estremi sarà dunque uguale rispettivamente al lato di questo decagono, oppure al raggio del cerchio r. Più particolarmente, la prima di queste due grandezze sarà la distanza della orizzontale $B_2 C_2' \ldots$ da A_2 e dall'orizzontale $N_2 G_2$ da P_2, mentre le due orizzontali suddette avranno distanza eguale al raggio del cerchio r.

CAPITOLO III.

— Applicazioni —

§ 9 - Digressione del concetto di retta tangente ad una curva e di piano tangente ad una superficie in un punto.

45 - Per svolgere altre notevoli applicazioni del metodo di Monge, premettiamo alcune considerazioni intuitive sui concetti di retta tangente ad una curva e di piano tangente ad una superficie in un punto.

Nei complementi che seguiranno alla fine del corso, ritorneremo in modo più preciso sugli stessi concetti dimostrando rigorosamente tutte le proprietà di cui andiamo ora a intrattenerci.

Sia γ una curva piana o gobba, P un suo punto. Prendiamo su γ un altro punto Q e facciamolo muovere sopra γ fino a tendere indefinitamente verso P. Se la secante PQ, al tendere comunque di Q verso P, tende ad una posizione limite t, ben determinata, la retta t dicesi tangente in P a γ.

Generalmente una curva γ ha una tangente in ogni suo punto P.

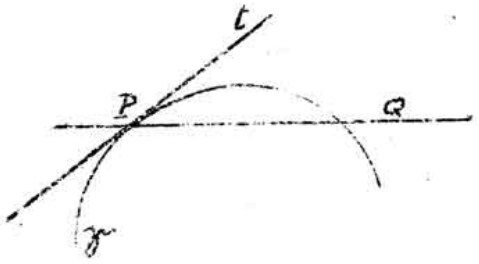

fig-111-

La totalità di queste tangenti formano una superficie rigata che dicesi sviluppabile orientatrice della curva γ. Se γ sta in un piano π, tale sviluppabile coincide evidentemente con π.

Quando al tendere di Q verso P la retta PQ non ha alcuna posizione limite, il punto P è un particolare punto della curva detto senza tangente.

Questo caso però, almeno nelle pratiche applicazioni, non si presenta e noi pertanto, in queste brevi nozioni, tralasceremo di occuparcene.

Può avvenire piuttosto che la curva γ passi per P con più rami, passi cioè per P più volte, in tal caso il punto Q può tendere a P in più modi e la ret-

ta PQ può avere più posizioni limiti. In questi casi P si dice punto <u>multiplo di γ</u>. Nel caso, per esempio, della figura 96 a) la curva γ passa due volte per P ed ha ivi due tangenti t_1 e t_2. Il punto P dicesi <u>punto doppio nodale di γ</u>.

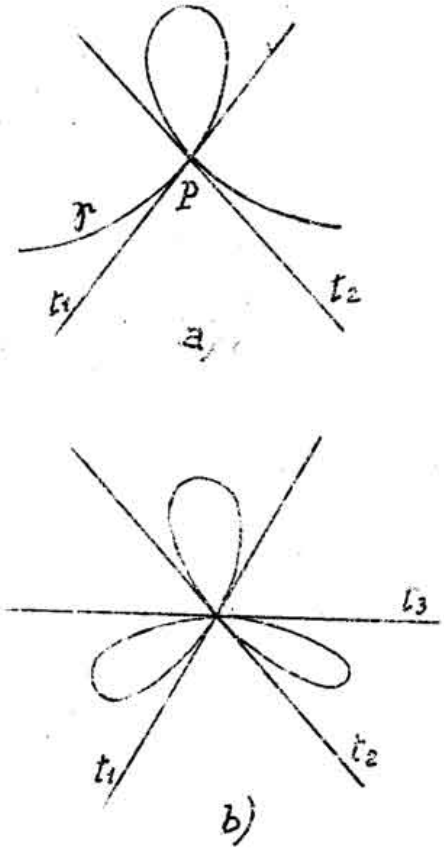

fig. 112

Nel caso della figura 96 b), la curva γ passa tre volte per P ed ha ivi tre tangenti t_1, t_2, t_3. Il punto P dicesi <u>triplo ordinario di γ</u>. Può darsi però che una curva γ passi, per esempio, due volte per uno stesso punto P ed abbia ivi una sola tangente.

46. Per avere una più precisa nozione sui punti multipli di una curva conviene fare le seguenti osservazioni.

Sia α un piano dello spazio che muovendosi con continuità tenda ad una posizione limite α_0 passante per P, ma non per la tangente o per qualcuna

delle tangenti di γ in P, o, come diremo più brevemente, sia α un piano dello spazio tendente ad una posizione <u>generica</u> α_0 per P.(1) Al tendere di α ad α_0, i punti comuni ad α e a γ tendono ai punti comuni ad α_0 e γ; anzi, ogni punto di intersezione tra α_0 e γ si può considerare come il limite di uno o più punti (reali o immaginari) di intersezione di α e γ. Al punto P comune ad α_0 e γ tendono perciò uno o più punti d'incontro di α e γ.

"Orbene se una sola Q_1 di queste intersezioni variabili tende a P, il punto P dicesi <u>punto semplice</u> di γ.

Se invece r distinte delle intersezioni in discorso, diciamo $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_r$ tendono a cadere contemporaneamente in P, il punto P si dice <u>multiplo di ordine</u> r od <u>r-uplo</u> per la curva γ".

<u>È bene notare</u> che per ragioni di continuità, che qui si presuppongono sempre soddisfatte, il numero r di cui sopra è <u>indipendente</u> sia dalla posizione di α_0, pur che sia generico rispetto a γ, sia dal modo col quale α tende a α_0.

Al tendere di α verso α_0, i punti $Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_r$ descrivono r archetti della curva γ, sicchè <u>intuitiva-</u>

---

(1) Nel caso che γ giacesse in un piano Π, ad α ed α_0 si possono sostituire le loro tracce su Π.

mente il punto r-uplo P (almeno in generale) ci appare come punto di concorso di r archi della curva γ.

Le rette PQ_1, PQ_2, ... PQ_r tendono generalmente ad r distinte posizioni limiti t_1, t_2, ... t_r che sono altrettante tangenti della curva γ in P. Può darsi però, che pure essendo PQ_1, PQ_2, ... PQ_r, rette tutte distinte, le loro posizioni limiti siano tutte od in parte coincidenti. Sicchè possiamo solo dire che in un punto r-uplo la curva γ ha al più r tangenti distinte.

In geometria analitica una curva γ si rappresenta mediante un sistema di equazioni fra le coordinate x, y, z dei suoi punti, oppure ponendo le coordinate di un punto variabile sulla curva, funzioni di un parametro.

Ora la determinazione dei coefficienti angolari di una tangente ad una curva γ in un suo punto r-uplo P, dipende dalle r soluzioni di un sistema di grado r di equazioni algebriche.

Le tangenti t_1, t_2, ... risulteranno reali, distinte, coincidenti o immaginarie secondo che tali sono le r soluzioni del sistema detto. Sicchè, convenendo di contare h volte una tangente t_i corrispondente ad una soluzione h-upla del sistema, si può enunciare il teorema generale:

Una curva γ ha in un suo punto r-uplo r tangenti (tra reali od immaginarie, distinte o coincidenti).

Segue che in un punto doppio una curva ha due tangenti. Se queste tangenti sono reali e distinte, il punto si dice un nodo, se sono reali e coincidenti, il punto si dice una cuspide, se sono immaginarie coniugate il punto si dice doppio isolato.

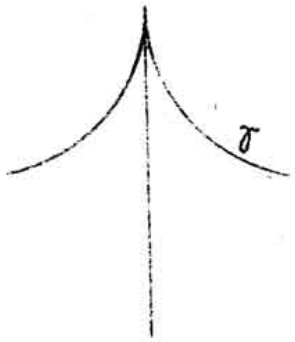

fig-113-

La cuspide si può sempre considerare come caso particolare di un nodo in cui le tangenti sono venute a coincidere.

Nel caso del nodo la curva γ passa due volte per P, si suole anche dire che γ ha due rami lineari passanti per P, nel caso invece della cuspide (Fig 113) γ passa effettivamente una sola volta per P, ma vi passa con un ramo di natura più complessa detto ramo di secondo ordine.

Come si è detto, nel movimento del piano α verso α_0, i punti $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_r$ descrivono altrettanti rami della curva γ. Se $t_1, t_2, \ldots\ldots t_r$ sono distinti, anche questi rami $R_1\ R_2, \ldots\ldots R_r$ sono distinti, se però due delle r tangenti vengono a coincidere, per es: $t_1 \equiv t_2$, i corrispondenti rami R_1 ed R_2 vengono ad avere la

stessa tangente e si possono presentare due casi ben distinti.

a) - R_1 ed R_2 si saldano in un unico ramo detto allora di secondo ordine, come nel caso della cuspide,

b) - i due rami R_1 ed R_2 sono ancora distinti e lineari e presentano in P un semplice contatto nel qual caso il punto si chiama <u>tacnodo</u> (fig. 114).

Fig-114-

Omettiamo per brevità la considerazione dei casi più complessi in cui vengano a coincidere più di due tangenti.

