REGIA UNIVERSITA' DI ROMA

Prof. FRANCESCO SEVERI

CONFERENZE DI GEOMETRIA ALGEBRICA

Raccolte da BENIAMINO SEGRE

ANNO 1927 1928

ROMA
STABILIMENTO TIPO-LITOGRAFICO DEL GENIO CIVILE
1927

Le copie non munite della firma dell'Autore sono contraffatte

CONFERENZE DI GEOMETRIA ALGEBRICA

Raccolte da BENIAMINO SEGRE

1 – Le varietà razionali e le trasformazioni cremoniane.

1 - In uno spazio S_r ad r dimensioni, siano $x_0, x_1, x_2, \dots, x_r$ coordinate omogenee di punto; quando occorra si passerà a coordinate non omogenee $y_1, y_2, \dots, y_r$, col porre $y_j = \frac{x_j}{x_0}$. Vogliamo considerare il luogo di un punto P di S_r, funzione razionale del punto mobile sopra una retta α. Se t_0, t_1 sono coordinate omogenee su α; le equazioni del luogo saranno del tipo:

$$(1) \qquad \rho x_r = \varphi_i(t_0, t_1), \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

le φ_i essendo forme di uno stesso grado n nelle variabili t_0, t_1, e ρ essendo un arbitrario fattore di proporzionalità; le (1), come subito si vede, equivalgono in coordinate non omogenee a equazioni del tipo:

$$y_j = \psi_j(t) \qquad \text{per } j = 1, 2, \dots, r,$$

le ψ_j essendo generiche funzioni razionali del parametro t. Nel seguito ci riferiremo di preferenza alle (1), che hanno forma proiettiva (non si distinguono gli elementi al finito da quelli all'infinito).

Potremo intanto supporre che le forme φ_i siano prime fra di loro (perchè le x_i son definite soltanto nei loro rapporti), nel che è anche inclusa l'ipotesi che le φ_i non si riducano a costanti (ossia $n > 0$): con ciò il punto P dato dalle (1) descrive in S_r una curva C. Se si vuole (come noi suppor_ rerro) che questa curva appartenga ad S_r (ossia non stia in uno spazio di dimensione inferiore ad r), occorre e basta che le forme φ_i siano fra loro linearmente indipendenti. Invero, in forza delle (1), un legame lineare fra le φ_i porterebbe di conseguenza un legame lineare fra le x_i, e reciprocamente.

Il gruppo di punti segato su C dall'iperpiano

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i = 0,$$

corrisponde al gruppo G_n di n punti di α (tutti variabili al variare delle λ), di equazione

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i (t_0, t_1) = 0.$$

In quest'equazione figurano linearmente gli r parametri essenziali $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_2}{\lambda_0}, \ldots, \frac{\lambda_r}{\lambda_0}$, onde si dice che essa (al variare di questi parametri) rappresenta i gruppi di una serie lineare g_n^r d'ordine n e dimensione r(*)

Ad un punto $A(t)$ della retta α, corrisponde (in virtù delle (1)) uno ed un sol punto $P(x)$ della curva C; però può darsi che un punto P di C provenga da più punti A di α: poichè le (2) e (3) sono equivalenti in forza delle (1), due punti A che portino ad uno stesso punto P di C, son tali che i gruppi G_n della g_n^r (3) che contengono uno di essi, passano di conseguenza per l'altro, e reciprocamente.

Una g_n^r di una retta α dicesi *semplice*, quando i suoi G_n che contengono un punto A generico di α non passano in conseguenza per alcun altro punto di α.

(*) Si può porre una corrispondenza algebrica e biunivoca senza eccezioni fra i gruppi della g_n^r ed i punti di uno spazio ad r dimensioni: basta infatti pensare le λ_i come coordinate omogenee in uno S_r.

Si dice invece che la g_n^r è *composta*, quando pei suoi G_n il passaggio per un punto A generico di α, trae seco di conseguenza il passaggio per altri $\mu - 1 \geq 1$ punti di α. In tale ipotesi il punto A insieme a questi ultimi punti costituisce un gruppo di μ punti G_μ, tale che il passaggio dei G_n di g_n^r per un qualunque punto di esso, porta di conseguenza il passaggio pei rimanenti $\mu - 1$ punti. Tali gruppi di μ punti costituiscono su α una *involuzione (algebrica) semplicemente infinita* γ_μ^1 d'ordine μ. In generale su di una curva algebrica si indica con questo nome, una varietà algebrica (*) ∞^1 di gruppi di μ punti, tale che un punto generico della curva stia in uno ed un solo di quei gruppi di μ punti. – Una g_n^r composta è quindi composta mediante una γ_μ^1 ($\mu \geq 2$), ossia un G_n della g_n^r che contenga un punto A di α, contiene di conseguenza il G_μ della γ_μ^1 da esso determinato: ciò implica che ogni G_n sia costituito da un certo numero k di G_μ (sicchè sarà $n = k\mu$).

Se la g_n^r è semplice, la corrispondenza algebrica considerata dianzi fra la curva C e la retta α è biunivoca: si dice allora, per definizione, che la curva C è *razionale*; l'ordine della curva C vale n, poichè un iperpiano generico di S_r la sega in n punti distinti che si rappresentano su α coi punti di un G_n di g_n^r.

Se invece g_n^r si compone mediante una γ_μ^1 ($\mu \geq 2$), la corrispondenza algebrica fra C ed α è, come si dice, di indici $(1, \mu)$ (e non, come prima, di indici $(1,1)$ o birazionale). Ci si può però ricondurre al caso precedente, valendoci

(*) Cioè una varietà tale che un suo gruppo generico si possa determinare sulla curva mediante processi algebrici. Tra poco il concetto di varietà algebrica verrà meglio specificato.

del teorema di Lüroth(*) che dice ogni involuzione sulla retta esser una serie lineare. La γ^1_μ è quindi una g^1_μ, onde i suoi G_μ si possono riferire in una corrispondenza algebrica e biunivoca ai punti di una retta β: ed è chiaro che la corrispondenza prodotto intercedente fra i punti di C ed i punti di β è algebrica e biunivoca. Ciò dimostra che in ogni caso la curva C data dalle (1) è razionale. Nelle ipotesi attuali l'ordine di C vale $\frac{n}{\mu} = k$, poichè i G_n della g^r_n (che anche ora rappresentano le sezioni iperpiane di C), si compongono di k G_μ a ciascun dei quali corrisponde un sol punto di C.

Osservazione 1ª. - Anche in quest'ultimo caso si può continuare a dire che l'ordine di C vale n, qualora si venga a pensare la C come curva multipla (m-pla), ossia quando ogni suo punto P venga contato μ volte, come immagine dei μ punti di α da cui esso proviene.

Osservazione 2ª - Si noti in particolare il caso in cui r vale 1: la curva C si riduce allora allo spazio ambiente S_1, che è una retta. Se (1) pongono una corrispondenza razionale $(1, n)$ fra due rette; questa corrispondenza è birazionale per $n=1$: e si dimostra agevolmente che le sole corrispondenze birazionali fra due rette sono le corrispondenze proiettive.

Osservazione 3ª - Abbiamo detto che quando la g^r_n è semplice, la curva C è segata in n punti distinti da un iperpiano generico di S_r. Invero la (3), considerata come equazione algebrica di grado n nel rapporto $\frac{t_1}{t_0}$, ha radici multiple soltanto quando le λ annullano il discri-

(*) V. F. Severi – Trattato di Geometria algebrica (Bologna, Zanichelli, 1926), pag. 32. Nel seguito questo trattato verrà brevemente indicato con «T. G. A.».

minante dell'equazione, il quale nelle nostre ipotesi non è identicamente nullo(*). Ciò si esprime dicendo che una g^r_n sopra una retta non ha punti multipli variabili. Posizioni particolari dell'iperpiano segante possono portare a coincidenze fra gli n punti comuni a C e all'iperpiano che tende a quella particolare posizione. Ognuno di questi punti conta fra le intersezioni con molteplicità d'intersezione uguale alla molteplicità della corrispondente radice dell'equazione (3). Analoghe cose possono ripetersi quando la g^r_n è composta.

2 - Consideriamo ora il luogo V di un punto P di S_r $(r=2)$, funzione razionale del punto mobile sopra un piano α. Se t_0, t_1, t_2 sono coordinate proiettive omogenee di punto su α, le equazioni del luogo saranno del tipo:

$$(4) \qquad \rho x_i = \varphi_i(t_0, t_1, t_2) \qquad \text{per } i = \ , 1\ 2, \ldots, r$$

con significati per le lettere, analoghi a quelli del n° precedente; e non stiamo neppure a scrivere le corrispondenti equazioni (di deduzione immediata) in coordinate non omogenee y_j.

Anche ora supponiamo le forme φ_i prime fra loro, di grado n (>0) e fra loro linearmente indipendenti. Alle sezioni di V cogli iperpiani (2) dello spazio, corrispondono su α le curve d'ordine n di equazione

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_i(t_0, t_1, t_2) = 0 ,$$

nella quale figurano linearmente gli r parametri essenziali $\lambda_1 : \lambda_0, \ldots, \lambda_r : \lambda_0$, onde si dice che essa (al variare di

(*) T. G. A. pag. 32.

questi parametri) rappresenta le curve di un sistema lineare ∞^r di curve piane d'ordine n, che indicheremo con la lettera Σ; il numero r si dice la dimensione di Σ.

Se curve (5) non hanno a comune una parte fissa (al variare delle λ_i), in virtù dell'ipotesi fatta che le f_i siano prime fra loro; esse però possono ovviamente avere a comune un numero finito di punti: questi punti fissi per i quali le curve (5) passano con certe molteplicità, diconsi i punti base di Σ. (Se le curve di un sistema lineare hanno una parte fissa anche questa è luogo di punti base). Dicesi poi grado del sistema lineare, il numero N (certo finito) dei punti variabili comuni a due sue curve generiche: per avere N occorre, dal numero n^2 dei punti secondo cui (a norma del teorema di Bézout) si segano due curve piane d'ordine n, detrarre il numero delle intersezioni che vengan assorbite dai punti base.
Un sistema lineare dicesi semplice quando le curve di esso che passano per un punto generico, non passano di conseguenza per alcun altro punto variabile col primo.

Incominciamo col supporre che Σ sia semplice: in tale ipotesi la corrispondenza algebrica che, in virtù delle (4), intercede fra i punti A di α ed i punti P di V è biunivoca,(*) onde la varietà V è a due dimensioni V_2, e la si chiamerà una superficie razionale. L'ordine di questa superficie, ossia il numero dei punti secondo cui essa vien segata da due iperpiani generici, ovvero, ciò che è lo stesso da un generico S_{r-2} di

(*) Con ciò non escludiamo che esistono elementi eccezionali per la corrispondenza, che anzi su α sono certamente tali i punti base di Σ (se esistono).

S_r, è uguale al grado N di Σ.

Se invece Σ non è semplice, le curve di Σ che contengono un punto A generico di α passano di conseguenza per altri punti variabili col primo, ed abbiamo due casi da distinguere a seconda che il numero di questi punti associati ad A è finito oppure infinito.

Nel primo caso i punti del piano α si aggruppano a μ a μ ($\mu \geq 2$), in guisa tale che un punto A generico del piano sta in uno ed un solo di questi gruppi di μ punti: si ha cioè nel piano ciò che si dice un'involuzione (algebrica) doppiamente infinita I^2_μ di gruppi di μ punti. E le curve di Σ che passano per A, passano di conseguenza per i $\mu - 1$ punti coniugati ad A nell'involuzione. Si dice allora che il sistema lineare Σ è composto coll'involuzione I^2_μ.

In tali ipotesi la corrispondenza algebrica fra V ed α è di indici $(1, \mu)$ (e non, come prima, di indici $(1,1)$, o birazionale). Ci si può però ricondurre al caso precedente, valendoci del teorema di Castelnuovo(*) che dice ogni involuzione piana esser razionale, per cui i G_μ della I^2_μ si possono riferire in una corrispondenza algebrica e biunivoca ai punti di un secondo piano β: è chiaro che la corrispondenza prodotto, intercedente fra i punti di V ed i punti di β è algebrica e biunivoca. Ciò dimostra che anche in questo caso le (4) rappresentano una superficie razionale. Si può dire che anche ora il suo ordine vale N, qualora V venga considerata come superficie μ-pla: l'ordine di V, considerata come superficie semplice, vale invece $\frac{N}{\mu}$.

(*) Castelnuovo, Math. Ann. t. 44 (1893), p. 125

Si noti in particolare il caso in cui r è uguale a 2: la superficie V si riduce allora allo spazio ambiente S_2, che è un piano. Le (4) pongono in tal caso una corrispondenza razionale $(1, N)$ fra due piani; questa corrispondenza è birazionale per $N = 1$ (cioè quando la rete Σ è omoloidica), e dicesi pure corrispondenza cremoniana, dal nome di *Cremona*, che pel primo ne fece uno studio sistematico: per $r > 1$ le corrispondenze proiettive fra due S_r sono solo delle particolarissime corrispondenze birazionali. Esse sono caratterizzate dal fatto di non presentare elementi eccezionali (sono cioè corrispondenze birazionali biunivoche senza eccezioni)(*)

Ci resta da ultimo a considerare il caso in cui due curve di Σ che hanno a comune un punto, fuori dei punti base, sempre abbiano infiniti punti, ossia una parte, a comune. Si vede facilmente che questo fatto equivale a supporre zero il grado N di Σ, od anche equivale a supporre che tutte le curve di Σ siano spezzate. Ora, un teorema dovuto a *Bertini*(**) assicura che, se la curva generica di un sistema lineare privo di curve fisse si spezza, essa si compone di un certo numero k di parti, che variano in un medesimo fascio φ. Nelle ipotesi attuali, la corrispondenza fra V ed α non è più ad indici finiti, ma, ad ogni punto di V corrispondono su α gli infiniti punti di una curva: per il teorema di *Bertini* questa curva varia in un fascio. Ciò dimostra che il luogo V rappresentato dalle (4) si riduce in questo caso ad una curva, curva che, per ciò che precede, è d'ordine k e razionale

---

(*) « T.G.A. » P. 302 » (**) « T.G.A. » p. 45

Osservazione. – Se $f(t_0, t_1, t_2) = 0$, $g(t_0, t_1, t_2) = 0$ son due curve algebriche piane degli ordini m, n, prive di parti comuni, scelto il punto $O(t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1)$ fuori delle congiungenti le intersezioni a due a due delle f, g (ivi comprese le eventuali tangenti comuni alle due curve nei loro punti comuni), la molteplicità j di ciascuno dei fattori lineari dell'equazione risultante $R(t_0, t_1) = 0$, ha carattere invariante (indipendente da O). Poichè $R = 0$, che è di grado mn, rappresenta il gruppo delle rette che proiettan da O i punti comuni alle due curve, la molteplicità j si assume naturalmente come molteplicità d'intersezione delle f, g nel punto P comune corrispondente al fattore lineare j-plo. Lo stesso numero j si ottiene considerando i punti comuni alle curve $f = 0$, $g + \lambda\varphi = 0$, ove $\varphi = 0$ sia un gruppo di n rette generiche del piano. Questi punti quando il parametro λ ha un valore generico, sono mn distinti (in particolare ciò accade per $\lambda = \infty$)

Quando λ tende a zero, ve ne sono j che tendono a P. Dunque se le f, g in P hanno molteplicità d'intersezione j, variando di poco una di esse, per es. g, si hanno j intersezioni distinte, vicine ad O. Il che fissa in modo preciso il significato geometrico della molteplicità d'intersezione.

Applicando queste considerazioni a due curve del sistema Σ, si arriva a concludere che gli N punti variabili in cui due generiche si segano fuori dei punti base, sono distinti, e si ha il significato della possibile loro coincidenza, per posizioni particolari delle due curve. Ne deriva che un generico S_{r-2} di S_r incontra V in tanti punti distinti quant'è l'ordine di V, e se un S_{r-2} ha con V in P molteplicità d'intersezione j, ciò significa che dando allo S_{r-2} un piccolo spostamento generico, si hanno j intersezioni vicine a P.

3.- Generalizzando le cose precedenti, si dirà che una varietà V_k a k dimensioni di S_r ($r \geq k$) è razionale, quando si possa stabilire una corrispondenza algebrica e biunivoca, cioè birazionale, fra i punti di V_k ed i punti di uno spazio α a k dimensioni.(*) Prese in α coordinate omogenee $t_0, t_1, \dots t_k$, la varietà V_k dovrà esser data da equazioni del tipo:

$$(6) \quad \rho \cdot x_i = \varphi_i(t_0, t_1, \dots\dots, t_k) \qquad \text{per } i = 0,1,2,\dots, r,$$

ove le φ_i sono forme linearmente indipendenti e di uno stesso grado $n\,(>0)$ nelle t, che posson supporsi prime fra di loro, e ρ un arbitrario fattore di proporzionalità.

Si abbiano inversamente delle equazioni di questo tipo; per studiare la varietà da esse rappresentata in S_r, si dovrà considerare in α il seguente sistema lineare Σ, ∞^r, di forme:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i(t_0, t_1, \dots t_k) = 0.$$

Se esso è semplice la corrispondenza che, in virtù delle (6) intercede fra V_k ed α è biunivoca, onde V_k è razionale ed il suo ordine uguaglia il grado N del sistema Σ.

Se Σ non è semplice si potranno presentare diversi casi. È, anzitutto, potrà Σ esser composto con una involuzione (algebrica) di ordine μ; in tale ipotesi le (5) rappresentano certo in S_r una varietà a k dimensioni di ordine $N:\mu$; ma, se è $k>2$, non si può asserire che tale varietà sia razionale, anzi in generale essa non sarà razionale: invero, i teoremi di Lüroth e Castelnuovo non si estendono agli spazi superiori, come ha dimostrato Enriques con esempi.(*)

Esclusi i casi precedenti, il sistema Σ dovrà comporsi mediante una congruenza algebrica lineare di V_h ($1 \leq h \leq k-1$), indicando con questo nome di congruenza lineare un insieme ∞^{k-h} di V_h tali che per un punto generico dello spazio α ne passi una ed una sola.(**) Colla precedente locuzione si vuol dire che le forme di Σ che passano per un punto generico di α contengono di conseguenza la V_h che vi passa. In tali ipotesi la varietà rappresentata dalle (6) ha la dimensione $k-h$, ed in generale non è razionale; però per $h = k-1$ ed $h = k-2$, le (6) rappresentano rispettivamente una curva ed una superficie, che, per i teoremi di Luroth e Castelnuovo, è razionale. Se $r = k$ ed $h = 0$, le (6) pongono fra i due spazi S_k una corrispondenza $(1, N)$, razionale in un solo senso, ovvero, se $N = 1$, cioè se il sistema è omaloidico, una corrispondenza birazionale, che si chiama una *trasformazione cremoniana fra i due spazi*.

Le omografie sono le sole trasformazioni cremoniane biunivoche senza eccezione.(***)

Osservazione. Estendendo l'osservazione della fine del n° 3, si conclude che si può assumere come definizione dell'ordine di una V_k (razionale) di S_r il numero dei punti distinti in cui essa è sega

(*) In ciò che segue omettiamo, per brevità, le definizioni che si riducono ad una generalizzazione immediata di quelle date ai n.i precedenti.

(*) Ved. Rendic. Lincei, t. 21 (1912)$_1$, p. 81

(**) Si noti il caso di $h = k-1$, in cui, pel teor. di Bertini, la congruenza riducesi ad un fascio di forme.

(***) T. G. A. p. 302

ta da un generico S_{r-k} di S_r. Un particolare S_{r-k} ha poi molteplicità d'intersezione j con V_k in un punto P, se spostando genericamente di poco lo S_{r-k}, questo sega V_k in j punti distinti, prossimi a P.

II. - Le varietà algebriche. -

4. - Per definire una curva algebrica di uno S_r, partiamo dal concetto elementare di curva piana algebrica. Si ha una curva siffatta annullando una forma ternaria:

(1) $f(t_0, t_1, t_2) = 0$.

Consideriamo le equazioni

(2) $\rho x_i = \varphi_i(t_0, t_1, t_2)$, per $i = 0, 1, 2, \ldots, r$,

già impiegate al n° 2 ; però ora il punto $A(t)$ non descriverà tutto il piano α, ma sarà vincolato dalla (1), ossia si muoverà su di una curva algebrica f di questo piano; se, come supporremo, f è irriducibile, si dice che le (1), (2) rappresentano in S_r una curva C algebrica irriducibile, indicando adunque con questo nome il luogo di un punto $P(x)$ di S_r funzione razionale di un punto $A(t)$ variabile su di una curva piana algebrica irriducibile.(*)

Se si vuole che la curva C appartenga allo S_r, occorre che non esistano valori non tutti nulli delle λ, per cui, in forza della (1), si abbia identicamente:

(*) La prima definizione rigorosa generale di varietà algebrica fu data da Kronecker, il quale vi giunse seguendo una via diversa, attraverso la sua teoria dell'eliminazione.

(3) $$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i = 0 ;$$

Perchè ciò fosse, dovrebbe esistere una forma Ψ delle t, tale che risulti:

(4) $$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i = \Psi \cdot f .$$

Se la (4) non può sussistere che per valori tutti nulli delle λ, le forme φ_i si dicono linearmente indipendenti sulla curva f: si noti che questo fatto non è conseguenza dell'indipendenza lineare delle φ_i. Geometricamente l'indipendenza lineare delle φ sulla curva f, equivale a ciò che non deve esistere nessuna curva del sistema lineare (3) che contenga la f come parte. Le curve del sistema lineare (3) che contengono come parte f, (se esistono) formano un sistema lineare,(*) di cui sia h la dimensione. Si prova allora facilmente(**) che si può scegliere in (3) un sistema lineare subordinato, di dimensione $r-h-1$ (e non superiore), le cui curve non contengano come parte f. In tale ipotesi la curva C appartiene ad uno S_{r-h-1}. E la totalità dei gruppi di punti segati su f dalle (3) coincide colla totalità dei gruppi di punti ivi segata da questo sistema ∞^{r-h-1}.

Se supponiamo (il che, per ciò che s'è detto, non è restrittivo) che nessuna delle forme (3) contenga la f, ossia che le φ_i siano linearmente indipendenti su f, la curva C appartiene allo S_r. Le forme del sistema lineare (3), segano su f un sistema algebrico di gruppi di punti di dimensione r, che dicesi serie lineare g_n^r,

(*) T. G. A. p. 28 - (**) T. G. A. p. 57

di dimensione r ed ordine n, indicando con n il numero dei punti variabili (generalmente distinti) con cui si compongono quei gruppi di punti.

Impiegando locuzioni analoghe a quelle già usate al § 1, si avranno due casi da distinguere, a seconda che la g_n^r è semplice o composta. Nel primo caso la curva C è d'ordine n, ed è riferita alla f in una corrispondenza algebrica d'indici $(1, 1)$ o birazionale. Nel secondo caso la g_n^r si compone con un'involuzione algebrica semplicemente infinita γ_μ^1 $(\mu \geq 2)$; la curva C è d'ordine $\frac{n}{\mu}$, ed è riferita alla f in una corrispondenza algebrica d'indici $(1, \mu)$, razionale in un sol senso. Si dice talvolta che la curva f vien rappresentata mediante le (2) sulla curva multipla C; in sostanza si ha una corrispondenza birazionale fra i punti di C ed i gruppi di μ punti della γ_μ^1 di f; la C, come curva μ-pla, dev'esser considerata come d'ordine n.

Sia nell'uno che nell'altro caso, si dice che la curva C è l'immagine proiettiva della g_n^r considerata su f: questa locuzione è giustificata dal fatto, che nella corrispondenza che intercede fra f e C, i gruppi della g_n^r [i quali son segati su f dalle curve del sistema lineare (3)], son mutati nei gruppi delle sezioni iperpiane di C.

Osservazione 1ª. Il teorema di Lüroth non è valido sopra le curve che non sono razionali, ossia sopra una curva non razionale vi sono delle γ_μ^1 che non sono razionali. Così, se si considera in S_3 un cono cubico ellittico ed una quadrica non passante per il vertice, sulla curva intersezionale, del 6° ordine, le generatrici del cono segnano una γ_2^1 che non è razionale (la stessa serie dei punti della curva è una γ_1^1 irrazionale!).

Osservazione 2ª - Data una curva algebrica iperspaziale C, si può sempre costruire una curva algebrica piana in corrispondenza birazionale con C; basta considerare una proiezione piana generica di C. Dunque una curva algebrica sghemba o iperspaziale, può sempre considerarsi come la trasformata birazionale d'una curva algebrica piana.

Osservazione 3ª - Se le (2) rappresentano una superficie (necessariamente razionale), la curva C è tracciata su questa. Ma può darsi che le (2) rappresentino una curva (razionale). Allora il sistema lineare (3) è composto colle curve di un fascio, e la g_n^r considerata dianzi è composta colla g_μ^1 segata su f dalle curve di quel fascio: cosicchè in questo caso la curva rappresentata dalle (2) resta la stessa, sia che si pensi il punto $A(t)$ mobile sul piano α, sia che lo si pensi mobile su f.

5 - Considerazioni analoghe a quelle cui si è accennato al § precedente, permettono di precisare l'importante concetto di ordine della g_n^r considerata al nº 4 su f. Si può intanto vedere che le n intersezioni delle curve (3) colla f, che non cadono nei punti base di questo sistema lineare, sono tutte distinte per valori generici delle λ.(*) Però, per valori particolari delle λ, vi può essere un punto A comune alla curva (3) ed alla f, che (come si dice) conti un certo numero j di volte fra le suddette n intersezioni di queste due curve. Il significato geometrico del numero j, che chiamasi molteplicità intersezione di f e della curva (3) considerata, nel pun-

(*) « T. G. A. » p. 55

to A, è il seguente; si sposti di poco in modo generico una delle due curve, ad es. la β: si otterranno precisamente j intersezioni distinte vicinissime ad A.(*)

Con ciò resta meglio illuminato il concetto di ordine di una curva C iperspaziale; esso si può definire come il numero n dei punti distinti in cui C vien segata da un iperpiano generico. Un iperpiano qualunque segherà allora la C in n punti, purchè ogni intersezione venga contata colla debita molteplicità. E un punto P comune a C ed all'iperpiano che si considera, conta un certo numero j di volte fra gli n punti comuni, quando un iperpiano generico prossimo al primo, sega C in n punti distinti, di cui j vicini a P.

Consideriamo ora (cambiando un po' le notazioni) una curva C irriducibile e d'ordine n, in uno S_k di cui sieno $(t_0, t_1, \dots, t_k)$ coordinate omogenee di punto. Si dimostra che una forma generica φ d'ordine m di S_k sega C in mn punti distinti,(**) i quali però possono comunque coincidere a gruppi, quando la forma varia. Si dice che in un punto P comune a C e alla forma φ cadono j intersezioni, od anche che j è la molteplicità d'intersezione di C e φ in P, quando presa una generica forma prossima a φ, essa sega la curva C in punti di cui precisamente j distinti sono prossimi a P. Con ciò si può dire che:

Una qualunque forma d'ordine m, sega una curva algebrica irriducibile d'ordine n che non stia per intero su di essa, in mn punti; nel numero mn ognuno dei punti comuni va contata colla sua molteplicità

(*) T.G.A. p.85 (**) T.G.A. pag. 87.

d'intersezione.

Ciò premesso, consideriamo in S_k un sistema lineare ∞^r di forme

$$(5) \qquad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i = 0 \quad ;$$

le forme (5) che passano per C, formano (se esistono) un sistema lineare, di cui sia h la dimensione. Si può allora trovare un sistema lineare subordinato di (5), di dimensione massima $r-h-1$, in cui nessuna delle forme contenga C. Questo sistema lineare sega su C una serie lineare, di dimensione $r-h-1$, che è la stessa segata dalle forme di (5). L'ordine v di questa serie lineare è il numero delle intersezioni variabili (generalmente distinte) di quelle forme con C.

Supponiamo che nessuna delle forme (5) contenga la curva C, talchè tali forme segheranno su C una g_v^r; in quest'ipotesi, le equazioni

$$\rho x_i = \varphi_i(t_0, t_1, \dots, t_k) \quad \text{per } i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

nelle quali il punto (t) s'intenda vincolato a restare sulla curva C, rappresentano un luogo Γ, il quale appartiene a S_r. Dico che Γ è una curva algebrica irriducibile; infatti il punto variabile su Γ è una funzione razionale del punto variabile su C, il quale, alla sua volta, è funzione razionale del punto variabile su f: dunque, effettivamente il punto variabile su Γ è funzione razionale del punto mobile su di una curva piana algebrica irriducibile f.

La curva algebrica Γ è l'imagine proiettiva della

g^r_ν considerata testè su C; essa è d'ordine ν o $\frac{\nu}{\mu}$, a seconda che questa g^r_ν è semplice o composta mediante l'involuzione γ^1_μ.

6.– I concetti introdotti ai n.i 4 e 5 si estendono assai facilmente alle varietà a più dimensioni. Per maggior chiarezza daremo un cenno dell'estensione alle superficie algebriche.

Si dirà *superficie algebrica irriducibile* di S_r, una superficie luogo di un punto di S_r funzione razionale di un punto variabile su di una superficie algebrica irriducibile dello spazio ordinario.

Se quest'ultima superficie ha per equazione

$$f(t_0, t_1, t_2, t_3) = 0,$$

la corrispondente superficie F di S_r dovrà rappresentarsi mediante equazioni del tipo:

$$\rho x_i = \varphi_i(t_0, t_1, t_2, t_3) , \quad \text{per } i = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Nello spazio a tre dimensioni $\alpha(t)$, si dovrà considerare il sistema lineare di superficie

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi_i = 0 \quad ;$$

esso è di dimensione r, se, come supporremo, le φ_i sono linearmente indipendenti. Supposto che detto sistema sia liberato da parti fisse, esso potrà avere delle curve basi e dei punti base isolati. Astraendo dalle curve basi, che eventualmente cadessero sulla superficie f, le (6) segano su f un sistema lineare di curve: detta C la generica curva (priva di parti fisse) del sistema lineare, quest'ultimo vien indicato

con $|C|$. Dicesi grado (effettivo) di $|C|$, il numero delle intersezioni variabili (generalmente distinte) di due diverse curve C. Si suppone, dando questa definizione del grado, che due generiche C passanti per un punto di f non abbiano infiniti punti comuni. Questo caso vien considerato più sotto

Le superficie (6) che contengono come parte la f, formano (se esistono) un sistema lineare, di cui sia h la dimensione. Entro al sistema lineare (6) se ne può allora trovare uno, di dimensione massima $r-h-1$, in cui nessuna superficie contenga f come parte. Quest'ultimo sistema lineare di forme, sega su f lo stesso sistema lineare di curve $|C|$ segato su f dalle (6): la dimensione del sistema lineare di curve considerato, è $r-h-1$.

Supponiamo (ciò che non è restrittivo) che nessuna delle superficie (6) contenga come parte la f: con questo, il luogo F del punto (x) apparterrà ad S_r. Per compiere lo studio di questo luogo, converrà esaminare il sistema $|C|$.

Se, per ogni punto di f, le curve C che vi passano hanno infiniti punti (ossia una parte) a comune, tutte queste parti comuni alle C a due a due sono in numero semplicemente infinito; e tali che per ogni punto generico di f ne passa una ed una sola. La loro varietà, prendendone come elementi le curve, è una varietà algebrica semplicemente infinita.(*)

(*) Algebrica, perchè ogni elemento si isola con processi algebrici. E da ciò segue che la varietà è algebrica nel senso delle nostre definizioni (Cfr. T.G.A. p.15).

Si dice che, su f, le curve di quella varietà formano un fascio (algebrico), e che il sistema lineare $|C|$ è composto colle curve di questo fascio. In tal caso il luogo F si riduce ad una curva algebrica, e si ha una corrispondenza birazionale fra i punti di questa curva e gli elementi (curve) del fascio suddetto.

Se si suppone che il sistema lineare $|C|$ non sia composto colle curve di un fascio, il luogo F è certo una superficie, e pertanto, in base alla data definizione, esso è una superficie algebrica irriducibile. L'ordine di questa superficie F è uguale al grado di $|C|$, oppure a questo grado diviso per μ, a seconda che il sistema lineare $|C|$ è semplice, oppure è composto con un'involuzione I^2_μ: sia nell'uno che nell'altro caso F è l'imagine proiettiva di $|C|$, semplice o multipla.

Un sistema lineare di forme dello S_r, sega su F un sistema lineare di curve: di questo si potrà fare l'imagine proiettiva, ottenendosi come tale una superficie algebrica irriducibile, d'un iperspazio ad un numero conveniente di dimensioni.

Osservazione 1ª. Il teorema di Lüroth ci assicura che su di una superficie razionale, un fascio algebrico di curve è sempre razionale (anzi, è un sistema lineare semplicemente infinito). Tale proposizione non vale per superficie qualunque; così, ad esempio, le generatrici di un cono cubico ellittico formano su esso un fascio irrazionale: e se si vuole un sistema lineare composto colle curve di questo fascio, basta considerare le sezioni del cono coi piani pel vertice.

Osservazione 2ª. - Il teorema [illegible]tini sui sistemi

lineari riducibili di curve pi[illegible]e (citato al nº 2), si estende ai sistemi lineari riducibili di curve sopra una superficie qualsiasi (Enriques); esso si generalizza pure alle varietà algebriche ad un numero qualunque di dimensioni (Severi).

Osservazione 3ª. - Il concetto di grado di un sistema lineare di curve tracciato su di una superficie algebrica (e quindi, in particolare il concetto di ordine di una superficie), si può precisare svolgendo considerazioni analoghe a quelle cui si è accennato al principio del nº 5.

III. - Le serie e i sistemi lineari. -

7. - L'indirizzo algebrico-geometrico fin qui seguito nella nostra esposizione, ha la sua più lontana origine in una celebre Memoria di Brill e Noether(*). Occorre però anche aver presente il punto di vista, altrettanto importante, che segue da Riemann, e di cui ora daremo un cenno.

Premettiamo un'osservazione. Al nº 5, definendo l'ordine di una serie lineare g^r_v su di una curva C, si è ammesso che i suoi G_v fossero costituiti da punti tutti variabili. Però, per il seguito, convien di poter includere a volontà in ogni gruppo della serie lineare, una parte dei punti fissi comuni a C ed alle forme con cui la g^r_v vien segata su C. Diremo dunque che un sistema lineare di forme sega una curva C, fuori di un certo numero di punti presi fra i punti fissi comuni a C ed alle forme del sistema, in una serie lineare di gruppi di punti.

(*) Math. Ann. t. 7 (1873), pag. 308.

Con ciò tutti i gruppi di una serie lineare possono contenere dei punti fissi; ed astraendo in totalità od in parte, da questi, si ottiene ancora una serie lineare. Occorre notare che anche aggiungendo dei punti fissi ad ogni gruppo di una serie lineare, si ottiene ancora una serie lineare. La cosa è evidente se i punti fissi che si aggiungono, sono fra i punti base del sistema lineare con cui vien segata la serie lineare; e ci si può sempre ricondurre a questo caso, aggiungendo come parte fissa alle forme del sistema lineare segante, una forma generica che passi per i punti fissi considerati.

