.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} = o.$$

Ad extrahendam utramque ex radicibus cubicis, satis erit in lemmatum formulis ponere pro m ejus valorem $\frac{p}{4.3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$:

Orie-

Orietur autem

$$x - \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}\sqrt{-1}} =$$

$$x - 2\sqrt[3]{\frac{p}{4\cdot 3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt[3]{\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}} = x - \sqrt{\frac{2p}{3}} = 0.$$ Quæ formula ea ipsa est, quam per aliam methodum Nicolas invenit.

Duas reliquas radices æquationis nostræ facto calculo nancisceris $x + \sqrt{\frac{p}{2\cdot 3}} \mp \sqrt{\frac{p}{2}} = 0$.

Quæres ex me fortasse, vir clarissime, utrum mea methodus par sit aliis æquationibus resolvendis. Alias infinitas formulas, non dissimiles ab ea, quam Nicolas proposuit, ajo similiter resolvi: tametsi sperandum non sit, rem posse in omnibus confici. Ad hunc finem, quemadmodum antea feci, lemmata præmitto duo.

Lemma primum. Radix tertia quantitatis

$m\,.\,\overline{3n^2 - 1} - m\sqrt{-1}\,.\,\overline{3n - n^3}$ est æqualis $-\sqrt[3]{m} - n\sqrt[3]{m}\sqrt{-1}$.

Lemma alterum. Radix cubica quantitatis

$m\,.\,\overline{3n^2 - 1} + m\sqrt{-1}\,.\,\overline{3n - n^3}$ æquat $-\sqrt[3]{m} + n\sqrt[3]{m}\sqrt{-1}$.

Si eleves radices ad cubicam potestatem, utrumque lemma clarissime demonstrabis.

Ut radix æquationis œcumenicæ, quam exhibuit Cardanus, in præmissis formulis contineatur, necesse est, valere hujusmodi æqualitates $\frac{q}{2} = m\,.\,\overline{3n^2 - 1}$, $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = m\sqrt{-1}\,.\,\overline{3n - n^3}$, ex quibus orientur $\sqrt{m^2\,.\,\overline{3n^2 - 1}^2 - \frac{p^3}{27}} = m\sqrt{-1}\,.\,\overline{3n - n^3}$, sive

$m^2\,.\,\overline{9n^4 - 6n^2 + 1 + n^6} = \frac{p^3}{27}$, sive

$-6n^4 + 9n^2$

$m^2\,.\,\overline{1 + 3n^2 + 3n^4 + n^6} = m^2\,.\,\overline{1 + n^2}^3 = \frac{p^3}{27}$: Igitur

$\frac{q}{2} =$

$\frac{q}{2} = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 - 1}{1+n^2 \cdot \sqrt{1+n^2}}$: qui valor si substituatur in formula tertii gradus, exhibebit

$$x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 - 1}{1+n^2 \cdot \sqrt{1+n^2}} = o.$$

Hujusce æquationis radix ex Cardani methodo erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 - 1}{1+n^2 \cdot \sqrt{1+n^2}} + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1} \cdot \frac{3n - n^3}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 - 1}{1+n^2 \cdot \sqrt{1+n^2}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{-1} \cdot \frac{3n - n^3}{1+n^2 \cdot \sqrt{1+n^2}}}$$

$= o$. Si hæ formulæ cum lemmatum formulis comparentur, invenientur esse $m = \frac{p}{3 \cdot 1+n^2}\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}}$. Quapropter extractis radicibus erit

$$x - \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} - n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}}\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} + n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}}\sqrt{-1}$$

$= o$, sive $x - 2\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} = o$. Q. E. I.

Reliquæ duæ radices æquationis, facto notissimo calculo, invenientur esse

$$x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = o.$$

Si numero n diversos valores tribuas vel rationales, vel irrationales, infinitæ formulæ orientur, quarum radices tres ita inveniuntur, ut imaginaria locum non habeant. Advertendum tamen est primo, radices tres æquationis resolutæ esse sæpenumero incomensurabiles; sed earum incomensurabilitas in primo tantum ordine

dine conſiſtit; implicant enim dumtaxat radices ſecundas, nunquam autem tertias. Fac advertas deinde, in prima radice inventa adeſſe quantitatem radicalem, ſi adſit in æquatione, ſecus autem, ſi non adſit. Quare ſi æquatio radicalium expers ſit, per hanc methodum inveniemus ſemper radicem unam commenſurabilem.

Hæc, quæ plures ante annos mecum ipſe meditatus fueram, doctiſſimi Nicolæ diſquiſitio ad memoriam revocavit. Tuum eſt, Vir clariſſime, quanti facienda ſint, judicare. Vale.

Ex Coll. S. Luciæ tertio Idus Julii 1750.

EPISTOLA SECUNDA

VINCENTIUS RICCATUS

JACOBO MARISCOTTO

In Bononiensi Scientiarum Instituto Geographiæ, & Nauticæ P.

S. P. D.

QUæsisti ex me, Vir doctissime, mihique amicissime, utrum methodus illa, qua tres radices plurium æquationum cubicarum superioribus litteris ab imaginariis liberavi, ullam utilitatem habere possit in æquationibus illis, quibus unica tantum est radix realis, reliquæ duæ imaginariæ. Nullus dubito, quin si eam methodum recte adhibeas, formam elegantiorem in multis æquationibus radici reali concilies. Hanc ob rem, ut antea fecimus, lemmata præmitto duo.

Lemma primum. Quantitatis $m \cdot \overline{3n^2 + 1} + m \cdot \overline{3n + n^3}$ radix cubica est $\sqrt[3]{m} + n\sqrt[3]{m}$.

Lemma alterum. Quantitatis $m \cdot \overline{3n^2 + 1} - m \cdot \overline{3n + n^3}$ radix tertia est $\sqrt[3]{m} - n\sqrt[3]{m}$. Utrumque lemma & notum est, & facillime demonstratur.

Ut radices, quas formula Cardani suppeditat, & quas in prima epistola descripsi, in lemmatum formulis contineantur, necesse est, ut $\frac{q}{2} = m \cdot \overline{3n^2 + 1}$, & $\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = m \cdot \overline{3n + n^3}$. Ex quibus æquationibus invenies $m = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\overline{1 - n^2}\sqrt{1 - n^2}}$, & $\frac{q}{2} = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 + 1}{\overline{1 - n^2}\sqrt{1 - n^2}}$: qui valor si ponatur in æquatione œcumenica tertii gradus, sufficiet

x^3 —

$$x^3 - px + \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{\overline{1-n^2}\sqrt{1-n^2}} = o.$$

Hujus æquationis radix Cardani modo expressa erit

$$x + \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{\overline{1-n^2}\sqrt{1-n^2}} + \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n+n^3}{\overline{1-n^2}\sqrt{1-n^2}}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2+1}{\overline{1-n^2}\sqrt{1-n^2}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n+n^3}{\overline{1-n^2}\cdot\sqrt{1-n^2}}} = o.$$

Si formularum fiat comparatio, constabit m $= \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{1}{\overline{1-n^2}\sqrt{1-n^2}}$. Quare extractis radicibus fiet

$$x + \sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}} + n\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}} + \sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}} - n\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}}$$

$= o$, sive $x + 2\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}} = o.$

Divisa autem æquatione tertii gradus exurget æquatio hæc secundi gradus $x^2 - 2x\sqrt{\frac{p}{3\cdot\overline{1-n^2}}} + \frac{3n^2+1}{3\cdot\overline{1-n^2}}p = o$, quæ si resolvatur, exhibebit duas radices imaginarias. Hæc autem omnia dicta volo pro hypothesi, quod n minor sit unitate, vel si major sit unitate, quod p sit negativa. Si enim n superaret unitatem, & p foret positiva, æquatio ipsa tertii gradus inplicaret imaginaria.

Ut tibi, tuisque petitionibus, Jacobe ornatissime, facerem satis, hæc addenda esse judicavi, quæ in superioribus litteris ea de caussa omiseram, quia nimis obvia videbantur, & ex formulis Cardani facile deducenda. Fac valeas.

Ex Col. S. Luciæ octavo Kal. Sextilis 1750.

OPU-

OPUSCULUM DECIMUM.

Epistola ostendens veram Baliani sententiam de theoria gravium decidentium.

VINCENTIUS RICCATUS

D. SALVATORI CORTICELLIO

Clericorum Regularium S. Paulli Præposito Provinciali (a)

S. P. D.

PRobavimus identidem, si recte memoria tenes, Vir præstantissime, sententiam Cremutii Cordi dicentis, a posteritate quemlibet laudem accipere, quam promeruit. Quæ sententia tametsi vera sit plerumque, tamen aliquando contingere potest, ut auctor nobilis, qui & ingeniose scripsit, & vere, non solum jaceat in oblivione, sed etiam absurdæ opinionis auctor passim habeatur. In hoc calamitatis genus incurrit Joannes Baptista Balianus Patritius Genuensis acutissimus mathematicus, qui simul cum Galileo seculo decimo septimo in Italia floruit. Gratum me tibi facturum spero, si ex operibus ejusdem Baliani, quæ nuper venerunt in manus meas, tanti viri defensionem suscipiam: ea enim natura es, ut suam cuique laudem tribui, maximopere gaudeas.

Opinati sunt nonnulli, corpus actum a gravitate, quæ constans supponitur, descendens per æqualia spatiola accipere æqualem gradum velocitatis, ita ut velocitates acquisitæ ubique spatiis confectis proportione respondeant. Opinio hæc sollicitum aliquando, & anxium tenuit Vincentium Vivianum (b), qui ut omni dubitatione liberaretur, eandem Galileo Magistro suo examinandam pro-

(a) *Has litteras primum edidit anno 1752 Salvator Corticellius homo etrusci sermonis peritissimus in suo pereleganti opere, quod inscribitur* De Etrusca Eloquentia Sermones centum: *Deinde iterum typis mandavit anno 1754 Auctor Historiæ litterariæ Italiæ Tomo 6 paucis omissis, quæ minus necessaria visa sunt. Nunc autem tertio easdem produco ex italico in latinum sermonem translatas.*

(b) *In hac editione corrigo errorem, quem admisi in superioribus. Constat enim ex vita Galilei composita a Vincentio Viviano, non ab Evangelista Torricellio, quemadmodum antea scripseram, sed ab eodem Viviano excitatam fuisse hanc dubitationem.*

proposuit. Galileus autem postquam eam diligentius consideraſſet, falsam esse, atque in absurdum desinere demonstravit; atque demonstrationem suis dialogis addidit, ut quisque videre potest in omnibus editionibus, quæ primam subsequutæ sunt. Nihilo tamen secius eandem opinionem amplexus, ac tutatus est P. Cazreus in litteris Gasendo datis: qui contra ejus rationibus respondit, & Galilei sententiam propugnavit. Controversiam hanc diremit Petrus Fermatius Tolosanus Senator, & Geometra maximus, qui in epistola, quam ad Gasendum scripsit, per veterum methodum geometrice demonstravit, corpus descendens in hypothesi Cazrii ad percurrendum quodlibet spatium finitum tempore indigere infinito: quod absurdum re vera nihil differt ab eo, quod protulit Galileus, atque probavit, tametsi Fermatius usus fuerit clariore, atque exactiore demonstratione.

Hanc opinionem statuentem, velocitates tenere spatiorum proportionem, Baliano tribuit Christianus Wolfius vir celebris in editione cursus mathematici, quæ edita est Halæ Magdeburgicæ anno 1713. In ultimo enim opusculo, in quo de scriptis mathematicis verba facit, pronunciat Galilei inventa de corporum gravium descensu mutata fuisse a Joanne Baptista Baliano.

Suspicor, doctissimum Wolfium primum fuisse, qui damnatæ sententiæ auctorem fecerit Balianum. Etenim invenio Blondellum in libro, qui inscribitur, *Bombarum projiciendarum ars*, hæc de Baliano scribere: *Non est omittendum, Balianum Genuensis Reipublicæ Senatorem in libro de motu, qui eodem tempore prodiit, quo dialogi Galilei, uti pendulorum experimento ad demonstrandum id, quod ex sua definitione colligit Galileus, nempe spatia confecta a mobile descendente esse inter se in ratione duplicata temporum, quæ in illis percurrendis impendit.* Hoc sedulo animadversum fuit in actis Lipsiensibus, ubi Blondelii opus recensetur. Hisce adde P. Milliet de Chales, qui eandem esse sententiam Galilei, ac Baliani profitetur. Quare qui falsam opinionem Baliano tribuerit, ante Wolfium inveni neminem. Dicendum est omnino, oscitanter Baliani libros legisse Wolfium, quia affirmat, de liquidis verba fieri lib. 3, 4, 5, quum lib. 4, 5, 6 agatur de liquidis. Mirandum porro est, quomodo Wolfius errori huic tam firmiter adhæserit, ut in sequentibus editionibus veluti in Genevensi anni 1733, quotiescunque meminit opinionis statuentis velocitatem spatio proportionalem, hypothesim Baliani, seu Balianam appellet. Quoniam autem opera Wolfii omnium manibus versantur, factum est, ut ab eo in omnes mathematicos error hujusmodi pertransierit.