17 - Per le ragioni sopra esposte si dice che un piano (generico) α_0 passante per un punto r - upla P e per nessuna delle tangenti a γ in P, ha ivi un incontro r-upla con la curva γ. Anche questo fatto ha un riscontro analitico perfettamente determinato e serve ad esprimere che: tradotto in equazioni il problema della ricerca dei punti comuni al piano α_0 e alla curva γ, si ha un sistema di equazioni avente come r - upla la soluzione corrispondente al punto P.

Se invece si considera un piano α_1 passante per una tangente t_1 in P a γ, come è facile ad intuirsi, si dimostra che tale incontro diventa almeno $(r+1)$-u

plo. Così in un punto semplice P per γ, un piano generico ha incontro semplice con γ, mentre un piano qualunque passante per la tangente t in P a γ, ha in P un incontro doppio o bipunto con γ. Per questo fatto i piani passanti per t si dicono tangenti a γ.

48 - Si chiama piano osculatore alla curva in un suo punto semplice P il limite verso cui tende un piano $\alpha \equiv MNR$ determinato da tre punti M, N, R, di γ al tendere di questi tre punti verso P.

Lo stesso piano si può anche definire come limite di un piano α passante per P e per due punti M ed N di γ al tendere di M ed N verso P, oppure come limite di un piano (tangente) α, passante per la tangente in P e per un punto M di γ al tendere di M a P.

Se la curva è piana, il piano osculatore coincide col piano della curva.

49 - Notiamo infine che se una curva γ piana o gobba, avente un punto r-uplo in P, si muove con continuità fino a tendere ad una posizione limite γ_0, la posizione limite P_0 del punto P sarà un punto per lo meno r-uplo di γ_0. Non è escluso cioè che la multiplicità di P_0 per γ_0 sia anche maggiore

di $\underline{r}$, ma in ogni caso non può <u>mai</u> essere minore di r. Così ad es., se una curva γ con un punto doppio P, si muove con continuità fino a cadere in una curva γ_0, il limite P_0 di P sarà almeno doppio per γ_0.

Si noti anche che se P è una cuspide per γ, P_0 è pur esso una cuspide per γ_0, mentre se P è un nodo, P_0 può essere benissimo una cuspide o un punto di multiplicità maggiore.

50 - Le cose dette si applicano indifferentemente alle curve piane e alle curve gobbe; nel caso delle curve piane esse però acquistano un carattere di maggiore semplicità.

La definizione di tangente è la stessa in entrambi i casi e non vi è nulla da aggiungere.

Per la definizione dei punti multipli, come si è accennato in una nota, conviene sostituire ai piani α ed α_0 considerati nel caso generale, le loro tracce a ed a_0 sul piano della curva. Per le stesse ragioni allora esposte, si ha che una retta <u>generica</u> a_0 passante per un punto r-uplo P di una curva γ, ha in P un incontro r-uplo con γ, nel senso che $\underline{r}$ delle intersezioni variabili comuni a γ e ad una retta $\underline{a}$ non passante per P, al tendere di $\underline{a}$ ad a_0, tendono a cadere in P.

In un punto r-uplo una curva piana ha al più r tangenti distinte ed ognuna di queste ha in P un incontro almeno $(r+1)$-uplo con γ. In particolare in un punto semplice P, la tangente ha incontro almeno bipunto o doppio con γ, ogni altra retta per P ha ivi incontro semplice con γ e viceversa.

Si noti che viceversa se una retta t ha in un punto semplice P di γ un incontro almeno bipunto, essa è la tangente in P a γ.

Per il fatto che la tangente t in P (semplice) è il limite della secante PQ al tendere di Q verso P, si può dire che la tangente è la congiungente di P col punto di γ, infinitamente vicino a P. Tale locuzione non è in sè molto precisa, ma è fortemente espressiva ed è comunemente usata.

51. Essendo P ancora un punto semplice di una curva piana γ, consideriamo la solita secante PQ_1 ed indichiamo con Q_2, Q_3 ..... gli ulteriori punti comuni a γ e alla retta PQ_1. Se al tendere di Q_1 verso P un altro dei punti Q, ad es. Q_2, tende insieme a Q_1 al punto P, la tangente t in P a γ viene ad avere in P un incontro tripunto con γ. In tal caso il punto P chiamasi punto d'inflessione o flesso della curva γ e t tangente di flesso.

Tralasciamo, per brevità, di considerare i casi in cui la tangente nel punto semplice P ha con γ un incontro K-punto con $K \geq 3$, ed i casi in cui una tangente alla curva in un suo punto r-uplo abbia con essa un incontro più che $(r+1)$-uplo.

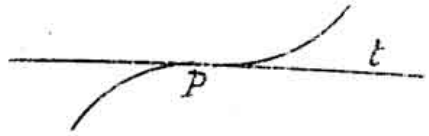

fig - 115 -

52 - Chiamasi <u>normale</u> alla curva <u>piana</u> γ in un suo punto semplice P la perpendicolare in P alla tangente ivi alla curva.

Le normali ad una curva γ inviluppano un'altra curva γ' detta <u>evoluta</u> o <u>sviluppata</u> di γ. La curva γ rispetto a γ' si dice invece <u>evolvente</u> o <u>sviluppante</u> di γ'.

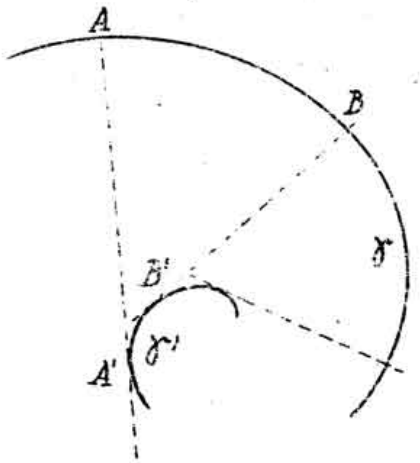

fig - 116 -

Le tangenti dell'evoluta sono normali all'evolvente e viceversa, ogni curva γ avente per normali le tangenti a γ' è una evolvente di γ'.

Indichiamo con A e B due punti qualunque di γ e con A' e B' i punti ove

le normali in A e B a γ toccano γ'.

Negli elementi di Geometria Differenziale si dimostra che l'arco di evoluta $A'B'$ è uguale alla differenza dei due segmenti AA' e BB'.

Ne segue che per avere la curva γ basta pensare un filo inestensibile avvolto alla curva γ', e svolgere poscia questo filo mantenendolo costantemente teso (lungo la tangente a γ'). Ogni punto del filo descriverà un'evolvente di γ'. Laddove mentre una curva ha una sola evoluta, essa ha infinite evolventi.

A queste considerazioni si collegano intimamente le nozioni di <u>curvatura</u>, <u>centro di curvatura</u> e <u>circolo osculatore</u> ad una curva. Si dimostra infatti che il circolo passante per tre punti ABC di una data curva γ al tendere di B e C indefinitamente verso A, ha per limite un circolo K, avente in A incontro almeno tripunto con la curva, detto <u>circolo osculatore</u> in A a γ. Il centro di K cade nel punto A' dell'evoluta γ' di γ, corrispondente al punto A, e si chiama centro di curvatura di γ in A. L'evoluta risulta così il luogo dei centri di curvatura della curva γ. Il raggio $\overline{AA'}$ del circolo osculatore a γ in A, si chiama <u>raggio di curvatura</u> di γ nel punto A, e il suo inverso: $\frac{1}{\overline{AA'}}$ chiamasi <u>curvatura</u> di γ in A.

Ricordiamo altresì che preso un punto B di γ vi-

vino ad A e detto $\Delta\vartheta$ l'angolo (di contingenza) acuto che la tangente in B a γ forma con la tangente in A il rapporto $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta s}$ essendo Δs la lunghezza dell'arco AB. al tendere di Δs a zero, ha per limite la curvatura sopra definita.

53 - Data una curva γ ed un punto O (proprio ed improprio) proiettiamo γ da O sopra un piano π (1). Ad ogni punto P di γ corrisponde sopra π un punto P' che al variare di P sopra γ descrive una curva γ' detta la proiezione da O sopra π della curva γ.

Se il punto O appartiene a γ, ed è semplice per questa, la corda OP, al tendere di P verso O, tende alla tangente t in O alla curva γ; la proiezione P' di P tende perciò al punto O' ove t incontra π. Il punto O' appartiene quindi alla curva γ' e si deve considerare come la proiezione di O.

Lo studioso può vedere facilmente quel che avviene nel caso che O sia r-uplo per γ.

Ritorniamo piuttosto al caso (generale) che O sia fuori di γ ed osserviamo che la tangente t in un punto semplice P di γ si proietta nella tangente t'

(1) Se γ appartiene ad un piano α il punto O si deve supporre esterno ad α ed il piano π distinto da α.

in P' alla curva γ'.

Difatti supposto che O non appartenga a $\underline{t}$, al tendere di un punto Q di γ verso P il piano OPQ tenderà al piano α determinato da O e dalla retta $\underline{t}$ (perchè per ipotesi PQ tende a t).

Ora il piano OPQ coincide col piano $OP'Q'$, quindi si può dire che al tendere di P' verso Q' il piano $OP'Q'$ tende al piano α e perciò la corda $P'Q'$ di γ' al tendere di Q' verso P' tende alla retta t' dove α incontra π_1, tende cioè alla proiezione t' di $\underline{t}$. D'altra parte, il limite della corda $P'Q'$ al tendere di Q' verso P' è la tangente in P' a γ', quindi, in conclusione, la tangente in P' a γ' è la proiezione della tangente $\underline{t}$ nel punto P alla curva obbiettiva γ.