Una serie lineare g^1_n, è segata su di una curva C dalle forme di un fascio $\varphi + \lambda\varphi' = 0$. Si noti che φ e φ' sono due qualunque forme del fascio (che corrispondono ai valori o ed ∞ del parametro λ). Se consideriamo la funzione razionale $\frac{\varphi}{\varphi'}$, essa assume palesemente uno stesso valore nei diversi punti di uno stesso gruppo della g^1_n; potremo quindi dire che:

Sopra una curva algebrica C di un iperspazio, una serie lineare g^1_n si può definire come l'insieme dei gruppi di livello costante di una funzione razionale del punto mobile su C; il gruppo dei poli e quello degli zeri della funzione, sono due diversi gruppi (d'altronde arbitrari) della g^1_n. Anche da questo punto di vista, punti fissi possono includersi od escludersi a volontà: essi compaiono come punti d'indeterminazione della funzione razionale.

La cosa si estende subito alle serie lineari più volte infinite g^r_n: esse si potranno definire come insieme

dei gruppi di livello costante di una funzione razionale del punto mobile sulla curva, funzione in cui figurano linearmente $r-1$ parametri essenziali, ossia funzione che è del tipo

$$\mu_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \mu_2 \frac{\varphi_2}{\varphi_0} + \cdots + \mu_{r-1} \frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_0} + \frac{\varphi_r}{\varphi_0}$$

L'altro parametro essenziale per la determinazione di un gruppo della g^r_n è il livello del gruppo stesso.

Da questo punto di vista risulta evidente che:

Data su di una curva C una serie lineare g^r_n, se si trasforma birazionalmente C in un'altra curva C', in corrispondenza alla g^r_n di C si ha ancora su C' una serie lineare: l'ordine e la dimensione di questa hanno gli stessi valori n ed r dell'ordine e della dimensione di g^r_n.

Il concetto di serie lineare (come pure il suo ordine e la sua dimensione) è cioè invariante rispetto alle trasformazioni birazionali. Avendosi una curva algebrica, si può pensare a tutte le curve sue trasformate birazionali(*); esse formano un insieme, che è allo stesso modo definibile mediante un'altra qualunque delle sue curve: l'astratto delle curve di un tale insieme, dicesi un ente algebrico semplicemente infinito ∞^1, e le curve algebriche dell'insieme si dice che costituiscono dei modelli proiettivi dell'ente. Seguendo le idee esposte

(*) La trasformazione birazionale è fra le curve, non necessariamente fra i loro spazi di appartenenza, i quali anzi possono benissimo avere dimensioni diverse.

da Klein nel suo Programma di Erlangen, siamo così tratti a studiare le proprietà delle curve algebriche che restano invariate rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali: esse costituiscono la così detta geometria sull'ente.

Tutto ciò che precede si può trasportare immutato alle superficie e varietà algebriche a più dimensioni.

Limitandoci, per brevità, alle superficie, si ha che sopra una superficie un sistema lineare di curve si può definire come l'insieme delle curve di livello costante di una funzione razionale del punto mobile sulla superficie. Curve fisse possono includersi od escludersi a volontà: esse compaiono come curve d'indeterminazione della funzione razionale. Non altrettanto può dirsi dei punti fissi isolati (punti base); questi non possono venir soppressi, però si può ignorarli, ossia astrarre dalla loro esistenza: si dice allora che il sistema lineare è virtualmente privo di punti base. Assegnare un punto fisso ad un sistema lineare significa imporlo come punto base. Con ciò si ottiene ancora un sistema lineare, il quale è contenuto nel primo o coincide con esso, a seconda che il punto base che si assegna non coincide o coincide con uno dei punti base virtualmente inesistenti del dato sistema lineare. Si può anche imporre alle curve di un sistema lineare di contenere come parte una curva fissa, che già non sia curva base del sistema lineare: con ciò si ha ancora un sistema lineare (a quello subordinato), di cui ovviamente la curva considerata è curva base.

8 - Due gruppi di punti A e B di una curva algebrica C diconsi equivalenti tra loro, e si scrive

$$A \equiv B,$$

quando esiste su C una g^1_n di cui A e B siano due gruppi(*). In base al n° precedente, ciò equivale al fatto che esista una funzione razionale del punto mobile su C, di cui A sia il gruppo degli zeri e B il gruppo dei poli. È opportuno porre in rilievo che mentre la funzione razionale definisce su C una ben determinata g^1_n, questa non individua quella, se non quando si sieno fissati tre gruppi distinti di g^1_n in cui la funzione razionale debba assumere tre distinti livelli (per es. $0, 1, \infty$)(**).

L'equivalenza fra i gruppi di punti gode ovviamente della proprietà simmetrica e riflessiva. Dimostreremo che essa gode pure della proprietà transitiva, ossia che da $A \equiv B$ e $B \equiv C$ segue $A \equiv C$. Le ipotesi fatte esprimono che esistono due funzioni razionali, aventi gli zeri ed i poli rispettivamente in A e B ed in B e C: il prodotto di queste due funzioni sarà una nuova funzione razionale, di cui A è il gruppo degli zeri e C il gruppo dei poli, il che dimostra la tesi.

Da quest'ultima proprietà discendono alcune proposizioni importantissime. Intanto, dato sull'ente un gr

---

(*) Questo concetto è stato introdotto da Brill e Noether nella Memoria citata al n° precedente; ivi è però usata la locuzione "gruppi corresiduali". La denominazione di "gruppi equivalenti" è di Dedekind e Weber.

(**) cfr. T.G.A., pag. 98.

da *Klein* nel suo Programma di *Erlangen*, siamo così tratti a studiare le proprietà delle curve algebriche che restano invariate rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali: esse costituiscono la così detta geometria sull'ente.

Tutto ciò che precede si può trasportare immutato alle superficie e varietà algebriche a più dimensioni.

Limitandoci, per brevità, alle superficie, si ha che sopra una superficie un sistema lineare di curve si può definire come l'insieme delle curve di livello costante di una funzione razionale del punto mobile sulla superficie. Curve fisse possono includersi od escludersi a volontà: esse compaiono come curve d'indeterminazione della funzione razionale. Non altrettanto può dirsi dei punti fissi isolati (punti base); questi non possono venir soppressi, però si può ignorarli, ossia astrarre dalla loro esistenza: si dice allora che il sistema lineare è virtualmente privo di punti base. Assegnare un punto fisso ad un sistema lineare significa imporlo come punto base. Con ciò si ottiene ancora un sistema lineare, il quale è contenuto nel primo o coincide con esso, a seconda che il punto base che si assegna non coincide o coincide con uno dei punti base virtualmente inesistenti del dato sistema lineare. Si può anche imporre alle curve di un sistema lineare di contenere come parte una curva fissa, che già non sia curva base del sistema lineare: con ciò si ha ancora un sistema lineare (a quello subordinato), di cui ovviamente la curva considerata è curva base.

8 - Due gruppi di punti A e B di una curva algebrica C diconsi equivalenti tra loro, e si scrive

$$A \equiv B,$$

quando esiste su C una g^1_n di cui A e B siano due gruppi(*). In base al n° precedente, ciò equivale al fatto che esista una funzione razionale del punto mobile su C, di cui A sia il gruppo degli zeri e B il gruppo dei poli. È opportuno porre in rilievo che mentre la funzione razionale definisce su C una ben determinata g^1_n, questa non individua quella, se non quando si sieno fissati tre gruppi distinti di g^1_n in cui la funzione razionale debba assumere tre distinti livelli (per es. $0, 1, \infty$)(**).

L'equivalenza fra i gruppi di punti gode ovviamente della proprietà simmetrica e riflessiva. Dimostreremo che essa gode pure della proprietà transitiva, ossia che da $A \equiv B$ e $B \equiv C$ segue $A \equiv C$. Le ipotesi fatte esprimono che esistono due funzioni razionali, aventi gli zeri ed i poli rispettivamente in A e B ed in B e C: il prodotto di queste due funzioni sarà una nuova funzione razionale, di cui A è il gruppo degli zeri e C il gruppo dei poli, il che dimostra la tesi.

Da quest'ultima proprietà discendono alcune proposizioni importantissime. Intanto, dato sull'ente un gr

---

(*) Questo concetto è stato introdotto da *Brill* e *Noether* nella Memoria citata al n° precedente; ivi è però usata la locuzione "gruppi corresiduali". La denominazione di "gruppi equivalenti" è di *Dedekind* e *Weber*.

(**) Cfr. T.G.A., pag. 98.

gruppo A di punti, la totalità dei gruppi ad esso equivalenti costituisce una serie lineare(*), che si indica col simbolo $|A|$; è chiaro che in luogo di A si può porre un altro qualunque dei gruppi equivalenti; una serie lineare siffatta dicesi completa (*virtualmente priva di punti fissi*). *Una serie lineare non completa in particolare un gruppo A di punti) sta in una ed una sola serie lineare completa*. Occorre notare che una serie lineare completa si riduce ad un sol gruppo A di punti (ossia è ∞^0), quando sull'ente non esistono dei gruppi equivalenti ad A.

Anche ciò che precede si estende facilmente alle varietà algebriche a più dimensioni. Così, ad es., per le superficie, definito ciò che si intende per curve equivalenti, si può introdurre il concetto di *sistema lineare completo di curve* (*virtualmente privo di punti base*) e stabilire che *su di una superficie un sistema lineare non completo di curve* (*in particolare una curva*) *sta in uno ed un solo sistema lineare completo*.

9- Preso *genericamente* un gruppo di punti su di un ente algebrico ∞^1, ci si può chiedere se esistono dei gruppi ad esso equivalenti, e non aventi con quello punti comuni, ossia se esiste una funzione razionale dell'ente che ammetta i punti dati come poli effettivi, (s'intende che l'ordine di ciascun polo deve essere uguale alla molteplicità del punto entro al gruppo dato). Si verifica che,

(*) Cfr. T.G.A., pag. 101.

affinchè una tale funzione esista, occorre che il numero dei punti considerati non discenda al disotto di un certo minimo(*). Tale minimo vale 1 per gli enti razionali, e per essi soltanto(**), ossia è maggior di 1 per gli enti non razionali: seguendo *Weierstrass* esso si dirà il *rango* dell'ente, e verrà indicato con $p+1$. Il numero p che così si presenta è il *genere* dell'ente, ed è il medesimo di quello introdotto da *Riemann* in relazione alla teoria della connessione delle superficie di *Riemann*.

In realtà il *rango* è stato definito da *Weierstrass* in un modo un po' meno generale, in quanto che egli si limitava al caso che il gruppo dato fosse costituito da punti coincidenti, ossia egli ricercava le funzioni razionali aventi sull'ente *un unico punto dato*, come polo multiplo. Il rango $p+1$ è la minima molteplicità del polo unico che può avere una funzione razionale dell'ente in un punto assegnato generico: sull'ente si ha però un numero finito di punti detti punti di *Weierstrass*(***) in cui detta molteplicità discende al disotto del rango.

Weierstrass ha dato il seguente teorema delle lacune(***):

Preso sull'ente un punto P qualunque, fra le funzioni razionali dell'ente aventi P come unico polo, mancano quelle che corrispondono a p valori dell'ordine del polo.

Se P è generico, gli ordini mancanti sono i primi p *numeri naturali*; fanno cioè eccezione soltanto i pun

(*) Cfr. T.G.A., pag. 146.

(**) Cfr. T.G.A., pag. 146.

(***) Cfr. T.G.A., pag. 164.

gruppo A di punti, la totalità dei gruppi ad esso equivalenti costituisce una *serie lineare*(*), che si indica col simbolo |A|; è chiaro che in luogo di A si può porre un altro qualunque dei gruppi equivalenti; una serie lineare siffatta dicesi *completa* (virtualmente priva di punti fissi). Una serie lineare non completa (in particolare un gruppo A di punti) sta in una ed una sola serie lineare completa. Occorre notare che una serie lineare completa si riduce ad un sol gruppo A di punti (ossia è ∞^0), quando sull'ente non esistono dei gruppi equivalenti ad A.

Anche ciò che precede si estende facilmente alle varietà algebriche a più dimensioni. Così, ad es., per le superficie, definito ciò che si intende per curve equivalenti, si può introdurre il concetto di sistema lineare completo di curve (virtualmente privo di punti base), e stabilire che su di una superficie un sistema lineare non completo di curve (in particolare una curva) sta in uno ed un solo sistema lineare completo.

9- Preso genericamente un gruppo di punti su di un ente algebrico ∞^1, ci si può chiedere se esistono dei gruppi ad esso equivalenti, e non aventi con quello punti comuni, ossia se esiste una funzione razionale dell'ente che ammetta i punti dati come poli effettivi, (s'intende che l'ordine di ciascun polo deve essere uguale alla molteplicità del punto entro al gruppo dato). Si verifica che,

(*) Cfr. T.G.A., pag. 101.

affinchè una tale funzione esista, occorre che il numero dei punti considerati non discenda al disotto di un certo minimo(*). Tale minimo vale 1 per gli enti razionali, e per essi soltanto(**), ossia è maggior di 1 per gli enti non razionali: seguendo Weierstrass esso si dirà il *rango* dell'ente, e verrà indicato con $p+1$. Il numero p che così si presenta è il *genere* dell'ente, ed è il medesimo di quello introdotto da Riemann in relazione alla teoria della connessione delle superficie di Riemann.

In realtà il *rango* è stato definito da Weierstrass in un modo un po' meno generale, in quanto che egli si limitava al caso che il gruppo dato fosse costituito da punti coincidenti, ossia egli ricercava le funzioni razionali aventi sull'ente un unico punto dato, come polo multiplo. Il rango $p+1$ è la minima molteplicità del polo unico che può avere una funzione razionale dell'ente in un punto assegnato generico: sull'ente si ha però un numero finito di punti detti punti di Weierstrass(***) in cui detta molteplicità discende al disotto del rango.

Weierstrass ha dato il seguente teorema delle lacune(***)

Preso sull'ente un punto P qualunque, fra le funzioni razionali dell'ente aventi P come unico polo, mancano quelle che corrispondono a p valori dell'ordine del polo.

Se P è generico, gli ordini mancanti sono i primi p numeri naturali; fanno cioè eccezione soltanto i pun

(*) Cfr. T.G.A., pag. 146.
(**) Cfr. T.G.A., pag. 146.
(***) Cfr. T.G.A., pag. 164.

ti P di Weierstrass, pei quali uno o più di tali numeri non è lacunare: a norma del teorema delle lacune, si dovrà però presentare un egual numero di lacune in corrispondenza ad ordini maggiori di p del polo P.

IV. *Operazioni di somma e di sottrazione sulle serie e sistemi lineari.* -

10 - Diremo *somma* di due gruppi A e B di punti di una curva Γ, il gruppo di punti che si ottiene riunendo i due gruppi dati; questo gruppo sarà indicato con $A+B$, ed ogni suo punto dovrà contare nel gruppo un numero di volte, che è la somma delle volte in cui esso figura in A ed in B. Si ha ovviamente $A+B=B+A$.

In base a questa definizione, l'osservazione fatta al principio del n° 7 può esprimersi brevemente così: *da $A\equiv A'$ segue $A+B\equiv A'+B$ e viceversa*. Dico che se è $A\equiv A'$ e $B\equiv B'$, si deduce che $A+B\equiv A'+B'$. Dall'ipotesi si ha infatti, per ciò che precede: $A+B\equiv A'+B\equiv A'+B'$, e da qui segue l'asserto, in virtù della proprietà transitiva dell'equivalenza. Se pertanto si considerano due serie lineari complete $|A|$ e $|B|$, i gruppi ottenuti aggregando un qualunque gruppo dell'una ad un qualunque gruppo dell'altra, son due a due equivalenti, ond'essi appartengono alla serie lineare completa $|A+B|$. Questa serie lineare dicesi *la somma (completa) delle due serie lineari $|A|$ e $|B|$*. Date due serie lineari *anche non complete* si

considera talvolta la serie lineare di dimensione minima che contiene tutti i gruppi ottenuti sommando un qualunque gruppo dell'una ad un qualunque gruppo dell'altra(*): tale serie lineare è determinata ed unica(**), e vien chiamata la *somma minima delle due serie lineari date*.

La definizione di *somma* (completa o minima) di due serie lineari, si estende subito ad un numero qualunque di serie: in particolare, se gli addendi coincidono con una medesima serie lineare, la somma di esse è *un multiplo* (completo o minimo) di questa.

11 - Si dice che un gruppo C di punti sopra una curva Γ *contiene parzialmente* un altro gruppo A, quando il primo può ottenersi sommando A con un altro gruppo B. Quest'ultimo gruppo dicesi *il resto* di A rispetto a C e lo si indica con $C-A$. È chiaro che l'insieme dei gruppi di una serie lineare, che contengono come parte un gruppo dato, formano una serie lineare, cioè *i resti di un gruppo rispetto ad una serie lineare costituiscono una serie lineare*.

Si dice che una serie lineare contiene parzialmente un'altra serie lineare (in particolare un gruppo) quando ogni gruppo di questa è contenuto parzialmente in (almeno) un gruppo di quella. Si dirà, per contro, che una serie lineare è *contenuta totalmente in un'altra*, quando ogni gruppo della prima è anche

(*) L'insieme di tutti questi gruppi somma non è generalmente lineare (V. n° 12).
(**) Cfr. E.g.a., pag. 105.

gruppo alla seconda.

Sia data una serie lineare completa $|C|$, che contenga parzialmente un gruppo A; e sia B il resto di A rispetto ad un gruppo C di $|C|$, che lo contenga parzialmente, talchè sarà $B = C - A$, o, se si vuole, $C = A + B$. In tale ipotesi risulta $|A + B| = |C|$, poichè le due serie lineari complete che figurano nei due membri di questa uguaglianza hanno un gruppo $(A + B = C)$ a comune (qui si applica la proposizione data al n° 9). Si ha dunque che basta che la serie $|C|$ contenga parzialmente un gruppo A perchè essa contenga parzialmente la serie lineare completa $|A|$, ed inoltre:

Teorema del resto(*) – Se un gruppo B è resto di un gruppo A rispetto ad una serie lineare $|C|$, esso è resto rispetto a $|C|$ di ogni altro gruppo della serie lineare $|A|$. Tutti i resti B di $|A|$ rispetto a $|C|$, costituiscono una serie lineare completa $|B|$, che vien detta la serie residua di $|A|$ rispetto a $|C|$, od anche differenza delle serie; essa vien indicata col simbolo $|C-A|$ od anche con $|C| - |A|$.

Osservazione. Tutto ciò che si è detto sulla somma (completa e minima), sulla differenza e sui multipli di serie lineari date sopra una curva, si trasporta tale e quale (salvo qualche modificazione di linguaggio)

(*) Esso è stato dato sotto forma proiettiva da Brill e Noether nella Memoria citata al n° 7. La forma invariantiva qui esposta, adombrata in C. Segre (Annali di Matematica, 1894) n° 59 e in Bertini (Annali di Matematica, 1894) n° 14, trovasi esplicitamente in Castelnuovo e Enriques (Math. Annalen, 1896).

alle superficie ed alle varietà algebriche a più dimensioni, almeno finchè ci si limita a considerare sistemi lineari virtualmente privi di punti base. In caso contrario, occorrono opportune convenzioni circa i punti base: convenzioni delle quali diremo in seguito, se ci occorrerà.

È superfluo il rilevare che tutti i concetti che abbiamo introdotti sono invarianti per trasformazioni birazionali.

12 – Al concetto di somma di due serie lineari date sopra una curva Γ, corrisponde, dal punto di vista Riemanniano, il concetto di prodotto di due funzioni razionali del punto di Γ. Precisamente, se sono θ, θ' due tali funzioni razionali, che abbiano rispettivamente per gruppi degli zeri i gruppi A, B delle serie date e per poli i gruppi A', B' delle serie stesse (qualora i gruppi considerati non abbiano fra loro alcun particolare legame, che potrebbe del resto portare al più taluni punti d'indeterminazione nella funzione razionale che stiamo per considerare), la funzione $\theta.\theta'$ ha per gruppo degli zeri $A + B$ e per gruppo polare $A' + B'$. Se le dimensioni delle serie date sono r, r', nelle θ, θ' (giusta il n° 7) si possono porre in vista rispettivamente $r - 1$, $r' - 1$ parametri lineari essenziali. Allora nel prodotto $\theta.\theta'$, che rappresenta tutte le funzioni razionali che hanno per gruppo zero un gruppo del tipo $A + B$ e per gruppo polare un gruppo dello stesso tipo, compariscono i prodotti dei predetti parametri: il che rende manifesto quel che si è affermato (in nota, al n° 10) che la totalità dei

gruppi del tipo A + B non è in generale lineare ma quadratica (va eccepito pres. il caso che una almeno delle date serie lineari sia ∞^0, come il caso che si tratti di serie lineari complete sopra una curva razionale; nei quali casi detta totalità è lineare). Come il prodotto $\theta.\theta'$ sia legato alla somma minima delle due serie, cui sopra si è accennato, può vedersi in T. G. A. a pag. 105.

Alla somma di due serie lineari, rimane però associato, sotto un certo aspetto, anche il concetto di somma di due funzioni razionali. Invero, se θ, θ' hanno lo stesso significato di poc'anzi, la funzione razionale $\theta + \theta'$ ha per gruppo dei poli $A' + B'$. Il gruppo degli zeri sarà poi un gruppo della serie lineare completa $|A + B|$. I gruppi di livello della funzione razionale $\theta + \theta'$ (ove si può supporre che θ, θ' contengano gli $r - 1$, $r' - 1$ parametri essenziali) formano ora una serie lineare, che può non contenere tutti i possibili gruppi A + B, ma soltanto alcuni di essi.

Al concetto di differenza di due serie lineari $|C|$, $|A|$ sopra una curva Γ, corrisponde con opportune limitazioni, il concetto di quoziente di due funzioni razionali. Precisamente, se θ è una funzione razionale che abbia per gruppo degli zeri un gruppo C scisso in A + B e per gruppo dei poli un gruppo C' scisso in $A' + B'$; θ' una funzione razionale che abbia per gruppo zero A e per gruppo polare A', risulta $\theta : \theta'$ una funzione razionale che ha per gruppo zero B e per gruppo polare B'.

Analoghe considerazioni valgono per le funzioni razionali del punto mobile su di una superficie o su di una qualunque varietà algebrica a più dimensioni.

V - Singolarità ordinarie dei modelli proiettivi degli enti algebrici. -

13 - I vari modelli proiettivi di un ente algebrico ∞^k possono presentare le più svariate singolarità (puntuali, tangenziali o di spazi osculatori). Se si vuole che il modello appartenga ad uno spazio di data dimensione r, può darsi che, quando la dimensione r dell'ambiente è troppo piccola rispetto alla dimensione k dell'ente, questo abbia necessariamente certe singolarità (almeno se l'ente che si considera è generico). Queste singolarità, che sarebbe quindi vano cercar di far sparire cambiando di modello in S_r, diconsi singolarità ordinarie del modello proiettivo di S_r. Occorre anche tener presente un significato più ristretto che, in certe questioni, si attribuisce a questa locuzione: precisamente diconsi talvolta ordinarie, le singolarità di una varietà algebrica di S_r, che non si possono far sparire mediante trasformazioni cremoniane dello spazio S_r.

È appunto questo il significato che si dà a detta locuzione, quando si tratta delle curve piane. Una singolarità ordinaria di una curva piana algebrica, è un punto s-plo ($s \geq 2$), in cui la curva ha s tangenti distinte (punto s-plo ordinario). In altri termini, assunta questa come definizione, si ha il teorema:

Una curva piana algebrica (senza componenti multiple), si può trasformare in un'altra con sole singolarità ordinarie, mediante una trasformazione cremoniana del piano.

Questo teorema è stato dato da Noether(*), il quale introdusse in pari tempo concetti assai importanti, circa le singolarità infinitamente vicine.

Le singolarità ordinarie di una curva piana, nell'accezione più generale, sono i nodi (o punti doppi ordinari), cioè:

Una curva piana (senza componenti multiple) si può birazionalmente trasformare in un'altra dotata di soli nodi.

Ciò è stato, sostanzialmente dimostrato per la prima volta (1858) da Kronecker, e successivamente da Bertini(**), usufruendo di una trasformazione (1,2) fra i piani delle due curve, che è biunivoca fra le due curve. Anteriormente (1881) Veronese aveva osservato che una curva algebrica irriducibile può sempre considerarsi come proiezione di una priva di punti multipli appartenente ad uno spazio superiore. E ciò sul fondamento del teorema di Nöther (anzi di talune sue conseguenze). La proposizione medesima è stata ritrovata in modo semplicissimo da Severi(***); la dimostrazione di Severi, che non presuppone in alcun modo la preventiva analisi delle singolarità, è stata ulteriormente semplificata da Albanese (****), il quale ha poi così potuto trasportarne il concetto alle superficie.

(*) Gött. Nach. (1871), pag. 267. Per indicazioni bibliografiche più precise, ved. T.G.A. pag. 332.

(**) Rivista di Mat., t. 1 (1891), pag. 22.

(***) Atti Ist. Veneto t. 79 (1920), pag. 929.

(****) Rendic. Lincei, ser. V, t. 33 (1924), pag. 13.

Dal teorema di Veronese è facile dedurre la trasformabilità birazionale di una curva in una piana dotate di soli nodi. Precisamente, sia C una curva algebrica di S_r, priva di punti multipli. Le sue ∞^2 corde riempiono una varietà V, a tre dimensioni al più (si ha una varietà di dimensione inferiore, solo per le curve piane): dunque, supposto $r \geq 4$, uno S_{r-4} generico di S_r non incontra V. Proiettando C da S_{r-4} su di uno S_3 sghembo con esso, otterremo una curva Γ di S_3, ancor priva di punti multipli. Quindi si ha intanto che:

Una curva algebrica irriducibile si può sempre trasformare in un'altra dello spazio ordinario, senza punti multipli.

Le ∞^2 corde di Γ riempiono S_3 per intero, costituendo una congruenza algebrica, pertanto si avrà un numero finito di corde che passano per un punto O generico di S_3. Nessuna di queste corde può esser trisecante, poichè (Castelnuovo) una curva di cui ogni corda sia trisecante è necessariamente piana. La proiezione di Γ da O su d'un piano, avrà quindi solo dei punti doppi: affinchè questi siano nodi basta supporre di aver scelto O fuori della rigata delle tangenti di Γ, e fuori della rigata luogo delle congiungenti i punti di contatto con Γ, degli ∞^1 suoi piani bitangenti.

14 – L'estensione alle superficie dei precedenti teoremi non è agevole. Il primo che si occupò della cosa fu Noether (1871), il quale però si limitò più che altro a dare esempi tipici. Poscia vi fu un tentativo di dimo-

strazione di Del Pezzo (1892) riconosciuto incompleto da C. Segre (1896); il quale studiò l'effetto delle trasformazioni quadratiche sulle superficie di S_3, introducendo vari concetti importanti per lo studio delle loro singolarità.

La prima dimostrazione completa (per quanto non semplice) è di B. Levi. In seguito l'Albanese diede le dimostrazioni ben semplici cui sopra si è alluso.

Il risultato sulle curve relativo alle singolarità ordinarie in senso ristretto, è stato esteso alle superficie di S_3 da C. Bisini (1921).

Anche per le superficie si può dunque sempre costruire un modello iperspaziale privo di singolarità. Sia F un tale modello, appartenente ad S_r. Le corde di F sano ∞^4, e riempiono quindi una varietà V a 5 dimensioni al più (si ha una varietà di dimensione inferiore, solo se $r < 5$, oppure se F è la superficie di Veronese(*)) dunque supposto $r > 5$ uno S_{r-6} generico di S_r non incontra V, e la proiezione Φ di F da esso su di uno S_5 è ancor priva di singolarità. Una superficie algebrica si può sempre trasformare in un'altra di S_5 senza punti multipli.

Per un punto generico di S_5, passa un numero finito di rette di Φ (ne passa zero solo se Φ sta in S_4 o è la superficie di Veronese): una proiezione generica di Φ da un punto su d'un iperpiano, sarà quindi una superficie Ψ di S_4 con un numero finito di punti doppi impropri (v. l'oss. 2ª).

Proiettiamo Ψ da un punto O generico di S_4 su d'un S_3.

(*) Cfr. Severi, Rend. Palermo (1901); V. l'oss. 1ª

Per O passerà una semplice infinità di corde di Ψ; fra cui vi sono certo le rette che congiungono O ai punti doppi impropri di Ψ. Queste corde costituiscono un cono algebrico. Tra esse solo un numero finito possono esser trisecanti (poichè una superficie con ∞^4 trisecanti sta necessariamente in S_3); e del pari si ha fra quelle corde solo un numero finito di tangenti (poichè le tangenti di Ψ son solo ∞^3). La proiezione su S_3 avrà quindi, se O, ripetiamo è generico, una linea doppia nodale, su cui si può avere solo un numero finito di punti tripli, triplanari (per la curva e per la superficie), e solo un numero finito di punti P in cui i due piani tangenti alla superficie coincidono. Questi punti P vengon detti punti cuspidali della superficie (pinch-points di Cayley); in ciascuno di essi, le rette che toccano la superficie riempiono un piano, e se il punto cuspidale è ordinario, come accade per la genericità di O, tutte le tangenti in esso hanno ivi incontro tripunto colla superficie, tranne due, che hanno incontro quadripunto(*): una di queste due rette è ovviamente la tangente alla curva doppia. Un punto P cuspidale della superficie, è tale che le sezioni piane generiche per P, hanno in P una cuspide generale, ossia un punto doppio a tangenti coincidenti e con incontro tripunto. Possiamo dire concludendo che:

Una superficie algebrica irriducibile si può sempre trasformare in un'altra, avente come sole sin

(*) Cfr. C. Segre, Annali di Matematica, 1896; n° 13.

strazione di Del Pezzo (1892) riconosciuto incompleto da C. Segre (1896), il quale studiò l'effetto delle trasformazioni quadratiche sulle superficie di S_3, introducendo vari concetti importanti per lo studio delle loro singolarità.

La prima dimostrazione completa (per quanto non semplice) è di B. Levi. In seguito l'Albanese diede le dimostrazioni ben semplici cui sopra si è alluso.

Il risultato sulle curve relativo alle singolarità ordinarie in senso ristretto, è stato esteso alle superficie di S_3 da C. Bisini (1921).

Anche per le superficie si può dunque sempre costruire un modello iperspaziale privo di singolarità. Sia F un tale modello, appartenente ad S_r. Le corde di F sono ∞^4, e riempiono quindi una varietà V a 5 dimensioni al più (si ha una varietà di dimensione inferiore, solo se $r \leq 5$, oppure se F è la superficie di Veronese(*)) dunque supposto $r > 5$ uno S_{r-6} generico di S_r non incontra V, e la proiezione Φ di F da esso su di uno S_5 è ancor priva di singolarità. Una superficie algebrica si può sempre trasformare in un'altra di S_5 senza punti multipli.

Per un punto generico di S_5, passa un numero finito di rette di Φ (ne passa o zero solo se Φ sta in S_4 o è la superficie di Veronese): una proiezione generica di Φ da un punto su d'un iperpiano, sarà quindi una superficie Ψ di S_4 con un numero finito di punti doppi impropri (v. l'oss. 2ª).

Proiettiamo Ψ da un punto O generico di S_4 su d'un S_3.

(*) Cfr. Severi, Rend. Palermo (1901); V. l'oss. 1ª

Per O passerà una semplice infinità di corde di Ψ; fra cui vi sono certo le rette che congiungono O ai punti doppi impropri di Ψ. Queste corde costituiscono un cono algebrico. Tra esse solo un numero finito possono esser trisecanti (poichè una superficie con ∞^4 trisecanti sta necessariamente in S_4); e del pari si ha fra quelle corde solo un numero finito di tangenti (poichè le tangenti di Ψ son solo ∞^3). La proiezione su S_3 avrà quindi, se O, ripetiamo è generico, una linea doppia nodale, su cui si può avere solo un numero finito di punti tripli, triplanari (per la curva e per la superficie), e solo un numero finito di punti P in cui i due piani tangenti alla superficie coincidono. Questi punti P vengon detti punti cuspidali della superficie (pinch-points di Cayley); in ciascuno di essi, le rette che toccano la superficie riempiono un piano, e se il punto cuspidale è ordinario, come accade per la genericità di O, tutte le tangenti in esso hanno ivi incontro tripunto colla superficie, tranne due, che hanno incontro quadripunto(**): una di queste due rette è ovviamente la tangente alla curva doppia. Un punto P cuspidale della superficie, è tale che le sezioni piane generiche per P, hanno in P una cuspide generale, ossia un punto doppio a tangenti coincidenti e con incontro tripunto. Possiamo dire concludendo che:

Una superficie algebrica irriducibile si può sempre trasformare in un'altra, avente come sole sin

(*) Cfr. C. Segre, Annali di Matematica, 1896; n° 13.

golarità una curva doppia nodale, sulla quale vi sia un numero finito di punti tripli triplanari (per la curva e per la superficie) ed un numero finito di punti cuspidali ordinari.

Queste sono le singolarità ordinarie di una superficie di S_3.

Osservazione 1ª – La superficie di Veronese è una superficie razionale di S_5, che si rappresenta sul piano mediante il sistema lineare delle ∞^5 coniche del piano. Le sue equazioni son quindi le (4) del n° 2, ove le φ_i sono 6 forme quadratiche linearmente indipendenti, nelle t_0, t_1, t_2: ad esempio:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = t_0^2 : t_1^2 : t_2^2 : t_1 t_2 : t_0 t_1 : t_0 t_2 .$$

Detta superficie è del 4° ordine, poichè 4 è il grado del sistema lineare rappresentativo, (che è semplice). Nel piano di questo sistema vi sono ∞^2 rette, ciascuna delle quali è segata in due soli punti da ogni curva (conica) del sistema: sulla superficie vi saranno quindi ∞^2 curve, ciascuna delle quali è segata in due soli punti dagli iperpiani di S_5, ossia ∞^2 coniche. Due qualunque di queste coniche hanno un sol punto a comune; e per due punti della superficie passa una ed una sola conica: tutto ciò è immediato, se si pensi alla rappresentazione piana.

Ogni corda della superficie, sta nel piano della conica che passa pei suoi punti d'appoggio: questo mostra che le corde della superficie non son altra cosa che le rette dei piani delle sue ∞^2 coniche, e quindi, effettivamente, esse riempiono una varietà a

4 dimensioni.

Osservazione 2ª. Se si considera una varietà algebrica, possono esistere delle rette che, pur appartenendo alla varietà delle sue corde, abbiano con essa un sol punto comune, senza che tuttavia risultino tangenti alla varietà considerata. Rette siffatte, con denominazione introdotta da B. Levi, diconsi corde improprie della varietà. Così, ad esempio, presa una curva sghemba C avente un nodo P, essa ammette in P due tangenti distinte: le ulteriori rette del loro fascio sono corde improprie di C (B. Levi), ossia, senza toccar C in P, posson considerarsi come posizioni limiti di una corda i cui due punti d'appoggio tendano a P in modo conveniente.