Verum qui veritatem assequi cupit, Baliani librum evolvat. In tertia propositione hoc demonstratum leget, *lineas descensus gravium, dum motu perpendiculari feruntur, esse in duplicata ratione diuturnitatum*, quas nos usitato vocabulo tempora nominamus. Similiter in sexta propositione hoc sibi proponit demonstrandum, *gravia naturali motu descendere semper velocius ea ratione, ut temporibus æqualibus descendant per spatia semper majora juxta proportionem, quam habent impares numeri ab unitate inter se*. Hæc autem, ut neminem fugit, sunt pura puta theoremata Galilei.

Sub oriri potest dubitatio, utrum theoriam, quam docet, a Galileo didicerit Balianus. Editionum tempora statuamus, & dubitatione liberabimur. Dialogi Galilei editi sunt Lugduni Batavorum anno 1638 curante Comite de Noailles, qui ante duos annos eosdem ab auctore acceperat; eodemque anno data est epistola ad eundem Comitem dialogis præfigendam. In hac editione non legitur refutatio hypothesis velocitatum spatiis proportionalium, quæ, ut supra monui, addita est in posterioribus editionibus. Balianus, qui semper hoc studiorum genere delectatus fuerat, & qui usque ab anno 1611, dum arcis Savonæ præfectus esset, pulcherrimas observationes instituerat, primum libellum edidit anno eodem 1638, quem vidisse Blondellum, dicendum est; de eo enim scribit eodem tempore prodiisse, ac dialogos Galilei. Non sum nescius Balianum anno 1646 emisisse in lucem opus in sex libros divisum, cujus mentionem facit Wolfius. Liber primus nihil est aliud, quam nova editio libelli typis impressi anno 1638. Duo qui sequuntur solidorum theoriam prosequuntur; in ultimis tribus de fluidis agitur. Dat operam auctor in libro altero, ut postulatum, quod antea supposuerat, plenissime demonstret; de ejus enim evidentia nonnihil ambigebat. Meminit quidem in prima præfatione mechanices manuscriptæ Galilei; sed opus hoc diversum esse a dialogis, certum est. Hoc tantum dicere possumus, anno 1646, non prorsus ignotos fuisse Baliano dialogos Galilei; nam in libri tertii præfatione scribit, se *non ignorare, viam, quam in suo motu projecta describunt, viris oculatissimis visum esse parabolicam*: quæ veritas primum a Galileo in dialogis est demonstrata.

Postquam tempora hæc sancita sunt, verosimile admodum mihi videtur, cum Galileum, cum Balianum ejusdem theoriæ gravium descendentium auctores extitisse, neque alterum ab altero accepisse. Qua in sententia magis, magisque confirmor, quum methodos, quibus uterque usus est, earumque diversitatem considero. Optimum erit utramque ad examen vocare, ut quis-

que

que judicare possit de earum pulchritudine, atque elegantia.

Galilei methodus, si recte assequor, hac ratione progreditur. In ea definitione, in qua nomine motus æquabiliter accelerati illum intelligit, per quem singulis æqualibus tempusculis æquales acquiruntur gradus velocitatis, hypothesin congruam præmittit, quæ a modo agendi, quo natura utitur, non videtur abhorrere. Hypothesis hæc nondum vera judicanda est, sed ea de caussa tantum proponitur, ut ad examen vocetur, atque experientiæ subjiciatur. Quamobrem colligendæ sunt ab ea quotquot consectaria necessario descendunt, tum quæ ad rite instituta experimenta traduci possunt, traducenda. Si experientia discrepet a consectariis deductis, necessarium erit hypothesim reprobare tanquam falsam, & naturæ legibus dissentaneam: si vero cum consectariis experientia conveniat, hypothesis thesis fiet, & a principiis experimentalibus demonstrationem accipiet. Ad hoc periculum traducta hypothesis Galilei, verissima inventa est, & digna, quam universa Geometrarum Respublica amplectatur.

Quanquam methodus hæc recta est, & non raro utilis veritati venandæ: tamen de ejus exitu plurimum sibi fortuna assumit: Etenim fortunæ debemus, quod illam hypothesim seligamus, quæ deinceps ab experimentis comprobetur. Si alia hypothesis ad examen vocaretur, studia omnia, laboresque deperderentur. Reapse si Galileus amplexus fuisset opinionem statuentem velocitates spatiis proportionales, quæ primo aspectu æque congrua, ac consentanea videri potest, coactus fuisset eam reprobare tanquam omnibus recte institutis experimentis adversantem. Non sum nescius, in hujusmodi difficillimis, ac periculosis inquisitionibus opitulari plurimum rectam judicandi rationem, qua, ut omnibus notum est, mirifice ornatus erat Galileus.

Transeo ad methodum Baliani, cujus ratiocinatio initium sumit ab experientia, quæ in physico-mathematicis investigationibus tanquam unicum, ac universale principium habenda est. Observando collegerat Balianus, duo pendula inæqualia arcus similes describentia dato tempore tot oscillationes conficere, ut earum numerus sit semper in ratione reciproca subduplicata longitudinum: Igitur quum numerus oscillationum dato tempore peractarum sit semper inverse ut tempus, quo quælibet oscillatio perficitur, erunt tempora singularum oscillationum in ratione directa dimidiata longitudinum pendulorum. Post hoc consectarium ad aliud transit, quod valde naturæ consentaneum videtur: nimirum colligit, tempora quoque, quibus duo inæqualia pendula describunt arcus similes, & ſimiliter poſitos eſſe inter ſe in ratione longitudinum ſubduplicata. Hiſce ſtatutis conſtituit duo pendula horizontalia, & ſinit ea cadere per duos arcus minimos ſimiles, qui cum tangentibus verticalibus confunduntur: Igitur tempora quibus duo hi arcus minimi deſcribuntur, erunt in ratione dimidiata longitudinum pendulorum, ſive eorundem arcuum: Ergo duo arcus minimi erunt in ratione duplicata temporum, quibus percurruntur: atqui quoniam arcus confunduntur cum tangentibus verticalibus, ſunt ſpatia motu verticali confecta: Ergo ſpatia ſunt in ratione temporum duplicata. Quod princeps eſt theorema, ex quo cetera omnia inveniuntur, ac demonſtrantur.

Laudanda eſt prudentia Galilei, qui hypotheſim ſuam per tuta experimenta comprobavit; ſed Baliani methodus exactior mihi videtur, & felicior. Nam quum initium ducat ab experientia, jubet, ut ita dicam, naturam ea, quæ celat, arcana in apertum proferre. Laus maxima danda eſt Galileo, qui in gravium cadentium theoriam majus augmentum contulit, quam Balianus, qui eo tempore non egerat, niſi de gravibus aut verticaliter, aut per planum inclinatum deſcendentibus; ſed ſua Baliano, qui theoriæ principia invenit, deneganda non eſt, quod certe ſi in præſens viveret Galileus, præſtare non dubitaret.

Tibi autem potiſſimum, vir præſtantiſſime, ad defendendum Baliani jus, hæc ſcribenda cenſui, quia quum plurimi ſemper feceris homines doctos, & de bonis facultatibus meritos, tibi rem gratiſſimam me facturum eſſe judicavi. Fac valeas.

Tertio nonas Julii anni 1731
Ex Col. S. Luciæ.

OPU-

OPUSCULUM UNDECIMUM.

EPISTOLA,

Qua theorema Bernoullianum pertinens ad rectificationem curvarum demonstratur, & amplificatur.

VINCENTIUS RICCATUS

LEONARDO XIMENES (a)

Soc. Jesu, Matheseos Professori

S. P. D

Quare tibi, Vir Clarissime, scribam de perantiquo theoremate, quod anno *1697* in actis lipsiensibus propositum fuit a Joanne Bernoullio Geometra, ut nosti, in primis acuto, in caussa est Joannes Theophilus Waltius homo doctissimus, qui in eisdem actis anni *1739* illius theorematis analysim edidit, quæ quantum artificiis abundat, tantum propter longitudinem videtur esse molesta. Etenim mihi Waltii opusculum legere incipienti cupido suborta est experiundi, utrum faciliori, atque elegantiori analysi theorema Bernoullii eruere potuissem: quæ cupido magis magisque adaucta est, quum legerim ipsum Bernoullium fateri, se non indicare, qua via, quave analysi illud invenerit; *quia calculus foret nimiæ prolixitatis*. Quidquid autem a me inventum est judicio, censuræque tuæ libens submitto. Certe methodus, quæ se se obtulit quasi non vocata, non solum Bernoullii theorema invenit, sed plura alia patefacit, quæ non mediocri elegantia prædita esse mihi videntur.

Theorema ita a suo Auctore exponitur. *Si positis curvæ coordinatis* x, y *fiat alia curva, cujus coordinatæ sint* $\frac{x\,dy^3}{dx^3}$, & $\frac{3\,x\,dy^2}{dx^2} - \frac{1}{2}\,S\,\frac{dy^2}{dx}$ *erunt*

(a) *In lucem emissa fuit hæc epistola sermone italico anno 1752 in tomo decimo Symb. let. collect. ab Antonio Francisco Gorio viro doctissimo.*

erunt ambæ curvæ genitrix, & genita simul sumptæ rectificabiles. Liceat mihi paullo aliter theorema proponere, nimirum: si curvæ datæ æquatio sit $dy = pdx$, in qua p data sit per x, & constantes, & si describatur alia curva, cujus coordinatæ sint xp^3, $\frac{3}{2}xp^2 - \frac{3}{2}Sp^2dx$, curvæ ambæ simul sumptæ rectificationem recipient.

Ut voti compos fiam, necesse est, addam elemento curvæ datæ, quod est $= dx\sqrt{1+pp}$, ejusmodi quantitatem differentialem, quæ prædita sit duabus hisce conditionibus: prima ut ejus quadratum divisibile sit in duo quadrata, quorum radices nullam quantitatem imaginariam involvant: secunda, ut datæ curvæ elemento addita præbeat formulam integrabilem. Primæ conditioni faciet satis quælibet formula differentialis multiplicata per $\sqrt{M+N}$, in qua radice uterque terminus signo $+$ afficiatur. Ut autem longos calculos vitem pro $\sqrt{M+N}$ utar $\sqrt{1+pp}$, quæ inest in elemento curvæ datæ. Alteram conditionem ut obtineam, in subsidium vocabo methodum quantitatum indeterminatarum.

Itaque pono quæsitæ curvæ elementum esse $= \overline{Vdx + Zxdp}\cdot\sqrt{1+pp}$, in quo V, Z sunt quantitates determinandæ per x in analyseos progressu. Igitur summa duorum elementorum erit $=$
$dx\cdot\sqrt{1+pp} + \overline{Vdx + Zxdp}\cdot\sqrt{1+pp} =$
$\overline{1+V}\cdot dx\sqrt{1+pp} + Zxdp\sqrt{1+pp}$. Ponamus hujus integrale esse $= \overline{1+V}\cdot x\sqrt{1+pp}$, cujus differentia capiatur, & erit $\overline{1+V}\cdot dx\sqrt{1+pp} + dV\cdot x\sqrt{1+pp} + \frac{\overline{1+V}\cdot xpdp}{\sqrt{1+pp}}$.
Conferatur hæc formula cum superiore, ut determinetur Z, & fiet $Zxdp\sqrt{1+pp} = dV\cdot x\sqrt{1+pp} + \frac{\overline{1+V}\cdot xpdp}{\sqrt{1+pp}}$. Quoniam V debet deinceps determinari per x, aut per p fiat $dV = qdp$, factaque substitutione divide per $xdp\sqrt{1+pp}$, & invenies $Z = q + \frac{\overline{1+V}\cdot p}{1+pp}$. Quapropter si in assumpto elemento curvæ quæsitæ pro Z inventus valor substituatur, ipsum additum elemen-

to

to curvæ additæ integrabile erit, factaque integratione proveniet $\overline{1 + V} \cdot x\sqrt{1 + pp}$.

Inveniendæ sunt coordinatæ curvæ quæsitæ. Elementi curvæ quæsitæ $\overline{Vdx + Zxdp} \cdot \sqrt{1 + pp}$ quadratum in duo hæc quadrata dividatur

$$\overline{Vdx + Zxdp}^2, \qquad p^2 \cdot \overline{Vdx + Zxdp}^2.$$

Horum radices, quæ nihil continent imaginarii, dabunt differentias duarum coordinatarum curvæ quæsitæ, nempe

$$Vdx + Zxdp, \qquad p \cdot \overline{Vdx + Zxdp}.$$

In his ponatur valor quantitatis Z inventus, & fient

$$Vdx + qxdp + \frac{\overline{1 + V} \cdot xpdp}{1 + pp}, \quad p \cdot \overline{Vdx + qxdp + \frac{\overline{1 + V} \cdot xpdp}{1 + pp}}:$$

atqui $qdp = dV$: Ergo coordinatarum differentiæ sunt

$$Vdx + xdV + \frac{\overline{1 + V} \cdot xpdp}{1 + pp}, \quad p \cdot \overline{Vdx + xdV + \frac{\overline{1 + V} \cdot xpdp}{1 + pp}}.$$

Harum autem integrales dabunt duas quæsitæ curvæ coordinatas. In sumendis integralibus constantes omitti possunt, quia harum additio curvas non mutat, neque signorum habenda est ratio, quia coordinatæ, vel positivæ, vel negativæ accipiantur, curvam dant eandem.