Se il centro di proiezione C appartiene a $\underline{t}$ il ragionamento di cui sopra non si può più applicare, ma è facile vedere, con considerazioni analoghe, che la tangente nel punto P' a γ' risulta perfettamente determinata ed è la retta ove π incontra il piano osculatore in P alla curva γ.

54. Le due curve γ e γ' sono in corrispondenza biunivoca: ad ogni punto di γ corrisponde un punto di γ' e viceversa. Può darsi però che a due o più punti distinti di γ corrispondano in γ' punti coincidenti

in uno stesso punto (che perciò è multiplo per γ'). Se, per esempio, O è sopra una corda PQ di γ, ai due punti P e Q corrispondono sopra γ' due punti P' e Q' coincidenti in uno stesso punto P' che però è doppio per γ'. Le due tangenti in P' a γ' sono le proiezioni delle tangenti a γ nei punti P e Q. E così pure se O è sopra una trisecante[1] PQR di γ, ai tre punti P, Q, R corrispondono tre punti P', Q', ed R' coincidenti in un punto triplo P' di γ' e le tangenti in P' a γ' sono le proiezioni delle tre tangenti a γ nei punti P, Q ed R.

Un caso pure notevole si ha quando O è sopra una tangente t di γ; in tal caso al punto di contatto P (semplice per γ) corrisponde sopra γ' un punto P' dove, come si è già detto, la curva γ' avrà come tangente determinata ed unica, l'intersezione del quadro col piano osculatore alla curva nel punto P. Dimostriamo ora che P' è una cuspide per γ'.

Si scelga infatti $\bar{O}$ sopra una corda PQ e si faccia tendere PQ a t. Per ogni posizione $\bar{O}$ di O si avrà come proiezione una curva $\bar{\gamma}'$ (variabile con $\bar{O}$) avente un punto doppio in P. Al tendere di PQ verso t e di $\bar{O}$ verso O, la curva $\bar{\gamma}'$ tenderà alla curva γ' e il punto

---

(1) Una trisecante PQR di γ si deve considerare come la sovrapposizione delle tre corde PQ, QR, RP.

doppio $\bar{P}'$ di $\bar{\gamma}'$ tenderà al punto P' di γ'. Il punto P' di γ' risulta così come limite del punto doppio $\bar{P}'$ di $\bar{\gamma}'$ e perciò è anch'esso un punto doppio per γ' e siccome si è visto che in P', γ' ha una sola tangente (n° precedente), così P' è una cuspide di γ'.

Si noti che se P è un punto semplice di γ e la retta OP non è tangente a γ e non incontra γ, all'infuori di P, in alcun altro punto, la proiezione P' sarà pure semplice per γ'.

E più in generale, se P è un punto r-uplo di γ e la OP non è tangente, nè incontra altrove la curva γ, la proiezione P' è un punto r-uplo per γ'.

55. Premesse queste nozioni passiamo a definire i <u>punti semplici</u> di una superficie Γ.

"Si dice che un punto P di una superficie Γ è semplice, quando la sezione della superficie con un piano generico (non particolare) per P è una curva avente in P un punto semplice".

In tal caso l'insieme delle tangenti in P alle sezioni piane passanti per questo punto è evidentemente un <u>fascio di raggi</u> perchè un piano generico per P ha comune con questo insieme un solo raggio. Insomma:

"le tangenti in P alle varie sezioni piane di Γ, riempiono un piano che si chiama piano tangente a Γ nel punto semplice P.

Si aggiunga che se una curva sghemba γ, tracciata sulla superficie passa semplicemente per P, la sua tangente t in P, appartiene al suddetto piano tangente.

Infatti la retta t ha comune con la curva γ e quindi con la superficie, il punto P e il punto infinitamente vicino, sicchè conducendo per t un piano generico, la sezione così praticata su Γ avrà in P come tangente la stessa retta t. Dunque:

Il piano tangente alla superficie Γ in un suo punto semplice P, è completamente determinato dalle tangenti ivi a due linee piane o sghembe, tracciate sulla superficie, e passanti semplicemente per P e non tangenti fra di loro.

Può darsi però che le sezioni piane di Γ per un suo punto P abbiano ivi un punto multiplo.

Se per una generica sezione piana tale punto è r-uplo; P si dice r-uplo anche per la superficie.

Le rette tangenti alle sezioni piane si chiamano anche tangenti alla superficie.

Le tangenti alla superficie Γ in P sono perciò le posizioni limiti delle rette che congiungono P a

punti di Γ che si approssimino a P. Queste tangenti formano nel loro insieme un cono di vertice P; e perchè, evidentemente, una generica sezione piana di Γ per P ha ivi un punto r-uplo, così il cono è tagliato dal piano in r generatrici al più; sarà cioè un cono di ordine r.

56 - Per la distinzione dei punti semplici dai punti multipli di una superficie, si possono anche ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte per le curve.

Sia t_0 una retta uscente da P, non tangente a Γ e t una retta variabile non passante per P che abbia per limite t_0. I punti $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_r, \ldots\ldots$ comuni a t e Γ al tendere di t verso t_0, tendono ai punti comuni a t_0 e Γ. Se i dei punti Q per es. $Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_r$, tendono a P, il punto P è r-uplo per Γ.

La definizione è giustificata dal fatto che per ragioni di continuità il numero intero r è <u>indipendente</u> sia dalla scelta della retta <u>generica</u> t_0 per P, sia dal modo col quale si fa tendere t verso t_0. Per tale fatto si dice che t_0 ha in P un incontro r-uplo con la superficie Γ.

In geometria analitica una superficie si determina mediante una equazione fra le coordinate x, y, z, dei suoi punti, oppure assegnando le stesse coordinate come funzioni di due parametri indipendenti u, v.

Se si traduce in equazione il problema della ricerca dei punti comuni a Γ e a t_0 si arriva ad un sistema avente come r-upla la soluzione corrispondente al punto P. Se invece t_0 è tangente alla superficie Γ, tale soluzione è per lo meno $(r+1)$-upla.

Quando $r=1$ il punto P è semplice per la superficie; in tal caso le rette tangenti alla superficie appartengono ad un piano ed hanno un incontro almeno bipunto e si suol dire che sono le rette che congiungono P con i punti della superficie infinitamente vicini a P. Ogni altra retta passante per P e non tangente a Γ ha un incontro semplice con la superficie e si noti viceversa, che se P è semplice per Γ, ogni retta avente in P un incontro almeno bipunto con essa è necessariamente tangente a Γ, appartiene cioè al piano tangente che Γ ha in P.

Osserviamo infine che:

Il piano tangente π ad una superficie Γ in un suo punto semplice P, seca la superficie in una curva γ avente un punto doppio (almeno) in P.

Infatti ogni retta t uscente da P e giacente in π ha in P un incontro almeno bipunto con la superficie e perciò ha un'incontro almeno bipunto con la curva γ. Ne segue che P è almeno doppio per γ.

Si noti che qualunque altro piano α uscente da P

incontra Γ in una curva γ avente P come punto semplice. Invero se P fosse multiplo per γ una qualunque retta uscente da P e giacente in α avrebbe in P un incontro almeno biplanto con γ e quindi con Γ, il che è assurdo perchè se P è semplice per Γ, le sole rette per P che hanno un incontro almeno biplanto con Γ stanno necessariamente nel piano π.

§. 10 - Problemi relativi alle curve piane.

57. Risolviamo alcuni problemi relativi ad una curva piana, problemi la cui soluzione grafica non si può ottenere in generale che per approssimazione, conoscendosi soluzioni esatte di essi solo per curve speciali. Il metodo comune a tutti questi problemi è di ricorrere ad un altra curva detta curva di errore definita in modo che il problema considerato venga ad essere risolvibile mediante qualche intersezione fra detta curva di errore con la curva data. Tale determinazione si fa con tanto maggiore approssimazione quanto più grande è il numero dei punti della curva di errore costruiti. Tutto ciò apparirà più chiaro dall'esame dei singoli problemi che passiamo a risolvere.

Problema 1°. Condurre la tangente ad una curva

in un punto dato di essa.

Sia γ la curva data e P un suo punto (Fig. 117). Si consideri un punto A della curva γ, a partire da A si riporti sulla retta AP un segmento AA' di lunghezza u prefissata a piacere. Si diano ora ad A un certo numero di posizioni B, C, D, ... sulla curva e si ripeta la costruzione detta, avendo cura di riportare i segmenti BB', CC', DD', ... (uguali ad AA') sempre sullo stesso senso. Congiungendo con una curva i punti A', B', C', D', ... si otterrà la curva di errore γ' relativa al problema del quale ci stiamo occupando.