Se si considera una superficie F di S_4, avente un punto doppio P, per P si possono avere ∞^2 oppure ∞^3 corde improprie di F: nel primo caso, P dicesi un punto doppio proprio di F (tale è per es. il punto di contatto di due forme di S_4 per la loro intersezione, le corde improprie essendo le rette uscenti dal punto e contenute nello S_3 tangente comune), mentre che il punto doppio dicesi improprio nel secondo caso. La sezione di F con un iperpiano generico avrà un certo genere p (v. n° 9): se l'iperpiano segante passa genericamente per un punto doppio proprio di F, il genere della sezione diminuisce di un'unità, mentre che esso non cambia pel fatto che l'iperpiano segante contenga un punto doppio improprio di F.

Questi concetti sono stati introdotti e considerati da golarità una curva doppia nodale, sulla quale vi sia un numero finito di punti tripli triplanari (per la curva e per la superficie) ed un numero finito di punti cuspidali ordinari.

Queste sono le singolarità ordinarie di una superficie di S_3.

Osservazione 1ª – La superficie di Veronese è una superficie razionale di S_5, che si rappresenta sul piano mediante il sistema lineare delle ∞^5 coniche del piano. Le sue equazioni son quindi le (4) del n° 2, ove le φ_i sono 6 forme quadratiche linearmente indipendenti, nelle t_0, t_1, t_2: ad esempio:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = t_0^2 : t_1^2 : t_2^2 : t_1 t_2 : t_0 t_1 : t_0 t_2 .$$

Detta superficie è del 4° ordine, poichè 4 è il grado del sistema lineare rappresentativo, (che è semplice). Nel piano di questo sistema vi sono ∞^2 rette, ciascuna delle quali è segata in due soli punti da ogni curva (conica) del sistema: sulla superficie vi saranno quindi ∞^2 curve, ciascuna delle quali è segata in due soli punti dagli iperpiani di S_5, ossia ∞^2 coniche. Due qualunque di queste coniche hanno un sol punto a comune; e per due punti della superficie passa una ed una sola conica: tutto ciò è immediato, sol che si pensi alla rappresentazione piana.

Ogni corda della superficie, sta nel piano della conica che passa pei suoi punti d'appoggio: questo mostra che le corde della superficie non son altra cosa che le rette dei piani delle sue ∞^2 coniche, e quindi, effettivamente, esse riempiono una varietà a

4 dimensioni.

Osservazione 2ª. Se si considera una varietà algebrica, possono esistere delle rette che, pur appartenendo alla varietà delle sue corde, abbiano con essa un sol punto comune, senza che tuttavia risultino tangenti alla varietà considerata. Rette siffatte, con denominazione introdotta da B. Levi, diconsi corde improprie della varietà. Così, ad esempio, presa una curva sghemba C avente un nodo P, essa ammette in P due tangenti distinte: le ulteriori rette del loro fascio sono corde improprie di C (B. Levi), ossia, senza toccar C in P, posson considerarsi come posizioni limiti di una corda i cui due punti d'appoggio tendano a P in modo conveniente.

Se si considera una superficie F di S_4, avente un punto doppio P, per P si possono avere ∞^2 oppure ∞^3 corde improprie di F: nel primo caso, P dicesi un punto doppio proprio di F (tale è per es. il punto di contatto di due forme di S_4 per la loro intersezione, le corde improprie essendo le rette uscenti dal punto e contenute nello S_3 tangente comune), mentre che il punto doppio dicesi improprio nel secondo caso. La sezione di F con un iperpiano generico avrà un certo genere p (v. N° 9): se l'iperpiano segante passa genericamente per un punto doppio proprio di F, il genere della sezione diminuisce di un'unità, mentre che esso non cambia pel fatto che l'iperpiano segante contenga un punto doppio improprio di F.

Questi concetti sono stati introdotti e considerati da un punto di vista più generale, da Severi (*).

Osservazione 3ª. – In tutto ciò che andiamo esponendo in queste Conferenze, gli elementi che si considerano, salvo esplicito avviso in contrario, possono esser comunque complessi. Così ad esempio, stando nel campo reale, un nodo di una curva algebrica potrà esser un nodo propriamente detto (punto d'incrocio di due rami reali), o un punto doppio isolato (in cui la curva ha due tangenti imaginarie coniugate).

VI – Rami delle curve algebriche. –

15 – Una curva sghemba Γ e una sua proiezione piana generica C, son riferite birazionalmente fra loro: fanno solo eccezione alla biunivocità della corrispondenza i punti doppi di C, traccie sul piano di questa curva delle corde di Γ che passano pel centro di proiezione (nº 13). Più in generale si ha che

In una corrispondenza birazionale fra due curve algebriche, punti eccezionali alla biunivocità della corrispondenza possono aversi soltanto in punti multipli delle curve (non viceversa).

Sia infatti C una curva algebrica d'ordine n, appartenente ad S_r, riferita birazionalmente ad un'altra curva algebrica Γ. Ai gruppi delle sezioni iperpiane di C, corrispondono su Γ i gruppi di una serie lineare g^r_n priva di punti fissi, di cui (nº 5) la curva (sempli-

(*) Mem. Acc. Sc. di Torino (1902)

ce) C è l'imagine proiettiva. Un punto O qualunque di C, è centro di una stella ∞^{r-1} d'iperpiani di S_r, i quali segano su C una g^{r-1}_n: questa ha il punto O come unico punto fisso, da contarsi s volte ($0<s<n$) se s è la molteplicità di O per la curva C. A questa g^{r-1}_n corrisponde su Γ (in virtù della corrispondenza birazionale fra C e Γ), una $\bar{g}^{r-1}_n$ totalmente contenuta nella suddetta g^r_n. Gli s' punti fissi di $\bar{g}^{r-1}_n$ (da contarsi ciascuno un conveniente numero di volte), sono palesemente gli omologhi su Γ del punto O di C: ora, poichè i gruppi di $\bar{g}^{r-1}_n$ devono, come quelli di g^{r-1}_n, contenere $n-s$ punti variabili, così dovrà aversi $1\leq s'\leq s$, il che appunto dimostra che se ad O corrispondono su Γ $s'>1$ punti distinti, la moltiplicità s del punto O per la curva C deve essere maggior di 1. Risulta anzi che ad un punto s-plo di C, possono al più corrispondere s punti di Γ.

Dalla proposizione dimostrata si ha come corollario, che *una corrispondenza birazionale fra due curve algebriche prive di punti multipli, è sempre senza eccezioni.*

Data una curva algebrica C avente un punto s-plo O, siano Γ' e Γ'' due sue qualunque trasformate birazionali prive di punti multipli, su cui come omologhi di O si abbiano rispettivamente i punti (semplici) $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$ ($1\leq s'\leq s$) e $O''_1, O''_2, \ldots, O''_{s''}$ ($1\leq s''\leq s$). Dico che è $s'=s''$. Ciò segue subito, notando che Γ' e Γ'' sono riferite fra loro in una corrispondenza birazionale (necessariamente senza eccezioni in virtù del precedente corollario), corrispondenza che deve mutare il gruppo degli s' punti O' nel gruppo degli s'' punti O''.

La corrispondenza birazionale che intercede fra C e Γ', muta il punto s-plo O di C, negli s' punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$ $(1 \leq s' \leq s)$ distinti e semplici della curva Γ'. L'intorno di O su C si trasforma negli intorni degli s' punti O' su Γ', onde esso si spezza in s' intorni parziali; tali intorni verranno detti rami della curva algebrica, ed il punto O si dirà l'origine di questi rami. Il numero s' dei rami di C che hanno l'origine in O, non dipende per nulla dalla particolare trasformata birazionale Γ' che si è considerata; e la corrispondenza algebrica che intercede fra i rami di C ed i rami di Γ' è biunivoca senza eccezioni.

Il punto di una curva algebrica è un elemento proiettivo, ma non birazionale, in quanto punti distinti possono mutarsi in punti coincidenti, o viceversa; l'elemento che resta invariante per trasformazioni birazionali è il ramo, in quanto rami distinti sempre si mutano in rami distinti. Un ente algebrico ∞^1, dovrà dunque, dal punto di vista invariantivo, esser considerato come insieme di ∞^1 rami.

16- Supponiamo (il che è lecito, v. n° 13) che la curva Γ' considerata dianzi, appartenga allo S_3. Una sua proiezione piana f generica, avrà solo dei nodi, e può sempre supporsi che le proiezioni $O_1, O_2, \ldots, O_{s'}$ dei punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$ corrispondenti al punto O s-plo di C, cadano fuori dei nodi, bastando prendere il centro di proiezione fuori dei coni che proiettano la curva Γ' dai punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$. La curva C è trasformata birazionale della f; onde, se questa in coordinate cartesiane non omogenee t, u ha per equazione.

(1) $$f(t,u) = 0,$$

le coordinate non omogenee $x_1\ x_2, \ldots, x_r$ dei punti di C saranno funzioni razionali di t, u:

(2) $$x_i = \varphi_i(t,u) \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, r,$$

ed anche viceversa le coordinate t, u dei punti di f si esprimeranno razionalmente in funzione delle coordinate dei punti di C.

Al punto s-plo O di C, corrispondono su f gli s' punti semplici $O_1, O_2, \ldots, O_{s'}$ $(s' \leq s)$; consideriamo uno qualunque O_1 di questi punti, e supponiamo che esso sia l'origine delle coordinate (t,u), e che l'asse $t=0$ non risulti in esso tangente alla f: ciò può sempre ottenersi trasformando omograficamente, se occorre, la curva f.

In tali ipotesi, la u di un punto dell'intorno di O_1 su f, è una funzione olomorfa della t, definita implicitamente dalla (1)(*), e si potrà quindi sviluppare in serie di potenze di t (colla formula di Taylor-Cauchy), nel modo seguente:

(3) $$u = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

Questa serie converge in un cerchio di centro $t=0$, ed in questo cerchio la (3) rappresenta il ramo di f che ha l'origine in O_1(**).

Possiamo supporre che le coordinate $b_1, b_2, \ldots, b_r$ del

(*) V. «T. G. A.» pag. 82.

(**) Ciò è caso particolare di una proposizione che diamo più sotto.

punto O siano tutte finite, bastando in caso contrario trasformare omograficamente la curva C. Con ciò i secondi membri delle (2) si riducono alle quantità <u>finite</u> b_i per $t = u = 0$, laonde sostituendo nelle (2) al posto di u la serie (3), si otterranno le x_i come funzioni olomorfe di t (*)

$$(4) \qquad x_i = b_i + b'_i t + b''_i t^2 + \dots \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots r.$$

Queste serie convergono in un cerchio di centro $t = 0$, che può eventualmente essere più ristretto del campo di convergenza della (3). In tale cerchio le (4) rappresentano uno degli s rami di C che hanno l'origine in O, e precisamente l'omologo del ramo di f di origine O_1. Si conclude che:

<u>Le coordinate dei punti di un ramo di una curva algebrica, si possono esprimere come serie di potenze di un parametro t, convergenti in un medesimo cerchio di centro $t = 0$.</u>

<u>Osservazione 1ª</u> - Nel caso in cui il punto O_1 ($t = u = 0$) è fondamentale per la trasformazione fra C, f (pel che occorre che sia punto base del sistema lineare trasformante che si ha nel piano di f), le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ per $t = u = 0$ assumono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ma se, pel tramite della (3), le φ si considerano come funzioni analitiche di t, esse, per $t \to 0$, tendono rispettivamente ai limiti finiti $b_1, b_2, \dots, b_r$. Sicchè in ogni caso, esse son funzioni olomorfe di t, in un conveniente intorno di $t = 0$.

(*) Infatti l'unica singolarità che quelle funzioni potrebbero avere per $t = 0$ sarebbe un polo, ma ciò resta escluso dall'ipotesi che le $b_1, b_2, \dots b_r$ sono finite.

<u>Osservazione 2ª</u>. - Per ciò che s'è detto in principio di questo n°, il parametro t risulta funzione razionale di $x_1, x_2, \dots x_r$, onde esso è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti del ramo, ciò che è essenziale osservare per escludere la presenza di singolarità parametriche.

<u>Osservazione 3ª</u> - Se (4) rappresentano un ramo di curva analitica, quando fra i valori di t ed i punti del ramo vi sia una corrispondenza biunivoca, ma non birazionale.

Tutto ciò che diremo al n° seguente pel ramo (4), vale anche se si suppone solamente che esso sia un ramo di curva analitica.

17 - Considerazioni una forma

$$(5) \qquad F(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0;$$

se nel polinomio F sostituiamo alle x_i le serie (4), otterremo una serie di potenze di t

$$F = a t^J + b t^{J+1} \dots \qquad \text{con } a \neq 0; \; J \geq 0.$$

Se la forma F passa per O, talchè risulta $F(b_1, b_2, \dots, b_r) = 0$, sarà $J \geq 1$: questo numero J si dice la molteplicità d'intersezione in O della forma (5) col ramo (4). Si può vedere che una forma $\bar{F}$ abbastanza vicina ad F, taglia il ramo precisamente in J punti distinti, i quali, col tendere di $\bar{F}$ a F, tendono all'origine O del ramo (*).

Se, in particolare, consideriamo gli ∞^{r-1} iperpiani passanti per O, si ha che uno generico di questi ha in O col ramo una certa molteplicità d'intersezione α, che

(*) « T. G. A » pag. 85

punto O siano tutte finite, bastando in caso contrario trasformare omograficamente la curva C. Con ciò i secondi membri delle (2) si riducono alle quantità finite b_i per $t = u = 0$, laonde sostituendo nelle (2) al posto di u la serie (3), si otterranno le x_i come funzioni olomorfe di t (*)

$$(4) \qquad x_i = b_i + b'_i t + b''_i t^2 + \dots \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \dots r.$$

Queste serie convergono in un cerchio di centro $t = 0$, che può eventualmente essere più ristretto del campo di convergenza della (3). In tale cerchio le (4) rappresentano uno degli s rami di C che hanno l'origine in O, e precisamente l'omologo del ramo di f di origine O_1. Si conclude che:

Le coordinate dei punti di un ramo di una curva algebrica, si possono esprimere come serie di potenze di un parametro t, convergenti in un medesimo cerchio di centro $t = 0$.

Osservazione 1ª - Nel caso in cui il punto O_1 $(t = u = 0)$ è fondamentale per la trasformazione fra C, f (pel che occorre che sia punto base del sistema lineare trasformante che si ha nel piano di f), le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ per $t = u = 0$ assumono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ma se, pel tramite della (3), le φ si considerano come funzioni analitiche di t, esse, per $t \to 0$, tendono rispettivamente ai limiti finiti $b_1, b_2, \dots, b_r$. Sicchè in ogni caso, esse son funzioni olomorfe di t, in un conveniente intorno di $t = 0$.

(*) Infatti l'unica singolarità che quelle funzioni potrebbero avere per $t = 0$ sarebbe un polo, ma ciò resta escluso dall'ipotesi che le $b_1, b_2, \dots b_r$ siano finite.

Osservazione 2ª. - Per ciò che s'è detto in principio di questo nº, il parametro t risulta funzione razionale di $x_1, x_2, \dots x_r$, onde esso è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti del ramo, ciò che è essenziale osservare per escludere la presenza di singolarità parametriche.

Osservazione 3ª - Se (4) rappresentano un ramo di curva analitica, quando fra i valori di t ed i punti del ramo vi sia una corrispondenza biunivoca, ma non birazionale.

Tutto ciò che diremo al nº seguente pel ramo (4), vale anche se si suppone solamente che esso sia un ramo di curva analitica.

17. - Consideriamo una forma

$$(5) \qquad F(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 ;$$

se nel polinomio F sostituiamo alle x_i le serie (4), otterremo una serie di potenze di t

$$F = a t^J + b t^{J+1} \dots \qquad \text{con } a \neq 0; \; J \geq 0.$$

Se la forma F passa per O, talchè risulta $F(b_1, b_2, \dots, b_r) = 0$, sarà $J \geq 1$: questo numero J si dice la molteplicità d'intersezione in O della forma (5) col ramo (4). Si può vedere che una forma $\bar{F}$ abbastanza vicina ad F, taglia il ramo precisamente in J punti distinti, i quali, col tendere di $\bar{F}$ a F, tendono all'origine O del ramo (*).

Se, in particolare, consideriamo gli ∞^{r-1} iperpiani passanti per O, si ha che uno generico di questi ha in O col ramo una certa molteplicità d'intersezione α, che

(*) « T. G. A » pag. 85

icesi l'ordine del ramo(*). Vi sono però ∞^{r-2} iperpiani venti in O col ramo molteplicità d'intersezione superio, $\alpha+\alpha_1$(**): tali iperpiani sono quelli che contengono na certa retta per O, che dicesi la tangente in O al rano. Fra essi ve ne sono ∞^{r-3} aventi in O col ramo nolteplicità d'intersezione $\alpha+\alpha_1+\alpha_2$ maggiore della precedente: essi sono gli iperpiani che contengono un erto piano, che si chiama il piano osculatore in O al amo. E così proseguendo finchè si giunge all'iperpiano osculatore.

I numeri interi e maggiori di zero $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$, he si vengon così a definire geometricamente, con manisto carattere proiettivo, diconsi rispettivamente il primo rango, il secondo rango, ..., l'ultimo rango o classe del amo. Il duale di un ramo è ancora un ramo(***); precisamente ai punti di un ramo corrispondono per dualità i suoi iperpiani osculatori, alle tangenti gli S_{r-2} osculatori, ecc; conseguentemente sono concetti duali l'ordine e la classe del ramo, i caratteri α_1 e α_{r-2}, ecc.

Osservazione – Ogni punto semplice di una curva è la rigine di un sol ramo lineare; un punto generico della curva è origine di un ramo con tutti i caratteri α uguali ad 1 (ramo ordinario).(****)

(*) Cayley ha chiamato rami lineari i rami di 1° ordine; superlineari gli altri.

(**) « T. G. A. » pag. 87.

(***) Ciò è stato intuito da Cayley, e dimostrato da Halphen per le curve piane e da Fine per le curve degli iperspazi. – V. « T. G. A. » pag. 90 e 334.

(****) « T. G. A. » pag. 90.

La molteplicità s di un punto s-plo è la somma degli ordini dei rami della curva di cui quel punto è origine; questi rami sono tutti lineari, soltanto nel caso che sieno in numero di s.

Un punto doppio o è origine di due rami lineari o è origine di un ramo di 2° ordine, e nei due casi rispettivamente si ha un nodo ordinario o di specie superiore (tacnodo oxnodo ecc.) od una cuspide ordinaria o di specie superiore (di 2ª 3ª, ecc., specie).

VII – Falde (invariantive ed analitiche) delle superficie algebriche.–

18 – Passando dalle curve alle superficie, si presentano delle difficoltà nuove, poichè trasformando birazionalmente una superficie algebrica, un punto può venir mutato in uno o più punti, ma ad esso possono anche venir a corrispondere ∞^1 punti costituenti una curva algebrica (composta di una o più parti irriducibili):

Ci si rende subito conto di ciò, esaminando l'esempio semplicissimo della superficie F proiezione su S_3 di una superficie F' di S_4. Se il centro O' di proiezione è esterno ad F' e consideriamo una corda di F' passante per esso, il punto di F traccia di questa corda su S_3(*), ha per omologhi su F' i due punti d'appoggio di essa con F'. Se invece il centro O' di proiezione è un punto semplice di F', ad O' corrispondono in F tutti i punti della retta

(*) Tale punto, come già si è notato al N° 14, è un punto doppio biplanare di F.

traccia su S_3 del piano tangente in O' ad F': infatti, se un punto di F' si approssima ad O' su di una curva di F' passante semplicemente per O', il suo omologo di F tende alla traccia su S_3 della tangente in O' a quella curva.

Consideriamo ora una superficie algebrica F di S_3, e trasformiamola birazionalmente col sistema lineare ∞^8 delle quadriche di S_3 passanti per un suo punto O. Se F è d'ordine maggior di 2, il sistema lineare di curve $|C|$ segato su F dalle quadriche per O, è ∞^8, e, come risulterà più sotto(*), è certo semplice. L'imagine proiettiva di $|C|$ in S_8, è una superficie F' di questo spazio, riferita birazionalmente alla F. Poichè O è un punto base di $|C|$, così ad O dovrà corrispondere su F' una curva ω: precisamente, un iperpiano generico di S_8 dovrà contenere tanti punti del luogo ω, quanti sono i rami con cui la generica C passa per O.

Se O è semplice per F, la C generica passa semplicemente per O, onde a questo punto corrisponde su F' una retta. Se O è un punto doppio conico o biplanare di F la C generica ha in O un punto doppio colle due tangenti distinte, onde ad O corrisponde su F' una conica, che nei due casi è rispettivamente irriducibile o spezzata in due rette complanari(**). Infine, se O è doppio uniplanare per F, ad O corrisponde su F' una retta, la quale per F' è semplice o doppia, a seconda che la C generica ha in O una cuspide ordinaria (punto doppio col

(*) Per il lemma del N° seguente.

(**) Nel secondo caso le due rette omologhe di O hanno un punto a comune, in corrispondenza alla retta comune ai due fasci di rette tangenti in O ad F.

le tangenti coincidenti ad incontro tripunto), oppure una cuspide di specie superiore od un tacnodo(*).

Più generalmente, quando O sia un punto s-plo qualunque di una superficie F di S_r ($r \geq 3$), trasformando birazionalmente F col sistema delle forme quadriche per O, in una superficie F' dello spazio S_ρ (ove, in generale, $\rho = \frac{r(r+3)}{2} - 1$), su F' si ha un numero finito ($\leq s$) di curve semplici o multiple corrispondenti all'intorno di O su F, ciascuna di queste curve corrispondendo ad una parte irriducibile del cono tangente in F ad O. Si conclude che:

Data una superficie algebrica F ed un suo punto O (semplice o multiplo), una trasformazione birazionale della F, che abbia O come fondamentale (tale cioè che O sia un punto base del sistema lineare trasformante), muta generalmente O in una curva (irriducibile o riducibile) della superficie trasformata (in particolare in uno o più punti, semplici o multipli).

Se per la trasformazione birazionale cui si assoggetta F, il punto O non è fondamentale, è chiaro ch'esso si muta in un punto (di ugual molteplicità) della superficie trasformata.

19 – Dimostreremo ora che viceversa ogni curva algebrica di una superficie F può, mediante una trasformazione birazionale di F, mutarsi in un punto (semplice o mul

(*) Per gli occorrenti concetti relativi alle singolarità delle curve algebriche, v. « T. G. A », pag. 323.

tiplo) della superficie trasformata.

Premettiamo il lemma seguente:

Se F è una superficie algebrica di S_r, le forme d'ordine l abbastanza elevato, passanti per una curva (irriducibile) C di F, segano altrove sulla superficie un sistema lineare semplice.

Consideriamo le forme coniche ϕ di S_r, d'ordine n uguale all'ordine di C, che proiettano C dai singoli S_{r-3} di S_r. Fissati comunque due punti P, Q di F, fuori di C, possiamo scegliere una ϕ che non passi nè per P nè per Q (onde tale forma ϕ non passerà certo per F): basta infatti assumere lo S_{r-3} centro di proiezione, in modo che non incontri le superficie coniche proiettanti C da P e da Q. Allora, se $l \geq n+1$ si può costruire una forma d'ordine l, contenente C ed il punto P, ma non passante per Q, mediante la suddetta forma conica ϕ ed una forma d'ordine $l-n$ (≥ 1) passante per P, ma non per Q. E poichè Q è qualunque su F, ne segue che le forme d'ordine l passante per C, staccano altrove su F un sistema lineare di curve $|D|$, tale che le curve D di questo sistema passanti per un punto qualunque P di F (fuori di C) non hanno a comune altri punti (fuori di C); epperò il sistema $|D|$ è semplice.

Ciò posto, consideriamo le forme d'ordine l $(\geq n+1)$, che passano pel gruppo G segato su C da una prefissata forma ψ d'ordine l, non passante per C. Esse formano un sistema lineare, segante su F un sistema lineare $|E| \infty^{r'}$ di curve, col gruppo base G. Per quest'ultimo sistema la curva C è fondamentale, nel senso che tutte le sue intersezioni colla curva E generica del sistema cadono nel gruppo fisso G, sicchè C impone una sola condizione alle curve E che sieno obbligate a contenerla (basta il passaggio per uno dei suoi punti diverso da quelli di G). Il sistema $|E|$ è semplice. Invero, se esso fosse composto, dovrebbe pur esser tale il sistema lineare $\infty^{r'-1}$ (in esso totalmente contenuto) delle curve di $|E|$ che contengono C come parte: ora questo sistema è certo semplice, poichè esso si ottiene aggiungendo la curva fissa C alle singole curve del sistema semplice $|D|$.

Se ora facciamo l'imagine proiettiva di $|E|$, la superficie F' che così otteniamo in $S_{r'}$, è riferita birazionalmente alla F; ed è chiaro che ai singoli punti di C dovrà corrispondere su F un sol punto (semplice o multiplo), centro della stella $\infty^{r'-1}$ di iperpiani che corrisponde al sistema lineare $\infty^{r'-1}$ delle curve di $|E|$ che contengono C come parte.

Quale sarà dunque per una superficie l'ente analogo al ramo? Volendo un ente invariantivo (rispetto alle trasformazioni birazionali), non potremo limitarci a considerare i punti di F che appartengono all'intorno di un punto O della superficie, ma sibbene i punti di F che appartengono agli intorni dei punti di una curva C della superficie, o, brevemente, i punti di F che appartengono all'intorno di una sua curva C (semplice o multipla).

L'intorno di C su F si potrà spezzare in uno o più intorni parziali, fra loro distinti rispetto alle tra_ sformazioni birazionali delle superficie. Ognuno di questi intorni parziali si chiamerà una falda invariantiva della superficie F, avente per origine la curva C. Quello che è invariante è la falda, non la sua origine, che può essere su qualche modello una curva, e su qualche altro un punto. Poichè è chiaro che, definendo la falda o le falde aventi per origine una curva di F, si vengon a definire in particolare anche la falda o le falde (invariantive) aventi per origine un punto di F, punto che va considerato alla stessa stregua delle curve, perchè esso può, come s'è detto, diventare una curva con una conveniente trasformazione birazionale.

20 – Consideriamo una superficie algebrica (od anche solo analitica)

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0 \quad ,$$

di cui $O(x_0, y_0, z_0)$ sia un punto qualunque, nel cui intorno la funzione f sia olomorfa, come funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z. La (1) definisce implicitamente la z in un intorno di (x_0, y_0), come funzione analitica a più valori (anche infiniti se f è analitica) di x ed y. In ogni caso si ha un numero finito di determinazioni della z che tendono al valore z_0, quando $x \to x_0$ ed $y \to y_0$ (*). Circolando (x, y) attorno ad (x_0, y_0), (per es. sulla coppia di

(*) Per le funzioni analitiche ciò può dirsi in base al teorema di Weiertrass, sull'algebroidicità delle funzioni analitiche nell'intorno di un punto. (ved. per es. il trattato di Osgood sulla teoria delle funzioni analitiche di più variabili).

piani di Argand e Gauss dove si distendono le x, y o nello spazio lineare S_4, dove si rappresenta il complesso delle due variabili), può darsi che un certo numero $\nu \geq 1$ di quelle determinazioni si scambino fra di loro: in tal caso esse costituiscono i ν rami di una medesima funzione analitica irriducibile, od anche, secondo Halphen, un ciclo.

Nell'intorno di $(x_0\, y_0)$, le funzioni simmetriche elementari delle suddette ν determinazioni di z, sono palesemente ad un sol valore, onde queste determinazioni sono le radici di un equazione di grado ν, i cui coefficienti sono funzioni olomorfe di x ed y.

Ciò premesso, si dice che l'insieme di quei valori di z che costituiscono i vari rami di una medesima funzione analitica irriducibile, rappresentano una falda analitica avente per origine il punto O. Ogni falda analitica di S_3 avente un origine qualunque (x_0, y_0, z_0), e sulla quale z abbia un numero finito ν di determinazioni, si può rappresentare con un'equazione del tipo:

$$(2) \qquad a_0 z^{\nu} + a_1 z^{\nu-1} + \dots + a_{\nu} = 0,$$

ove le a son funzioni olomorfe di x, y, nell'intorno di x_0, y_0.

Circa la rappresentazione delle falde analitiche, in base alle ricerche di Halphen, Kobb, Hensel, B. Levi, ecc., si può asserire di più, che una falda analitica avente l'origine in un punto O di una superficie F, è l'insieme dei punti della superficie le cui coordinate si possono esprimere come certe funzioni analitiche di due variabili u, v, definite in un intorno dei valori di u, v

in corrispondenza ai quali si ha il punto O. La corrispondenza fra i punti della falda ed i valori dei parametri u, v, deve essere naturalmente biunivoca, affinchè la rappresentazione non snaturi le caratteristiche geometriche della falda.

Una falda analitica così come noi l'abbiamo definita, limitandoci a considerare come origine un punto, non può certo esser invariante rispetto ad ogni trasformazione birazionale della superficie: giacchè vi sono trasformazioni che possono mutare il punto di cui essa è origine, in una curva. Ma, anche se ci si limita a considerare le falde che hanno per origine un punto della superficie, due falde invariantive distinte posson esser coincidenti come falde analitiche; e, viceversa, due falde distinte dal punto di vista della loro rappresentazione analitica, posson appartenere ad una medesima falda invariantiva.

Così, ad esempio, se si considera un punto doppio biplanare isolato $O(x_0, y_0, z_0)$ di una superficie F di S_3, questo è origine di due distinte falde invariantive e di un'unica falda analitica. Infatti, con una trasformazione birazionale O può mutarsi in due rette complanari distinte, ognuna delle quali è origine di una falda invariantiva. E se l'intorno di O sulla superficie constasse di due falde analitiche distinte, esse sarebbero date da due equazioni analitiche $\varphi_1(x, y, z) = 0$ e $\varphi_2(x, y, z) = 0$ [della forma (2)], definite nell'intorno di $(x_0\ y_0\ z_0)$, e funzionalmente indipendenti in O, e quindi pure in un conveniente intorno di O, poichè i piani tangenti in O alle due superficie ana-

litiche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, che son poi i piani tangenti in O alla data superficie, sono distinti. In virtù del teorema d'esistenza delle funzioni analitiche implicite, le $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ avrebbero perciò in comune tutta una linea uscente da O, che sarebbe doppia per la data superficie F, contro l'ipotesi che O fosse un punto doppio isolato.

Se invece si considera il punto generico O di una linea doppia nodale C della superficie F, l'intorno di O si scinde in due parti, che sono falde analitiche distinte, mentre che, in generale, appartengono ad una sola falda invariantiva. Invero, trasformando birazionalmente F in una superficie F' priva di punti multipli, a C corrisponde su F' una curva semplice C' in generale irriducibile, in corrispondenza (1;2) colla C (*), sicchè ad O corrispondono su F' due punti O'_1 ed O'_2 di C'. Le due falde analitiche di F, si trasformano negl'intorni di questi due punti di F', i quali appartengono alla falda invariantiva unica di F', che ha per origine C'. Se però C' si spezza in due curve, le due falde considerate di origine O, distinte dal punto di vista analitico, lo sono pure dal punto di vista invariantivo.

Notiamo poi, da ultimo, il caso di un punto doppio conico di una superficie, il quale è origine di una sola falda analitica e di una sola falda invariantiva.

(*) Basta, ad esempio riferirsi alla curva nodale della superficie di S_3, che si ottiene proiettando una superficie di S_4 da un punto esterno (v. n° 14).

21 – Particolare importanza hanno le curve di una superficie F, le quali si posson mutare birazionalmente in punti semplici della superficie trasformata. Se F si trasforma birazionalmente in F', in guisa che una curva C di F venga mutata in un punto semplice C' di F', i punti di C sono in corrispondenza birazionale coi punti dell'intorno di C' su F', ossia colle rette tangenti in C' ad F'. Poichè C' è punto semplice di F', l'insieme di queste rette (fascio) è un ente razionale, onde la curva C è razionale. Risulta così che mentre ogni curva della superficie si può mutare in un punto (semplice o multiplo), non ogni curva di una superficie può trasformarsi in un punto semplice: è infatti per lo meno necessario che la curva che si considera sia razionale; ma questa condizione è ben lungi dall'esser sufficiente per la trasformabilità della curva in un punto semplice.

Una curva algebrica di una superficie, che possa birazionalmente mutarsi in un punto semplice, dicesi una curva eccezionale della superficie (ausgezeichnete Kurve di Noether).

Così per es. è eccezionale una retta qualunque di un piano, poichè una trasformazione quadratica che abbia su essa due punti fondamentali(*), la muta in un punto (semplice) di un altro piano. È eccezionale una generatrice di una rigata, appartenente ad S_4 o ad uno spazio superiore, perchè una

(*) V. « T. G. A. » pag. 303.

proiezione della rigata su d'un iperpiano da un punto generico della considerata generatrice, muta questa in un punto semplice della rigata trasformata. Quando si fa la proiezione di una superficie qualunque (anche non rigata) da un suo punto semplice, sopra uno spazio inferiore, la retta che si ottiene come trasformata del centro di proiezione è una curva eccezionale.

A Castelnuovo ed Enriques(*) è dovuta l'importante distinzione delle curve eccezionali in due specie. Una curva eccezionale di una superficie dicesi di 1ª specie, quando è possibile di trasformarla birazionalmente in un punto semplice, senza che alcuno dei suoi punti venga a trasformarsi in una curva. Una curva eccezionale di una superficie dicesi invece di 2ª specie, quando non è possibile di trasformarla birazionalmente in un punto semplice, senza che in pari tempo qualcuno dei suoi punti si trasformi in una curva.

La retta che s'introduce proiettando da un suo punto semplice una superficie non rigata, è una curva eccezionale di 1ª specie. Si può per contro vedere che una retta sul piano, od una generatrice di una rigata sono curve eccezionali di 2ª specie. Per es. quando una retta a del piano si muta in un punto di un altro piano con una trasformazione quadratica avente su a due punti fondamentali, questi due punti di a si mutano in rette; quando si

(*) Annali di Mat. 1901.

proietta una rigata da un punto O, l'intorno di O si muta in una retta, ma la generatrice per O si muta in un punto. Le sole superficie che contengono curve eccezionali di 2ª specie, son razionali o riferibili a rigate. Ciò è stato dimostrato (in loc. cit.) da *Castelnuovo-Enriques*, ai quali è inoltre dovuto il seguente importante teorema:

Ogni superficie che non sia razionale o birazionalmente equivalente ad una rigata, si può trasformare birazionalmente in guisa da non contenere curve eccezionali (di 1ª specie). Naturalmente il modello al quale si riferisce il precedente enunciato, oltre ad esser privo di curve eccezionali è anche privo di punti multipli.