Antequam indeterminatam V per x, & per p determino, determinari autem potest prout libet, juvat advertere differentias duarum coordinatarum curvæ quæsitæ ita esse affectas, ut si prima multiplicetur per p alteram exhibeat: quæ conditio reperitur etiam in differentiis coordinatarum curvæ datæ. Quapropter si fiat $Vdx + xdV + \frac{\overline{1 + V} \cdot xpdp}{1 + pp} = dz$, differentiæ coordinatarum curvæ modo inventæ erunt dz, pdz: Ergo si describatur curva, in qua differentiæ coordinatarum sint

$$Wdz + zdW + \frac{\overline{1 + W} \cdot zpdp}{1 + pp}, \quad p \cdot \overline{Wdz + zdW + \frac{\overline{1 + W} \cdot zpdp}{1 + pp}},$$

hæc simul cum superiore erit integrabilis, & æqualis $\overline{1 + W} \cdot z\sqrt{1 + pp}$. Constat autem z dari per x. Atque hoc deinceps primum theorema vocabimus.

Quan-

Quanquam quantitas W potest determinari ut libet, tamen ut tertia curva proficiscatur ex secunda, quomodo secunda ex prima, debet W ita dari per z, sicuti V per x. Quare si V data sit solum per p, erit $V = W$; si autem data sit etiam per x, non erit difficile indeterminatam V similiter determinare per z. Hac autem ratione a tertia curva fit progressus ad quartam, a quarta ad quintam, atque ita deinceps. Hæc animadversio ad construendas curvarum series, in quibus singula paria rectificationem admittunt, mirum in modum conducit.

Præterea quemadmodum ex curva, cujus coordinatarum differentiæ sunt dx, pdx oritur curva habens pro coordinatis integrales quantitatum

$$Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}\cdot xpdp}{1+pp},\quad p\,.\,\overline{Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}\cdot xpdp}{1+pp}};$$

ita viciffim ex hac illa orietur, & summa duarum curvarum erit $\overline{1+V}\,.\,x\sqrt{1+pp}$. Fac igitur $Vdx + xdV + \frac{\overline{1+V}\cdot xpdp}{1+pp} = dz$, & per hanc æquationem determina x. Divide æquationem per xV, & habebis

$$\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{\overline{1+V}\cdot pdp}{V\cdot\overline{1+pp}} = \frac{dz}{xV}.$$ Pone

$$\frac{\overline{1+V}\cdot pdp}{V\cdot\overline{1+pp}} = \frac{ds}{s},\ \&\ c^{S\frac{\overline{1+V}\cdot pdp}{V\cdot\overline{1+pp}}} = s,$$ in qua c est numerus, cujus logarithmus æquat unitatem. Facta substitutione orietur æquatio $\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dz}{Vx}$. Fac $\frac{dx}{x} + \frac{dV}{V} + \frac{ds}{s} = \frac{dr}{r}$, atque adeo $xVs = r$. Peracta substitutione habebimus $\frac{dr}{r} = \frac{sdz}{r}$, sive $r = Ssdz$: Ergo $xVs = Ssdz$, sive

$$x = \frac{Ssdz}{Vs} = \frac{Sdz\,.\,c^{S\frac{\overline{1+V}\cdot pdp}{V\cdot\overline{1+pp}}}}{V\,.\,c^{S\frac{\overline{1+V}\cdot pdp}{V\cdot\overline{1+pp}}}}.$$ Quare si coordinatæ curvæ sint z, $Spdz$, alterius, quæ cum hac integrationem admittit, coordinatæ erunt

$$\frac{S_{dz.c}\,S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}}{S_{V.c}\,\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+p}}} = S\,p.\,D\,\frac{S_{dz.c}\,S\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}}{S_{V.c}\,\frac{\overline{1+V}.pdp}{V.\overline{1+pp}}}.$$

Similiter ex identitate rationis si coordinatæ sint x, $Spdx$, alterius coordinatæ erunt illæ, quæ oriuntur ex superioribus, si z mutetur in x. Atque hoc est novum theorema œcumenicum, quod deinceps secundum appellabitur. Nemo non videt, ex hac secunda curva inveniri tertiam, atque ita efformari seriem, quemadmodum antea fecimus.

Notandum judico, seriem præcedentem ex primo theoremate inventam per hoc secundum ad alteram partem non difficulter produci posse, si V detur solum per p. Verum si non detur per solam p, necesse est ita V dari per x, quemadmodum antea dabatur per z: quod in plerisque casibus non ita proclive est inventu. Harum serierum, quæ per hasce methodos efformantur, mirabiles sunt proprietates, sed hasce clare patefaciemus, dum hæc œcumenica theoremata alicui exemplo applicabimus.

Ad primum theorema redeamus, & per determinationem quantitatis V alia theoremata minus late patentia eliciamus. Horum autem omnium maxime simplex videtur esse, quod oritur ex determinatione $V = pp$. In hac hypothesi quum elementa coordinatarum datæ curvæ sint dx, pdx, elementa coordinatarum curvæ quæsitæ erunt $p^2dx + 3xpdp$, $p^3dx + 3xp^2dp$, quæ integrata dabunt ordinatas

$$p^2x + Sxpdp \quad \text{sive} \quad \tfrac{3}{2}p^2x - \tfrac{1}{2}Sp^2dx, \quad p^3x$$

Hoc ipsum est theorema Joannis Bernoulli viri celeberrimi, cujus analysim ex nostra methodo facilem, & expeditam produximus.

Exemplum Bernoullii sequentes applicemus hoc theorema parabolis, & supponamus curvæ datæ coordinatas esse x, $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}.A^m}$: quare earum differentiæ erunt dx, $\frac{x^m dx}{A^m}$: Ergo $p = \frac{x^m}{A^m}$. Ex his

T deter-

determinationibus orientur curvæ quæsitæ coordinatæ $\frac{3m+1}{2m+1} \cdot \frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}$, $\frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$. Hasce duas curvas constitui in apposita tabella primam ad num. 1, inventam ad num. 2. Quum autem duarum curvarum summa sit $= 1 + V \,.\, x\sqrt{1+pp}$, erit substitutis valoribus $= x \,.\, \overline{1 + \frac{x^{2m}}{A^{2m}}}^{\frac{3}{2}} = x \,.\, \frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$. Quare si vocetur $\frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}} = Z$, fiet curvarum summa $= xZ$, ut in eadem tabella apparet.

Sed non contentus hac secunda curva, quæ statim ex prima oritur, ex secunda invenio tertiam, ex tertia quartam, atque ita deinceps per methodum supra traditam; tum omnes in tabella appono, ut series curvarum efformetur numeris positivis expressa. Litteræ autem B, C, D &c. semper designant coefficiens superioris curvæ ita, ut $B = \frac{3m+1}{2m+1}$, $C = B \,.\, \frac{5m+1}{4m+1}$, $D = C \,.\, \frac{7m+1}{6m+1}$, atque ita deinceps. In hac autem serie quodlibet par habet curvas simul sumptas rectificabiles, & quidem æquales illi quantitati, quæ in tabella apposita est.

Producta hac serie ad partem inferiorem do operam, ut ad alteram etiam partem protraham. Hoc autem duplici methodo præstari potest, vel per naturam seriei, quæ satis cognita est, ut protrahi possit, vel per alterum generale theorema, quod in casu ad maximam simplicitatem conformatur. Hoc autem feci in tabella, & curvas apposui sub numeris negativis incipiendo a *o*. Hoc tamen discrimen intercedit inter inferiorem, & superiorem curvam, quod in hac litteræ G, H, K &c. designant coefficientes ordinatæ curvæ inferioris ita, ut sit $G = \frac{1}{m+1}$, $H = G \,.\, \frac{-2m+1}{-m+1}$, $K = H \,.\, \frac{-4m+1}{-3m+1}$, atque ita deinceps. Summa autem duarum curvarum apponitur ut supra.

Serie hac efformata exprime curvas per numeros, a quibus indicantur, atque hæc adnota

1 + 2

$$1 + 2 = x Z$$

$$2 + 3 = \frac{B x^{2m+1}}{A^{2m}} Z$$: Ergo facta subtractione

$$1 - 3 = \frac{A^{2m} x - B x^{2m+1}}{A^{2m}} . Z .$$ Præterea

$$3 + 4 = \frac{C x^{4m+1}}{A^{4m}} Z$$: Ergo facta additione

$$1 + 4 = \frac{A^{4m} x - B A^{2m} x^{2m+1} + C x^{4m+1}}{A^{4m}} Z,$$

atque ita progrediendo reperies, primam additam alteri tenenti sedem parem habere summam rectificabilem, imminutam autem altera tenente sedem imparem habere differentiam rectificabilem. Quod dictum est de prima demonstrabitur eadem ratione de omnibus aliis. Quare oritur hoc theorema: duæ quælibet curvæ ex nostra serie, si alia sit in sede pari, alia in impari, habeant summam rectificabilem; si ambæ in sede pari, aut ambæ in impari, habebunt differentiam rectificabilem. Itaque non tantum verum est, quod a Bernoullio notatur, quamlibet parabolam habere aliam parabolam, cum qua conjuncta rectificatur, sed etiam verum est, infinitas esse parabolas, quæ vel datæ additæ, vel a data detractæ rectificationem recipiunt.

Ex hoc infiniti alii arcus determinari possunt in nostris parabolis, quorum summa, vel differentia rectificabilis est. Quod ut brevissime indicem, sit quælibet parabola ACG, in qua sumpta abscissa AB determinetur arcus AC. Sit alia parabola AEM, quæ cum priori rectificationem recipiat. Abscindatur analoga abscissa AD, & arcus AE ita, ut AC + AE æquet quantitatem algebraicam. Accipiatur alia abscissa AF major determinans arcum AG. Duo accidere possunt: primum ut abscissa analoga sit major, quam AD, deinde ut sit minor. Sit primo major, nempe AH, cui respondet arcus AM. Quoniam

AG + AM æquat algebraicam quantitatem.

Item AC + AE facta subtractione inveniemus arcus CG + EM rectificabiles esse. Sit deinde abscissa AK minor quam AD; habebimus arcus AG + AN, &

AC + AE rectificabiles: Ergo facta subtractione detegemus CG — EN rectificabiles. Q. E. I.

Si vero duarum parabolarum differentia rectificabilis sit, in primo casu habebimus
AG — AM, &
AC — AE rectificabiles: Ergo subtrahendo
EG — EM pariter rectificabilis. In secundo autem casu per eandem methodum probabimus summam arcuum
CG + NE æquare quantitatem algebraicam.

Doctissimus Bernoullius optime advertit, ex parabola primaria cubica oriri parabolam primariam cubicam: quod ex nostra serie satis colligitur, quia si ponas $m = -\frac{2}{3}$, curvæ datæ, quæ numero 1 adjacet, ordinatæ erunt x, $3A^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$; curvæ autem 2, quæ a prima nascitur $\frac{3A^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{A^2}{x}$. Utraque vero curva invenitur esse parabola primaria cubica. Hoc tamen inest discriminis, quod in prima abscissæ accipiendæ sunt in axe, in secunda capiendæ sunt in tangente axi normale. Ex quo fit, ut curva tertia, quæ ex hac nascitur non sit amplius parabola primaria cubica, sed altioris ordinis, nimirum parabola quinta septimæ potestatis. Mira itaque videtur Bernoullio proprietas parabolæ cubicæ primariæ, cujus arcus conjunctus cum alio arcu ejusdem curvæ rectificationem non respuit.

Verum proprietas hæc non convenit soli primariæ cubicæ, sed etiam infinitis aliis parabolis. Namque tum in nostra serie curvæ erunt ejusdem ordinis, quoties index ordinatæ in superiore divisus per indicem abscissæ sit æqualis indici abscissæ divisæ per indicem ordinatæ in inferiore. Si hanc regulam adhibens efficias, ut duæ quælibet curvæ proxime sint in eodem ordine; semper invenies parabolas primarias cubicas: sed duæ hisce proximis, quarum una in sede inferiore, altera in sede superiore posita est, erunt parabolæ quintæ septimæ potestatis: quæ deinceps sequuntur, erunt duæ parabolæ nonæ undecimæ potestatis: atque ita deinceps. Quare omnes parabolæ, cujus index sit $= \frac{4n+1}{4n+3}$ existente n numero integro, habent proprietatem, ut conjunctæ cum alia parabola ejusdem ordinis rectificationem recipiant.