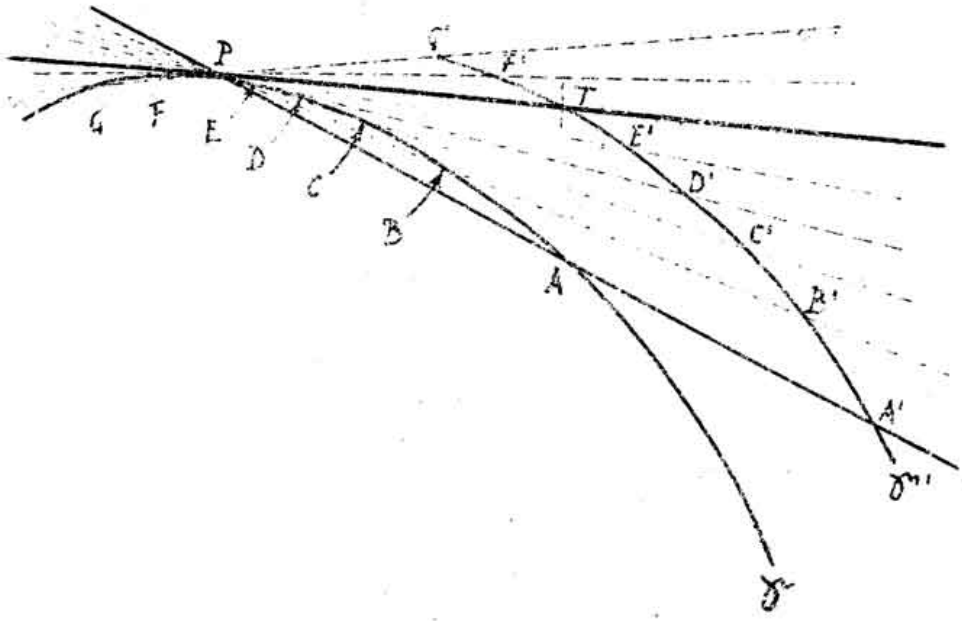

fig. 117.

Se il punto A assume le posizioni del punto P come retta AP si dovrà prendere la tangente a γ in P e su di essa riportare un segmento $PT = u$. Il punto T è allora il punto ove γ' incontra il circolo di centro P e raggio u e perciò la tangente cercata è la congiungente P col punto T.

Le varie posizioni che si devono dare ad A debbono essere sufficientemente vicine a P e da parti opposte rispetto a P perchè allora dei punti costruiti di γ' alcuni sono interni ed altri esterni al circolo, e il punto T di intersezione di γ' col cerchio si approssima più facilmente. Perchè poi la costruzione riesca più esatta ancora conviene prendere u abbastanza grande; così i piccoli errori che si hanno nella costruzione di γ' influiscono meno nella posizione della tangente che si cerca.

Problema II - Condurre per un punto P fuori di una curva γ una tangente a γ (Fig. 118).

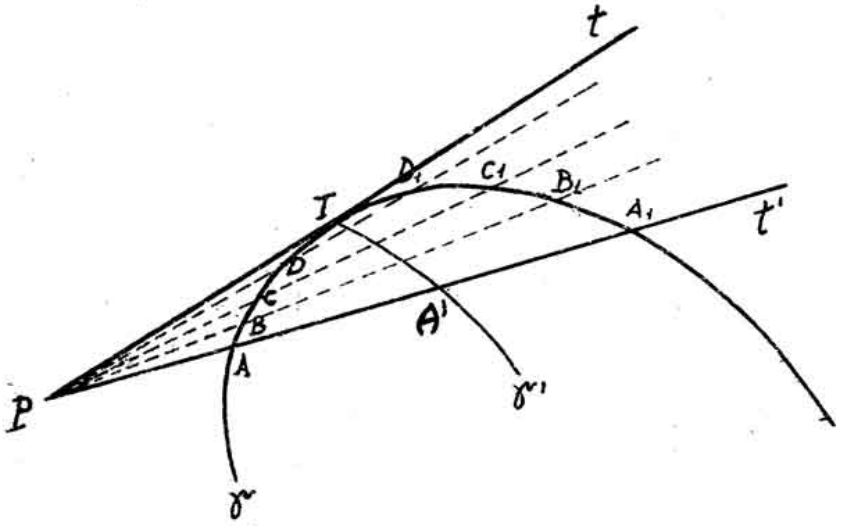

Fig. 118.

Sia γ la curva data, P il punto dato. Si tiri per P una retta t' abbastanza vicina alla posizione della tangente t che si vuole costruire. Essa incontrerà γ in due punti A, A_1, abbastanza vicini al punto di contatto T cercato e che supponiamo non sia di flesso. Sia A' il punto medio del segmento AA_1.

Diamo ad A certe posizioni B, C, D, ... e si co-

struiscono i punti B', C', D', ... allo stesso modo che A'. Congiungendo i punti A', B', C', ... con una curva γ' il punto in cui γ' incontra γ è il punto T, onde la retta PT è la tangente cercata.

Problema III - Condurre per un punto P, esterno ad una curva γ, una normale a γ (Fig. 119).

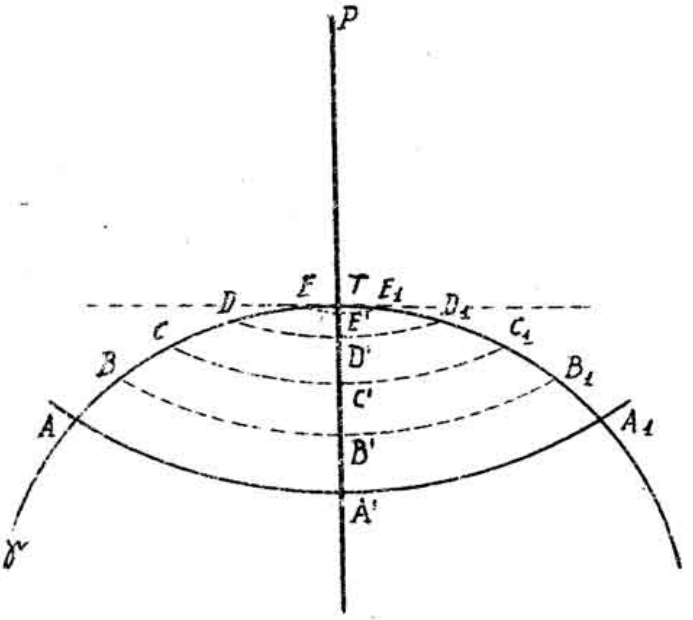

fig - 119

Sia γ la curva data, P il punto dato. Sia poi T il piede della normale che si tratta di costruire e che approssimativamente si conoscerà. Con centro in P e raggio un po' maggiore di PT, si tracci un cerchio $\underline{a}$ e siano A ed A_1 i punti vicini a T in cui $\underline{a}$ incontra γ: costruiamo poi il punto medio A' dell'arco $\widehat{AA_1}$.

Dando ad $\underline{a}$ diverse posizioni b, c, d, ... si costruiscono i punti B', C', D', ... nello stesso modo che A'. Congiungendo i punti A', B', C', ... con una curva γ', il punto in cui γ' incontra γ è il punto T, onde la retta PT è la normale cercata.

Problema IV - Determinare il raggio e il centro di curvatura di una curva data, in un suo punto dato (Fig. 120).

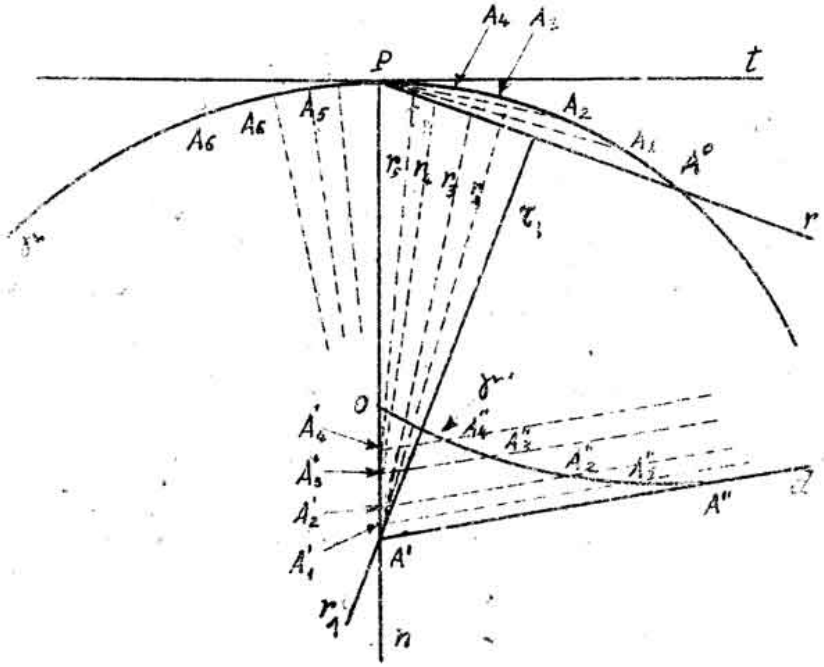

fig - 120 -

Sia γ la curva data, P il punto dato. Si comincia a costruire la tangente t in P a γ (problema I) e la normale n a t in P che è normale anche a γ. Si tiri per P una retta r abbastanza vicina a t e sia A il punto (abbastanza vicino a P) in cui r incontra γ. Nel punto medio del segmento PA si tiri la normale r_1 ad r e sia A' il punto in cui r_1 incontra n; poi, a partire da A', sulla parallela ad una direzione fissa d si stacchi un segmento $A'A'' = PA$. Si diano poi ad r varie posizioni r', r'', ...; e per ognuna di queste si ripeta la costruzione detta, avendo cura di staccare i segmenti $A'_1 A''_1$, $A'_2 A''_2$, ... sulle parallele a d in un certo senso per tutte quelle rette che incontrano γ da una stessa parte di P, e nell'altro senso per le altre. Con ciò

gendo con una curva γ' i punti A'', A''_1, A''_2 ..... così ottenuti, il punto O comune a γ' ed $\underline{n}$ è il centro di curvatura ed OP il raggio di curvatura.