22 – Possiamo ora tornare al concetto di falda invariantiva, per precisarne la portata. Osserviamo in primo luogo che:

Se fra due superficie F, F' intercede una corrispondenza birazionale, che muti il punto O di F in un numero finito $s' \geq 1$ di punti semplici $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$ di F', il punto O ha per F la molteplicità $s \geq s'$.

Infatti, se n è l'ordine di F, al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F corrisponde su F' un sistema $|C'|$ di grado n, ed alle sezioni iperpiane per O corrispondono curve C' che s'incontrano nei punti $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{s'}$ e che hanno perciò soltanto $n-s$ intersezioni variabili, ove $s \geq s'$. Dunque due generiche C si tagliano fuori di O soltanto in $n-s$ punti, epperò O è

s-plo per F.

Sieno ora F' e F'' due superficie prive di punti multipli in corrispondenza birazionale fra loro. In base al teorema dimostrato, non potrà un punto di una delle F', F'' mutarsi in un gruppo di un numero finito e maggior di uno di punti dell'altra. Perciò la biunivocità della corrispondenza soffrirà eccezione allora ed allora soltanto che un punto (semplice) di una delle due superficie si muti in una curva (eccezionale) dell'altra. Da qui risulta intanto che:

Una corrispondenza birazionale fra due superficie prive di punti multipli e di curve eccezionali, è biunivoca senza eccezioni.

Quando le F', F'' sieno due trasformate birazionali (prive di punti multipli) di una medesima superficie F, dotata di singolarità qualunque, ad ogni punto O, semplice o multiplo, di F corrisponderà un gruppo G' di punti e di curve su F' (potendo anche mancare nel gruppo o i punti o le curve), ed un gruppo G'' di punti e di curve su F''. Se la corrispondenza birazionale fra F' ed F'' è biunivoca senza eccezioni, gli elementi (punti o curve) dei gruppi G' e G'' non soltanto saranno in corrispondenza biunivoca fra loro, ma tanti punti avremo su F' come corrispondenti ad O, quanti su F''; tante curve su F' come corrispondenti ad O, quante su F''. Similmente, ad ogni curva (semplice o multipla) di F, corrisponderà su F' e su F'' un ugual numero di punti e di curve (semplici).

Falde invariantive, aventi l'origine in un punto od in una curva di F, sono gl'insiemi distinti di punti che corrispondono agl'intorni degli elementi (punti o curve) omologhi del punto o della curva considerata sopra un modello F' di F, che sia privo di punti multipli. Però, affinchè le falde così definite abbiano carattere invariantivo, occorre limitarsi a considerare le trasformazioni birazionali che mutano F in una superficie F'' priva di punti multipli, in guisa che la corrispondenza indotta fra F' ed F'' risulti biunivoca senza eccezioni.

Se cioè si considera un altro modello Φ di F, che sia pur privo di punti multipli, ma tale che la corrispondenza indotta fra Φ ed F' introduca o faccia sparire curve eccezionali, una falda che sia per es. inerente ad una curva C di Φ passante per uno P dei punti che mutansi in curve eccezionali di F', non ha carattere invariantivo. Infatti essa si spezza su F' in due falde distinte: una avente per origine la trasformata della curva C, ed una avente per origine la trasformata del punto P.

S'incontra qui per la prima volta la necessità di distinguere nella geometria sopra una superficie l'invarianza assoluta dall'invarianza relativa. Un ente od una proprietà sono invarianti in senso assoluto, quando sono invarianti rispetto ad ogni trasformazione birazionale della superficie; sono invarianti in senso relativo, quando son invarianti per le sole trasformazioni birazionali (dei modelli

privi di punti multipli) che non introducano o facciano sparire curve eccezionali.

Se falde invariantive sono invarianti in senso relativo, cioè invarianti a meno di falde le cui origini son curve eccezionali.

In base al citato teorema di Castelnuovo - Enriques (n°.21), se si tratta di una superficie F che non sia birazionalmente equivalente ad una rigata (razionale o no), si potranno ivi definire le falde invariantive in senso assoluto, riferendosi ad un modello Φ che sia privo di punti multipli e di curve eccezionali.

VIII - Ordini invariantivi delle varietà algebriche - Modelli minimi. -

23.- Consideriamo una varietà algebrica irriducibile V_k, insieme a tutte le sue trasformate birazionali, ossia i vari modelli proiettivi di un ente algebrico*. Il valor minimo dell'ordine che compete a questi modelli proiettivi, verrà detto l'ordine invariantivo assoluto dell'ente algebrico; è chiaro che (come indica il nome) questo carattere è un invariante assoluto dell'ente.

Gli enti razionali son caratterizzati dall'avere l'ordine invariantivo assoluto uguale ad uno. - La ricerca dell'ordine invariantivo assoluto di una V_k, equivale a determinare su V_k i sistemi lineari semplici di grado minimo. Stante la semplicità di questi sistemi, la loro dimensione non può discendere al di sotto di k, e può raggiungere questo valore, solo se la V_k è razionale. La suddetta determinazione è stata fatta soltanto per $k=1$, ossia per le curve algebriche(*).

Limitiamoci ora a considerare i modelli proiettivi di un ente algebrico ∞^k, privi di punti multipli. Potremo porre in una medesima classe quei modelli proiettivi, riferiti fra loro in una corrispondenza birazionale senza eccezioni. Se $k=1$, ossia se si tratta di curve algebriche, con ciò si ottiene un'unica classe (v. p. 43). Risulterà invece fra poco che per $k>1$ si ottengono in generale in tal guisa più classi: il minimo valore raggiunto dall'ordine degli enti di una di queste classi, verrà detto l'ordine invariantivo relativo degli enti della classe considerata. È chiaro che questo carattere è un invariante relativo delle varietà algebriche prive di punti multipli.

Un piano ed una quadrica son due superfici razionali, che appartengono (nel senso suddetto) a due classi diverse; ossia non è possibile di riferire birazionalmente una quadrica ad un piano, senza che vi siano elementi eccezionali. Infatti, se una superficie F è riferita ad un piano π in una

(*) Cfr. Brill e Noether, mem. cit. a pag. 23. Per una trattazione complementare rigorosa, v. F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie (Leipzig, Teubner 1921) a pag. 159.

corrispondenza birazionale senza eccezioni, alle sezioni iperpiane di F corrisponderanno su π le curve d'un sistema lineare semplice e privo di punti base(*). Il grado di questo sistema, uguale all'ordine di F, è m^2, ove m denota l'ordine delle curve del sistema: ciò mostra che la superficie F non può essere una quadrica (2 non è un quadrato perfetto).

Osservazione 1ª. Su d'un piano π, le curve algebriche d'ordine m costituiscano un sistema lineare Σ semplice e completo, di grado m^2 e dimensione $\rho=\frac{1}{2}m(m+3)$.

L'imagine proiettiva di Σ è una superficie F^* d'ordine m^2 appartenente ad S_ρ. Un sistema lineare (incompleto) privo di punti base e totalmente contenuto in Σ, rappresenta una superficie F di uno spazio inferiore, che è ancora d'ordine m^2. Le varie superficie F^* ed F che così si ottengono in corrispondenza ai diversi valori di m, son tutte e sole le superficie della classe del piano.

Osservazione 2ª. Una varietà algebrica si dice normale, quando non è possibile di ottenerla come proiezione da un'altra varietà dello stesso ordine di uno spazio superiore. La superficie F^* considerata testè è normale, mentre le varie F non sono normali, poichè è facile vedere che esse possono ottenersi proiettando F^* da

(*) Invero, ad un punto base O di questo sistema, supposto esistente, non potrebbe corrispondere un punto (o un numero finito di punti), perchè questo (o taluni o tutti questi) sarebbero comuni ad ogni sezione iperpiana di F. Ad O deve cioè sempre corrispondere una curva.

uno spazio che con essa non abbia punti comuni. Ciò è in relazione al fatto che il sistema lineare rappresentativo di F^* è completo, mentre quello relativo ad F è incompleto, e totalmente contenuto nel precedente.

Così, p. es., un sistema lineare ∞^3 di coniche senza punti base, rappresenta una superficie di S_3, che può ottenersi come proiezione generica della superficie di Veronese (dello S_5), già considerata a p. 40. Essa è la così detta superficie romana di Steiner, del 4º ordine, con tre rette doppie concorrenti in un punto, che è triplo per la superficie.

24 – Il piano rigato (come il piano punteggiato) ha gli ordini invariantivi assoluto e relativo entrambi uguali ad uno. Non altrettanto può dirsi dello spazio (S_3) rigato: infatti, la varietà a 4 dimensioni delle rette di S_3, ha l'ordine invariantivo assoluto eguale ad uno (ossia, come subito si vede, è razionale); mentre il suo ordine invariantivo relativo vale due, ossia la V_4^2 coi punti della quale, seguendo Klein, si possono rappresentare le rette di S_3, non può riferirsi birazionalmente allo S_4, senza che vi sieno eccezioni alla biunivocità della corrispondenza. Ciò consegue da un teorema di Klein, che afferma l'inesistenza su d'una quadrica di S_5 di varietà algebriche a tre dimensioni, diverse dalle intersezioni complete della quadrica con una forma di S_5.

Questo risultato è stato esteso da F. Severi in due diverse direzioni. Si ha intanto che

In S_r, con $r \geq 4$, ogni forma V_{r-1} priva di punti multipli, non contiene V_{r-2} che non sieno intersezioni complete con un'altra forma di S_r (*).

Per $r = 3$ vale un teorema (dovuto a Noether) che, per quanto analogo al precedente, è di natura diversa. Precisamente il teorema di Noether dice che una superficie dello spazio ordinario d'ordine $m \geq 4$, che contenga curve che non sieno intersezioni complete di due superficie, non è la più generale del suo ordine.

La seconda generalizzazione, fatta da Severi, del summentovato teorema di Klein, si ha quando si considerino gli S_k di uno S_r ($k \; r$). Nello S_r, uno degli $\infty^t S_k$, ove $t = (k+1)(r-k)$, può venir rappresentato mediante $\rho + 1 = \binom{r+1}{k+1}$ coordinate grassmanniane omogenee, che generalizzano le coordinate plueckeriane di retta in S_3 (**). Fra queste $\rho+1$ quantità, intercede un certo numero di relazioni quadratiche (***); nello S_ρ in cui tali quantità son coordinate omogenee, le dette relazioni quadratiche rappresentano forme quadriche. La varietà V_t luogo dei punti comuni alle quadriche considerate, rappresenta coi suoi punti la totalità degli S_k di S_r. (ma non può definirsi completamente mediante intersezione di $\rho - t$ di quelle quadriche!).

L'ordine di V_t è dato da

(*) Cfr. F. Severi, Rendic. Lincei 1906.

(**) V., per es. E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi (Pisa, Spoerri, 1907), pag. 35.

(***) Esse son state date da D'Ovidio, Mem. Acc. Lincei (1877); Bertini, loc. cit. p. 38.

$$m = \frac{1!\,2!\ldots k!\,t!}{(r-k)!\,(r-k+1)!\ldots r!} \quad (*)$$

Orbene, questa varietà V_t è il modello proiettivo d'ordine minimo, con cui si può rappresentare senza eccezioni la totalità degli S_k di S_r. (**) La V_t, che (seguendo Severi) si chiama grassmanniana d'indici (r,k), è una varietà razionale; il suo ordine invariantivo assoluto vale 1, mentre il suo ordine invariantivo relativo è il numero m dato dall'ultima formula.

25.— Un'altra classe di varietà (a più dimensioni) di cui si conosce il modello proiettivo minimo, è la classe delle varietà di Segre. Dati n spazi

$$S_p\,,\,S_q\,,\ldots$$

la totalità dei gruppi di n punti estratti uno da S_p, uno da S_q, ..., costituisce una varietà di Segre. Il modello proiettivo di questa varietà, che è stato dato da C. Segre (***) si può rappresentare analiticamente così. Siano x_l (per $l = 0, 1, \ldots, p$) coordinate proiettive omogenee di punto in S_p, y_m (per $m = 0, 1, \ldots, q$) coordinate proiettive omogenee di punto in S_q, ... In uno spazio S di dimensione

$$(p+1).(q+1)\ldots -1$$

(*) V. H. Schubert, Mitteil. der Math. Ges. Hamburg 1 (1884).

(**) Cfr. F. Severi, Ann. di Mat. 1915.

(***) Rendic. Palermo (1891).

prendiamo delle coordinate proiettive omogenee $X_{lm\ldots}$; la varietà in questione può rappresentarsi parametricamente colle formule

$$(1) \qquad \rho X_{lm\ldots} = x_l . y_m \ldots \quad (\text{per } l = 0,1,\ldots,p;\ m = 0,1,\ldots,q;\ \ldots),$$

ρ essendo un arbitrario fattore di proporzionalità. Questa varietà appartiene allo spazio S, ed ha la dimensione t e l'ordine n dati da

$$t = p+q+\ldots\,; \quad n = \frac{t!}{p!\,q!\ldots}$$

Il suddetto modello proiettivo può costruirsi geometricamente così. Pensiamo S_p, S_q, ... come spazi indipendenti in uno spazio ad

$$\omega = (p+1)+(q+1)+\ldots-1$$

dimensioni. Consideriamo la grassmanniana d'indici $(\omega, n-1)$ che rappresenta gli S_{n-1} di S_ω. Su essa avremo ∞^t punti, imagini degli S_{n-1} che si appoggiano in un punto ad S_p, in un punto ad S_q, ... Detti punti costituiscono una varietà algebrica V_t, che è proiettivamente identica alla suddetta varietà di Segre. Per vederlo, basta distribuire gli $\omega+1$ vertici della piramide di riferimento di S_ω, $p+1$ in S_p, $q+1$ in S_q, ..., e calcolare le coordinate grassmanniane di uno S_{n-1} che congiunge un qualunque punto di S_p ad un qualunque punto di S_q, ... Un certo numero di queste coordinate risultano identicamente nulle; le altre sono espresse da formule analoghe alle (1).

Nel lavoro citato alla fine del n° precedente, Severi accennava alla possibilità di dimostrare con metodi analoghi a quelli ivi impiegati, che la varietà di Segre è il modello proiettivo d'ordine minimo che coi suoi punti rappresenta senza eccezioni i gruppi di n punti tratti da n spazi dati S_p, S_q, ... Ciò è stato dimostrato posteriormente da Bordiga (*), limitatamente però al caso $p = q = \dots$

In un altro lavoro (**) C. Segre utilizzò quella varietà, per fare la rappresentazione reale dei punti complessi di uno spazio qualunque. Di questa rappresentazione avremo bisogno in seguito per lo studio delle riemanniane: in base alla surricordata proprietà di minimo, risulta chiaro il suo carattere di necessità, poichè non esiste una rappresentazione che non offra eccezioni e che sia più semplice di quella.

Consideriamo la varietà di Segre V_{2r}, che rappresenta le coppie di punti P' e P'' tratti da due spazi S'_r ed S''_r di egual dimensione r: essa ha la dimensione $t = 2r$ e l'ordine $n = \frac{(2r)!}{(r!)^2}$. In corrispondenza alle ∞^r coppie (P', P'') che hanno fisso il punto P' di S'_r o che hanno fisso il punto P'' di S''_r, si hanno su V_{2r} due diversi sistemi ∞^r di S_r, che diremo rispettivamente Σ' e Σ''. Due (diversi) S_r dello stesso sistema, non hanno alcun punto a comune; due S_r di diverso sistema hanno sempre uno ed un sol punto a comune; viceversa, per ogni punto di V_{2r} passa uno S_r di Σ' ed uno di Σ'': tut-

(*) Annali di Mat. (1917).

(**) Math. Annalen (1891).

to ciò risulta subito dalla rappresentazione in S'_r, S''_r. Gli S_r di Σ' (di Σ'') sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti di S'_r (S''_r).

Una siffatta varietà V_{2r}, che sia a punti reali, può, dal punto di vista reale, presentare due casi distinti, a seconda che il coniugio muta in sè ciascuno dei sistemi Σ', Σ'' o li scambia fra loro. I due S_r di V_{2r} che passano per un qualunque punto reale di V_{2r}, sono reali nel primo caso (caso iperbolico), imaginari coniugati nel secondo (caso ellittico). In quest'ultimo caso Σ' e Σ'' non contengono alcuno S_r reale, e più precisamente ciascuno dei loro S_r ha uno ed un sol punto reale, ossia l'intersezione collo S_r imaginario coniugato (che è un S_r dell'altro sistema).

Una V_{2r} di questo tipo (tipo ellittico), rappresenta coi suoi ∞^{2r} punti reali la totalità dei punti complessi di S'_r, e la corrispondenza che si pone nel modo detto pel tramite di Σ', è biunivoca senza eccezioni. Tra le varietà in corrispondenza birazionale tra loro, che realizzano questa rappresentazione, la V_{2r} è la varietà d'ordine minimo. Inoltre una trasformazione omografica di S'_r in sè, si rispecchia in una trasformazione in sè di V_{2r}, che può subordinarsi ad una trasformazione omografica del suo spazio ambiente (*).

Esaminiamo un po' più particolarmente la co-

(*) La V_{2r} è certamente priva di punti multipli, poichè essa è mutata in sè da un gruppo transitivo di omografie.

sa pei primi valori di r. — Per $r=1$, la V_{2r} di Segre è una quadrica ordinaria V_2; essa è il modello minimo che rappresenta le coppie di punti P' e P'' tratti da due rette S_1' ed S_1''. La rappresentazione si effettua così; si ponga una corrispondenza proiettiva fra i punti di S' e le generatrici di un sistema di V_2, ed una corrispondenza proiettiva fra i punti di S'' e le generatrici di V_2 dell'altro sistema: ogni punto di V_2 rappresenta una coppia di punti tratti uno da S' e l'altro da S'', omologhi nelle suddette proiettività delle generatrici di V_2 che passano pel punto considerato. Le due rette S', S'' posson anche esser sovrapposte, ed in tal caso V_2 rappresenta le coppie ordinate di punti di una retta(*). Se V_2 è una quadrica reale a punti ellittici, si può, com'è stato detto poc'anzi, rappresentare coi suoi punti reali i punti complessi di una retta. Questa è la nota rappresentazione (biunivoca senza eccezioni) dei valori di una variabile complessa, coi punti reali di una sfera (modello mini-

(*) Il modello minimo delle coppie non ordinate dei punti di una retta, non è più una quadrica, ma è un piano. Per vederlo, basta riferire proiettivamente la retta ad una conica inviluppo e far corrispondere ad ogni coppia di tangenti di questa conica, il punto (del suo piano) in cui esse si segano.

Più in generale (V. Bordiga loc. cit.) il modello minimo delle m-ple non ordinate di punti di S_r ha l'ordine $\frac{(rm)!}{(r!)^m m!}$. Per $r=2$, i modelli minimi che così si ottengono sono in istretta relazione colle superficie F^* considerate nell'Oss. 1ª del N° 23.

mo). Da qui, colla proiezione stereografica, si può ottenere la rappresentazione di Argand e Gauss coi punti reali di un piano: in questa vi sono però elementi eccezionali alla biunivocità della corrispondenza (i punti all'infinito del piano), d'accordo colla summentovata proprietà di minimo della rappresentazione sferica.

Per $r=2$, la V_{2r} di Segre è una V_4^6 di S_8 avente due sistemi ∞^2 di piani; due piani dello stesso sistema sono sghembi, e sono punteggiati proiettivamente dai piani dell'altro sistema. Se la V_4^6 è di tipo ellittico, essa non possiede alcun piano reale, e ciascuno dei suoi piani (imaginari) ha uno ed un sol punto reale. La V_4^6 ha dunque ∞^4 punti reali; e si ha una corrispondenza biunivoca senza eccezione fra i punti reali di V_4^6 ed i punti complessi di un suo piano qualunque S_2, quando si dicano omologhi un punto (reale) di V_4^6 ed uno di S_2 se stanno in uno stesso piano dell'altro sistema. V_4^6 è la varietà algebrica d'ordine minimo che permette, fra tutte quelle che le son birazionalmente equivalenti, di rappresentare senza eccezioni i punti complessi di un piano.

La V_4^6 contiene una duplice infinità (complessa) di quadriche ordinarie, che provengono dalle rette di S_2. Proiettandola su d'uno S_4 dallo S_3 di una delle sue quadriche, la proiezione riesce generalmente biunivoca e si ottiene la rappresentazione (necessariamente con eccezioni) dei punti reali di V_4^6, e quindi dei punti complessi di un piano S_2, coi punti reali di uno S_4. Si ha sostanzialmente la stessa rappresentazione, quando, prese in

S_2 coordinate non omogenee (x, y) ed in S_4 coordinate non omogenee $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, si dicano omologhi un punto (x, y) complesso di S_2 ed un punto $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ reale di S_4 se è:

$$x = \xi_1 + i\,\xi_2, \quad y = \xi_3 + i\,\xi_4 .$$

Si hanno effettivamente eccezioni alla biunivocità della corrispondenza, poichè gli ∞^1 punti (complessi) all'infinito di S_2, vengono a rappresentarsi cogli ∞^3 punti reali all'infinito di S_4. Si può più precisamente vedere, che a ciascuno dei punti all'infinito di S_2 corrisponde nell'iperpiano all'infinito di S_4 una retta di una congruenza lineare ellittica K. Viene così precisato il modo corretto d'interpretare i valori $x = \infty$, $y = \infty$ di due variabili complesse, quando queste si distendono sopra uno spazio lineare a quattro dimensioni.

Osservazione. - Un legame analitico fra x ed y, si scinde nel campo reale in due equazioni nelle $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, che in S_4 rappresentano una superficie. Le superficie reali che così si hanno in S_4 come imagini dei legami analitici fra le due variabili complesse x ed y, godono, come ha osservato B. Segre, della seguente proprietà caratteristica: i loro piani tangenti segano l'iperpiano all'infinito di S_4 secondo rette della congruenza lineare K.(*)

(*) Tali superficie sono già stat. indicate, senza la loro caratterizzazione geometrica, che dipende appunto dal modo d'interpretare l'infinito, da Levi-Civita, come superficie caratteristiche pel problema di Cauchy per funzioni di due variabili complesse (v. Rendic. Lincei, 1905).

IX. - Varietà riemanniane. (*)

26 - In uno spazio reale ad r dimensioni S_r, vi è luogo a considerare la corrispondenza di coniugio, nella quale un qualunque punto (complesso) di S_r ha per omologo il punto imaginario coniugato. Se a è un numero complesso, indicheremo con $\bar{a}$ il numero complesso coniugato. Con ciò l'omologo del punto $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ di S_r nella suddetta corrispondenza di coniugio, è il punto $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$.

Il coniugio è una corrispondenza biunivoca, anzi involutoria, i cui punti uniti sono i punti reali di S_r; essa non è una corrispondenza analitica(**).

Una forma algebrica d'ordine n $f(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0$, è mutata dal coniugio in una forma algebrica ancora d'ordine n, la cui equazione $\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0$ si ottiene dalla $f(x_0, x_1 \ldots, x_r) = 0$ sostituendovi ogni coefficiente col complesso coniugato. Si può più generalmente dimostrare, che una V_k algebrica è mutata dal coniugio in una V_k algebrica cogli stessi caratteri proiettivi. Per convincersi di ciò, basta ricordare che, in base ad un teorema di Kronecker, una qualunque V_k di S_r

(*) Le considerazioni che seguono sulle varietà riemanniane algebriche, sono già state esposte dal prof. Severi in un corso tenuto all'Università di Padova negli anni 1910 - 11.

(**) Basti infatti pensare, che su d'una retta reale di S_r essa ha infiniti punti uniti, senza essere l'identità. - Il coniugio è una particolare di quelle corrispondenze di S_r che sono state denominate anticollineazioni da C. Segre (v. Atti Acc. delle Scienze di Torino, 1890).

si può sempre considerare come intersezione completa di un certo numero N di forme:

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_N = 0 \quad {}^{(*)}$$

Il luogo dei punti coniugati a quelli di V_k si rappresenta colle equazioni algebriche

$$(2) \qquad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = 0, \ldots, \quad \bar{f}_N = 0,$$

ed è quindi una varietà algebrica. La dimensione e l'ordine di questa, eguagliano i caratteri analoghi di V_k. Infatti aggiungendo alle (2) $r-k$ equazioni lineari generiche, si ha un sistema il quale ammette un numero _finito_ di soluzioni; numero che eguaglia quello delle soluzioni del sistema che si ha aggiungendo alle (1) le $r-k$ equazioni lineari coniugate delle precedenti, poichè le soluzioni dell'un sistema sono le imaginarie coniugate di quelle dell'altro. In modo analogo si procede per dimostrare che ogni altro carattere proiettivo di V_k (comprese le molteplicità di eventuali punti multipli) si conserva col coniugio; in particolare curve coniugate hanno lo stesso _genere_, poichè il genere di una curva si può esprimere mediante i suoi caratteri proiettivi.

Due varietà algebriche mutuamente coniugate, benchè abbiano gli stessi caratteri proiettivi, _non sono di necessità birazionalmente equivalenti_: infatti, come s'è detto poc'anzi, il coniugio non è una corrispondenza analitica.

(*) Il numero N può sempre supporsi compreso fra $r-k$ ed $r+1$, inclusi gli estremi (V. Bertini, op. cit. al N° 24, pag. 197).

I punti di una V_k algebrica dipendono da k parametri complessi, e quindi da $2k$ parametri _reali_, onde diremo talvolta per ricordare questo fatto che sono ∞^{2k}. — Consideriamo una V_k algebrica irriducibile, che sia _autoconiugata_, ossia che coincida colla sua coniugata. Il coniugio subordina su V_k una corrispondenza involutoria, che ha come punti _uniti_ i punti _reali_ di V_k. Qualora questi punti sieno ∞^k (ossia dipendano da k parametri _reali_), la V_k autoconiugata si dirà _reale._

Un iperpiano autoconiugato di S_r è necessariamente _reale_(*). Infatti, se è

$$(3) \qquad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r = 0$$

la sua equazione, esso deve coincidere coll'iperpiano coniugato

$$(4) \qquad \bar{a}_0 x_0 + \bar{a}_1 x_1 + \ldots + \bar{a}_r x_r = 0 .$$

Il dato iperpiano potrà dunque anche rappresentarsi coll'equazione

$$(5) \qquad (a_0 + \bar{a}_0) x_0 + (a_1 + \bar{a}_1) x_1 + \ldots + (a_r + \bar{a}_r) x_r = 0,$$

che è una combinazione lineare delle (3), (4), salvo il caso che la (5) si riduca ad un'identità. Se la (5) che è a coefficienti _reali_, non svanisce, rappresenta ovviamente un iperpiano _reale_. Se la (5) svanisce i coefficienti a della (3) devono essere imaginari puri, onde dividendo ambo i membri della (3) per i, si

---

(*) Non sussiste una proposizione analoga per forme o varietà d'ordine superiore ad 1. Basta infatti considerare in S_r la quadrica $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0$, che è autoconiugata senz'esser reale (essa è totalmente priva di punti reali).

si può sempre considerare come intersezione completa di un certo numero N di forme:

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, \quad f_N = 0 \qquad (*)$$

Il luogo dei punti coniugati a quelli di V_k, si rappresenta colle equazioni algebriche

$$(2) \qquad \bar{f}_1 = 0, \quad \bar{f}_2 = 0, \ldots, \quad \bar{f}_N = 0,$$

ed è quindi una varietà algebrica. La dimensione e l'ordine di questa, eguagliano i caratteri analoghi di V_k. Infatti aggiungendo alle (2) $r-k$ equazioni lineari generiche, si ha un sistema il quale ammette un numero *finito* di soluzioni; numero che eguaglia quello delle soluzioni del sistema che si ha aggiungendo alle (1) le $r-k$ equazioni lineari coniugate delle precedenti, poichè le soluzioni dell'un sistema sono le imaginarie coniugate di quelle dell'altro. In modo analogo si procede per dimostrare che ogni altro carattere proiettivo di V_k (comprese le molteplicità di eventuali punti multipli) si conserva col coniugio; in particolare curve coniugate hanno lo stesso *genere*, poichè il genere di una curva si può esprimere mediante i suoi caratteri proiettivi.

Due varietà algebriche mutuamente coniugate, benchè abbiano gli stessi caratteri proiettivi, *non sono di necessità birazionalmente equivalenti*: infatti, come s'è detto poc'anzi, il coniugio non è una corrispondenza analitica.

(*) Il numero N può sempre supporsi compreso fra $r-k$ ed $r+1$, inclusi gli estremi (*V. Bertini*, op. cit. al N° 24, pag. 197).

I punti di una V_k algebrica dipendono da k parametri complessi, e quindi da $2k$ parametri *reali*, onde diremo talvolta per ricordare questo fatto che sono ∞^{2k}. – Consideriamo una V_k algebrica irriducibile, che sia *autoconiugata*, ossia che coincida colla sua coniugata. Il coniugio subordina su V_k una corrispondenza involutoria, che ha come punti *uniti* i punti *reali* di V_k. Qualora questi punti sieno ∞^k (ossia dipendano da k parametri *reali*), la V_k autoconiugata si dirà *reale*.

Un iperpiano autoconiugato di S_r è necessariamente *reale*(*). Infatti, se è

$$(3) \qquad a_0 x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r = 0$$

la sua equazione, esso deve coincidere coll'iperpiano coniugato

$$(4) \qquad \bar{a}_0 x_0 + \bar{a}_1 x_1 + \ldots + \bar{a}_r x_r = 0 .$$

Il dato iperpiano potrà dunque anche rappresentarsi coll'equazione

$$(5) \qquad (a_0 + \bar{a}_0) x_0 + (a_1 + \bar{a}_1) x_1 + \ldots + (a_r + \bar{a}_r) x_r = 0,$$

che è una combinazione lineare delle (3), (4), salvo il caso che la (5) si riduca ad un'identità. Se la (5) che è a coefficienti *reali*, non svanisce, rappresenta ovviamente un iperpiano *reale*. Se la (5) svanisce i coefficienti a della (3) devono essere imaginari puri, onde dividendo ambo i membri della (3) per i, si

(*) Non sussiste una proposizione analoga per forme o varietà d'ordine superiore ad 1. Basta infatti considerare in S_r la quadrica $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 0$, che è autoconiugata senz'esser reale (essa è totalmente priva di punti reali).

viene ancora a rappresentare il dato iperpiano con un'equazione a coefficienti reali.

Si noti ora che lo spazio lineare in cui si segano più iperpiani reali, è reale: ciò segue da noti teoremi elementari sui sistemi di equazioni lineari. Da quì si deduce che

In uno S_r reale, uno S_k subordinato che sia autoconiugato è necessariamente reale. Infatti per l'S_k passano infiniti iperpiani autoconiugati e quindi reali, di cui esso è la completa intersezione, ottenibili per es. congiungendo S_k ad un qualunque S_{r-k-2} reale, sghembo con esso.

27. – Al n° 25 abbiamo costruito dei modelli reali (algebrici e in un certo senso d'ordine minimo) dei punti complessi d'uno S_k. Più generalmente ci si può proporre di costruire una varietà reale W_{2k} (non necessariamente algebrica), i cui punti reali siano in corrispondenza biunivoca e continua coi punti complessi d'una data V_k algebrica irriducibile. Un siffatto modello reale di V_k, si dirà una varietà riemanniana ad essa relativa. Quando ci si riferisca a V_k prive di punti multipli, aggiungeremo la condizione che la corrispondenza biunivoca fra V_k e W_{2k} sia senza eccezioni.

Dimostreremo l'esistenza della riemanniana di una V_k qualunque, costruendone effettivamente un modello (algebrico). Limiteremo le nostre considerazioni ai valori $k = 1$ e $k = 2$ della dimensione, quantunque esse si possano

facilmente estendere al caso di k qualunque.

Per $k = 1$, potremo sempre supporre di avere trasformato V_1 in una curva algebrica senza punti multipli, di uno spazio a tre dimensioni (v. n° 13). Usufruendo, se necessario, di una conveniente trasformazione proiettiva, potremo ridurci ad una curva algebrica C, d'ordine n, il cui spazio S di appartenenza (a tre dimensioni), sia uno spazio totalmente imaginario di un S_7 reale. La curva $\bar{C}$ coniugata di C, sarà una curva algebrica d'ordine n priva di punti multipli (v. n° prec.), il cui spazio d'appartenenza $\bar{S}$ (a tre dimensioni), sarà sghembo con S.

Consideriamo la varietà algebrica Φ a tre dimensioni (complesse) costituita dalle ∞^2 rette che congiungono ogni punto di C con ogni punto di $\bar{C}$. Il suo ordine vale n^2, poichè sono n le rette che si appoggiano a C, $\bar{C}$ e ad uno S_4 generico di S_7: infatti C e $\bar{C}$ si proiettano da S_4 su d'uno S_2 sghembo con esso, secondo due curve piane algebriche d'ordine n segantisi in n^2 punti. Un punto P qualunque di C o di $\bar{C}$ è n-plo per Φ, poichè se un S_4 passa per P sega ulteriormente Φ solo in $n(n-1)$ punti, com'è subito visto osservando che in questo caso le curve proiezioni su S_2 di C e $\bar{C}$ da quell'S_4, hanno gli ordini $n-1$ ed n. Fissato fuori di C, $\bar{C}$ un punto P qualunque di Φ, ed uno S_4 per P, le due curve proiezioni di C e $\bar{C}$ da S_4 su S_2, passano pel punto P' traccia su S_2 dello S_5 che proietta da S_4 la generatrice di Φ che passa per P(*). Si vede facilmente che se l'S_4 per P è generico, quelle curve piane passano semplicemente per P', senza toccarsi. Ciò dimostra che P assorbe una sola delle n^2 intersezioni di detto S_4 con Φ, ossia che la varietà Φ non ha punti multipli fuori delle curve C e $\bar{C}$ per cui essa passa n volte.

La varietà Φ, palesemente autoconiugata, è anzi reale; si vede infatti facilmente che un punto reale di Φ sta necessariamente su d'una generatrice reale, e che Φ contiene ∞^2 generatrici reali, che sono le rette che congiungono ciascun punto di C col punto imaginario coniugato (di $\bar{C}$). Queste ∞^2 rette reali costituiscono una varietà algebrica φ a tre dimensioni (reali), luogo dei punti reali di Φ.

Le generatrici (reali) di φ sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua coi punti (complessi) di C. Da φ può dedursi, ed in più modi, una superficie di Riemann della curva C. Si può intanto segare φ con un iperpiano reale, con che si ottiene una superficie F di S_6 che risponde allo scopo, salvo il fatto che così si hanno eccezioni alla biunivocità della corrispondenza, provenienti dalle n rette di φ giacenti in S_6 e quindi pure su F(**). Qualora (similmente a ciò che si fa per la retta all'infinito del piano di Argand-Gauss)

(*) Per P passa una sola generatrice di Φ, poichè in caso contrario S ed $\bar{S}$ avrebbero un punto comune, che starebbe sulle varietà delle corde delle due curve.