Quod si velis esse ejusdem ordinis duas parabolas non propinquas, sed quæ aliam mediam tenent, invenies parabolas tertias quintæ potestatis; quæ proximum locum obtinent, erunt parabolæ septi-

septimæ potestatis nonæ; quæ sequuntur parabolæ undecimæ potestatis decimætertiæ; atque ita deinceps. Omnes istæ parabolæ, quarum index generatim est $= \frac{4n+3}{4n+5}$ (n est aut numerus integer, aut o) minutæ arcu parabolico ejusdem ordinis rectificationem admittunt. Quæ autem inter has medium tenet locum, invenies esse hyperbolam appollonianam. Plura alia de curvis, quæ in exposita serie continentur adnotare possem: sed Geometræ scribens superfluum arbitror attingere, quæ ipse per sese videbit.

Deduximus ex nostra methodo bernoullianum theorema: sed quamplurima alia theoremata elicies, licet non ita simplicia atque elegantia, si indeterminatam V alia ratione determines; ut si statuas

$1 + V = M . \overline{1+pp}$, vel universalius

$1 + V = M . \overline{1+pp}^{\,n}$, aut si ponas $V = \frac{M}{x}$. Verum omittenda non est determinatio maxime simplex, per quam si algebraica sit curva data, etiam quæsita semper proveniet algebraica.

Supponamus $1 + V = \frac{M . \overline{1+pp}}{x}$: Igitur $x + Vx = M . \overline{1+pp}$, & sumptis differentiis, transpositisque terminis $V dx + x dV = 2 M p dp - dx$. Facta itaque substitutione coordinatarum differentiæ in curva quæsita erunt

$$2Mpdp - dx + Mpdp \quad , \quad 2Mp^2dp - pdx + Mp^2dp$$

sive

$$3Mpdp - dx \quad , \quad 3Mp^2dp - pdx$$

& facta integratione

$\frac{3}{2}Mp^2 - x \quad , \quad Mp^3 - Spdx$. Si curva data sit algebraica, poterit algebraice haberi $Spdx$: Ergo etiam curva inventa algebraica est. Utriusque autem curvæ arcus simul sumpti erunt $= M . \overline{1+pp}^{\,\frac{3}{2}}$. Hoc solum adverte, constantium sæpe habendam rationem esse, quas omisimus in integratione.

Si velis seriem construere ex nostra methodo, rem inutilem tentabis, nam cito ad eandem curvam redibis. Quod ut constet, fac $3Mp^2 - x = z$: Ergo curvæ coordinatæ sunt

$z, \quad Spdz$: Igitur curvæ, quæ ex hac nascitur, coordinatæ inve-

invenientur, si novam constantem N introducas

$\frac{3}{2} Np^2 - z$, $Np^3 - Spdz$, & pro z

ejus valore substituto

$\frac{3}{2} Np^2 - \frac{3}{2} Mp^2 + x$, $Np^3 - \overline{S\,3Mp^2 dp - pdx}$

five

$\frac{3}{2} . \overline{N - M} . p^2 + x$, $\overline{N - M} . p^3 + Spdx$.

Summa autem arcus superioris, & hujus erit $= N . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$: Ergo differentia inter arcum datæ, & modo inventæ $=$

$\overline{N - M} . \overline{1 + pp}^{\frac{3}{2}}$.

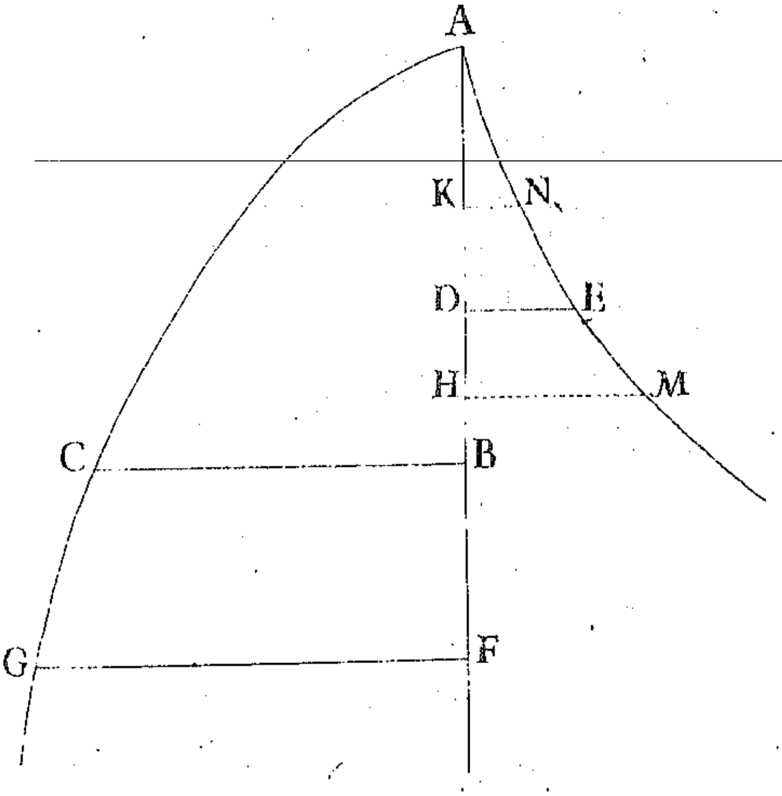
Si rursus fiat $\frac{3}{2} . \overline{N - M} . p^2 + x = z$, invenientur ordinatæ novæ curvæ introducta tertia constante O

$\frac{3}{2} . \overline{O - N + M} . p^2 - x$, $\overline{O - N + M} . p^3 - Spdx$,

quæ non differt ab ea, quæ primum inventa est, namque quod in illa $= M$, in hac $= O - N + M$. Quare hæc determinatio quantitatis V seriem utilem suppeditare non potest.

Sed hæc satis sint ad methodum indicandam. Tu interea geometriam, ut facis, cole, & perfice. Vale.

OPU-



8.

	Abscissæ	*Ordinatæ*	*Curvarum summæ in qua ponitur* $Z = \frac{\overline{A^{2m} + x^{2m}}^{\frac{3}{2}}}{A^{3m}}$
-3	I. $\frac{x^{-8m+1}}{A^{-8m}}$	I. $\frac{\overline{-8m+1}\,.\,x^{-7m+1}}{\overline{-7m+1}\,.\,A^{-7m}}$	I. $\frac{x^{-7m+1}}{A^{-5m}}\,Z$
-2	K. $\frac{x^{-6m+1}}{A^{-6m}}$	K. $\frac{\overline{-6m+1}\,.\,x^{-5m+1}}{\overline{-5m+1}\,.\,A^{-5m}}$	K. $\frac{x^{-5m+1}}{A^{-5m}}\,Z$
-1	H. $\frac{x^{-4m+1}}{A^{-4m}}$	H. $\frac{\overline{-4m+1}\,.\,x^{-3m+1}}{\overline{-3m+1}\,.\,A^{-3m}}$	H. $\frac{x^{-3m+1}}{A^{-3m}}\,Z$
0	G. $\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$	G. $\frac{\overline{-2m+1}\,.\,x^{-m+1}}{\overline{-m+1}\,.\,A^{-m}}$	G. $\frac{x^{-2m+1}}{A^{-2m}}$
1	x	$\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1}\,.\,A^{m}}$	xZ
2	$\frac{\overline{3m+1}\,.\,x^{2m+1}}{\overline{2m+1}\,.\,A^{2m}}$	$\frac{x^{3m+1}}{A^{3m}}$	
3	B. $\frac{\overline{5m+1}\,.\,x^{4m+1}}{\overline{4m+1}\,.\,A^{4m}}$	B. $\frac{x^{5m+1}}{A^{5m}}$	B. $\frac{x^{2m+1}}{A^{2m}}\,Z$
4	C. $\frac{\overline{7m+1}\,.\,x^{6m+1}}{\overline{6m+1}\,.\,A^{6m}}$	C. $\frac{x^{7m+1}}{A^{7m}}$	C. $\frac{x^{4m+1}}{A^{4m}}\,Z$
5	D. $\frac{\overline{9m+1}\,.\,x^{8m+1}}{\overline{8m+1}\,.\,A^{8m}}$	D. $\frac{x^{9m+1}}{A^{9m}}$	D. $\frac{x^{6m+1}}{A^{6m}}\,Z$
6	E. $\frac{\overline{11m+1}\,.\,x^{10m+1}}{\overline{10m+1}\,.\,A^{10m}}$	E. $\frac{x^{11m+1}}{A^{11m}}$	E. $\frac{x^{8m+1}}{A^{8m}}\,Z$

OPUSCULUM DUODECIMUM.

De methodo Hermanni ad locos geometricos resolvendos

EPISTOLA.

VINCENTIUS RICCATUS

PIO FANTONO

In Bononiensi Archigymnasio Publico Geometriæ Professori

S. P. D.

QUum eam methodum, quæ ad construendos locos geometricos secundi gradus in Ac. Petrop. tomo quarto proposita est ab Hermanno viro celeberrimo, probas, atque *extollis*, judicium tuum, Vir Clarissime, plurimi facere, verbisque commendare non desino. Nam quamquam methodo illa non utor, quia a primis annis aliæ factæ mihi sunt consuetudine familiares; tamen ea nulli simplicitate, atque elegantia mihi videtur concedere. Verum in ea nonnihil obscuritatis aliquando latere putas: in quo convenire tecum non possum. Etenim tametsi multa nimis jejune ab Hermanno tractata censeam, pleraque etiam, eaque magis difficilia prorsus omissa; tamen ita omnia, neque multis verbis explicari posse contendo, ut omni obscuritate sublata luce meridiana clariora fiant. Quando autem rogas (nihil enim tibi roganti negare possum) accipe aliquot propositiones, in quibus hypotheses omnes Hermanni methodo clarissime absolvuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

Æquationes primi gradus construere.

UT Hermanni methodo utamur, danda est æquationi hujusmodi forma $y = mx + n$, quod semper fieri posse certum est. Sume

Sume (*Fig.* 1) initium abſciſſarum in puncto A, abſciſſas autem x in recta AP poſitivas ad partem dexteram, negativas ad ſiniſtram: y poſitivæ ſurſum dirigentur, negativæ deorſum; quod ſemper faciemus. Jam vero pone $x = o$, & fiet $y = n$. Quare ex puncto A, quod eſt abſciſſarum initium, erige ad quemcumque angulum $AF = n$, per punctum F tranſeat neceſſe eſt linea recta, quæ noſtræ æquationis ſit locus. Tum face $y = o$, & fiet $x = \frac{-n}{m}$. Itaque ad partem abſciſſarum negativarum ſume $AD = \frac{n}{m}$, & determinabitur aliud punctum D, per quod locus tranſeat. Si igitur jungas DF, habebis locum quæſitum, eruntque $AP = x$, $PM = y$, quæ quærebantur.

Si in æquatione $n = o$, tum facta $y = o$, prodiret $x = o$: quod indicat puncta D, A coincidere, & locum tranſire per punctum A initium abſciſſarum. Hoc quum accidat nihil juvat efficere $y = o$; prodiret enim $x = o$, neque novum loci punctum determinaretur. Quare ut hoc incommodum arceatur, ponenda eſt x æqualis cuicumque conſtanti, ex. ca. $= s$, & fiet $y = ms$. Abſcinde itaque $AG = s$, & excita $G\overset{1}{F} = ms$ in quocunque angulo: punctum $\overset{1}{F}$ attingat, oportet, locus quæſitus. Itaque ducatur $A\overset{1}{F}M$, & ducantur MP parallelæ $\overset{1}{F}G$ erunt $AP = x$, $PM = y$ æquationis propoſitæ.

Si $m = o$, liquet, locum quæſitum fore rectam parallelam lineæ abſciſſarum.

Ex harum conſtructionum ratione ſatis conſtat, quomodo obtinere poſſis, ut ordinatæ quemlibet angulum efficiant cum linea abſciſſarum. Quod ſi velis, ut locus ipſe cum ordinatis datum faciat angulum, hoc modo haud difficulter voti compos fiet. Super recta $AD = \frac{-n}{m}$ in caſu primo, aut $AG = s$ in caſu altero deſcribe circuli ſegmentum capiens angulum datum, in quo accommoda $AF = n$ in primo caſu, aut $G\overset{1}{F} = ms$ in ſecundo caſu, locus per punctum determinatum tranſiens datum angulum faciet cum ordinatis. Angulus autem iſte rectus erit, quum ſegmentum deſcriptum fuerit ſemicirculus. Hanc animadverſionem neceſſarium fuit præmittere, quia illius deinceps indigebimus.

PRO-

PROPOSITIO ALTERA.