58 - Una curva piana o gobba si rappresenta nel metodo delle proiezioni ortogonali dando le proiezioni (I^a - e II^a -) dei suoi punti.

Se la curva è piana, volendo risolvere su di essa e nel suo piano un problema grafico, come ad esempio uno dei primi due del numero precedente, il problema si può risolvere sulle sue proiezioni, si otterranno così le immagini degli elementi cercati.

Se invece il problema è metrico occorrerà in generale ricorrere al ribaltamento, oppure alle particolari costruzioni che si hanno per risolvere i problemi metrici fondamentali.

§ 11 -

CENNO SULLE SUPERFICIE CONICHE E CILINDRICHE

Loro rappresentazione e problemi fondamentali relativi - Superficie coniche -

59 - Dati nello spazio una curva C ed un punto (proprio) V, la totalità dei punti delle rette g che proiettano da V i punti di C, formano una superficie Γ, detta superficie conica o semplicemente cono. Rispetto a Γ, le rette g si chiamano generatrici, V vertice e C direttrice.

Una superficie conica ha però infinite direttrici. In generale si chiama direttrice di Γ, una qualsiasi curva che incontri in un sol punto una generatrice generica.

Così ogni curva piana di Γ, non passante per V, dà una direttrice γ.

Il vertice V divide la superficie in due falde situate da parte opposta rispetto a V.

Il piano tangente α in un punto P (generico) di Γ è determinato dalla generatrice g, passante per P e dalla tangente t ad una curva direttrice γ passante pure per P.

È importante osservare che spostando comunque

il punto P sopra g, il piano tangente α rimane invariato.

Detto infatti Q un altro punto di g (distinto da V) e π un piano per Q (non passante per V) la direttrice γ che π segua su Γ, si può considerare come la proiezione su π del vertice V, della direttrice C sopra considerata, e la tangente τ in Q a γ, sarà la proiezione su π della tangente t in P a C.

Poichè τ è l'intersezione di α con π, e il piano tangente a Γ nel punto Q, individuato dalle rette g e τ, coincide appunto con α.

Lungo tutti i punti di una generatrice g, Γ ha perciò lo stesso piano tangente.

I piani tangenti a Γ formano quindi una semplice infinità di piani, in corrispondenza biunivoca con le generatrici di Γ, e si ottengono proiettando da V le tangenti ad una qualsiasi curva direttrice di Γ.

Se una direttrice γ piana di Γ, ha un punto s-uplo M, ogni punto della generatrice VM è evidentemente s-uplo per tutte le direttrice piane passanti per P e perciò P è pure s-uplo per Γ. La generatrice VM si dice allora per definizione s-upla per Γ.

Lungo tutta la generatrice VM, Γ ha lo stesso cono-tangente, sperzato nei piani che da V proiet-

tano le tangenti a γ nel punto M.

Anche V è un punto multiplo di Γ ed il cono tangente in V si riduce al cono stesso pensato come totalità di rette.

All'infuori di V e delle (eventuali) generatrici multiple, Γ non ha altri punti singolari.

Nel metodo delle proiezioni ortogonali una superficie conica Γ, è perfettamente determinata quando se ne conoscono le proiezioni V_1 V_2 del vertice e le proiezioni C_1, C_2 di una direttrice.

Congiungendo ordinatamente V_1 e V_2 con le proiezioni A_1, A_2; B_1, B_2, ... dei vari punti A, B, ... della direttrice si ottengono le proiezioni a_1, a_2; b_1, b_2; ... delle generatrici di Γ.

Le tracce orizzontali a, b, ... di queste rette, determinano la traccia orizzontale (o la direttrice sul piano orizzontale.) della superficie. È perciò che una superficie conica nel metodo della proiezione ortogonale, si suole generalmente assegnare, dandone la traccia orizzontale e le proiezioni del vertice.

60 - Fra i principali problemi relativi alla superficie coniche ricordiamo i seguenti:

I - <u>Data una superficie conica mediante la sua traccia C sul piano orizzontale e le proiezioni V_1 e V_2</u>

del vertice, e data la proiezione orizzontale P_1 di un suo punto P determinare la proiezione verticale P_2 di P.

La generatrice g passante per P, avrà per proiezione orizzontale la retta g_1 che congiunge V_1 con P_1 e la traccia orizzontale di g sarà uno dei punti $A_1 B_1 \ldots$ ove g incontra C.

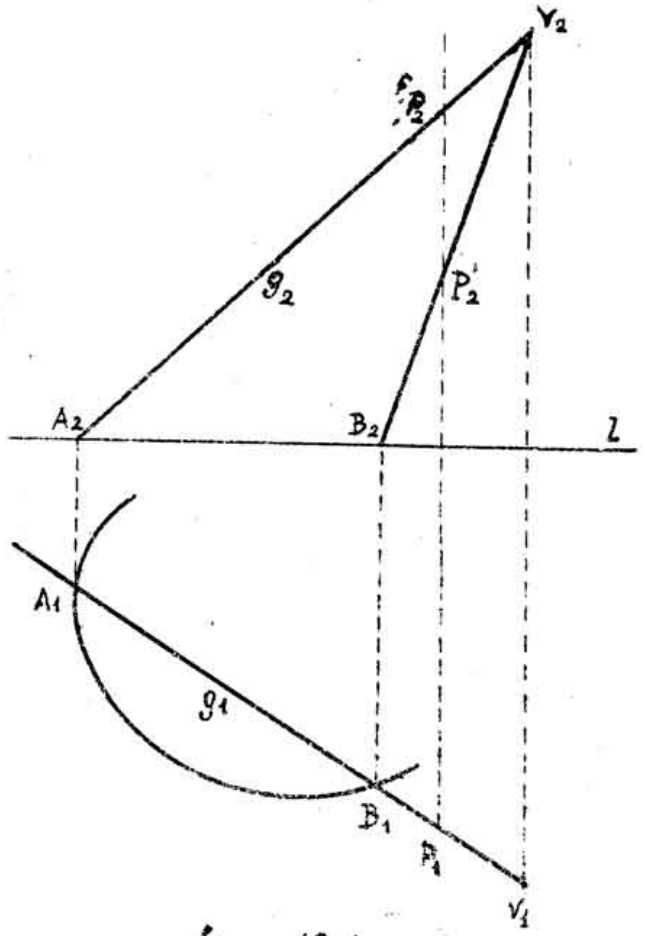

fig - 121 -

Scelto uno di questi punti per esempio A e detta A_2 la sua proiezione verticale sulla linea di terra, la proiezione verticale di g sarà la retta g_2 che congiunge A_2 con V_2 e il punto P_2 sarà il punto di incontro di g_2 con la perpendicolare condotta da P_1 alla linea di terra.

Il problema ha tante soluzioni quanti sono i punti $A_1 B_1 \ldots$ ove g_1 incontra C (in particolare nessuna se g_1 e C non hanno punti comuni).

11 - Data una superficie conica Γ, come sopra, determinare le tracce del piano tangente in un suo

punto (P_1, P_2) che è lo stesso, lungo la generatrice (g_1, g_2) che passa per (P_1, P_2).

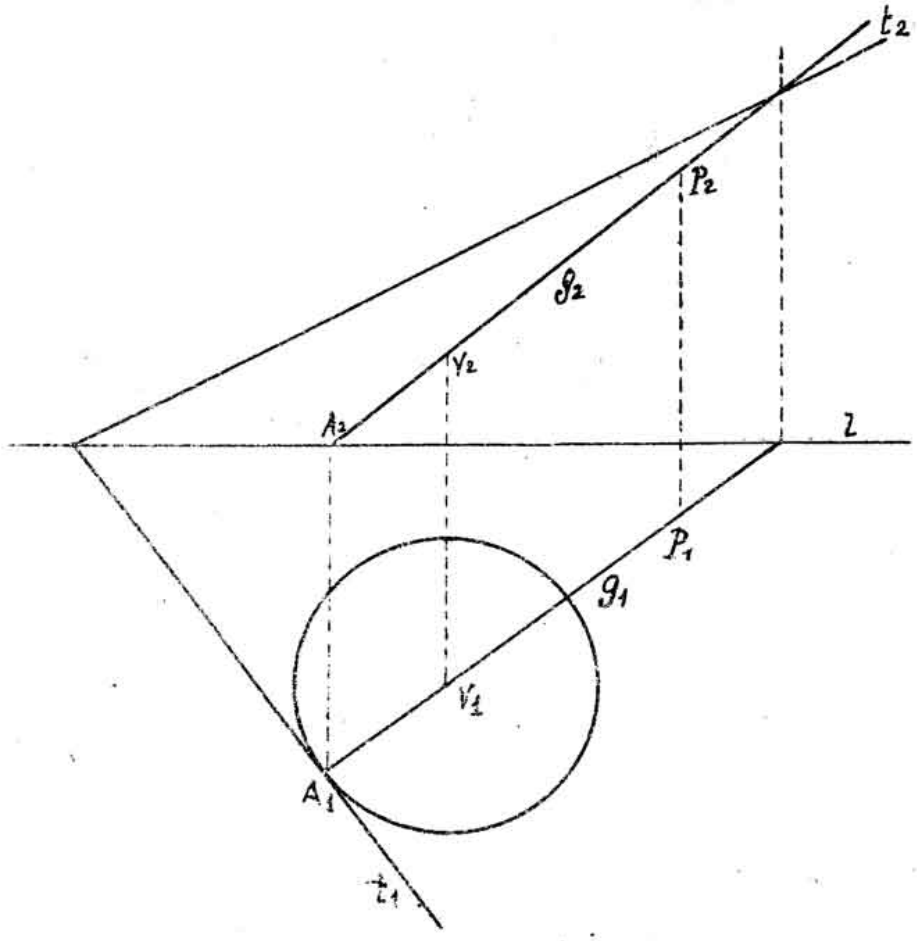

fig. 122

La traccia orizzontale A della generatrice (g_1, g_2) sarà un punto della traccia C.

