XVI. - La Topologia combinatoria

56. - Innanzi di procedere oltre, nello studio dell'Analysis situs del continuo, occorre fissare i più importanti concetti di *topologia combinatoria*. La reticolazione di una varietà topologica n-dimensionale, sostituisce alla varietà, per moltissime questioni, un insieme di un numero finito di cellule n-dimensionali, concepite ciascuna come poliedroidi, aventi vertici, lati, faccie, ...; cioè come insiemi di cellule di dimensioni $0, 1, 2, \ldots, n-1$. - E ogni tal reticolato è caratterizzato dal punto di vista della topologia del continuo, dal proprio schema (n° 39); ond'esso permette di sostituire entro certi limiti, allo studio del continuo, lo studio di un numero finito di elementi, che son legati da un certo gruppo di relazioni di *appartenenza*.

Le questioni che così si affacciano, nella topologia, sono indipendenti dalla natura degli elementi mediante cui è costituita la varietà e dalle loro stesse proprietà (in quanto insiemi continui); ma dipendono soltanto dalle accennate relazioni di appartenenza. Pertanto la risoluzione di tali questioni assume un carattere aritmetico-combinatorio ed esse possono riferirsi ad elementi di natura svariatissima, che col continuo non hanno nulla a che fare. - Allorchè i problemi topologici si considerano sotto quest'angolo visuale, si dice che si fa la "topologia combinatoria". A ciò abbiamo già accennato a pag. 112. -

Consideriamo ora di proposito questioni siffatte. -

Cominciamo con riflessioni semplici. - Un *ciclo unidimensionale* (*o lineare*), secondo la definizione del n° 31, è una varietà chiusa irriducibile, di cellule unidimensionali. Volendo limitarsi, come faremo d'ora in poi, a considerare cicli *lineari omogenei*, è chiaro che ogni vertice del ciclo non può che appartenere *a due* e *a due sole* cellule unidimensionali. Allora il ciclo può esser concepito (indipendentemente dalla sua imagine di linea continua) come un insieme astratto di un numero finito α_0 di elementi E_0 (vertici) di una prima specie, o di dimensione 0, e di un numero finito α_1 di elementi E_1 (lati) di una seconda specie o di dimensione 1, tra i quali è data (in un modo qualunque) una *relazione* di *appartenenza* o *di incidenza*, per guisa che, assegnati ad arbitrio due elementi della stessa specie, si sa distinguere quand'essi *coincidono* o non coincidono, l'un fatto escludendo l'altro; e dati due elementi di specie diversa, accada sempre uno dei due fatti: o essi si *appartengano* o essi *non si appartengano*, l'un fatto escludendo l'altro. Così per es. gli elementi E_1 possono essere α_1 *uomini*, gli elementi E_0 le loro *mani* ($\alpha_0 = 2\alpha_1$). La relazione di appartenenza è definita da ciò: che le mani di un uomo sono i due soli elementi E_0 che gli appartengono. Due uomini non coincidono, quando sono diversi; due mani non coincidono quando non sono strette l'una all'altra.

Le condizioni che, fra i possibili insiemi di α_0 elementi E_0 e α_1 elementi E_1, *definiscono* un ciclo (omogeneo, irriducibile) sono le seguenti:

1) Ogni elemento E_0 del dato insieme appartiene a due e a due soli elementi E_1 e ogni elemento E_1 appartiene a due e a due soli elementi E_0.

2) Non è possibile comporre con una parte degli elementi del dato insieme, un insieme subordinato di elementi E_0, E_1 soddisfacenti alla 1).

Gli elementi E_0 che appartengono ad un dato elemento E_1 si dice che ne formano il <u>contorno</u>.

Così se gli α_1 uomini si dispongono in circolo chiuso, con le mani di ciascuno strette ad una mano del precedente e ad una del seguente, son soddisfatte le 1), 2) e si ha un ciclo. Le condizioni che definiscono il ciclo acquistano in tal guisa un mero carattere combinatorio, che dà al concetto un'amplissima generalità. Facciamo un altro esempio. Le quattro faccie di un ottaedro regolare; che escono da un vertice, assumiamole come elementi E_0 ($\alpha_0 = 4$), prendendo come elementi E_1 gli spigoli dell'ottaedro uscenti dallo stesso vertice ($\alpha_1 = 4$). Definendo allora in modo ovvio la <u>coincidenza</u> e l'<u>incidenza</u>, è chiaro che gli elementi E_0, E_1 formano un ciclo unidimensionale.

57. - Possiamo considerare più in generale un insieme di α_0 elementi E_0, di dimensione 0, di α_1 elementi E_1, di dimensione 1, di α_2 elementi E_2 di dimensione 2, ..., di α_n elementi E_n di dimensione n; supporre fra essi note le relazioni di coincidenza e d'incidenza (lo schema di connessione o <u>schema</u>), e definire varietà, cicli ecc di tali elementi. Ma poichè ciò condurrebbe a formulazioni astratte, (inutili ai nostri scopi), e poichè d'altronde l'aspetto combinatorio balzerà fuori lo stesso anche se renderemo concreta la natura di quegli elementi, intenderemo che E_0 sieno punti (di uno spazio euclideo ad un numero sufficientemente alto di dimensioni), E_1 cellule unidimensionali, E_2 cellule bidimensionali, ecc., secondo le definizioni che già abbiamo dato di questi enti. Le relazioni di coincidenza e d'incidenza degli elementi delle varie dimensioni risultano ovviamente assegnate. E si può parlare di punti interni e di contorno delle cellule delle varie dimensioni (≥ 1). Il contorno di una E_1 è sempre costituito da due E_0; il contorno di una E_2 (insieme dei punti corrispondenti al contorno di un cerchio o di un triangolo, in un omeomorfismo tra E_1 ed un siffatto <u>modello</u> di cellula) è costituito da un ciclo unidimensionale di elementi E_0, E_1 (contenente dunque <u>almeno</u> 3 elementi E_0 e 3 elementi E_1); il contorno delle cellule di dimensione >2 (definito al solito mediante l'omeomorfismo con una cellula modello, che è una cellula ipersferica o un poliedro elementare) è pure costituito da cicli di elementi di dimensione inferiore, a norma delle seguenti definizioni, che hanno carattere ricorrente ed esclusivamente combinatorio:

a) Un <u>complesso ad n dimensioni</u> C_n risulta dall'associazione di un complesso ad $n-1$ dimensioni C_{n-1} (insieme di cellule di dimensione 0,1,2,..., $n-1$) e di un certo numero, α_n, di cellule E_n, ognuna delle quali ha per contorno un ciclo $(n-1)$-dimensionale appartenente a C_{n-1}, colle condizioni ulteriori che due cellule E_n non hanno mai punti interni comuni; che ogni cellula $(n-1)$-dimensionale di C_{n-1} appartiene al contorno di almeno una E_n di C_n; e infine che una qualunque delle α_n cellule E_n non ha alcun punto comune colle cellule (delle varie dimensioni) di C_{n-1}, all'infuori dei punti situati nelle cellule che stanno sul suo contorno.

Per $n=0$ un <u>complesso a zero dimensioni</u> C_0 è un gruppo di un numero finito di elementi E_0 (punti) distinti.

b) Un <u>ciclo</u> <u>n-dimensionale</u> $(n \geq 1)$ è un complesso C_n soddisfacente alle ulteriori condizioni che ogni sua cellula $(n-1)$-dimensionale appartiene ad un numero <u>pari</u> di cellule n-dimensionali di C_n e che non si può comporre, con una <u>parte</u> delle cellule di C_n, un insieme soddisfacente alla condizione precedente.

Per $n=0$ si è già definito un ciclo di dimensione 0 (pag. 91) come una coppia di punti distinti (contorno di una cellula unidimensionale).

Le definizioni a), b), implicano che si sappia che cosa sono complessi e cicli fino alla dimensione $n-1$.

Tutto dunque acquista senso preciso, quando si sa che cosa sono complessi e cicli a zero dimensioni.

Nel seguito, per brevità, si dirà <u>n-cellula</u>, <u>n-ciclo</u>, <u>n-complesso</u>, invece di cellula, ciclo, complesso ad n dimensioni. <u>Un ciclo ad 1 dimensione soddisfacente alla definizione b) - è necessariamente omogeneo</u>, cioè

ogni suo vertice appartiene a due e a due sole cellule del complesso C_1. Invero, presa una 1-cellula qualunque E_1^1 di C_1, e fissato un suo vertice E_0', questo appartiene ad almeno un'altra 1-cellula di C_1. Sia E_1^2 una di queste ed E_0^2 il suo ulteriore vertice; questo appartiene ad almeno un'altra 1-cellula E_1^3 e così via, finchè si arriva necessariamente ad una cellula E_1^ν, il cui ulteriore vertice E_0^ν coincide con un vertice delle 1-cellule precedenti. Tenendo conto della seconda delle condizioni che entrano nella b), si conclude subito che E_0^ν non può che coincidere col primo vertice E_0^0 di E_1^1 e che le cellule che si son prese in considerazione sono tutte quante le cellule di C_1.

Un complesso dicesi <u>connesso</u> quando non può decomporsi in due o più complessi n-dimensionali privi di <u>punti</u> comuni. È chiaro che il numero τ_0 dei complessi connessi in cui può decomporsi un dato C_n è un invariante topologico.

<u>L'insieme dei punti di un complesso C_n non è altra cosa, evidentemente, che una varietà topologica M_n, parzialmente o totalmente connessa (aperta o chiusa), nel senso che abbiamo già dato in precedenza a queste locuzioni.</u>

Resta ora specificato che (salvo contrario avviso) noi non consideriamo che varietà topologiche M_n definite da complessi C_n soddisfacenti alla a). Se il complesso C_n consta di τ_0 complessi connessi, M_n si scinde in τ_0 varietà connesse prive di punti comuni: varietà connesse parzialmente o totalmente.

La varietà M_n vien reticolata dal complesso C_n, sicchè il concetto di complesso coincide con quello di reticolato sopra una M_n. Se però una M_n è determinata da un C_n, quella non determina questo, in quanto la M_n può (come chiaramente risulterà in seguito) esser reticolata in infiniti modi diversi. È perciò che i due concetti di M_n e di C_n vanno tenuti distinti. Tuttavia, quando non vi sia ambiguità, riferendosi a cicli, noi useremo la stessa parola tanto pel C_n ciclo, come per la varietà dei suoi punti.

La definizione a) implica inoltre che si conosca già la possibilità che il contorno di una n-cellula possa reticolarsi (in modo a priori particolare) con un C_{n-1} soddisfacente alla b), cioè con un ciclo. In un secondo tempo converrà poi accertarsi che, comunque si reticoli il contorno di una n-cellula, il C_{n-1} che ne risulta è sempre un ciclo. Quando ciò sia assodato si potrà dunque dire che:

Il contorno di una n-cellula, concepito come varietà di punti, è sempre un ciclo [ossia ogni $(n-1)$-complesso che lo reticoli è un ciclo].

Ora il fatto che il contorno di una E_n possa reticolarsi in guisa che ne risulti un C_{n-1} ciclico, risulta per es. da ciò che quel contorno è omeomorfo al contorno di un poliedro elementare di S_n [ved. a tal proposito anche il successivo n° 67, a)], che è manifestamente un C_{n-1} soddisfacente alla b). Il fatto che, comunque si reticoli il contorno di E_n, il C_{n-1} che ne risulta è sempre ciclico, risulta da ciò che il contorno di una E_n (per es. di una cellula ipersferica o di

un poliedro elementare di S_n) è, come sappiamo, una varietà omogenea. E questo basta a concludere, in virtù del seguente teorema:

Se C_n è un complesso che reticoli una varietà omogenea M_n, ogni $(n-1)$-cellula di C_n è comune a due e a due sole n-cellule di C_n.

Consideriamo infatti due n-cellule E'_n, E''_n di C_n, incidenti alla medesima E_{n-1} di C_n. Le E'_n, E''_n possono riferirsi omeorficamente a due poliedri elementari P'_n, P''_n di S_n, esterni l'uno all'altro, aventi una faccia comune P_{n-1}, corrispondente ad E_{n-1}, colla condizione che gli omeomorfismi tra E'_n, P'_n ed E''_n, P''_n subordino il medesimo omeomorfismo tra E_{n-1} e P_{n-1} (n° 38). Si riconosce agevolmente che l'insieme di P'_n e P''_n è omeomorfico ad una n-cellula, ossia che è, esso medesimo, una n-cellula. Pertanto anche l'insieme di E'_n, E''_n è una n-cellula $\bar{E}_n$ di M_n. Se ora E_{n-1} appartenesse ad una terza cellula E'''_n di C_n, l'insieme di E'_n e di E'''_n sarebbe una nuova n-cellula $\bar{\bar{E}}_n$ di M_n, ed i punti di questa, diversi da quelli di E'_n, sarebbero tutti fuori della cellula $\bar{E}_n$. E poichè punti siffatti, fuori di $\bar{E}_n$, ve ne sarebbero, entro $\bar{\bar{E}}_n$, in ogni intorno di un punto qualunque O interno ad E_{n-1}, la n-cellula costituente l'intorno di O in $\bar{E}_n$ coinciderebbe soltanto parzialmente con quella formante l'intorno di O in $\bar{\bar{E}}_n$. Onde M_n non sarebbe omogenea in O.

Che poi ogni cellula E_{n-1} di C_n non possa appartenere ad una sola n-cellula di C_n, risulta da ciò che, supponendo il contrario, l'intorno in M_n, di un punto interno ad E_{n-1}, sarebbe costituito da una

n-cellula contenente O *al contorno* e quindi la M_n non sarebbe omogenea in O (sarebbe aperta).

Se la M_n omogenea è irriducibile, il complesso C_n è totalmente connesso, cioè da una sua n-cellula si può passare ad ogni altra mediante una successione di n-cellule ciascuna delle quali è incidente alla successiva mediante una $(n-1)$-cellula. È ormai evidente, per ciò che si è finora detto, che: *Una M_n omogenea irriducibile è sempre un ciclo; e viceversa un ciclo reticolabile da un C_n tale che ogni $(n-1)$-cellula di C_n appartenga a due e a due sole n-cellule di C_n, è una M_n omogenea irriducibile.*

Però *un C_n ciclico, se $n>1$, non è necessariamente omogeneo*, perchè la definizione b) non richiede che ogni $(n-1)$-cellula di C_n appartenga a due sole n-cellule del complesso. Si può dunque dire soltanto che *un ciclo è sempre una varietà chiusa irriducibile* (*eventualmente non omogenea*). La definizione attuale di n-ciclo è tuttavia più *ristretta* di quella data a pag. 91, perchè là si richiedeva soltanto, affinchè una varietà irriducibile costituisse un ciclo, ch'essa fosse chiusa. Questi due modi di considerare un ciclo (di cui l'uno comprende l'altro) sono in correlazione coi due possibili modi di definire il contorno di una varietà, in guisa da non contraddire alla nozione vaga di contorno che ciascuno possiede e da introdurre un concetto invariante per trasformazioni topologiche (vedi al successivo n° 66).

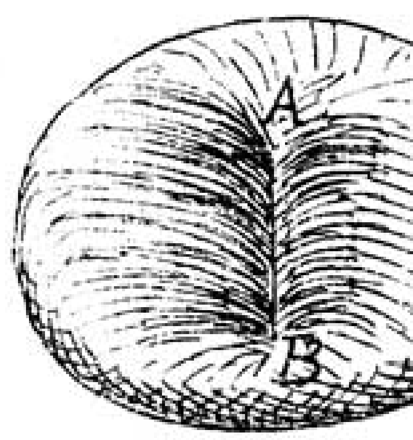
Secondo la definizione di pag. 91, anzi in conseguenza di essa, si ammetteva che lo n-ciclo potesse

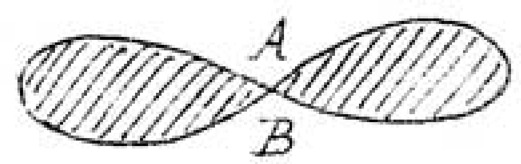
anche contenere $(n-1)$-cellule appartenenti ad un numero dispari (≥ 3) di n-cellule. Così, secondo la definizione di pag. 91, è un ciclo bidimensionale il C_2 costituito dalle 9 cellule bidimensionale seguenti: due coppie di faccie opposte di un cubo, un rettangolo diagonale congiungente due spigoli opposti delle dette faccie e i 4 triangoli in cui il piano di questo rettangolo divide le altre due faccie opposte.

Orbene, questo C_2, che è una varietà irriducibile senza contorni [qualora il contorno s'intenda definito, per le varietà irriducibili, come a pag. 92, ovvero, per una varietà qualunque, come nella nota di pag. 127] non è un ciclo secondo la definizione b). Non è un ciclo, sia perchè vi sono in esso cellule E_1 (i lati del rettangolo diagonale) per ciascuna delle quali passano *tre* 2-cellule del complesso; sia perchè con cinque sue cellule bidimensionali si può comporre un prisma triangolare soddisfacente alla b); e quindi non è, per quel C_2, soddisfatta neppure la seconda delle condizioni contenute nella b).

D'ora in poi la parola ciclo s'intenderà sempre nel senso più ristretto b). La ragione della definizione b), meno ampia di quella prima data, apparirà dal seguito e specie nelle applicazioni ai periodi degli integrali multipli.

Ecco un esempio di ciclo bidimensionale non omogeneo. La superficie colla retta doppia AB, rappresentata nella figura seguente, può evidentemente coprirsi con un complesso C'_2 tale che AB ne sia una cellula unidimensionale, per la quale pas-

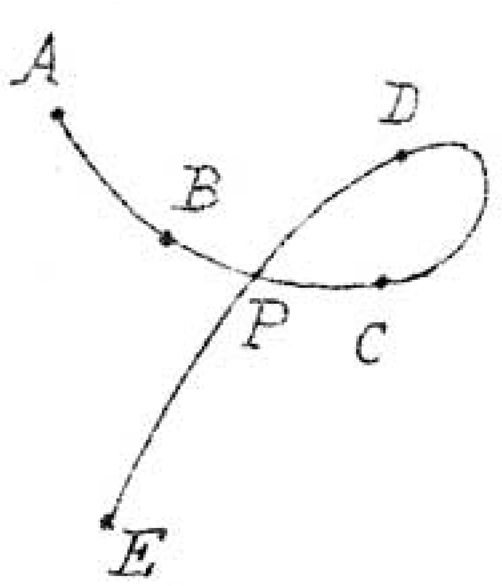




Sezione della superficie con un piano perpendicolare ad AB.

sino 4 cellule bidimensionali. Onde, anche secondo l'attuale definizione, essa è un ciclo.

Osservazione 1ª. - La definizione a) non contempla che complessi C_n costituiti da cellule prive di punti interni comuni. Ma le proprietà di tali complessi possono manifestamente riferirsi anche a complessi C_n i quali soddisfacciano alle sole condizioni essenzialmente combinatorie a), che son quelle concernenti i contorni delle cellule delle varie dimensioni costituenti C_n. Basterà, se un punto è interno a più cellule, *ch'esso si consideri come un punto diverso* su ciascuna delle cellule a cui è interno. Così per es. la linea qui accanto disegnata, dai punti A, B, C, D, E, è divisa in 4 cellule E_1, costituenti un complesso C_1. Il punto P è interno alle due cellule BC, DE. Il complesso C_1 può considerarsi come soddisfacente alla definizione a), purchè P si riguardi come la sovrapposizione di due punti distinti sopra le due cellule. Insomma, se un punto interno ad una cellula si considera di qualità diversa di quella di un punto interno ad un'altra cellula, due cellule distinte non hanno mai punti interni (della stessa qualità) in comune e quindi si può procedere *come* se la a) fosse pienamente soddisfatta, tutte le volte che sien soddisfatte le condizioni



combinatorie, che in essa figurano.

Osservazione 2ª. - Un insieme qualsiasi di cellule di varie dimensioni, ricavate da un complesso C_n si chiama un *complesso generalizzato*, al quale si attribuisce, come dimensione, quella delle cellule di dimensione più elevata, che in esso compaiono.

XVII. - Corrispondenze tra varietà topologiche. - Complessi e varietà singolari. -

58. - Ritorniamo sopra un concetto adombrato al n° 46, presentandolo nella sua più larga accezione e precisandolo con tutto il rigore, mercè i concetti introdotti nella prima parte algebrica di queste Conferenze.

Sieno C_m, C'_n due complessi (anche generalizzati) ad m, n dimensioni ($m \gtreqless n$). Consideriamo l'insieme W delle coppie costituite da un punto dell'uno dell'altro complesso. Quest'insieme è esso un nuovo complesso (generalizzato) ad $m+n$ dimensioni?

La domanda può avere mero carattere combinatorio ed allora ad essa è facile rispondere affermativamente, perchè si constata che fra gli insiemi di W, che provengono dalle coppie di punti delle singole cellule di C_m, C'_n, variamente associate, intercedono quelle relazioni di appartenenza, che caratterizzano combinatoriamente un complesso ad $m+n$ dimensioni. Ma a noi interessa sopratutto poter rispondere alla domanda stessa dal punto di vista della topologia del continuo. Ed allora si affaccia una questione pregiudiziale.

È possibile dare un senso alla nozione di distanza di due elementi di W, così che si possa parlare di intorni, di elementi limiti, etc.?

La risposta a tale pregiudiziale è ormai ovvia. I complessi C_m, C'_n appartengano a due spazi lineari S_r, $S'_{r'}$. Consideriamo la varietà di Segre V, che rappresenta birazionalmente, senza eccezioni, le coppie di punti dei due spazii (n°25). Si può assumere allora come distanza δ di due coppie di punti di S_r, $S'_{r'}$, la distanza (euclidea) dei due punti corrispondenti di V, nello spazio S_R a cui V appartiene (e vi è normale)(*). È ben vero che in tal guisa il valore di δ, per due date coppie di punti, non è fissato, ma, quel che importa, è che risulta fissato l'ordine di grandezza della distanza, nel senso che ora preciseremo. La varietà V è definita a meno di un'omografia del suo spazio S'_R, con un'altro spazio S'_R. Se sostituiamo a V, una varietà V', ad essa omografica, la distanza δ', delle due coppie fissate, generalmente cambierà. Ma però, siccome la corrispondenza fra V e V' è un omeomorfismo, se due punti si avvi-

(*) È superfluo ripetere che i due spazii S_r, $S'_{r'}$ (come la V) si considerano dal punto di vista proiettivo, cosicchè ogni loro coppia di punti si può imaginare costituita da punti proprii. E così le loro imagini su V. Invece della distanza euclidea in S_R si potrebbe considerare la distanza nello spazio ellittico a cui riducesi lo spazio proiettivo S_R. Ai nostri fini sarebbe lo stesso.

cinano indefinitamente sopra una delle due varietà, così accade dei punti omologhi sull'altra. Cioè δ, δ' tendono insieme a zero. E questo è quel che basta perchè sulla varietà delle coppie di punti di S_r, $S'_{r'}$, si possa parlare d'intorni, di elementi limiti, di omeomorfismo tra una varietà subordinata a quella delle coppie di punti di S_r, $S'_{r'}$ e una varietà topologica; etc.. È superfluo ripetere tali definizioni, che ognuno può formulare da sè.

Ciò premesso, consideriamo un punto di S_r (una cellula E_0) e una cellula E_n $(n \geq 0)$ di $S'_{r'}$. E supponiamo, pel momento, che a ciò si riducano i due complessi dati. La varietà W è allora, essa medesima, una cellula n-dimensionale, perchè è omeomorfa alla cellula data E_n, ove si chiamino omologhi un elemento di W e un punto di E_n, quando il primo contiene il secondo. Il contorno di W (essendo il luogo degli elementi omologhi al contorno di E_n, nel predetto omeomorfismo) è costituito dal ciclo $(n-1)$-dimensionale degli elementi ognuno dei quali risulta dall'associare E_0 ad un punto del contorno di E_n. Supponiamo ora, in generale, che uno dei due complessi sia una cellula E_m e l'altro una cellula E_n. Atteso che le nozioni su cui stiamo intrattenendoci son tutte invarianti rispetto agli omeomorfismi, potremo supporre p. es. che E_m sia il parallelopipedo ad m dimensioni riempito, in uno spazio euclideo S_{m+n} (ove denotiamo con $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ le coordinate cartesiane di un punto), dai punti di coordinate

$$0 \le x_1 \le a_1, \; 0 \le x_2 \le a_2, \dots, 0 \le x_m \le a_m, \; x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_{m+n} = 0,$$

essendo $a_1, a_2, \dots, a_m$ numeri positivi dati non nulli; ed E_n il parallelepipedo n-dimensionale riempito, nello stesso S_{m+n}, dai punti

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0, \; 0 \le x_{m+1} \le a_{m+1}, \; 0 \le x_{m+2} \le a_{m+2}, \dots, 0 \le x_{m+n} \le a_{m+n},$$

ove $a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$ son numeri positivi dati (non nulli). Allora il parallelepipedo $(m+n)$-dimensionale riempito dai punti

$$0 \le x_1 \le a_1, \; 0 \le x_2 \le a_2, \dots, 0 \le x_m \le a_m, \; 0 \le x_{m+1} \le a_{m+1}, \dots, 0 \le x_{m+n} \le a_{m+n},$$

è manifestamente omeomorfo alla varietà delle coppie di punti dei due dati parallelepipedi E_m, E_n, qualora si assuma come coppia di punti di E_m, E_n, omologa di un dato punto P del parallelepipedo $(m+n)$-dimensionale, il punto di E_m che ha le prime m coordinate eguali alle omonime di P e le altre nulle, e il punto di E_n che ha le prime m coordinate nulle e le altre eguali alle omonime di P. E poichè il parallelepipedo $(m+n)$-dimensionale costituisce una cellula $(m+n)$-dimensionale, così concludiamo:

La varietà delle coppie di punti di due cellule E_m, E_n è una cellula E_{m+n}. Il ciclo $(m+n-1)$-dimensionale, che costituisce il contorno di E_{m+n}, risulta dall'associare ogni punto del contorno di E_m ad ogni punto di E_n ed ogni punto del contorno di E_n ad ogni punto di E_m. L'ultima affermazione, relativa al contorno di E_{m+n}, si verifica immediatamente sui precedenti modelli delle cellule E_m, E_n, E_{m+n}. Il reticolato con cui viene coperto il ciclo contorno di E_{m+n} si costruisce facilmente combinando in modo opportuno le cellule costituenti i reticolati, che coprono i cicli contorno

di E_m, E_n. È appena necessario avvertire che tali reticolati sono più complicati di quelli formati da vertici, lati, faccie, ecc. d'un poliedro elementare di egual dimensione rispettiva.

59. - Una volta stabilito il risultato precedente, non presenta difficoltà alcuna il verificare che la varietà delle coppie di punti di due complessi C_m, C'_n soddisfa alle condizioni che definiscono un complesso C_{m+n}; che se i due complessi sono ordinarii (non generalizzati) lo è il complesso C_{m+n}; che, se i due complessi riempiono varietà chiuse, il complesso C_{m+n} riempie una varietà chiusa; che se i due complessi sono cicli la varietà delle loro coppie di punti è un ciclo; ecc.. Per ciò che concerne l'ultima affermazione va solo fatta eccezione pel caso che uno (almeno) dei due cicli abbia dimensione nulla, perchè, secondo le definizioni date, un ciclo di dimensione zero è una coppia di punti epperò la varietà delle coppie di punti di un ciclo di dimensione zero e di un ciclo di dimensione zero consta sempre di due cicli distinti.

Osservazione. - Il primo uso sistematico delle varietà delle coppie di punti di due varietà (algebriche) è stato fatto, come si è ricordato a pag. 126, da C. Segre, Severi, De Franchis. La nozione è stata trasportata e usata nel campo topologico da Steinitz (Sitzungsb. da Berl. Math. Gesellschaft, 1908), Lefschetz (1921, 1923, ecc.) Tietze (Ab. Math. Sem. Hamburg, 1923), Künneth (Math. Ann. 1923). Lo Steinitz ha introdotto per tale varietà la denominazione di prodotto e designato il prodotto di due complessi C_m, C'_n col simbolo $C_m \times C'_n$. Del concetto e del simbolismo il Lefschetz ha poi fatto brillantissimo uso. La denominazione di prodotto è giustificata da ciò, che, se si assumon come modelli di due cellule E_m, E_n, quelli sopra indicati (parallelepipedi a più dimensioni) la misura dell'estensione del modello della cellula prodotto $E_{m+n} = E_m \times E_n$ è il prodotto numerico delle misure delle estensioni dei modelli delle cellule componenti, E_m, E_n.

60. - Dati due complessi C_m, C'_n e considerato il complesso C_{m+n} loro prodotto, un insieme T qualunque di elementi di C_{m+n} dà luogo ad una corrispondenza fra certi punti di C_m, C'_n: due punti essendo omologhi in questa corrispondenza quando la loro coppia è un elemento di T. Se l'insieme T è una varietà topologica, la corrispondenza, di cui T è imagine, si chiama una corrispondenza topologica. È manifesto che una tal corrispondenza può avere indici finiti od infiniti.

Consideriamo in modo particolare, il caso in cui C_m è un complesso ordinario (non generalizzato), C'_n è un complesso qualunque, e la corrispondenza ha uno degli indici uguali ad 1. Precisamente: ad ogni punto di C'_n corrisponda un sol punto di C_m. Ai punti di C'_n corrisponderanno sopra C_m punti di un certo insieme I (che può o no comprendere tutto C_m) e un punto di I può provenire da uno o

più, anche da infiniti, punti di C'_n. Aggiungiamo la condizione che, riguardando il punto P di I come funzione $F(P')$ del punto P' di C'_n, sia $F(P')$ funzione continua di P', nel senso solito; ossia che se entro C'_n, $P' \to P'_0$, entro C_m accada che $P \to P_0 = F(P'_0)$. Diciamo inoltre C'' l'insieme degli elementi ognuno dei quali è una coppia di punti omologhi nella corrispondenza considerata fra C'_n ed I. Sotto queste condizioni, allorchè un punto P di I proviene da più di un punto di C'_n, si dice che P è un punto singolare di C'' sopra C_m e l'insieme C'' si dice un complesso singolare, sopra C_m, quando ogni suo punto è singolare. Se la corrispondenza fra C'_n ed I è sempre biunivoca, poichè essa è continua in un senso, lo è anche nel senso opposto, e però ad ogni cellula di C'_n, di dimensione ≥ 0, corrisponde in I ed in C'' una cellula della stessa dimensione; e, a causa degli omeomorfismi fra le varie cellule di C'_n e di C'', quest'ultimo risulta un complesso, e dicesi non singolare. Se poi C'_n non è un complesso generalizzato, anche C'' non è un complesso generalizzato, e si dice ordinario. Si avvertirà che in ogni caso C'_n e C'' son due insiemi omeomorfi.

Un insieme di punti di C_m non può dunque essere un complesso singolare considerato in se stesso, ma considerato come imagine sopra C_m di un altro complesso.

Supponagasi che l'insieme I invada tutto il complesso C_m. Può allora darsi che, pur essendo un punto P di C_m imagine di più punti (elementi) di C'' (cioè di più punti P', ... di C'_n), accada che, se si limita opportunamente l'intorno di un elemento (P,P') di C'', C, la corrispondenza che l'intorno fissato di (P,P') entro C'', subordina fra i punti degli intorni di P, P', rispettivamente in C_m, C'_n, sia biunivoca (oltrechè naturalmente continua, com'è per ipotesi). In tal caso insomma si può dir brevemente che *l'intorno dell'elemento* (P,P') *entro* C'' è *un complesso non singolare sopra* C_m. Se questo accade per *ogni* elemento di C'', si dice che *il complesso* C'' *si può distendere sopra* C_m. In particolare, quando questa proprietà è soddisfatta, ed ogni punto di C_m proviene da ν punti (*distinti*) di C'_n, si dice che *C'' o il suo complesso omeomorfo* C'_n, *si può distendere* ν *volte sopra il complesso* C_m, ovvero che C_m, in quanto imagine di C'' o di C'_n è un *complesso ν-plo*. Dimostriamo che:

Un complesso unidimensionale connesso, che sia disteso sopra una cellula unidimensionale, non può che esservi disteso una sola volta; ed il complesso dato è, esso medesimo, una cellula.

Convien premettere il lemma:

Una corrispondenza che associ in modo continuo ad ogni punto di un segmento AB un sol punto di un segmento CD e che sia biunivoca fra gli intorni di due punti corrispondenti qualunque, è una corrispondenza biunivoca continua fra i punti di AB e i punti di un segmento A'B', contenuto in CD.

Questo lemma equivale alla proposizione seguente:

Se una funzione $f(x)$, (reale e di variabile reale) univoca e continua in un intervallo $a \urcorner b$, estremi inclusi, è crescente o decrescente in un intorno conveniente di un qualunque valore di x nell'intervallo, essa è crescente o decrescente in tutto l'intervallo.

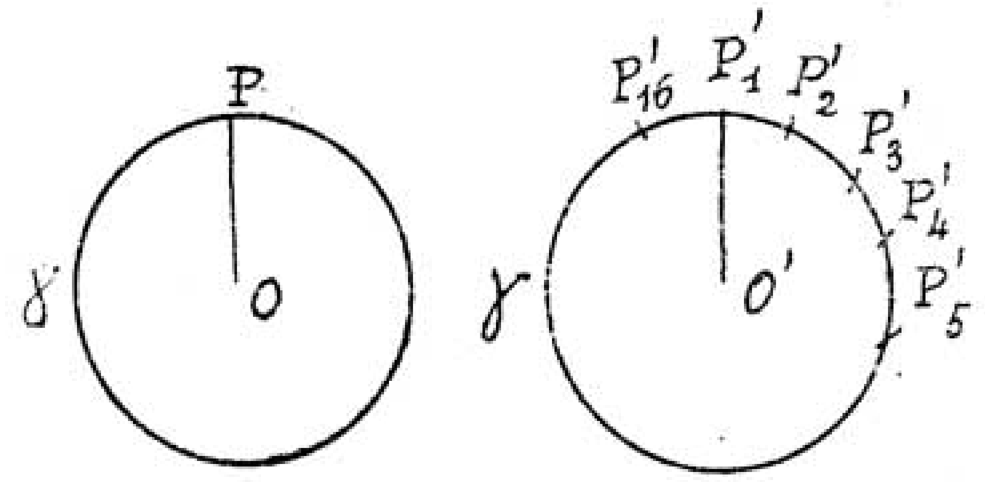
O, ciò che è lo stesso:

Una funzione $f(x)$, univoca e continua in $a \urcorner b$, estremi inclusi, invertibile in un intorno conveniente di ogni valore x, è invertibile in tutto l'intervallo.