Æquatio $y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$ pertinet ad Ellypsim, si p sit negativa; ad Parabolam, si $p = o$; ad Hyperbolam, si p sit positiva.

INjurius tibi esse viderer, si hujusce propositionis demonstrationem exponerem.

Æquatio omnis alterius gradus indeterminata, quæ contineat quadratum yy, potest, ut probe nosti, per extractionem radicis ad eam formam reduci, quam habet hujusce propositionis æquatio.

PROPOSITIO TERTIA.

Æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{qx + r}$ ad Parabolam pertinentem construere.

ÆQuatio dividatur in duas, & ponatur pars rationalis $mx + n = z$, pars irrationalis $\pm \sqrt{qx + r} = u$. Harum prima construatur per primam propositionem, cujus locus determinat positionem diametri sectionis describendæ. Posita itaque linea abscissarum DAG (*Fig.* 2), & earundem initio in puncto A, locus rationalis æquationis sit DVF, in quo posita erit diameter Parabolæ, cujus constructio postulatur. Ut autem ejus vertex determinetur, sumatur altera æquatio irrationalis, in qua ponatur $u = o$, & invenietur $x = \frac{-r}{q}$. Itaque accipienda est AH $= \frac{r}{q}$ ad partes negativarum abscissarum, quia valor negativus prodit, & ducenda constructi loci ordinata HV secans locum in puncto V: punctum hoc erit vertex diametri. Ad Parabolam describendam aliud punctum determinandum est, per quod transeat. Hanc ob rem face $x = o$, & invenies $u = \pm \sqrt{r}$. Igitur ducta AF ordinatis parallela, sume in ea ex utraque parte puncti F rectas FQ, Fq, quæ cum inter se æquales sint, tum singulæ $= \sqrt{r}$: puncta Q, q erunt in sectione describenda. Quapropter diametro VF, tangente VH, vertice V describatur Parabola transiens per punctum Q: hæc erit locus quæsitus, & AP erunt $= x$, PM $= y$ æquationis propositæ.

Si $r = o$, & puncta A, H coinciderent, tum ad determinandum punctum aliquod Q, per quod Parabola transeat, nihil juvaret facere $x = o$; sed ponenda esset $x =$ cuicumque constanti, ex. ca. $= s$, & fiet $u = \pm \sqrt{qs}$. Quantitas autem s ita sumenda est, ut $\sqrt{qs}$ non sit imaginaria: quare si q positiva est & ipsa affirmativa sit oportet, & vice versa: opportunum fortasse erit ponere $s = q$; nam tum $\pm \sqrt{qs} = \pm q$ evadit. Quare secta AG' $= s$ age G'F' parallelam ordinatis, & ex utraque parte puncti F' duc F'Q' $=$ F'q' $= \sqrt{qs}$, & duo puncta Q', q' in Parabola posita determinabis.

Eodem artificio utaris necesse est, si r fuerit negativa. Nam quum $\sqrt{r}$ sit imaginaria, per eam puncta curvæ non definientur. Quare facienda est in formula irrationali $x = s$, ut proveniat $u = \pm \sqrt{qs + r}$. Quantitas autem s non solum ita sumenda est, ut qs sit affirmativa, sed etiam tam magna sit oportet, ut $qs > r$. Cætera ut supra absolvenda.

Si parametrum quæras ejus diametri, ad quam curva refertur, ajo eam esse $= \frac{FQ^2}{VF}$, vel $\frac{F'Q'^2}{VF'}$.

PROPOSITIO QUARTA.

Construere æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{- px^2 + qx + r}$, quæ pertinet ad Ellypsim.

Fiat primum $mx + n = z$, deinde $u = \pm \sqrt{- px^2 + qx + r}$. Prima ex his construatur per propositionem primam, & determinetur positio diametri, ut in superiore (*Fig.* 3). Ut vertices determinentur, ponenda est $u = o$, & invenietur $x = \frac{q}{2p} \pm \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$. Hi duo valores utrumque verticem determinant. Nam fiat A$b = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & AH $= \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & ex punctis b, H ordinentur bu, HV; u, V erunt vertices quæsiti, & Vu diameter. Si r negativa sit, & major, quam $\frac{qq}{4p}$ omnia

fiunt

fiunt imaginaria, & constructio impossibilis. Si vero $r = \frac{-qq}{4p}$ puncta H, b, adeoque V, u coincidunt: qua de re Ellypsis redigitur ad punctum, & valores omnes y, & u imaginarii sunt præter unum duntaxat, qui respondet abscissæ $= \frac{q}{2p}$.

Quando autem constructio possibilis est, ad determinandum aliud punctum, per quod Ellypsis transeat, face $x = o$, & invenies $u = \pm\sqrt{r}$. Abscinde itaque $FQ = Fq = \sqrt{r}$; tum describe Ellypsim habentem diametrum Vu, tangentem rectas VH, ub, & transeuntem per punctum Q, & obtinebis locum quæsitum.

Si r aut sit $= o$, aut sit negativa, supervacaneum est supponere $x = o$, quia in primo casu fiet $u = o$, in secundo imaginaria. Quare fiat $x = s$, quæ quantitas ita sumenda est, ut sit media inter duas $Ab = \frac{q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & $AH = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, ne valor quantitatis u proveniat imaginarius. In hac suppositione inveniemus $u = \pm\sqrt{-ps^2 + qs + r}$. Quare sumpta $AG = s$, duc $G\overset{\mathrm{I}}{F}$, in qua abscinde $\overset{\mathrm{I}}{F}\overset{\mathrm{I}}{Q} = \overset{\mathrm{I}}{F}\overset{\mathrm{I}}{q} = \sqrt{-ps^2 + qs + r}$: puncta $\overset{\mathrm{I}}{Q}$, $\overset{\mathrm{I}}{q}$ spectant ad Ellypsim describendam.

Ad inveniendam diametrum conjugatam fac advertas esse $Hb = 2\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$: Ergo divisa Hb bifariam in K fiet $HK = \sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$: Ergo invenietur $AK = \frac{q}{2p}$: Igitur posita in æquatione irrationali $x = \frac{q}{2p}$ inveniemus $u = \sqrt{\frac{qq}{4p} + r}$, cui semidiametri conjugatæ CT, Ct æquabuntur.

Sæpe Ellypsis, quæ construitur, circulus esse potest. Quæri autem potest, in quibus nam circumstantiis hoc contingat: nam hoc cognito constructio evaderet multo simplicior, atque facilior. Ut curva describenda sit circulus, nosti, Vir Clarissime, duas conditiones requiri. Prima est, ut ordinatæ concurrant cum diametro Vu ad angulos rectos: Ad habendam hanc conditionem necesse est ita construere locum DF æquationis rationalis, ut ordinatæ AF faciant cum eodem angulum rectum: supra autem docuimus, quo pacto hoc fiat.

Altera conditio postulat, ut duæ diametri conjugatæ æquales ſint inter ſe. Quando autem inventa eſt diameter conjugata, inveniendа eſt nunc diameter Vu, ut duæ diametri æquari poſſint. Hanc ob rem angulum, quem ordinatæ faciunt cum linea abſciſſarum, ut DAF voca $= \varphi$, ejus ſinus exprimatur per *Sin.* φ. ſinus totus per *Sin.* t. Manifeſtum eſt fore

$$\text{Sin. } t : \text{Sin. } \varphi :: Hb = 2\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}} : Vu = \frac{2.\text{Sin. } \varphi}{\text{Sin. } t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}};$$

Ejus dimidium $VC = \frac{\text{Sin. } \varphi}{\text{Sin. } t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$. Semidiameter hæc facienda eſt æqualis ſemidiametro conjugatæ, & orietur æquatio $\sqrt{\frac{qq}{4p} + r} = \frac{\text{Sin. } \varphi}{\text{Sin. } t}\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, & facta diviſione per $\sqrt{\frac{qq}{4pp} + \frac{r}{p}}$, fiet $\sqrt{p} = \frac{\text{Sin. } \varphi}{\text{Sin. } t}$: Ergo $p = \frac{\overline{\text{Sin. } \varphi}^2}{\overline{\text{Sin. } t}^2}$. Quoties igitur ſervata prima conditione hujuſmodi ſit valor p, Ellypſis erit æquilatera, ſive circulus.

Angulus φ, ejuſque ſinus dependent a notis quantitatibus, quæ inſunt in rationali æquatione. Si fiat $AD = \frac{-n}{m}$, erit $AF = n$, & $DF = \frac{n}{m}\sqrt{1 - mm}$. Quare poſito ſinu toto $= \frac{n}{m}$, erit *Sin.* $\varphi = \frac{n}{m}\sqrt{1 - mm}$: Ergo $p = 1 - mm$. Itaque ſi $p = 1 - mm$, æquatio per circulum conſtrui poterit.

Etiamſi foret $n = o$, tamen eodem ratiocinio probarem, eundem provenire quantitatis p valorem. Quod ſi $m = o$, deberet $p = 1$. Quapropter aperte conſtat, quando conſtructio adhibito circulo poſſit abſolvi.

PROPOSITIO QUINTA.

Conſtruere æquationem $y = mx + n \pm \sqrt{px^2 + qx + r}$ ad Hyperbolam ſpectantem, quum r minor eſt, quam $\frac{qq}{4p}$.

DIvide æquationem de more in duas $mx + n = z$, $u = \pm\sqrt{px^2 + qx + r}$. Primam conſtrue ut ſupra ex prima propoſitione, & determina rectam (*Fig.* 4) VD, quæ erit poſitio diametri hyperbolæ conſtruendæ. Ex altera vertices hujuſce diametri

tri definies, si ponas $u = o$: qua in hypothesi invenies $x = \frac{-q}{2p}$ $\pm \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, qui valores reales erunt, quum posita sit $r < \frac{qq}{4p}$. Igitur abscinde $AH = \frac{-q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, & $AH = \frac{-q}{2p} + \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, & ex punctis H$b$, duc parallelas ordinatis HV, bu, quæ in recta VD determinabunt vertices V, u. Ut aliud punctum invenias, per quod curva transeat, fac $x = s$ cuicumque scilicet constanti, quæ tamen, ut imaginaria vites, oportet non sit media inter rectas AH, Ab, sed vel utraque major, vel utraque minor, & nancisceris $u = \pm \sqrt{ps^2 + qs + r}$. Abscinde itaque $AG = s$, & ducta $G\overset{\text{I}}{F}$ accipe $\overset{\text{I}}{F}\overset{\text{I}}{Q} = \overset{\text{I}}{F}\overset{\text{I}}{q} = \sqrt{ps^2 + qs + r}$: tum describe hyperbolam, cujus diameter sit Vu, tangens VH, & quæ transeat per puncta $\overset{\text{I}}{Q}$, $\overset{\text{I}}{q}$; locum quæsitum obtinebis.

Si rectarum AH, Ab vel utraque affirmativa sit, vel utraque negativa, poteris facere $x = o$, & invenies $u = \pm \sqrt{r}$, quæ radix in nostra hypothesi erit realis. Ducta itaque AF parallela ordinatis, sume $FQ = Fq = \sqrt{r}$; puncta Q, q erunt in hyperbola describenda.

Casus isti omnes tractati sunt in Hermanni opusculo, in quo tamen desiderantur multæ animadversiones, quæ, quoniam necessariæ visæ sunt, a nobis non sunt prætermissæ; ut si Hermannum legeris, plane cognosces. De illis vero casibus, quos in reliquis propositionibus consideramus, ne verbum quidem fecit Hermannus.

PROPOSITIO SEXTA.

Eandem æquationem construere, quum $r > \frac{qq}{4p}$.

CAsus iste, qui cæteroquin omnium difficilimus est, per ea, quæ explicata sunt, absolvi nulla ratione potest. Nam si divisa, ut supra, æquatione in duas fiat $u = o$, valor abscissæ x provenit imaginarius: quod non indicat, impossibilem esse constructionem, sed æquationem ad secundam diametrum esse referendam. Quem casum ut secundum Hermanni methodum tractemus, nihil judico opportunius, quam determinare vertices primæ diametri

tri conjugatæ ejus, cui referenda est æquatio. Hanc ob rem advertentes primam semidiametrum minimam esse ex ordinatis applicatis secundæ diametro, possemus eam per methodum maximorum, & minimorum determinare. Sed quum geometricorum locorum doctrina iis plerumque tradatur, quibus sublimiores theoriæ ignotæ sunt, aliam viam sequi, satius judicamus.