(**) L'iperpiano reale S_6 sega infatti C in n punti e $\bar{C}$ negli n punti coniugati, onde contiene le n generatrici di φ che passano pei primi n punti.

queste n rette si assimilino a punti(*), la corrispondenza biunivoca fra i punti reali di F ed i punti complessi di C diventa senza eccezioni. Le varietà Φ, φ ed F hanno tutte l'ordine n^2, e non hanno punti multipli reali.

Possiamo anche procedere così. Consideriamo la varietà di Segre V_6^{20} di S_{15} che rappresenta le coppie di punti di S ed $\bar{S}$ (v. n° 25); essa ha ∞^6 punti reali (provenienti dalle coppie di punti immaginari coniugati). Su essa vi sono ∞^2 punti imagini delle coppie di punti di $C, \bar{C}$, costituenti una superficie algebrica ρ, che è reale; infatti quest'ultima contiene ∞^2 punti reali, imagini delle coppie di punti coniugati di $C, \bar{C}$. I punti reali di ρ riempiono una superficie algebrica R, i cui punti (reali) sono palesemente in corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua coi punti (complessi) di C. La superficie R (trasformata birazionale della F) è priva di punti multipli poichè ρ gode di questa proprietà. Consideriamo infatti le ∞^6 coppie di piani tratti uno da S ed uno da $\bar{S}$: esse si rappresentano sulla varietà di Segre mediante un sistema continuo ∞^5 di V_4 algebriche. Una generica di queste V_4 sega ρ in n^2 punti: infatti i due piani omologhi di $S, \bar{S}$, determinano rispettivamente n punti su C ed n punti su $\bar{C}$, ed i primi punti si possono accoppiare ai secondi in n^2 modi diversi. Ciò premesso, risulta facilmente che preso un

(*) Ciò è lecito, poichè risulterà dal seguito che tali rette son rette eccezionali di F, potendosi mutare birazionalmente F in una superficie, in guisa tale che quelle rette si trasformino in punti.

punto P <u>qualunque</u> di ρ, una generica delle ∞^4 V_4 che passano per P sega ρ in n^2 punti, di cui uno solo cade in P (*). Da qui segue subito l'asserto, quando si tenga presente che la varietà di <u>Segre</u> è priva di punti multipli (v. n° 25).

Si può infine considerare la grassmanniana d'indici (7,1) che rappresenta le rette di S_7: su essa si ha una superficie algebrica reale priva di punti multipli, i cui punti (reali o complessi) rappresentano le generatrici (reali o complesse) di Φ. I punti reali di questa costituiscono una <u>superficie di Riemann</u> della curva data C. In base a ciò che si è detto al n° 25 per la varietà di <u>Segre</u>, questa superficie non è proiettivamente distinta dalla R considerata poc'anzi.

Per $k = 2$, potremo supporre di aver trasformato V_2 in una superficie algebrica senza punti multipli, di uno spazio a cinque dimensioni (v. n° 14). Usufruendo, se necessario, di una conveniente trasformazione proiettiva, potremo ridurci ad una superficie algebrica F, d'ordine n, il cui spazio S di appartenenza (a cinque dimensioni), sia uno spazio totalmente imaginario di un S_{11} reale. La superficie $\bar{F}$ coniugata di F, sarà una superficie algebrica d'ordine n priva di punti multipli, il cui spazio d'appartenenza $\bar{S}$ (a cinque dimensioni), sarà <u>sghembo</u> con S.

(*) Questa deduzione è lecita solo in virtù dell'ipotesi fatta che C sia priva di punti multipli.

Consideriamo la varietà algebrica Φ a cinque dimensioni (complesse), costituita dalle ∞^4 rette che congiungono ogni punto di F con ogni punto di $\bar{F}$. Il suo ordine vale n^2, poichè sono n^2 le rette che si appoggiano a F, $\bar{F}$ e ad uno S_6 generico di S_{11}. La varietà Φ non ha punti multipli fuori delle superficie F ed $\bar{F}$ per cui passa n volte. Essa contiene ∞^4 generatrici reali, che sono le rette congiungenti ciascun punto di F col punto imaginario coniugato (di $\bar{F}$); queste rette costituiscono una varietà algebrica φ a cinque dimensioni (reali), luogo dei punti reali di Φ.

Le generatrici (reali) di φ sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua coi punti (complessi) di F. Da φ può dedursi, ed in più modi, una <u>varietà riemanniana</u> della superficie F. Si può intanto segare φ con un iperpiano reale di S_{11}, con che si ottiene una W_4 di S_{10} che risponde allo scopo, salvo il fatto che così si hanno eccezioni alla biunivocità della corrispondenza, provenienti dalle ∞^2 rette di φ giacenti in S_{10} e quindi pure su W_4 (*).

È quindi preferibile di procedere nel modo seguente. Consideriamo la <u>varietà di Segre</u> V_{10}^{252} di S_{35}, che rappresenta le coppie di punti di S, $\bar{S}$ (v. n° 25); essa ha ∞^{10} punti reali (provenienti dalle coppie di punti imaginari coniugati). Su essa vi sono ∞^4 punti imagi-

---

(*) Questa <u>congruenza di rette eccezionali</u> è da ravvicinarsi a quella che si ha sull'iperpiano all'infinito di S_4, nella rappresentazione, considerata alla fine del n° 25, dei punti complessi di S_2 coi punti reali di S_4.

ni delle coppie di punti di $F, \bar{F}$, costituenti una varietà algebrica ρ a quattro dimensioni (complesse), che è reale; infatti quest'ultima contiene ∞^4 punti reali, imagini delle coppie di punti coniugati di $F, \bar{F}$. I punti reali di ρ riempiono una varietà algebrica a quattro dimensioni R_4, i cui punti (reali) sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni e continua coi punti (complessi) di F. Detta varietà è priva di punti multipli, e costituisce una varietà di Riemann della data superficie F.

Si potrebbe giungere alla stessa R_4, attraverso la considerazione della grassmanniana d'indice (11,1) che rappresenta le rette di S_{11}.

X – Concetti fondamentali di topologia.(*)

28 – Avvertiamo preliminarmente che, in quel che segue, si parla sempre di punti reali. Ricordiamo inoltre che, dato in uno spazio lineare S_n un insieme I di punti, un punto P siffatto che in un qualunque suo intorno cadano sempre punti di I distinti da P, chiamasi punto limite di I. L'insieme dei punti limiti di I costituisce l'insieme derivato di I.

Un insieme si dirà completo (chiuso secondo

(*) La rielaborazione dell'*Analysis situs* contenuta in queste conferenze, si distacca sia dalle trattazioni astratte e minuziose che nulla domandano all'intuizione, sia da quelle, soverchiamente affrettate, che troppo invece dall'intuizione pretendono,

Cantor (*)) se contiene l'insieme derivato (il quale, alla sua volta, è ovviamente completo).

Sieno I, K due insiemi appartenenti o no allo stesso spazio; e sieno I_0, K_0 gli insiemi dedotti da I, K completandoli ove originariamente nol fossero. Una corrispondenza biunivoca ω fra i punti di I, K la quale si possa considerare come subordinata da una corrispondenza biunivoca Ω fra i punti di I_0, K_0 (**), che muti un punto limite di un insieme, comunque considerato in I, in un punto limite dell'insieme corrispondente in K, e viceversa, dicesi bicontinua (***). Una siffatta corrispondenza chiamasi anche una trasformazione topologica od un omeomorfismo fra i due insiemi.

La topologia o Analysis situs studia le proprietà degl'insiemi invarianti di fronte al gruppo degli omeomorfismi.

La totalità dei punti interni ad una forma ipersferica dello spazio S_n, e dei punti situati sulla forma stessa, cioè la totalità dei punti di S_n le cui coordinate cartesiane $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfanno ad una relazione del tipo

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq \rho^2 ,$$

ove $a_1, a_2, \dots, a_n, \rho$ son numeri reali, dicesi una celluta

(*) La ragione di questo lieve cambiamento di terminologia risulterà dal seguito.

(**) Quando fra due insiemi I_0, K_0 si ha una corrispondenza biunivoca siffatta, si dice ch'essi sono applicabili.

(***) L'ipotesi che la corrispondenza sia bicontinua è sovrabbondante: basta che sia biunivoca e continua, perchè Jordan ha dimostrato che una tale corrispondenza è necessariamente bicontinua.

ad elemento ad n dimensioni, e si denota con E_n. Colla stessa denominazione e collo stesso simbolo si designerà ogni insieme omeomorfo all'insieme ora definito. I punti si definiranno come cellule di dimensione 0.

Si sottintende che le trasformazioni topologiche che si considerano, conservino quelle proprietà (infinitesimali, di misura, ecc.) spettanti alle cellule ipersferiche, che si attribuiranno alle cellule di natura qualunque ed agl'insiemi di un numero finito di cellule, studiati nel seguito.

I punti di una forma ipersferica, o i punti omologhi di questi sopra una trasformata topologica, costituiscono quello che si chiama il contorno della cellula gli altri punti della cellula diconsi interni.

Una cellula è manifestamente un insieme completo di punti; ma ha però un contorno. Il tipo topologico della cellula ad una dimensione è un segmento di retta, estremi inclusi; della cellula a due dimensioni è un cerchio (*).

Una cellula è di più un insieme perfetto, coincidente cioè coll'insieme derivato; ed è un insieme continuo, essendo omeomorfo all'insieme dei gruppi di valori di n numeri reali, che soddisfanno ad una certa disuguglianza quadratica.

(*) La superficie di una sfera è un insieme completo senza contorni (lo definiremo fra poco un insieme chiuso), a differenza del cerchio, che ha un contorno. Da ciò la opportunità di usare due parole diverse per gl'insiemi completi e per gl'insiemi chiusi.

29 — Due cellule ad n dimensioni (nello stesso S_n oppure entro uno spazio lineare più ampio) si dicono adiacenti, quando non hanno punti interni comuni, ma hanno invece in comune almeno una cellula (ad $n-1$ dimensioni al più) situata sui loro contorni. Le due cellule diconsi totalmente adiacenti quando i loro contorni hanno in comune soltanto cellule ad $n-1$ dimensioni, parzialmente adiacenti nel caso contrario.

L'insieme di un numero finito di cellule ad n dimensioni che non abbiano due a due punti interni a comune, chiamasi una varietà o molteplicità M_n di dimensione n. Dalla definizione segue che una M_n è un insieme perfetto e continuo di punti.

La varietà M_n dicesi connessa, quando, scelte comunque due delle cellule generatrici di M_n, esiste una successione di cellule di M_n di cui la prima sia una delle due cellule considerate, l'ultima l'altra, e due cellule consecutive della successione sieno adiacenti. Se, comunque sieno scelte le due cellule di M_n, esiste (almeno) una successione di cellule di M_n che le abbia per cellule estreme, e tale che due cellule consecutive della successione sien sempre totalmente adiacenti, la varietà dicesi totalmente connessa. Una successione di cellule come quelle considerate, dicesi concatenata e totalmente concatenata, a seconda dei casi.

Questi concetti sono manifestamente invarianti per trasformazioni topologiche.

Una M_n che non sia connessa scindesi in un certo numero di parti connesse, numero che non supera quello delle cellule mediante cui si è generata M_n. Quando di una M_n, connessa o no, si conoscon le relazioni di adiacenza delle cellule generatrici due a due, si dice che si conosce lo schema della M_n.

La definizione di una M_n implica che questa sia finita, cioè rinchiudibile in un'ipersfera dello spazio euclideo cui M_n appartiene. Si posson però definire e considerare M_n infinite come trasformate omografiche o birazionali di M_n finite; purchè, se trattasi di trasformate birazionali, la corrispondenza subordinata fra la M_n finita e la sua trasformata sia senza eccezioni. Una M_n infinita si può studiare come se fosse finita, purchè si consideri in uno spazio lineare proiettivo. Perciò nel seguito ci riferiremo sempre ad M_n finite.

Una M_1 connessa è una linea: essa è omeomorfa ad una poligonale. Se la M_1 è aperta il suo contorno è costituito dai due punti estremi; se è chiusa e non intrecciata, è omeomorfa ad una poligonale piana chiusa e convessa o ad una circonferenza.

Dalla definizione di varietà connessa, segue agevolmente che due punti qualunque di una varietà connessa posson esser congiunti da una linea appartenente alla varietà (cioè posson esser assunti come estremi di questa linea). Si vede di più che tale proprietà caratterizza le varietà connesse. Le varietà che si considereranno in seguito saranno sempre, salvo avviso in contrario, connesse, anzi totalmente connesse.

Sussiste il seguente teorema di Netto – Brouwer. La dimensione

di una varietà è un invariante topologico, ossia due varietà di dimensioni differenti non possono mai essere omeomorfe(*).

30 – Nello spazio S_r consideriamo una cellula analitica E_n ad n dimensioni ($n \leq r$), ovvero l'insieme dei punti di S_r le cui coordinate $x_1, x_2, \dots, x_r$ son funzioni olomorfe (reali) di n parametri (reali) $t_1, t_2, \dots, t_n$, per guisa che un punto di E_n provenga da un sol gruppo di valori dei parametri. Le serie di potenze che esprimono le (x) mediante le (t), convergeranno in una certa cellula E'_n dello spazio $S_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$, e si può, restringendo eventualmente E'_n, supporre che dette serie convergano anche sul contorno di E'_n. Con ciò una cellula analitica è una cellula nel senso della definizione data al n° 28, perchè è omeomorfa ad E'_n (la corrispondenza biunivoca fra E_n ed E'_n è bicontinua, perchè è continua in un senso(**)).

Si prolunghino simultaneamente quelle serie di potenze fuori della cellula E'_n, finchè è possibile, operando però sempre i prolungamenti secondo cellule del tipo di E'_n, nelle quali le serie prolungate sieno convergenti, contorno incluso. La varietà che si genera con tali prolungamenti, chiamasi una varietà analitica ad n dimensioni.

(*) Ved. una semplicissima dimostrazione di T. R. Bachiller nella Revista Hispano – Americana, dicembre 1926.

(**) Ved. la nota (**) a pag. 85 .

È, almeno in apparenza, quasi intuitivo, ma può dimostrarsi in base ad un teorema classico di Pincherle-Borel, che una varietà analitica ad n dimensioni consta di un numero finito di cellule analitiche, ed è quindi omeomorfa ad una M_n costituita dallo stesso numero di cellule, collo stesso schema. Una varietà analitica è dunque una M_n. Tuttavia, quando convenga di tener conto dell'analiticità, la indicheremo con V_n. Una varietà analitica è (come una M_n) un insieme continuo (e perfetto) di punti (*).

Le cellule costituenti una M_n hanno taluni punti dei contorni rispettivi comuni a cellule adiacenti; mentre altri punti della M_n appartengono al contorno di una sola cellula generatrice. L'insieme di questi ultimi punti, completato coi punti limiti di esso che eventualmente non gli appartengano, costituisce, per definizione, il contorno (o frontiera, secondo Jordan) della M_n. Un punto della M_n non appartenente al contorno, dicesi interno. Un punto interno può anche definirsi come un punto di M_n che è interno per una cellula ad n dimensioni contenuta in M_n; ed allora i punti del contorno possono definirsi come i punti di M_n, che non sono interni.

(*) Si badi che il fatto che ogni punto limite di un insieme di punti di V_n, appartenga a V_n, in tanto sussiste, in quanto la V_n venga definita, come noi abbiamo fatto, mediante prolungamenti secondo cellule nelle quali le serie che si prolungano son convergenti, contorno incluso. Altrimenti potrebbero esservi punti limiti (punti singolari essenziali) non appartenenti alla varietà.

31 – Una M_n dicesi chiusa quando non ha contorni. Una M_n chiusa, totalmente connessa, è una specie di poliedro generalizzato le cui facce son le singole cellule; gli spigoli ad $n-1$ dimensioni, le M_{n-1} comuni a due facce (almeno); gli spigoli ad $n-2$ dimensioni, le M_{n-2} comuni a tre facce (almeno); ..; i vertici i punti comuni ad n facce (almeno). Una M_n chiusa (totalmente connessa) dicesi anche un ciclo ad n dimensioni (lineare, per $n=1$) e la si indica con Γ_n. Un ciclo a zero dimensioni è una coppia di punti distinti (vedremo in seguito l'opportunità di questa definizione). D'ora in poi una varietà totalmente connessa si chiamerà anche una varietà irriducibile.

Il contorno di una M_n irriducibile consta di varietà chiuse.

Per semplicità di linguaggio dimostriamolo per una superficie poliedrica M_2 di S_3. Il ragionamento è generale. Gli eventuali estremi di un contorno irriducibile M_1 di M_2, qualora questo potesse essere aperto, sono vertici del contorno stesso. Ora un vertice P di M_1, che appartenga ad una sola faccia, è comune ai due lati della faccia, che in esso concorrono e fanno parte di M_1. Onde P è interno ad M_1. Se poi P appartiene ad una successione di facce consecutivamente adiacenti (delle quali l'ultima non adiacente alla prima, se no P non farebbe parte del contorno), vi è un lato della prima faccia della successione ed un lato dell'ultima, che passano per P ed appartengono ad M_1. Sicchè, anche in tal caso, P è interno ad M_1.

La definizione di varietà M_n totalmente connessa si può anche dare assumendo come elementi generatori della varietà, insiemi ciascuno dei quali sia omeomorfico ad un poliedro elementare dello spazio S_n.

Precisamente: Dati in S_n $n+1$ punti indipendenti (al finito) consideriamo gl'iperpiani che li congiungono ad n ad n. Da ciascuno di questi è definito un semi-spazio (ove il primo membro della rispettiva equazione ha un determinato segno), che contiene il punto rimanente degli $n+1$ dati. La regione comune agli $n+1$ semi-spazi di S_n, così ottenuti, costituisce quel che si chiama un poliedro elementare P_n di S_n (è il poliedro col minor numero di vertici). Il suo contorno è formato dai punti di P_n che giacciono sugl'iperpiani suddetti. Su ciascuno di questi si ha una faccia di P_n, che è un poliedro elementare ad $n-1$ dimensioni, il quale ha alla sua volta per facce (spigoli ad $n-2$ dimensioni del poliedro P_n) poliedri elementari ad $n-2$ dimensioni, e così proseguendo, finchè si giunge ai vertici.

Una cellula E_n è una figura omeomorfica con un poliedro elementare P_n ad n dimensioni; il suo contorno essendo costituito dai punti omologhi al contorno di P_n.

Due poliedri elementari P_n, P'_n privi di punti interni comuni, si dicono adiacenti (totalmente) quando hanno una faccia comune. Un numero finito di poliedri elementari privi a due a due di punti interni comuni, e tali che da uno qualunque di essi si possa passare ad un altro qualunque, mediante una successione di poliedri, dell'insieme, in guisa che due consecutivi sieno adiacenti, dicesi una varietà poliedrica ad n dimensioni. Il suo contorno è formato dalle facce dei poliedri elementari, che appartengono ad uno solo di questi.

Una varietà M_n (totalmente) connessa è una varietà omeomorfica con una varietà poliedrica ad n dimensioni, il suo contorno corrispondendo al contorno di questa.

Queste definizioni equivalgono alle precedenti, poichè un poliedro P_n è omeomorfico ad un'ipersfera. -

XI. - *Le varietà ad una dimensione.* -

32. - Ritorniamo sul concetto di varietà M_1 o linea cui abbiamo accennato a pag. 88. Una linea l costituita da una successione $E'_1, E''_1, \dots, E_1^{(k)}$ di cellule, ciascuna delle quali sia adiacente alla successiva, ma non l'ultima alla prima, e tali che queste relazioni di adiacenza sieno le sole che fra esse passano; la diremo semplicemente connessa. Essa è aperta, il suo contorno essendo formato dai due estremi liberi, uno della prima e uno dell'ultima cellula. È facile vedere che una siffatta linea è essa medesima una cellula. Basta invero riportare sopra una retta i segmenti ai quali le successive k cellule date sono omeomorfe, per ottenere un segmento, somma dei precedenti, a cui tutta la linea è omeomorfa.

Sieno A, B gli estremi di questo segmento, ed A', B' i corrispondenti estremi di l. Il verso naturale(*) da A

(*) Verso naturale $\overrightarrow{AB}$ sopra un segmento AB, è quello che corrisponde all'intuizione del verso di percorrenza di un punto che si muova sul segmento da A a B. In termini logici esso è definito dall'assumere come successivo di un punto P del segmento ogni punto P' interno al segmento PB.

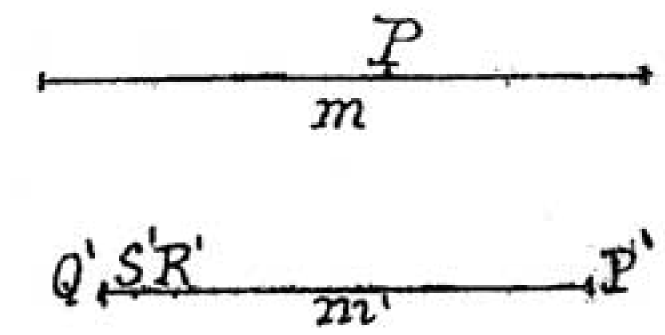
a B sul segmento, si riflette, in base alla biunivocità della corrispondenza fra i punti del segmento AB ed i punti di l, in un ordinamento dei punti di l, in cui il primo punto è A' e l'ultimo B'.

E a questo ci si limita di frequente per definire su l il verso da A' a B' (e similmente l'opposto da B' ad A'), senza avvertire che tale definizione, almeno se non si restringe opportunamente il concetto di <u>continuità</u> della corrispondenza (ved. più sotto), lega il verso definito alla particolare corrispondenza posta fra la linea ed il segmento. Cosicchè i versi determinati in questo modo, sulla linea, non risultano proprietà intrinseche di essa. Si può cioè pensare che, ponendo un altro omeomorfismo tra l ed un segmento (coincidente o no con AB, ma in guisa che agli estremi del segmento corrispondono sempre i punti A', B'), la coppia di versi definita su l, mediante il nuovo omeomorfismo, sia diversa da quella poc'anzi definita. La questione si riduce evidentemente a decidere se un omeomorfismo fra due segmenti, che muti gli estremi dell'uno negli estremi dell'altro, muta o no necessariamente i versi naturali dell'uno nei versi naturali dell'altro. A tale questione il <u>Severi</u> ha risposto affermativamente in queste Conferenze, abbandonando anzi la condizione che si corrispondano gli estremi dei due segmenti, perchè essa consegue, come si vedrà, dal fatto che la corrispondenza fra i due segmenti è omeomorfica.

Egli ha cioè dimostrato che:

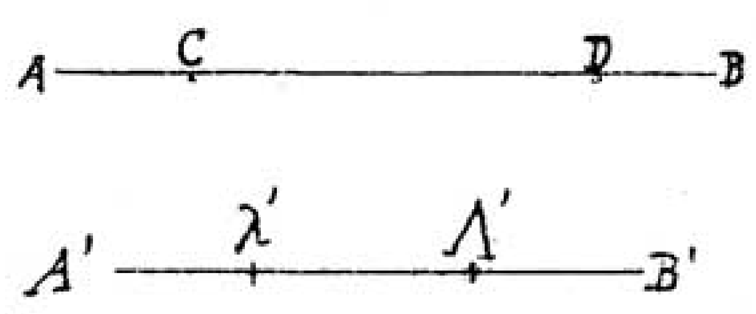
<u>Una corrispondenza biunivoca e bicontinua</u> (<u>un omeo</u>

<u>morfismo</u>) <u>tra i punti di due segmenti m, m', muta gli estremi dell'uno negli estremi dell'altro, e i versi naturali dell'uno nei versi naturali dell'altro.</u>



Cominciamo a provare che l'omeomorfismo fra m, m' muta ogni punto interno ad m in un punto interno ad m', e quindi gli estremi di m negli estremi di m'. Suppongasi, se è possibile, che ad un punto P, interno ad m, corrisponda l'estremo destro P' di m'. Dicasi I l'insieme dei punti di m a sinistra di P, incluso P, e K l'insieme dei punti a destra, incluso P. Questi due insiemi perfetti hanno in comune il solo punto P; epperò i loro insiemi corrispondenti I', K', su m', avranno in comune il solo punto P'. Poichè I', K', sono insiemi perfetti (per la continuità della corrispondenza), i loro estremi inferiori sono altresì i loro minimi. Uno di questi minimi deve necessariamente coincidere coll'estremo sinistro Q' di m'; uno ed uno solo, perchè I', K' non hanno che il punto P' in comune. Sia per es. Q' il minimo di I'. Il minimo di K' sia R'. Il punto R' non potrà esser punto limite di I', se no, essendo I' perfetto, R' sarebbe comune ad I' e a K'. Esisterà dunque un intorno sinistro S'R' di R' in cui <u>non</u> cadranno punti di I'. Ma a sinistra di R' non cadono neppure punti di K'. Dunque nell'interno di S'R' non cade alcuno dei punti omologhi di quelli del segmento m; epperò la corrispondenza non è biunivoca fra i punti dei due segmenti, come si è supposto.

La conclusione è dunque che agli estremi di m, e sieno A, B, corrispondono gli estremi di M', e sieno A', B', ordinatamente omologhi di A, B. Proviamo ora che ai punti di un segmento CD di AB corrispondono tutti e soli i punti del segmento $C'D'$ di $A'B'$, che ha per estremi gli omologhi di C, D.



Dicasi I l'insieme dei punti del segmento CD (estremi inclusi) ed I' l'insieme omologo. Questo avrà un estremo superiore Λ' ed un estremo inferiore λ', anzi, trattandosi d'insiemi perfetti, un massimo ed un minimo. Poichè Λ', λ' appartengono ad I', essi saranno omologhi di due punti di I. Perciò, se fosse $\Lambda' = B'$, il punto B, corrispondente a B', apparterrebbe a CD; cioè sarebbe $D = B$. Ed in tal caso dunque Λ' corrisponderebbe ad un estremo del segmento CD. Ebbene, la stessa conclusione vale quando Λ' sia interno ad $A'B'$. Invero, l'insieme H' dei punti di $A'B'$ a destra di Λ', ha per corrispondente su AB un insieme H, di cui il punto Λ di CD, omologo di Λ', è punto limite. D'altronde, essendo H' esterno al segmento $\lambda'\Lambda'$, in cui cadono gli omologhi dei punti di CD, H è esterno a CD, e il suo punto limite Λ non può che coincidere con un estremo di CD. Similmente si conclude che a λ' corrisponde un estremo (l'altro) di CD(*).

Chiamiamo K' l'insieme dei punti del segmento $\lambda'\Lambda'$ (estremi inclusi). A K' corrisponde su AB un insieme K, che pel ragionamento precedente applicato alla corrispondenza inversa, appartiene al segmento CD. Ma l'insieme K' contiene I', dunque K contiene I. Sicchè gl'insiemi I, K sono ciascuno contenuto nell'altro, epperò coincidono. È così dimostrato che ai punti di un segmento di AB corrispondono tutti e soli i punti di un segmento di $A'B'$.

(*) Dal ragionamento risulta a posteriori che, essendo D successivo a C nel verso naturale AB, al quale corrisponde il verso naturale $A'B'$, è $\Lambda' = D'$, $\lambda' = C'$. Ma questa conclusione non ancora acquisita, non occorre per la parte restante del ragionamento.

Se ora si considera su AB una successione di punti $P_1, P_2, P_3, \dots$ nel verso naturale AB, detti $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$ i loro omologhi, il punto P'_1 dovrà esser contenuto nel segmento $A'P'_2$ omologo del segmento AP_2, che contiene P_1; e quindi P'_1 precederà P'_2 nel verso $A'B'$. Similmente, P'_2 sarà contenuto in $A'P'_3$ e quindi precederà P'_3, e così via.

Osservazione. — Si può insomma parlare di versi naturali sopra una linea semplicemente connessa: sono quelli che corrispondono ai versi naturali di un segmento, in un qualunque omeomorfismo fra la linea e il segmento.

Questo fatto era necessario di stabilire per l'uso che si fa dei versi di una linea nell'Analysis situs. Per es. quando parleremo dell'orientamento di una superficie, vedremo come occorra di seguire per continuità un verso fissato sopra una linea, che si deforma; e ciò darebbe luogo a complicazioni, ove si volesse tener sempre conto, come rigorosamente bisognerebbe, dell'omeomorfismo mediante cui il verso è definito. È pur vero che in questo caso l'intuizione ci avrebbe soccorso con tutta sicurezza, e l'intuizione ci fa ceva prevedere l'esistenza dei versi naturali sopra una linea, anche prima che l'avessimo dimostrata!

33 — Dal teorema dimostrato nel n° 32, segue che un omeomorfismo fra due segmenti è una corrispondenza in cui ogni punto di uno qualsiasi dei due segmenti è funzione continua (sempre crescente o sempre decrescente) dell'altro. Giacchè, se P muovesi su AB tendendo alla posizione P_0, per esempio da sinistra a destra, il punto omologo P' tende come limite a P'_0 muovendosi nel verso omologo su A'B'.

La questione risoluta nel n° 32 non si presenta quando un omeomorfismo fra una linea ed un segmento o fra due linee, si definisca (in modo a priori più ristretto di quello da noi tenuto) come una corrispondenza in cui il punto variabile in uno qualunque dei due insiemi omologhi, sia funzione univoca continua del punto variabile sull'altro; e ciò, in ultima analisi, perchè una funzione continua assume ogni valore compreso fra il suo massimo e il suo minimo (*), ovvero (ciò che notoriamente segue da questo teorema) perchè una funzione continua invertibile è necessariamente sempre crescente o sempre decrescente.

(*) In base a questo teorema, si deduce immediatamente che in una corrispondenza siffatta fra i punti di due segmenti, ad un segmento dell'uno corrispondono tutti e soli i punti di un segmento dell'altro, agli estremi corrispondendo gli estremi.

Il teorema dimostrato prova in sostanza che detta definizione, a priori più ristretta della nostra, coincide con questa.

La questione neppure si presenta, quando una linea si definisce, al modo di Jordan, per scopi puramente analitici, mediante una coppia di funzioni univoche continue $x(t)$, $y(t)$, date in uno stesso intervallo (senza neppur porre necessariamente la condizione dell'invertibilità). I versi della linea sono i trasformati dei versi dell'intervallo, mediante la particolare corrispondenza posta dalla rappresentazione parametrica. E non si va più in là, perchè la linea è in tali quistioni una semplice finzione del linguaggio analitico, non un ente geometrico, definito indipendentemente dalla rappresentazione analitica. La linea da questo punto di vista, non è cioè un mero insieme di punti, ma un insieme siffatto associato ad una corrispondenza coi punti di un segmento. E finchè questo insieme non si dissocia da tale corrispondenza, oppure si sostituisce al parametro t una funzione continua monotona $t(\tau)$ di un altro parametro τ, è lecito ritenere definiti senza ambiguità i versi della linea, perchè a un verso naturale del segmento dov'è rappresentato τ, corrisponde un verso naturale del segmento dov'è rappresentato t.

34 — Linea chiusa semplicemente connessa è la M_1 chiusa che si ottiene da una linea l aperta, semplicemente connessa, di estremi A,B, aggiungendovi un'altra

linea analoga m avente gli stessi estremi. Il verso naturale di l, che va da A a B prolungasi nel verso naturale di m da B ad A, e si ottiene così un <u>verso</u> sulla linea chiusa. Similmente si definisce il verso <u>opposto</u>.

I due versi che si hanno nel modo detto su d'una linea chiusa, sono ad essa intrinsecamente legati, non dipendono cioè dalle particolari curve l, m con cui s'è composta la curva chiusa(*)

XII - <u>Considerazioni critiche sulla definizione di continuità d'una corrispondenza.</u>(**) . -

35 - Aggiungiamo alcune altre osservazioni, a complemento di quelle fatte precedentemente sulle M_1. Diamo a queste considerazioni, come a quelle sulle M_1, un'intonazione critica, anche per mostrare una volta tanto un aspetto, non certo meno importante, dei problemi che si presentano nella topologia.

Abbiamo definito <u>la continuità della corrispondenza</u> che chiamammo omeomorfismo fra due insiemi (appartenenti a due spazi euclidei a un numero qualunque di dimensioni), ponendo la condizione che:

1) Ogni <u>punto limite</u> si muti in un punto limite

(*) Basta infatti pensare che una linea chiusa è omeomorfa ad una circonferenza.

(**) Anche tali considerazioni sono state fatte dal prof. <u>Severi</u> in occasione di queste Conferenze.

(cioè ogni insieme completo contenuto in uno qualunque dei due dati insiemi, in un insieme completo dell'altro).

Ma della continuità della corrispondenza si posson dare definizioni, che appariscono a priori più ristrette. E cioè:

2) La corrispondenza (biunivoca) fra i due insiemi dicesi bicontinua, se, tutte le volte che un punto P, variabile nell'uno qualunque dei due, tende ad una <u>posizione limite</u> P_0, il punto omologo P' dell'altro, tende come limite alla posizione P'_0, omologa di P_0; o, con altre parole, quando il punto di uno qualunque dei due insiemi è funzione univoca ~~continua~~ del punto dell'altro.

Ciò significa che, scelto comunque un numero positivo ε, si può determinare un $\sigma>0$, tale che a <u>tutti</u> i punti del primo insieme aventi da P_0 distanza minor di σ, corrispondano punti del secondo, aventi da P'_0 distanza minore di ε.

3)) La corrispondenza (biunivoca) fra i due insiemi dicesi bicontinua quando, considerato nell'uno qualunque, dei due un <u>insieme numerabile</u> $P_1 P_2 P_3, \dots$ di punti, il quale abbia come solo punto limite P (cioè $\lim_{n\to\infty} P_n = P$), l'insieme numerabile corrispondente $P'_1 P'_2, P'_3, \dots$ ha come solo punto limite l'omologo P' di P (cioè $\lim_{n\to\infty} P'_n = P'$).

<u>Nel caso di corrispondenze fra segmenti, le tre definizioni, secondo quanto risulta da ciò che precede, coincidono. Orbene lo stesso fatto si verifica per insie</u>

mi qualunque.

Mostriamo la coincidenza delle 1), 2). Sieno I, I' gl'insiemi completi fra i quali intercede la corrispondenza. Sia soddisfatta la 1). Proviamo che è soddisfatta la 2). I punti P_0, P'_0 sieno omologhi nella corrispondenza. Se, dato comunque ε, non fosse sempre possibile trovare un σ tale che ai punti di I interni all'intorno di raggio σ di P_0, corrispondessero punti di I', interni all'intorno di raggio ε di P'_0, esisterebbe un qualche ε siffatto, che i punti di I', corrispondenti a punti di I distanti da P_0 meno di un σ arbitrario, non sarebbero tutti interni all'intorno D' di centro P'_0 e raggio ε(*). Diciamo K' l'insieme dei punti di I' esterni a D', e corrispondenti a punti di I situati in un intorno fissato di P_0; K l'insieme di I, corrispondente a K'. L'insieme K non può aver come punto limite P_0, se no P'_0 sarebbe punto limite di K', contro il supposto che la distanza dei punti di K' da P'_0 sia $\geq \varepsilon$. Pertanto esiste un intorno di P_0 in cui non cade nessun punto di K; cioè un intorno di P_0 in cui non cadon che punti di I i cui cor-

(*) Si può anche dire così. Dato un σ, le distanze da P'_0 dei punti di I' corrispondenti a punti di I, distanti da P_0 meno di σ, posseggono un estremo superiore E' (finito, perchè supponiamo I finito). Facendo tendere σ a zero, E' risulta manifestamente funzione univoca monotona di σ, epperò tende ad un limite $E'_0 \geq 0$. Se $E'_0 = 0$ è dimostrata la coincidenza delle condizioni 1), 2); se no si cade nell'ipotesi del testo.

rispondenti son tutti interni all'intorno di centro P'_0 e raggio ε. Contrariamente all'ipotesi. Dunque quest'ipotesi è assurda e dalla 1) consegue la 2).