Infatti la $f(x)$ non potrà assumere i suoi valori estremi (massimo e minimo) in un punto interno all'intervallo, perchè allora nell'intorno (necessariamente completo) di questo punto non potrebbe esser crescente o decrescente. Dunque gli estremi di $f(x)$ cadono negli estremi a, b dell'intervallo. Supponiamo p. es. che il minimo cada in a ed il massimo in b; e sia, per fissare le idee, $a < b$. Presi due qualunque valori di x, e sieno x_1, x_2, interni all'intervallo, con $x_1 < x_2$, la considerazione precedente potrà applicarsi all'intervallo $a \urcorner x_2$; e ci dirà che gli estremi di $f(x)$, in tale intervallo, cadono in a, x_2. Ma siccome in a già cade il minimo di $f(x)$, in x_2 cadrà il massimo; nè all'interno potrà mai esser raggiunto nè il minimo nè il massimo. Perciò $f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. Dunque la funzione $f(x)$ è crescente in $a \urcorner b$.

Dal Lemma segue subito, il teorema che ci interessava di stabilire. Infatti, se il dato complesso C_1 è disteso sopra una cellula unidimensionale, ossia, in ultima analisi, sopra un segmento AB, in guisa che ad un punto di C_1 risponda un sol punto di AB, ad ogni cellula di C_1 corrisponderà biunivocamente, per quanto *precede*, un segmento contenuto in AB; a cellule adiacenti, segmenti consecutivi; a cellule non adiacenti, segmenti non consecutivi; epperò tutto C_1 risulterà biunivocamente riferito ad AB (in modo continuo), cioè sarà una cellula. Di contro al teorema dimostrato va segnalato quest'altro assolutamente opposto:

Una curva chiusa può esser distesa un numero ν arbitrario di volte sopra un'altra curva chiusa.



Le due curve possono esser trasformate per omeomorfismo in due cerchi γ e γ', dello stesso piano, di centri O ed O'. Ad ogni raggio di γ facciasi corrispondere il raggio di γ' parallelo e diretto nello stesso verso; ad un punto P di γ facciansi corrispondere i vertici di un ν-gono regolare (nel caso della figura è $\nu = 16$) inscritto in γ' e avente un vertice nel punto P'_1, estremo del raggio omologo di OP. Si ottiene allora fra γ e γ' una corrispondenza soddisfacente all'enunciato.

Osservazione. - Nel definire quand'è che un

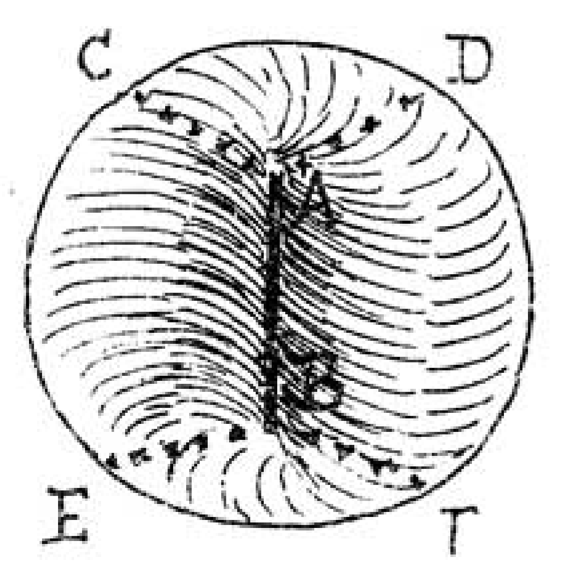
complesso C'_n si può distendere ν volte $(\nu > 1)$ sopra un altro complesso C_m, abbiamo detto che i ν punti di C'_n, aventi per imagine un medesimo punto di C_m, devono essere sempre distinti. In realtà la condizione è superflua, perchè è da sè soddisfatta; ossia non può mai accadere che i ν punti, distinti in generale, vengano a coincidere, quando P' varia in un continuo contenuto entro C'_n, giacchè altrimenti, attesa la continuità della corrispondenza, l'intorno dell'elemento di C'' proveniente dagli intorni di un punto P' di C'_n, dove avvenga una coincidenza, e del punto P omologo in C_m, non sarebbe un complesso non singolare sopra C_m. Per es. la corrispondenza fra i punti di una circonferenza e di un segmento, ottenuta proiettando la circonferenza da un punto esterno, è una corrispondenza $(1, 2)$ continua, ma la circonferenza non resta, per mezzo di essa, distesa doppiamente sul segmento, nel senso della definizione sopra data, perchè nell'intorno degli estremi del segmento la corrispondenza non è biunivoca fra gli intorni delle coppie di punti omologhi che si considerano.

61.- Una varietà riempita dai punti di un complesso singolare (considerato come imagine di un altro complesso non singolare) costituisce (come imagine della varietà topologica riempita dai punti di quel complesso non singolare) una *varietà topologica singolare*.

Dicesi altresì singolare una varietà che contenga qualche varietà singolare.

Ogni ciclo a due dimensioni, che non sia omogeneo, (cfr. col. n° 57), può esser considerato come una varietà singolare a due dimensioni.

Non ci tratterremo sulla dimostrazione generale di questa proprietà, giacchè le difficoltà combinatorie che vi si incontrano sono piccole nella sostanza, noiose nella forma dell'esposizione. Il concetto della dimostrazione si rende del resto limpidamente sopra l'esempio di pag. 172, di cui qui ripetiamo la figura.



Il ciclo in questione può esser reticolato mediante un complesso bidimensionale formato da otto cellule bidimensionali (CAD, DABF, FBE, EBAC, visibili in figura e le analoghe che stanno al disotto, nella parte invisibile del ciclo, che si può considerar come simmetrica della parte visibile rispetto al piano del foglio, il quale si suppone contenere le linee AB, CDFE segnate con tratto continuo). Le cellule unidimensionali sono: CA, AB, AD, EB, BF, CD, DF, EF, CE e quelle simmetriche delle sei cellule unidimensionali tratteggiate. L'unica cellula unidimensionale per cui passino più di due cellule bidimensionali (e precisamente 4) è la AB.

Nei punti di AB, il ciclo non è omogeneo. Ebbene, la parte visibile del ciclo (che è la metà del ciclo stesso) può esser riferita alla superficie di un emisfero mediante un omeomorfismo, il quale muti il contorno della parte considerata nel circolo mas

simo dell'emisfero, mutando i punti C, D, F, E consecutivi sul primo, in punti consecutivi del secondo; e subordinando assegnati omeomorfismi tra le cellule CE, EF, ... e le loro omologhe C'E', E'F', ... Similmente, possiamo riferire la parte invisibile del ciclo alla superficie dell'emisfero opposto al precedente, in guisa che restino subordinati gli stessi omeomorfismi tra le cellule CE, C'E'; EF, E'F'; ... Alla cellula AB, che appartiene alle due parti considerate del ciclo corrispondono, sulle superficie dei due emisferi, due cellule $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$, non aventi punti comuni. Ad ogni punto della superficie sferica corrisponde con continuità un punto del ciclo, e viceversa ad un punto generico del ciclo corrisponde un sol punto della superficie sferica. Fanno eccezione i punti della cellula AB, ai quali corrispondon due punti della superficie sferica (uno su $A'_1B'_1$ e l'altro su $A_2B'_2$). Il complesso generalizzato a due dimensioni, costituito dalle cellule $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$, vien dunque disteso doppiamente sopra il complesso AB, che, come imagine del predetto complesso, è perciò doppio sopra il ciclo dato. Il procedimento si estende ad un qualunque ciclo superficiale, non omogeneo. Cioè ogni ciclo bidimensionale non omogeneo può riferirsi ad un ciclo bidimensionale omogeneo in una corrispondenza continua generalmente biunivoca: fanno eccezione alla biunivocità i punti dove il ciclo dato non è omogeneo, che sono per esso singolari.

Osservazione 1ª. – Come vedesi, il concetto di punti o di varietà singolari non fa che trasportare nel campo topologico il concetto proiettivo di punti o di varietà multiple di una varietà, come il concetto di omogeneità attorno ad un punto trasporta in sostanza il concetto proiettivo di un punto semplice. Le definizioni date equivalgono in fondo a ciò, che ogni punto multiplo si deve considerar tante volte sulla varietà quante sono le falde distinte a cui esso appartiene.

Osservazione 2ª. – Non sarebbe difficile provare che la corrispondenza tra il ciclo non omogeneo, dell'esempio considerato e la superficie di una sfera, può altresì considerarsi come un'omotopia (ma non un'isotopia); cioè la superficie sferica può deformarsi con continuità fino a ridursi al ciclo, portando a coincidere le due cellule $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$. La cosa è intuitiva nell'esempio.

62. – Per estendere il risultato con cui chiudesi il numero precedente e per precisare a quale tipo di varietà topologica singolare si riduce un n-ciclo non omogeneo, conviene definire che cosa s'intende per *varietà topologica generalizzata ad n dimensioni*(*). Tale concetto è determinato dalla seguente definizione ricorrente:

Una varietà generalizzata M_n è l'insieme di

(*) La parola *generalizzata* va qui intesa nel senso che si assume come tipo ordinario (non generalizzato) di una varietà topologica, una varietà *omogenea irriducibile*

tutti i punti situati in un ciclo n-dimensionale, il quale soddisfaccia alla condizione che, considerata una sua cellula qualunque E_{i-1}, $(i=1,2,\dots,n-1)$, le relazioni d'incidenza fra le cellule di dimensioni $i, i+1, i+2, \dots, n$, che appartengono ad E_{i-1}, sono le medesime di quelle che intercedono fra le cellule di dimensioni $0,1,2,\dots,n-1$ di un complesso che definisca una varietà generalizzata ad $n-i$ dimensioni; di più una varietà generalizzata a zero dimensioni è un ciclo di dimensione zero (una coppia di punti distinti).

Il concetto è evidentemente invariante di fronte agli omeomorfismi. Si verifica subito che per $n=0,1,2$ *una varietà generalizzata non è altro che un ciclo omogeneo.*

Per $n \geq 3$ si hanno invece varietà generalizzate che non son cicli omogenei. Un esempio, costruito in uno spazio euclideo S_4, e sul quale non ci arrestiamo, trovasi nell'articolo della Encyclopädie, sull'Analysis Situs di *Dehn* e *Heegard*.

Si dimostra altresì, estendendo il teorema con cui chiudesi il n°. precedente, che:

Un ciclo n-dimensionale non omogeneo è una varietà generalizzata singolare.

Il processo dimostrativo è analogo a quello adombrato per $n=2$ nell'esempio svolto e non ci arrestiamo sopra la questione, che non è ulteriormente istruttiva. Se ne potrà vedere la completa trattazione nella più volte citata esposizione del *Veblen*.

63. – Le considerazioni del § 59 ci inducono ad un ritorno sulla questione della più opportuna rappresentazione del campo di variabilità di due variabili complesse (cioè dei punti complessi di un piano) su cui esponemmo talune riflessioni nelle pagg. 73-74; riflessioni le quali fornirono occasione ai più ampli sviluppi del lavoro di B. Segre citato a pag. 132.

Abbiamo veduto che l'insieme delle coppie di punti (s'intende che ora parliamo di elementi reali) di due cerchi è omeomorfa ad una cellula quadridimensionale, della quale si può prender come imagine topologica l'insieme dei punti interni e situati sul contorno di un'ipersfera dello spazio $S_4 (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$; il contorno di questa rappresentando le coppie che hanno un punto sopra la circonferenza di uno qualunque dei due cerchi. D'altro canto la cellula ipersferica E_4 considerata, è omeomorfa all'intorno di un punto qualunque della V_4^6 di S_8, che costituisce il modello minimo per la rappresentazione, senza eccezioni, delle due variabili $x = \xi_1 + i\xi_2$, $y = \xi_3 + i\xi_4$.

E ciò perchè la V_4^6 non ha che punti semplici. Ne deriva che, finchè si studiano le proprietà di una funzione analitica di due variabili complesse x ed y, nell'intorno di un gruppo di valori finiti di x, y, si posson distender separatamente le due variabili sopra due piani di Argand e Gauss o rappresentare le loro coppie di valori coi punti di un S_4 euclideo. Quest'ultima rappresentazione è, sotto certi riguardi, più vantaggiosa, perchè essa consente di veder meglio le proprietà globali del complesso

delle due variabili: si può considerare per es. agevolmente il problema del raggio dell'ipersfera di convergenza di una data serie di potenze in x, y, etc.

La rappresentazione di una coppia $x = a_1 + i a_2$, $y = b_1 + i b_2$ di valori finiti di x, y si può del resto anche realizzare, in modo topologicamente equivalente, considerando in S_4 l'insieme dei punti interni o situati sul contorno della varietà a quattro dimensioni (che pure è una cellula quadridimensionale):

$$(\xi_1 - a_1)^2 + (\xi_2 - a_2)^2 \le \rho^2, \quad (\xi_3 - a_3)^2 + (\xi_4 - a_4)^2 \le \sigma^2,$$

il cui contorno si ottiene come intersezione dei cilindri

$$(\xi_1 - a_1)^2 + (\xi_2 - a_2)^2 = \rho^2, \quad (\xi_3 - a_3)^2 + (\xi_4 - a_4)^2 = \sigma^2.$$

E così fa per es. l'Osgood (*).

Ma le cose cangiano radicalmente, quando si tratti di studiare una funzione analitica di x, y, nell'intorno di una coppia di valori di x, y, di cui uno almeno sia infinito.

Per determinare il modo di considerare il campo di variabilità di x, y all'infinito, sembra che la guida migliore dovrebbe essere il presupposto che le proprietà di una qualunque funzione analitica di x, y, nell'intorno di un punto qualsiasi del suo campo di esistenza o di un punto limite di tale campo, sia esso al finito o all'infinito, restino invarianti di fron

(*) Lehrbuch der Funktionentheorie (Teubner, 1929; II Bd. I Lief. pag. 17).

te alle sostituzioni lineari (trasformazioni proiettive) sulle variabili.

Così si fa già per le funzioni analitiche di una variabile complessa x ed è appunto perciò che i punti all'infinito del piano di Argand e Gauss si considerano come un sol punto, rappresentante $x=\infty$. Ed è per tale cagione che per studiare in modo completo il comportamento di una $f(x)$ analitica, per $x=\infty$, basta operare colla sostituzione $x=\frac{1}{x'}$, che è una sostituzione lineare (una proiettività).

Nel caso di una $f(x,y)$ analitica, che si studi attorno ad un punto all'infinito, la sostituzione $x=\frac{1}{x'}$, $y=\frac{1}{y'}$, è invece, allo scopo indicato, inadeguata. Essa altera le proprietà della funzione nell'intorno di un punto all'infinito, perchè non è una trasformazione lineare nelle x, y, ma una trasformazione quadratica (i cui punti fondamentali sono $x=\infty$, $y=0$; $x=0$, $y=\infty$; $x=0$, $y=0$). E il guaio non è che la trasformazione sia quadratica piuttosto che lineare (questo non importerebbe affatto, s'essa fosse biunivoca senza eccezioni, negli intorni dei punti che si voglion trasformare); ma l'inconveniente fondamentale è dato dal fatto che la trasformazione opera nell'infinito in modo del tutto eccezionale, ponendo i punti all'infinito in condizione diversa da quelli al finito.

Dal punto di vista considerato - che sembra il più opportuno - è perciò da rigettarsi la rappresentazione delle x, y su due sfere, quando si suole studiare il comportamento all'infinito.

Basta, del resto, a convincersene l'argomento che, in tale rappresentazione, i punti all'infinito vengon rappresentati dalle coppie di punti delle due sfere, che hanno un punto fisso ($x=\infty$, o $y=\infty$) sull'una e un punto variabile sull'altra(*), ossia da una varietà spezzata in due parti; mentre i punti all'infinito, nella rappresentazione sulla V_4^6 di Segre, son rappresentati in modo minimo dai punti di una quadrica ellittica.

La sostituzione che si deve operare sulle x, y per studiare correttamente la funzione nell'intorno di un punto all'infinito, è una sostituzione proiettiva, che muti il punto che si considera in un punto al finito.

Può servire all'uopo per es. la sostituzione (lineare):

$$x=\frac{1}{y'},\quad y=\frac{x'}{y'}\quad \text{(avente per inversa } x'=\frac{y}{x},\ y'=\frac{1}{x}\text{)},$$

che muta il punto all'infinito della retta $y=Kx$ (K costante finita, eventualmente nulla) nel punto $x'=K$, $y'=0$. Se si ha da studiare la funzione nell'intorno del punto all'infinito dell'asse y, bisognerà considerare per es. la sostituzione

$$x=\frac{x'}{y'},\quad y=\frac{1}{y'}\quad \text{(che ha per inversa } x'=\frac{x}{y},\ y'=\frac{1}{y}\text{)}.$$

In conseguenza, per es. la definizione più generale

(*) Queste ∞^2 coppie vengon a rappresentare in modo eccezionale (infinitivoco) soltanto i valori $x=\text{cost.}$, $y=\infty$; $x=\infty$, $y=\text{cost.}$, cioè soltanto i punti all'infinito degli assi coordinati del piano x, y.

di una trascendente intera di due variabili complesse x, y, si dovrà dare supponendo che i punti singolari sieno distribuiti sopra una certa quadrica ellittica Q della V_4^6 di Segre rappresentativa delle due variabili; cioè che sieno singolari (nello spazio euclideo S_4 dove si distendano, nel modo consueto, x, y) taluni o tutti gli ∞^2 punti all'infinito rappresentati dalle ∞^2 rette della congruenza lineare ellittica K, di cui è cenno a pag. 74 (e sulla quale più ampii dettagli posson vedersi nel lavoro di B. Segre citato a pag. 132).

Quando si ha da fare con una $f(x,y)$ analitica, l'insieme dei suoi punti singolari è generalmente rappresentato da una superficie (reale) F della V_4^6 di Segre. Ora, se esiste qualcuna delle quadriche imagini delle rette del piano complesso x, y, che non incontri F, con una trasformazione lineare nelle x, y si potrà ridurre la F ad esser limitata, nello spazio euclideo S_4, ove si distendono le x, y. Ma se una tal quadrica non esiste, per trattar correttamente i punti singolari all'infinito, occorre riferirsi alla V_4^6 di Segre.

Un'ultima osservazione. I punti di una quadrica ellittica forniscon l'imagine più semplice dei valori di una variabile complessa, non soltanto dal punto di vista delle trasformazioni birazionali (senza eccezioni), che era il punto di vista del n° 25, ma anche dal punto di vista topologico. In altri termini:

La superficie algebrica reale di ordine minimo che è omeomorfa alla totalità dei valori complessi di una variabile, è una quadrica ellittica.

Invero, il piano proiettivo è notoriamente (e risulterà anche dal seguito) una superficie unilatera e non può pertanto esser topologicamente equivalente a una quadrica ellittica (considerata sempre, s'intende, nello spazio proiettivo) che è una superficie bilatera (*).

Si può prevedere che la proprietà analoga sussista anche nei riguardi della V_4^6 di C. Segre; cioè:

La V_4^6 ellittica di C. Segre è la varietà algebrica reale di ordine minimo omeomorfa alla totalità delle coppie di valori complessi di 2 variabili.

Possiamo soltanto osservare subito che la V_4^6, essendo riemanniana di una varietà algebrica (un piano) (§IX), è necessariamente bilatera (come vedremo in seguito), mentre lo spazio proiettivo S_4 è unilatero. Sicchè certamente V_4^6 non è topologicamente equivalente allo S_4. Resta da escludere che possa esser topologicamente equivalente a varietà algebriche reali, prive di punti multipli (omogenee) degli ordini 2, 3, 4, 5.

Osservazione. – Nel trattato di Forsyth(**), per lo studio del comportamento di una funzione analitica all'infinito, si usa la sostituzione $x=\frac{1}{x'}$, $y=\frac{1}{y'}$. Lo stesso

(*) D'altra è altresì chiaro (e risulterà pure dal seguito, come caso particolarissimo della teoria degli indici di Kronecker) che in una quadrica ellittica due curve "intuitive" si segano sempre in un numero pari di punti, mentre nel piano vi sono linee (rette) che si tagliano in un punto.

**) Theory of functions of two complex variables (Cambridge University Press, 1914) n° 43, pag. 58.

fa sostanzialmente l'Osgood, a pag. 53 e segg. del trattato prima citato. Questo Autore in verità considera altresì talora le funzioni di due variabili complesse x, y anche nel piano proiettivo complesso (x, y), (è il nostro punto di vista); ma il campo ch'egli preferisce e che chiama "der Raum der Funktionentheorie" è quello (Klein, Bôcher) la cui geometria G è invariante di fronte alle sostituzioni lineari (non degeneri) su ciascuna delle due variabili x, y; sustituzioni lineari trasformanti in sè ognuno dei piani di Argand e Gauss dove si distendono le due variabili x, y o trasformanti detti piani l'uno nell'altro. Le sostituzioni del gruppo fondamentale operano così sulla coppia delle due variabili solo in quanto operano staccatamente su ciascuna di esse: il che sembra un modo troppo particolare di studiare funzioni della coppia (x, y).

La geometria G è identica (nel campo complesso) alla geometria G_1 la quale, sopra una quadrica Q non specializzata dello spazio proiettivo complesso, ha per gruppo fondamentale quello delle omografie spaziali, che mutano in sè Q; identica nel senso (di Klein) che i gruppi fondamentali delle due geometrie sono oloedricamente isomorfi. Ciò risulta dal rappresentare i valori delle variabili x, y colle generatrici delle due schiere rigate di Q: il che si ottiene per es. distendendo x, y sopra due rette r_x, r_y, di schiere diverse e associando ad ogni punto di r_x la generatrice dell'altra schiera, che passa per esso; e similmente, nei riguardi dei punti di r_y.

Allora alle trasformazioni del gruppo di G vengo-

no a corrispondere le omografie che mutano in sè ognuna delle due schiere di Q o che le scambian tra loro.

Dunque lo spazio della teoria delle funzioni di due variabili complesse x, y, considerato dall'Osgood, si ottiene prendendo come campo di variabilità della coppia (x, y) l'insieme dei punti (complessi) di una quadrica non specializzata dello spazio proiettivo (complesso), cioè la varietà delle coppie di punti di due rette (complesse) ossia, nel campo reale, la varietà delle coppie di punti di due sfere.

Si ricade cioè nella rappresentazione che, per le ragioni sopra indicate, sembra meno opportuna. I punti all'infinito dello "spazio" (x, y), son rappresentati dalle due rette r'_y, r'_x (di schiere diverse) della quadrica Q, distinte da r_x, r_y ed uscenti rispettivamente dai punti all'infinito di r_x ed r_y. Proiettando Q da un suo punto sopra il piano tangente in un altro punto, la geometria G_1 dà luogo, sopra questo piano, alla geometria G_2, che nell'Osgood è chiamata dei raggi vettori reciproci ed il cui gruppo fondamentale è generato dalle similitudini (ivi compresi movimenti e riflessioni) e dalla trasformazione per raggi vettori reciproci.

$$x = \frac{x}{x^2+y^2}\ , \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}\ .$$

Però affinchè vi sia corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra gli "spazii" cui le geometrie G_1, G_2 si riferiscono, occorron le convenzioni di cui ora diremo.

Il campo dei punti all'infinito della geometria G_2 vien definito come un insieme di punti, che si aggiungono idealmente al piano, e che corrispondono biunivoca mente ai punti del *cerchio nullo* $x^2+y^2=0$. Ma gli inconvenienti di un siffatto modo di considerar l'infinito sono molteplici. Intanto il campo all'infinito è *riducibile* $(x+iy=0,\ x-iy=0)$. Inoltre mentre un punto (x,y) si avvicina ad un punto (x_0,y_0) del cerchio nullo, diverso da $x=0$, $y=0$, il punto (x',y') omologo tende all'infinito e il rapporto $\frac{y'}{x'}$ tende ad un valore (uguale ad $\frac{y_0}{x_0}$) *indipendente* dal cammino seguito da (x,y) per avvicinarsi ad (x_0,y_0); mentre quando (x,y) tende a $(0,0)$, il punto (x',y') tende ancora all'infinito, ma il limite del rapporto $\frac{y'}{x'}$ *dipende* dalla direzione con cui (x,y) si avvicina a $(0,0)$. Talchè, per ristabilire la biunivocità della corrispondenza, occorre considerare i punti all'infinito del piano euclideo (x,y) come un sol punto O'. Le rette vengon caratterizzate come quei cerchi che passano pel punto O': *fanno però eccezione* le rette nulle $x\pm iy+k=0$. Son insomma tutti gli inconvenienti cui avevamo prima accennato, in sintesi.

XIIX Matrici di incidenza di un complesso

64.- Riprendiamo a studiare l'aspetto combinatorio della topologia, per trarne nuovi elementi, che applicheremo poi alla topologia del continuo.

Denotiamo con α_k $(K=0,1,\dots,n)$ il numero delle k-cellule di un complesso C_n (che d'ora innanzi, salvo avviso contrario riterremo *ordinario*, cioè non gene-

ralizzato nè singolare. L'espressione $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\dots+(-1)^n\alpha_n$ si chiama, con *W. Dyck*, *caratteristica* del complesso. Le cellule del complesso C_n le indicheremo con E_K^j $(j=1,2,3,\dots,\alpha_k)$. In relazione ad una cellula E_K^j e ad una $(K-1)$-cellula E_{K-1}^i del complesso, introdurremo il numero η_K^{ij}, che porremo eguale ad 1, se la seconda cellula è incidente alla prima, cioè sta sul suo contorno; ed eguale a 0, se le due cellule non hanno alcun punto in comune. Allora le relazioni di appartenenza fra le cellule di C_n (ovvero lo schema di C_n) posson esser rappresentate mediante n matrici

$$\left\| \eta_K^{ij} \right\| = H_K \quad (K=1,2,3,\dots,n),$$

la K^{esima} di esse denotando le relazioni di incidenza fra le K-cellule e le $(K-1)$-cellule. Esse diconsi le *matrici d'incidenza* del complesso. La matrice H_K ha α_{K-1} orizzontali e α_k verticali.

A queste matrici deve aggiungersi la matrice H_0, esprimente le relazioni di incidenza delle 0-cellule (vertici) del complesso C_n, col complesso stesso. Ma essa va naturalmente definita in modo diverso da quello valevole per $K>0$. Precisamente: consideriamo gli r_0 complessi connessi in cui scindesi il dato C_n (n° 57), e ordiniamoli in modo arbitrario. Il primo contenga m_1 vertici; il secondo m_2-m_1, il terzo m_3-m_2, …, l'ultimo $\alpha_0-m_{r_0-1}$. Formiamo una matrice di r_0 orizzontali e di α_0 verticali, ponendo nella prima riga i primi m_1 elementi uguali ad uno e gli altri eguali a 0; nella seconda i primi m_1 elementi eguali a 0, i successivi m_2-m_1 eguali ad 1 e gli altri eguali a 0.

e così via. Questa sarà la matrice H_0 o matrice d'incidenza di dimensione 0. In particolare, se il complesso è connesso ($r_0 = 1$) essa riducesi ad una orizzontale di α_0 elementi uguali ad uno.

È chiaro, in base al teorema del n° 39, che due complessi aventi le stesse matrici d'incidenza son topologicamente equivalenti (e così le varietà dei loro punti).

65. - Un insieme qualunque di k cellule del complesso dato C_n, cioè un complesso (eventualmente generalizzato, n° 56, Oss. 1ª) C_k, appartenente a C_n o, come anche brevemente diremo di C_n, si denoterà col simbolo $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{\alpha_k})$, in cui $x_j = 1$, se la cellula E_K^j trovasi nell'insieme considerato; ed $x_j = 0$, se non vi si trova. Intenderemo che ogni simbolo $(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_{\alpha_k}')$, dove le x' siano numeri interi (positivi, negativi o nulli) qualunque, denoti lo stesso insieme, sempre che i due simboli $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$, $(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_{\alpha_k}')$ sieno congrui rispetto al modulo 2, cioè $x_1' \equiv x_1$, $x_2' \equiv x_2, \ldots, x_{\alpha_k}' \equiv x_{\alpha_k}$ (mod. 2). Ciò premesso, sieno C_k', C_k'' due complessi k-dimensionali appartenenti a C_n. Essi avranno in comune un numero finito (≥ 0) di k-cellule di C_n. Chiameremo somma (rispetto al modulo 2) dei complessi C_k' e C_k'', e la denoteremo con $C_k' + C_k''$ [o $C_k'' + C_k'$, attesa la sua simmetria rispetto ai due complessi], il complesso C_k, appartenente pure a C_n, ottenuto sopprimendo dall'insieme dei punti di C_k' e di C_k'' i punti interni alle k-cellule comuni ai due complessi [e conservando naturalmente tutte le altre cellule e le $(k-1)$-cellule situate sui contorni delle k-cellule comuni]. È chiaro che se $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$,

$(y_1, y_2, \ldots, y_{\alpha_k})$ son i simboli di C_k', C_k'', ogni simbolo congruo (mod. 2) a $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_{\alpha_k} + y_{\alpha_k})$ spetta al complesso $C_k' + C_k''$.

Osservazione. - La somma di due o più k-cellule di un C_n - a norma della definizione ora data - non è che il complesso (generalizzato) formato dal loro insieme.

66. - Precisiamo ora, in una forma definitiva, l'importantissimo concetto di contorno di una varietà topologica.

Contorno di un complesso C_n, dicesi lo $(n-1)$-complesso formato dalle $(n-1)$-cellule di C_n, che appartengon ciascuna a un numero dispari di n-cellule di C_n.

La definizione è riferibile tanto ad un complesso ordinario, quanto ad un complesso generalizzato, estratto da un complesso ordinario.

Contorno di una varietà topologica M_n, reticolata con un complesso C_n, è il contorno (eventuale) di C_n.

Occorre qui esaminare un po' a fondo questa definizione, per vedere quali sono i suoi rapporti colla nozione comune di contorno e colla definizione data in precedenza; e - ciò che è pure essenziale - s'essa ha carattere invariante per trasformazioni topologiche.

Atteso il significato metrico-proiettivo (intuitivo) del contorno topologico di una n-cellula, e quindi anche della distinzione dei punti della cellula in punti interni e punti-contorno, apparisce naturale, secondo la comune nozione di contorno, di dire che un punto P di una varietà topologica M_n, è ad essa *interno*, quando con tutti o parte dei punti dell'intorno di P, entro M_n, può formarsi qualche n-cellula a cui P sia *interno*. Allora un punto non interno si chiamerà *punto-contorno*. Un punto contorno Q sarà cioè tale che dall'intorno di Q in M_n non può *mai* estrarsi (almeno) una n-cellula a cui Q sia interno; ossia *tutte le possibili n-cellule formate con punti dell'intorno Q in M_n, hanno Q al contorno*. È il punto di vista adottato prima d'ora e specificato segnatamente nella nota a piè della pag. 127.

In tale definizione non si fa alcun riferimento al C_n, con cui si imagina reticolata M_n; talchè, in conseguenza dell'invarianza topologica già accertata del concetto di contorno di una n-cellula, *la definizione ha carattere invariante per trasformazioni topologiche*.

Qual relazione ha il contorno, che si viene così a definire per M_n, col contorno di un C_n che la reticoli?

È chiaro che un punto interno ad una n-cellula di C_n, è un punto interno ad M_n, secondo la definizione sopra ricordata. Un punto Q appartenente ad una $(n-1)$-cellula di C_n, se questa è incidente ad una sola n-cellula di C_n, è manifestamente un punto contorno, secondo la definizione ricordata. Se Q appartiene ad una $(n-1)$-cellula incidente a un numero pari 2ν di n-cellule di C_n, queste si posson associare in ν coppie di n-cellule adiacenti attraverso quella $(n-1)$-cellula e

non aventi punti interni comuni. E poichè le n-cellule di una di tali coppie formano una sola cellula di M_n (n° 57), resulta Q interno a ciascuna delle ν cellule formate, e quindi anche ad M_n. La conclusione è la stessa, se Q appartiene ad una $(n-1)$-cellula incidente ad un numero dispari ≥ 3 di n-cellule di C_n, perchè con due di queste può ancora formarsi una n-cellula di M_n, a cui Q sia interno. Ma però, in quest'ultimo caso, Q è sul contorno di C_n, nonostante sia interno ad M_n.

Si posson invece considerare i punti interni ad M_n in senso più ristretto (e quindi i punti contorno in senso un pò più largo), definendo come *interno* un punto P di M_n *solo* quando l'intorno di P, entro M_n, si può *esaurire* con un certo numero (finito) di n-cellule, che contengon *tutte quante* P all'interno. Allora un punto contorno Q (punto non interno) sarà caratterizzato da ciò che, comunque si ripartisca in n-cellule l'intorno di Q in M_n, accadrà *sempre* che una *almeno* di queste ha Q sul contorno. *Tali nuove definizioni di contorno e di punti interni d'una varietà topologica, hanno, esse pure, manifesto carattere invariante di fronte agli omeomorfismi*. Qual rapporto ha il contorno così definito per M_n, col contorno di un C_n, che reticoli la varietà? È chiaro che, se Q è un punto contorno di M_n, esso non può intanto esser interno ad una n-cellula di C_n (ad una sola, perchè le cellule non hanno punti interni comuni). Esso dunque dovrà trovarsi sul contorno di almeno una n-cellula; cioè su almeno una $(n-1)$-cellula. Ora, se

Un complesso C_{k-1}, che possa, entro C_n, considerarsi come contorno di un C_k di C_n, si chiamerà un *complesso contornante* o, più spesso, un *complesso nullo*.