Supponiamo indi di saper costruire la tangente t_1 in A alla curva C.

Il piano richiesto è il piano che ha per traccia orizzontale t e passa per la generatrice $g_1\ g_2$.

Nella figura per traccia orizzontale C di Γ si è preso un circolo.

III - Data una superficie conica Γ, come sopra, determinare le tracce dei piani ad essa tangenti e passanti per un punto $(P_1\ P_2)$ non appartenente alla superficie.

Siccome i piani tangenti a Γ passano tutti per V, ogni piano α tangente a Γ e passante per P deve contenere la retta VP.

Determiniamo le proiezioni di questa retta e diciamo M la sua traccia orizzontale.

La traccia orizzontale di α deve allora passare per M ed essere tangente a C.

Detta perciò t_1 una retta tangente a C passante

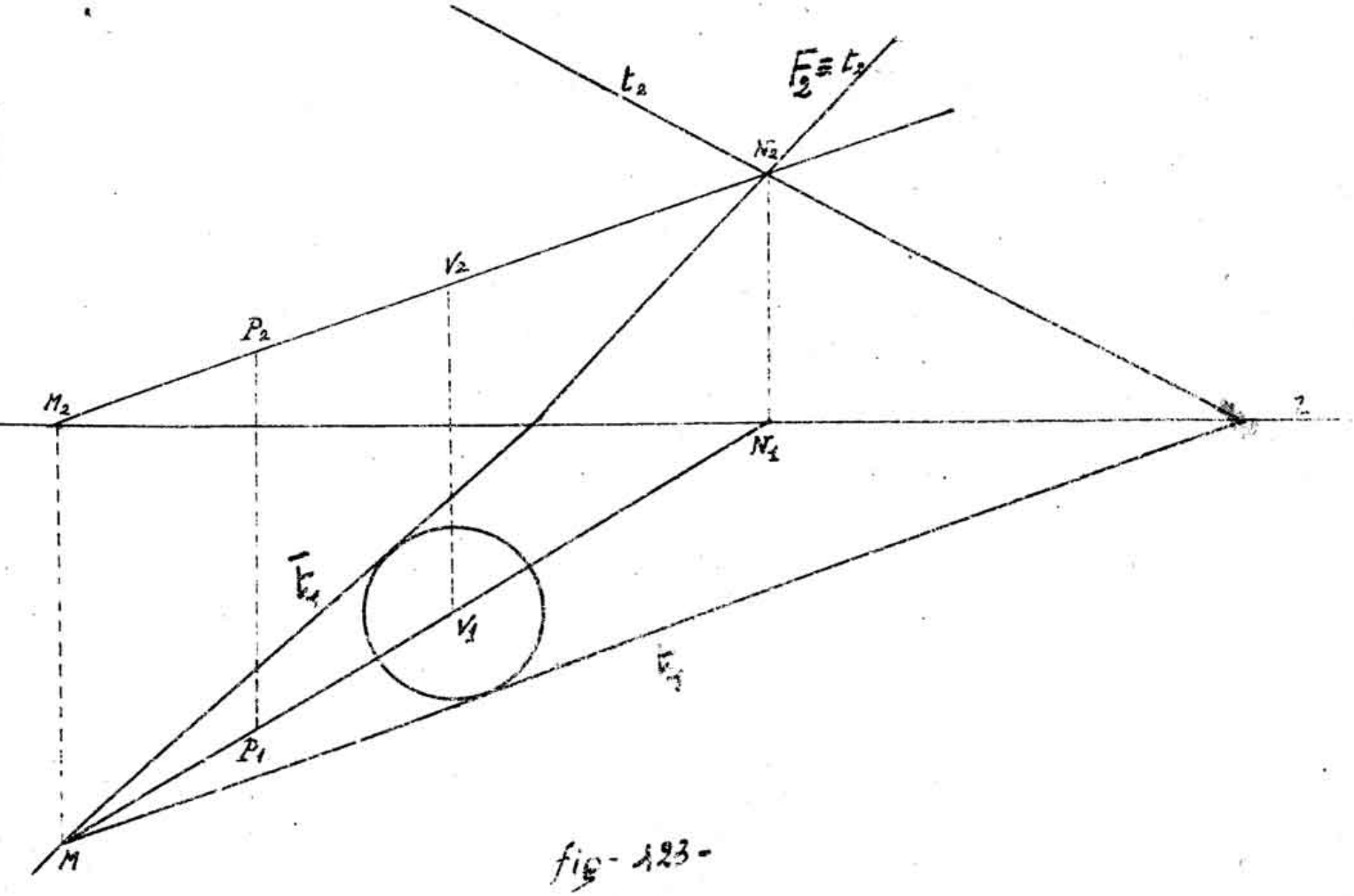

fig. 123

per M, il piano richiesto α deve passare per t_1 e per VP ed è perfettamente determinato.

Il problema è così ricondotto a quello di costruire le tangenti alla curva C passanti per M.

E i due problemi hanno lo stesso numero di soluzioni (numero che può essere anche zero).

Se per esempio la curva C è un circolo come nella figura, a seconda della posizione di P (non appartenente a Γ) il problema avrà due o nessuna soluzione.

6.1 - Coni quadrici - si chiamano quei coni fra le cui direttrici si trovino dei circoli.

Indichiamo con C uno di questi circoli e con π il suo piano, Γ allora si ottiene proiettando da un punto proprio V tutti i punti di C.

Se V è sull'asse del circolo C, il cono si dice anche di rivoluzione, e si può generare facendo ruotare attorno a quest'asse una sua qualunque generatrice.

I coni quadrici si dicono anche coni di secondo ordine, perchè una retta qualunque r, non passante per il vertice, incontra il cono in due punti (e la retta si dice allora secante) o in un sol punto (retta tangente) o in nessun punto (retta non secante).

E difatti se proiettiamo da V la retta r sopra π e diciamo r' la sua proiezione ogni punto comune al cono e ad r si proietta in un punto comune al circolo C ed alla retta r' e viceversa, onde risulta

evidente il nostro asserto.

Una retta r passante per V o giace per intero sul cono, è cioè una generatrice del cono, oppure non ha altri punti a comune col cono all'infuori di V.

Un cono quadrico Γ divide lo spazio in due regioni, la regione dei punti interni e la regione dei punti esterni.

Si dicono interni tutti quei punti P dello spazio che sono proiettati da V in un punto P' del piano π, interno al circolo c, ed esterni quei punti che sono invece proiettati, sempre da V, in punti di π esterni a c.

È impossibile passare con un cammino continuo da un punto esterno ad un punto interno senza attraversare la superficie Γ.

In base al problema III° i piani tangenti a Γ uscenti da un punto P dello spazio (o della retta VP) sono due, uno o nessuno a seconda che P è esterno, sopra o interno a Γ.

Per questa proprietà il cono Γ, pensato come inviluppo dei suoi piani tangenti si dice inviluppo di seconda classe.

Ogni curva K che si ottiene secando un cono quadrico Γ con un piano α, non passante per il vertice, si chiama conica.

A seconda della posizione di α rispetto a Γ si

hanno tre specie di coniche.

La distinzione si ottiene facilmente introducendo il piano α' parallelo ad α e passante per V.

La traccia t di α' nel piano π, può essere rispetto al circolo C non secante, tangente e secante, corrispondentemente si hanno i tre casi:

I - Il piano α' non incontra Γ in alcun punto all'infuori del vertice V e le due falde del cono restano da parte opposta rispetto ad α' (ciascuna falda restando però tutta da una parte rispetto ad α').

II - Il piano α' incontra (tocca) Γ lungo una generatrice g (generatrice di contatto) e come sopra le due falde di Γ sono situate da parte opposta rispetto ad α'.

III - Il piano α' incontra il cono lungo due generatrici, e ciascuna falda del cono è divisa da α' in due regioni situate da parte opposta rispetto ad α'.

In relazione a queste tre posizioni di α' si hanno tre comportamenti diversi del piano α rispetto a Γ e tre tipi diversi di conica.

I - Il piano α non è parallelo ad alcuna generatrice di Γ (α' non incontra Γ all'infuori di V, caso I°).

Allora α seca una sola falda del cono (la falda che rispetto ad α', sta nello stesso semispazio che contiene α) la conica sezione non ha punti impropri, è

una curva chiusa, tutta a distanza finita e si chiama ellisse.

II - Il piano α è parallelo ad una sola generatrice g di Γ (ossia α' tocca Γ lungo la generatrice g, caso II°).

Allora il piano α seca una sola falda del cono (quella che rispetto ad α' sta nello stesso semispazio che contiene α) e perciò la conica sezione ha un solo ramo, questo ramo ha però un punto improprio, la traccia su α della generatrice g e la conica si chiama parabola.