Viceversa, se è soddisfatta la 2), considerato un insieme L in I, e detto P_0 un punto limite di L, P'_0 l'omologo in I', e L' l'insieme di I' corrispondente ad L', in un intorno comunque piccolo di P'_0 si troveranno punti di L', cioè P'_0 sarà punto limite di L' e risulterà soddisfatta la 1).

Mostriamo la coincidenza delle 1), 3) [e quindi delle 2), 3)]. Sia soddisfatta la 1) e $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sia un insieme numerabile di I, avente come solo punto limite P; $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ sia l'insieme numerabile di I', corrispondente al precedente insieme; P' l'omologo di P. Intanto, per la 1), P' è punto limite di $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$. Di più non può esistere un altro punto limite della successione $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ perchè se no ad esso, sempre per la 1), corrisponderebbe un punto limite di $P_1, P_2, P_3, \ldots$ <u>distinto</u> da P. Dunque dalla 1) segue la 3). Viceversa, sia soddisfatta la 3); mostriamo che ne consegue la 1) [e quindi la 2)]. Sia un insieme L di I, avente come punto limite P; L', P' i corrispondenti di L, P in I'. Consideriamo una successione di intorni di centro P e di raggi decrescenti σ, $1/2\,\sigma$, $1/4\,\sigma$, $1/8\,\sigma$, ...; a cominciare dal primo di questi intorni, consideriamo gl'insiemi parziali costituiti da punti di L che appartengono ad uno di questi intorni, ma non al successivo (cioè che appartengono ad una determinata corona). Avremo così una successione di insiemi $L_1, L_2, L_3, \ldots$ (*). Nel primo scegliamo un punto P_1, nel secondo un punto P_2, e così proseguiamo indefinitamente(**). Verremo a formare una successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$ di punti di L, la quale ha per punto limite P. E questo sarà il solo punto limite, perchè fuori di un intorno comunque fissato di P, cade soltanto un numero finito di punti della successione. Alla successione $P_1, P_2, P_3, \ldots$ corrisponde una successione $P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ di punti di L', che ha per (solo) punto limite P'. Dunque P' è un punto limite di L', ed è soddisfatta la 1).

Osservazione 1ª – Il ragionamento svolto poc'anzi dente per conchiudere l'equivalenza delle definizioni 1), 2), applicato al caso in cui I, I' son segmenti, dà un'altra dimostrazione del teorema della conservazione dei versi naturali. È quella cui abbiamo accennato nel n° 33.

Osservazione 2ª – Notiamo come nella 2) sia implicito il risultato di Jordan cui si è fatto cenno nella nota a piè della pag. 85, che cioè se una corrispondenza biunivoca è continua in un senso, lo è anche nel senso opposto.

(*) È appena necessario avvertire, che in talune delle corone ipersferiche considerate potranno non cadere punti di L. Si dovrà considerare soltanto la successione delle corone che contengono punti di L. Così si otterranno i successivi insiemi $L_1, L_2, L_3, \ldots$

(**) Si ammette in tal modo la possibilità delle infinite scelte (postulato di Zermelo), ma in circostanze molto ristrette. Quest'applicazione ristretta del postulato di Zermelo, è frequente e consentita dalla generalità dei matematici.

sto. Invero, se è soddisfatta la condizione 2), nel passaggio dall'insieme I all'insieme I', se cioè a $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ corrisponde $\lim_{n\to\infty} P'_n = P'$, presa una successione infinita di punti in I', $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \ldots$, la quale abbia il solo punto limite Q' ($\lim_{n\to\infty} Q'_n = Q'$), se la corrispondente successione $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ in I avesse due punti limiti distinti, a questi dovrebbe corrispondere il medesimo punto limite Q' di $Q'_1, Q'_2, Q'_3, \ldots$; e la corrispondenza non sarebbe biunivoca.

36 – Un'altra avvertenza va fatta a proposito della definizione di contorno di una M_n, perchè la definizione data del contorno di una cellula E_n (luogo dei punti corrispondenti al contorno di una cellula ipersferica E'_n in un omeomorfismo fra tale cellula ed E_n), lega quella definizione alla particolare corrispondenza fra E_n ed E'_n. Occorre dunque provare che l'insieme dei punti di E_n che definiamo come contorno, è indipendente da tale corrispondenza. La questione riducesi evidentemente a dimostrare che:

Un omeomorfismo fra due cellule ipersferiche E_n, E'_n, muta sempre il contorno dell'una nel contorno dell'altra.

Il teorema è già stato dimostrato per $n = 1$ (n° 32). Supponiamo $n = 2$; sieno E_2, E'_2 i due cerchi omeomorfi. Se al contorno γ di E_2 non corrispondesse il contorno di E'_2, avremmo ivi una linea γ'(*), generalmente interna ad E'_2, corrispondente a γ. Presi due punti

(*) Linea chiusa di Jordan (cioè insieme di punti in corrispondenza biunivoca con_

A', B' di E_2', che sieno da parti opposte rispetto a γ', ad essi corrisponderanno due punti A, B <u>interni</u> ad E_2, ed al segmento AB, interno ad E_2, corrisponde su E_2' una linea $A'B'$, non incontrante γ': il che contrasta colla proprietà di γ' espressa dal teorema di <u>Jordan</u>. L'ipotesi fatta è dunque assurda.

La generalizzazione ad n qualunque è immediata, quando ci si appoggi all'estensione del teorema di <u>Jordan</u>, circa la divisione in due parti dello spazio S_n, determinatavi da ogni varietà chiusa M_{n-1} ad $n-1$ dimensioni, che sia omeomorfica ad un'ipersuperficie sferica; teorema di cui trovasi un cenno in <u>Lebesgue</u> (C. R. 1911) e che è stato dimostrato in modo completo da <u>Brouwer</u> (Math. Ann. 1911). La dimostrazione del teorema che in due cerchi omeomorfici si corrispondono i contorni, qui ridotta ad un'ovvia conseguenza del teorema di <u>Jordan</u> è stata data prima da <u>Schoenflies</u> (Jahresber. d. deut. M. V. 1908), il quale ha anche enunciato il teorema per n qualunque. Una dimostrazione per n qualunque trovasi in <u>Lebesgue</u> (Fundamenta Mathematicae, t. II, 1921).

Negli ambiti in cui vogliamo muoverci, noi pos-

-tinua coi punti di un segmento, salvo gli estremi che corrispondono al medesimo punto della linea); non necessariamente linea nel senso intuitivo della parola. Comunque è noto (teorema di <u>Jordan</u>) che una tal linea divide il piano in due regioni (di punti interni ed esterni rispetto ad essa) siffatte che due punti di regioni diverse non possono esser congiunti da una linea (di <u>Jordan</u>) che non attraversi la data linea chiusa.

siamo stabilire il fatto che c'interessa per n qualunque, senza ricorrere al teorema di <u>Jordan</u> generalizzato, in vari modi. Tenendo cioè conto, da un lato, che gli omeomorfismi che ci limitiamo a considerare nel seguito, come abbiamo già avvertito (pag. 85), conservano tutte le proprietà infinitesimali. Pertanto presi in E_n due piccoli pezzi H_1, H_2 di varietà ad $n-1$ dimensioni, contenenti un punto P interno ad E_n, per le quali il punto P sia semplice e non di contatto, le semirette tangenti a ciascuna delle varietà omologhe H_1', H_2', nel punto P', dovranno riempire tutta una stella (di semirette <u>tangenti</u>(*) a E_n) giacente in un S_{n-1}; epperò il punto P' non potrà che essere <u>interno</u> ad E_n', altrimenti le due varietà H_1', H_2' si toccherebbero in P', avendo ivi comune S_{n-1} tangente, lo S_{n-1} tangente alla forma ipersferica contorno di E_n'.

D'altro lato, se l'omeorfismo è analitico, al contorno di E_n risponde in E_n' una varietà chiusa, rappresentata da un'equazione analitica $f(x_1', x_2', \dots, x_n') = 0$, la quale, se non coincide col contorno di E_n', divide questa cellula in due parti (una per cui $f < 0$ e l'altra per cui $f > 0$) tali che non si può passare dall'una all'altra con un cammino analitico, senza traversare la varietà $f = 0$. Ma ciò è assurdo, perchè a due

---

(*) Una <u>semiretta tangente</u> ad una M_n (appartenente ad uno spazio di dimensione maggiore od anche <u>eguale</u> ad n) in un suo punto P, è la posizione limite di una semiretta congiungente P con un punto Q di M_n, che si approssimi a P sopra una linea di M_n.

Una <u>retta tangente</u> è l'insieme di due semirette opposte tangenti.

punti A', B' di regioni diverse, rispondono due punti A, B interni ad E_n, ed al segmento che unisce A, B, risponde una curva analitica, congiungente A' con B' e non traversante la varietà $f = 0$.

Alla conclusione desiderata si giunge altresì supponendo che l'omeomorfismo fra E_n, E'_n sia subordinato da un omeomorfismo fra due regioni R, R' degli spazi S_n, S'_n di E_n, E'_n, contenenti nel loro interno queste cellule. Invero, considerato un punto P del contorno di E_n come punto limite di un insieme I di punti di R, esterni ad E_n, l'insieme I' corrispondente in R' sarà esterno ad E'_n, e al punto P corrisponderà un punto P', limite per I', e appartenente ad E''_n. Perciò P' non potrà che appartenere al contorno di E'_n.

<u>Osservazione</u>. - Il fatto che il teorema è vero anche senza le ipotesi sussidiarie da noi aggiunte, prova che <u>ogni omeomorfismo fra due cellule ipersferiche E_n, E'_n può sempre prolungarsi, fuori delle due cellule, in un omeomorfismo fra gli spazi euclidei S_n, S'_n cui quelle cellule appartengono</u>. Considerate invero, in S_n, S'_n, le trasformazioni per raggi vettori reciproci T, T', che lascian fissi i singoli punti dei contorni di E_n, E'_n, si posson per es. assumere come omologhi due punti P, P' di S_n, S'_n, esterni a E_n, E'_n, i quali sieno inversi, rispetto a T, T', di due punti Q, Q' omologhi nell'omeomorfismo considerato fra E_n, E'_n.

XIII. - <u>Reticolato regolare sopra una varietà. Condizione di equivalenza topologica di due varietà</u>. -

37. - Alla fine del n° 31 abbiamo accennato all'equivalenza delle due definizioni che si posson dare d'una varietà ad n dimensioni, assumendo come ente primordiale una cellula ipersferica ovvero un poliedro elementare. Tale equivalenza risulta nettamente dalle considerazioni che seguono.

Abbiasi, in primo luogo, una cellula ipersferica E_n, il cui contorno Γ_{n-1} sia diviso in cellule ad $n-1$ dimensioni, soddisfacenti alle condizioni che definiscono una varietà irriducibile chiusa, qual'è appunto Γ_{n-1}. Poichè due qualunque cellule generatrici di Γ_{n-1} non hanno punti interni comuni, esse vengon proiettate da un punto P interno ad E_n secondo cellule ad n dimensioni, non aventi a due a due punti interni comuni, e costituenti nel loro complesso, la varietà (aperta) E_n. Se ora E'_n è una cellula qualunque ad n dimensioni, (varietà omeomorfica ad E_n), il cui contorno sia diviso in cellule ad $n-1$ dimensioni, l'omeomorfismo fra E_n, E'_n induce una simil divisione nel contorno di E_n; ai segmenti appartenenti ad E_n corrispondono archi di linee di E'_n; e alle cellule che proiettano le cellule del contorno da un punto P interno ad E_n, corrispondono in E'_n cellule ad n dimensioni che "<u>proiettano</u>" (con archi della specie predetta) le cellule del contorno di E'_n, dal punto P' corrispondente a P; e queste cellule di E'_n non hanno a due a due punti interni comuni.

Ciò premesso, sia M_n una varietà (irriducibile, n° 31), definita mediante un numero finito di cellule ad n dimensioni, soddisfacenti alle condizioni di adiacenza, di cui al n° 31. Tali relazioni di adiacenza danno luogo, per ognuna di quelle cellule, ad una suddivisione del relativo contorno in cellule ad $n-1$ dimensioni, ciascuna delle quali può, in virtù delle stesse relazioni di adiacenza, considerarsi come un poliedro generalizzato, ove si hanno vertici (cellule a 0 dimensioni), lati (cellule ad 1 dimensione), facce bidimensionali (cellule a 2 dimensioni), facce tridimensionali (cellule a 3 dimensioni), ecc.

L'insieme delle cellule delle varie dimensioni (da 0 ad n) che si hanno considerando complessivamente le cellule ad n dimensioni costituenti M_n, eppoi quelle ad $n-1$ dimensioni costituenti i loro contorni, quelle ad $n-2$ dimensioni costituenti i contorni di queste ultime, ecc, si chiama un <u>reticolato</u> su M_n.

Un reticolato su M_n dicesi <u>regolare</u> se soddisfa alle condizioni che seguono.

1) Sul contorno di ognuna delle cellule ad i dimensioni ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) formanti il reticolato, esistono soltanto $i+1$ vertici, $\binom{i+1}{2}$ lati, $\binom{i+1}{3}$ facce triangolari, $\binom{i+1}{4}$ facce tetraedriche, ecc, aventi fra loro le stesse relazioni di adiacenza (o, in altre parole, d'incidenza) che corron fra i vertici, i lati, le facce triangolari, tetraedriche, ecc., d'un poliedro elementare ad i dimensioni. Perciò si dirà che quelle cellule son <u>poliedroidi elementari</u>.

2) Due qualunque poliedroidi elementari del reticolato, non hanno punti interni comuni.

3) Dati comunque due poliedroidi elementari ad n dimensioni del reticolato, esiste in questo una successione di poliedroidi n-dimensionali, di cui i dati sono il primo e l'ultimo, siffatta che due consecutivi hanno sempre una faccia (ad $n-1$ dimensioni) comune.

4) Due vertici del reticolato che giacciano sopra una cellula ad 1 dimensione del medesimo, non stanno su altre cellule analoghe; tre vertici del reticolato, che stieno sopra una cellula a 2 dimensioni del medesimo, non stanno su altre cellule analoghe; e similmente per quattro, cinque, ... vertici.

Le condizioni 2), 3) son comuni alle cellule n-dimensionali costituenti ogni reticolato che ricopra una varietà irriducibile; le 1), 4) caratterizzano i reticolati regolari.

<u>Da un reticolato qualunque R, che copra M_n, si passa ad un reticolato regolare R' colla costruzione seguente</u>.

Chiamati in modo generico con $P^{(0)}$ i vertici di R, su ciascuna cellula ad i dimensioni di R ($i = 1, 2, \dots, n$) scelgasi <u>un</u> punto interno $P^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$); i lati di R', son le cellule unidimensionali che "proiettano, da ogni dato $P^{(i)}$, ogni vertice di R' il quale si trovi sul contorno della cellula i-dimensionale di R, a cui $P^{(i)}$ è interno; le cellule bidimensionali di R', sono quelle che "proiettano" da ogni dato $P^{(i)}$, ogni cellula unidimensionale di R' situata sul contorno della cellula i-dimensionale di R, contenente $P^{(i)}$ all'interno; e così di seguito, fino a costruire le cellule n-dimensionali di R'.

Osservazione 1ª - Una varietà M_n spezzata in più parti (irriducibili) ad n dimensioni, può coprirsi con un reticolato regolare, risultante dall'insieme di reticolati regolari con cui sieno ricoperte le singole sue parti. Pei nostri scopi noi portiamo in modo speciale l'attenzione sulle varietà irriducibili. Molte considerazioni valgono però anche per varietà riducibili.

Intorno a ciò e a tanti altri aspetti della topologia, che qui vengon appena toccati, posson consultarsi più ampie trattazioni sistematiche, fra le quali citiamo quella del Veblen (1916-22), interessante sopratutto dal punto di vista combinatorio, ed in cui le relazioni d'incidenza fra gli elementi cellulari d'una varietà, son rappresentate (con Poincaré) da opportune matrici, sicchè la topologia combinatoria si riduce a risolvere (con soluzioni 0,1) certi sistemi di equazioni lineari; e quella del Kerékjárto (1927), limitata per ora alle varietà a due dimensioni, ove son tenute d'occhio in modo diffuso e profondo anche le questioni di continuità. Negli ultimi quindici anni, sulle orme di Riemann, Jordan, e di Poincaré, un'eletta schiera di studiosi s'è occupata dell'Analysis situs, come uno dei rami più importanti e promettenti della Matematica (Brouwer, Birkhoff, Weyl, Dehn, Heegard, Menger, Urysohn, Hausdorff, Alexander, Alexandroff, Hopf, ecc.)

ed ha ottenuto risultati eleganti e notevoli. Ma moltissimo c'è ancora da fare in questo campo!

Osservazione 2ª - La successiva aggiunta di nuovi punti interni per ciascuna delle cellule costituenti un reticolato regolare, permette di dedurre da questo un altro reticolato regolare, che costituisce un frazionamento del precedente; e, ripetendo più volte il frazionamento, si può giungere ad un reticolato regolare, le cui cellule sieno di un ordine di piccolezza prefissato.

Osservazione 3ª - Il concetto di varietà ad n dimensioni è suscettibile di un'ulteriore estensione, che trovasi per es., nei riguardi delle superficie, nella trattazione di Kerékjárto. Si può cioè considerare un insieme di un numero finito od infinito di triangoli soddisfacenti alle condizioni:

1) Un punto interno ad uno di essi non appartenga ad altri.

2) Ogni lato d'un triangolo appartenga sempre a due soli di essi.

3) Ogni vertice appartenga ad un insieme finito ciclico di triangoli, di cui due consecutivi abbiano a comune un lato passante per quel vertice.

4) Due triangoli si possano sempre considerare come il primo e l'ultimo di una successione di un numero finito, per guisa che due consecutivi abbiano un lato comune.

Se il numero dei triangoli è finito, Kerékjárto chiama la superficie chiusa (e ciò concorda colla definizione da noi adottata in generale); se il numero dei triangoli è infinito, la chiama una superficie aperta (e ciò concorda colla nostra terminologia soltanto da un punto di vista che vien prospettato più sotto).

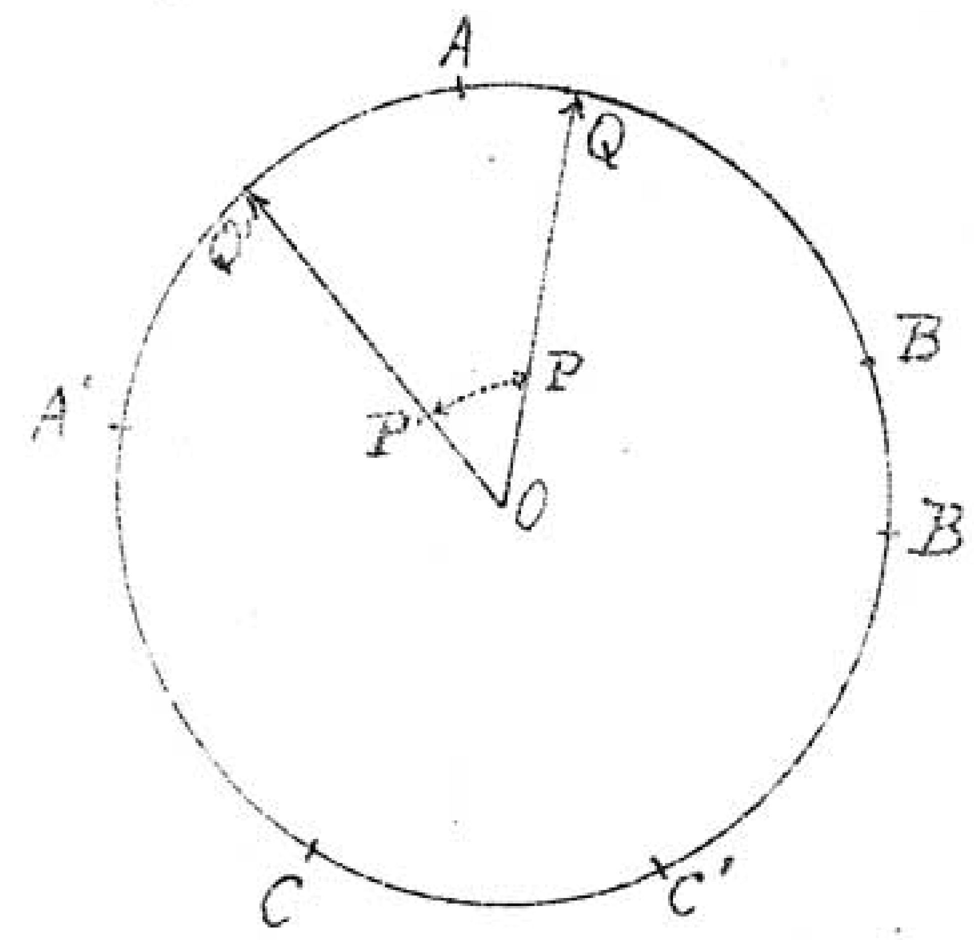
Quando il numero dei triangoli sia finito, la condizione 2) può esser allargata, supponendo che un lato di un triangolo appartenga al più a due triangoli del sistema, anziché necessariamente a due. In questo caso, la superficie insieme di quei triangoli ha un contorno (d'accordo colla nostra terminologia), costituito dai lati che appartengono ad un solo triangolo.

Quando il numero dei triangoli sia infinito, si vede facilmente che l'insieme di tali triangoli, in virtù delle condizioni 1), 2), 3), 4), è numerabile. Insiemi siffatti di triangoli rettilinei o curvilinei, si ottengono (sul piano) per es. nello studio dei gruppi infiniti discontinui di sostituzioni lineari su una variabile complessa. Un reticolato triangolare che invada tutto il piano, si riduce ad un reticolato d'infiniti triangoli occupanti una superficie finita chiusa, per es. mediante proiezione stereografica sulla sfera. In tal caso v'è un punto della sfera che non è interno ad alcun triangolo, sicchè la superficie "aperta" riempita dal reticolato, è la sfera a cui siasi dato come contorno un punto.

38. - Prima di procedere alla ricerca delle condizioni di equivalenza topologica di due varietà, proviamo che:

Se i contorni di due cellule n-dimensionali si ripartiscono ciascuno in $n+1$ cellule $(n-1)$-dimensionali, aventi fra loro le stesse relazioni d'incidenza delle facce di un poliedro elementare di S_n (cioè se le due cellule si riguardano come poliedroidi elementari), esistono omeomorfismi fra le due cellule che mutano vertici, lati, facce triangolari, facce tetraedriche, ecc. del contorno dell'una, negli elementi analoghi del contorno dell'altra, subordinando fra questi elementi omeomorfismi dati.

La cosa è evidente per $n=1$, una cellula ad 1 dimensione essendo un arco coi suoi estremi. - Passiamo ad $n=2$. Consideriamo anzitutto un cerchio, e, presi tre punti A, B, C sul suo contorno, riguardiamo il cerchio come un triangolo (curvilineo) di cui gli archi AB, BC, CA (aventi il verso ABC) sono i lati. Sieno A', B', C' altri tre punti distinti del contorno.



Fissiamo un omeomorfismo γ, che muti il lato AB (avente il verso ABC) nel lato $A'B'$ (avente il verso $A'B'C'$) mutando A in A' e B in B'; un omeomorfismo α, che muti BC in $B'C'$ e B in B', C in C'; infine un omeomorfismo β, che muti CA in $C'A'$ e C in C', A in A'.

L'insieme di tre omeomorfismi α, β, γ costituisce un omeomorfismo δ che muta in sè il contorno, mutando "vertici" e "lati" del "triangolo" ABC nei "vertici" e "lati" prefissati del "triangolo" A'B'C'. Si può ora costruire un omeomorfismo σ di tutto il cerchio in sè, che subordini sul contorno l'omeomorfismo δ, chiamando omologhi due punti P, P' del cerchio, quando sono equidistanti dal centro O (epperò O andrà assunto come punto unito) ed i raggi OP, OP' segano la circonferenza in due punti Q, Q' corrispondenti in δ.

Premesso questo, sieno E, E' due cellule bidimensionali, (A_0, B_0, C_0), (A'_0, B'_0, C'_0) punti scelti sui rispettivi contorni; λ un omeomorfismo che muti E nel cerchio sopra considerato, mutando il "triangolo" $A_0B_0C_0$ in ABC (vertici in vertici, lati in lati); μ un omeomorfismo che muti E' nello stesso cerchio, mutando il "triangolo" $A'_0B'_0C'_0$ in A'B'C'; δ_0 un omeomorfismo fra i contorni di E, E' che subordini dati omeomorfismi fra i lati dei "triangoli" $A_0B_0C_0$, $A'_0B'_0C'_0$; δ l'omeomorfismo fra i contorni dei "triangoli" ABC, A'B'C', che nasce chiamando omologhi due punti del contorno del cerchio, corrispondenti, mediante λ, μ, a due punti omologhi in δ_0; σ un omeomorfismo del cerchio in sè che subordini δ. Allora il prodotto $\lambda\sigma\mu^{-1}$ è un omeomorfismo fra E, E', il quale soddisfa alle condizioni del teorema enunciato.

Passiamo a $n = 3$. Consideriamo in primo luogo una sfera; sul suo contorno assumiamo una quaderna di punti (distinti) A, B, C, D, e ripartiamo il contorno stesso in quattro cellule bidimensionali (facce

"triangolari") ABC, ABD, ACD, BCD aventi per vertici i punti dati, considerati a tre a tre, e per lati cellule unidimensionali (archi) congiungenti le coppie di vertici di ogni faccia, e non intersecantisi fuori dei vertici. Similmente operiamo a partire da un'altra quaderna di punti A', B', C', D' del contorno. Indi facciamo corrispondere ordinatamente ad A, B, C, D, i punti A', B', C', D', e consideriamo omeomorfismi arbitrari, che mutino l'uno nell'altro i lati congiungenti le coppie di vertici omologhi. In virtù di quanto precede, tali omeomorfismi potranno riguardarsi come subordinati da omeomorfismi tra le coppie di facce omologhe; l'insieme di questi omeomorfismi fra le facce, genera un omeomorfismo δ della superficie sferica in sè, la quale subordina fra vertici, lati, facce (triangolari) delle due superficie tetraoidali, le date corrispondenze. Si costruisce poi un omeomorfismo σ, che muta in sè la sfera e subordina δ sul contorno, chiamando omologhi in σ due punti P, P' della sfera quando sono equidistanti dal centro O, che si assume unito, ed i raggi OP, OP' segano la superficie sferica in punti Q, Q' corrispondenti in δ.

Premesso ciò, sieno E, E' due cellule tridimensionali; (A_0, B_0, C_0, D_0), (A'_0, B'_0, C'_0, D'_0) punti scelti sui rispettivi contorni; λ, μ omeomorfismi che mutino le cellule E, E' nella sfera sopra considerata, mutando (A_0, B_0, C_0, D_0), (A'_0, B'_0, C'_0, D'_0) in (A, B, C, D), (A', B', C', D'); δ_0 un omeomorfismo fra i contorni di E, E', che subordini dati omeomorfismi fra vertici, lati, facce, dei due poliedroidi

$A_0B_{\prime\prime}C_0D_0, A'_0B'_0C'_0D'_0$; δ l'omeomorfismo, sul contorno della sfera, trasformato per mezzo di λ, μ dell'omeomorfismo δ_0 ($\delta = \lambda^{-1}\delta_0\mu$); σ un omeomorfismo della sfera in sè che subordini δ sul contorno. Allora l'omeomorfismo $\lambda\sigma\mu^{-1}$ fra E, E' soddisfa alle condizioni richieste.

E così continuando, col risalire da $n=3$ ad $n=4$; da $n=4$ ad $n=5$; ecc. si dimostra l'asserto.

[illegible] necessaria e sufficiente affinchè due varietà M_n, M'_n ad n dimensioni sieno topologicamente equivalenti, è ch'esse possano coprirsi con reticolati aventi lo stesso schema di connessione.

La necessità della condizione è manifesta, perchè un omeomorfismo fra M_n, M'_n muta un reticolato coprente M_n, in un reticolato coprente M'_n ed avente lo stesso schema. Dimostriamo la sufficienza. Anzitutto è chiaro che, se M_n, M'_n son ricoperte con due reticolati R, R' aventi lo stesso schema, si può porre fra vertici, cellule ad 1 dimensione, cellule a 2 dimensioni, ecc., dei due reticolati, una corrispondenza biunivoca tale che a cellule incidenti od appartenentisi, corrispondano cellule incidenti o rispettivamente appartenentisi; e di più da R, R' posson dedursi due reticolati regolari $\bar{R}, \bar{R}'$, godenti delle analoghe proprietà.

Partiamo ora da un poliedroide $A_1A_2\dots A_{n+1}$ del reticolato $\bar{R}$, e consideriamo il poliedroide corrispondente $A'_1A'_2\dots A'_{n+1}$, nella corrispondenza Ω posta fra gli elementi cellulari dei reticolati $\bar{R}, \bar{R}'$. In base al n° 38, possiamo porre un omeomorfismo ω_1 fra i due

poliedroidi, che faccia corrispondere i loro elementi cellulari che già son omologhi nella Ω. Consideriamo indi due poliedroidi adiacenti ai precedenti, ed omologhi in Ω. Fra gli elementi comuni a queste coppie di poliedroidi omologhi, son già definiti omeomorfismi, subordinati da ω_1. Poniamo fra i nuovi poliedroidi un omeomorfismo ω_2, che faccia corrispondere gli elementi cellulari omologhi in Ω, e subordini sui predetti elementi comuni gli stessi omeomorfismi subordinati da ω_1. E così si prosegua, passando da ogni poliedroide ai suoi adiacenti.

Dall'insieme degli omeomorfismi $\omega_1, \omega_2, \dots$ resta definito un omeomorfismo che muta M_n in M'_n.

40. – In particolare, se le varietà M_n, M'_n coincidono in una medesima, se cioè sopra una M_n si considerano due reticolati regolari R, R' aventi lo stesso schema di connessione, si può costruire (in infiniti modi) un omeomorfismo di M_n in sè che muti un reticolato nell'altro.

Il reticolato R può supporsi costituito (n° 37, oss. 2ª) da elementi cellulari di ordine di grandezza minore di un ε prefissato (*), ed il reticolato R' si può imaginare costruito, dopo R, in tal guisa che le distanze

---

(*) Una cellula ad i dimensioni ($i = 1, 2, \dots, n$) di R, si dirà di ordine di grandezza minor di ε, quando due punti qualunque della cellula distano fra loro meno di ε (nello spazio euclideo che contiene M_n).

$A_0B_0C_0D_0$, $A'_0B'_0C'_0D'_0$; δ l'omeomorfismo, sul contorno della sfera, trasformato per mezzo di λ, μ dell'omeomorfismo δ_0 $(\delta = \lambda^{-1}\delta_0\mu)$; σ un omeomorfismo della sfera in sè che subordini δ sul contorno. Allora l'omeomorfismo $\lambda\sigma\mu^{-1}$ fra E, E' soddisfa alle condizioni richieste.

E così continuando, col risalire da $n=3$ ad $n=4$; da $n=4$ ad $n=5$; ecc. si dimostra l'asserto.

39. — [illegible] necessaria e sufficiente affinchè due varietà M_n, M'_n ad n dimensioni sieno topologicamente equivalenti, è ch'esse possano coprirsi con reticolati aventi lo stesso schema di connessione.

La necessità della condizione è manifesta, perchè un omeomorfismo fra M_n, M'_n muta un reticolato coprente M_n, in un reticolato coprente M'_n ed avente lo stesso schema. Dimostriamo la sufficienza. Anzitutto è chiaro che, se M_n, M'_n son ricoperte con due reticolati R, R' aventi lo stesso schema, si può porre fra vertici, cellule ad 1 dimensione, cellule a 2 dimensioni, ecc., dei due reticolati, una corrispondenza biunivoca tale che a cellule incidenti od appartenentisi, corrispondano cellule incidenti o rispettivamente appartenentisi; e di più da R, R' posson dedursi due reticolati regolari $\bar{R}, \bar{R}'$, godenti delle analoghe proprietà.

Partiamo ora da un poliedroide $A_1A_2\dots A_{n+1}$ del reticolato $\bar{R}$, e consideriamo il poliedroide corrispondente $A'_1A'_2\dots A'_{n+1}$, nella corrispondenza Ω posta fra gli elementi cellulari dei reticolati $\bar{R}, \bar{R}'$. In base al nº 38, possiamo porre un omeomorfismo ω_1 fra i due poliedroidi, che faccia corrispondere i loro elementi cellulari che già son omologhi nella Ω. Consideriamo indi due poliedroidi adiacenti ai precedenti, ed omologhi in Ω. Fra gli elementi comuni a queste coppie di poliedroidi omologhi, son già definiti omeomorfismi, subordinati da ω_1. Poniamo fra i nuovi poliedroidi un omeomorfismo ω_2, che faccia corrispondere gli elementi cellulari omologhi in Ω, e subordini sui predetti elementi comuni gli stessi omeomorfismi subordinati da ω_1. E così si prosegua, passando da ogni poliedroide ai suoi adiacenti.

Dall'insieme degli omeomorfismi $\omega_1, \omega_2, \dots$ resta definito un omeomorfismo che muta M_n in M'_n.

40. — In particolare, se le varietà M_n, M'_n coincidono in una medesima, se cioè sopra una M_n si considerano due reticolati regolari R, R' aventi lo stesso schema di connessione, si può costruire (in infiniti modi) un omeomorfismo di M_n in sè che muti un reticolato nell'altro.

Il reticolato R può supporsi costituito (nº 37, oss. 2ª) da elementi cellulari di ordine di grandezza minore di un ε prefissato (*), ed il reticolato R' si può imaginare costruito, dopo R, in tal guisa che le distanze

(*) Una cellula ad i dimensioni $(i = 1, 2, \dots, n)$ di R, si dirà di ordine di grandezza minor di ε, quando due punti qualunque della cellula distano fra loro meno di ε (nello spazio euclideo che contiene M_n).

di due punti comunque presi, l'uno sopra un elemento cellulare di R e l'altro sopra l'elemento cellulare omologo di R', sieno, esse pure, minori di ε. Allora un omeomorfismo ω che trasformi M_n in sè, mutando R in R', differisce dall'identità meno di ε, nel senso che due punti omologhi in ω distano fra loro meno di ε. Dunque:

Esistono infiniti omeomorfismi di una M_n in sè, ed essi formano un gruppo continuo (contenente l'identità) ad infiniti parametri.