Poichè una colonna di H_k è il simbolo di un $(k-1)$-ciclo (contorno di una k-cellula; pag. 168), da quanto precede risulta che:

Un complesso nullo o è un ciclo, ovvero è l'insieme di un numero finito di cicli (della stessa dimensione), aventi al più comune un complesso di dimensione inferiore di un'unità.

Ricordando poi che un ciclo non omogeneo è una varietà generalizzata singolare chiusa (n° 62), si può dire altresì che:

Il contorno di una M_n topologica (luogo dei punti delle cellule di un C_n), consta di una o più varietà topologiche chiuse (eventualmente generalizzate e singolari) di dimensione $n-1$. Questa proprietà può raffrontarsi con quella, meno circostanziata, di pag. 91.

Un'altra proprietà semplice, ma importante, che deriva dalle precedenti considerazioni, è questa:

Dati due complessi (anche generalizzati) C'_k, C''_k, formati con k-cellule di un C_n, la loro somma (mod. 2) ha per contorno la somma (mod. 2) dei loro contorni.

Infatti, se una cellula E_{k-1} appartiene a ν' k-cellule di C'_k e a ν'' k-cellule di C''_k, e vi sono ν k-cellule comuni a questi due insiemi di ν', ν'' k-cellule, la E_{k-1} apparterrà a $\nu'+\nu''-2\nu$ k-cellule di $C'_k + C''_k$; ond'essa farà parte del contorno di $C'_k + C''_k$ soltanto se $\nu'+\nu''$ è dispari, pel che occorre e basta che sia

dispari uno ed uno solo dei numeri ν', ν''. Cioè E_{k-1} apparterrà al contorno di $C'_k+C''_k$, se appartiene ad uno e ad uno solo dei contorni di C'_k, C''_k. D'altronde le E_{k-1} che appartengono ad uno ed uno solo dei contorni di C'_k, C''_k, costituiscon la somma (mod. 2) di tali contorni, perchè i punti interni alle E_{k-1}, che giacciono in ambedue i contorni, non fan parte della loro somma (n° 65).

68. - Facciamo alcuni esempi illustrativi delle considerazioni generali precedenti.

a) Il contorno (ipersuperficie sferica) M_{n-1} d'un'ipersfera di S_n si può concepire come insieme di due cellule E_{n-1}, aventi in comune un'ipersuperficie sferica M_{n-2} di S_{n-1}; e ciò dividendo quel contorno in due emisferi, mediante un iperpiano diametrale. Alla sua volta M_{n-2}, mediante un iperpiano diametrale del suo spazio ambiente S_{n-1}, può dividersi in due $(n-2)$-cellule, aventi in comune una M_{n-3} chiusa, contorno di un'ipersfera di S_{n-2}; e così proseguendo. Si trova in tal guisa che il contorno di un'ipersfera di S_n è un complesso C_{n-1}, i cui punti riempiono una varietà chiusa M_{n-1}, *caratterizzata topologicamente* dalle matrici d'incidenza:

$$H_0=\|1\ 1\|,\quad H_1=H_2=\dots=H_{n-1}=\left\|\begin{matrix}1&1\\1&1\end{matrix}\right\|.$$

Ogni varietà topologica avente questo schema, si chiama la *varietà chiusa elementare* della topologia, perchè è la più semplice varietà chiusa. Essa è omeomorfa al contorno di una cellula ipersferica

Un complesso C_{k-1}, che possa, entro C_n, considerarsi come contorno di un C_k di C_n, si chiamerà un *complesso contornante* o, più spesso, un *complesso nullo*.

Poichè una colonna di H_k è il simbolo di un $(k-1)$-ciclo (contorno di una k-cellula; pag. 168), da quanto precede risulta che:

Un complesso nullo o è un ciclo, ovvero è l'insieme di un numero finito di cicli (della stessa dimensione), aventi al più comune un complesso di dimensione inferiore di un'unità.

Ricordando poi che un ciclo non omogeneo è una varietà generalizzata singolare chiusa (n° 62), si può dire altresì che:

Il contorno di una M_n topologica (luogo dei punti delle cellule di un C_n), consta di una o più varietà topologiche chiuse (eventualmente generalizzate e singolari) di dimensione $n-1$. Questa proprietà può raffrontarsi con quella, meno circostanziata, di pag. 91.

Un'altra proprietà semplice, ma importante, che deriva dalle precedenti considerazioni, è questa:

Dati due complessi (anche generalizzati) C'_k, C''_k formati con k-cellule di un C_n, la loro somma (mod. 2) ha per contorno la somma (mod. 2) dei loro contorni.

Infatti, se una cellula E_{k-1} appartiene a ν' k-cellule di C'_k e a ν'' k-cellule di C''_k, e vi sono ν k-cellule comuni a questi due insiemi di ν', ν'' k-cellule, la E_{k-1} apparterrà a $\nu'+\nu''-2\nu$ k-cellule di $C'_k + C''_k$; ond'essa farà parte del contorno di $C'_k + C''_k$ soltanto se $\nu'+\nu''$ è dispari, pel che occorre e basta che sia

dispari uno ed uno solo dei numeri ν', ν''. Cioè E_{k-1} apparterrà al contorno di $C'_k + C''_k$, se appartiene ad uno e ad uno solo dei contorni di C'_k, C''_k. D'altronde le E_{k-1} che appartengono ad uno ed uno solo dei contorni di C'_k, C''_k, costituiscon la somma (mod. 2) di tali contorni, perchè i punti interni alle E_{k-1}, che giacciono in ambedue i contorni, non fan parte della loro somma (n° 65).

68. - Facciamo alcuni esempi illustrativi delle considerazioni generali precedenti.

a) Il contorno (ipersuperficie sferica) M_{n-1} d'un'ipersfera di S_n si può concepire come insieme di due cellule E_{n-1}, aventi in comune un'ipersuperficie sferica M_{n-2} di S_{n-1}; e ciò dividendo quel contorno in due emisferi, mediante un iperpiano diametrale. Alla sua volta M_{n-2}, mediante un iperpiano diametrale del suo spazio ambiente S_{n-1}, può dividersi in due $(n-2)$-cellule, aventi in comune una M_{n-3} chiusa, contorno di un'ipersfera di S_{n-2}; e così proseguendo. Si trova in tal guisa che il contorno di un'ipersfera di S_n è un complesso C_{n-1}, i cui punti riempiono una varietà chiusa M_{n-1}, *caratterizzata topologicamente* dalle matrici d'incidenza:

$$H_0 = \| 1 \ 1 \|, \quad H_1 = H_2 = \dots = H_{n-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

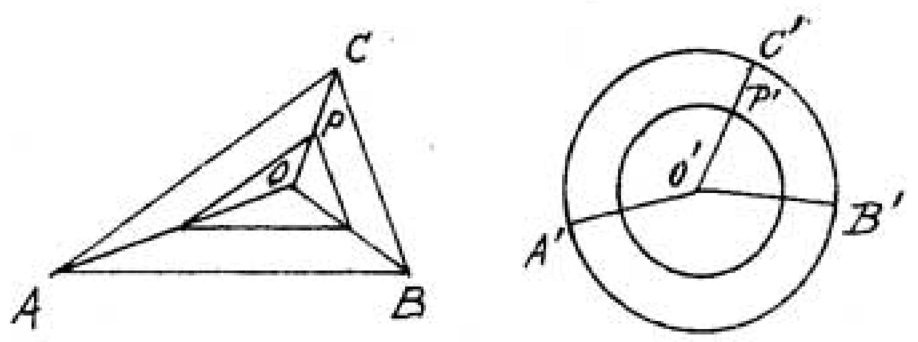
Ogni varietà topologica avente questo schema, si chiama la *varietà chiusa elementare* della topologia, perchè è la più semplice varietà chiusa. Essa è omeomorfa al contorno di una cellula ipersferica

E_n e quindi anche al contorno di un poliedro elementare P_n, poichè tutta l'ipersfera E_n è omeomorfa a P_n (*).

b) Una superficie cilindrica o _tubo cilindrico_, ottenuta avvolgendo un rettangolo in modo che coincidan coppie di vertici consecutivi, può altresì concepirsi come risultante da due rettangoli, che abbian due prefissate coppie di lati opposti coincidenti (ved. figura a pag. seguente). Per essa è $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 2$, e le sue matri-

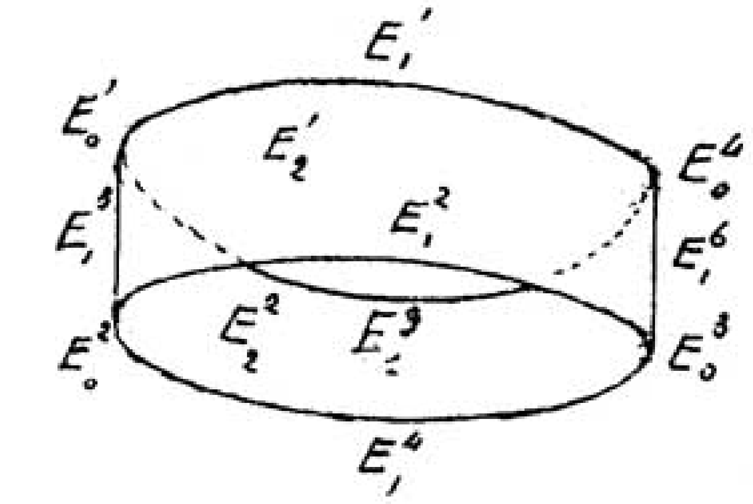
---

(*) Ved. pag. 93. – Ecco come dimostrasi elementarmente questa proprietà. Riferiamoci al caso di un triangolo e di un cerchio ($n = 2$). Poniamo fra i contorni delle due figure un omeomorfismo Ω, che muti ordinatamente i punti A, B, C in A', B', C' e i segmenti AB, BC, CA negli archi $A'B', B'C', C'A'$ (esterni l'uno all'altro) (pag. 115). Posto poi un omeomorfismo ω tra i segmenti OC, $O'C'$, ove O è un punto arbitrario _interno_ al triangolo ed O' il centro del cerchio, facciamo corrispondere il perimetro di un triangolo interno ed omotetico al dato rispetto ad O, ad una circonferenza concentrica colla data e ad essa interna, quando il primo ha per vertice P un punto interno ad OC, e la seconda passa pel punto P' omologo di P in ω. Si chiamino infine omologhi due punti del perimetro di quel triangolo e della circonferenza, quando da O, O' son proiettati mediante semirette, che incontrino il perimetro del triangolo dato e la circonferenza del cerchio dato secondo punti omologhi in Ω.



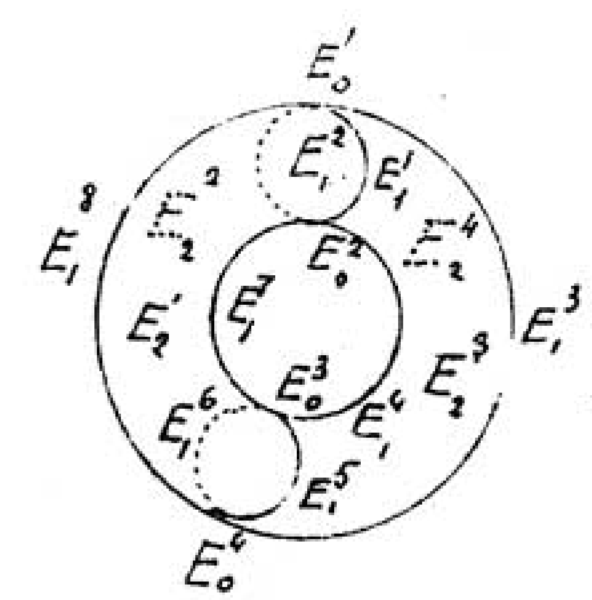
Il ragionamento si estende ovviamente.

ci d'incidenza sono:



$$H_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad H_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

c) Saldando due tubi pei loro contorni si ha l'_anello_ o _toro_, il quale può imaginarsi costituito da quattro 2-cellule $E_2^1, E_2^2, E_2^3, E_2^4$, la seconda e la quarta delle quali s'indican con lettere punteggiate, perchè in figura son completamente coperte dalle cellule E_2^1, E_2^3; da otto 1-cellule, e da quattro 0-cellule. Pel toro è dunque $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 4$ ed



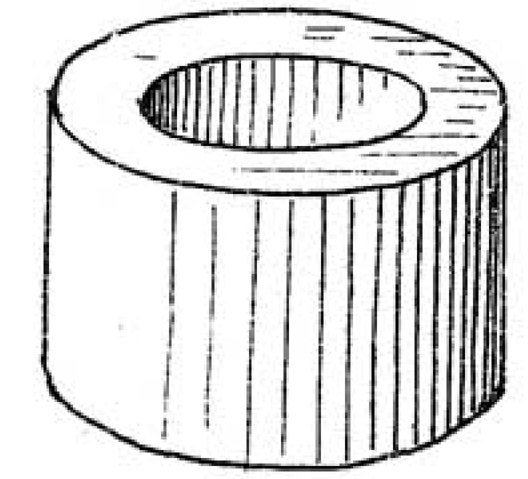
$$H_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad H_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad H_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

d) Di _tubi ad n dimensioni_ se ne possan avere più specie. Si parta da un parallelepipedo n-dimensionale Q_n, e si ponga un omeomorfismo qualunque Ω, tra due faccie parallele $(n-1)$-dimensionali. Ogni coppia di punti omologhi in Ω si consideri come un solo "elemento", e si assuman inoltre, come "elementi", gli altri punti di Q_n. Una varietà M_n, che rappresenti omeomorficamente gli elementi così definiti, è un tubo n-dimensionale di 1ª specie. È appena necessario di avvertire, che ciò presuppone che sia dato un senso alle relazioni di vicinanza degli elementi considerati (cfr. colla pag. 174). Il modo di definire tali relazioni è ovvio. Ci tratterremo un istante sulla cosa, sulla quale in seguito, in casi analoghi, non insisteremo, perchè il lettore potrà analogamente completare da sè, senza difficoltà. Due "elementi", che sieno punti di Q_n, son vicini, se son vicini anche come punti di Q_n. Un elemento, che sia un punto di Q_n, è vicino ad un elemento, che sia una coppia di punti omologhi in Ω, se il primo punto è vicino ad uno della coppia. Due elementi, che sieno coppie di punti omologhi in Ω son vicini, se son costituiti da due coppie di punti vicini.

Del resto il tubo si può concretare in mille modi diversi. Per es. così: Si proietti Q_n da un punto O, esterno allo S_n che lo contiene. Si ottiene una figura Q', di semirette aventi l'origine O, nella stella Σ di centro O, in un S_{n+1}. È un angoloide, le cui facce son le proiezioni delle facce di Q_n. Si può imaginare facilmente un sistema continuo ∞^1 di omeomorfismi della stella Σ in sè, che contenga l'identità, e che finisca col mutare Q' in un angoloide Q'', nel quale le due facce, corrispondenti a quelle che si eran fissate in Q_n, sieno riempite da semirette a due a due opposte; senza che per altre semirette di Q'' accada mai il fatto di trovarne due opposte. È una deformazione continua di Q' in Q''. Alla figura Q'' si può allora associare una figura Q''', costituita,

anzichè da semirette, da rette della stella O. Le rette di Q''' son quelle che contengon le semirette di Q''. Ad ogni elemento di Q'' risponde così con continuità un elemento di Q'''; ma la corrispondenza inversa è biunivoca soltanto generalmente. Fanno invero eccezione le rette di Q''' che contengono coppie di semirette opposte di Q''. Nella grassmanniana (n° 24) i cui punti rappresentan le rette di S_{n+1}, alla figura Q''' corrisponde una varietà, che è un modello concreto della M_n sopra considerata.

Un altro modo più elementare, ma sotto certi aspetti non meno istruttivo, per ottenere un modello concreto di M_n, è illustrato, per $n = 3$, dalla figura quì accanto. (Si tratta della regione a tre dimensioni limitata da due superficie cilindriche coassiali, finite, una interna all'altra, e da due corone circolari). La possibilità di ottenere questa M_3 per omotopia da un parallelepipedo, portando a coincidere due facce opposte, è intuitiva.



Nel tubo n-dimensionale di 1ª specie T_n^1 son restate le imagini delle facce del parallelepipedo Q_n, che non si son portate a coincidere. E possiamo continuare a chiamar parallele due di queste imagini, quando provengan da facce parallele di Q_n. Occorre però avvertire, che una delle $2n-2$ facce $(n-1)$-dimensionali, rimaste in T_n^1, non è necessariamente omeomorfa alla faccia di Q_n di cui essa è imagine, perchè, nel portare a coincidere le due facce parallele inizialmente prescelte in Q_n, dal contorno di una delle $2n-2$ faccie restanti, spariscon quelle coppie di cellule a $0, 1, \ldots, n-2$ dimensioni che vengono a coincidere.

Fra due facce parallele di T_n^1 pongasi un omeomorfismo Ω_1, e si consideri la varietà M_n, che ha come elementi i punti di T_n^1 non appartenenti alle facce fissate, e le coppie di punti di T_n^1 omologhi in Ω_1. Si ottiene così un tubo n-dimensionale di 2ª specie T_n^2. Proseguendo in tal modo, perverremo ad un tubo n-dimensionale di specie n, che sarà una varietà chiusa, la quale generalizza il toro, e si chiama perciò anello o toro ad n dimensioni.

È manifesto che un tubo di specie qualunque è omogeneo in ogni suo punto, che non appartenga al contorno. Per es. quando si costituisce il tubo di 1ª specie "portando a coincidere" (nel senso precisato) due facce parallele di Q_n, le due cellule E_n costituenti gl'intorni di due punti P_1, P_2, interni alle due facce e corrispondenti in Ω, si riuniscono l'una all'altra, venendo a combaciare lungo due $(n-1)$-cellule appartenenti ai loro contorni, cosicchè l'"elemento" (P_1, P_2) risulta interno ad una e ad una sola n-cellula, che costituisce il suo intorno entro M_n.

Applicando la conclusione al toro n-dimensionale si può dunque dire che il toro n-dimensionale è una varietà omogenea.

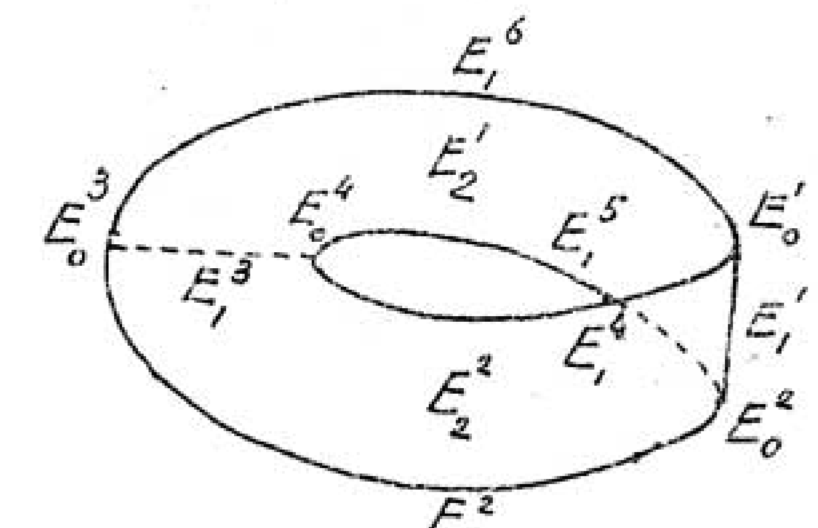
Tralasciamo d'indicare le matrici d'incidenza dei tubi n-dimensionali, perchè ormai la loro determinazione non presenta difficoltà.

Osservazione. - Due tubi della stessa specie non son però necessariamente omeomorfi, giacchè le loro proprietà posson esser notevolmente diverse, a seconda della natura degli omeomorfismi, che, per costruirli, si pongon fra le coppie di facce parallele di Q_n (*). Ciò viene in parte ulteriormente chiarito in e); ma meglio ancora più tardi, quando parleremo delle varietà orientabili.

e) La superficie di Möbius (di cui un modello si ottiene notoriamente da un rettangolo di carta, avvolgendolo in modo che vengano a coincidere le due coppie di vertici opposti) può coprirsi, come indica la figura, con un complesso C_2, avente $\alpha_0=4$, $\alpha_1=6$, $\alpha_2=2$, e le matrici:

$$H_0=\left\| 1\ 1\ 1\ 1 \right\| \quad H_1=\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| , \qquad H_2=\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Il suo contorno è costituito dal ciclo unidimensionale $(0, 1, 0, 1, 1, 1)$ somma (mod. 2) delle due colonne di H_2. Considerata una cellula bidimensionale E_2^3, che sia contornata dallo stesso ciclo, e che non incontri altrove la



superficie di Möbius (che non la incontri almeno astrat-

(*) Non è pertanto topologicamente definito l'anello n-dimensionatamente; n° 57, (Oss. 1ª), l'insieme di questa e della cellula E_2^3 fornisce una superficie chiusa che ha le stesse H_0, H_1, e come nuova H_2 la seguente:

$$H_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Verifichiamo che tale superficie chiusa è omeomorfa al piano proiettivo.

Dividiamo perciò il piano proiettivo in tre cellule bidimensionali E_2^1, E_2^2, E_2^3, come mostra la figura 1, e distribuiamo i nomi delle cellule a zero e ad una dimensione del complesso, secondo indica la figura stessa.

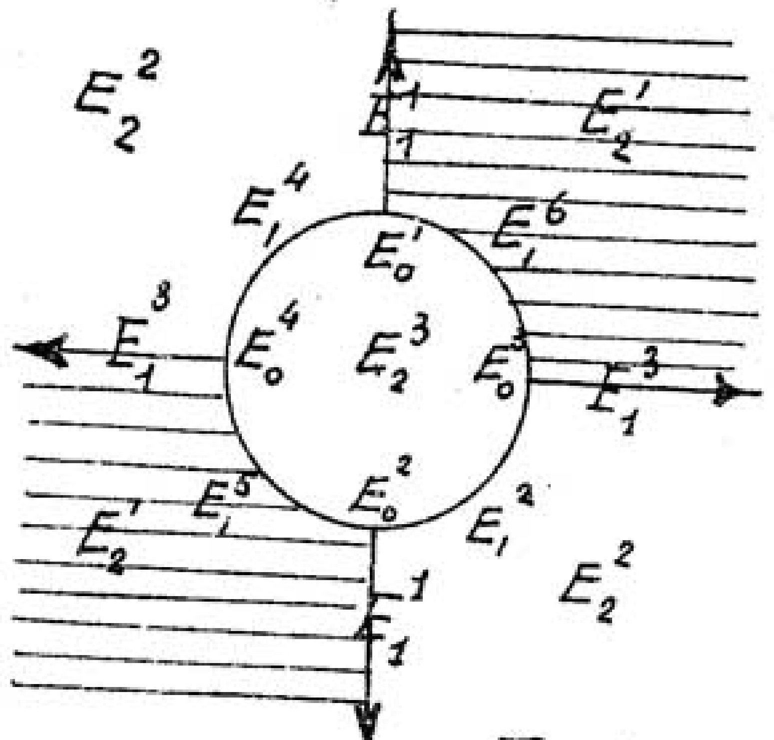


Fig. 1

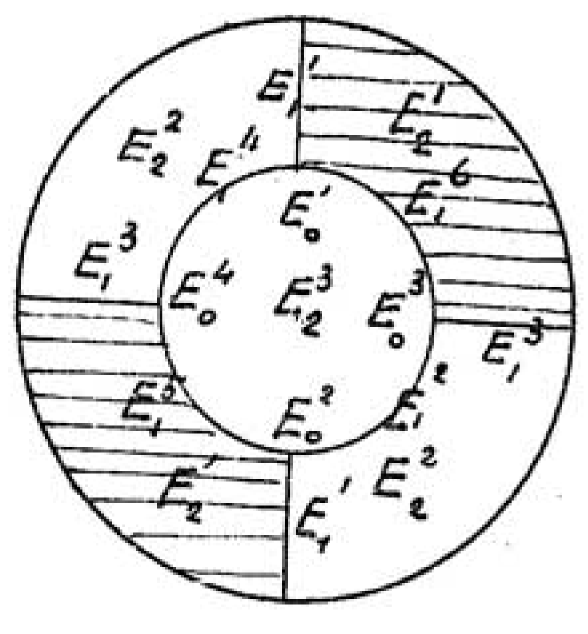


Fig. 2

La parte E_2^1 è costituita da due pezzi, metricamente distinti, che si riconnettono all'infinito; e similmente la parte E_2^2. Che effettivamente E_2^1 (e analogamente E_2^2) sia una cellula bidimensionale, segue da ciò: che il piano proiettivo è manifestamente equivalente dal punto di vista topologico, ad un cerchio reticolato nel modo indicato dalla figura 2, qualora si

le, di cui si parla a pag. 9 del libro del Lefschetz, L'Analysis situs et la géométrie algébrique (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

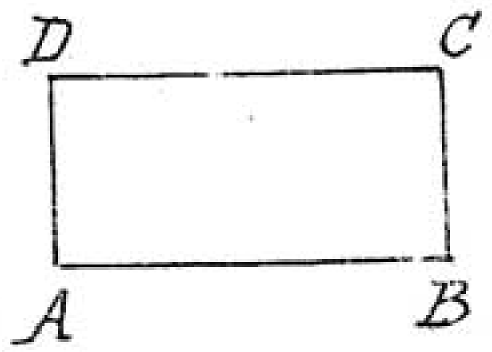
considerino come un sol punto (all'infinito) due punti diametralmente opposti di ciascuna coppia di archi, dei quattro in cui è divisa la circonferenza del cerchio (*). Nella rappresentazione considerata, E_2^1 diviene omeomorfa alla cellula ottenuta dalle due parti tratteggiate del cerchio, "rendendole adiacenti" lungo i loro archi esterni. Premesso questo, risulta senz'altro che il piano proiettivo è topologicamente equivalente alla superficie chiusa prima costruita, perchè le due varietà hanno lo stesso schema.

Osservazione. - Secondo la definizione di tubo n-dimensionale di 1ª specie, contenuta in d), la superficie di Möbius è un tubo bidimensionale (di 1ª specie), il quale ha però proprietà topologiche profondamente diverse dal tubo cilindrico (vedremo in seguito che la superficie di Möbius è unilatera, mentre il tubo cilindrico è bilatero).

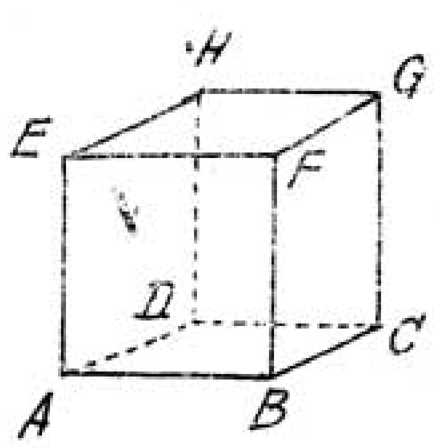
Basta del resto, per convincersi della non equivalenza topologica delle due superficie, il fatto che il contorno della superficie di Möbius è un solo ciclo lineare, mentre il contorno del tubo cilindrico consta di due cicli lineari. La diversità delle due superficie consegue dal modo com'esse derivan da un parallelogrammo (o rettangolo), secondo il concetto esposto in d). Nel 1° caso l'o

(*) L'omeomorfismo del piano proiettivo π, coi punti del cerchio (in quanto i punti della circonferenza sieno accoppiati nel modo detto), si può porre proiettando prima π da O in una semisuperficie sferica di centro O, tangente a π nel centro della cellula E_2^3, eppoi proiettando questa superficie su π, dal punto diametralmente opposto al centro di E_2^3.

meomorfismo Ω', fra due lati paralleli del rettangolo, associa due vertici di questi lati, quando son consecutivi; nel 2° caso quando son opposti.



Da un rettangolo $ABCD$ posson derivare tre specie di superficie chiuse. Il toro propriamente detto s'ottiene associando, in un primo omeomorfismo Ω, le coppie di punti dei lati AB, CD, in modo che A, B abbiano per omologhi rispettivamente D, C. Dopo ciò, gli altri due lati opposti AD, BC divengon cicli lineari ($A=D$, $B=C$), sicchè un omeomorfismo Ω_1 fra le cellule unidimensionali AD, BC, che faccia corrispondere rispettivamente ad A, D i punti B, C, dà luogo ad un omeomorfismo fra i suddetti cicli lineari; e le coppie di punti omologhi in tal omeomorfismo si debbon considerare associate in un solo elemento, per ottenere il toro. Ma Ω_1 si può anche scegliere in modo che faccia corrispondere ad A, C e a D, B; e si ha una seconda specie di superficie chiusa, che è come un toro, il quale abbia subito una sorta di distorsione su sè stesso. Una terza specie di superficie chiusa, s'ottiene scegliendo Ω in modo che ad A corrisponda C e a B, D; ed Ω_1 in modo che A, C, D, B sien coppie di punti omologhi.



Ad analoghe, ma ben più numerose, alternative posson assoggettarsi gli omeomorfismi $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ quando $n>2$. Per es. per $n=3$ ai vertici A, B, C, D di una faccia, Ω può far corrispondere i vertici della faccia opposta nell'ordine E, F, G, H, in modo cioè che due vertici omologhi sien consecutivi, oppure far corrispondere i vertici della faccia opposta, se-

condo una delle permutazioni circolari, o inverse delle circolari, cui si sottoponga $EFGH$. E ciò perchè condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di Ω, è soltanto che a vertici consecutivi dell'una faccia, rispondano vertici consecutivi dell'altra. È chiaro che in tal modo s'ottengon tipi distinti di tubi tridimensionali di 1ª specie; ecc..

69. – A questo punto, per procedere nello studio delle matrici d'incidenza, è opportuno _qualche brevissimo richiamo al calcolo delle matrici_ (*).

Una matrice $A=\|a_{rs}\|$ di m orizzontali e di n verticali si dirà del _tipo_ (m,n). _Prodotto_ di una matrice $A=\|a_{rs}\|$ di tipo (m,n), per una matrice $B=\|b_{st}\|$ di tipo (n,p), è la matrice $C=\|c_{rt}\|$, di tipo (m,p), il cui elemento generico è

$$c_{rt}=\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, b_{st} .$$

Si scrive $C=AB$ (**). Una matrice con tutti gli elementi nulli dicesi una _matrice nulla_.

Il teorema fondamentale, che ci occorre ricordare dalla teoria delle matrici, _i cui elementi son numeri interi, è il seguente_:

(*) Ved. per es. il trattato dello _Scorza_, _Corpi numerici e algebre_ (Messina, Principato, 1921), in fondo al quale trovasi anche un'ampia bibliografia in proposito.

(**) Si avvertirà che i prodotti AB, BA esiston simultaneamente, soltanto se $m=p$.

Data una matrice siffatta A di tipo (m,n), esiston due matrici quadrate B, C, rispettivamente degli ordini m, n, a determinante uguale a ± 1, tali che:

$$BAC = A^* ,$$

ove A^* è una matrice del tipo (m,n), così costituita:

$$\left\| \begin{matrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|$$

$d_1, d_2, \dots, d_r$ denotando i divisori elementari della matrice A. Cioè d_1 è il massimo comune divisore degli elementi di A; $d_1 d_2$ il m.c.d. dei determinanti minori di 2º ordine, estratti da A; $d_1 d_2 d_3$ il m.c.d. dei minori di 3º ordine; ...; $d_1 d_2 \dots d_r$ il m.c.d. dei minori di ordine massimo r, non tutti nulli, che posson estrarsi da A; r è infine la caratteristica di A. Aggiungasi che d_1 è il m.c.d. dei numeri $d_1, d_2, \dots, d_r$; d_2 il m.c.d. dei numeri $d_2, \dots, d_r$; e così via.

I divisori elementari son invarianti, nel senso che, moltiplicando a sinistra A per una qualsiasi matrice quadrata d'ordine m, a determinante unitario, e a destra per una qualsiasi matrice quadrata d'ordine n, a determinante unitario, la nuova matrice prodotto, di tipo (m,n), ha gli stessi divisori elementari di A.

70. - Il teorema precedente, applicato in particolare alla matrice d'incidenza H_k (nº 64) del complesso C_n, ci dice che esistono due matrici quadrate B, C degli ordini rispettivi α_{k-1}, α_k, a determinante unitario, tali che $B H_k C = H_k^*$, ove H_k^* è definita in modo simile alla A^* del nº precedente. Denoteremo di solito le suddette matrici quadrate, invece che colle lettere B, C, rispettivamente colle A_{k-1}^{-1}, B_k. Il simbolo A_{k-1} designa insomma la matrice quadrata (a determinante unitario) inversa di quella prima denotata con B.

Taluni dei divisori elementari di H_k posson essere diversi da 1; ma, poichè tutti i numeri interi che entrano nelle nostre considerazioni debbon esser ridotti rispetto al modulo 2, i divisori elementari di H_k, che sieno numeri pari, vanno posti uguali a zero; mentre quelli dispari vanno posti uguali ad 1. È appena necessario avvertire che, se i minori di un certo ordine di H_k son tutti pari, lo sono anche i minori di ordine superiore; e vanno considerati come se fossero nulli. Occorre aggiungere, a scanso di equivoci, che il segno dei minori estratti da H_k non ha alcuna importanza. Intanto questo segno non è legato ad alcuna proprietà sostanziale del complesso, perchè esso dipende soltanto dall'ordine in cui si considerano le linee che concorrono a formare il minore, ovvero dall'ordine in cui si considerano le $(k-1)$-cellule e le k-cellule di C_n. Il segno è infine, come il valore numerico del minore, irrilevante, perchè ridotti tutti gl'interi ch'entrano in giuoco rispetto al modulo 2, anche i numeri interi ne gativi si riducono ad uno dei valori 0, 1.

Per *caratteristica* ρ_k *di* H_k, *ridotta al modulo 2*, deve naturalmente intendersi l'ordine massimo dei determinanti aventi valori *non tutti pari*, che posson estrarsi da H_k. Anche la matrice H_k^* dovrà intendersi ridotta al modulo 2, ed allora i primi ρ_k elementi della *diagonale principale* (elementi che occupan lo stesso posto sia nella riga come nella colonna di cui ognuno fa parte) verranno uguali ad 1, e tutti gli altri uguali a 0; cosicchè H_k ed H_k^* avranno la stessa caratteristica e gli stessi divisori elementari 1.