III° - Il piano α è parallelo a due generatrici g e g' del cono Γ (ossia α' incontra Γ lungo le due generatrici g e g', caso III°).

Allora il piano α seca ambedue le falde del cono (nelle parti che insieme ad α stanno rispetto ad α' nello stesso semispazio) e perciò la conica sezione ha due rami, essa ha due punti impropri (le tracce sopra α delle due generatrici g e g' e si chiama iperbole.

E' importante notare subito che se da un punto proprio D si proietta una qualunque di queste coniche si ottiene sempre un cono quadrico Γ.

Esistono cioè piani (opportuni) che secano Γ in circoli.

Ciò in fondo vuol dire che operando per proie-

zioni e sezioni da una conica si passa sempre ad una conica o ad una conica quadrica. Questa proprietà si dimostra in geometria proiettiva dove più in generale si dimostra che due coniche K e K' sono proiettivamente identiche, si può passare cioè da K a K' con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Sia ora K una conica, ottenuta secando Γ col piano α.

I punti di α interni a Γ si dicono anche interni a K, e i punti di α esterni a Γ si dicono esterni a K.

La conica K divide perciò il piano α in due regioni, la regione dei punti interni e quella dei punti esterni.

È impossibile con un cammino continuo, appartenente ad α, passare da un punto interno ad un punto esterno senza incontrare la conica K.

Nella regione esterna esistono delle rette. Infatti un piano α', passante per il vertice e non secante altrove Γ, incontra α in una retta totalmente composta di punti esterni.

Nella regione dei punti interni non esistono invece delle rette. Ossia ogni retta passante per un punto interno incontra K in due punti.

In generale si noti che una retta r incontra K in due punti (la retta si dice allora secante) o in un solo punto (retta tangente) o in alcun punto (retta

non secante).

Invero sono tali le posizioni possibili di r rispetto a Γ e quindi rispetto a K.

Per questa proprietà le coniche si dicono anche curve di III ordine.

Si noti che la retta impropria è non secante per ogni ellisse, è tangente ad ogni parabola e secante per ogni iperbole.

In modo analogo si ha che da un punto P di α escono due tangenti, o una tangente, o nessuna tangente a K, a seconda che P è esterno, sopra o interno a K.

Infatti le tangenti a K uscenti da P sono le tracce su α dei piani tangenti a Γ uscenti da P.

Per questa proprietà le coniche pensate come totalità delle loro tangenti si chiamano inviluppi di seconda classe.

Queste due proprietà sono caratteristiche delle coniche, ossia una curva che goda dell'una o dell'altra di queste proprietà è necessariamente una conica.

La geometria analitica e la geometria proiettiva studiando a fondo le proprietà delle coniche, noi ci limiteremo a ricordarne qui alcune fra le più importanti.

62 - <u>Ellisse</u> - I - Un'ellisse ha un centro di

simmetria O (interno alla curva) che divide cioè per metà ogni corda (diametro) passante per esso.

II - Un'ellisse ha due assi di simmetria ortogonale uscenti da O ed ortogonali fra di loro che si chiamano gli assi dell'ellisse. I quattro punti ABCD ove questi assi incontrano l'ellisse, si dicono vertici dell'ellisse. Le lunghezze dei segmenti OA e OC si possono indicare con $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e si chiamano le lunghezze dei semiassi dell'ellisse.

Generalmente è $a \neq b$, e si ha $a = b$ solo quando l'ellisse è un circolo. Un circolo si può sempre riguardare come caso particolare dell'ellisse.

III - Sull'asse maggiore dell'ellisse in posizione simmetrica rispetto ad O ed internamente alla curva esistono due punti F_1 ed F_2 detti fuochi dell'ellisse, che godono delle seguenti proprietà:

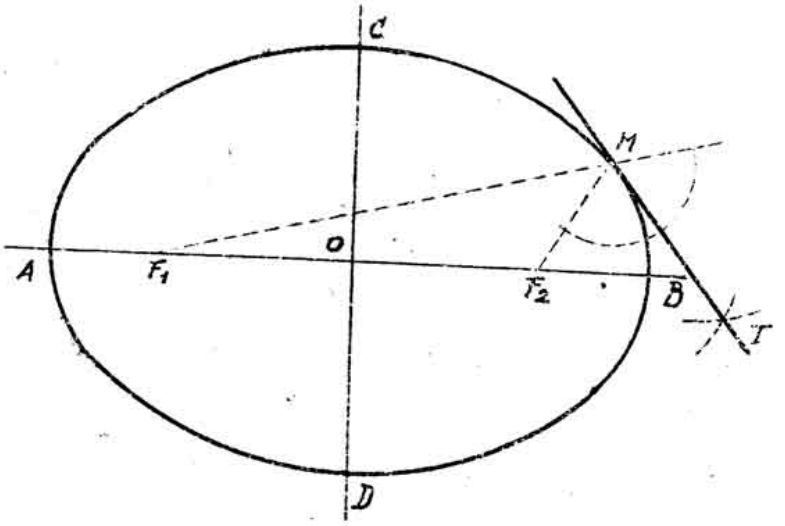

fig 124-

La somma delle distanze dei due fuochi F_1 ed F_2 da un punto M qualunque dell'ellisse è costante ed uguale all'asse

maggiore AB.

Questa è la proprietà caratteristica dell'ellisse.

IV - La tangente in un punto M dell'ellisse è la bisettrice esterna del triangolo $F_1 M F_2$.

V - Fra la distanza $\underline{c}$ dei due fuochi dal centro e le due lunghezze $\underline{a}$ e $\underline{b}$ dei due semiassi, corre la relazione

$$c^2 = a^2 - b^2$$

per cui note due delle tre quantità $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ se ne determina la terza.

65 - <u>Iperbole</u> - I° - Un'iperbole ha un centro di simmetria (esterno alla curva).

II° - Un'iperbole ha due assi di simmetria ortogonali uscenti da O ed ortogonali fra loro.

Uno di questi assi incontra l'iperbole in due punti (vertici) A e B e si chiama asse trasverso, l'altro non incontra la curva e si chiama asse ideale.

La lunghezza di OA si suole indicare con $\underline{a}$ e si chiama la lunghezza del semiasse trasverso dell'iperbole.

III° - Sull'asse trasverso, internamente alla iperbole ed in posizione simmetrica rispetto ad O, esistono due punti F_1 ed F_2 detti fuochi dell'iperbole e godenti della seguente proprietà caratteristica: la dif-

ferenza delle distanze dei due fuochi F_1 ed F_2 da un punto M qualunque dell'iperbole è costante ed uguale alla lunghezza dell'asse trasverso AB.

IV° - La tangente in un punto M all'iperbole è la bisettrice in M, interna, del triangolo $F_1 M F_2$.

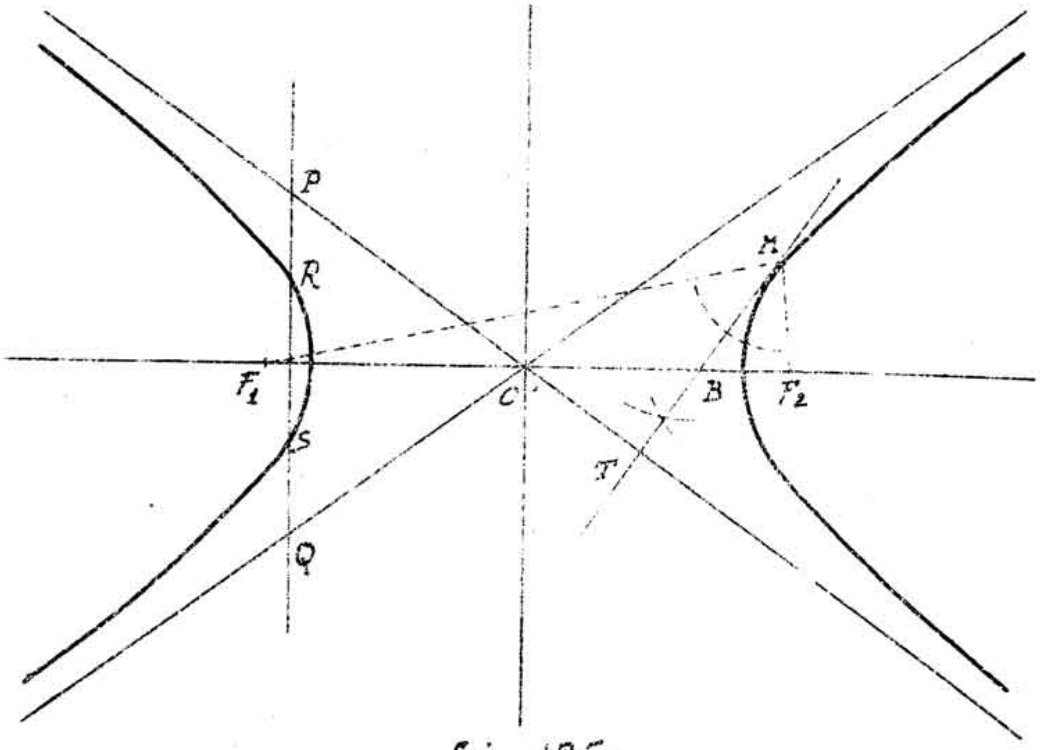

fig. - 125 -

V° - Le tangenti all'iperbole uscenti dal centro O toccano la curva nei suoi due punti impropri e si chiamano asintoti.