Fac advertas primam diametrum in hyperbola æqualiter distare a lineis æqualibus, quæ applicantur ejus diametro conjugatæ, sive partem secundæ diametri interceptam inter duas ordinatas æquales dividi a prima diametro, aut a centro bifariam. Hoc autem centro invento nihil est facilius, quam primæ diametri magnitudinem definire. His præmissis, quæ certa sunt,

Æquationem datam de more divide in duas $mx + n = z$, $u = \pm\sqrt{px^2 + qx + r}$. Primam construe ut semper. Per alteram ut invenias expedite duas ordinatim applicatas u æquales inter se, pone $x = o$, & habebis $u = \pm\sqrt{r}$, quæ radix nunquam potest esse imaginaria, quia in hoc casu $r > \frac{qq}{4p}$, quæ quantitas positiva est, quum in hyperbola p (*Fig.* 5) sit positiva. Itaque ducta ordinatis parallela recta AF accipiatur $FQ = Fq = \sqrt{r}$, & puncta Q, q erunt in sectione. Pro u introduc $\sqrt{r}$ in æquationem, & invenies $r = px^2 + qx + r$, sive $px^2 + qx = o$, cujus radices sunt $x = o$, $x = \frac{-q}{p}$: Ergo utrumlibet valorem habeat x, erit semper $u = \sqrt{r}$. Abscinde itaque $AG = \frac{-q}{p}$, ductaque ordinata GH age $HR = Hr = \sqrt{r}$, & puncta R, r erunt in sectione describenda. Tum AG divide bifariam in E, & excita ordinatam EC, punctum C erit centrum hyperbolæ. Quoniam autem $AE = \frac{-q}{2p}$, hunc valorem pro x in æquatione substitue, & nanciseeris $u = \pm\sqrt{\frac{qq}{4p} - \frac{qq}{2p} + r} = \pm\sqrt{\frac{-qq}{4p} + r}$, qui est valor semidiametri primæ. Abscinde igitur $CV = Cu = \sqrt{\frac{-qq}{4p} + r}$, atque ex prima diametro Vu describe hyperbolam transeuntem per puncta Q, R, & habebis locum quæsitum.

In hoc casu si habeatur $q = o$, & fiat $x = o$, proveniet $u = \pm\sqrt{r}$: quo valore in æquationem introducto erit $r = px^2 + r$, sive $x^2 = o$. Quapropter quum uterque valor x nullus sit, constat, ordinatam respondentem puncto A (*Fig.* 6) esse in prima diametro.

tro. Quare ordinata AC, punctum C erit centrum ſectionis, & ſumptis $CV = Cu = \sqrt{r}$, erunt V, u primæ diametri vertices. Ut reperias punctum aliud, per quod curva tranſeat, fac $x = s$, & erit $u = \pm\sqrt{ps^2 + r}$. Accipe $AE = s$, & ducta $E\overset{I}{F}$ fac $\overset{I}{F}\overset{I}{Q} = \overset{I}{F}\overset{I}{q} = \sqrt{ps^2 + r}$, atque ex prima diametro Vu deſcribe hyperbolam tranſeuntem per puncta $\overset{I}{Q}$, $\overset{I}{q}$, & locum æquationis obtinebis.

Si in data æquatione hyperbolæ inveniatur $r = \frac{qq}{4p}$, quod eſt velut confinium inter duos caſus expoſitos, tunc æquatio vertetur in hanc $y = mx + n + \overline{x + \frac{q}{2p}} \cdot \pm\sqrt{p}$, quæ licet ſit ad lineas rectas, tractari tamen poteſt methodo ultimarum propoſitionum: in hoc enim caſu hyperbola in duas rectas mutatur.

Nihil jam reliquum eſt, niſi ut de illis æquationibus agamus, quæ, deficiente quadrato yy, ad ſuperiorem formam reduci non poſſunt. In his vel adeſt planum xy, vel ſecus. Utrumque genus duplex, quæ ſequitur propoſitio, complectetur.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Æquationes illas conſtruere, in quibus deeſt non minus planum xy, quam quadratum yy.

Æquationes hujuſmodi ſemper reduci poſſunt in hanc formam $y = mx + n + px^2$. Hæc æquatio in duas dividenda eſt hoc pacto $z = mx + n$, $u = px^2$. Prima de more conſtruatur. In altera, quæ ſatis oſtendit parabolam, cujus locus DVF (*Fig.* 7) eſt tangens, ſi fiat $u = o$, invenietur $x = o$. Quare ex puncto A abſciſſarum initio duc ordinatam AV, quæ ſignabit punctum V, in quo parabola debet tangere lineam DV. Ut aliud punctum determines in curva poſitum, fac $x = s$, & erit $u = ps^2$. Igitur ſume $AG = s$, tum ducta ordinata GF, accipe $FQ = ps^2$. Demum ut habeas locum optatum, deſcribe parabolam, quæ tangat DF in V, & tranſeat per punctum Q.

Nihil facilius eſt, quam determinare parametrum diametri AV; eſt enim $= \frac{VF^2}{FQ} = \frac{s^2}{ps^2} = \frac{1}{p}$.

PRO-

PROPOSITIO OCTAVA.

Æquationes illas construere, quæ planum xy, non autem quadratum yy continent.

Æquationes, de quibus nunc agendum est, hanc formam semper accipere possunt $y = mx + n + \frac{p}{x+q}$. Efforma de more æquationes duas $z = mx + n$, & $u = \frac{p}{x+q}$. Hæc altera æquatio clare manifestat, æquationem referendam esse ad hyperbolam inter assymptotos. Quare si prima æquatio construatur, ut semper factum est, determinabitur positio unius assymptoti DM (*Fig.* 8): Ut alterius assymptoti per secundam æquationem fiat determinatio, ponatur $u = \frac{1}{o}$, & invenietur $x = -q$. Abscinde AE $= -q$, & per E age ordinatis parallelam NEC, quæ erit alterum assymptotum, & C erit centrum sectionis. Ut habeas punctum per quod curva transeat, fac $x = s$ cuicumque scilicet constanti, & orietur $u = \frac{p}{s+q}$. Ergo sumpta AG $= s$, ducta GF, & secta FQ $= \frac{p}{s+q}$ describatur inter assymptotos CM, CN hyperbola transiens per punctum Q, ea erit locus quæsitus.

Quando non est $q = o$, utilius erit ponere x, seu $s = o$, ut facilius punctum per quod curva transeat, determinetur.

Hæc, quæ ad perficiendam elegantem Hermanni methodum inventa sunt, postquam diligenter inspexeris, nihil in ea tibi, Vir Clarissime, obscurum, nihil implicitum spero fore, ut videatur. Quoniam autem hæc scribens tuæ morem gessi voluntati, abs te flagito, ut quæcunque tandem sint, quemadmodum soles, æquo animo accipias. Vale, & geometriæ, bonisque artibus te diutissime conserva.

Ex Col. S. Luciæ Kal. Januarii 1751.

OPU-

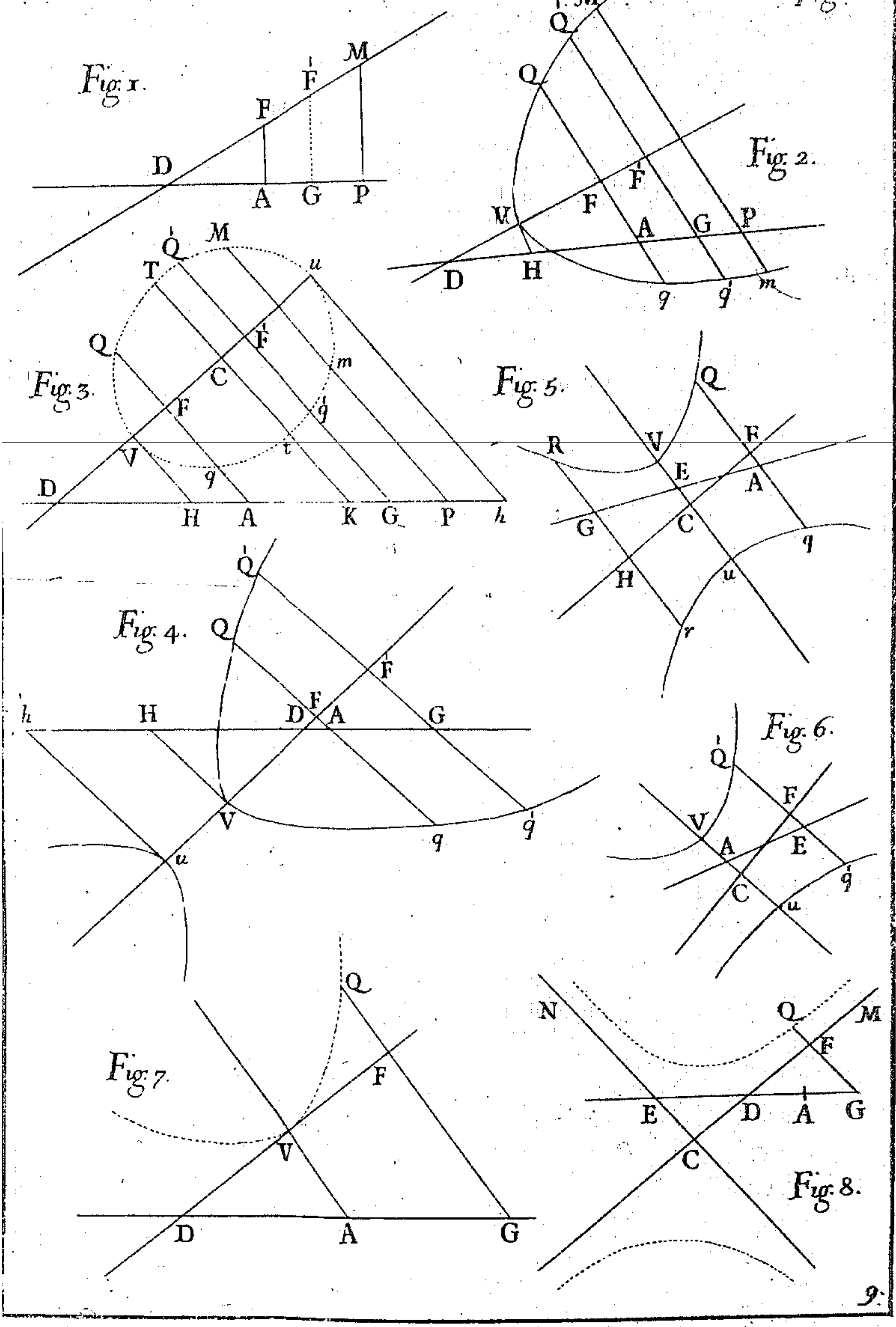


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

OPUSCULUM TERTIODECIMUM.

De præcipuis pendulorum circularium, & cycloidalium proprietatibus.

EPISTOLA.

VINCENTIUS RICCATUS

VIRO NOBILI

ALPHONSO CO: MALVETIO

S. P. D.

SI qua est, Alphonse ornatissime, in rebus physico-mathematicis investigatio, quæ in adhibendis quantitatibus infinite parvis sedulitatem, & cautionem desideret, ea certe videri debet, quæ agit de oscillationibus pendulorum per arcus minimos, quemadmodum doctorum virorum non contemnendi paralogismi demonstrant. Gratum itaque me tibi facturum spero, si de re hac pro virili parte tractabo, tum quia rectum infinite parvorum usum alieno periculo tibi ostendam, tum quia hanc physices partem maxime necessariam geometrice demonstrabo. Quam ob rem sine, ut prius de pendulo cycloidali, tum de pendulo circulari, demum de eorum comparatione non minus clare, quam breviter disseram.

Ac primum Hugenianam propositionem de isochronismo penduli cycloidalis, alia methodo demonstrandam mihi propono. Ajo itaque corpus per cycloidem oscillans eodem tempore ad punctum infimum perventurum. Sit cyclois (*Fig.* 1) BDA, cujus axis AE, & circulus genitor ALE: ajo mobile vel incipiat descendere ex puncto B, vel ex quolibet alio puncto D eodem tempore ad punctum A perventurum.

Sume arcus BG, DH, item eorum elementa G*g*, H*h*, quæ sint in ratione integrorum arcuum AB, AD. Ex punctis B, D, G, H agantur lineæ BE, DF, GI, HK, quæ circumferentiam circuli genitoris secent in punctis E, L, M, N; & ducantur chordæ AL, AM, AN. Quoniam arcus AB est ad BG, sicuti AD : DH, erit etiam arcus $AB : AG :: AD : AH$: sed ex cycloidis proprietate chordæ AE, AM, AL, AN sunt dimidia arcuum AB, AG, AD, AH: Ergo erit $AE : AM :: AL : AN$: quare etiam eorum quadrata erunt proportionalia; nimirum $AE^2 : AM^2 :: AL^2 : AN^2$: sed his quadratis proportione respondent AE, AI, AF, AK: Ergo erit $AE : AI :: AF : AK$: Ergo dividendo $AE : EI :: AF : FK$: & invertendo, permutandoque $EI : FK :: AE : AF$: sed $AE : AF$ est in ratione duplicata $AE : AL$, seu arcus $AB : AD$: Ergo $EI : FK$ in ratione duplicata arcus $AB : AD$: seu vicissim arcus AB ad arcum AD est in ratione dimidiata $EI : FK$.