Per lo studio del complesso C_n, apparirà dal seguito fondamentale l'uso delle matrici H_k, A_{k-1}, B_k, H_k^* $(k=1,2,\dots,n)$.

XIX.- Determinazione dei cicli d'un complesso. - Ranghi di connessione del complesso.

71. - La forma lineare $\eta_k^{i1}x_1+\eta_k^{i2}x_2+\dots+\eta_k^{i\alpha_k}x_{\alpha_k}$, i cui coefficienti son gli elementi d'un'orizzontale della matrice H_k, e dove $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ è il simbolo di un C_k di C_n, ha il valore 0 od 1 (mod. 2), secondo che il numero delle k-cellule di C_n, che figurano in C_k e che contengono la cellula E_{k-1}^i, corrispondente a quella orizzontale, è pari o dispari.

Invero, se C_k contiene la k-cellula E_k^j di C_n, cosicchè è $x_j=1$, o questa cellula contiene E_{k-1}^i, ed allora anche il coefficiente η_k^{ij} di x_j è 1; oppure questa cellula non contiene E_{k-1}^i, ed allora $\eta_k^{ij}=0$. Sicchè, nel primo caso, si

ha un contributo di un'unità al valore della forma lineare; nel secondo caso, nessun contributo. Da ciò deriva che il prodotto

$$H_k \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha_k} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \eta_k^{1j} x_j \\ \dots\dots \\ \sum_{j=1}^{\alpha_k} \eta_k^{\alpha_{k-1} j} x_j \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{\alpha_{k-1}} \end{Vmatrix},$$

dà luogo ad un simbolo $(y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_{k-1}})$ di un C_{k-1} di C_n, il quale consta di tutte le $(k-1)$-cellule di C_n, che appartengono ad un numero dispari di k-cellule di C_k, cioè (pag. 199) al contorno di C_k. Dunque:

Il simbolo del contorno di un complesso C_k entro C_n, si ottiene moltiplicando (a destra) la matrice d'incidenza H_k pel simbolo di C_k.

Ne deriva, come immediato corollario, che:

I cicli k-dimensionali, e complessi C_k ognun dei quali si scinde in più cicli k-dimensionali di C_n, son le soluzioni (o meglio hanno per simboli le soluzioni) in numeri interi, ridotti al modulo 2, del sistema di equazioni lineari – che indicheremo con (H_k) –

$$(H_k) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_k} \eta_k^{ij} x_j = 0 \qquad (i=1,2,\dots,\alpha_{k-1}).$$

Poichè le colonne di H_k son simboli di $(k-1)$-cicli contornanti le k-cellule di C_n (n°. 67), esse son soluzioni del sistema

$$(H_{k-1}) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} \eta_{k-1}^{ij} x_j = 0 \qquad (i=1,2,\dots,\alpha_{k-2})$$

Da questo segue che:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} \eta_{k-1}^{ij}\,\eta_k^{jl}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,\alpha_{k-2}\\ l=1,2,\dots,\alpha_k\end{pmatrix},$$

epperò $H_{k-1}\cdot H_k=0$, ossia:

Il prodotto di due matrici d'incidenza successive è nullo.

72. – Fra i k-cicli di C_n ve ne sono di quelli nulli, e di quelli che non contornano complessi C_{k+1} di C_n. Quanti sono gli uni e gli altri?
Poichè (n°. 67) il contorno di un C_{k+1} di C_n consta di una combinazione lineare (mod. 2) di colonne della matrice H_{k+1}, e le colonne linearmente indipendenti di questa matrice sono tante quant'è la caratteristica ρ_{k+1} di H_{k+1} (*), ogni k-ciclo nullo sarà combinazione lineare di ρ_{k+1} colonne linearmente indipendenti di H_{k+1}. D'altra parte il numero delle soluzioni linearmente indipendenti (mod. 2) del sistema di α_k equazioni lineari omogenee (H_k) è $\alpha_k-\rho_k$, sicchè (n° 71) $\alpha_k-\rho_k-\rho_{k+1}$ *denota il numero dei k-cicli non nulli che bisogna aggiungere ai ρ_{k+1} k-cicli, linearmente indipendenti, per ottenere un sistema di $\alpha_k-\rho_k$ k-cicli indipendenti, mediante i quali possa esprimersi, con una combinazione lineare (a coefficienti interi, ridotti al mod. 2), ogni altro k-ciclo del dato complesso C_n.*

Indicheremo questo numero $\alpha_k-\rho_k-\rho_{k+1}$ con r_k $(0<k<n;\ r_k\ge 0)$ e lo chiameremo il *k-esimo rango*

(*) I teoremi della teoria delle equazioni lineari omogenee e delle loro soluzioni, si trasportano ovviamente a sistemi di equazioni lineari omogenee e di soluzioni, che si considerino definite soltanto rispetto al modulo 2.

(di connessione) del complesso C_n. Si ha così la relazione

$$\alpha_k-\rho_k=\rho_{k+1}+r_k \qquad (0<k<n).$$

E completeremo questo gruppo di $n-1$ relazioni, associandovene altre due relative a $k=0$, $k=n$. Per $k=0$ è facile provare che, designato con r_0 (*0-rango di connessione*) il numero dei complessi in cui scindesi il dato C_n (nn. 57, 64), sussiste la relazione $\alpha_0-r_0=\rho_1$. Infatti, se $(x_1,x_2,\dots,x_{\alpha_0})$ è il simbolo d'uno 0-ciclo nullo, vi sono nel detto simbolo due sole x uguali ad 1, e le altre son nulle. Le due x non nulle son certamente relative a due vertici che appartengono al medesimo degli r_0 complessi in cui scindesi C_n, perchè ognuno dei C_1 in cui scindesi un dato 1-complesso di C_n, in corrispondenza ai singoli n-complessi, privi di cellule comuni, in cui ripartiscesi C_n, ha un proprio contorno. Per ciò il simbolo $(x_1,x_2,\dots,x_{\alpha_0})$ soddisfa (mod. 2) al sistema di equazioni lineari omogenee:

$$(H_0)\qquad \begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_{m_1}=0\\ x_{m_1+1}+x_{m_1+2}+\dots+x_{m_2}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{m_{r_0-1}+1}+\dots+x_{\alpha_0}=0\end{array}\quad,$$

ove gl'interi $m_1,m_2,\dots,m_{r_0-1}$ hanno i significati del n° 64. Ora le r_0 equazioni (H_0), nelle $x_1,x_2,\dots,x_{\alpha_0}$, son linearmente indipendenti, perchè due qualunque di esse non hanno variabili comuni; dunque esse ammettono α_0-r_0 soluzioni indipendenti. Epperò tale è il massimo numero degli 0-cicli nulli linearmente indipendenti, contenuti in C_n. Ma questo numero è altresì uguale al numero delle colonne linearmente

$$\sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} \eta_{k-1}^{ij}\,\eta_k^{jl}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,\alpha_{k-2}\\ l=1,2,\dots,\alpha_k\end{pmatrix},$$

epperò $H_{k-1}\cdot H_k=0$, ossia:

<u>Il prodotto di due matrici d'incidenza successive è nullo.</u>

72. – Fra i k-cicli di C_n ve ne sono di quelli nulli, e di quelli che non contornano complessi C_{k+1} di C_n. Quanti sono gli uni e gli altri?

Poichè (n° 67) il contorno di un C_{k+1} di C_n consta di una combinazione lineare (mod. 2) di colonne della matrice H_{k+1}, e le colonne linearmente indipendenti di questa matrice sono tante quant'è la caratteristica ρ_{k+1} di H_{k+1} (*), ogni k-ciclo nullo sarà combinazione lineare di ρ_{k+1} colonne linearmente indipendenti di H_{k+1}. D'altra parte il numero delle soluzioni linearmente indipendenti (mod. 2) del sistema di α_k equazioni lineari omogenee (H_k) è $\alpha_k-\rho_k$, sicchè (n° 71) $\alpha_k-\rho_k-\rho_{k+1}$ <u>denota il numero dei k-cicli non nulli che bisogna aggiungere ai ρ_{k+1} k-cicli, linearmente indipendenti, per ottenere un sistema di $\alpha_k-\rho_k$ k-cicli indipendenti, mediante i quali possa esprimersi, con una combinazione lineare (a coefficienti interi, ridotti al mod. 2), ogni altro k-ciclo del dato complesso C_n.</u>

Indicheremo questo numero $\alpha_k-\rho_k-\rho_{k+1}$ con r_k ($0<k<n$; $r_k\geq 0$) e lo chiameremo il <u>k-esimo rango</u>

(*) I teoremi della teoria delle equazioni lineari omogenee e delle loro soluzioni, si trasportano ovviamente a sistemi di equazioni lineari omogenee e di soluzioni, che si considerino definite soltanto rispetto al modulo 2.

<u>(di connessione) del complesso C_n</u>. Si ha così la relazione

$$\alpha_k-\rho_k=\rho_{k+1}+r_k \qquad (0<k<n).$$

E completeremo questo gruppo di $n-1$ relazioni, associandovene altre due relative a $k=0$, $k=n$. Per $k=0$ è facile provare che, designato con r_0 (<u>0-rango di connessione</u>) il numero dei complessi in cui scindesi il dato C_n (nn. 57, 64), sussiste la relazione $\alpha_0-r_0=\rho_1$. Infatti, se $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_0})$ è il simbolo d'uno 0-ciclo nullo, vi sono nel detto simbolo due sole x uguali ad 1, e le altre son nulle. Le due x non nulle son certamente relative a due vertici che appartengono al medesimo degli r_0 complessi in cui scindesi C_n, perchè ognuno dei C_1 in cui scindesi un dato 1-complesso di C_n, in corrispondenza ai singoli n-complessi, privi di cellule comuni, in cui ripartiscesi C_n, ha un proprio contorno. Per ciò il simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_0})$ soddisfa (mod. 2) al sistema di equazioni lineari omogenee:

$$(H_0)\qquad \begin{aligned} &x_1+x_2+\cdots+x_{m_1}=0\\ &x_{m_1+1}+x_{m_1+2}+\cdots+x_{m_2}=0\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &x_{m_{r_0-1}+1}+\cdots+x_{\alpha_0}=0\end{aligned},$$

ove gl'interi $m_1, m_2, \dots, m_{r_0-1}$ hanno i significati del n° 64. Ora le r_0 equazioni (H_0), nelle $x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_0}$, son linearmente indipendenti, perchè due qualunque di esse non hanno variabili comuni; dunque esse ammettono α_0-r_0 soluzioni indipendenti. Epperò tale è il massimo numero degli 0-cicli nulli linearmente indipendenti, contenuti in C_n. Ma questo numero è altresì uguale al numero delle colonne linearmente indipendenti della matrice H_1 (chè ognuna di queste è appunto simbolo di uno 0-ciclo nullo, ed ogni tal ciclo è combinazione lineare delle colonne di H_1), dunque $\alpha_0 - \tau_0$ è uguale alla caratteristica ρ_1 di H_1.

L'ultima relazione ($k = n$), la scriveremo sotto la forma $\alpha_n - \rho_n = \tau_n$, intendendo di <u>definire</u> con questa lo <u>n-esimo rango</u> τ_n, che introduciamo per render completamente simmetriche le notazioni. Pertanto <u>lo n-rango</u> <u>esprime</u> <u>il massimo numero di cicli n-dimensionali indipendenti</u>, <u>che appartengono al complesso</u> C_n.

Si osserverà che <u>per un complesso</u> C_n, <u>il quale reticoli una varietà omogenea</u>, τ_n <u>uguaglia il numero</u> τ_0 <u>dei complessi connessi in cui scindesi</u> C_n (*), perchè ogni tal complesso è un n-ciclo, e d'altronde n-cicli di C_n non possono altrimenti ottenersi; ed è infine chiaro che questi n-cicli, non avendo alcuna cellula in comune, son indipendenti. Se poi la varietà, oltrechè omogenea, è irriducibile, risulta $\tau_0 = \tau_n = 1$.

Scriviamo le relazioni ottenute nel modo seguente

$$\alpha_0 - \tau_0 = \rho_1,\ \alpha_1 - \tau_1 = \rho_1 + \rho_2,\ \alpha_2 - \tau_2 = \rho_2 + \rho_3, \dots ;\ \alpha_{n-1} - \tau_{n-1} = \rho_{n-1} + \rho_n,\ \alpha_n - \tau_n = \rho_n,$$

e sommiamole a membro a membro, dopo averle alternatamente moltiplicate per +1 e −1. Verrà:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\alpha_i - \tau_i) = 0$$

<u>Per un complesso C_n, che copra una M_n omogenea, irriducibile, risulta:</u>

(*) È questo un caso particolare delle relazioni $\tau_i = \tau_{n-i}$, che si vedranno in seguito.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i = 1 + (-1)^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \tau_i \quad ,$$

che è <u>la formula di Eulero (relativa ai poliedri) estesa ad un qualunque n-complesso</u>.

L'importanza di tale relazione, come dei ranghi di connessione, risulterà maggiormente dal seguito, quando avremo provato il fatto fondamentale che, per una data varietà topologica, questi ranghi hanno valori indipendenti dal complesso con cui la varietà si copre, per guisa che essi e la caratteristica $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots \pm \alpha_n$ della varietà, sono invarianti topologici. Ammesse le relazioni $\tau_i = \tau_{n-i}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, che verranno in seguito dimostrate, ne deriva, per n pari $= 2\nu$,

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + \alpha_n = 2\left[1 - \tau_1 + \tau_2 - \dots + (-1)^{\nu-1}\tau_{\nu-1}\right] + (-1)^{\nu}\tau_{\nu},$$

e per n dispari:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_n = 0 \quad .$$

<u>Osservazione</u>. - I ranghi d'indici $0, 1, \dots, k-1$ del complesso C_k formato da tutte le k-cellule di C_n, son manifestamente uguali ad $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$, mentre il k-rango è espresso da $\alpha_k - \rho_k = \tau_k + \rho_{k+1}$. Pel considerato C_k i ranghi d'indici $0, k$, e cioè τ_0, $\tau_k + \rho_{k+1}$, hanno valori generalmente disuguali, e ciò in relazione al fatto che, se pure la M_n reticolata da C_n è omogenea, non lo è di necessità la M_k reticolata da C_k.

73. - La trattazione sopra esposta, che riconduce, con tanta elegante semplicità, la topologia combinatoria alla teoria delle matrici e delle equazioni lineari (mod. 2), è ispirata all'eccellente opera del <u>Veblen</u> (The

Cambridge colloquium lectures on analysis situs, 1916-1922), cui si accennò a pag. 112. All'opera stessa ci terremo vicini anche in talune delle ulteriori questioni.

Il Veblen ha sistematizzato e ampliato l'uso delle matrici di interi, le più importanti delle quali erano state considerate da Poincaré nelle sue classiche memorie sulla topologia (Journ. de l'Éc. Polyt., 1895; Rend. di Palermo, 1899 e 1904; Proceedings of the London Math. Soc., 1900; Bulletin de la Soc. Math. de France, 1901; Journ. de Math., 1901). Nella memoria di Poincaré dei Rend. di Palermo, 1899, trovasi la formula di Eulero generalizzata. Per la bibliografia in proposito, ved. l'articolo di Dehn e Heegard nell'Encyk. der Math. Wissen., pagg. 182, 183, 199. Altre rappresentazioni simboliche di un complesso C_1 (*) - mediante una forma quadratica o un determinante - sono state proposte da Jordan (J. f. Math. 1869) e da Brunel (Bordeaux Mém., 1895). Pel raffronto col Veblen occorre avvertire che i numeri r_i, che noi qui chiamiamo ranghi di connessione, differiscon da quelli, R_i, che il Veblen chiama ordini di connessione, o connettività di ordini dati (connectivity of i-th order), per ciò: che $r_0 = R_0$, $r_i = R_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Noi riserbiamo la denominazione di ordini di connessione ai numeri di Betti, che introdurremo in seguito per le varietà bilatere.

(*) La denominazione di complesso, nel senso topologico-combinatorio, è di Listing (1862), come la stessa denominazione di topologia (1847), che già Leibniz, in una lettera a Huygens, chiamava Analysis situs.

74.- Il valore dei ranghi d'una varietà chiusa elementare [n° 68, a)] e la loro invarianza topologica, discendono dal teorema seguente:

Sopra una n-cellula E_n un k-ciclo Γ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ è sempre nullo. Qui parliamo naturalmente di un ciclo qualsiasi, indipendentemente da un complesso, supposto preesistente, che reticoli E_n (ved. il successivo n° 76). Basta, per la dimostrazione, riferirsi ad una cellula E_n di S_n. Il ciclo Γ_k può reticolarsi con un complesso C_k soddisfacente alla definizione b) del n° 57, e, assunto un punto O di E_n, fuori di C_k, le singole cellule di Γ_k possono essere inoltre scelte di un ordine di grandezza talmente piccolo (n° 37, Oss. 2ª), che ciascuna di esse non venga incontrata ulteriormente da una retta congiungente O con uno qualunque de' suoi punti (*). Gli angoloidi che proiettan da O le singole k-cellule di Γ_k, son perciò omeomorfi alle cellule stesse (essendo omologhi un punto di una cellula e la sua semiretta proiettante). Ne deriva che la figura di punti F, riempita dai segmenti che proiettan da O i punti di una k-cellula E_k di Γ_k, è una $(k+1)$-cellula E_{k+1} di F.

Consideriamo infatti un poliedro elementare F' dello

(*). Si suppone dunque che O sia scelto fuori delle rette che contengono eventuali segmenti di Γ_k. Dopo ciò, una retta qualunque per O incontra Γ_k in un numero finito (≥ 0) di punti (n° 50), onde, usufruendo dei luoghi dei punti di contatto delle eventuali tangenti a Γ_k mandate da O, il ciclo Γ_k può esser suddiviso nel modo voluto.

spazio S_{k+1}, e fissiamone una faccia E'_k ed il vertice opposto O'. Posto un omeomorfismo tra E_k ed E'_k, per ogni punto P della figura F, distinto da O, consideriamo il segmento OP di F, che lo contiene. Questo segmento ha l'altro estremo in un punto ben determinato R di E_k, a cui corrisponda, sopra E'_k, il punto R'. Al punto P di F si potrà pertanto associare quel punto P' del segmento $O'R'$, appartenente ad F', che divide $O'R'$ nello stesso rapporto in cui P divide OR ($OP : RP = O'P' : R'P'$). Infine al punto O si associerà O'. Si viene in tal guisa a porre un omeomorfismo tra F ed F'. Epperò F è una $(k+1)$-cellula.

Il contorno della E_{k+1} proiezione di E_k, è costituito da E_k, e dalle k-cellule proiezioni da O delle $(k-1)$-cellule formanti il contorno di E_k. Ciò risulta senz'altro dalla rappresentazione omeomorfica delle E_{k+1} sul poliedro F'. Ne segue che la varietà M_{k+1}, riempita dai punti delle E_{k+1} proiezioni da O delle singole k-cellule di Γ_k, nelle quali si considerino come *distinti* gli *eventuali* punti comuni a due di quelle E_{k+1}, che non sieno sul contorno di entrambe (n° 57, Oss. 1ª) [punti provenienti da rette per O plurisecanti Γ_k], è una varietà topologica, il cui contorno è formato soltanto da Γ_k. E difatti ogni $(k-1)$-cellula del complesso C_k, reticolante Γ_k, è comune ad un numero pari di k-cellule di C_k, onde ogni k-cellula, proiezione di una di quelle $(k-1)$-cellule, è comune ad un numero pari di $(k+1)$-cellule di M_{k+1}; sicchè quella k-cellula viene a sparire dal contorno della varietà complessiva. La M_{k+1} ha punti singolari negli accennati punti comuni a due sue $(k+1)$-cellule, non appartenenti al contorno di entrambe. Per avere un'*imagine non singolare* della M_{k+1}, bisogna costruire una M'_{k+1}, di uno

spazio S_d, che abbia lo stesso schema della M_{k+1}, senza che si presenti più, per le $(k+1)$-cellule di M'_{k+1}, l'inconveniente segnalato: il che è manifestamente possibile in infiniti modi. Le M_{k+1}, M'_{k+1} posson allora riferirsi in un omeomorfismo, facente corrispondere le cellule associate dei due schemi di connessione: omeomorfismo, s'intende in quanto i punti singolari di M_{k+1} si riguardino come risultanti dalla sovrapposizione di più punti, nel senso specificato. Altrimenti M'_{k+1} è, *sopra* E_n, una varietà singolare di cui M_{k+1} è l'imagine. I punti singolari di M_{k+1} appariscon come tali anche nel senso proiettivo, in quanto in ciascuno di essi s'incrociano più falde $(k+1)$-dimensionali (*).

Osservazione 1ª. — Il teorema dimostrato, va ravvicinato (conformemente a proprietà più generali, che si vedranno in seguito) al teor. di pag. 123, secondo cui Γ_k è omotopo ad un punto entro E_n.

Osservazione 2ª. — Dal teor. segue, come al n° 44, che *un ciclo* Γ_k $(k=0,1,\dots,n-2)$, *appartenente al contorno di una cellula* E_n, *è nullo entro il contorno della cellula stessa*.

Osservazione 3ª. — Ricordando la definizione dei ranghi, e raffrontandola col teorema dimostrato, si deduce che *i ranghi di connessione di una* E_n, *come di*

(*) Si pensi, per es., alla M_2 proiettante, da un generico punto O di S_3, il ciclo Γ_1 rappresentato dalla figura di pag. 125.

una varietà chiusa elementare, hanno i valori $\tau_0=\tau_n=1$, $\tau_1=\tau_2=\dots=\tau_{n-1}=0$. Pertanto la caratteristica $\alpha_0-\alpha_1+\dots+(-1)^n\alpha_n$ di una varietà chiusa elementare M_n, è uguale a zero o a 2 secondo che n è dispari o pari.

75. – Gioverà qui, pel seguito, di raccogliere qualche altra proprietà delle n-cellule e dei loro contorni:

a) Una varietà chiusa elementare M_{n-1} di S_n, è sempre ivi il contorno di una cellula E_n.

Questo consegue senz'altro dalla combinazione del teorema di Jordan generalizzato (pag. 106), e del teorema di Schoenflies generalizzato (pag. 125). La proposizione stessa si stabilisce senza difficoltà per una M_{n-1} analitica, o che soddisfaccia a condizioni infinitesimali anche meno restrittive di quelle richieste per l'analiticità.

b) Una varietà chiusa elementare M_{n-2}, sul contorno di una E_n, divide questo in due $(n-1)$-cellule, aventi quella M_{n-2} come comune contorno.

Mercè lo stesso procedimento del n° 44 si può costruire sempre una E_{n-1} del contorno Γ_{n-1} di E_n, a cui la data M_{n-2} sia interna. Questa E_{n-1} si trasforma omeomorficamente in un'ipersfera E'_{n-1} di S_{n-1}, e su essa la M'_{n-2}, imagine di M_{n-2}, dà luogo ad una ripartizione dei punti interni ed esterni, rispetto ad M'_{n-2}. Il luogo dei punti interni e dei punti di M'_{n-2}, costituisce, secondo il teorema di Schoenflies generalizzato, una E'_{n-1}. Da ciò la conclusione.

c) Vi sono infinite $(n-1)$-cellule (non singolari) i cui

punti interni sono altresì interni ad una data E_n, e che hanno per contorno una data varietà elementare M_{n-2}, appartenente al contorno Γ_{n-1} di E_n.

Basta riferirsi ad un modello ipersferico E_n di S_n. Scelto un punto O interno ad E_n, si consideri la M_{n-1} luogo dei punti contenuti nei segmenti congiungenti O coi singoli punti della M_{n-2} data sul contorno di E_n. Riferita omeomorficamente la M_{n-2} al contorno di una cellula ipersferica di S_{n-1}, di centro O', si pone subito, come al n° 74, un omeomorfismo tra questa cellula e la M_{n-1} sopra considerata; la quale dunque è una E_{n-1}, il cui contorno è la data M_{n-2}: La M_{n-1} costruita non ha punti singolari, perchè ogni semiretta di origine O contiene un sol punto della M_{n-2}.

Osservazione. – Alla conclusione c) si giunge altresì nel modo seguente. In forza di b) e del teor. di pag. 115, si può trasformare la data n-cellula in un ipersfera E_n $(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\le 1)$, in modo che la varietà chiusa elementare, data sul contorno della n-cellula, si trasformi nella M_{n-2} ipersferica segata sul contorno di E_n da $x_n=0$. Considerata una delle due E_{n-1} in cui M_{n-2} divide questo contorno, la si trasformi in una $(n-1)$-cellula ellissoidale, contornata dalla M_{n-2} fissa, mediante la trasformazione $x_1=x'_1,\dots,x_{n-1}=x'_{n-1}$, $x_n=\frac{x'_n}{1-t}$ (per $t\neq 1$, compreso fra 0 e 2) e, per $t=1$, nella $(n-1)$-cellula ipersferica, contornata sempre da quella M_{n-2}, mediante la proiezione $x_1=x'_1,\dots,x_{n-1}=x'_{n-1}$ sull'iperpiano $x_n=0$. Si viene così a deformare, con un'isotopia (pag. 121), una delle $(n-1)$-cellule, in cui il contorno di una n-cellula E_n è diviso da una varietà elementare, nella $(n-1)$-cellula restante, passando, come stadi intermedi della deformazione, per infinite $(n-1)$-cellule, soddisfacenti a c). S'intende che l'isotopia agisce entro la data E_n.

d) Una, E_{n-1}, delle $(n-1)$-cellule - non singolari - di cui in c), divide E_n in due n-cellule, ognuna delle quali ha per contorno quella E_{n-1} ed una delle parti in cui il contorno di E_n è diviso dal contorno di E_{n-1}.

Possiamo riferirci ad una E_n ipersferica di S_n. La E_{n-1} considerata, che passa per la M_{n-2} elementare data sul contorno di E_n, ed una, E'_{n-1}, delle parti in cui M_{n-2} divide il contorno stesso, hanno in comune M_{n-2} e nessun altro punto. Onde l'insieme delle E_{n-1}, E'_{n-1} forma una varietà chiusa elementare M_{n-1} (pagg. 115, 118), che, nello S_n, contorna, per a), una n-cellula E'_n. Ora è facile provare che E'_n è parte di E_n, ossia che ogni punto P, interno ad E'_n, lo è altresì ad E_n. Invero, la semiretta che va da P ad un punto della forma ipersferica contorno di E_n, non situato su E'_{n-1}, deve incontrare il contorno di E'_n; e siccome non incontra E'_{n-1}, taglia necessariamente E_{n-1} almeno in un punto, non situato su M_{n-2}, cioè in un punto Q interno ad E_{n-1}. Questo punto è dunque interno anche ad E_n. D'altronde il segmento PQ non incontra il contorno di E_n; perciò anche P è interno ad E_n.

e) Già abbiamo osservato, nel n° 57 (pag. 169), che, se E'_n, E''_n sono incidenti secondo una $(n-1)$-cellula E_{n-1} dei loro contorni, e non hanno altri punti comuni, il loro insieme costituisce una n-cellula. Il contorno di questa è la somma (mod. 2) dei contorni di E'_n, E''_n.

Abbiansi ora due $(n+1)$-cellule E'_{n+1}, E''_{n+1} aventi in comune soltanto due n-cellule E'_n, E''_n dei loro contorni, e queste, alla lor volta, abbiano in comune soltanto una E_{n-1} dei rispettivi contorni. Le relazioni d'incidenza fra le n-cellule e le $(n+1)$-cellule, sieno insomma le medesime di quelle passanti fra le 0-cellule e le 1-cellule di una M_1 chiusa elementare (di una circonferenza), che sono state considerate nel n° 68, a). In forza dell'osservazione ricordata, l'insieme delle E'_n, E''_n dà una E_n, costituente l'intersezione completa delle E'_{n+1}, E''_{n+1} e situate sui loro contorni. Onde l'insieme delle E'_{n+1}, E''_{n+1} è una $(n+1)$-cellula. Il ragionamento si estende ovviamente, e si arriva alla seguente conclusione generale:

Se si ha un insieme di un numero finito di $(n+p)$-cellule, $(n+p-1)$-cellule, ..., n-cellule, le quali sieno incidenti ad una medesima E_{n-1}, situata sui loro contorni, e le relazioni d'incidenza, che passan fra le $(n+i)$-cellule e le $(n+i+1)$-cellule $(i=0,1,\dots,p-1)$, considerate come relazioni d'incidenza fra i-cellule ed $(i+1)$-cellule, dà luogo ad uno schema caratterizzante una varietà chiusa elementare a p dimensioni, l'insieme dei punti delle cellule date costituisce una $(n+p)$-cellula.

Così per es., se si ha un insieme di quattro 2-cellule $(n=1, p=1)$ e di quattro 1-cellule passanti per un medesimo punto, tali che ogni 2-cellula contiene due 1-cellule, e, considerate le 2-cellule in un determinato ordine, ciascuna ha comune una ed una sola 1-cellula colla precedente e colla successiva, le relazioni d'incidenza fra le suddette 2-cellule ed 1 cellule, interpretate come relazioni d'incidenza fra 1-cellule e 0-cellule, caratterizzano un ciclo lineare (varietà M_1 chiusa elementare), epperò l'insieme dei punti di quelle cellule costituisce una 2-cellula. (Si pensi per es. alle 4 faccie d'un ottaedro passanti per un vertice).

L'insieme delle cellule di un n-complesso C_n, le quali son incidenti ad una i-cellula E_i di C_n ed hanno dimensione maggiore di i, dicesi una *stella* (di cellule) di cui E_i è *l'asse* o il *centro*. La *stella* dicesi *elementare*, se le relazioni d'incidenza fra le sue cellule son quelle considerate nel teorema precedente.

XX.- Congruenze ed omologie fra complessi e fra cicli.

76.- La relazione che passa tra un n-complesso, ordinario o generalizzato, C_n, e il complesso C_{n-1} (costituito da uno o più $(n-1)$-cicli, pag. 204) che ne forma il contorno, si esprime colla relazione

$$C_n \to C_{n-1} \qquad \text{oppure} \qquad C_{n-1} \leftarrow C_n \qquad (\text{mod. } 2),$$

e si legge C_n è congruo a C_{n-1} (mod. 2). La indicazione del modulo di solito si omette. La relazione non è simmetrica rispetto ai due complessi: il contorno è sempre quello indicato dalla punta della freccia.

Poincaré, che primo ha considerato le congruenze tra complessi, indica la relazione di congruenza col segno $\equiv$. Il segno $\longrightarrow$ è stato introdotto da *Alexander* (Trans. Am. Math. Soc., 1926) ed è più conveniente, se non altro perchè

la relazione ch'esso vuol designare non è simmetrica.

Quando C_n è un complesso senza contorni (una varietà topologica chiusa, come luogo di punti), cosicchè esso è l'insieme di uno o di più n-cicli, si dice che C_n è *congruo a zero* (mod. 2), e si scrive $C_n \to 0$. Relazioni del tipo considerato si chiaman *congruenze*. In base ad un'osservazione fatta nel n° 67 (pag. 204) possiamo affermare che, se due complessi C'_n, C''_n son rispettivamente congruenti a C'_{n-1}, C''_{n-1} (ove C'_{n-1}, C''_{n-1} posson anche, uno od entrambi, mancare, cioè esser zero), la somma (mod. 2) $C'_n + C''_n$ è congrua a $C'_{n-1} + C''_{n-1}$. Più in generale *è lecito addizionare a membro a membro (mod. 2) quante si voglian congruenze*.

Allarghiamo ora il significato della frase "complesso nullo" (o contornante), introdotta a pag. 204. Là si trattava di complessi *costituiti da cellule di un dato complesso ambiente* C_n. Qui invece parleremo di complessi qualunque (anche singolari), *considerati sopra* C_n, o, più esattamente *sopra la M_n riempita dai punti del complesso C_n*. E quando diciamo complesso C_k *sopra* C_n o *sopra* M_n, lo diciamo nel senso dichiarato nel n° 60. Il complesso C_k, *di dimensione qualunque k, anche maggiore di n*, è - si ricordi - un complesso (ordinario o generalizzato) che s'intende riferito ad un insieme I di punti di M_n, in tal guisa che il punto di I sia funzione univoca continua del punto variabile sulle singole parti connesse, in cui C_k eventualmente si scinda. Dare C_k sopra M_n, equivale cioè a dare sia il complesso C_k in sè, come la corrispondenza che rappresenta C_k sull'insieme I. Se C_k non è singolare (il che vuol dire: se non è rappresentato in modo singolare su M_n), esso è omeomorfo ad I, che è dunque un altro C_k: un complesso i cui punti appartengono effettivamente e non astrattamente ad M_n. Fra i complessi esistenti sopra M_n vi sono i complessi C_k di C_n ($k \leq n$), cioè i complessi formati con cellule di C_n. E' più esatto parlare di complessi sopra M_n, anzichè sopra C_n, perchè il concetto presuppone la considerazione di C_n come insieme di punti, piuttosto che come aggregato di un numero finito di cellule delle varie dimensioni; per modo che un complesso sopra C_n è un complesso sopra qualunque altro n-complesso che reticoli M_n. Tuttavia nel seguito, quando lo richieda la brevità del discorso, continueremo a parlare di complessi sopra un complesso.

Orbene, la frase "complesso nullo" si riferisce anche ai complessi considerati sopra C_n; e si dirà che C_k è nullo od omologo a zero (mod. 2), e si scriverà

$$C_k \sim 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

allora e solo allora che esista un complesso C_{k+1} sopra C_n, di cui C_k sia il contorno; sicchè $C_{k+1} \to C_k$. Pertanto, se $C_k \sim 0$, C_k consta di uno o più cicli, ossia non ha contorni (pag. 202). Quindi l'omologia $C_k \sim 0$ implica la congruenza $C_k \to 0$; ma non,

evidentemente, viceversa.