XIV. – *Deformazioni continue. – Omotopie e isotopie.* –

41. – Entro una M_n irriducibile sia I un insieme qualunque di punti, e t sia una variabile numerica, tale che, scelto comunque un punto P di I ed un valore di t in un certo intervallo $\overline{t_0 t_1}$, alla coppia P, t corrisponda *un* punto P_t di M_n, colle condizioni inoltre che il punto P_{t_0} non sia che il punto P di partenza, e che, fissato comunque P in I, il punto P_t, variabile con t, sia funzione *continua* di t nell'intervallo $\overline{t_0 t_1}$. Il luogo dei punti P_{t_1} è un insieme I_{t_1}, che si dice *ottenuto da* $I_{t_0} \equiv I$ *per deformazione continua* entro M_n. Gl'infiniti insiemi I_t si dicono gli *stadi intermedi* dell'insieme variabile, durante la deformazione che lo porta da I_{t_0} a I_{t_1}. La trasformazione che muta I_{t_0} in I_{t_1} si chiama al-

tresì un'*omotopia* e i due insiemi diconsi *omotopi*.

Se, qualunque sia t in $\overline{t_0 t_1}$, il punto P_t proviene sempre da *una sola* posizione del punto iniziale P_{t_0}, i due insiemi I_{t_0}, I_{t_1} (e tutti gli stadi intermedi) si dicon più particolarmente *isotopi*.

Due varietà contenute in M_n, che sieno isotope, sono altresì omeomorfiche; ma non viceversa.

Per es., trasformando una circonferenza di centro O colle omotetie che portano successivamente un punto prefissato $P_{t_0}^{(0)}$ della circonferenza, nei punti di un segmento $P_{t_0}^{(0)}P_{t_1}^{(0)}$ contenuto in $P_{t_0}^{(0)}O$, la circonferenza iniziale si muta in una circonferenza finale ad essa isotopa. Se $P_{t_1}^{(0)}$ tende al limite O, la circonferenza si riduce per deformazione continua al centro; è omotopa al punto O.

Queste denominazioni sono state introdotte da *Dehn* ed *Heegard*.

Due varietà di M_n posson essere omotope, senza essere isotope. Per es., se consideriamo un segmento AB (varietà M_1), esistono deformazioni continue di tale M_1 in sè, che mutano AB nel segmento BA (permutando i due estremi), ma durante una di queste deformazioni i deformati degli estremi del segmento variabile vengono ad un certo momento a coincidere, cioè il segmento si riduce ad un sol punto.

42. – Il concetto di deformazione continua può altresì precisarsi nel modo seguente, che fa però intervenire lo spazio ambiente della M_n.

Sia ancora I un insieme di punti di una M_n data. *Distanza* di un punto P di M_n da I, è l'estremo inferiore delle distanze (euclidee, nello spazio ambiente di M_n) di P dai punti di I. Se I' è un altro insieme di punti di M_n, scarto lineare di I' da I, è l'estremo superiore delle distanze dei punti di I da I' (*). Intorno di ampiezza δ dell'insieme I, entro M_n, è il luogo dei punti di M_n, situati nelle cellule ipersferiche (dello spazio euclideo di M_n), aventi raggio δ e per centri i singoli punti di I.

Si dice che I' è ottenuto da I per deformazione continua entro M_n, quando, prefissato $\varepsilon > 0$, esiste in M_n una successione di un numero finito di insiemi, di cui il primo è I e l'ultimo I', tali che il successivo di uno qualunque di questi insiemi ha dal precedente uno scarto minore di ε; ossia quando il successivo appartiene sempre ad un intorno di ampiezza ε del precedente.

43. - Un ciclo (irriducibile) Γ_k ($k \leq n-1$), di uno spazio euclideo S_n, è riducibile a un punto per deformazione continua entro S_n.

Preso un punto O di S_n, fuori di Γ_k, consideriamo un'omotetia ω, di centro O, e il ciclo Γ'_k, omeomorfo a Γ_k, che corrisponde a Γ_k mediante ω.

Facendo variare il rapporto di omotetia da 1 a 0, Γ'_k assume una successione continua di posizioni intermedie, a partire da Γ_k, riducendosi alla fine al centro O dell'omotetia.

Osservazione. - In particolare, se Γ_k è un ciclo

(*) Ved. Severi, Atti dei Lincei, 1927; 1° sem., p. 476.

di una cellula ipersferica E_n di S_n, preso, come centro dell'omotetia variabile, il centro O della sfera, Γ_k si riduce ad O con una deformazione continua operata entro E_n. La conclusione, essendo invariante di fronte agli omeomorfismi, si può applicare a una qualunque cellula E_n. Cioè:

Un ciclo Γ_k ($k \leq n-1$) di una cellula E_n è riducibile ad un punto, per deformazione continua entro E_n (*).

44. - Un ciclo (irriducibile) Γ_k ($k \leq n-2$) entro la M_{n-1} chiusa, che costituisce il contorno di una cellula E_n, è riducibile ad un punto per deformazione continua entro M_{n-1}.

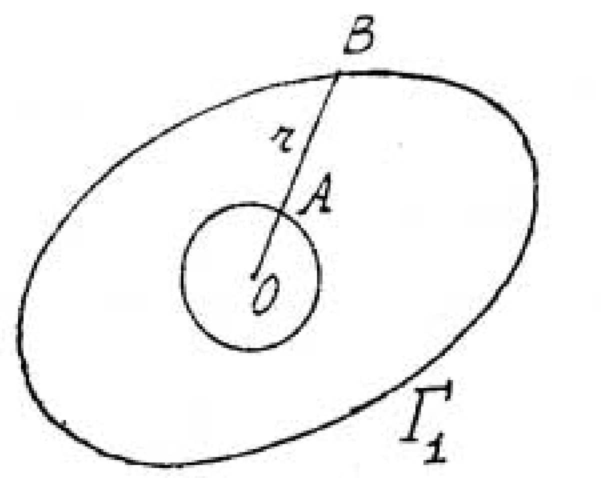
Basterà riferirsi al caso di una M_{n-1} ipersferica (contorno di un'ipersfera E_n di S_n, avente il centro in O). Prendasi su M_{n-1} un punto P, non appartenente a Γ_k, e si consideri la distanza $\delta > 0$ di P da Γ_k. È proprio $\delta > 0$, perchè altrimenti, non potendo P essere un punto limite dell'insieme Γ_k, non appartenente all'insieme stesso (che è perfetto), dovrebbe P stare su Γ_k, contro il supposto. Descritta, col centro in P, una ipersuperficie sferica S di raggio $< \delta$, questa incontrerà la M_{n-1} in un'ipersuperficie sferica T, ad $n-2$ dimensioni, che sarà altresì l'intersezione di M_{n-1} con un certo iperpiano α, perpendicolare ad OP. E la M_{n-1} resterà divisa in due cellule E_{n-1}, situate da bande opposte di α e aventi il contorno comune T. Il ciclo Γ_k ap-

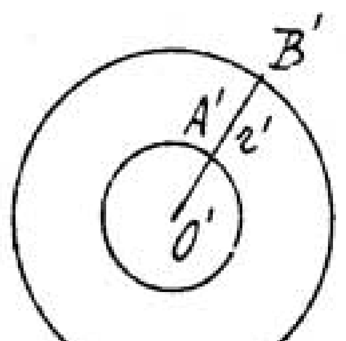
(*) Se Γ_k passasse per O, si trasformerebbe preventivamente con un sistema continuo di omeomorfismi di E_n in sè, che portasse O in un altro punto di E_n.

partiene ad una determinata di queste due cellule, epperò (nº prec.) è ivi riducibile ad un punto per deformazione continua.

45. – Un ciclo Γ_k ($k \leq n-1$) in S_n si dirà *elementare*, quando può considerarsi come contorno di una cellula E_{k+1} contenuta in S_n. Se $k = n-1$, non è difficile verificare che ogni ciclo Γ_{n-1}, che sia convesso (cioè incontrato al più in due punti da una retta non contenuta in esso, neanche in parte), o che sia isotopo ad un ciclo convesso, è elementare.

Così per es., nel piano, una linea convessa Γ_1 è il contorno di una cellula bidimensionale. Per dimostrarlo, basta scegliere un punto O interno rispetto a Γ_1, e un cerchio di centro O, pure interno a Γ_1. Allora ogni semiretta r di origine O incontra la circonferenza del cerchio e Γ_1 nei punti A, B. Analoga considerazione può farsi nei riguardi di due circoli concentrici di centro O': una semiretta r' di origine O', ne incontra le due circonferenze nei punti A', B'.

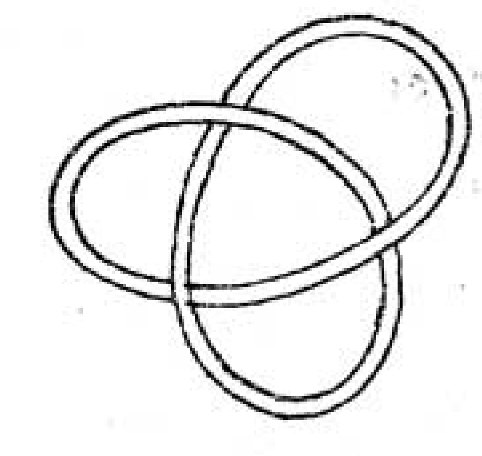




Fissata una corrispondenza biunivoca continua fra le semirette dei fasci O, O' (concepite come elementi), resta individuata su due semirette corrispondenti r, r', la proiettività $\binom{OAB}{O'A'B'}$, che muta il *segmento* OB nel segmento $O'B'$. Si genera così una corrispondenza biunivoca continua, che muta ogni punto interno a Γ_1 in un punto del cerchio di raggio $O'B'$, e ogni punto

di Γ_1 in un punto della circonferenza di questo cerchio. Il che prova che Γ_1 contorna una cellula bidimensionale.

Per $k < n-1$, si verifica che il ciclo è elementare s'esso proiettasi da un S_{n-k-2} generico di S_n, sopra un S_{k+1}, secondo un ciclo isotopo ad un ciclo convesso. Il che non accade, per es., per il ciclo lineare Γ_1 di S_3 rappresentato nella figura qui accanto, giacchè la proiezione piana di questo ciclo è sempre una linea intrecciata, che non può essere isotopa ad una linea convessa.



Lo *Schoenflies* (Gött. Nachr. 1902; Math. Ann. 1904) ha dimostrato più in generale, che l'insieme dei punti di una linea piana di *Jordan* non intrecciata e dei punti rispetto a questa interni (i quali esistono a norma del classico teorema di *Jordan*), costituisce una cellula bidimensionale. Il teorema analogo, sotto ipotesi altrettanto generali, per n qualunque e $k = n-1$, non è stato finora stabilito(*).

46. – Lo studio delle trasformazioni continue in sè (anche univoche in un sol senso) di una M_n, è stato oggetto di notevoli ricerche di *Brouwer*, *Birkhoff*, *Alexander* ed altri, i quali si son altresì occupati dei punti uniti di tali trasformazioni. Il *Lefschetz* ultimamente, in eleganti lavori ha considerato queste

(*) Cfr. per questioni collegate l'Appendice di *Hadamard*, alla "Théorie des fonctions" di J. *Tannery*, (Paris, Gauthier-Villars, 1910), t. II, pag. 469.

trasformazioni da un nuovo e fecondo punto di vista (cfr. col § XVII)(*), trasportando all'Analysis situs un concetto, che C. Segre aveva posto nel 1894, collo scopo esclusivo di definire in modo rigoroso il concetto generale di corrispondenze algebriche fra varietà algebriche, e che il Severi aveva ampiamente sviluppato nel 1903-04, costruendo su tale fondamento la teoria delle corrispondenze fra curve(**). Il Lefschetz ha cioè considerato una trasformazione continua di una varietà irriducibile chiusa M_n in un'altra M'_n (coincidente o no con M_n), come un ciclo ad n dimensioni entro la varietà W_{2n} delle coppie di punti di M_n e di M'_n. Le intersezioni dei cicli ad n dimensioni entro W_{2n} (considerate coi loro segni, alla maniera di Kronecker e di Poincaré, che vedremo in seguito), danno allora luogo ad importanti conseguenze sulle coppie comuni a due trasformazioni continue, ed in particolare sui punti uniti di una trasformazione continua di M_n in sè (coppie comuni colla trasformazione identica).

E si ottengono così in una forma più generale i risultati dei predetti Autori.

(*) Proceedings of the National Academy of Science, marzo 1923 e maggio 1925. - Transactions of the American Math. Society, gennaio 1926. Il Lefschetz ha anche ricostruito topologicamente la teoria delle corrispondenze fra curve algebriche, Annals of Mathematics, luglio 1927.

(**) Memorie di Torino, 1903. Va altresì ricordato in proposito il De-Franchis, che nel 1903 dimostrò geometricamente il teorema di Schwarz e quello di Painlevé-Humbert-Castelnuovo poggiandosi sul concetto stesso.

XV. - Varietà omogenee

47. - Sia M_n una varietà appartenente ad uno spazio lineare S_r, e P un punto di M_n. L'intorno di P, entro M_n, è costituito dai punti di M_n, che appartengono ad una cellula E_r dell'ambiente, avente P come punto interno. Se un intorno abbastanza piccolo di P riducesi ad una sola cellula di M_n, a cui P sia interno, si dice che M_n è omogenea nell'intorno di P. Si dice poi che M_n è una varietà omogenea, se tale è nell'intorno di ognuno de' suoi punti.

Una varietà omogenea è necessariamente chiusa, perchè un punto del contorno di una M_n non può esser interno ad alcuna cellula E_n costituita da punti di M_n(*).

Per es. una ipersuperficie ipersferica è una varietà omogenea.

La M_2 formata da due coni chiusi, opposti al loro vertice comune P, è una varietà (parzialmente connessa, omeomorfa alla superficie di due tetraedri, aventi un vertice comune), non omogenea nell'intorno di P. L'intorno di P si spezza in tal caso in due cellule, aventi in comune il solo punto interno P.

Quando la M_n non è omogenea in P, l'intorno di P si spezza sempre in un numero finito di cellule distinte,

---

(*) Anzi un punto del contorno di una M_n potrebbe anche definirsi come un punto della M_n che non è interno ad alcuna cellula E_n costituita da punti di M_n. Definizione che è però possibile soltanto dopo aver stabilito l'invarianza topologica del concetto di contorno, come noi abbiamo fatto nel N° 36.

che hanno al più in comune a due a due una o più cellule ad $n-1$ dimensioni, contenenti P come punto interno del contorno (se la varietà è aperta).

Osservazione. - L'intorno di un punto P della M_n non è, in quanto precede, definito in termini che appariscano a priori invariantivi di fronte agli omeomorfismi. Invero, esso è ottenuto come intersezione di M_n con una cellula E_r dell'ambiente S_r (in particolare E_r può concretarsi assumendo addirittura, come tale, una cellula ipersferica dell'ambiente).

Dal punto di vista topologico è però chiaro che, essendo M_n costituita da un numero finito di cellule E_n, prive di punti interni comuni, l'intorno di P entro M_n sarà definito non appena siano definiti gli intorni di P entro le suddette cellule E_n. Ora, l'intorno di un punto P, entro una E_n, è definito come l'insieme dei punti che, in un omeomorfismo qualunque tra quella E_n e una cellula ipersferica E'_n di un S_n, nel quale P sia l'omologo di P', corrispondono ai punti di E'_n la cui distanza da P' è $\leq$ ad un numero dato δ (cioè all'intersezione di E'_n con un'altra cellula ipersferica E''_n di S_n, avente il centro in P' e il raggio δ).

E poichè il detto intorno in E'_n costituisce una cellula n-dimensionale, che ha P' all'interno o sul contorno, secondo che P' è all'interno o sul contorno di E'_n, così ne segue che l'intorno di P in E_n soddisfa alle analoghe proprietà.

Abbiamo detto in un omeomorfismo "qualunque" tra E_n ed E'_n, perchè attesa la continuità della corrispondenza, è soddisfatta la condizione essenziale che, al decrescere di δ, decrescono anche tutte le distanze di P' dai punti del proprio intorno.

Vedremo in seguito però, che l'intorno di P in E_n definito in modo proiettivo (o metrico-proiettivo, in relazione all'ambiente S_r, è proprio una cellula n-dimensionale con P all'interno o sul contorno, secondo che P è all'interno o sul contorno di E_n.

Pertanto è legittima la definizione che (per non complicare dall'inizio con considerazioni di dettaglio, pur interessanti e necessarie) abbiamo dato in principio dell'intorno di un punto di M_n.

Questa definizione si presta meglio ad intendere quel che segue.

Il concetto di varietà omogenea è manifestamente invariante per trasformazioni topologiche.

È un concetto importante, al quale vengon subordinate molte proprietà topologiche, che hanno un ufficio sostanziale, specialmente nelle applicazioni alla Geometria algebrica. Una varietà M_n, che non sia totalmente connessa, è sempre non omogenea. Così per es. due tetraedri, esterni l'uno all'altro, aventi un vertice od un lato comune, formano una M_3 aperta parzialmente connessa, e nel vertice o nei punti del lato comune la varietà non è omogenea. La connessione della varietà è rotta, quando se ne tolga il vertice comune o i punti del lato comune. Le superficie dei due tetraedri formano invece una M_2 chiusa, parzialmente connessa, nel caso del solo vertice comune, totalmente connessa, nel caso dello spigolo comune. Ma in ambo i casi, nel vertice o nei punti dello spigolo, la M_2 non è omogenea, e la sua connessione vien rotta, astraendo da tali punti.

Un altro esempio è fornito dalla parte reale della V_4^3 riempita dalle corde (e dai piani tangenti) di una superficie reale F, di *Veronese*, appartenente allo spazio S_5. La F divide la V_4^3 (s'intende la sua parte reale) in due regioni: dei punti *interni* rispetto ad F, da ognun dei quali escono due piani tangenti alla superficie, complesso-coniugati; e dei punti *esterni*, da ognun dei quali escono due piani tangenti reali. Non si può passare con una linea continua da un punto interno ad un punto esterno, senza traversare F. La connessione della V_4^3 è cioè rotta, quando se ne tolgano i punti di F. Questo fatto, è a prima giunta paradossale, perchè non parrebbe a priori possibile che la connessione di una V_4^3 potesse esser rotta astraendo dai punti di una sua superficie. Ma il paradosso si spiega subito, osservando appunto che la V_4^3 non è omogenea nei punti di F, perchè ognuno P di questi è un punto doppio conico per la varietà(*), cosicchè l'intorno di P, sulla V_4^3 si scinde in due cellule E_4, aventi in comune una cellula bidimensionale E_2, che costituisce l'intorno di P in F.

La connessione fra le due cellule resta perciò rotta togliendo da esse la cellula E_2. Questo esempio è di *B. Segre*.

(*) Il cono quadrico tangente a V_4^3 in P è irriducibile, ed ha per vertice il piano tangente in P ad F.

48. — L'ultimo esempio merita uno speciale esame, sia dal punto di vista topologico che dal punto di vista algebrico. Epperò vi dedicheremo una breve *digressione*, utile per chiarire alcune idee.

Dal *punto di vista algebrico* ricordiamo anzitutto, che la V_4^3 delle corde di una F di *Veronese*, rappresenta *senza eccezione* le coppie (non ordinate) dei punti (reali e complessi) del piano [come si vede per es. considerando la corrispondenza birazionale, senza eccezioni, fra i punti del piano ed i punti di F (n° 23, Oss. 1ª, 2ª)(*), e ricordando che due piani tangenti distinti di F s'incontrano sempre in un punto di V_4^3, e che per un punto P di V_4^3 passano due piani tangenti distinti, che vengono a coincidere quando P va su F]. Ne deriva che *non esiste alcuna varietà W, che rappresenti birazionalmente senza eccezione le coppie (non ordinate) dei punti di un piano (proiettivo), e che sia priva di punti multipli*.

Questo risultato è implicito nel fatto che ogni varietà algebrica a tre dimensioni contenuta nella V_4^3, è intersezione completa di V_4^3 con una forma di S_5(**). In-

(*) Corrispondenza che, se F è *reale* può supporsi reale, cioè trasformante punti complesso-coniugati del piano in punti complesso-coniugati di F, e quindi punti reali in punti reali. Basta pensare al modo come una tal corrispondenza si costruisce (n° 14. Oss. 1ª).

(**) Cfr. *Bordiga*, loc. cit. alle pag. 70, 72. Ved. in particolare il n° 14 della Memoria del *Bordiga*.

vero, alle sezioni iperpiane di una W (algebrica), che rappresenti birazionalmente, senza eccezione, le coppie di punti del piano, e quindi i punti di V_4^3, corrisponde su V_4^3 un sistema lineare, senza punti base, di varietà a tre dimensioni, le quali dovranno esser segate su V_4^3 da un sistema lineare di forme, di un certo ordine l, dello spazio S_5. Il grado di quel sistema è $3l^4$. Quattro forme variabili del sistema segante, che passino per un punto P di F, segano V_4^3, fuori di P, in $3l^4-2$ punti variabili. Onde al punto P di V_4^3 corrisponde su W un punto P', che è pure doppio.

La ragione intima del fatto stabilito, che pure ha del paradossale(*), risiede nelle proprietà infinitesimali dell'intorno di una coppia di punti coincidenti del piano, entro la varietà delle coppie di punti di questo: come potrà vedersi nel lavoro che B. Segre dedicherà all'argomento, dopo avere altre volte(**) sfiorato l'esempio accennato nel N° 47. In sostanza, per l'intorno di 1° ordine di un punto di una varietà, c'è un ordine invariantivo relativo, analogo all'ordine invariantivo di una varietà algebrica, introdotto dal Severi.

Nel caso speciale, il detto intorno ha l'ordine invariantivo 2(***)

(*) Sul lato paradossale della cosa, che non lascia a priori tranquilli, aveva portato la sua attenzione anche il Comessatti, il quale nel dicembre 1928 ne aveva scritto al Prof. Severi.

(**) Revista mat. hispano-americana, 1928, pag. 137.

(***) Basta considerare la riemanniana di un cono irriducibile (quadrico o di ordine qualunque) di una dimensione qualsiasi, per veri-

La proprietà si estende. Un modello che rappresenti birazionalmente, senza eccezioni, la varietà delle coppie (non ordinate) dei punti di una superficie algebrica, priva di punti multipli, ha necessariamente una superficie multipla. Infatti un punto della superficie, essendo semplice, ha il proprio intorno (complesso) che può porsi in corrispondenza biunivoca continua coll'intorno di un punto del piano; e quindi l'intorno di una coppia di punti coincidenti della superficie (nella varietà delle coppie di punti della medesima), può porsi in corrispondenza biunivoca continua coll'intorno di una coppia di punti coincidenti del piano (nella varietà delle coppie di punti dello stesso), e l'intorno di 1° ordine dei due elementi (sulle varietà stesse), ha perciò il medesimo ordine invariantivo 2.

Le estensioni alle varietà delle coppie (non ordinate) dei punti di un S_r ($r > 2$), e delle coppie (non ordinate) dei punti di una varietà algebrica irriducibile ad r dimensioni, sono immediate. Soltanto l'ordine invariantivo dell'intorno analogo cresce ancora.

Dal punto di vista topologico occorre in primo luogo osservare, che la cellula E_2 comune alle due cellule E_4, a cui si riduce l'intorno di un punto P di F sulla parte reale della V_4^3, è interna ad ambedue le E_4. Invero, il vertice del cono quadrico reale irriducibile, sezione del cono quadrico tangente a V_4^3 in

ficare ch'essa, nel punto imagine del vertice, non è omogenea, e quindi l'intorno del vertice non può mai esser omeomorfo all'intorno di un punto semplice, che è omogeneo (ved. il N° 53).

un punto qualunque di F, con un S_3 passante pel punto stesso, è interno alle due cellule costituenti l'intorno di quel punto sul detto cono.

Ne deriva che, se ci si limita a considerare la parte della V_4^3, che rappresenta le coppie di punti reali del piano, cioè l'insieme dei punti di F e dei punti ad F esterni, si ottiene in S_5 una V_4 reale chiusa perfettamente omogenea, in quanto ogni punto di V_4 (compresi i punti di F) è interno ad una e ad una sola cellula E_4, formata da punti della varietà. Dunque una varietà reale, che rappresenti biunivocamente senza eccezione le coppie (non ordinate) di punti reali del piano, è chiusa(*) e dovunque omogenea.

Conclusione questa, che contrasta in modo curioso con quella che concerne la varietà rappresentativa delle coppie (non ordinate) dei punti reali di una retta, la quale è topologicamente equivalente alla parte di un piano (proiettivo) esterna ad una conica, coll'aggiunta dei punti di questa: varietà che è dunque aperta, avendo per contorno i punti della conica!

La conclusione si trasporta immutata, alla varietà rappresentativa delle coppie (non ordinate) dei punti reali di una superficie reale senza punti multipli, per la cagione analoga (mutatis mutandis) a quella addotta sopra, occupandoci del punto di vista algebrico. E si trasporta altresì alle varietà su-

(*) È superfluo ricordare ancora una volta, che le varietà noi le consideriamo di solito (salvo avviso contrario) negli spazi proiettivi, riguardando i punti all'infinito come punti al finito (cfr. colla pag. 88).

periori.

49.- Nei N.ri 47, 48 abbiamo addotto esempi di varietà M_n, la cui connessione può rompersi mediante tagli(*) a un numero di dimensioni $< n-1$; ma son sempre esempi di varietà non omogenee. Nel fatto si può dimostrare che:

Una M_n (irriducibile) omogenea, non può esser divisa in due parti da una M_k, con $k < n-1$; in due parti tali che non si possa passare con continuità dall'una all'altra senza traversare M_k(**).

La dimostrazione si consegue appoggiandosi alle proprietà seguenti, delle quali ci occuperemo poi:

a) Una linea tracciata su M_n, non può avere in comune con M_k che un numero finito di punti e di cellule (unidimensionali).

b) Entro uno spazio lineare S_n, una M_k è tagliata da un S_{n-k} generico, variabile in un sistema lineare ∞^k, in un gruppo di un numero finito di punti variabili.

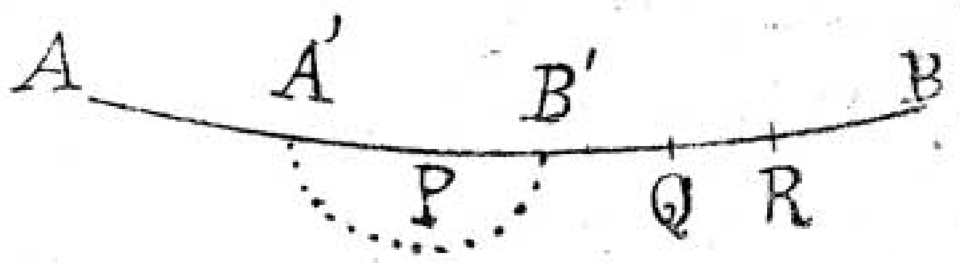
Ammesse queste proprietà, supponiamo che dalla M_k $(k < n-1)$ la M_n possa esser divisa in due parti.

Osserviamo in primo luogo che esiste certamente qualche punto P di M_k tale che in ogni intorno abbastanza piccolo di P, entro M_n, esistono punti di ciascuna

(*) Operare un taglio sopra una varietà, lungo una varietà subordinata, val quanto escludere i punti di questa dalla prima.

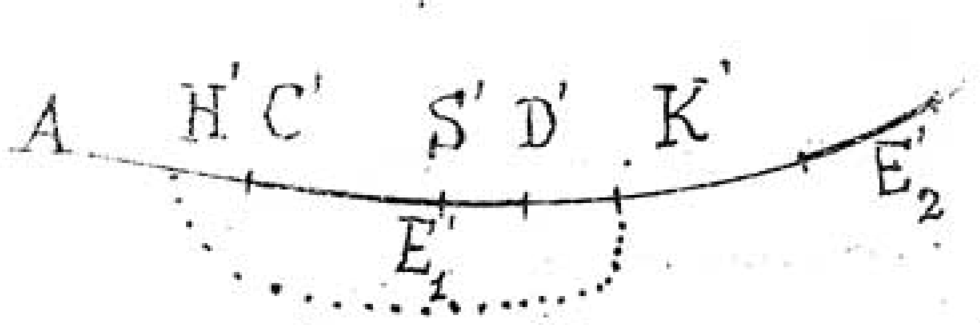
(**) Dimostrazione tratta da una Nota di prossima pubblicazione del Prof. Severi (dicembre 1928).

delle due parti in cui M_k divide M_n. Si ammetta invero l'opposto, cioè si ammetta che per ogni punto di P di M_k sia possibile determinare, entro M_n, un intorno abbastanza piccolo, che, oltre a punti di M_k, contenga punti di una sola delle due parti in cui M_k divide M_n. Presi allora due punti qualunque A, B di M_n, fuori di M_k, s'essi son congiunti da una linea M_1 di M_n incontrante M_k nei punti $P, Q, R, \dots$ (in numero finito), ed eventualmente in talune cellule $E'_1, E''_1, \dots$ (in numero finito), si può sostituire ad M_1 un'altra linea, di estremi A, B, contenuta in M_n e non incontrante



affatto M_k, colla costruzione seguente: Si determini un intorno di P, il quale non contenga che punti di una delle due parti di M_n; e sieno A', B' due di questi punti, da bande opposte di P, sulla linea M_1. Si può tracciare una linea (tratteggiata in figura), congiungente A' con B', senza incontrare M_k. All'arco $A'B'$ di M_1 si sostituirà questa linea. E similmente si farà attorno ai punti $Q, R, \dots$.

Quanto alla cellula E'_1, di cui sieno C', D' gli estremi, o gl'intorni abbastanza piccoli di C', D' son costituiti da punti di una medesima delle due parti di M_n, e allora due punti H', K' di M_1, esterni ad E'_1 e abbastanza prossimi, rispettivamente a C', D', sono esterni



alle cellule $E'_2, \dots$ e appartengono ad una medesima parte di M_n, onde è possibile di congiungerli con una linea di M_k (tratteggiata in figura), non incontrante M_k, che si sostituirà all'arco $H'K'$

di M_1; oppure gl'intorni di C', D' appartengono a parti diverse di M_n. In quest'ultimo caso i punti di E'_1 che seguono C' nel verso da C' a D' appartengono alla medesima parte di M_n, alla quale appartiene l'intorno di C', hanno, in E'_1, un estremo superiore S', ed è chiaro che in un intorno comunque piccolo di S' esistono punti di ciascuna delle due parti di M_n, contrariamente all'ipotesi fatta; dunque il secondo caso non può presentarsi. E similmente si può procedere per le cellule rimanenti $E'_2, \dots$. La conclusione è che due punti qualunque A, B di M_n, non appartenenti ad M_k, posson essere congiunti da una linea non incontrante M_k; il che contraddice all'ipotesi fatta, che M_n sia divisa in due parti da M_k.

Esiste dunque, come si è detto in principio, qualche punto P di M_k, tale che in ogni intorno abbastanza piccolo di esso trovansi punti di ciascuna delle due parti di M_k.

Si tenga ora conto dell'omogeneità di M_n. Un intorno abbastanza piccolo di P, è una cellula E_n a cui P è interno. Dunque questa cellula è divisa in due parti, dalle cellule (una o più) in cui M_k è segata dalla cellula ipersferica dello spazio ambiente, che stacca E_n sopra M_n. Ora questa conclusione è pur essa assurda.

Per dimostrarlo, ragioniamo come se E_n fosse una cellula ipersferica di S_n: ipotesi lecita, a causa dell'omeomorfismo tra E_n ed una cellula siffatta. Presi due punti A, B, appartenenti a parti diverse delle due in cui M_k divide E_n, un S_{nk} generico per AB, il quale sia suscettibile di variare in un sistema lineare ∞^k (il cui S_{n-k-1} base può esser individuato, oltre che da A,B, da altri $n-k-2$ punti generici di S_n), sega M_k in un numero finito di punti variabili; ed E_n in una cellula ipersferica E_{n-k} dell'ambiente S_{n-k} $(n-k \geq 2)$. Si può pertanto tracciare entro E_{n-k} una linea congiungente A con B, la quale eviti il gruppo delle intersezioni di M_k collo spazio ambiente, le quali o cadono sulla retta AB (e posson essere ivi anche infinite) o cadono fuori di AB e sono in numero finito. Si contraddice così alla proprietà ammessa, che dunque è assurda. Restano da stabilire le proprietà a), b). Ci limiteremo a dimostrarle nel caso di varietà analitiche. È quello che basta per la maggior parte delle applicazioni topologiche all'analisi.

50. – La proprietà a) non è che un caso particolare del seguente teorema generale.

Gli eventuali punti comuni a due o più varietà analitiche (ciascuna delle quali consti di un numero finito di cellule analitiche; ved: il n° 30 e il successivo n° 52), si distribuiscono in un numero finito di varietà analitiche (di dimensioni non necessariamente uguali). In particolare le date varietà non posson avere in comune che un numero finito di punti, fuori delle varietà analitiche di dimensione >0 ov'esse si intersecano (*).

(*) È molto probabile che il teorema sia vero sostituendo alle varietà analitiche varietà topologiche (costituite da un numero finito di cellule), le quali godano di proprietà infinitesimali

Invero, poichè una falda analitica, quando la si limiti opportunamente, non è che l'insieme dei punti di una cellula analitica (*), per ogni punto ad esse comune le date varietà passano con un numero finito di falde analitiche. Il teorema vale per l'intersezione di due falde aventi la stessa origine (**), e quindi è vero per le varietà date.

La dimostrazione del teorema consegue da due proprietà essenziali: una è il teorema di esistenza delle funzioni implicite nel campo analitico; e l'altra è il fatto elementare che una funzione olomorfa di una variabile t, che si annulli per $t=t_0$, non si annulla altrove in un intorno abbastanza piccolo di t (***).

---

molto generali (cfr. col n° 51). Il teorema enunciato vale altresì per varietà analitiche nel campo complesso.

(*) Ad evitare singolarità apparenti, di mero carattere parametrico, sarà opportuno di aggiungere, alla definizione di falda, contenuta nelle Vorlesungen über algebraische Geometrie di F. Severi (pag. 309 e segg.), [insieme dei punti di uno spazio lineare, le cui coordinate non omogenee son funzioni di k parametri $t_1, \dots, t_k$, olomorfe in un certo intorno di $(t_1^{(0)}, \dots, t_k^{(0)})$], la condizione che un punto della falda provenga da un sol gruppo di valori dei parametri.

(**) Ved. le citate Vorlesungen del prof. Severi pag. 313. Ivi si parla di falde analitiche nel campo complesso, ma le stesse considerazioni valgono nel campo reale.