His demonstratis, quæ geometrica sunt, quantitates physicas contemplemur. Velocitas, quam corpus descendens ex B habet in G, est ad velocitatem, quam corpus descendens ex D habet in H, in ratione dimidiata $EI : FK$: Ergo ex demonstratis in simplici arcus AB ad arcum AD; sed tempus per Gg ad tempus per Hh est in ratione composita directa $Gg : Hh$, seu arcus $AB : AD$, & inversa velocitatum in G, H, seu arcus $AB : AD$: Ergo tempus per Gg æquale est tempori per Hh: quæ æqualitas quum valeat in omnibus elementis proportionalibus, constat eodem tempore corpus, vel incipiat descendere ex B, vel ex D, ad punctum A perventurum. Q. E. D.

Non est opus advertere, propositionem hanc veram esse, licet punctum D acceptum fuerit infinite proximum puncto A. Quum autem in percurrenda demicycloide BA indigeat corpus finito tempore, in percurrendo etiam infinitesimo arcu DA tempus finitum impendit.

Opportunum jam est, comparare tempus descensus cycloidalis cum tempore descensus rectilinei. Hanc ob rem (*Fig.* 2) conferamus motum per integram demicycloidem BGA cum motu per ejus axem EA. Describatur cycloidis circulus genitor AME, & ex quolibet puncto G agatur horizontalis GMI, eique infinite proxima gmi. Ducatur chorda AM, quæ secet GI in n, & BE in H, & agatur tangens MK, & chorda ME. Quoniam triangulum HME est rectangulum in M, & tangens MK æquat tangentem KE, punctum K erit centrum semicirculi transeuntis per puncta E, M, H: Ergo KH erit æqualis KE. Producatur AE in D, donec ED æquat AE.

His præmissis tempus, quo mobile motu æquabili velocitate ultimo acquisita per descensum ab EA conficit semicircumferentiam EMA, est ad tempus quo motu æquabili eadem velocitate percurrit DA ut semicircumferentia ad duplam diametrum: atqui tempus, quo motu æquabili velocitate acquisita descendendo per EA percurrit

rit DA, est æquale tempori motus accelerati per eandem EA: Ergo tempus, quo motu æquabili velocitate acquisita in descensu per EA semicircumferentia conficitur, est ad tempus motus accelerati per EA ut demicircumferentia ad duplam diametrum.

Tempus per elementum Gg ad tempus per elementum Mm, dum circumferentia describitur motu æquabili antea definito, est in ratione composita directa Gg : Mm, & reciproca velocitatis in G ad velocitatem in M. Sed prima ratio scilicet Gg : Mm est eadem ac ratio Mn : Mm, sive MH : MK, sive MH : KE. Secunda ratio nempe velocitatis in G ad velocitatem in M eadem est cum ratione dimidiata EI : EA, sive cum ratione simplici ME : EA, sive MH : HE: Ergo tempus per Gg ad tempus motus æquabilis per Mm in ratione composita directa MH : KE, & inversa MH : HE, sive in ratione simplici HE : KE, seu ut 2 : 1, seu ut DA : EA: quæ ratio, quandoquidem constans est, docet, tempus descensus per demicycloidem BGA esse ad tempus motus æquabilis per semicircumferentiam EMA ut DA : EA.

Atqui antea demonstratum est, tempus motus æquabilis per demicircumferentiam EMA esse ad tempus motus accelerati per EA ut semicircumferentia EMA ad duplam diametrum DA: ergo tempus motus per demicycloidem ad tempus descensus per ejus axem EA ut demicircumferentia EMA ad ejus diametrum EA. Q. E. D.

Quum ex superiori demonstratione tempus descensus per quemlibet arcum cycloidis æquale sit tempori descensus per integrum demicycloidem, & ex Galileo tempus descensus per quamlibet chordam circuli AM sit æquale tempori per diametrum, perspicuum est, tempus per quemlibet cycloidis arcum esse ad tempus descensus per quamlibet chordam circuli genitoris ut demicircumferentia ad diametrum. Quæ omnia vera sunt, tametsi cum arcus, tum chorda accipiantur infinitesimi.

Notum est, diametrum circuli osculantis cycloidem in puncto A esse quadruplam diametro circuli genitoris: Ergo tempus descensus per diametrum circuli osculatoris est duplum temporis motus per diametrum circuli genitoris: Igitur tempus descensus per arcum cycloidis ad tempus descensus per diametrum circuli osculatoris ut demicircumferentia ad duplam diametrum, seu ut quadrans ad diametrum. Quod item dicendum est de tempore casus per quamlibet chordam circuli osculatoris. Quod si velis comparare tempus motus per arcum cycloidis cum tempore motus per radium circuli osculatoris debes advertere hoc tempus esse ad tempus descensus per diametrum circuli genitoris ut $\sqrt{2} : 1$: Ergo tempus per cycloidem ad ad tempus motus per radium circuli osculantis ut demicircumferentia ad diametrum multiplicatam per $\sqrt{2}$; quæ æqualis est diametro quadrati circulo circumscripti, seu si mavis ut quadrans ad chordam quadrantis.

Antequam confero motum cycloidalem cum motu circulari, optimum judico, insignem paralogismum patefacere, in quem inciderunt viri summi putantes, arcum minimum circuli, & ejus chordam eodem tempore confici; tum ostendere majorem arcum circuli longiori tempore percurri quam minorem. Quod spectat ad primum Keillius, Parentius, Nicolaus de Martino, Musschembroekius, aliique viri non ignobiles animadvertentes, arcum minimum, ejusque chordam adæquari, statuerunt, mobile descendens primum per arcum, deinde per chordam impendere tempora, inter quæ adæquatio similiter intercedat. Adversus hos sit hæc planissima demonstratio.

Sit minimus arcus circuli ADB (*Fig. 3*) ejusque corda AB. Ex centro circuli C ducatur quilibet radius COD, & sumpto arcu Dd infinitesimo respectu AB jungatur radius Cd secans chordam in o. Ex punctis D, O ducantur verticales DM, ON, & horizontales DG, OF.

His positis facile est demonstratu, arcum ADB adæquare chordam AB, AD = AO, $Dd = Oo$, & DB = OB: Ergo tempus per Dd ad tempus per Oo erit in ratione reciproca velocitatum in D, O, quas constat esse in ratione dimidiata rectarum DM, ON. Recta vero DM ita excedit ON, ut adæquari nulla ratione possint. Nam lineæ DM, NO sunt infinitesimæ secundi ordinis; sed etiam earum differentia FG est ejusdem ordinis. Nam demonstratum est a Newtono DO esse infinitesimam secundi ordinis: Ergo etiam FG, quæ cum DO finitam habet proportionem, erit infinitesima secundi ordinis: Ergo hæc differentia FG finitam habet rationem cum lineis DM, ON: Igitur inter has intercedere adæquatio non potest. Quare constat tempus per arcum minimum circuli minus esse, quam tempus per ejus chordam, & nullo pacto suppositam adæquationem subsistere.

Sed proportionem inter MD, NO penitius indagemus. Quapropter adverte demonstratum esse a Newtono AG esse ad AE in ratione duplicata arcus AD ad arcum AB, sive rectæ AO ad AB: Ergo dividendo erit AE − AG, sive EG : AE :: $AB^2 - AO^2 : AB^2$ :: $\overline{AB - AO} \cdot \overline{AB + AO} : AB^2$ :: $BO \cdot \overline{AB + AO} : AB^2$.

Hoc

Hoc supposito MD : NO est in ratione $\begin{matrix} MD : AE \\ \text{composita } AE : NO \end{matrix}$: atqui prima ratio nempe MD : AE eadem est ac ratio EG : AE, seu ex demonstratis $BO . \overline{AB + AO} : AB^2$. Secunda ratio scilicet AE : NO eadem est ac AB : BO:

Ergo MD : NO in ratione $\begin{matrix} BO . \overline{AB + AO} : AB^2 \\ \text{composita } AB : BO \end{matrix}$, sive in ratione simplici $AB + AO : AB$. Atqui tempus per Dd ad tempus per Oo in ratione inversa dimidiata MD : NO: Ergo etiam in ratione inversa dimidiata $AB + AO : AB$: Ergo tempus per Dd minus est tempore per Oo. Quum autem omnia elementa arcus celerius percurrantur quam elementa chordæ, constat integrum arcum celerius confectum iri quam chordam. Q. E. D. Vides ex hac demonstratione, quam caute adhibendæ sint infinitifesimæ quantitates, ne illæ inter æquales habeantur, quarum differentia non sit respectu ipsarum infinitesima.

Galileus, & Balianus viri doctissimi, quibus mixtam mathesim acceptam referimus, decepti a quibusdam experimentis a se institutis, putaverunt, pendulum circulare eodem tempore cum longiores, tum breviores oscillationes conficere. Imo Galileus sæpe ex suis principiis demonstrationem quæsivit, quam se numquam invenisse fatetur; neque enim falsæ propositionis demonstratio inveniri potest. At vero in præsens, quoniam tibi gratum fore confido, demonstrationem clarissimam exponam, qua fiet palam, tempus descensus per arcum circuli majorem majus esse tempore descensus per arcum minorem.

Sit semicirculus GBA (*Fig.* 4), cujus centrum C. Sumantur arcus inæquales BA major, DA minor. Ajo, tempus per BA majus esse tempore per DA.

Ducta ex B indefinita horizontali BE, describatur alter circulus secans BE in E ita, ut arcus AE sit similis arcui AD: quod problema facilem habet solutionem. Circulus autem descriptus sit AEF, cujus centrum K. Hujus circuli radio KF æqualem duc horizontalem FH, junge HA, & age GI parallelam FH: constat GI fore æqualem radio circuli dati, nempe CG. Agatur quælibet horizontalis MPO, cui sit infinite proxima mpo, & ducantur minimæ verticales mr, os. Jungatur HP secans GI in L. Accipiatur arcus DN similis arcui EO, & elementum Nn simile elemento Oo. Demum ducantur radii CM, CN, KO.

Concipiamus tria pendula, quorum primum percurrat arcum

BA,

BA, alterum arcum EA, tertium arcum DA, & comparemus tempora per tria elementa Mm, Oo, Nn. His positis tempus per Mm est ad tempus per Oo est ut $Mm : Oo$, sive

$$\begin{array}{l} \text{in ratione } Mm : mr :: CM : MP \\ \text{composita } os : Oo :: OP : KO \end{array} : \text{atqui}$$

tempus per Oo ad tempus per $Nn :: \sqrt{KO} : \sqrt{CN} = \sqrt{CM}$: Igitur tempus per Mm ad tempus per Nn erit

$$\begin{array}{l} \text{in ratione } CM : MP \quad \sqrt{CM} : \sqrt{KO} \\ \text{composita } OP : KO, \text{ seu } OP : MP : \text{ sed prima idest} \\ \qquad \sqrt{KO} : \sqrt{CM} \end{array}$$

$\sqrt{CM} : \sqrt{KO} :: \sqrt{GI} : \sqrt{FH}$: altera nempe $OP : MP ::$ $\sqrt{\text{rec. } FFA} : \sqrt{\text{rec. } GPA} :: \sqrt{FP} : \sqrt{GP} :: \sqrt{FH} : \sqrt{GL}$:

$$\begin{array}{l} \text{Ergo tempus per } Mm \text{ ad tempus per } Nn \text{ in ratione } \sqrt{GI} : \sqrt{FH}, \\ \qquad\qquad \text{composita } \sqrt{FH} : \sqrt{GL} \end{array}$$

sive in ratione simplici $\sqrt{GI} : \sqrt{GL}$. Atqui ubique GI major est quam GL: Ergo per singula elementa arcus BA tempus majus est, quam per singula elementa arcus DA. Igitur tempus per arcum BA majus est tempore per arcum DA. Q. E. D.

Si BA sit arcus infinitesimus, tum quælibet AP erit infinitesima secundi ordinis: Ergo etiam PT, quæ ad AP finitam habet proportionem, erit infinitesima secundi ordinis, sicut & IL: Igitur accepta GV media proportionali inter GI, IL, erit IV infinitesima secundi ordinis; sed tempus per Mm est ad tempus per Nn ut $GI : GV$: Ergo differentia temporum per Mm, Nn est ad ipsa tempora ut infinitesimum secundi ordinis ad finitum: Igitur tempora per Mm, Nn adæquantur. Quod cùm de omnibus analogis elementis verum sit, consequitur adæquari tempora per arcus integros minimos BA, DA. Quare perspicuum est, æquediuturnas esse minimas oscillationes penduli circularis. Q. E. D.