C'è di più da osservare, che le congruenze son relazioni per così dire assolute. Non occorre cioè in esse considerare una varietà ambiente; mentre le omologie s'intendono sempre rispetto ad un complesso o meglio varietà ambiente, che taluno (come il Lefschetz) chiama modulo dell'omologia. La indicazione dell'ambiente si omette quando non siavi ambiguità. Se occorre, scriveremo tra parentesi (amb. M_n), invece di: "rispetto all'ambiente M_n".

E' perciò chiaro che un complesso può esser omologo a zero sopra una varietà, e non sopra un'altra. Così per es. ogni ciclo C_k esistente sopra una varietà M_n è omologo a zero, nello spazio ambiente S_d a cui appartiene C_k, ossia sopra una cellula ipersferica E_d di S_d, contenente C_k (n° 74). Il circolo di gola di un toro non è omologo a zero sopra la superficie del toro, e lo è invece nello spazio ambiente; ecc..

Diamo qualche esempio di complessi singolari omologhi a zero. Deformiamo con continuità una superficie sferica, in modo che al termine della deformazione le due semi circonferenze, di estremi A', B', di un circolo massimo C_1 della sfera, si sovrappongano ad un segmento AB (sovrapponendosi naturalmente gli estremi agli estremi), e vi sia del resto corrispondenza biunivoca (continua) fra gli altri punti della sfera e della sua deformata S. Il complesso C_1 (insieme di due cellule contornate dallo 0-ciclo A', B') è rappresentato da un complesso singola re AB sopra S (AB è luogo di punti singolari anche per la varietà ambiente S).

E poichè il complesso C_1, singolare sopra S, contorna una (prescelta) calotta emisferica della superficie originaria, la quale calotta è un certo C_2, singolare sopra S, così C_1 costituisce sopra S un ciclo singolare omologo a zero. Si badi però che il circolo C_1 non è disteso sopra AB (pag. 180), perchè la corrispondenza fra i punti di AB ed i punti di C_1 non è sempre biunivoca nell'intorno di ogni coppia di punti corrispondenti. Su AB son invece distese, separatamente, le due semicirconferenze.

Un altro esempio, in cui l'imagine del complesso singolare omologo a zero non è luogo di punti singolari per la varietà ambiente, è il seguente: Consideriamo la M_3 formata dai punti di un ordinario toro (punti interni e punti della superficie contorno), e sia C_1 un circolo interno al toro e con questo coassiale. Sia inoltre Γ_1 un circolo, pure interno al toro, e vicinissimo a C_1. Si può allora imaginare una superficie S interna al toro, che abbia per contorno $C_1 + \Gamma_1$: una superficie del tipo di quella che contorna un altro toro, interno e coassiale col dato; lungo la quale si sia praticato un taglio, che abbia per bordi C_1, Γ_1. È dunque, entro M_3, $C_1 + \Gamma_1 \sim 0$. Se ora Γ_1 viene a coincidere con C_1, la superficie S si chiude di nuovo, ritornando ad essere il contorno di un toro. Chiamiamo R la superficie, nella nuova condizione. Essa può, manifestamente, porsi in corrispondenza continua con una corona circolare piana R', essendovi corrispondenza biunivoca fra i punti interni ad R' ed i punti di R diversi da quelli di C_1, mentre ogni

punto di C_1 proviene da due punti (distinti) della corona, uno sopra uno dei contorni di R' e l'altro sull'altro. Pertanto il complesso C_1' formato dai due contorni di R', è un complesso nullo singolare sopra M_3. Un complesso che copre doppiamente (pag. 180) C_1. Come complesso ordinario (semplice) C_1 è un ciclo non omologo a zero entro M_3 (ma però congruente a zero!), perchè non esiste alcuna superficie di M_3 che possegga C_1 come contorno (lo si intuisce, e lo si potrebbe agevolmente dimostrare); mentre C_1, come complesso doppio, è omologo a zero, entro M_3.

77. - Le omologie fra complessi della stessa dimensione, sopra una data varietà topologica, posson essere addizionate a membro a membro.

Ciò consegue senz'altro dal teorema finale del n° 67, quando i due complessi $C_k \sim 0$, $C_k' \sim 0$ sieno del complesso C_n reticolante la data M_n; chè allora $C_k + C_k'$ contorna il complesso somma di quelli contornati da C_k, C_k'. Onde $C_k + C_k' \sim 0$. Se si tratta invece di complessi C_k, C_k' sopra M_n, perchè abbia senso di considerar la loro somma, occorrerà che i due complessi sieno dati entro un medesimo complesso ordinario C_m, rappresen[tato] anch'esso sopra M_n. Ed allora l'affermazione c[on]segue senz'altro dalla sua validità nei riguardi dei [co]mplessi C_k, C_k', $C_k + C_k'$ considerati come complessi di C_m.

Un'omologia del tipo $C_k + C_k' \sim 0$ si scriverà pure sotto la forma $C_k \sim C_k'$ e si dirà che i due complessi C_k, C_k' (o le varietà dei loro punti) sono omologhi entro la data varietà topologica. Scrivere $C_k \sim C_k'$ (an biente M_n), significa dunque esprimere che esiste una varietà reticolata da un complesso C_{k+1}, che ha per contorno $C_k + C'_k$ e che è rappresentata sopra M_n.

L'omologia fra complessi è manifestamente una relazione simmetrica. Dimostriamo ch'essa è altresì una relazione riflessiva, quando si riferisca a cicli; cioè:

Ogni ciclo C_k, dato sopra una M_n, è ivi omologo di sè stesso e, più generalmente, C_k è omologo ad ogni ciclo C'_k, che reticoli la stessa varietà chiusa N_k, reticolata da C_k.

Si costruisca infatti, entro un iperpiano S_{d-1} di un S_d euclideo, una varietà R_k omeomorfa ad N_k. Si avranno in essa due cicli Γ_k, Γ'_k corrispondenti a C_k, C'_k. Assoggettiamo S_{d-1} ad una traslazione dell'ambiente S_d in sè, che muti S_{d-1} in un iperpiano distinto, parallelo. Sia $\bar{R}_k$ la trasformata di R_k; $\bar{\Gamma}_k$, $\bar{\Gamma}'_k$ i cicli trasformati di Γ_k, Γ'_k. I segmenti congiungenti le coppie di punti corrispondenti di R_k, $\bar{R}_k$ riempiono una varietà T_{k+1}, che è topologica. Invero, ogni cellula E_h $(h=0,1,\dots,k)$ di Γ_k genera nella traslazione una E_{h+1} (imagine delle coppie di punti della E_h e di un segmento; pag. 176). Sicchè T_{k+1} vien reticolata da un complesso C_{k+1}, le cui cellule E_{h+1} $(h=0,1,\dots,k)$ son quelle generate nel modo detto dalle E_h di Γ_k, e le 0-cellule son i vertici di Γ_k e di $\bar{\Gamma}_k$. Il contorno di C_{k+1}, cioè (n° 66) di T_{k+1}, è formato dalle sole k-cellule di Γ_k e di $\bar{\Gamma}_k$, perchè ognuna di queste appartiene ad una sola cellula E_{k+1} di C_{k+1}; mentre una k-cellula, generata da una $(k-1)$-cellula E_{k-1} di Γ_k,

appartiene ad un numero pari di $(k+1)$-cellule di C_{k+1}, che son quelle generate dalle k-cellule di Γ_k contenenti E_{k-1}. (È qui che interviene l'ipotesi che Γ_k sia un ciclo!). Il contorno di T_{k+1} è dunque formato dalle varietà R_k, $\bar{R}_k$, che posson altresì reticolarsi con Γ_k, e $\bar{\Gamma}'_k$. L'omeomorfismo ω tra R_k ed N_k, dà luogo ad una corrispondenza Ω tra T_{k+1} ed N_k, così generata: Dato un punto P di T_{k+1}, esso proviene da un sol punto di R_k e quindi vi corrisponde un sol punto P' di N_k, il quale è manifestamente funzione continua di P. Ogni P' di N_k rappresenta infiniti punti di T_{k+1}, situati sopra un segmento. La varietà T_{k+1} risulta singolare sopra M_n: essa ha per contorni Γ_k, $\bar{\Gamma}'_k$. Onde $\Gamma_k \sim \bar{\Gamma}'_k$. E poichè Γ_k, $\bar{\Gamma}'_k$ posson essere altresì rappresentati sopra M_n dai complessi C_k, C'_k rispettivamente ad essi omeomorfi, si conclude che $C_k \sim C'_k$.

Osservazione. — Se C_k, C'_k non sono cicli o complessi nulli (insiemi di cicli), il contorno della T_{k+1}, costruita come sopra, vien manifestamente formato dalle varietà R_k, $\bar{R}_k$ e dal complesso K-dimensionale generato dal contorno di C_k.

78. — L'omologia fra complessi sopra una data varietà topologica M_n, è una relazione transitiva; cioè se $C_k \sim C'_k$ e $C'_k \sim C''_k$ è $C_k \sim C''_k$.

Esiste invero sopra M_n un C_{k+1} di cui $C_k + C'_k$ è il contorno, ed un C'_{k+1} di cui $C'_k + C''_k$ è il contorno. In uno spazio euclideo S_d, costruiscasi una varietà M_{k+1} corrispondente in un omeomorfismo ω alla N_{k+1} reticolata da C_{k+1}; e sieno su essa Γ_k, Γ'_k, Γ_{k+1}

i complessi corrispondenti a C_k, C'_k, C_{k+1}. In un S'_R euclideo più ampio, contenente S_d, costruiscasi una M'_{k+1}, corrispondente, in un omeomorfismo ω', alla N'_{k+1} reticolata da C'_{k+1}. In base al teor. di pag. 39, la M'_{k+1} può esser fabbricata, cellula per cellula, in modo che contenga Γ'_k e non abbia altri punti comuni collo S_d (nè quindi altri punti comuni con M_{k+1}); e che ω' muti C'_k in Γ'_k, subordinando tra i due complessi lo stesso omeomorfismo subordinatovi da ω. Sieno Γ''_k, Γ'_{k+1} i complessi di M'_{k+1} corrispondenti a C''_k, C'_{k+1}. Il contorno del complesso $\Gamma_{k+1}+\Gamma'_{k+1}$ è formato dalla somma dei contorni dei due complessi, cioè da Γ_k e da Γ''_k. Onde entro la varietà topologica Q_{k+1}, insieme dei punti di M_{k+1}, M'_{k+1}, è $\Gamma_k \sim \Gamma''_k$. Ad un punto P di Q_{k+1}, che appartenga ad M_{k+1} (o ad M'_{k+1}), si associ quel determinato punto P' di M_n, che sta su N_{k+1} (o risp. su N'_{k+1}) e che corrisponde a P mediante ω^{-1} (od ω'^{-1}). Il punto P' è funzione univoca continua di P. E si conclude che $C_k \sim C''_k$.

79. — Che relazione havvi tra il concetto d'omologia e quello d'isotopia (pag. 121)? Dimostriamo che due cicli isotopi, sopra una M_n topologica, son sempre omologhi, rispetto ad M_n. Ci riserviamo di considerar più tardi la questione inversa.

Sieno C_k, C'_k due cicli sopra M_n, isotopi entro la varietà stessa. È manifesto il significato di questa frase: esiste un sistema continuo ∞^1 di omeomorfismi Ω_t, dipendenti da un parametro t, variabile (per es.) da 0 ad 1, tali che Ω_t muta C_k in un complesso C_k^t, di cui è individuata, per ogni t, una rappresentazione sopra M_n; e per $t=1$ il complesso C_k^t variabile coincide con C'_k. — In un iperpiano I di un S_d euclideo, costruiscasi una R_k corrispondente in un omeomorfismo ρ alla N_k reticolata da C_k; e si assoggetti dipoi I ad un sistema continuo ∞^1 di traslazioni τ_t dell'ambiente, che non mutino in sè I, ma lo portino in un iperpiano variabile I^t, che abbia come posizione finale I'. Le traslazioni del sistema posson supporsi individuate dal parametro t, variabile da 0 a 1. Sia R_k^t la varietà trasformata di R_k mediante τ_t. La Q_{k+1} (non singolare) generata dalla R_k^t mobile, è una varietà topologica avente per contorni R_k ed R_k^1 (n° 77); ed è manifesto com'essa possa rappresentarsi su M_n, in guisa che R_k, R_k^1 si rappresentino su N_k, N'_k. Un punto P_t di Q_{k+1} appartiene invero a una determinata R_k^t, la quale è omeomorfa alla N_k^t (riempita dai punti di C_k^t), mediante l'omeomorfismo $\tau_t^{-1}\rho^{-1}\Omega_t$; e quindi a P_t corrisponde un punto ben determinato P'_t di C_k^t, ed a questo un punto ben determinato P''_t di M_n. Essendo P''_t funzione continua di P'_t, e questa funzione continua di P_t, risulta P''_t funzione continua di P_t. Pertanto, sopra M_n, è $C_k \sim C'_k$.

XXI. — Il problema ed il teorema principale.

80. — Dobbiamo ora affrontare una questione vitale, la cui soluzione trasforma i risultati di topologia

combinatoria in proprietà essenziali di topologia del continuo:

Dato sopra un C_n (ordinario), o meglio sulla M_n topologica reticolata da C_n, un i-ciclo (eventualmente singolare) K_i (i minore, uguale o maggiore di n), riconoscere se questo ciclo è o non è omologo a zero.

Per rispondere, proveremo:

a) Che dato K_i sopra M_n, e dedotto da C_n un complesso regolare $\bar{C}_n$ (pag. 111), si può sempre costruire un ciclo K'_i, formato da cellule di $\bar{C}_n$, tale che $K_i \sim K'_i$; sicché K'_i svanisce se $i > n$, epperò è certo $K_i \sim 0$ per $i > n$.

b) Se K'_i è un complesso contornante di $\bar{C}_n$ ($i \leq n-1$) (pag. 204), è senz'altro $K'_i \sim 0$ epperò $K_i \sim 0$ (n° 78), e inoltre K_i risulta omologo ad una combinazione lineare (mod. 2) di colonne della matrice d'incidenza H_{i+1} di $\bar{C}_n$. Viceversa, proveremo che, se $K'_i \sim 0$, cioè $K_i \sim 0$, il ciclo K'_i è anche un ciclo contornante di $\bar{C}_n$. In questo modo il problema principale sarà ricondotto a determinare i cicli contornanti di $\bar{C}_n$; problema già risoluto.

Alla dimostrazione dei teoremi a), b), faremo seguire la dimostrazione dei teoremi:

c) I valori dei ranghi di connessione di M_n, determinati mediante C_n, son i medesimi di quelli determinati mediante $\bar{C}_n$.

d) Ogni i-ciclo sopra M_n o è omologo a zero (ciò si verifica sempre, quando è $i > n$), oppure è omologo ad una combinazione lineare (mod. 2) degli r_i cicli non nulli appartenenti a C_n ($i = 0, 1, \dots, n$), e questi cicli sono fra loro indipendenti.

L'ultimo risultato d), costituisce il teorema principale.

Il teorema a).

81.— Trasformiamo anzitutto la varietà data M_n in un'altra topologicamente equivalente, sulla quale sia più agevole lo studio della nostra questione.

In primo luogo, dal reticolato C_n passiamo ad un reticolato regolare $\bar{C}_n$, colle operazioni (di aggiunta a C_n di nuove cellule delle varie dimensioni) indicate nelle pagg. 111-112. È inteso che $\bar{C}_n$ deve soddisfare soltanto alle condizioni 1), 2), 4) delle pagg. 110-111, e non alla 3), in quanto la M_n può anche non esser totalmente connessa.

Si può ora costruire, in uno spazio euclideo S_d di dimensione d abbastanza grande, una varietà topologica M'_n coperta da un complesso (ordinario) regolare $\bar{C}'_n$, le cui cellule delle varie dimensioni $1, 2, 3, \dots, n$, sieno rispettivamente segmenti rettilinei, triangoli, tetraedri, …, poliedri elementari ad n dimensioni; per guisa che $\bar{C}_n$ e $\bar{C}'_n$ abbian lo stesso schema di connessione, e quindi le M_n, M'_n sieno topologicamente equivalenti. Basta all'uopo scegliere un primo poliedroide P_1 ad n dimensioni di $\bar{C}_n$, e riferirlo omeomorficamente ad un poliedro elementare P'_1 di un S_n, in guisa che si corrispondan le cellule delle varie dimensioni dei contorni di P_1, P'_1 (pag. 115); considerare indi un secondo poliedroide P_2 di $\bar{C}_n$, il cui contorno abbia comune con quello di P_1 qualche vertice o lato o faccia, ..., e costruire in un S_{n+1}, passante per S_n, un poliedro elementare P_2' riferito omeomorficamente a P_2, in guisa che si corrispondan le cellule delle varie dimensioni dei rispettivi contorni, e che fra queste coppie di cellule omologhe vi sieno quelle che P_1 e P_1' hanno rispettivamente in comune con P_2 e P_2', coincidendo altresì gli omeomorfismi tra queste coppie di cellule, tanto s'esse si consideran omologhe nella corrispondenza fra P_1 e P_1' come in quella fra P_2 e P_2'. E così proseguendo.

82. - In virtù del nº precedente, volendo dimostrare la proprietà a), potremo muovere addirittura da una varietà M_n costituita da poliedri elementari (del tipo della M_n' sopra costruita), e dal complesso regolare C_n di poliedri, che la reticola. Deducasi da C_n un <u>secondo</u> <u>complesso</u> <u>regolare</u> $\bar{C}_n$ di poliedri, (le cui cellule delle varie dimensioni ≥ 1 costituiranno un frazionamento delle cellule di ugual dimensione di C_n), colla costruzione indicata a pag. 111. Per seguir meglio la linea concettuale del ragionamento, ci riferiremo dapprima al caso particolare $n=2$, e ad un complesso ordinario unidimensionale (curva) K_1, effettivamente tracciato su M_2.

In primo luogo, mediante inserzione di nuovi vertici in K_1, è possibile dividere K_1 in 1-cellule siffatte, che ognuna <u>appartenga</u> <u>completamente</u> ad almeno una stella (di triangoli) (pag. 232), della rete triangolare $\bar{C}_2$ (stella avente il vertice in un vertice della rete medesima). Invero, un punto P di M_2 o sta sopra un solo triangolo di $\bar{C}_2$ (ed è interno a tal triangolo ovvero è un punto contorno, non

soltanto del triangolo, ma anche di M_2; punto contorno nel senso di ciascuna delle definizioni del nº 66), ed allora un arco abbastanza piccolo di una linea, la quale contenga P come punto interno, sta tutto in ogni stella cui appartenga quel triangolo; oppure P è centro di una stella della rete $\bar{C}_2$, ed anche in quest'ipotesi un arco abbastanza piccolo di una linea contenente P come punto interno, giace tutto in quella stella; o infine P appartiene ad un lato (1-cellula) $\underline{a}$ della rete $\bar{C}_2$, per cui passi più di un triangolo della rete (sicchè P è certamente un punto interno ad M_2 nel senso della definizione di pag. 127, cioè dal punto di vista della teoria degl'insiemi), ed allora un arco abbastanza piccolo di una linea contenente P come punto interno, giace tutto in ognuna delle <u>due</u> stelle di $\bar{C}_2$, che hanno per centri gli estremi di $\underline{a}$. Ciò posto, si consideri una 1-cellula AB, di estremi A, B, di K_1, la quale non appartenga tutta ad una stella della rete $\bar{C}_2$. Sieno A', B' due punti <u>interni</u> ad AB, vicinissimi rispettivamente ad A, B. In virtù di quanto precede <u>ogni</u> punto della cellula $A'B'$ è <u>interno</u> ad una 1-cellula <u>contenuta</u> <u>in</u> <u>AB</u>, appartenente ad una medesima delle stelle predette. Pel teorema di <u>H</u> <u>eine</u>-<u>Borel</u> (pagg. 90 e 147), è possibile considerare in AB un numero <u>finito</u> di archi (cellule), ciascun de' quali sia contenuto in una stella di $\bar{C}_2$, e tali che ogni punto di $A'B'$ sia interno ad uno (almeno) di essi. Da ciò, facendo astrazione dai punti interni comuni a queste cellule parziali, considerate a due a due, tenuto conto altresì che A', B' posson esser vicini quanto si vuole ad

A, B, si trae la conclusione. Per la quale è necessario il ragionamento esposto, allorchè non si vuol far uso dell'ipotesi che K_1 abbia in comune un numero finito di punti o di cellule con un lato qualunque della rete $\bar{C}_2$; il che può affermarsi per es., quando si sappia che K_1 è una linea analitica (cfr. colla pag. 140). La conclusione diventa evidente, se si suppone che K_1 possa esser sostituito da un complesso vicinissimo (che sarà adesso omologo, n° 79), avente per 1-cellule segmenti rettilinei (una linea poligonale).

83. - Le stelle di $\bar{C}_2$ che hanno come centri vertici di C_2 - le diremo le stelle S, mentre indicheremo con Σ una stella qualunque di $\bar{C}_2$ - son tali che un punto qualunque di M_2 o è interno ad uno dei triangoli di una (sola) di quelle stelle(*), oppure sta sul contorno di triangoli comuni a due o più delle S. Stabiliscasi una corrispondenza, che citeremo come "corrispondenza A"(**), tra i vertici di K_1 e taluni vertici di C_2 (non di $\bar{C}_2$, si badi bene!), associando ad un vertice di K_1, il quale sia in-

(*) Si tenga presente che ogni triangolo di $\bar{C}_2$ non contiene che un vertice di C_2.

(**) Tale corrispondenza è stata introdotta, per gli scopi di cui ci occupiamo, da Alexander (Transactions of the Amer. Math. Society, 1915, pag. 148) in una forma equivalente. Sotto la forma del testo, la "corrispondenza A" è stata considerata nell'Op. cit. del Veblen.

terno ad un triangolo di una S, il centro di questa; e ad un vertice di K_1, il quale stia sul contorno di triangoli comuni a due o più S, uno dei centri di queste S, scelto a nostro piacere. Ad ogni vertice di K_1 risponde così un sol vertice di C_2 (ma un vertice di C_2, che provenga da un vertice di K_1, può provenire anche da altri).

Se ora consideriamo una stella qualunque di $\bar{C}_2$, alla quale appartenga un vertice P di K_1, il vertice P' di C_2, associato a P, apparterrà alla medesima stella. Ciò è evidente, se P appartiene ad una sola S; se P appartiene a due o più S, esso sta in una 1-cellula ad esse comune, talchè ognuna delle stelle di $\bar{C}_2$, che contengono P, contiene altresì ognuno dei vertici di C_2 possibili posizioni di P'. Tenuto conto del fatto che due vertici di K_1, che sieno estremi della medesima 1-cellula di K_1, appartengono ad una (almeno) stessa stella di $\bar{C}_2$, ne segue che a quei due vertici corrispondono, mediante A, vertici di C_2 situati entrambi su quella stella; epperò tali vertici di C_2 o coincidono oppure son gli estremi di una medesima 1-cellula di C_2(*).

Se, invece di una linea K_1, si prende in esame una varietà topologica a due dimensioni K_2, coincidente in tutto o in parte con M_2, si giunge analogamente a simile conclusione, preparando anzitutto

(*) Qui si fa uso dell'ovvia proprietà seguente: Se C_2 è una rete regolare di triangoli e $\bar{C}_2$ un'altra rete regolare di triangoli, dedotta dalla prima, due vertici di C_2, appartenenti ad una stessa stella di $\bar{C}_2$, son vertici di un medesimo triangolo di C_2.

la K_2, mediante una sua propria reticolazione regolare, a elementi cellulari abbastanza piccoli, in guisa che per ogni 2-cellula (e quindi anche per ogni 1-cellula) della K_2, così reticolata, vi sia almeno una stella della rete $\bar{C}_2$ contenente quella cellula. Definita poi la "corrispondenza A" tra i vertici della reticolazione suddetta di K_2 e taluni vertici di C_2, si conclude che ad ogni terna di punti di K_2, che sieno vertici di una medesima 2-cellula della rete regolare che copre K_2, corrispondono uno, due o tre vertici di una medesima 2-cellula di C_2.

Infine è chiaro che, in luogo di varietà K_1, K_2 effettivamente appartenenti a M_2 (cioè di complessi K_1, K_2 rappresentati su M_2 in modo non singolare), si posson considerare varietà sopra M_2. Si tratta di formali cangiamenti del linguaggio. Naturalmente le cellule che si verranno a considerar sopra M_2, potranno anche essere singolari. Per es. una 1-cellula potrà ridursi ad un punto (contato infinite volte), cioè alla varietà delle coppie di punti omologhi in una corrispondenza tra un punto variabile di una 1-cellula ordinaria, ed un punto fisso di M_2.

84. – Indichiamo con A_0^i $(i=1,2,\dots,\alpha_0)$, A_1^j $(j=1,2,\dots,\alpha_1)$, A_2^l $(l=1,2,\dots,\alpha_2)$ le cellule delle dimensioni rispettive 0, 1, 2 di C_2, e con B_0^i $(i=1,2,\dots,\beta_0)$, B_1^j $(j=1,2,\dots,\beta_1)$, B_2^l $(l=1,2,\dots,\beta_2)$ le 0, 1, 2 - cellule di K (designando così il complesso K_1 o K_2, e intendendo che manchino le B_2 quando K ha la dimensione 1). Ogni vertice B_0^i di K – s'intende della rete regolare che si ha su K –

si congiungerà con un segmento rettilineo D_1^i al vertice di C_2 ad esso omologo nella corrispondenza A. Così ogni vertice B_0^i di K, determinerà una 1-cellula D_1^i, la quale sarà singolare, se B_0^i coincide col corrispondente vertice di C_2. I due vertici di una medesima 1-cellula B_1^i di K, vengono ad esser in tal guisa congiunti, mediante le 1-cellule D_1^j, D_1^l, o ad uno stesso vertice di C_2 o a due vertici di C_2, estremi di una 1-cellula A_1^s di C_2. In ogni modo i segmenti D_1^j, D_1^l appartengono ad una medesima stella Σ di $\bar{C}_2$ (n° 83). Si determina così un 1-ciclo Γ_1, costituito dalle 1-cellule B_1^i, D_1^j, D_1^l nel primo caso, e dalle 1-cellule $B_1^i, D_1^j, D_1^l, A_1^s$ nel secondo; e Γ_1 appartiene ad una stella Σ di $\bar{C}_2$. Da ciò segue che Γ_1 è il contorno di una 2-cellula D_2^i di M_2, appartenente a Σ. Invero, poichè il segmento congiungente il centro O della stella con un punto qualunque di questa appartiene alla medesima, i triangoli proiettanti da O le 1-cellule (segmenti) di Γ_1, costituiscono insieme una 2-cellula D_2^i (eventualmente singolare), contornata appunto da Γ_1 (è la stessa argomentazione di quella del n° 74; ved. altresì il teorema di pag. 231). Pertanto, ad ogni 1-cellula B_1^i di K, resta associata una 2-cellula D_2^i sopra M_2. Indicheremo con G_2 il complesso formato dalle cellule D_2^i (coi loro contorni).

Quanto precede, vale tanto se K è ad 1 come a 2 dimensioni. Esamineremo dapprima l'ipotesi che K sia un K_1. Le relazioni d'incidenza fra le 1-cellule D_1^i (che, si badi bene, non son tutte le 1-cellule di G_2) e le 2-cellule D_2^i di G_2 (che son tutte le 2-cellule di G_2), son le stesse di quelle che passano fra le 0-cellule

B_0^i e le 1-cellule B_1^j di k_1. Osservato questo, introduciamo l'ipotesi (non usata finora!) che k_1 sia un 1-ciclo, o un insieme di 1-cicli: allora la somma (mod. 2) dei contorni delle 1-cellule di k_1, non contiene alcuna 0-cellula di k_1; epperò il contorno della somma (mod. 2) delle 2-cellule di G_2, non contiene alcuna 1-cellula D_1^i. Dunque il contorno di G_2 consta di k_1, al quale debbon al più aggiungersi taluni 1-cicli (pag. 204), formati soltanto da cellule di C_2. Denoteremo con k_1' l'insieme (eventuale) di questi 1-cicli. Varrà la congruenza:

$$G_2 \to k_1 + k_1' \ (\mathrm{mod.}\ 2) \quad ,$$

e quindi l'omologia:

$$k_1 \sim k_1' \ (\mathrm{mod.}\ 2) \quad ,$$

che si ridurrà a $k_1 \sim 0$, se k_1' manca. Il teor. a) è così dimostrato, quando k è un 1-ciclo o un insieme di 1-cicli.

85. — Esaminiamo ora il caso in cui k è un k_2, e fissiamo l'attenzione sopra le tre 1-cellule B_1^i, B_1^j, B_1^l di k_2, che contornano una medesima 2-cellula B_2^r di k_2, la quale, ricordiamoci, appartiene ad una stella Σ di $\bar{C}_2$. Quelle 1-cellule determinano tre 2-cellule D_2^i, D_2^j, D_2^l di G_2, appartenenti a Σ, e incidenti a coppie colle 1-cellule che congiungono i tre vertici di B_2^r ai loro omologhi mediante A; omologhi che (nº prec.) sono tre vertici o due od un vertice di una medesima 2-cellula A_2^s di C_2, appartenente ancora a Σ. Nel primo caso le 2-cellule A_2^s, B_2^r, D_2^i, D_2^j, D_2^l coprono complessivamente una su-

perficie chiusa elementare (eventualmente singolare) S_2^r (cioè una varietà di punti "omeomorfa" ad una superficie sferica; pag. 205); nel secondo e terzo caso lo stesso può dirsi delle 2-cellule B_2^r, D_2^i, D_2^j, D_2^l. Così ad ogni 2-cellula B_2^r di k_2, appartenente ad una stella Σ di $\bar{C}_2$, viene a corrispondere una superficie elementare S_2^r, appartenente a Σ. Le cellule tridimensionali (singolari), che proiettan dal centro O di Σ, mediante segmenti contenuti in Σ, la superficie S_2^r, costituiscono un complesso(*), tra le cui 3, 2, 1-cellule passan le stesse relazioni d'incidenza che fra le 2, 1, 0-cellule d'una superficie chiusa elementare, epperò (pag. 231) l'insieme di quelle 3-cellule è una 3-cellula (singolare) D_3^r, appartenente a Σ, e contornata da S_2^r. L'insieme delle cellule D_3^r (e dei loro contorni) costituisce un complesso, che indicheremo con G_3.

Riassumendo: ad ogni 0-cellula B_0^i di k_2, vien associata una 1-cellula D_1^i di G_3; ad una 1-cellula B_1^i di k_2, una 2-cellula D_2^i di G_3; ad una 2-cellula B_2^i di k_2, una 3-cellula D_3^i di G_3. E le relazioni d'incidenza fra le cellule suddette di G_3 (che sono soltanto alcune 1, 2-cellule di G_3, e tutte le 3-cellule di G_3), son le medesime che passan tra le 0, 1, 2-cellule di k_2. Poichè, k_2 essendo un ciclo (ipotesi che qui si usa per la prima volta), nel fare la som-

(*) Ognuna delle suddette cellule tridimensionali, sopra M_2, è certo singolare, giacchè ogni suo punto rappresenta ∞^1 punti di una 3-cellula ordinaria, di cui quella è l'imagine sopra M_2.

ma (mod. 2) delle sue 2-cellule, si eliminan tutte le 1-cellule che costituiscono i contorni di quelle, così nel fare la somma delle 3-cellule di G_3, onde costituire questo complesso, si elimineranno tutte le 2-cellule D_2^i, per guisa che il contorno di G_3 sarà formato soltanto da K_2 ed eventualmente da taluni 2-cicli (pag. 204) di C_2, costituenti un complesso K_2'. Concludiamo dunque, come al n° 84, coll'omologia $K_2 \sim K_2'$ (si tenga all'uopo presente che ogni ciclo è omologo di sè stesso; n° 77).

86. – Il ragionamento si trasporta, con soli cangiamenti di parole, al caso generale di un complesso K_i *sopra* una M_n reticolata da un C_n regolare ordinario ($i \gtreqless n$). Ed ecco brevemente come. Supposto (senza restrizione) che la M_n sia formata da poliedri elementari costituenti C_n, e che da C_n sia stato dedotto un secondo reticolato regolare $\bar{C}_n$ (n° 82), si comincerà a suddividere K_i, con una propria reticolazione regolare, così fatta, che per ogni sua i-cellula (e quindi per ognuna di dimensione qualunque) esista (almeno) *una* stella Σ, avente per centro un punto O (vertice di $\bar{C}_n$), costituita da cellule di $\bar{C}_n$, e la quale contenga quella cellula di K_i(*). La "corrispondenza A" tra i vertici di K_i e taluni vertici di C_n è definita dalla condizione che

(*) È superfluo porre in rilievo il significato di queste parole, quando K_i è un complesso (singolare) *sopra* M_n, e non un complesso ordinario. Il complesso K_i, considerato in sè, è un complesso ordinario, che ha per imagine sopra M_n un certo

ad ogni vertice di K_i interno ad una stella Σ, avente per centro un vertice di C_n (è una stella S di una classe speciale, fra le Σ di $\bar{C}_n$), si faccia corrispondere quel centro; mentre ad ogni vertice di K_i, situato sul contorno di n-edri elementari comuni a due o più S, corrisponda il centro di una di queste, scelto a piacere. Ai vertici di una r-cellula ($r = 0, 1, \dots, i$) di K_i corrispondono vertici (distinti o no) di una medesima r-cellula di C_n; sicchè ad ogni cellula di K_i corrisponde in C_n una cellula di eguale o di minor dimensione. Si denotino con A_r^j ($r=0,1,\dots,n$; $j=1,2,\dots,\alpha_r$) le r-cellule di C_n, e con B_r^j ($r=0,1,\dots i$; $j=1,2,\dots,\beta_r$) le r-cellule di K_i. Ad ogni B_0^j può farsi corrispondere una 1-cellula D_1^j (ordinaria o singolare), costituita dal segmento rettilineo (appartenente ad una Σ su cui B_0^j giaccia) che congiunge B_0^j col vertice di C_n ad esso omologo in A. Ad ogni B_1^j può farsi corrispondere una 2-cellula D_2^j (ordinaria o singolare) (n° 84); ad ogni B_2^j una 3-cellula D_3^j (ordinaria o singolare) (n° 85), e in generale ad ogni B_r^j una $(r+1)$-cellula D_{r+1}^j (ordinaria o singolare), così costruita: La B_r^j appartiene ad una (qualche) stella Σ di $\bar{C}_n$, alla quale appartengon le cellule $D_1, D_2, \dots, D_r$ associate alle cellule di dimensione $0, 1, \dots, r-1$ di B_r^j; ed alla stessa Σ appartengono altresì quei vertici di una r-cellula A_r^l di C_n, che son omologhi in A dei vertici

insieme K_i' di punti. Si suddividerà regolarmente K_i, in modo che le imagini delle cellule di K_i cadano nelle singole stelle di C_n. Questi traslati devon esser ormai familiari.

ma (mod. 2) delle sue 2-cellule, si eliminan tutte le 1-cellule che costituiscono i contorni di quelle, così nel fare la somma delle 3-cellule di G_3, onde costituire questo complesso, si elimineranno tutte le 2-cellule D_2^i, per guisa che il contorno di G_3 sarà formato soltanto da K_2 ed eventualmente da taluni 2-cicli (pag. 204) di C_2, costituenti un complesso K_2'. Concludiamo dunque, come al nº 84, coll'omologia $K_2 \sim K_2'$ (si tenga all'uopo presente che ogni ciclo è omologo di sè stesso; nº 77).