(***) Se infatti la serie di potenze $f(t)$, convergente in un intorno di

Per es. per due linee analitiche, il risultato ch'esse non posson avere in comune che un numero finito di punti o di archi analitici (*), può ottenersi semplicemente così:

Con una successione di trasformazioni quadratiche dello spazio, si posson anzitutto ridurre le due linee (aventi soltanto singolarità algebroidi), a linee prive di punti multipli in un conveniente spazio. Sia dunque P un punto comune a due linee analitiche α, β, e semplice per entrambe. Se le due linee son distinte nell'intorno di P, è facile vedere ch'esse non s'incontrano nel detto intorno, fuori di P. Invero, essendo P semplice per α, β, si può fissare un fascio d'iperpiani dell'ambiente, tale che gl'iperpiani prossimi a P taglino α, β in un sol punto vicino a P. Preso allora come parametro t, quello che individua la posizione dell'iperpiano nel fascio, nell'intorno di P le coordinate del punto variabile sopra ciascuna delle α, β, saranno serie di potenze di t, aventi un intervallo di convergenza comune.

---

t_0, annullasi per $t = t_0$, essa può scriversi sotto la forma $f(t) = (t-t_0)^r \varphi(t)$, ove r è un conveniente intero positivo, e $\varphi(t)$ è una serie di potenze non nulla per $t = t_0$. Attesa la continuità di $\varphi(t)$ in t_0, si può restringere l'intorno di t_0, in guisa che in esso sia sempre $\varphi(t) \neq 0$. E allora ne segue l'asserto.

(*) La definizione implica che si tratti di linee analitiche limitate, o che si possan considerare come limitate nello spazio proiettivo. E inoltre ch'esse sieno insiemi completi di punti, e abbian soltanto singolarità algebroidi.

Per $t = t_0$ (valore di t che dà P), due di queste serie, che rappresentano la medesima coordinata, per es. x, assumono lo stesso valore, onde la loro differenza è nulla per $t = t_0$.

Ma in un intorno abbastanza piccolo di t_0 tale differenza non si annulla più, e da ciò la conclusione.

Osservazione 1ª. - L'essenziale, nel ragionamento precedente, non è l'ipotesi che le due linee α, β constino di un numero finito di cellule analitiche, ma ch'esse sieu limitate (quest'ipotesi basta ammetterla per una α di esse); che ogni loro punto sia semplice (o ridotto ad esser semplice) ed origine di un ramo analitico; e che le due curve sieu prive di punti asintotici (cioè che sieno insiemi completi). Da queste ipotesi scende invero che, se le due curve (ridotte a non aver che punti semplici) posseggono infinite intersezioni, queste hanno almeno un punto limite P (cfr. col. n° 51), appartenente sia ad α che a β. Pertanto a P si può applicare il ragionamento precedente, e si conclude che nell'intorno di P le due curve non sono distinte. Cioè P fa parte di un arco comune ad α, β.

Se due linee non posson avere in comune un insieme discreto infinito di archi, perchè, considerando questo insieme ordinato sopra α (in un verso della curva), esisterebbe su α almeno un punto limite P (per es. l'estremo superiore degli estremi destri dei predetti archi), in ogni intorno abbastanza piccolo del quale si troverebbero punti degli archi parziali, e punti di α ad essi esterni. E si ricadrebbe nel caso precedentemente discusso.

Osservazione 2ª. — In verità, le ipotesi fatte nella Osservazione 1ª sono soltanto in apparenza più ampie delle precedenti (cfr. col. n° 52).

51. — La proprietà b) consegue ovviamente dall'analiticità. Se, invero, una M_k analitica di S_n fosse incontrata da un S_{n-k}, variabile in un sistema lineare ∞^k, secondo una linea variabile, l'intorno di un generico punto di M_k (mediante il sistema di queste ∞^k linee, ed il fascio di varietà sezioni di M_k cogl'iperpiani di un fascio generico, passanti pei punti di M_k), potrebbe porsi in corrispondenza biunivoca continua coi gruppi di valori di $K+1$ numeri, contrariamente all'ipotesi che la varietà sia di dimensione k. A maggior ragione M_k non potrà esser segata dallo S_{n-k} variabile, in una varietà di dimensione >1; dunque essa è incontrata dal generico S_{n-k} in un gruppo di un numero finito (n° 50) di punti.

Osservazione 1ª. — La proprietà b) vale certamente per varietà topologiche più generali delle varietà analitiche [cfr. colla nota (*) a piè della pag. 138]. Per es. per $n=2$, $k=1$ sussiste il teorema:

Una curva piana limitata (aperta o chiusa), di cui ogni punto sia semplice, con curvatura determinata (anche nulla o infinita), ma che non presenti infiniti flessi nè punti asintotici, è segata in un numero finito di punti da ogni retta del piano, e da ogni punto esce un numero finito delle sue tangenti.

La condizione che in ogni punto della data curva C vi sia una curvatura determinata, unita all'altra che non esistano infiniti flessi, e quindi che in un intorno abbastanza piccolo di un flesso (ove la curvatura sia nulla o infinita), la curvatura non divenga ulteriormente nulla o infinita, basta ad assicurare che l'intersezione delle tangenti alla curva in due punti P_0, P, ha per limite, quando P tende a P_0 sulla curva (epperò la tangente in P varia con continuità), il punto stesso P_0. La condizione che non esistano punti asintotici di C, assicura che la curva sia un insieme completo di punti.

Suppongasi, se è possibile, che esista una retta $\underline{a}$ segante la curva in infiniti punti (ma non avente un segmento comune con C, chè altrimenti su C esisterebbero infiniti flessi). L'insieme delle intersezioni di $\underline{a}$ con C, essendo contenuto entro una superficie finita (per es. un quadrato), ammette almeno un punto limite P, che appartiene a C e ad $\underline{a}$ (insiemi completi di punti). Ed è chiaro che $\underline{a}$ tocca C in P. Assumansi due assi cartesiani ortogonali x, y, di cui x parallelo ad $\underline{a}$. Allora, nell'intorno di P, che abbia le coordinate x_0, y_0, la C è segata da ogni parallela all'asse y in un sol punto prossimo a P (*), e pertanto in detto intorno C

(*) Ved. ad es. F. Severi, Lezioni di Analisi infinitesimale (Roma, Lit. Genio Civile, III ed. 1928) n° 60.

sarà rappresentata da un'equazione $y = f(x)$, con f funzione univoca, possedente derivate prima e seconda (la seconda eventualmente anche infinita in qualche punto dell'intorno di x_0). Poichè ora ogni intorno di x_0 trovansi infiniti punti ove $f(x)$ assume il valore y_0, pel teorema di Rolle, nel detto intorno si annullerà infinite volte anche $f'(x)$, e quindi $f''(x)$ (posto che in x_0 e nell'intorno medesimo la $f''(x)$ non divenga mai infinita). Ma ciò contraddice all'ipotesi fatta sulla curvatura. Se poi in x_0 la $f''(x)$ diventa infinita, in un intorno abbastanza piccolo di x_0 essa non diverrà infinita (fuori di x_0), epperò per ogni intervallo chiuso, che non contenga x_0 e che appartenga al detto intorno, potrà applicarsi il teorema di Rolle alla $f'(x)$. Da ciò segue che $f'(x)$ non può annullarsi infinite volte nell'intorno di x_0, perchè lo stesso accadrebbe di $f''(x)$. Pertanto l'ipotesi che a seghi C in infiniti punti è assurda.

Supponiamo ora che per un punto O passino infinite tangenti di C. I loro infiniti punti di contatto hanno su C almeno un punto limite Q; ed è facile concludere che la tangente t in Q, passa essa pure per O. Invero, se così non fosse, t formerebbe con una tangente uscente da O, il cui punto di contatto varii su C (in un insieme eventualmente discontinuo di punti) avvicinandosi a Q, un angolo avente un limite non nullo, epperò la tangente a C varierebbe in modo discontinuo nell'intorno di Q, contrariamente all'ipotesi fatta dell'esistenza della curvatura. Ma se O giace sopra t, siccome le tangenti

passanti per O, che toccan C in punti vicini a Q, debbon incontrare t in punti prossimi a Q, il punto O deve coincidere con Q; ossia O sta sopra C. Riferita ancora la C a due assi generici x, y, e dettane $y=f(x)$ l'equazione, (x_0, y_0) le coordinate di O, poichè nell'intorno di O vi sono infiniti punti le cui tangenti passano per O la funzione $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ assumerà il valore $f'(x)$ in corrispondenza a ciascuno di quei punti. Siccome inoltre essa assume il valore $f'(u)$ in almeno un punto u interno all'intervallo $x - x_0$, la $f''(x)$, se è finita nell'intorno considerato, si annullerà fra x ed u. Epperò $f''(x)$ si annullerà infinite volte nel detto intorno. E di nuovo l'assurdo. Se $f''(x)$ è infinita per $x = x_0$, si ragionerà come sopra, e si arriverà lo stesso a concludere che $f''(x)$ si annulla infinite volte nell'intorno di x_0. Pertanto l'ipotesi che per O passino infinite tangenti è pur essa assurda.

Osservazione 2ª. – Le curve che soddisfano alle ipotesi del teorema stabilito nell'Osservazione 1ª sono in sostanza <u>tutte le curve</u> (<u>non intrecciate</u>), <u>corrispondenti alla nozione intuitiva di curva</u>. Perchè nel fatto, quando parliamo di linea, nel senso familiare ad ognuno, pensiamo in ogni punto una tangente ed una curvatura, nè possiamo concepire plasticamente (ma soltanto astrattamente ed in modo genetico!) una curva (non rettilinea) che si fletta infinite volte o che possegga punti asintotici. Il teorema dell'Osservazione 1ª, garantisce dunque la possibilità di applicare ad ogni curva "intuitiva„ le considerazioni che dallo Staudt e dal Möbius in poi sono state fatte sulle linee piane segate in un numero finito di punti da rette del piano, o che hanno un numero finito di tangenti uscenti da un punto qualunque (linee chiamate rami o circuiti o cammini; ecc.), e che sarebbe meglio di chiamare addirittura, come noi faremo, curve intuitive. Per tali curve si presenta naturale la considerazione dell'ordine (Scott, Juel), come massimo numero di punti comuni alla curva e a una retta del piano [e la sig.ª Scott considera anche l'indice, che è il minimo numero di punti comuni alla curva e a una retta del piano (proiettivo)], e della classe, come massimo numero di tangenti uscenti da un punto del piano. Le ovali (o linee convesse), son caratterizzate dal valore 2 dell'ordine o della classe. A proposito di relazioni in certa misura analoghe a quelle di Klein per le curve intuitive algebriche, occorre ricordare Kneser, Czuber, Meder, Juel, Minkowski; Field, Nagy, Mohrmann; ecc.

Osservazione 3ª. - Il teorema dell'Osservazione 1ª, è valido anche per una curva possedente un insieme finito di punti multipli, origini di un numero finito di rami (reali), cioè punti tali che l'intorno di ognuno di essi si scinda in un numero finito di archi di curva soddisfacenti alle ipotesi del teorema medesimo. Evidentemente una curva siffatta, dai suoi punti multipli, vien complessivamente divisa in un numero finito di curve soddisfacenti al teorema: d'onde la conclusione. È superfluo avvertire che due o più rami uscenti da un punto multiplo, posson anche essere tangenti (com'è per es. il caso dei due rami di una cuspide).

52. - Sarà anche bene di avvertire, trattando del soggetto delle varietà omogenee, che l'omogeneità di un insieme completo di punti di S_r, che sia limitato (cioè rinchiudibile entro un'ipersfera), basta ad assicurare che l'insieme stesso è una varietà topologica, costruibile con un numero finito di cellule, non aventi punti interni comuni. Vale insomma il teorema:

Se in uno spazio lineare S_r si ha un insieme completo e limitato I di punti, il quale goda della proprietà che i punti di I abbastanza vicini ad un suo punto qualunque P riempiono una cellula n-dimensionale E_n a cui P è interno, l'insieme dato è una varietà topologica chiusa e omogenea M_n, costruibile con un numero finito di cellule, tali che due qualunque di esse hanno al più in comune punti situati sui contorni di entrambe.

Questa è una conseguenza del teorema di Pincherle-Borel cui accennammo a pag. 90; e precisamente di quell'estensione del teorema medesimo, che è stata data con grande semplicità, e sotto la forma più generale, dal Bagnera (Rend. di Palermo, 1909). Invero, dall'ipotesi segue, in forza del ricordato teorema, che si può trovare un numero finito di cellule E_n, formate da punti di I, tale che ogni punto di I sia interno ad una almeno di esse. Queste cellule posson però in parte ricoprirsi a due a due. Dalla supposta omogeneità dell'insieme I discende che, se un punto P è interno a due delle predette cellule, queste hanno in comune tutto un intorno n-dimensionale di P (costituente una cellula E_n appartenente a quelle due); che, se un punto P del contorno di due di quelle cellule è interno ad un'altra, questa contiene tutto un intorno n-dimensionale di P nella prima (intorno che è una cellula E_n, contenente P al contorno); che infine, se un punto P è comune ai contorni di due di quelle cellule, e se queste (sieno E'_n, E''_n) si attraversano in P, le cellule (n-1)-dimensionali formanti gl'intorni di P su tali contorni si segano secondo una varietà ad n-2 dimensioni (*).

Da tutto questo non è difficile dedurre (ma non c'indugiamo nella dimostrazione dettagliata), che due qualunque cellule n-dimensionali del gruppo di un numero finito di cellule, che già abbiamo ottenuto entro I, si segano in tal guisa che, astraendo nell'una dai punti interni all'altra, rimangono in quella un numero finito di cellule n-dimensionali prive a due a due di punti interni comuni. Pertanto da quel numero finito di cellule, che eventualmente si ricoprono in parte, si trae un numero finito di cellule, n-dimensionali, che costituiscono tutto l'insieme I, e che sono a due a due prive di punti comuni, che non sieno dei rispettivi contorni.

(*) Ciò consegue dal teorema fondamentale del N° 49, perchè la cellula E'_{n-1}, costituente l'intorno di P sul contorno di E'_n è divisa in due parti dall'insieme dei punti del contorno di E''_n, che adesso appartengono.

Ciò vale in particolare (ved. pag. 90), quando la varietà che si considera ha ogni suo punto interno ad una cellula analitica E_n, formata da punti della varietà; ossia quando la varietà è analitica (omogenea e chiusa; in particolare algebrica).

Osservazione. — Anche a pag. 90 era sottinteso che trattavasi di una varietà chiusa, come la varietà non può non risultare, quando si ponga la condizione che ogni suo punto sia interno a una cellula E_n appartenente alla varietà. Più in generale si può considerar come analitica una varietà (anche aperta), formata da un numero finito di cellule analitiche a due a due prive di punti comuni, non situati simultaneamente sui rispettivi contorni.

53. — Dato un punto P di una M_n, una semiretta tangente t ad M_n in P, è [ved. pag. 107, nota (*)] una semiretta limite dell'insieme delle semirette che vanno da P ai punti dell'intorno di P in M_n (**). Retta tangente è l'insieme di due semirette tangenti opposte.

Corda impropria di M_n, uscente da P, è una retta limite dell'insieme delle rette congiungenti coppie di punti di M_n, situati nell'intorno di P. Se

(**) Ciò significa che, scelto comunque un angolo δ e un segmento ε, esistono in M_n punti distanti da P meno di ε, i quali son congiunti a P da semirette, distinte da t, e formanti con t angoli minori di δ.

[r]ette tangenti o, più generalmente, le rette che contengon [s]emirette tangenti, sono particolari corde improprie.

[I]l punto P di M_n dicesi semplice, se le corde improprie di M_n uscenti da P riempiono una stella in un determinato S_n, che dicesi lo spazio tangente ad M_n in P.

Qualora le corde improprie pel punto semplice P, sieno tutte e sole le rette tangenti ivi ad M_n, P è un punto interno (in senso proiettivo) alla varietà. Se invece le semirette tangenti in P riempiono soltanto una parte della stella di centro P, entro lo S_n tangente, il punto P è un punto semplice terminale o un punto contorno (in senso proiettivo). Vedremo nel n° 54 che punti interni e punti contorno, definiti così proiettivamente, son punti interni e punti contorno anche in senso topologico.

Un S_{r-n} generico, dello spazio ambiente S_r della data M_n, passante pel punto semplice P di M_n, non contiene alcuna corda impropria; onde un S_{r-n}, che sia prossimo a passare per P, in modo generico, incontra M_n, nell'intorno di P, in uno ed in un sol punto, se P è interno ad M_n, al più in un punto, se P è un punto-contorno.

Il concetto di punto semplice non è topologico, ma proiettivo (anzi metrico-proiettivo). Tuttavia ci sarà utile, in vista delle applicazioni alle riemanniane, di aver osservato che una varietà topologica M_n avente tutti i punti semplici (non terminali), è certo omogenea (ma non viceversa!). Invero, se l'intorno di un punto P, di una linea M_1 di S_r, si spezza

in due cellule distinte E_1', E_1'', aventi in comune il punto interno P (che dovrà esser interno alle due cellule, giacchè non può esser sul contorno di entrambe, altrimenti M_1 sarebbe omogenea in P, nè esser sul contorno di una sola, perchè ciò contrasterebbe colla definizione di varietà topologica), vi è un fascio di rette, di centro P, contenente le semirette tangenti (distinte o coincidenti) ad E_1', E_1'' in P, il quale consta di corde improprie di M_1(*). Epperò, oltre le tangenti a M_1 in P, vi sono altre corde improprie per P, che dunque non è semplice. A questo caso si riporta il caso generale di una M_n di S_r, non omogenea in P, segando con un generico S_{r-n+1}, passante per P.

La conclusione del resto, nel caso di una varietà analitica V_n, consegue senz'altro dal fatto che un punto semplice è origine di una sola falda, cioè è interno ad una sola cellula analitica E_n di V_n.

Ma una M_n può esser omogenea nell'intorno di un punto P, senza che questo sia semplice. Esempi vengono forniti da una curva avente una cuspide in P, ovvero da un punto di un lato o da un vertice della M_2 chiusa, costituita dalle facce di un tetraedro; ecc.. A proposito di ciò, è opportuno anche di osservare, in vista delle applicazioni ai punti multipli algebrici, che un punto multiplo di una varietà analitica complessa, può ben essere origine

(*) La cosa è stata osservata da B. Levi (Memorie di Torino, 1898), e si dimostra agevolmente proiettando sopra un piano (ved. per es. Bertini, Iperspazi, 2ª ed., pag. 247).

di una sola falda analitica complessa, e di due falde analitiche reali. Tale è per es. il caso di un punto doppio a cono tangente irriducibile reale.

54. - Possiamo ora precisare quel che accennammo nell'Osservazione di pag. 128, circa la definizione di un intorno di un punto sopra una varietà, e mostrare più in generale che:

<u>Le definizioni proiettive (o metrico-proiettive) di un intorno di un punto sopra una varietà topologica, e di contorno della varietà stessa, determinano, sotto ipotesi molto larghe, concetti identici a quelli di intorno e di contorno in senso topologico.</u>

Occorre qualche premessa.

a) Definiamo anzitutto come un <u>estremo intuitivo</u> (o <u>punto terminale</u>) di una curva piana intuitiva C (nº 51, Osserv. 2ª) [sottintendiamo, fino ad avviso contrario, priva di punti multipli] un punto tale che, fra le rette (del piano di C) uscenti da esso, ve ne sono di quelle, non tangenti, che lasciano la curva tutta da una parte, nell'intorno del punto stesso.

La definizione si estende alle curve intuitive dello spazio o di un iperspazio. Un punto terminale di una C siffatta, in S_r, è un punto tale che esiste per esso qualche iperpiano <u>non tangente</u>, che lascia C tutta da una parte, nell'intorno del punto stesso. (Naturalmente ad una curva intuitiva di S_r attribuiamo le proprietà che estendono quella di una curva intuitiva piana: trattasi cioè di una curva coi punti tutti semplici, priva di punti asintotici, avente in ognuno de' suoi punti tangente, piano

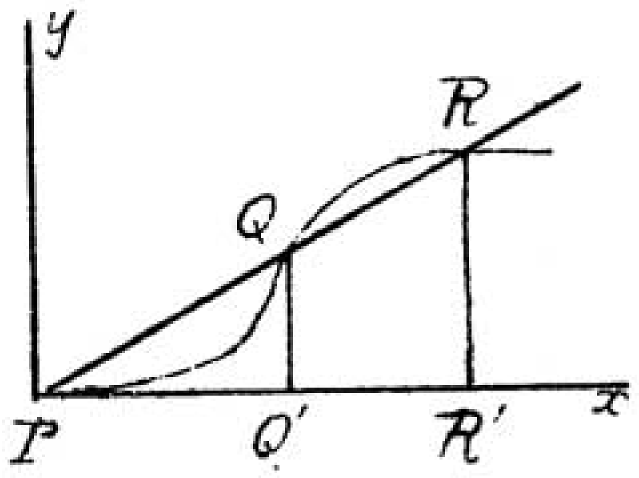
osculatore, ..., S_{r-1} osculatore e le relative curvature; e non possedente che un numero finito di S_k osculatori ($k = 1, 2, \ldots, r-1$) a contatto più che $(k+1)$-punto).

È chiaro che in un punto terminale, una curva intuitiva non può avere che una semiretta (non una retta) tangente. Viceversa, se in un punto P di una curva intuitiva C (piana, per semplicità) c'è una sola semiretta tangente t, poichè una retta $\underline{a}$ per P, non contenente tale semiretta, incontra la curva in un numero finito di punti, si può determinare un intorno così piccolo di P, che la parte di C contenuta in quest'intorno non incontri $\underline{a}$, fuori di P; dopo ciò, restringendo eventualmente l'intorno stesso, si può ottenere che non vi sieno punti di C dalla parte opposta di t rispetto ad $\underline{a}$, perchè altrimenti vi sarebbe una semiretta tangente, opposta a t. Dunque:

<u>Un estremo intuitivo o punto terminale d'una curva intuitiva C, può altresì definirsi come un punto nel quale la curva possiede una sola semiretta tangente.</u>

b) <u>Le semirette che congiungono un punto qualunque P (terminale o no) di una curva intuitiva e piana C, coi punti abbastanza vicini a P sulla curva, non incontrano questa ulteriormente, nell'intorno di P</u>

Determiniamo un intorno di P, che non contenga flessi della curva (all'infuori, eventualmente, di P), e che si proietti ortogonalmente in modo biunivoco (senza eccezione) sulla tangente x in P



Suppongasi che possa esistere una semiretta r per P, incontrante altrove l'intorno considerato nei punti Q, R. Detta $y = f(x)$ l'equazione dell'intorno medesimo, riferito alla tangente x in P e alla perpendicolare ivi ad x, la tangente a C nel punto corrispondente ad x variabile fra P e Q' (Q' proiezione ortogonale di Q), diverrà parallela ad r in corrispondenza almeno ad un valore x_1 di x fra P e Q' (teorema del valor medio); similmente, in corrispondenza ad un $x = x_2$ fra Q' ed R' (R' proiezione ortogonale di R). Pertanto $f'(x)$ assume lo stesso valore in due punti (almeno) distinti, x_1, x_2, compresi fra P ed R'. E poichè entro PR' la $f''(x)$ non è mai infinita (per l'ipotesi fatta che nell'intorno considerato non vi sieno flessi, diversi da P), essa dovrà annullarsi per $x = x_3$ compreso fra x_1, x_2. Vi sarà dunque in corrispondenza ad x_3 un flesso, contro il supposto.

L'ipotesi fatta è assurda; epperò ogni semiretta, proiettante da P i punti dell'intorno considerato, non contiene altri punti del medesimo.

Osservazione 1ª. – Il ragionamento è manifestamente applicabile anche se si riferisce alle rette (invece che alle semirette) uscenti da P, purchè P non sia un flesso.

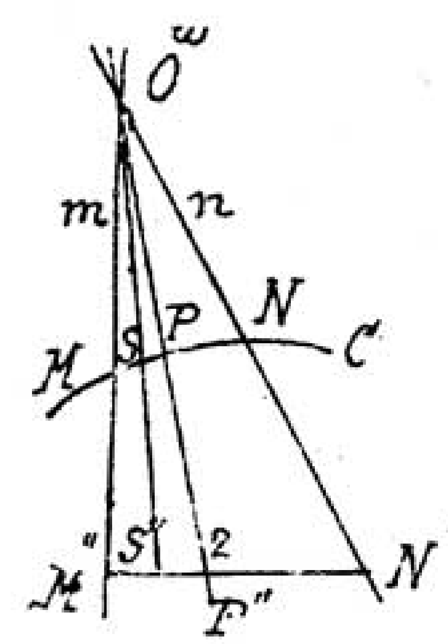
Osservazione 2ª. – Ne segue altresì che ogni ret-

ta (o S_{r-1} in S_r) uscente da un punto terminale P, lascia tutta da una banda la porzione di curva appartenente ad un intorno abbastanza piccolo di P; mentre ciò accade al più per la sola tangente (o per un generico S_{r-1} tangente), se il punto P non è terminale.

c) Gli estremi topologici di una curva intuitiva (aperta) C (definiti mediante un qualunque omeomorfismo fra C e un qualunque segmento $A'B'$; nº 32), coincidon coi punti terminali di C.

Riferiamoci ad una curva piana.

Basterà provare che ad un punto P di C, diverso dai punti terminali, corrisponde, mediante l'omeomorfismo tra C ed $A'B'$, un punto P' interno ad $A'B'$. Essendo P non terminale, possiamo considerare una retta r per P, tale che, in un intorno comunque piccolo di P, si trovino punti della curva da una parte e dall'altra di r.



Assunto su r un punto O, diverso da P, restringendo opportunamente l'angolo mn di vertice O, che contiene r nel suo interno, si può ottenere che le rette di questo angolo taglino C in un sol punto nell'intorno di P. Pertanto l'intorno predetto proiettasi omeorficamente da O, sopra una retta generica, secondo un segmento $M''N''$, che contiene internamente la proiezione P'' di P.

Ne risulta un omeomorfismo tra il segmento $M''N''$ e l'insieme I' dei punti del segmento $A'B'$, che corrispondono, mediante ω, all'intorno considerato di P. E poichè il punto S', variabile in I', è funzione continua invertibile del punto S'' variabile in $M''N''$, così I' è un segmento, contenuto in $A'B'$, i cui estremi sono i punti M', N' omologhi di M'', N''. Al punto P'' interno ad $M''N''$, corrisponde dunque il punto P' interno ad $M'N'$, epperò ad $A'B'$.

Osservazione 1ª. — Ne segue che i versi intuitivi sopra C coincidono coi versi topologici (definiti mediante un qualunque omeomorfismo come ω). Per versi intuitivi, s'intendono ovviamente gli ordinamenti in cui ogni punto non terminale di una curva intuitiva, si considera compreso fra due punti terminali. Infatti, siano A, B i due punti terminali di C, e assumiamo come primo A e come ultimo B. Presi su C due punti M, N non terminali, ad N corrisponderà mediante ω un punto N' interno ad $A'B'$, e se M' appartiene al segmento $A'N'$, cosicchè $M'N'$ si succedano sul segmento $A'B'$ nel verso $A'B'$, anche M apparterrà alla curva intuitiva, parte di C, che ha per punti terminali A, N; ecc..

Si può dunque parlare di archi sopra una curva archi orientati, e il loro significato topologico coincide col loro significato intuitivo.

La lunghezza di C (la quale, nelle ipotesi fatte, è rettificabile) risulta l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, che hanno gli estremi nei punti terminali di C, e per vertici punti che si succedono in un verso intuitivo; ecc. ecc.

Risulta altresì che ogni arco della curva intuitiva C è una cellula unidimensionale

d) Un punto terminale di una curva intuitiva C, può altresì definirsi (in modo metrico-proiettivo) come un punto tale che una cellula ipersferica abbastanza piccola E_r dell'ambiente S_r di C, ha in comune con C una (sola) cellula E_1, di cui P è un'estremo.

Invero, a norma di b), si può scegliere su C un punto Q tanto prossimo a P, che la distanza PM sia funzione (continua) invertibile del punto M variabile sull'arco PQ. Allora l'arco PQ è contenuto nell'ipersfera di centro P e di raggio PQ, ogni punto interno all'arco essendo interno all'ipersfera.

e) Per una cellula ipersferica E_n di S_r $(n \leq r)$, un punto P del contorno (pag. 86) può pure definirsi come un punto nel quale esiste qualche semiretta tangente ad E_n, la cui opposta non è tangente alla cellula stessa (cfr. col. nº 33). Per una cellula E'_n qualsiasi (insieme omeomorfo ad E_n), un punto-contorno è topologicamente definito come l'omologo di un punto-contorno di E_n (nº 36). Orbene, è facile vedere che quando P' è semplice per E'_n, esso è un punto-contorno nel senso topologico, allora e solo allora che lo è in senso metrico-proiettivo (cioè quando esiste qualche semiretta di origine P', nello spazio S_d a cui E'_n appartiene, che è tangente ad E'_n, senza che lo sia la sua semiretta opposta). Supporremo che l'omeomorfismo tra E_n ed E'_n, conservi le proprietà infinitesimali occorrenti perchè le successive considerazioni abbiano senso (proprietà a cui soddisfa certamente un omeomorfismo analitico). Allora alla varietà che ha per elementi le semirette tangenti ad E_n nel punto P omologo di P', corrisponde omeomorficamente la varietà che ha per elementi le semirette tangenti ad E'_n nel punto P'. E poichè, se P è interno ad E_n, la prima varietà è omeomorfica al contorno di E_n, cioè ad una varietà chiusa M_{n-1}; mentre, se P' è sul contorno metrico-proiettivo di E'_n, la seconda è una varietà aperta M'_{n-1} (omeomorfica ad una cellula ad $n-1$ dimensioni, qualora il punto P' sia semplice anche sul contorno di E'_n), così non può darsi che a P' corrisponda un punto P interno ad E_n(*).

Osservazione. — Il fatto che la semiretta opposta ad una tangente in un punto P di una varietà topologica M_n, non sia tangente ad M_n, può presentarsi anche se P non è un punto-contorno di M_n nel senso topologico; ma questo soltanto quando P non sia semplice per M_n: sia cioè singolare dal punto di vista proiettivo (o metrico-proiettivo). Così, per es., in una cuspide di una linea esiste una sola semiretta tangente; in un punto di uno spigolo di una superficie tetraedrica, le semirette tangenti formano due angoli piatti non opposti; ecc.. Punti siffatti si chiamano talvolta punti contorno di 2ª specie. Ma tale distinzione, non avendo carattere topologico, ha scarsa importanza ed è ormai quasi del tutto abbandonata.

(*) Argomentazione già usata a pag. 107.

f) Una cellula E_n di S_r ($n \le r$), è tagliata da una cellula ipersferica E_r abbastanza piccola dell'ambiente, che abbia il centro in un punto semplice P di E_n, secondo una cellula n-dimensionale, la quale contiene P nel contorno o all'interno, secondo che P è nel contorno o all'interno di E_n.

Per dimostrar ciò, occorre supporre di avere esteso ad una cellula E_n (soddisfacente ad opportune condizioni infinitesimali) il teorema b), ossia il fatto che ogni semiretta proiettante da P un punto di E_n, abbastanza vicino a P, non incontra altrove E_n nelle vicinanze di P, o ha in comune con E_n un segmento di origine P. Questo fatto si stabilisce senza difficoltà per le cellule analitiche. Se la condizione suddetta è soddisfatta per tutti i punti di E_n la cui distanza da P sia $\le \delta$, l'insieme dei punti di E_n appartenenti ad una cellula ipersferica E_r di centro P e raggio δ, costituisce allora una cellula n-dimensionale. Su tutto ciò non c'indugiamo, bastandoci di aver analizzato la cosa in modo completo per le linee, e trasportato le loro proprietà dal dominio intuitivo a quello logico; giacchè questo è sufficiente per dare la persuasione che un'analoga analisi, fatta accuratamente per le varietà a più dimensioni, fornirebbe dimostrazioni esaurienti dei fatti affermati.

g) I punti-contorno di una E_n dello S_n, possono altresì definirsi come punti, i quali son contemporaneamente limiti di punti di E_n e di punti di S_n non appartenenti ad E_n. Essi segnano cioè la fron tiera di E_n, nell'ambiente n-dimensionale in cui è immersa.

La cosa è ormai ovvia, in base alle proprietà precedenti.

Il contorno di una M_n topologica di S_n, risultante dall'insieme di un numero finito di cellule E_n che a due a due hanno al più in comune punti dei rispettivi contorni, si può definire in modo del tutto analogo.

55. - Il contorno di una M_n topologica aperta (di un S_r, $n \leq r$), consta di varietà ad $n-1$ (e non ad un minor numero) di dimensioni.

Questa proprietà risulta dal modo stesso di definire una M_n topologica irriducibile, quando la si concepisca come un poliedro generalizzato, costituito da poliedroidi elementari, formanti un insieme totalmente connesso (pagg. 87, 90, 92); chè allora il contorno di M_n è costituito dalle facce restate libere dei poliedri elementari generatori. Ma se la M_n si concepisce più generalmente (secondo quanto ormai abbiamo fatto più volte), come l'insieme dei punti di un numero finito di cellule n-dimensionali, le quali hanno a due a due in comune al più soltanto punti dei rispettivi contorni, la proprietà ha bisogno di esser dimostrata.

Sia per es. una M_n formata da due cellule E'_n, E''_n. Il contorno di M_n risulta dall'insieme I' dei punti che appartengono al contorno di E'_n, ma non a quello di E''_n; dall'insieme I'' dei punti del contorno di E''_n, non appartenenti al contorno di E'_n; e infine dall'in-

sieme K dei punti ognuno dei quali è comune ai due contorni ed è simultaneamente punto limite di punti appartenenti al solo contorno di E'_n ed al solo contorno di E''_n.

In verità basterebbe definire K come l'insieme dei punti ognuno dei quali è comune ai due contorni ed è punto limite di punti appartenenti ad uno solo dei due, perchè esso risulta in conseguenza limite di punti appartenenti soltanto all'altro. Invero, se un punto P, comune ai contorni di E'_n, E''_n, e che sia limite per l'insieme I', non fosse limite per I'', esso, sopra E_n, sarebbe limite soltanto di punti comuni ai due contorni; cioè la cellula E''_{n-1}, che costituisce l'intorno di P sul contorno di E''_n e che contiene P all'interno, sarebbe comune ai due contorni. Ma poichè l'intorno di P sul contorno di E'_n forma pure una sola cellula E'_{n-1}, alla quale P è interno, così questa cellula in un intorno (anche più ristretto, se occorre) di P, coincide con E''_{n-1}, epperò P non è limite di punti appartenenti al solo contorno di E'_n; contro il supposto.

Preso ora un punto O di M_n, che appartenga ad I', la sua distanza (pag. 121) da E''_n è un numero $\delta > 0$; onde l'intorno di O nel contorno di E'_n forma una cellula $(n-1)$-dimensionale, che appartiene tutta ad I'. Similmente per un punto che appartenga ad I''. Dunque il contorno di M_n è ad $n-1$ dimensioni. Il ragionamento si estende subito a una varietà formata da più cellule.