Nihil reliquum est, nisi ut comparemus pendulum cycloidale cum circulari. Sit semicyclois BGA (*Fig.* 5), cujus axis EA, & semicirculus quilibet FHA, cujus radius KA. Producta BE in D intelligatur mobile descendere modo per cycloidem, modo per circulum ex punctis B, D, vel ex punctis æque altis P, Q. Ducatur quælibet horizontalis GO, cui sit infinite proxima go. Quæritur quænam futura sit proportio temporum descensus per Gg, Oo. Describe circulum genitorem cycloidis EMA; age chordas AM, AO, quæ duæ chordæ erunt inter se in ratione dimidiata diametrorum EA,

FA,

FA, sive ducta AD in ratione simplici AD : AF; sed arcus AG duplus est quam chorda AM: Ergo arcus AG ad chordam AO in ratione 2 : 1 composita AD : AF, sive in ratione simplici AD : KA: Ergo differentia arcus nempe Gg ad differentiam chordæ AO in eadem ratione AD : KA: hæc enim est constans: sed ducta F*o* secante AO in *r*, notum est O*r* esse differentiam chordæ AO: Ergo G*g* : O*r* : : AD : KA. Atqui *r*O : O*o* : : F*o* : FA: Igitur G*g* : O*o* in ratione AD : KA, composita F*o* : FA sive ut rectangulum AD . F*o* : FA . AK. $= AH^2$. Producta AD donec concurrat cum KH in I, est AD : AH : : AH : AI: Ergo $AH^2 = AD . AI$. Igitur G*g* : O*o* : : AD . F*o* : AD . AI : : F*o* : AI, sive FO : AI. Quoniam vero mobilia ex punctis æque altis descendunt, tempora per G*g*, O*o* sunt ut G*g* : O*o*: Ergo ut FO : AI. Q. E. I.

Ut constans AI sit æqualis diametro AF, necesse est, ut diameter FA sit quadrupla quam AE. Si autem AF sit major quam quadrupla AE, AI major erit quam AF. Contra AI minor erit quam AF, si FA sit minor, quam quadrupla AE.

Quum AI major est quam AF, erit etiam major quam quælibet FO: Ergo tempus per quodlibet elementum circulare O*o* majus erit, quam per respondens elementum cycloidis G*g*: Ergo mobile descendens per arcum DA, vel QA majus tempus impendet, quam descendens per arcum cycloidis BA, vel PA.

Pro casu in quo AI sit minor AF, quod contingit quum AF est minor quam quadrupla AE, inveniendus est casus, ubi AI æqualis sit rectæ FD. Hoc autem continget quando KA sit æqualis EA, & punctum K cadat in E. Si autem AE major sit quam AK: tum linea AI semper minor erit linea FD, ergo etiam qualibet linea FO: Ergo tempus per quodlibet O*o* minus est tempore per quodlibet elementum G*g*: Ergo tempus per arcum circularem integrum minus tempore per cycloidem.

Si vero AK sit major AE, minor 2 AE, tum AI versus D erit major FO, in aliquo puncto æqualis, versus A minor: Ergo initio elementa circularia longiori tempore percurrentur quam cycloidica, in fine autem breviori. Quare si inveniendus sit arcus circularis, qui eodem tempore percurratur, ac cycloidicus, ejus radius necessario major erit axe cycloidis AE, minor, quam duplex AE.

Sed diligentius perpendendus est casus, in quo AK = 2 AE: namque in hoc casu pendula circulare, & cycloidicum consentum habe-

habere eandem longitudinem, quum AK sit radius circuli osculantis cycloidem in puncto A. In hoc casu quisque videt tempus per quemlibet arcum circularem DA, vel QA majus esse tempore per cycloidem. Sed quum AI per majorem excessum superet FO, quo magis hæc accedit ad punctum D, constat tempus per arcum circularem majorem magis superare tempus per arcum cycloidis, quam tempus per arcum circularem minorem: Ergo majus est tempus per majorem arcum circuli, quam per minorem. Quare nova demonstratione probatur falsum, quod opinabantur Galileus, & Balianus, isochronas scilicet esse penduli circularis oscillationes.

Si descensus in circulo incipiat a puncto O infinite proximo puncto A, tum quælibet F*o* sit æqualis FA, seu AI per adæquationem: Ergo tempus per minimum arcum AO æquale tempori per cycloidem. Ex quo nova demonstratione colligitur oscillationes per arcus minimos vel majores, vel minores isochronas esse. Collige item, erasse eos, qui putarunt tempus per arcum circuli minimum OA æquale esse tempori per ejus chordam OA, seu per diametrum AF. Nam quum tempus per arcum OA sit æquale tempori per cycloidem erit ad tempus per AF ut quadrans circuli ad diametrum, ut superiores propositiones docent.

Habes hic, Alphonse clarissime, præcipuas pendulorum cum circularium, tum cycloidalium proprietates, ex quibus quanta praxis accipiat utilitatem, tibi notissimum est. Ex hisce demonstrationibus plane cognosces, infinite parvorum usum in abusum facile degenerare, nisi ad vera principia animum advertamus. Quantitatum infinite parvarum differentiæ sunt diligenter expendendæ. Si hæ respectu ad quantitates easdem minorem rationem habeant quacumque data, eæ quantitates tanquam æquales haberi possunt. Si vero differentia non sit ejusmodi, sed ad quantitates finitam habeat proportionem, qui eas æquales fecerit, in manifestum incidet paralogismum. Velim tibi persuadeas, me nihil prætermissurum, quod tibi, tuisque studiis esse possit utilitati. Vale.

Kal. Januarii 1753 ex Col. S. Luciæ.

FINIS OPUSCULORUM.

IN-

Fig. 1.

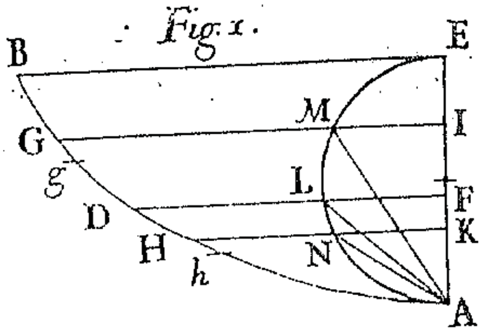


Fig. 2.

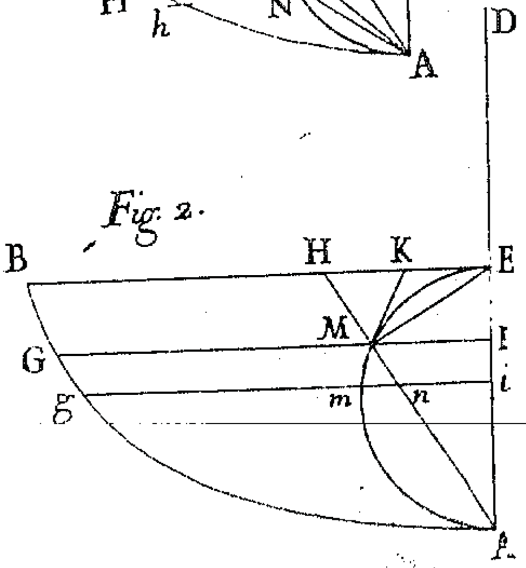


Fig. 4.

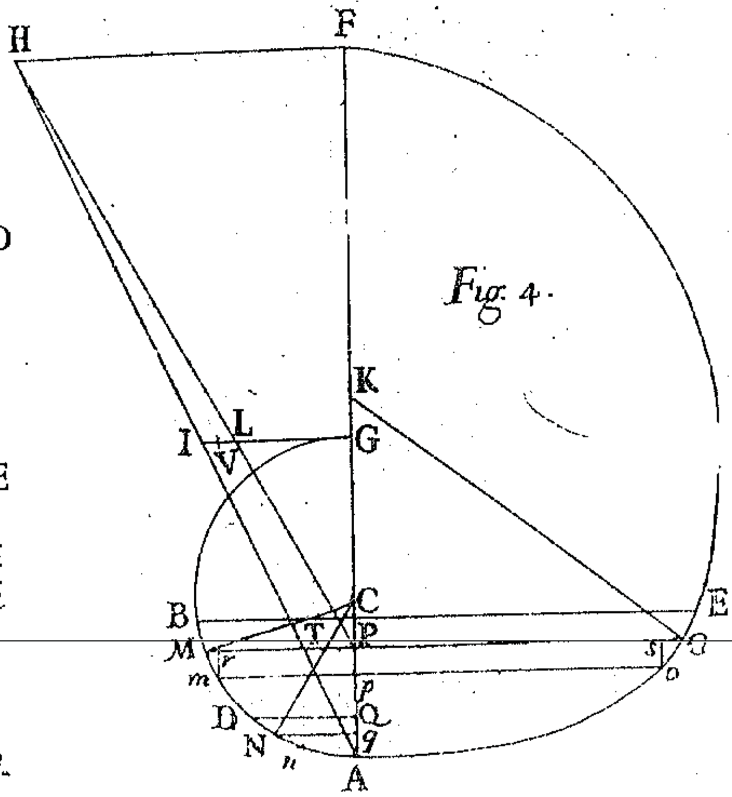


Fig. 3.

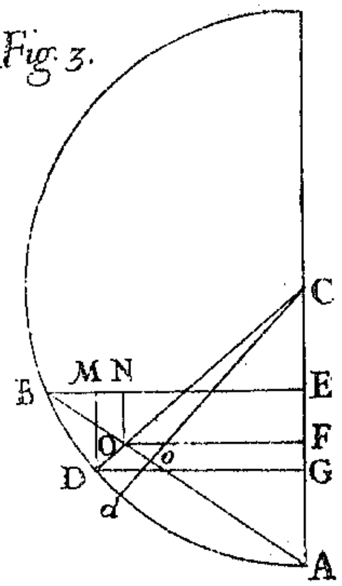
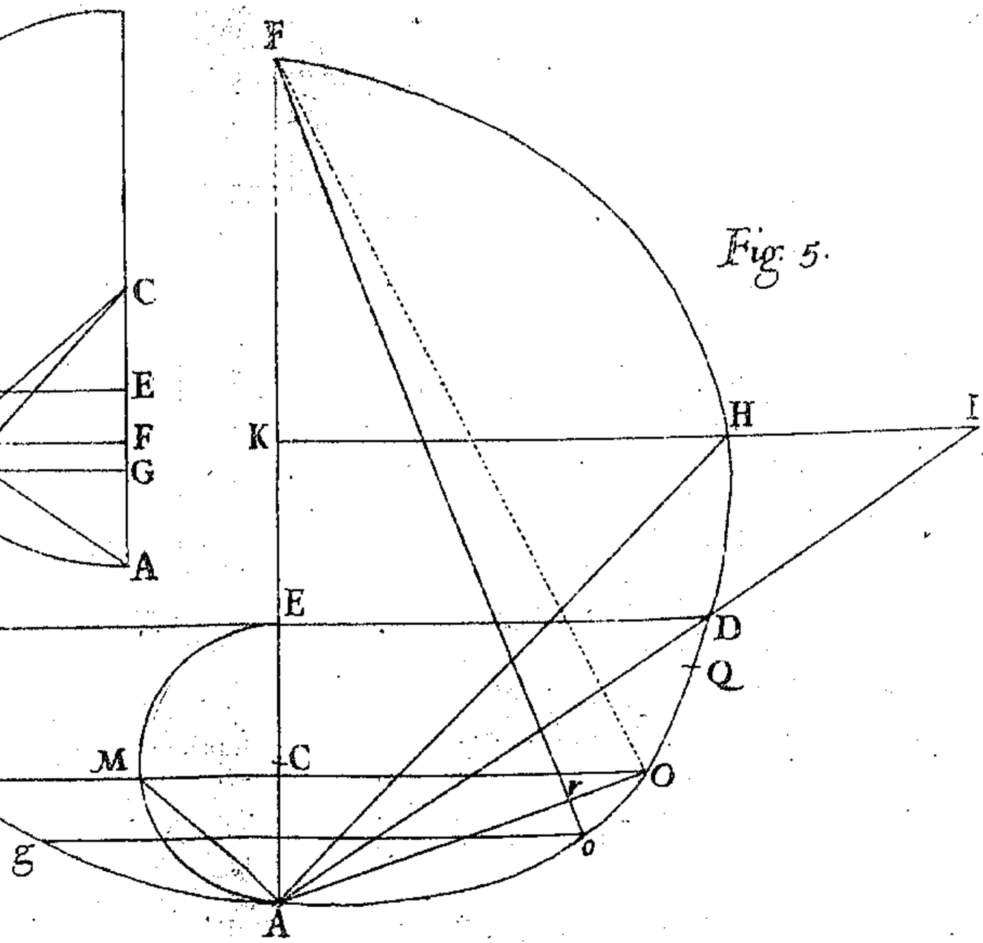


Fig. 5.



INDEX AUCTORUM,

Quorum mentio fit in hoc volumine.

Numerus paginas indicat. Littera n postposita numero significat notas.

INDEX RERUM,

Quæ in hoc volumine continentur.

Numerus paginam designat.

Vidit

Vidit D. Salvator Corticellius Clericus Regularis Sancti Paulli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

5 Aprilis 1754.

IMPRIMATUR.

Fr. Cæsar Antoninus Velasti Provicarius S. Officii Bononiæ.