86. - Il ragionamento si trasporta, con soli cangiamenti di parole, al caso generale di un complesso K_i sopra una M_n reticolata da un C_n regolare ordinario ($i \gtreqless n$). Ed ecco brevemente come. Supposto (senza restrizione) che la M_n sia formata da poliedri elementari costituenti C_n, e che da C_n sia stato dedotto un secondo reticolato regolare $\bar{C}_n$ (nº 82), si comincerà a suddividere K_i, con una propria reticolazione regolare, così fatta, che per ogni sua i-cellula (e quindi per ognuna di dimensione qualunque) esista (almeno) una stella Σ, avente per centro un punto O (vertice di $\bar{C}_n$), costituita da cellule di $\bar{C}_n$, e la quale contenga quella cellula di K_i (*). La "corrispondenza A" tra i vertici di K_i e taluni vertici di C_n è definita dalla condizione che

(*) È superfluo porre in rilievo il significato di queste parole, quando K_i è un complesso (singolare) sopra M_n, e non un complesso ordinario. Il complesso K_i, considerato in sè, è un complesso ordinario, che ha per imagine sopra M_n un certo

ad ogni vertice di K_i interno ad una stella Σ, avente per centro un vertice di C_n (è una stella S di una classe speciale, fra le Σ di $\bar{C}_n$), si faccia corrispondere quel centro; mentre ad ogni vertice di K_i, situato sul contorno di n-edri elementari comuni a due o più S, corrisponda il centro di una di queste, scelto a piacere. Ai vertici di una r-cellula ($r = 0, 1, \dots, i$) di K_i corrispondono vertici (distinti o no) di una medesima r-cellula di C_n; sicchè ad ogni cellula di K_i corrisponde in C_n una cellula di eguale o di minor dimensione. Si denotino con A_r^j ($r=0,1,\dots,n$; $j=1,2,\dots,\alpha_r$) le r-cellule di C_n, e con B_r^j ($r=0,1,\dots i$; $j=1,2,\dots,\beta_r$) le r-cellule di K_i. Ad ogni B_0^j può farsi corrispondere una 1-cellula D_1^j (ordinaria o singolare), costituita dal segmento rettilineo (appartenente ad una Σ su cui B_0^j giaccia) che congiunge B_0^j col vertice di C_n ad esso omologo in A. Ad ogni B_1^j può farsi corrispondere una 2-cellula D_2^j (ordinaria o singolare) (nº 84); ad ogni B_2^j una 3-cellula D_3^j (ordinaria o singolare) (nº 85), e in generale ad ogni B_r^j una $(r+1)$-cellula D_{r+1}^j (ordinaria o singolare), così costruita: La B_r^j appartiene ad una (qualche) stella Σ di $\bar{C}_n$, alla quale appartengon le cellule $D_1, D_2, \dots, D_r$ associate alle cellule di dimensione $0,1,\dots,r-1$ di B_r^j; ed alla stessa Σ appartengono altresì quei vertici di una r-cellula A_r^l di C_n, che son omologhi in A dei vertici

insieme K_i' di punti. Si suddividerà regolarmente K_i, in modo che le imagini delle cellule di K_i cadano nelle singole stelle di C_n. Questi traslati devon esser ormai familiari.

di B_r^j. Se questi omologhi son $r+1$ distinti (cioè tutti i vertici di A_r^l, la quale in questo caso sta tutta in Σ), le r-cellule A_r^l, B_r^j e le D_r (in numero di $r+1$), che corrispondono alle $(r-1)$-cellule di B_r^j, formano insieme una varietà chiusa elementare, eventualmente singolare, S_r^j (pag. 205), appartenente a Σ. Analogamente si conclude nei riguardi delle cellule B_r^j e delle D_r sopra indicate, se gli omologhi in A dei vertici di B_r^j non son fra loro distinti. Pertanto, proiettando la S_r^j, dal centro O della stella Σ, si ottiene (pag. 231) una $(r+1)$-cellula (ordinaria o singolare) D_{r+1}^j, che resta associata a B_r^j.

Denotato con G_{i+1} il complesso delle D_{i+1} (e dei loro contorni), si vede che le relazioni d'incidenza fra le D_{r+1}^j e le D_r^h son le medesime che passan fra le B_r^j, B_{r-1}^h. Pertanto, se k_i è un ciclo, tutte le i-cellule D_i^j $(j=1,2,\dots,\beta_{i-1})$ si eliminano, quando si fa la somma (mod. 2) delle $(i+1)$-cellule D_{i+1}^j $(j=1,2,\dots,\beta_i)$ di G_{i+1}; sicchè il contorno di G_{i+1} risulta formato da k_i, ed eventualmente da un insieme k_i' di i-cicli composti di i-cellule di C_n. Cioè (n° 77) $k_i \sim k_i'$. Ed il teor. a) è dunque completamente dimostrato.

Osservazione. — Se $i>n$, è chiaro che k_i' dovrà mancare; ossia sarà $k_i \sim 0$. Dunque ogni ciclo (singolare) di dimensione maggiore di n, sopra una varietà topologica di dimensione n, è omologo a zero.

Il teorema b).

87. Passiamo a dimostrare il teor. b), continuan-

do ad usare le notazioni del n° 86. Supponiamo dunque che il ciclo (o complesso congruo a zero, cioè insieme di cicli) k_i', costituito da i-cellule del reticolato regolare C_n, sia omologo a zero. Denotato con K_{i+1} il complesso sopra M_n, di cui k_i' è il contorno, sussisterà la congruenza

$$(1) \qquad K_{i+1} \to k_i' \pmod{2}.$$

Consideriamo ora, in relazione al complesso K_{i+1}, la corrispondenza A, analoga a quella che al n° 86 usammo per passare dal complesso k_i — quando ancora non si era supposto che k_i fosse congruo a zero — al complesso G_{i+1}; e sia G_{i+2} il complesso derivante da K_{i+1}, come G_{i+1} da k_i. Ricordato che le relazioni d'incidenza fra le cellule delle varie dimensioni di K_{i+1} son le stesse di quelle fra le corrispondenti cellule di G_{i+2} (n° 86), si deduce che nel sommare (mod. 2) le $(i+1)$-cellule appartenenti ai contorni delle $(i+2)$-cellule di G_{i+2}, spariscon tutte le $(i+1)$-cellule di G_{i+2}, che corrispondono alle i-cellule di K_{i+1}, eccetto quelle corrispondenti alle i-cellule del contorno k_i' di K_{i+1}. Quali sono queste cellule? Poichè ogni vertice di k_i' è un vertice di C_n, ed è quindi il centro di una stella del tipo S, del complesso regolare $\bar{C}_n$, il suo omologo in A è il punto stesso. Il complesso G_{i+1}' derivato da k_i', mediante A, è pertanto un complesso singolare, ottenuto congiungendo ogni punto di k_i' col medesimo punto, mediante una 1-cellula singolare. Gli estremi di questa 1-cellula singolare variabile, descrivono i complessi coincidenti k_i', k_i'', che costituiscono il contorno di G_{i+1}' (k_i'' può, per rendere più espressiva la cosa, pensarsi come il complesso trasformato di K'_i con un'omotopia infinitesima). Risulta perciò (cfr. altresì col n° 77):

$$(2) \qquad G'_{i+1} \to K'_i + K''_i \ (\text{mod. } 2).$$

Il contorno di G_{i+2} è dunque in parte formato dalle $(i+1)$-cellule singolari di G'_{i+1}, poi dalle $(i+1)$-cellule di K_{i+1} (perchè ognuna di queste appartiene al contorno della $(i+2)$-cellula che le corrisponde mediante A), e infine da certe $(i+1)$-cellule di C_n, costituenti un complesso K'_{i+1}. Varrà in conclusione la congruenza

$$(3) \qquad G_{i+2} \to K_{i+1} + G'_{i+1} + K'_{i+1} \ (\text{mod. } 2).$$

Si avverta che K'_{i+1} non può mancare, perchè il complesso $K_{i+1} + G'_{i+1}$ - come risulta dal sommare le (1), (2) - è contornato da K''_i; epperò non è congruo a zero, e non può dunque da solo costituire il contorno di G_{i+2} (pag. 204). La (3) implica l'omologia

$$K_{i+1} + G'_{i+1} + K'_{i+1} \sim 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

e quindi (pag. 234) la congruenza

$$(4) \qquad K_{i+1} + G'_{i+1} + K'_{i+1} \to 0 \ (\text{mod. } 2).$$

Infine le (1), (2), (4), sommate a membro a membro, danno:

$$K'_{i+1} \to K''_i \quad (\text{mod. } 2),$$

ovvero, essendo K''_i identico a K'_i, $K'_{i+1} \to K'_i$. Pertanto dall'ipotesi che il complesso congruo a zero K'_i (ciclo o insieme di cicli), formato da cellule del complesso regolare C_n, sia omologo a zero,

si deduce ch'esso è un complesso contornante di C_n; c.d.d.

Il teorema c).

88. - Sulla data M_n topologica, sia C_n un complesso ordinario qualunque, che la reticoli, e $\bar{C}_n$ un complesso regolare dedotto da C_n. Proviamo anzitutto che ogni i-complesso congruo a zero di $\bar{C}_n$, è, a meno di i-complessi nulli di $\bar{C}_n$, combinazione lineare degli i-complessi congrui a zero, non nulli (formanti un sistema fondamentale), linearmente indipendenti, di C_n. Supporremo ciò dimostrato per le varietà di dimensione $< n$, posto ch'esso è manifestamente vero per $n = 0$, e lo dedurremo per le varietà di dimensione n.

Sia $\bar{K}_i$ un i-complesso congruo a zero di $\bar{C}_n$. Se $\bar{K}_i$ non ha per vertice alcuno dei punti P, che furono scelti per ultimi entro le n-cellule di C_n, per passare da C_n a $\bar{C}_n$, esso consta di cellule del complesso $\bar{C}_{n-1}$ costituito da quelle $(n-1)$-cellule di $\bar{C}_n$, che son frazionamenti delle $(n-1)$-cellule di C_n, cioè $\bar{K}_i$ appartiene al complesso regolare $\bar{C}_{n-1}$, dedotto dal complesso C_{n-1} delle $(n-1)$-cellule di C_n. Onde, pel teorema ammesso, K_i si esprime linearmente (a meno di i-complessi nulli di $\bar{C}_{n-1}$, cioè di $\bar{C}_n$) mediante un sistema fondamentale di i-complessi di C_{n-1}, ossia di C_n. Occorre pertanto considerare il caso in cui $\bar{K}_i$ contiene qualcuno degl'indicati punti P $(i \leq n-1)$. Fissiamo l'attenzione sopra uno di questi punti, che sia interno alla n-cellula E_n di C_n. Le i-cellule di K_i, passanti per P, incontrano secondo $(i-1)$-cellule di $\bar{C}_{n-1}$ il contorno di E_n; e queste $(i-1)$-cellule formano un complesso $\bar{k}_{i-1}$ congruo a zero, perchè ogni $(i-2)$-cellula di $\bar{k}_{i-1}$ è proiettata da P secondo una $(i-1)$-cellula di $\bar{k}_i$, ed appartiene perciò ad un numero pari di $(i-1)$-cellule di $\bar{k}_{i-1}$, sezioni di altrettante i-cellule di $\bar{k}_i$ (che per ipotesi non ha contorno). Dal n° 74, e dal teorema c) ammesso per le varietà di dimensione $<n$, deriva senz'altro che, sopra il contorno di E_n, $\bar{k}_{i-1}$ è il contorno di (almeno) un i-complesso $\bar{C}_i$, formato da cellule di C_n. D'altra parte, $\bar{k}_{i-1}$ contorna altresì il complesso $\bar{C}'_i$ costituito dalle i-cellule di $\bar{k}_i$ che passan per P; onde $\bar{C}_i + \bar{C}'_i$ è un complesso $\bar{k}'_i$ congruo a zero, anzi nullo, perchè esso contorna quello costituito dalle $(i+1)$-cellule di $\bar{C}_n$ proiettanti da P le i-cellule di $\bar{C}_i$. La somma $\bar{k}_i + \bar{k}'_i$ è un complesso congruo a zero, il quale non contiene più alcuna delle i-cellule di $\bar{C}_n$ uscenti da P (cioè non contiene più il vertice P). Lo stesso si può ripetere per ogni altro punto analogo. La conclusione è che, aggiungendo a $\bar{k}_i$ taluni convenienti i-complessi nulli (di $\bar{C}_n$), si ottiene un i-complesso congruo a zero di $\bar{C}_n$, non contenente più alcun punto P; epperò (in virtù di quanto precede) esprimibile per combinazione lineare, con un sistema fondamentale di i-complessi di C_n. Ne segue che il rango $\bar{r}_i$, determinato mediante $\bar{C}_n$, non è maggiore di quello, r_i, determinato mediante C_n: $\bar{r}_i \leq r_i$. Viceversa, ogni complesso k_i congruo a zero di C_n, essendo un complesso di $\bar{C}_n$, si può esprimere, a meno di i-complessi nulli (di $\bar{C}_n$), con un sistema fondamentale di i-complessi di $\bar{C}_n$. Epperò $r_i \leq \bar{r}_i$. Dunque $r_i = \bar{r}_i$; c.d.d.

<u>Osservazione</u>. - Nel caso $i = n$, nel quale il ragionamento precedente cade in difetto, l'invarianza topologica di $r_n (= r_0)$ era già stata osservata (pagina 222).

Il teorema principale

89. - Prima di esporre la dimostrazione del teorema d), facciamo un'osservazione, allo scopo di precisare maggiormente il modo di costituire un <u>sistema fondamentale di cicli</u> sopra una M_n topologica. Nel n° 72 (pag. 220), allorchè si son definiti i ranghi di connessione di M_n, mediante il complesso ordinario C_n, si è parlato di ρ_{k+1} k-cicli nulli e di r_k cicli non nulli, mediante i quali si può esprimere, con una combinazione lineare (mod. 2), ogni k-ciclo (nullo o non nullo) di C_n. Ma, in realtà, la frase "k-cicli non nulli" era un modo abbreviato di alludere a k-cicli o <u>insiemi di un numero finito di k-cicli</u>, che costituissero un complesso non nullo (non circondante). E ciò era stato specificato nel corollario di pag. 219. Si tratta insomma, più che di cicli (varietà irriducibili, pagg. 166-170), di <u>complessi congrui a zero, non nulli</u>. Quanto ai ρ_{k+1} cicli nulli, si tratta di veri e propri k-cicli (irriducibili), perchè essi hanno per simboli ρ_{k+1} colonne linearmente indipendenti della matrice d'incidenza H_{k+1}, e costituiscon dunque i contorni di altrettante $(k+1)$-cellule di C_n.

Ora è facile vedere, che la definizione dei suddetti r_k cicli non nulli, si può intendere altresì nello stretto senso letterale. Si può cioè supporre che ognuno dei complessi congrui a zero non nulli, $C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$, costituenti un sistema fondamentale, sia addirittura un ciclo e non un insieme di cicli. Invero, se C_k^1 è la somma (mod. 2) di due o più k-cicli, uno almeno di questi deve esser linearmente indipendente (mod. 2) da $C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$ e dai ρ_{k+1} k-cicli nulli, perchè altrimenti C_k^1 medesimo sarebbe linearmente dipendente da tali cicli. Nel sistema fondamentale poniamo, in luogo di C_k^1, quel ciclo (non nullo) indipendente da $C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$ e dai ρ_{k+1} k-cicli nulli, che vi abbiamo trovato; e chiamandolo ancora C_k^1. Similmente in C_k^2 dovrà trovarsi un k-ciclo indipendente da $C_k^1, C_k^3, \dots, C_k^{r_k}$ e dai cicli nulli, perchè altrimenti esisterebbe un legame lineare tra $C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$ e i cicli nulli (in tal legame non potendo comparire C_k^1 per ciò che precede). Sostituiremo a C_k^2 quel k-ciclo, che vi abbiamo trovato, soddisfacente alle indicate condizioni; e così proseguendo.

— 90. - Sieno dunque $C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$ i k-cicli non nulli di un sistema fondamentale, costruiti mediante un C_n regolare di M_n. Proviamo che tali k-cicli sono omologicamente indipendenti, o indipendenti come più in breve diremo nel seguito (quando non vi sia ambiguità), cioè che non può tra essi sussistere alcuna omologia del tipo

$$(1) \qquad C_k^{i_1} + C_k^{i_2} + \dots + C_k^{i_s} \sim 0 \quad (\text{mod. } 2) \; ,$$

ove $i_1, i_2, \dots, i_s$ son interi distinti, non superiori ad r_k.

In caso diverso, infatti, poichè il complesso omologo a zero Γ_k, somma dei cicli che figurano nella (1), è formato da cellule di C_n, esso è un complesso contornante di C_n (nº 87), epperò il sistema dei cicli costituenti Γ_k e dei ρ_{k+1} cicli nulli di C_n, non consta di cicli linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi che il sistema di partenza sia fondamentale.

In particolare i cicli $C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^{r_k}$, presi singolarmente, non sono omologhi a zero.

In secondo luogo è facile ormai vedere che, dato un ciclo qualsiasi C_k sopra M_n, o esso è omologo a zero, oppure è omologo ad una combinazione lineare (mod. 2) dei cicli del sistema fondamentale. Invero, C_k è omologo ad un complesso congruo a zero, C'_k formato da cellule di C_n (nº 86), e C'_k si esprime con una combinazione lineare (mod. 2), dei ρ_{k+1} k-cicli nulli e del sistema fondamentale di k-cicli non nulli di C_n. E poichè, nel parlare di omologie, si può astrarre da un numero finito di cicli nulli, che danno per somma un complesso omologo a zero, così, se C_k non è esso stesso omologo a zero, risulta omologo ad una combinazione lineare dei cicli fondamentali.

Un sistema fondamentale di k-cicli, mediante i quali si possano, con omologie, esprimer tutti gli altri k-cicli di M_n, può altresì ottenersi da un complesso ordinario qualunque Γ_n, che copra M_n. Basta invero, per dimostrarlo, dedurre da Γ_n un complesso regolare C_n, ricordare (nº 88) che un sistema fondamentale $\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{r_k}$ di k-cicli, di Γ_n, contiene esattamente r_k cicli, quanti ne contiene il sistema fondamentale $C_k^1, \dots, C_k^{r_k}$ di C_n, e che un k-ciclo qualunque di C_n - al quale si può ridurre con un'omologia ogni k-ciclo dato sopra M_n (n° 86) - a meno di cicli nulli, epperò omologhi a zero, di C_n, si trasforma in un ciclo ad esso omologo, esprimibile per combinazione lineare dei $\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_k^{r_k}$.

È poi chiaro infine che, mutando Γ_n e quindi C_n entro M_n, non cangia il numero r_k dei k-cicli con cui può formarsi un sistema fondamentale. Invero, se $\Delta_k^1, \dots, \Delta_k^s$ è un sistema fondamentale di k-cicli di M_n, sarà:

$$(2) \qquad \Delta_k^i \sim C_k^{j_{i,1}} + C_k^{j_{i,2}} + \dots + C_k^{j_{i,t_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

ove $j_{i,1}, \dots, j_{i,t_i}$ sono t_i convenienti (distinti) dei numeri $1, 2, \dots, r_k$. Non potrà perciò essere $s > r_k$; chè altrimenti fra i complessi che stanno a destra delle (2) sussisterebbe qualche omologia, essendo essi composti soltanto con r_k cicli. Similmente, scambiando le veci dei due sistemi fondamentali, si deduce che non può essere $r_k > s$. Onde $s = r_k$.

Se ora si trasforma omeomorficamente M_n in un'altra varietà topologica M'_n, attesa l'invarianza topologica del concetto di contorno, e quindi di quello di omologia, ne segue che un sistema fondamentale di k-cicli di M_n si muta in un sistema analogo di M'_n, e viceversa. Riassumendo:

<u>Data una qualunque varietà topologica M_n (irriducibile o riducibile; omogenea o no), e reticolatala con un qualsiasi suo complesso ordinario C_n, tra i k-cicli di C_n, per $k = 0, 1, 2, \dots, n$, se ne posson trovare r_k indipendenti, i quali formano un sistema fondamentale siffatto, che ogni k-ciclo considerato sopra M_n sia omologo ad una combinazione lineare di quelli</u> (*). <u>Ogni k-ciclo sopra M_n, per $k > n$, è omologo a zero. Un sistema fondamentale di k-cicli di M_n ($k \le n$), è un invariante topologico della varietà. In particolare, è un invariante topologico il rango di connessione r_k.</u>

91.- Al teorema principale si può dare un aspetto più suggestivo, rispondendo, nella misura in cui è possibile, alla questione inversa di quella considerata nel n° 79:

<u>Dati due complessi C_k, C'_k tra loro omologhi sopra una M_n topologica, si può affermare ch'essi sieno sempre omotopi</u> (cioè deducibili l'uno dall'altro per deformazione continua)?

Sieno anzitutto C_k, C'_k due k-complessi ordinari di M_n e C_{k+1} il complesso contornato da $C_k + C'_k$. Per ogni $(k+1)$-cellula E_{k+1} di C_{k+1} si ha un k-ciclo Γ_k (costituito da k-cellule di C_{k+1}), il quale forma il contorno di E_{k+1}, ed è riducibile ad un punto per deformazione continua entro E_{k+1} (pag. 123), e quindi entro M_n. La somma (mod. 2) dei k-cicli Γ_k contornanti le varie $(k+1)$-cellule di C_{k+1}, consta semplicemente delle k-cellule di C_{k+1} che costituiscono C_k e di quelle che costituiscono C'_k, perchè la somma (mod. 2) delle cellule E_{k+1}, cioè il complesso C_{k+1}, ha per contorno $C_k + C'_k$, la somma (mod. 2) dei contorni Γ_k delle E_{k+1} (pag 204). Pertanto uno dei due complessi C_k, C'_k non è che la somma (mod. 2) dell'altro, e di un numero finito di k-cicli ri-

(*) S'intende incluso il caso in cui il ciclo è omologo a zero, corrispondendo esso a coefficienti nulli della combinazione lineare.

ducibili a punti. La conclusione vale anche pei complessi (eventualmente singolari) considerati sopra M_n, tenuto conto, nel modo consueto, delle definizioni di omologia e di omotopia di complessi sopra M_n, le quali riportano la questione a quella simile per complessi ordinari.

E siccome il ragionamento del n° 79 si presta anche agevolmente, con brevi modificazioni, a dimostrare che un k-ciclo riducibile a un punto sopra M_n, è omologo a zero, riassumendo si può enunciare:

L'affermazione che due k-complessi sopra una M_n topologica sono omologhi, e quella che uno (qualunque) dei due k-complessi è la somma dell'altro e di un numero finito di k-cicli riducibili per deformazione continua a punti, entro la M_n, sono tra loro equivalenti.

In particolare:

Dire che un k-ciclo è omologo a zero, equivale a dire ch'esso è la somma di un numero finito di k-cicli riducibili a punti.

Osservazione. - Sarebbe però errato il credere che un k-ciclo omologo a zero, sopra una M_n, si possa ridurre per deformazione continua, entro M_n, ad un sol punto. Così, per es., entro la M_3 costituita dai punti interni ad un toro e dai punti della relativa superficie contorno, la superficie di un altro toro interno ad M_3 e coassiale col precedente, è un 2-ciclo omologo a zero, il quale può ridursi per deformazione continua ad una linea, ma non ad un punto.

XXII. - Complessi duali sopra una varietà omogenea.

92. - Si dirà che un complesso ordinario C'_n è duale di un altro complesso ordinario C_n, della stessa dimensione, quando le relazioni d'incidenza tra le k-cellule e le $(k-1)$-cellule di C'_n $(k=1,2,\dots,n)$, son le stesse di quelle che passan tra le $(n-k)$-cellule e le $(n-k+1)$-cellule di C_n.

Interessa in modo speciale questa considerazione, nel caso di una M_n topologica omogenea (e perciò chiusa). In tal caso la costruzione di un complesso C'_n duale di un complesso C_n, che reticoli M_n, si ottiene deducendo, in primo luogo, da C_n un complesso regolare $\bar{C}_n$, e definendo come vertici di C'_n i punti $P^{(n)}$, che, secondo la costruzione di $\bar{C}_n$ esposta a pag. 111, sono stati scelti entro le n-cellule di C_n; come 1-cellule di C'_n ognuna delle somme (mod. 2) delle coppie di 1-cellule di $\bar{C}_n$ del tipo $P_i^{(n-1)}P_j^{(n)}$, che hanno per vertici i singoli punti $P^{(n-1)}$ scelti entro le $(n-1)$-cellule di C_n....; come $(n-k)$-cellule di C'_n ognuna delle somme (mod. 2) di tutte le $(n-k)$-cellule di $\bar{C}_n$ del tipo $P_i^{(k)}P_j^{(k+1)}\dots P_l^{(n)}$, che hanno per vertici i singoli punti $P^{(k)}$ scelti entro le k-cellule di C_n;..., come n-cellule di C'_n ognuna delle somme (mod. 2) di tutte le n-cellule di $\bar{C}_n$ del tipo $P_i^{(0)}P_j^{(1)}\dots P_s^{(n)}$, che hanno per vertici i singoli punti $P^{(0)}$ (i quali son tutti i vertici di C_n e parte dei vertici di $\bar{C}_n$).

Per dimostrare che si vien così a determinare effettivamente un n-complesso duale a C_n, occorre provare che i singoli insiemi definiti come cellule delle varie dimensioni di C'_n, sono nel fatto cellule, e che tra esse passan le relazioni d'incidenza che caratterizzano un complesso, ed un complesso duale a C_n. Cominciamo all'uopo dalle n-cellule. Poichè C_n reticola una M_n omogenea, l'insieme di tutte le n-cellule di $\bar{C}_n$, che passan per un vertice A^i_0 di C_n (cioè per un vertice $P^{(0)}_i$ di $\bar{C}_n$), costituisce una stella elementare (pag. 232), epperò (pag. 231) l'insieme dei punti di quelle cellule forma una n-cellula, che indicheremo con B^i_n, associandola al vertice $A^i_0 (\equiv P^0_i)$ di C_n (o di $\bar{C}_n$). Due cellule B^i_n non hanno punti interni comuni, ed ogni punto di M_n appartiene ad (almeno) una cellula B^i_n, perchè ogni n-cellula di $\bar{C}_n$ contiene uno solo, ma sempre uno, dei vertici di C_n.

In generale, sia $P^{(k)}_i$ il punto scelto entro la k-cellula A^i_k di C_n per costruire $\bar{C}_n$, e sieno $P^{(0)}_a P^{(1)}_b \dots P^{(k)}_i$ i $k+1$ vertici di una k-cellula (poliedroide elementare) di $\bar{C}_n$ contenuta in A^i_k. Dal fatto che M_n è omogenea, segue (pag. 231) che l'insieme dei punti appartenenti alle cellule di $\bar{C}_n$ di dimensione $k+1$ o maggiore, che passan per la k-cellula $P^{(0)}_a P^{(1)}_b \dots P^{(k)}_i$, costituisce una n-cellula (somma, mod. 2, delle n-cellule della stella avente per centro la fissata k-cellula). Le n-cellule della stella considerata, son tutte quelle n-cellule di $\bar{C}_n$ che posson designarsi col simbolo $P^{(0)}_a P^{(1)}_b \dots P^{(k)}_i P^{(k+1)}_j \dots P^{(n)}_\ell$, ove soltanto gl'indici dei primi $k+1$ punti son tenuti fissi. Le relazioni d'incidenza tra le cellule delle varie dimensioni della nostra stella, son le medesime di quelle che intercedono fra le cellule di una varietà chiusa elementare ad $n-k-1$ dimensioni; e d'altro canto esse son pure le medesime di quelle che intercedono fra le $(n-k)$-cellule $P^{(k)}_i P^{(k+1)}_j \dots P^{(n)}_\ell$ e le cellule di minor dimensione con esse incidenti, cioè,

in conclusione, fra le $(n-k)$-cellule di C_n, che hanno servito a definire una $(n-k)$-cellula di C'_n, e le cellule di minor dimensione ad esse incidenti (ossia situate sui loro contorni). Pertanto la somma (mod. 2) di quelle $(n-k)$-cellule è proprio una $(n-k)$-cellula, che si chiamerà B^i_{n-k} e resterà associata alla k-cellula A^i_k di C_n. Le cellule B^i_{n-k} ed A^i_k hanno in comune il solo punto $P^{(k)}_i$.

Vediamo ora quali sono le relazioni d'incidenza fra le B. Consideriamo all'uopo una $(k+1)$-cellula A_{k+1} di C_n, incidente con A^i_k (cioè contenente A^i_k). Vi sarà una k-cellula $P^{(0)}_a P^{(1)}_b \dots P^{(k)}_i$ di $\bar{C}_n$, contenuta in A^i_k e incidente colla $(k+1)$-cellula $P^{(0)}_a P^{(1)}_b \dots P^{(k)}_i P^{(k+1)}_j$ contenuta in A^j_{k+1}. La cellula B^i_{n-k} associata ad A^i_k, è la somma (mod. 2) di tutte le $(n-k)$-cellule $P^{(k)}_i P^{(k+1)}_j \dots P^{(n)}_\ell$, ove il solo punto $P^{(k)}$ è fisso; e similmente la cellula B^j_{n-k-1} associata ad A^j_{k+1}, è la somma (mod. 2) di tutte le $(n-k-1)$-cellule $P^{(k+1)}_j \dots P^{(n)}_\ell$, ove il solo punto $P^{(k+1)}_j$ è fisso. Poichè ognuna delle $(n-k)$-cellule di $\bar{C}_n$ che costituiscon B^i_{n-k}, è incidente con una $(n-k-1)$-cellula di $\bar{C}_n$ costituente di B^j_{n-k-1}, così B^i_{n-k} è incidente con B^j_{n-k-1}. Resta in tal guisa dimostrato che ad una k-cellula e ad una $(k+1)$-cellula incidenti di C_n, rispondono una $(n-k)$-cellula ed una $(n-k-1)$-cellula incidenti di C'_n. Allo stesso modo si dimostra la proprietà reciproca, che cioè le prime due cellule son incidenti quando le ultime lo sono. Pertanto C'_n soddisfa a tutte le richieste condizioni.

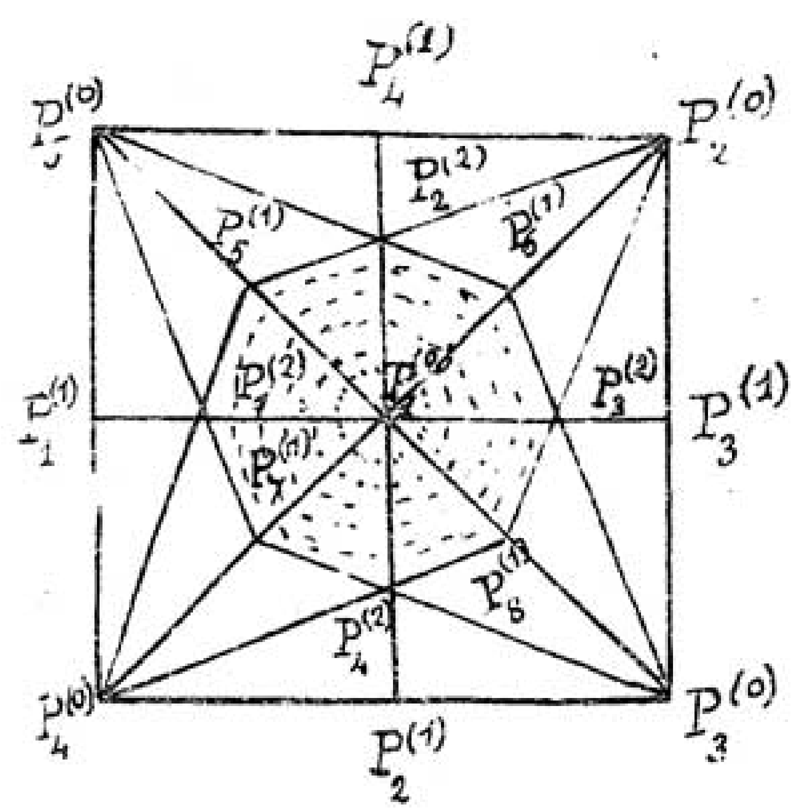
93. – In particolare dunque, le cellule A^i_{n-1}, A^j_n di C_n son incidenti allora e solo allora che lo sono le cellule duali B^i_1, B^j_0. Perciò la matrice d'incidenza H'_1 del complesso C'_n si ottiene dalla matrice d'incidenza H_n di C_n,

scambiando le righe colle colonne; e, similmente, in generale la matrice H'_{n-k} di C'_n si ottiene trasponendo la matrice H_k di C_n. Le caratteristiche (mod. 2) delle matrici $H'_1, H'_2, \dots, H'_n$ son perciò rispettivamente uguali alle caratteristiche $\rho_n, \rho_{n-1}, \dots, \rho_1$ di $H_n, H_{n-1}, \dots, H_1$, ed i numeri delle cellule di dimensione $0, 1, 2, \dots, n$ di C'_n, son rispettivamente uguali ai numeri $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ delle cellule di dimensione $n, n-1, \dots, 0$ di C_n. Ricordando le formule (pagg. 221, 222) che esprimono i ranghi di connessione di C_n mediante le α e le ρ, si conclude che i ranghi di connessione $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_{n-1}$ di C'_n, son rispettivamente uguali ai ranghi di connessione $\tau_{n-1}, \tau_{n-2}, \dots, \tau_1$ di C_n, cioè (n° 88) di C_n (e di M_n; n° 90). D'altronde (n° 90) $\tau_i = \tau'_i$, epperò $\tau_i = \tau_{n-i}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, relazioni alle quali si può aggiungere quella già osservata (pag. 222) $\tau_0 = \tau_n$. Concludendo:

Fra i ranghi di connessione $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ di una varietà omogenea (chiusa), sussiston le relazioni $\tau_i = \tau_{n-i}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Osservazione 1ª. – Si noterà che il complesso $\overline{C}_n$ è una suddivisione regolare tanto per C_n come per C'_n.

Osservazione 2ª. – Gioverà un esempio illustrativo delle considerazioni precedenti. Sia un ottaedro regolare, di cui in figura è rappresentata sul piano del foglio, la proiezione ortogonale di una metà $P_1^{(0)} P_2^{(0)} P_3^{(0)} P_4^{(0)} P_5^{(0)}$. Sono inoltre rappresentati i vertici $P^{(1)}, P^{(2)}$ di una suddivisione regolare di quella metà. Il complesso C_2 $(n=2)$, è il complesso delle facce (spigoli



e vertici) dell'ottaedro; il complesso $\overline{C}_2$ è costituito dalla suddivisione regolare visibile e dall'analoga, simmetrica di essa rispetto al piano del foglio. La 2-cellula del complesso C'_2, duale di C_2, corrispondente al vertice $P_1^{(0)}$, è quella punteggiata in figura: essa è la somma (mod. 2) delle otto ~~2~~-cellule di C_2, che hanno un vertice in $P_1^{(0)}$. Bicellule simili, di C'_2, si ottengono in corrispondenza ad ogni vertice dell'ottaedro, ed esse non hanno, a due a due, punti interni comuni. La 1-cellula di C'_2, corrispondente alla 1-cellula $P_1^{(0)} P_2^{(0)}$ di C_2, è la somma (mod. 2) delle 1-cellule $P_6^{(1)} P_2^{(2)}$, $P_6^{(1)} P_3^{(2)}$; analogamente per le altre 1-cellule di C'_2. Infine il vertice di C'_2 corrispondente alla faccia $P_1^{(0)} P_4^{(0)} P_5^{(0)}$ di C_2 è $P_1^{(2)}$; e similmente per gli altri vertici. Si ha così un complesso di 6 bicellule, 12 1-cellule, 8 vertici, che è omeomorfo al complesso formato dalle facce, spigoli, vertici di un cubo.

XXIII. – Riduzione a forma normale delle matrici d'incidenza – Congruenze fondamentali. –

94. – Innanzi di passare alle varietà orientabili, chiuderemo la trattazione delle proprietà generali delle varietà topologiche, studiando più davvicino la forma che può darsi alle matrici d'incidenza di un complesso ordinario C_n. Riprendiamo all'uopo la relazione $A_{k-1}^{-1} H_k B_k = H_k^*$ del n° 70 (pag. 217), e scriviamola sotto la forma $H_k B_k = A_{k-1} H_k^*$. La prima verticale della matrice prodotto di H_k, B_k è il prodotto di H_k per la prima verticale di B_k, epperò (n° 71) quella verticale è il simbolo del $(k-1)$-complesso che contorna il k-complesso simboleggiato da

quest'ultima. Ora, se si ricorda la struttura della matrice H_k^*, si conclude subito che la prima verticale della matrice $H_k B_k = A_{k-1} H_k^*$ uguaglia (sempre, beninteso, rispetto al mod. 2) la prima verticale di A_{k-1}. Analogamente si dica delle verticali di posti $2, \dots, \rho_k$ di B_k e di A_{k-1}. Dunque il k-complesso rappresentato da una qualunque prefissata delle prime ρ_k verticali di B_k, ha per contorno il $(k-1)$-complesso rappresentato dalla corrispondente verticale di A_{k-1}.

Quanto poi alle ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne di B_k, applicando la stessa considerazione, si conclude che ognuna di esse rappresenta un k-complesso congruo a zero, cioè un k-ciclo o un insieme di k-cicli.

Osserviamo inoltre che, essendo B_k una matrice quadrata di ordine α_k a determinante uguale ad 1, ogni simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ ridotto al modulo 2, il quale rappresenta un k-complesso di C_n, può esprimersi per combinazione lineare delle colonne di B_k (i coefficienti della combinazione si determinan colla regola di Cramer, e si riducon poi al mod. 2). E siccome le colonne di B_k – ed in particolare le ultime $\alpha_k - \rho_k$ son linearmente indipendenti, e d'altronde (pag. 220) il simbolo di ogni k-ciclo di C_n si esprime per combinazione lineare di $\alpha_k - \rho_k$ simboli indipendenti spettanti a k-complessi congrui a zero, così può affermarsi che le ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne di B_k rappresentano un sistema siffatto di k-complessi congrui a zero (ciascuno dei quali è un ciclo o un insieme di cicli).

Ora è facile vedere che, senza venir meno alla relazione: (1) $H_k B_k = A_{k-1} H_k^*$, si può modificare B_k in modo che le sue ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne rappresentino ciascuna un singolo ciclo (e non un insieme di cicli). Perciò avvertiamo, in primo luogo, che la (1) resta vera se si aggiunge

a una colonna di B_k un'altra colonna della stessa matrice purchè la corrispondente operazione si eseguisca sulle colonne del prodotto $A_{k-1} H_k^*$. Dato che le ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne di H_k^*, e quindi anche di $A_{k-1} H_k^*$, son tutte formate di zeri, un'operazione del genere indicato sulle ultime $\alpha_k - \rho_k$ del prodotto $A_{k-1} H_k^*$, non altera per nulla il secondo membro della (1); sicchè si può operare similmente sulle ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne di B_k e non operare affatto sul secondo membro, senza alterare la validità della (1).

Ciò posto, supponiamo che la i-esima colonna $(i = \rho_k + 1, \dots, \alpha_k)$ di B_k rappresenti un k-complesso formato da più di un ciclo. Uno almeno dei k-cicli formanti detto complesso, sarà linearmente indipendente dalle restanti colonne fra le ultime $\alpha_k - \rho_k$ di B_k, perchè altrimenti le ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne non sarebbero indipendenti. Ma d'altronde quel ciclo è esprimibile linearmente per mezzo delle ultime $\alpha_k - \rho_k$ colonne di B_k, e però si può sostituire alla i-esima colonna di B_k il simbolo di quel k-ciclo, senza venir meno alla (1). Così operando sulle altre colonne di B_k, si conclude nel modo annunciato, per $k = 0, \dots, n$.

Applicando ora alla matrice A_k una conclusione prima stabilita per A_{k-1}, possiamo affermare che ognuna delle prime ρ_{k+1} colonne di A_k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, è il simbolo di un k-complesso omologo a zero (cioè di un k-complesso circondante, che è un ciclo o un insieme di cicli). Pertanto questo k-complesso dipende linearmente dalle ultime $\alpha_k - \rho_k = \rho_{k+1} + r_k$ (pag. 220) colonne di B_k. Si posson dunque alterare le ultime ρ_{k+1} colonne di B_k (che son comprese fra le ultime $\alpha_k - \rho_k$), sostituendo ad esse le prime ρ_{k+1} colonne di A_k, senza venir meno alla (1). Dopo ciò le ultime $\tau_k + \rho_{k+1}$ colonne di B_k si distribuiscono in un primo gruppo di τ_k colonne, rappresentanti altrettanti k-cicli non omologhi a zero e indipendenti (anche omologicamente), ed in ultimo gruppo di ρ_{k+1} colonne rappresentanti k-complessi omologhi a zero, linearmente indipendenti.

Poichè nella relazione $H_{k+1} B_{k+1} = A_k H^*_{k+1}$ le ultime colonne di H^*_{k+1} dopo le prime ρ_{k+1}, contengono soltanto zeri, la relazione rimane valida se alle ultime $\alpha_k - \rho_{k+1} = \rho_k + \tau_k$ colonne di A_k si sostituiscon colonne arbitrarie (ridotte al mod. 2), sotto la sola condizione che il determinante di A_k sia unitario. Pertanto queste $\rho_k + \tau_k$ colonne di A_k posson esser prese uguali alle prime $\rho_k + \tau_k$ colonne di B_k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Concludendo, le colonne di A_k posson supporsi identiche a quelle di B_k, salvo l'ordine.

95. - La riduzione a forma normale od unitaria H^*_k, della matrice d'incidenza H_k, mediante la relazione $A^{-1}_{k-1} H_k B_k = H^*_k$, ove le matrici quadrate A_{k-1}, B_k sieno opportunamente determinate, nel modo visto, fra quelle che rendon possibile tale trasformazione, fornisce dunque, come si è specificato nel n° precedente, un metodo per determinare tutti i cicli delle varie dimensioni non omologhi od omologhi a zero, appartenenti ad un determinato complesso C_n. Non c'indugiamo su esempi. Aggiungiamo soltanto qualche breve considerazione. Poichè la cellula E^j_k di C_n (pag. 197), ha per contorno il $(k-1)$-ciclo simboleggiato dalla j-esima verticale della matrice H_k, sussiste la congruenza

$$E^j_k \to \sum_{i=1}^{\alpha_{k-1}} \eta^{ij}_k E^i_{k-1} \qquad (\text{mod. } 2) \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha_k).$$

Questo gruppo di congruenze, che caratterizzano le relazioni d'incidenza fra le $(k-1)$-cellule e le k-cellule del complesso, può considerarsi per tutti i possibili valori di k. Si hanno così le congruenze fondamentali del complesso. Secondo il n° preced. le congruenze fondamentali corrispondenti alle k-cellule, equivalgono perfettamente a congruenze e omologie del tipo seguente:

$$\begin{array}{lll} \Delta^i_k \longrightarrow \Gamma^i_{k-1} & & (i = 1, 2, \dots, \rho_k) \\ C^j_k \longrightarrow 0 & & (j = 1, 2, \dots, \tau_k) \\ C^{\tau_k + l}_k \sim 0 & & (l = 1, 2, \dots, \rho_{k+1}), \end{array}$$

ove Δ_k son k-complessi contornati dai corrispondenti $(k-1)$-complessi congrui a zero Γ; C^j_k son k-cicli omologicamente indipendenti e $C^{\tau_k + l}_k$ k-cicli nulli, linearmente indipendenti.

XXIV. - Complessi orientati. - Varietà orientabili. -

96. - Introduciamo ora il fondamentale concetto di orientazione dei complessi e varietà topologiche. Si può qui procedere in due modi: o in modo logico-formale, oppure rannodando il concetto alla nozione intuitiva di versi di una linea, di un angolo, di una terna di direzioni orientate dello spazio; e così di seguito. La prima via è quella che conviene dal punto di vista combinatorio, e permette di procedere nello studio dei complessi e varietà orientate, in modo perfettamente simile a quello fin qui tenuto, poggiando cioè su proprietà di matrici di interi e di sistemi di equazioni lineari. La seconda via toglie ogni carattere di artificiosità allo studio

precedente, e gli dà un contenuto sostanziale, che si presta alle induzioni costruttive. Conviene dunque parlare dell'una e dell'altra, contemperando anzi l'un metodo coll'altro.

Una 0-cellula E_0 (un punto) si dirà *orientata*, quando si associa ad essa il segno + o il segno −. Per es. gli estremi di un circuito elettrico aperto sono due punti orientati: uno col + (polo positivo), ed uno col − (polo negativo). La cellula E_0, cui si associ il segno +, s'indicherà colla lettera minuscola e_0. Con $-e_0$ s'indicherà la cellula stessa cui si associ il segno −.

Uno 0-complesso, di cui ogni 0-cellula sia orientata, chiamasi uno *0-complesso orientato*. Uno *0-ciclo* (*varietà 0-dimensionale*), cioè (pagg. 91, 166) una coppia di 0-cellule E_0^1, E_0^2, si dirà *orientato* quando ad una delle sue 0-cellule è associato il + e all'altra il −(*). Se lo 0-ciclo C_0 considerato, appartiene ad un complesso ordinario C_n, ed è ivi un ciclo circondante, il ciclo orientato da esso dedotto si dirà pure *circondante*. Si dirà altresì che quel ciclo orientato è il *contorno orientato* del C_1 contornato da C_0.

Una 1-cellula E_1, associata ad uno dei due 0-cicli orientati che ne costituiscono il contorno orientato, si dice *orientata*. Fissato comunque un ordine per gli estremi di E_1, diciamo E_0^2 il primo estremo (*origine*) ed E_0^1 il secondo (*termine*).

La cellula E_1, cui si associ lo 0-ciclo orientato $e_0^1, -e_0^2$, si indicherà con e_1; mentre s'indicherà con $-e_1$ la cellula stes-

(*) Se a ciascuna delle 0-cellule E_0^1, E_0^2 si associa un medesimo segno (per es. il +) si ottiene uno 0-complesso orientato, che però non è un ciclo orientato.

sa avente per contorno orientato $-e_0^1, e_0^2$. La cellula orientata e_1 si dirà *positiva rispetto* a ciascuna delle 0-cellule $e_0^1, -e_0^2$ (e ognuna di queste *positiva rispetto* ad e_1); si dirà invece che e_1 è *negativa rispetto* alle $-e_0^1, e_0^2$ (e ognuna di queste *negativa rispetto* ad e_1).

Dal punto di vista intuitivo, assunta come immagine di E_1 una linea intuitiva aperta, semplice, orientare E_1 è lo stesso che associare ad E_1 uno dei *versi* in cui la linea può esser percorsa, a partire da un suo estremo, preso come origine, fino all'altro estremo, preso come termine.

Un *complesso unidimensionale* dicesi *orientato*, quando è assegnata l'orientazione delle sue singole cellule. Vediamo ora come si definisce un *ciclo unidimensionale orientato*. Sia dato un 1-ciclo K_1 (pag. 166), e, fissato un suo vertice E_0^1 (preso come primo e come ultimo), sia E_1^1 una delle *due* 1-cellule del ciclo terminanti in E_0^1; E_0^2 il vertice ulteriore di E_1^1; E_1^2 la 1-cellula ulteriore di K_1 avente un vertice in E_0^2; ecc.. Così proseguendo, si dispongono gli α_0 vertici e le α_0 1-cellule di K_1 nell'ordine

$$E_0^1, E_1^1, E_0^2, E_1^2, E_0^3, \dots, E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_0}, E_0^1 .$$

Orientate arbitrariamente le 1-cellule di K_1, consideriamo il complesso orientato:

$$(1) \qquad e_0^1, e_1^1, e_0^2, e_1^2, e_0^3, \dots, e_0^{\alpha_0}, e_1^{\alpha_0}, e_0^1 .$$

Questo complesso dicesi un 1-ciclo orientato, *allora e solo allora* che l'orientazione delle 1-cellule è fissata in tal modo che ogni 1-cellula e_1^i è positiva rispetto alla 0-cellula che la precede nella successione (1) (epperò negativa rispetto alla 0-cellula che la segue).

Da un determinato ciclo K_1 si posson ottenere soltanto due cicli orientati $k_1, -k_1$, tra loro opposti. Se uno di questi, k_1, è fornito dalla successione $e_1^1, e_1^2, \ldots, e_1^{\alpha_0}$ di 1-cellule orientate, l'altro, $-k_1$, è fornito dalla successione $-e_1^1, -e_1^2, \ldots, -e_1^{\alpha_0}$. Gli altri complessi orientati ottenibili da K_1 orientandone le cellule in un modo diverso dai due indicati, non sono cicli orientati.

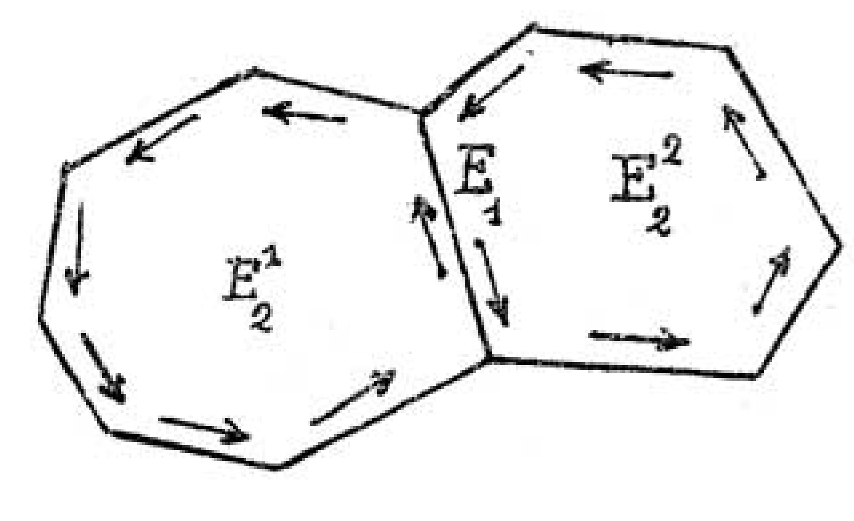
Dal punto di vista intuitivo, assunta come imagine di K_1 una linea intuitiva, aperta e semplice, i due cicli orientati derivanti da K_1 corrispondono all'associare alla linea ciascuno dei due versi in cui può esser percorsa.

Un ciclo K_1 appartenente ad un complesso ordinario C_n e circondante ivi, dà luogo a due cicli orientati opposti, ciascuno dei quali dicesi circondante. Uno dei suddetti cicli orientati chiamasi altresì il contorno orientato (in un verso) del complesso C_2 di C_n contornato da k_1.

Alla nozione di ciclo unidimensionale orientato, collegasi quella di cellula bidimensionale orientata. Sia E_2 una 2-cellula e K_1 il ciclo unidimensionale che ne forma il contorno. Associando alla E_2 uno dei due cicli orientati $k_1, -k_1$, si ottiene una 2-cellula orientata. Da E_2 si ricavan così due bicellule: $e_2, -e_2$. Dal punto di vista intuitivo, assunta come imagine di E_2 una superficie intuitiva del tipo di un cerchio, e_2 deriva dall'associare alla superficie un verso del contorno; $-e_2$ dall'associarvi il verso contrario. Ed $e_2, -e_2$ si posson chiamare le due faccie opposte di E_2.

Facciamo un ulteriore passo, prima di dare le definizioni generali.

Date due cellule bidimensionali E_2^1, E_2^2, non aventi punti interni communi, ed i cui contorni K_1^1, K_1^2 abbiano in commune una cellula unidimensionale E_1, si posson ovviamente orientare i loro contorni in guisa che la cellula commune E_1 comparisca come cellula orientata e_1 in uno dei due contorni, e come cellula orientata $-e_1$ nell'altro. (La cosa può farsi in due modi diversi).



Chiameremo somma dei due contorni orientati k_1^1, k_1^2 (introducendo in questo caso speciale un concetto che sarà fra breve notevolmente esteso), e l'indicheremo con $k_1^1+k_1^2$, il ciclo unidimensionale orientato risultante dalla soppressione, dal complesso delle 1-cellule orientate di k_1^1, k_1^2, della cellula E_1, che si presenta coi due versi opposti.

Ciò premesso, abbiasi un ciclo bidimensionale omogeneo (cfr. colla pag. 170), reticolato da un complesso ordinario K_2. Se è possibile di orientare le singole 2-cellule di K_2 (e quindi i loro contorni), in modo che la somma dei contorni orientati delle cellule stesse sia nulla, cioè che ogni 1-cellula del complesso orientato k_2, la quale è commune a due e due sole cellule bidimensionali di k_2, comparisca con un segno nel contorno di una di tali cellule e col segno opposto nel contorno dell'altra, si dirà che il ciclo K_2 è una varietà omogenea bidimensionale orientabile (o a due faccie o bilatera); altrimenti si dirà che K_2 è una varietà bidimensionale non orientabile (o a una faccia o unilatera).

Questa definizione risale in sostanza a Möbius (1865). Il termine orientabile, che è preferibile a bilatera, perchè questo ultimo allude ad una proprietà estrinseca della varietà (in relazione allo spazio in cui è immersa), è stato introdotto da Alexander e da Tietze (Jahr. der D. M. V., 1920). Considereremo in seguito qualche esempio in relazione al concetto di orientabilità (sul quale ora ci fermiamo quel tanto che basta per procedere oltre nelle definizioni), ed in particolare l'esempio ben noto della superficie (aperta) di Möbius (pag. 211).

97. — Nasce qui la questione: Le definizioni date hanno carattere invariante di fronte agli omeomorfismi? Per rispondere a questa domanda, si può spingere innanzi l'indirizzo logico-formale (come fanno per es. il Veblen, il Weyl ed altri), oppure poggiarsi sopra le già acquisite proprietà concernenti il significato invariante dei versi di una linea (pagg. 97, 99). A questo scopo osserviamo in primo luogo che, se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si assoggetta ad un'isotopia, che lo porti nel ciclo k', questo risulta pure orientato perchè l'omeomorfismo risultante tra k, k' muta un verso di k in un verso di k'. Sussiste ora il lemma:

Se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si deforma per isotopia I in modo che alla fine il ciclo unidimensionale K sostegno di k ritorni in sè, secondo che k si muti in k o in $-k$, la isotopia I', trasformata della I mediante un'omeomorfismo qualunque Ω, che muti M_2 in un'altra varietà topologica M'_2, muta il ciclo k', corrispondente per la Ω, a k, rispettivamente in k' o in $-k'$.

Invero, l'omeomorfismo Ω muta una successione

di punti di k, che si susseguano nel verso di k, e la successione dei punti omologhi dei precedenti in I, in due successioni di k', corrispondenti in I'. Onde se le prime due successioni hanno lo stesso verso o verso opposto, lo stesso accade delle due successioni omologhe.

Chiamiamo ora indicatrice, sopra una M_2 topologica, un ciclo unidimensionale orientato, riducibile per deformazione continua ad un punto entro M_2, cioè che sia il contorno di una 2-cellula di M_2. I cicli che sostengono le varie indicatrici sono omologhi fra loro (riducibili l'uno all'altro per isotopia), ma nei riguardi delle loro orientazioni posson darsi due casi: o per isotopia entro M_2 si riesce ad invertire il senso di una qualche indicatrice, oppure ogni indicatrice ritornando in sè, dopo una deformazione isotopica entro M_2, ci ritorna col proprio verso. Nel primo caso è chiaro che, poichè il sostegno di una qualunque indicatrice di M_2 si può per isotopia ridurre al sostegno di una prefissata, si può altresì per isotopia invertire il verso di una qualsiasi indicatrice. Nel primo caso vedremo che la superficie M_2 non è orientabile; nel secondo lo è. Sicchè il concetto di indicatrice trasferisce nel dominio del continuo (e rende intuitivo) il concetto combinatorio di orientabilità, svincolando il concetto stesso dalla considerazione del particolare complesso con cui si reticola la superficie, e dandogli significato invariante di fronte agli omeomorfismi. E invero è chiaro, in base al lemma, che secondochè si verifica il primo od il secondo caso per una data M_2, lo stesso accade per ogni trasformata topologica di M_2. Nel seguito, finchè non sarà stabilita l'equivalenza delle due definizioni,

perchè questo ultimo allude ad una proprietà estrinseca della varietà (in relazione allo spazio in cui è immersa), è stato introdotto da Alexander e da Tietze (Jahr. der D. M. V., 1920). Consideremo in seguito qualche esempio in relazione al concetto di orientabilità (sul quale ora ci fermiamo quel tanto che basta per procedere oltre nelle definizioni), ed in particolare l'esempio ben noto della superficie (aperta) di Möbius (pag. 211).

97. — Nasce qui la questione: Le definizioni date hanno carattere invariante di fronte agli omeomorfismi? Per rispondere a questa domanda, si può spingere innanzi l'indirizzo logico-formale (come fanno per es. il Veblen, il Weyl ed altri), oppure poggiarsi sopra le già acquisite proprietà concernenti il significato invariante dei versi di una linea (pagg. 97, 99). A questo scopo osserviamo in primo luogo che, se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si assoggetta ad un'isotopia, che lo porti nel ciclo k', questo risulta pure orientato perchè l'omeomorfismo risultante tra k, k' muta un verso di k in un verso di k'. Sussiste ora il lemma:

Se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si deforma per isotopia I in modo che alla fine il ciclo unidimensionale K sostegno di k ritorni in sè, secondo che k si muti in k o in $-k$, la isotopia I', trasformata della I mediante un'omeomorfismo qualunque Ω, che muti M_2 in un'altra varietà topologica M'_2, muta il ciclo k' corrispondente, per la Ω, a k, rispettivamente in k' o in $-k'$.

Invero, l'omeomorfismo Ω muta una successione

di punti di k, che si susseguano nel verso di k, e la successione dei punti omologhi dei precedenti in I, in due successioni di k', corrispondenti in I'. Onde se le prime due successioni hanno lo stesso verso o verso opposto, lo stesso accade delle due successioni omologhe.

Chiamiamo ora indicatrice, sopra una M_2 topologica, un ciclo unidimensionale orientato, riducibile per deformazione continua ad un punto entro M_2, cioè che sia il contorno di una 2-cellula di M_2. I cicli che sostengono le varie indicatrici sono omologhi fra loro (riducibili l'uno all'altro per isotopia), ma nei riguardi delle loro orientazioni posson darsi due casi: o per isotopia entro M_2 si riesce ad invertire il senso di una qualche indicatrice, oppure ogni indicatrice ritornando in sè, dopo una deformazione isotopica entro M_2, ci ritorna col proprio verso. Nel primo caso è chiaro che, poichè il sostegno di una qualunque indicatrice di M_2 si può per isotopia ridurre al sostegno di una prefissata, si può altresì per isotopia invertire il verso di una qualsiasi indicatrice. Nel primo caso vedremo che la superficie M_2 non è orientabile; nel secondo lo è. Sicchè il concetto di indicatrice trasferisce nel dominio del continuo (e rende intuitivo) il concetto combinatorio di orientabilità, svincolando il concetto stesso dalla considerazione del particolare complesso con cui si reticola la superficie, e dandogli significato invariante di fronte agli omeomorfismi. E invero è chiaro, in base al lemma, che secondochè si verifica il primo od il secondo caso per una data M_2, lo stesso accade per ogni trasformata topologica di M_2. Nel seguito, finchè non sarà stabilita l'equivalenza delle due definizioni,

perchè questo ultimo allude ad una proprietà estrinseca della varietà (in relazione allo spazio in cui è immersa), è stato introdotto da Alexander e da Tietze (Jahr. der D. M. V., 1920). Considereremo in seguito qualche esempio in relazione al concetto di orientabilità (sul quale ora ci fermiamo quel tanto che basta per procedere oltre nelle definizioni), ed in particolare l'esempio ben noto della superficie (aperta) di Möbius (pag. 211).

97. – Nasce qui la questione: Le definizioni date hanno carattere invariante di fronte agli omeomorfismi? Per rispondere a questa domanda, si può spingere innanzi l'indirizzo logico-formale (come fanno per es. il Veblen, il Weyl ed altri), oppure poggiarsi sopra le già acquisite proprietà concernenti il significato invariante dei versi di una linea (pagg. 97, 99). A questo scopo osserviamo in primo luogo che, se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si assoggetta ad un'isotopia, che lo porti nel ciclo k', questo risulta pure orientato perchè l'omeomorfismo risultante tra k, k' muta un verso di k in un verso di k'. Sussiste ora il lemma:

Se un ciclo unidimensionale orientato k, entro una varietà topologica M_2, si deforma per isotopia I in modo che alla fine il ciclo unidimensionale K sostegno di k ritorni in sè, secondo che k si muti in k o in $-k$, la isotopia I', trasformata della I mediante un'omeomorfismo qualunque Ω, che muti M_2 in un'altra varietà topologica M'_2, muta il ciclo k', corrispondente, per la Ω, a k, rispettivamente in k' o in $-k'$.

Invero, l'omeomorfismo Ω muta una successione

di punti di k, che si susseguano nel verso di k, e la successione dei punti omologhi dei precedenti in I in due successioni di k', corrispondenti in I'. Onde se le prime due successioni hanno lo stesso verso o versi opposto, lo stesso accade delle due successioni omologhe.

Chiamiamo ora indicatrice, sopra una M_2 topologica, un ciclo unidimensionale orientato, riducibile per deformazione continua ad un punto entro M_2, cioè che sia il contorno di una 2-cellula di M_2. I cicli che sostengono le varie indicatrici sono omologhi fra loro (riducibili l'uno all'altro per isotopia), ma nei riguardi delle loro orientazioni posson darsi due casi: o per isotopia entro M_2 si riesce ad invertire il senso di una qualche indicatrice, oppure ogni indicatrice ritornando in sè, dopo una deformazione isotopica entro M_2, ci ritorna col proprio verso. Nel primo caso è chiaro che, poichè il sostegno di una qualunque indicatrice di M_2 si può per isotopia ridurre al sostegno di una prefissata, si può altresì per isotopia invertire il verso di una qualsiasi indicatrice. Nel primo caso vedremo che la superficie M_2 non è orientabile; nel secondo lo è. Sicchè il concetto di indicatrice trasferisce nel dominio del continuo (e rende intuitivo) il concetto combinatorio di orientabilità, svincolando il concetto stesso dalla considerazione del particolare complesso con cui si reticola la superficie, e dandogli significato invariante di fronte agli omeomorfismi. E invero è chiaro, in base al lemma, che secondochè si verifica il primo od il secondo caso per una data M_2, lo stesso accade per ogni trasformata topologica di M_2. Nel seguito, finchè non sarà stabilita l'equivalenza delle due definizioni,

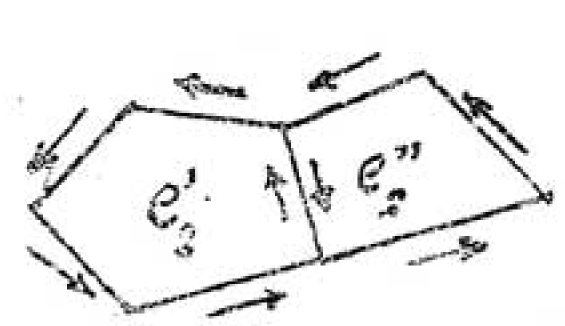
chiameremo *orientabili* le varietà che lo sono nel senso combinatorio, *bilatere* quelle che lo sono rispetto all'indicatrice. Terremo similmente distinti gli usi delle parole *non orientabili* e *unilatere*.

Per giungere alla accennata conclusione (ed anzi alla più generale, concernente il criterio di orientabilità delle varietà di dimensione qualunque), ci limitiamo dapprima, come abbiamo fatto nella definizione combinatoria, alle M_2 che son cicli *omogenei*. Premettiamo qualche altra osservazione:

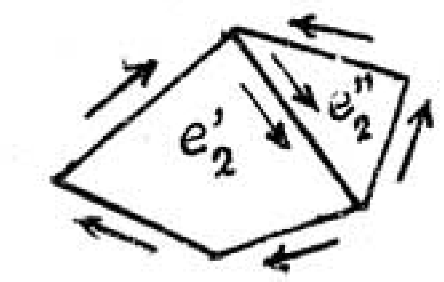
a) Una cellula bidimensionale E_2 essendo omeomorfa ad un cerchio, è *bilatera*.

b) Orientato il ciclo contorno della cellula E_2, e quindi anche la E_2, poichè il contorno è una particolare indicatrice, dare il contorno orientato equivale a dare tutta una famiglia di indicatrici, che si diranno *equiverse* con e_2. Viceversa, dare una indicatrice (e quindi tutte le equiverse), equivale a dare il verso di e_2 (cioè del suo contorno). Il verso indotto sul contorno da una indicatrice, si può per es. ottenere deformando isotopicamente l'indicatrice in modo che una sua 1-cellula orientata si sovrapponga con una del contorno.

c) Se due cellule orientate e_2', e_2'' hanno in comune (soltanto) una 1-cellula del contorno, e questa ha versi opposti, secondo che si pensa sulla e_2' o sulla e_2'', la cellula orientata $e_2'+e_2''$ (nº prec.) è equiversa rispetto a ciascuna delle e_2', e_2'', perchè i contorni di ognuna di queste sono particolari indicatrici della cellula somma.



d) Se invece le e_2', e_2'', hanno ancora in comune una



1-cellula del contorno, ma questa comparisce collo stesso verso nei due contorni, sicchè il complesso orientato insieme delle due date cellule non costituisce una cellula orientata, sulla cellula $E_2'+E_2''$ le indicatrici di e_2', e_2'' hanno versi contrari, nel senso che riducendo per isotopia il ciclo sostegno dell'una all'altra, si ottengano sopra un medesimo ciclo i 2 versi opposti. Abbiasi ora un ciclo bidimensionale omogeneo K, reticolato con un complesso ordinario C_2; e sia $\bar{C}_2$ un complesso formato da una successione di 2-cellule di C_2, tali che ognuna abbia in comune una 1-cellula colla successiva e l'ultima colla prima. Se a partire dalla prima è possibile orientare le 2-cellule di $\bar{C}_2$ in modo che due consecutive si trovino nelle condizioni delle e_2', e_2'' considerate in c), ma l'ultima si trovi colla prima nelle condizioni considerate in d), in base alle osservazioni c), d) si deduce che, deformando isotopicamente un'indicatrice di K situata nella prima cellula di $\bar{C}_2$, in modo da ottenere successivamente indicatrici della 2ª, 3ª,...., cellula, fino a ritornare ad un'indicatrice della 1ª cellula, anzi a quella da cui siamo partiti, l'isotopia considerata inverte il senso dell'indicatrice di partenza, e K è perciò una superficie unilatera.

Sia invece K una superficie bilatera. Si orienti una prescelta cellula di C_2, e ciascuna delle cellule adiacenti a questa, si orienti in modo che si venga a trovare colla prescelta nelle condizioni c), e così si prosegua. Si dovrà giungere in tal guisa ad orientare ogni cellula di C_2, senza che mai si possa separare dall'insieme una successione di cellule orientate, come quella sopra esaminata. Cioè due qualunque cellule adiacenti, comunque si sia giunti ad orientarle partendo dalla cellula iniziale, si troveranno sempre nelle condizioni c). Epperò la somma delle 1-cellule orientate del complesso C_2 sarà nulla, ossia K sarà un ciclo orientabile.

Resta dunque dimostrata, per i cicli bidimensionali omogenei, la equivalenza dei concetti di bilaterità e di orientabilità, e la invarianza topologica di tali concetti. Un ciclo omogeneo bilatero associato ad una sua indicatrice (cioè al verso del contorno di questa), si chiama un ciclo omogeneo bidimensionale orientato. Il concetto è topologicamente invariante.

La conclusione precedente, permette di affermare le orientabilità del ciclo contorno di una 3-cellula E_3, perchè esso è omeomorfo ad una superficie sferica. La orientabilità di una superficie sferica è una proprietà elementare, che si può dedurre per es. dal fatto non topologico che i raggi della sfera son tutti rivolti verso il centro, oppure dalla successiva orientazione delle cellule della superficie reticolata nel modo descritto a pag. 205.

Orientato il contorno di E_3 mediante un'indicatrice, l'associazione di E_3 ad un verso del suo contorno definisce una cellula tridimensionale orientata e_3. Una volta stabilita questa nozione, e la invarianza topologica del concetto di un ciclo orientato contorno di una E_3, ne deriva, come nel caso della superficie, la nozione di indicatrice di una M_3 topologica, la quale indicatrice sarà in tal caso il contor-

no orientato di una E_3 di M_3, e la distinzione delle M_3 in bilatere e unilatere, secondo che non si può o si può invertire con un'isotopia entro M_3, il verso di una prefissata indicatrice.

Definita indi la cellula orientata somma di due cellule orientate e'_3, e''_3, che abbiano in comune (soltanto) una 2-cellula dei loro contorni, e che siano orientate in tal guisa che la cellula comune risulti di sensi opposti sui due contorni, e distinti poscia dal punto di vista combinatorio i cicli tridimensionali omogenei in orientabili e non orientabili, si dimostra, con ovvia estensione del procedimento svolto per le superficie, che i concetti di orientabilità e di bilaterità per i cicli tridimensionali omogenei coincidono, e sono invarianti topologicamente.

Ne deriva la definizione di ciclo tridimensionale omogeneo orientato; e quindi il fatto che il ciclo contorno di una 4-cellula E_4 è orientabile; la definizione di cellula quadrimensionale orientata; ecc, ecc..

Proseguendo in tal modo, si acquisiscono con processo ricorrente i seguenti concetti e proprietà topologicamente invarianti relativi a varietà n-dimensionali, suppostili noti per varietà $(n-1)$-dimensionali.

Lo $(n-1)$-ciclo omogeneo contorno di una n-cellula E_n, è bilatero e orientabile; la orientazione o verso essendo dato da una sua indicatrice. Una n-cellula orientata e_n, risulta dall'associare una E_n al suo contorno orientato. Una indicatrice sopra una M_n topologica, è il ciclo orientato contorno di una sua E_n. La M_n può esser bilatera o unilatera. Per un n-ciclo omogeneo il concetto di orientabilità coincide con quello di bilaterità.

<u>Osservazione</u>. - Considerato un modello di una M_n topologica in uno spazio metrico proiettivo S_d, e supposto che si tratti di una varietà a punti tutti semplici (epperò omogenea), fissiamo entro M_n la n-cellula E_n staccata da un'ipersfera dell'ambiente, di raggio infinitesimo, avente il centro in un punto P di M_n; e, orientato il contorno Γ_{n-1} di E_n, prendiamo γ_{n-1} come indicatrice di M_n. I punti di Γ_{n-1} sono in corrispondenza omeomorfica colle tangenti di M_n che li proiettan da P, sicchè al verso di un poliedroide elementare ad $n-1$ dimensioni contenuto in Γ_{n-1}, assunto come indicatrice di γ_{n-1}, risponde il verso di un angolo n-edro nella stella di centro P entro lo S_n tangente ad M_n in P. Pertanto <u>per orientare l'intorno del punto P di M_n si può assumere, in luogo di γ_{n-1}, un angolo n-edro orientato tangente</u> (in particolare per es. una n-pla orientata di tangenti ortogonali a due a due). La varietà sarà bilatera, se, seguendo la variazione continua dell'angolo tangente orientato, lungo un qualsiasi cammino chiuso che sopra M_n parta da P e vi ritorni, s'ottiene alla fine un angolo orientato avente entro lo S_n tangente lo stesso verso di quello di partenza; unilatera se esiste un cammino per cui il senso dell'angolo s'inverte

<u>Al verso dell'angolo n-edro tangente, il quale definisce una faccia dello S_n tangente, si può altresì sostituire il verso di una seminormale a M_n in P, che esce da quella faccia.</u> Si ha così l'estensione del familiare concetto di laterità di una superficie dello spazio ordinario considerata dal punto di vista esteriore.

Questa definizione estrinseca della laterità, non è però possibile che nel caso di varietà a punti semplici, mentre la definizione intrinseca (topologica) vale in ogni caso. Così per es., assunta come definizione della unilaterità o bilaterità di una linea chiusa, la possibilità o meno d'invertire il senso di una sua semiretta tangente (e quindi di una seminormale) mediante una circolazione lungo la linea, una linea chiusa dotata di una cuspide risulterebbe unilatera, mentre dal punto di vista topologico ogni ciclo unidimensionale è bilatero.

Se la varietà topologica M_n, a punti semplici, è analitica ed appartiene ad uno spazio euclideo S_{n+1}, sicchè le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ di un suo punto P, variabile nell'intorno di un punto su essa fissato, son serie di potenze di n parametri $t_1, t_2, \ldots, t_n$ convergenti in un certo campo (colla condizione che un punto dell'intorno provenga da un sol gruppo di valori di $t_1, \ldots, t_n$), i versi della normale in P ad M_n son legati ai segni dei determinanti d'ordine n estratti dalla matrice funzionale delle x rispetto alle t, sicchè mediante questi segni posson definirsi le due faccie di M_n intorno al punto fissato. Se due faccie posson restare o no distinte per una circolazione analitica. E si ha così il modo di distinguere le M_n bilatere dalle unilatere. È questo il punto di vista adottato per es. nel trattato di <u>Picard</u> et <u>Simart</u>.

98. - Estendiamo il concetto di relazione positiva o negativa di una 0-cellula rispetto ad una 1-cellula, introdotto a pag. 375. Sia M_n una varietà topologica

orientabile, ed m_n la varietà medesima orientata coll'associare ad M_n una sua indicatrice. Si dirà allora che m_n ed una sua $(n-1)$-cellula orientata e_{n-1} son positive (o negative) l'una rispetto all'altra, quando e_{n-1} è (o non è) equiversa coll'indicatrice di m_n.

Una n-cellula orientata e_n ed il suo contorno γ_{n-1}, orientato con quel medesimo senso che si è associato ad E_n per definire e_n, si dicon positivi l'uno rispetto all'altra; mentre e_n e $-\gamma_{n-1}$ si dicon negativi, l'uno rispetto all'altra.

99. - Sia C_n un n-complesso, ordinario o generalizzato, le cui cellule delle varie dimensioni sieno state tutte orientate, fissando per ogni i-cellula $(1 \leq i \leq n)$ un'indicatrice, e scegliendo per es. il segno + per ogni 0-cellula. Quest'operazione si chiamerà brevemente un orientamento completo di C_n.

Un insieme qualunque di k-cellule orientate di C_n si dirà un k-complesso orientato, qualora si tenga conto semplicemente degli orientamenti fissati su quelle k-cellule, prescindendo da quelli fissati sulle cellule di dimensione inferiore. Designeremo il k-complesso orientato con c_k, se C_k è il simbolo del k-complesso formato dalle k-cellule di c_k, considerate astraendo dai loro orientamenti.

L'indicatrice di una k-cellula e_k di c_k, induce un verso sopra ogni $(k-1)$-cellula E_{k-1} di C_k, appartenente al contorno di e_k. Designata con e_{k-1} la E_{k-1} col verso assegnatovi nel completo orientamento di C_n, la e_k risulterà positiva o negativa rispetto ad e_{k-1}, secondo che quest'ultimo verso concorda o no con quello indotto su E_{k-1} dall'indicatrice di e_k.

100. - Sia C'_k un k-complesso, ordinario o generalizzato, sopra C_n, tale che ogni sua k-cellula (e quindi anche ogni sua i-cellula, $i<k$) sia distesa una sol volta (pag. 180) sopra una k-cellula (o risp. sopra una i-cellula) di C_n. Inoltre C'_k e C_n sieno completamente orientati. Una i-cellula E'_i $(1 \leq i \leq k)$ di C'_k è, per ipotesi, rappresentata omeomorficamente sopra una certa i-cellula E_i di C_n. Tale omeomorfismo muta il verso fissato su E'_i ed i versi fissati sopra le $(i-1)$-cellule di C'_k, situati sul contorno di E'_i, in determinati versi delle cellule corrispondenti di C_n. Si dice che la cellula orientata e'_i di C'_k coincide colla i-cellula orientata e_i di C_n, quando al verso di e'_i corrisponde il verso di e_i, e ad ogni $(i-1)$-cellula del contorno di e'_i, che sia positiva o negativa rispetto ad e'_i, corrisponde una $(i-1)$-cellula del contorno di e_i risp. positiva o negativa rispetto ad e_i. In altri termini: e'_i coincide con e_i se i versi di E'_i e delle $(i-1)$-cellule di C'_k appartenenti al suo contorno sono stati scelti in guisa che sienvi trasformati dei versi scelti sulle corrispondenti cellule di C_n.

101. - Sia ancora un complesso ordinario C_n, completamente orientato, e, come di solito, denotiamo con α_k il numero delle sue k-cellule. Col simbolo $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$, dove le x son interi, positivi, negativi, o nulli, si designa un insieme di k-cellule orientate, nel quale ve ne sieno $|x_i|$ coincidenti colla cellula e^i_k o $-e^i_k$ di C_n, secondo che x_i è positivo o negativo, e del

quale non faccia in alcun modo parte la cellula E_k^i, se $x_i=0$. Un tal insieme di cellule è ciò che noi chiamiamo *k-complesso orientato sopra* C_n, nell'accezione più generale. Lo indicheremo colla lettera minuscola c_k.

Dati sopra C_n due k-complessi orientati c_k', c_k'', aventi i simboli $(x_1', x_2', \dots, x_{\alpha_k}')$, $(x_1'', x_2'', \dots, x_{\alpha_k}'')$, si dice *somma* $c_k'+c_k''$ *dei due complessi* il k-complesso orientato sopra C_n, che ha per simbolo $(x_1'+x_1'', \dots, x_{\alpha_k}'+x_{\alpha_k}'')$.

In particolare la somma di ν complessi aventi simboli identici a $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$, è il complesso di simbolo $(\nu x_1, \dots, \nu x_{\alpha_k})$ e chiamasi un *k-complesso orientato disteso* ν *volte sopra* C_n, ovvero il *ν-plo* di un k-complesso orientato sopra C_n. Denotasi con νc_k, ove c_k sia il complesso di simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$.

Considerando la varietà topologica M_n riempita dai punti di C_n, si può poi assumere come imagine di νc_k l'insieme di ν complessi infinitamente vicini a c_k e dedotti da questo per mezzo di altrettante isotopie infinitesime entro M_n.

Osservazione. — Si noterà la differenza essenziale tra il concetto di somma di complessi orientati, e il concetto di somma (mod. 2) di complessi non orientati!

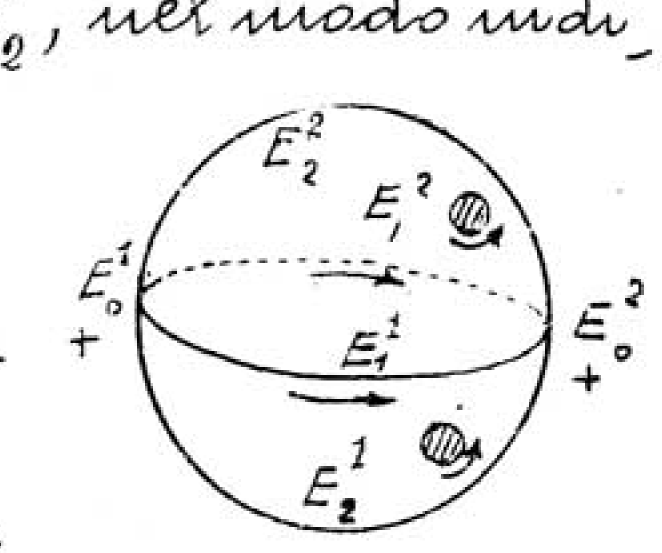
XXV. — Matrici di orientamento di un complesso.

102. — Consideriamo un n-complesso ordinario C_n, pel quale conserviamo le notazioni del N° 64 (pag. 196), e assegnamo un completo orientamento delle sue cellule. Date una k-cellula orientata e_k^j ed una (k−1)-cellula orientata

e_{k-1}^i di C_n, esprimeremo la relazione *d'incidenza orientata* fra le due cellule col simbolo λ_k^{ij}, che porremo uguale a 1 o a −1 se la seconda appartiene al contorno della prima e le due cellule sono fra loro in relazione positiva o rispettivamente negativa; e porremo invece uguale a zero, se le due cellule non si appartengono. La matrice $\|\lambda_k^{ij}\| = \mathcal{L}_k \; (k=1,2,\dots,n)$ dicesi la *k-esima matrice d'orientamento* del complesso C_n. La $\mathcal{L}_k$ differisce dalla corrispondente matrice d'incidenza H_k per ciò che alcuni degli elementi 1 di H_k sono stati cangiati in −1. Come matrice di orientamento 0-esima, $\mathcal{L}_0$, assumeremo la stessa matrice H_0, se coi simboli $e_0^i \; (i=1,2,\dots,\alpha_0)$, denotanti le 0-cellule orientate di C_n s'intende d'indicare le cellule stesse associate al segno +, mentre prenderemo per $\mathcal{L}_0$ la matrice H_0 in cui si sia cangiato in −1 ogni 1, che corrisponda ad una 0-cellula e_0^i associata al segno −.

Mutando il verso assegnato su $e_k^j \; (k=0,1,\dots,n)$ mutano i segni di tutti gli elementi della j-esima colonna di $\mathcal{L}_k$ e i segni di tutti gli elementi della orizzontale j-esima di $\mathcal{L}_{k+1}$.

Facciamo qualche esempio. Data una superficie sferica, la quale sia reticolata da un C_2, nel modo indicato in figura, assegnati i segni + ai vertici E_0^1, E_0^2, i versi indicati dalle freccie alle 1-cellule E_1^1, E_1^2 e i versi designati dalle indicatrici ombreggiate alle 2-cellule E_2^1, E_2^2; le matrici di orientamento di C_2 risultano:



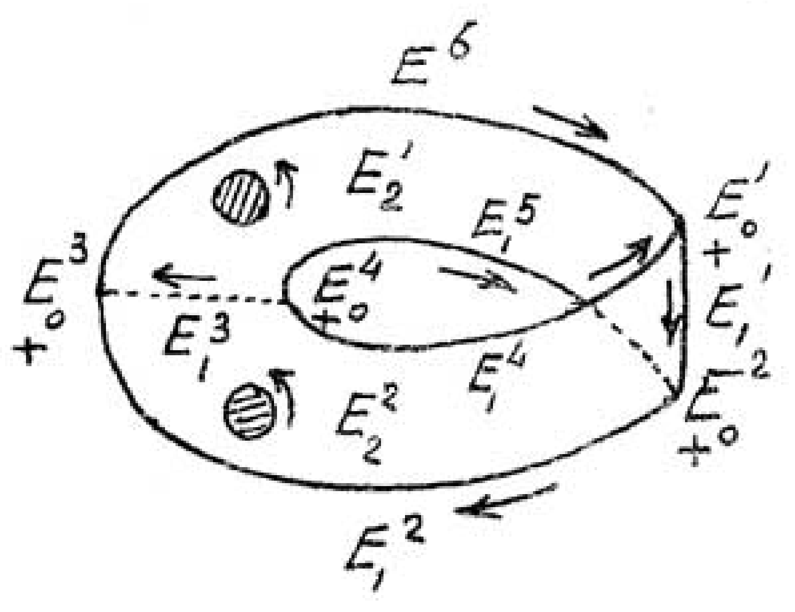
$$\mathcal{L}_0 = \|1 \;\; 1\| \;, \quad \mathcal{L}_1 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Il complesso $e_2^1 + e_2^2$ è un ciclo bidimensionale orientato omogeneo. Se invece si assegnasse per e_2^2 la indicatrice opposta, si avrebbero le matrici:

$$\mathcal{L}_0 = \| 1 \quad 1 \|, \quad \mathcal{L}_1 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

e in questo caso il complesso orientato $e_2^1 + e_2^2$ non risulterebbe un ciclo.

La superficie di Möbius (pag. 211) reticolata da un C_2 costituito ed orientato completamente come in figura, dà luogo alle matrici



$$\mathcal{L}_0 = \| 1 \; 1 \; 1 \; 1 \|, \quad \mathcal{L}_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{L}_2 = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

103. – Vediamo ora come si distinguano dalle proprietà delle matrici di orientamento i cicli orientabili dai non orientabili. Estendendo la definizione del n° 96 (relativa a cicli omogenei) diremo che <u>un n-complesso, reticolante un n-ciclo, è orientabile quando è possibile orientare le sue n-cellule in guisa che sopra una $(n-1)$-cellula, appartenente al contorno di 2ν n-cellule del ciclo, le indicatrici di ν di queste cellule determinino un medesimo verso e le indicatrici delle restanti ν il verso contrario</u>. In tal caso è chiaro che la somma delle $(n-1)$-cellule orientate dello n-complesso è zero.

Se una tale scelta dei versi sulle n-cellule del ciclo non è possibile, il ciclo <u>non è orientabile</u>.

Un'ovvia estensione del ragionamento di pag. 381 permette di concludere che questa distinzione ha carattere topologicamente invariante; cioè vale qualunque sia il C_n con cui si reticola il ciclo dato. Per riconoscere se si presenta l'una o l'altra possibilità soccorre il criterio seguente:

<u>Un n-ciclo è orientabile (bilatero) o non orientabile (unilatero) secondo che, reticolato il ciclo in modo qualunque con un n-complesso C_n, costituito da α_n n-cellule, e orientato(*) completamente C_n, il rango della n-esima matrice di orientamento di C_n vale $\alpha_n - 1$ od α_n</u>(**).

Invero, se il ciclo è orientabile, orientato C_n in modo che la somma delle $(n-1)$-cellule orientate di C_n sia zero, poichè la cellula e_{n-1}^i è positivamente incidente con un certo numero di n-cellule orientate di C_n e negativamente incidente collo stesso numero di n-cellule di C_n, in ogni orizzontale di $\mathcal{L}_n$ si avranno tanti elementi uguali a quanti ve ne sono di uguali ad 1. Pertanto la somma delle verticali di $\mathcal{L}_n$ risulterà (una verticale) nulla, le colonne di $\mathcal{L}_n$ saranno linearmente dipendenti; onde il rango σ_n di $\mathcal{L}_n$ soddisfarà alla $\sigma_n \leq \alpha_n - 1$. D'altro canto, le matrici $\mathcal{L}_n$ e H_n son equivalenti rispetto al modulo 2 [essendo $-1 \equiv 1 \pmod{2}$] onde la matrice $\mathcal{L}$

(*) Si badi di non equivocare sul linguaggio! Un ciclo <u>non</u> orientabile può, come complesso, esser orientato, giacchè ogni complesso è orientabile, nel senso che posson assegnarsi ad arbitrio le indicatrici delle sue cellule.

(**) Per gli n-complessi irriducibili, considerati indipendentemente dal concetto di orientamento, i valori $\alpha_n - 1$ ed α_n del rango della matrice d'incidenza H_n caratterizzano gli n-cicli e gli n-complessi aventi un contorno ha per rango ridotto al modulo 2 lo stesso rango ρ_n di H_n.

Ma per ogni n-ciclo di α_n cellule è $\rho_n = \alpha_n - 1$ (pag. 222), dunque il rango ridotto di L_n è $\alpha_n - 1$. E siccome il rango effettivo non può evidentemente esser minore del ridotto, si conclude che $\sigma_n = \alpha_n - 1$.

Viceversa, se per lo n-ciclo completamente orientato C_n è $\sigma_n = \alpha_n - 1$, esisterà un gruppo di α_n numeri interi (positivi o negativi) non tutti nulli $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\alpha_n}$, tali che:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_n} \mu_j \lambda_n^{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Posto $\mu_j = \varepsilon_j |\mu_j|$, ove $\varepsilon_j = \pm 1$, le precedenti relazioni possono scriversi

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_n} |\mu_j| \, \varepsilon_j \lambda_n^{ij} = 0 \qquad ,$$

le quali sussiston naturalmente anche rispetto al mod. 2. Anzi, essendo $\varepsilon_j \lambda_n^{ij} = \pm 1$, le predette relazioni equivalgono, rispetto al mod. 2, alle

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_n} |\mu_j| \eta_n^{ij} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2) \quad ,$$

ove le η son gli elementi della matrice d'incidenza H_n.

D'altra parte fra le η sussiste pure il sistema di congruenze

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_n} \eta_n^{ij} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

(esprimenti che C_n è un ciclo, cioè che in ogni orizzontale di H_n havvi un numero pari di elementi uguali ad 1), dalle quali, se è per es. $\mu_1 \neq 0$, si traggon le

$$\sum_{j=1}^{\alpha_n} |\mu_1| \, \eta_n^{ij} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2) \quad ,$$

che sottratte a membro a membro dalle (3), forniscon le:

$$\sum_{j=2}^{\alpha_n} \left\{ |\mu_j| - |\mu_1| \right\} \eta_n^{ij} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2) \; .$$

Ora, se fosse, per qualche j, $|\mu_j| - |\mu_1| \neq 0$, si avrebbe una dipendenza lineare (mod. 2) fra <u>meno</u> di α_n colonne di H_n, mentre il solo legame fra le α_n colonne di H_n è (4). Dunque $|\mu_j| = \mu$, indipendentemente dall'indice j. Divisi per μ i due membri di ciascuna delle (2), risulta:

$$\sum_{j=1}^{\alpha_n} \varepsilon_j \lambda_n^{ij} = 0 \qquad ,$$

e questo significa che, moltiplicando la colonna j-esima di $\mathcal{L}_n$ per ε_j, il che corrisponde a mantenere immutato il verso della cellula e_n^j di C_n, se $\varepsilon_j = 1$, o a cangiare tale verso, se $\varepsilon_j = -1$, la nuova matrice d'orientamento $\mathcal{L}'_n$ del complesso, coi nuovi versi così determinati delle n-cellule di C_n, gode della proprietà che la somma delle sue verticali è nulla. Epperò in ogni orizzontale di $\mathcal{L}'_n$ vi sono tanti elementi uguali ad 1, quanti ve ne sono di uguali a -1; ossia ogni $(n-1)$-cellula del complesso completamente orientato C_n è positivamente incidente con tante n-cellule con quante altre è negativamente incidente. Dunque C_n è un ciclo orientabile.

<u>Osservazione</u>. - Applicando il teor. precedente alla matrice di orientamento $\mathcal{L}_2$ del piano proiettivo (reale) reticolato dal $\dot{C}_2$ di cui a pag. 212, dopo aver arbitrariamente orientate le cellule di dimensione 0, 1, 2 di C_2, si trova $\alpha_2 = 3$ come rango di $\mathcal{L}_2$. Pertanto <u>il piano proiettivo è unilatero</u>. Reticolando in modo analogo lo spazio proiettivo e profittando dello stesso criterio si trova che <u>lo spazio proiettivo è bilatero</u>. In generale <u>uno spazio proiettivo (reale) S_r è unilatero o bilatero secondo che r</u>

è pari o dispari. (Ved. in proposito D. König, Congresso intern. di Cambridge, 1912).

104. - Abbiam già definito il contorno (orientato) di una cellula e_n orientata, come il ciclo contorno di E_n, al quale si associ un senso tale da renderlo equiverso con un'indicatrice di e_n. Insomma: dei due cicli orientati opposti ottenibili dal contorno di E_n, si assume per contorno di e_n quello che è in relazione positiva con e_n. Reticolato il contorno di E_n con un $(n-1)$-complesso, il contorno di e_n è dunque l'insieme delle $(n-1)$-cellule di questo complesso, ciascuna delle quali vien positivamente orientata rispetto ad e_n.

Il contorno di un k-complesso orientato c_k, dato sopra un C_n, si definisce poi come la somma (nº 101) dei contorni delle singole k-cellule orientate di c_k.

Dalla definizione di contorno di una cellula orientata, tenuto conto del nº 101, scende subito che:

La colonna j-esima $y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_{k-1}}$ della matrice d'orientamento $\mathfrak{L}_k$ di un complesso C_n, è il simbolo del contorno della cellula orientata e_k^j di C_n.

Scritto il simbolo $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ di e_k^j, ove $x_j = 1$ e $x_i = 0$ per $i \neq j$, poichè

$$\mathfrak{L}_k \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\alpha_k} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{\alpha_{k-1}} \end{Vmatrix},$$

il contorno di e_k^j risulta dal prodotto di $\mathfrak{L}_k$ pel simbolo di e_k^j. Ricordata qui la definizione di somma di due complessi (nº 101) ed osservata la evidente proprietà distributiva di $\mathfrak{L}_k$ per la somma dei simboli di due k-complessi orientati, si arriva senz'altro al teorema:

Il simbolo del contorno di un k-complesso orientato sopra un dato C_n, si ottiene moltiplicando la matrice $\mathfrak{L}_k$ pel simbolo di quel k-complesso.

È la proprietà analoga a quella dimostrata a pag. 219 pei complessi non orientati.

Secondo il nº 103 (tenuto sempre conto del nº 101) un k-ciclo orientato (derivante dall'associazione di un'indicatrice a un k-ciclo orientabile) gode della proprietà che la somma dei contorni delle cellule orientate di un qualunque k-complesso (completamente orientato) che lo reticoli, è zero, cioè un k-ciclo orientato non ha contorni.

Se invece si tratta di un k-ciclo non orientabile, un k-complesso completamente orientato, che lo reticoli, ha sempre necessariamente qualche contorno.

Osservazione. - Naturalmente il contorno di un c_k orientato potrà (conformemente alla definizione generale del nº 101) esser costituito da un $(k-1)$-complesso orientato insieme di $(k-1)$-complessi ciascuno dei quali sia multiplo (secondo un intero ≥ 1) di un'altro. La definizione di k-ciclo orientato si deve altresì intendere nell'accezione più generale. Può cioè trattarsi di un ciclo multiplo di un altro ciclo (semplice).

105. - Dal nº precedente si traggono subito i seguenti corollari (ved. le cose analoghe per complessi non orientati nelle pagg. 219 - 20):

Ogni k-ciclo orientato sopra un dato C_n ha per simbolo una soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ del sistema di equazione:

$$(\mathcal{S}_k) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_k} \lambda_k^{ij} x_j = 0 \qquad (i=1,2,\dots,\alpha_{k-1})$$

Viceversa, ogni soluzione di questo sistema è il simbolo di un k-complesso costituito da un insieme di k-cicli orientati.

Il prodotto di due successive matrici di orientamento $\mathcal{S}_{k-1}\cdot\mathcal{S}_k$ è nullo.

106. – Dato un n-complesso orientato C_n, abbiamo veduto (pag. 202) che il contorno della varietà topologica M_n reticolata da C_n, considerata a prescindere da ogni concezione di verso, è invariante per trasformazioni topologiche. Ma da ciò non segue affatto che sia invariante anche il contorno di C_n, definito nel n° 104, in quanto il contorno di C_n cangia se si orientano altrimenti le singole n-cellule di C_n. Così il complesso $E_2'+E_2''$ considerato nel n° 97, c) ha un contorno (che è un ciclo orientato) completamente diverso da quello del complesso considerato nel n° 97, d) (quest'ultimo contorno non è un ciclo orientato!); mentre i due complessi $E_2'+E_2''$ son topologicamente equivalenti.

Vi è però un caso importante e generale in cui si perviene ad un concetto invariante di contorno, anche nel caso di una M_n topologica orientata; ed è precisamente quello in cui si può parlare di una varietà siffatta, ossia nel caso di una M_n bilatera. Osserviamo all'uopo, in primo luogo, che a norma della definizione del n° 104, il contorno di un k-complesso orientato (ordinario o generalizzato o dato sopra un altro complesso C_n) è sempre

un ciclo orientato o un insieme di cicli siffatti (semplici o multipli; n° 104, Oss.)(*), perchè è la somma di cicli orientati (che sono i contorni delle singole k-cellule orientate di c_k). Pertanto, se una T_n bilatera si orienta associandovi una sua indicatrice e si reticola indi con un C_n, del quale ogni n-cellula si orienti in modo che il suo contorno sia equiverso coll'indicatrice di m_n, risulteranno in conseguenza orientate in modo univoco (n° 104) le (n-1)-cellule di C_n, epperò anche i singoli (n-1)-cicli che costituiscono il contorno di C_n, cioè di M_n. E siccome il contorno di M_n è un invariante topologico, e un invariante topologico è altresì l'indicatrice scelta in M_n, si conclude che:

Si può parlare in senso topologicamente invariante di contorno di una M_n topologica bilatera orientata. L'orientazione dei singoli cicli bilateri (semplici o multipli) che costituiscono il contorno di M_n, è determinata univocamente dalla scelta di un verso su M_n (cioè dalla scelta di un'indicatrice di M_n).

La determinazione del verso sopra ognuno dei cicli contorno, si può manifestamente ottenere deformando per isotopia l'indicatrice scelta in M_n, finchè una (n-2)-cellula (orientata) del suo contorno viene a sovrapporsi ad una (n-2)-cellula di quel ciclo.

Il contorno di m_n, orientato nel modo precisato, dicesi in relazione positiva con m_n; l'orientazione opposta del contorno (cioè di ciascuno dei suoi cicli) è in relazione negativa con m_n. Questa nozione estende l'analoga introdotta per le cellule nel n° 98.

(*) Il che estende ai complessi orientati la proprietà segnalata a pag. 204 per complessi non orientati.

<u>simbolo una soluzione</u> $(x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_k})$ <u>del sistema di equazione</u>:

$$(\mathcal{S}_k) \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_k} \lambda_k^{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \alpha_{k-1})$$

<u>Viceversa, ogni soluzione di questo sistema è il simbolo di un k-complesso costituito da un insieme di k-cicli orientati</u>.

<u>Il prodotto di due successive matrici di orientamento $\mathcal{S}_{k-1} \cdot \mathcal{S}_k$ è nullo</u>.

106. - Dato un n-complesso orientato c_n, abbiamo veduto (pag. 202) che il contorno della varietà topologica M_n reticolata da C_n, considerata a prescindere da ogni concezione di verso, è invariante per trasformazioni topologiche. Ma da ciò non segue affatto che sia invariante anche il contorno di c_n, definito nel nº 104, in quanto il contorno di c_n cangia se si orientano altrimenti le singole n-cellule di C_n. Così il complesso $e_2' + e_2''$ considerato nel nº 97, c) ha un contorno (che è un ciclo orientato) completamente diverso da quello del complesso considerato nel nº 97, d) (quest'ultimo contorno non è un ciclo orientato!); mentre i due complessi $E_2' + E_2''$ son topologicamente equivalenti.

Vi è però un caso importante e generale in cui si perviene ad un concetto invariante di contorno, anche nel caso di una M_n topologica orientata; ed è precisamente quello in cui si può parlare di una varietà siffatta, ossia nel caso di una M_n bilatera. Osserviamo all'uopo, in primo luogo, che a norma della definizione del nº 104, <u>il contorno di un k-complesso orientato (ordinario o generalizzato o dato sopra un altro complesso c_n) è sempre un ciclo orientato o un insieme di cicli siffatti (semplici o multipli; nº 104, Oss.)</u>(*), perchè è la somma di cicli orientati (che sono i contorni delle singole K-cellule orientate di c_k). Pertanto, se una $\mathcal{T}_n$ bilatera si orienta associandovi una sua indicatrice e si reticola indi con un C_n, del quale ogni n-cellula si orienti in modo che il suo contorno sia equiverso coll'indicatrice di m_n, risulteranno in conseguenza orientate in modo univoco (nº 104) le $(n-1)$-cellule di C_n, epperò anche i singoli $(n-1)$-cicli che costituiscono il contorno di C_n, cioè di M_n. E siccome il contorno di M_n è un invariante topologico, e un invariante topologico è altresì l'indicatrice scelta in M_n, si conclude che:

<u>Si può parlare in senso topologicamente invariante di contorno di una M_n topologica bilatera orientata. L'orientazione dei singoli cicli bilateri (semplici o multipli) che costituiscono il contorno di M_n, è determinata univocamente dalla scelta di un verso su M_n (cioè dalla scelta di un'indicatrice di M_n)</u>.

La determinazione del verso sopra ognuno dei cicli contorno, si può manifestamente ottenere deformando per isotopia l'indicatrice scelta in M_n, finchè una $(n-2)$-cellula (orientata) del suo contorno viene a sovrapporsi ad una $(n-2)$-cellula di quel ciclo.

Il contorno di m_n, orientato nel modo precisato, dicesi in <u>relazione positiva</u> con m_n; l'orientazione opposta del contorno (cioè di ciascuno dei suoi cicli) è in <u>relazione negativa</u> con m_n. Questa nozione estende l'analoga introdotta per le cellule nel nº 98.

(*) Il che estende ai complessi orientati la proprietà segnalata a pag. 204 per complessi non orientati.