VI° - Gli assi dell'iperbole bisecano gli angoli degli asintoti.

VII° - Detta c la distanza dei fuochi dal centro, a la lunghezza del semiasse trasverso dell'iperbole ed α l'angolo acuto che un asintoto forma con

l'asse trasverso, si ha la relazione:

$$a = c \cos \alpha$$

e posto

$$b = a \operatorname{tang} \alpha$$

si può ancora scrivere:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(b si chiama la lunghezza del semiasse ideale dell'iperbole).

VIII° - Una proprietà caratteristica dell'iperbole rispetto agli asintoti è la seguente:

Una corda RS dell'iperbole incontra gli asintoti in due punti P e Q tali che si ha:

$$PR = QS$$

Questa proprietà serve molto utilmente per la costruzione per punti di un'iperbole, noti che siano i suoi asintoti ed un suo punto.

64 - <u>Parabola</u> - I° - Una parabola non ha centri di simmetria e perciò l'ellisse e l'iperbole si dicono coniche a centro.

II° - Una parabola ha un sol asse di simmetria ortogonale <u>x</u> che incontra la parabola nel suo punto improprio e in un punto A detto vertice della parabola.

III° - Una parabola ha un sol fuoco F posto sull'asse ed internamente alla curva.

IV° - La retta a, perpendicolare all'asse, distante dal vertice di un segmento uguale ad A F e posta rispetto ad A dalla parte opposta ad F (esterna cioè alla curva) si chiama direttrice della parabola.

Le distanze della direttrice a e del fuoco F da un punto qualunque M della parabola sono eguali. Questa proprietà è caratteristica della parabola.

V° - La tangente in un punto M alla parabola è la bisettrice, interna, del triangolo N M F, indicando con N il piede della perpendicolare condotta da M alla direttrice.

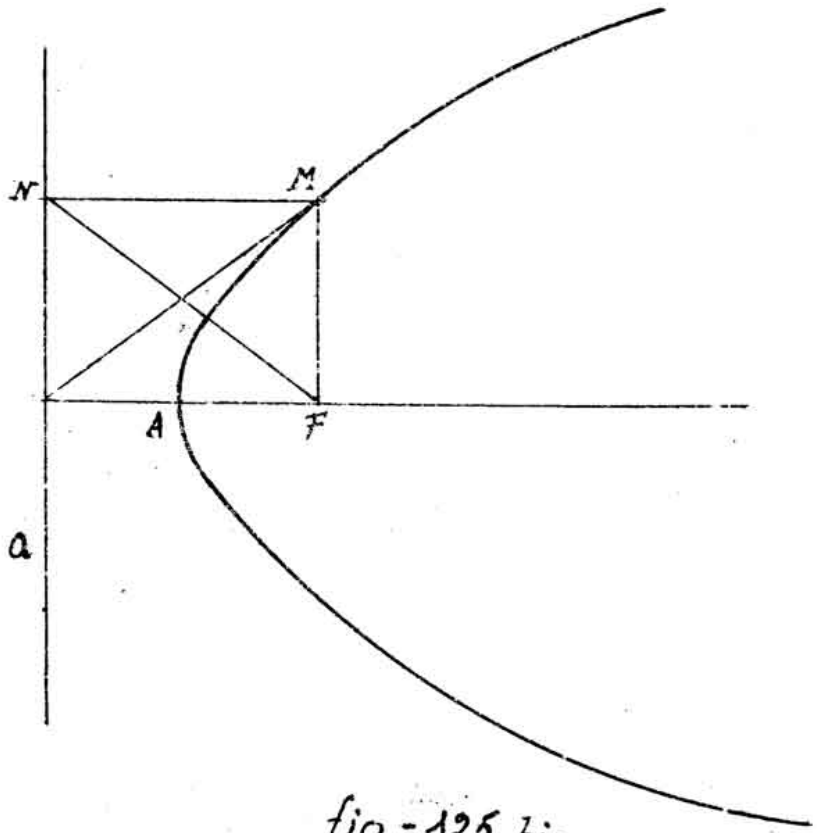

fig - 125 bis -

65 - Terminiamo queste brevi nozioni sui coni quadrici e sulle coniche, costruendo nel metodo delle proiezioni ortogonali le due proiezioni K' e K'' della sezione K che un piano α segna su un cono Γ.

A tal uopo osserviamo che se K è una conica di un piano α e K' la sua proiezione ortogonale (o più in generale parallela) sopra un piano π, le due coniche K e K' sono della stessa specie.

Infatti nella proiezione ortogonale (o parallela) di α sopra π, alla retta impropria r_∞ di α corrisponde la retta r'_∞ di π. Poichè r'_∞ sarà non secante, tangente e secante a K' a seconda che r_∞ è non secante, tangente o secante a K. D'onde risulta che K e K' sono della stessa specie, entrambe ellissi o parabole o iperbole.

Si noti anche che in queste proiezioni il centro O di K (se esiste) si proietta nel centro O' di K' e lo stesso dicasi per gli asintoti. In generale però gli assi e i fuochi di K non si proiettano negli assi e nei fuochi di K'.

Ciò detto per semplificare le costruzioni scegliamo il cono Γ di rivoluzione, con la traccia circolare $\underline{c}$ sul piano orizzontale e scegliamo il piano α perpendicolare al piano verticale.

Indichiamo con V' e V'' le proiezioni del vertice (V' cadrà nel centro di c) con AB il diametro di c

parallelo alla linea di terra e con $V''A''$, $V''B''$ le proiezioni verticali delle generatrici uscenti da A e B.

Indichiamo inoltre con a_1 e a_2 le tracce di α e con C'' e D'' i punti ove a_2 incontra $V''A''$ e $V''B''$.

Per avere i casi possibili sulla figura 126 a) $C''D''$ si sono presi interni ai segmenti finiti $V''A''$ e $V''B''$, il piano α segherà allora la sola falda inferiore di Γ e la sezione K, e la sua proiezione orizzontale K' saranno due ellissi.

Nella figura 126 b) $C''D''$ è parallelo a $V''B''$ onde α risulta parallelo alla sola generatrice VB e K e K' saranno due parabole.

Nella figura 126 c) infine $C''D''$ appartengono rispettivamente alla falda inferiore e alla falda superiore di Γ, il piano α segherà perciò entrambe le falde di Γ, e K e K' saranno due iperbole.

Nei tre casi la proiezione verticale K'' di K si riduce al segmento $C''D''$ (finito od infinito) che risulta interno a Γ.

La proiezione orizzontale K' si può costruire per punti, cercando la proiezione orizzontale dei punti ove α incontra le generatrici del cono.

Indichiamo con g' e g'' le due proiezioni di una generatrice g di Γ e P'' il punto ove g'' incontra a_2.

Il punto P'' è evidentemente la proiezione ver-

tricale del punto P dove la generatrice obliqua g incontra α e per averne la proiezione orizzontale P' basta condurre da P'' la perpendicolare alla linea di terra fino all'incontro di g' (1)

Il punto P' è così un punto della conica K' e l'operazione ripetuta per un gruppo abbastanza grande di generatrici darà quanti si vogliono punti di K'.

Daremo in ogni modo qualche altra indicazione.

Si noti per esempio che g'' è la proiezione verticale di due generatrici di Γ le cui proiezioni orizzontali sono g' e la simmetria g'_1 di g' rispetto ad AB.

Sicchè il punto P'_1 dove P'P'' incontra g'_1 è un altro punto di K'. Ne segue che AB è un asse di simmetria di K'.

---

(1) Si noti che questa costruzione non si applica alle generatrici $\bar{g}$ $\bar{g}_1$ che hanno le proiezioni coincidenti sulla V'V'', perpendicolare alla linea di terra. Per avere le proiezioni orizzontali $\bar{G}'$ e $\bar{G}'_1$ ove il piano incontra le corrispondenti generatrici obliqua $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, basta osservare che $\bar{G}$, e $\bar{G}_1$ si trovano nel circolo parallelo al piano orizzontale col centro sull'asse e raggio eguale a G''T perciò $\bar{G}$ e $\bar{G}_1$ appartengono a $g' \equiv g'_1$ e al corrispondente circolo proiezione.

Per avere i punti ove AB incontra K' basta cercare i punti comuni ad α e alle due generatrici ($V'A'$, $V''A''$) ($V'B'$, $V''B''$), condurre cioè da C'' e D'' le perpendicolari alla linea di terra fino all'incontro C' e D' con AB.

I punti C' e D' sono perciò due vertici di K'.

Nel caso della parabola il punto D' è però improprio.

Negli altri due casi il punto di mezzo O' del segmento C'D' è il centro di K' e la perpendicolare in O' all'asse C'D' sarà l'altro asse di K'.

Nel caso dell'ellisse per avere i punti ove questo secondo asse incontra la curva basta considerare le due generatrici aventi per seconda proiezione la retta V''O'' indicando con O'' il punto di mezzo del segmento C''D'', o che è lo stesso, la proiezione verticale del centro O della conica K.

Difatti essendo il primo asse (C'D', C''D'') di K sopra una retta di fronte il secondo asse di K sarà sopra una retta perpendicolare alla seconda traccia del piano, sarà cioè perpendicolare al piano verticale ed avrà come seconda proiezione il punto O''.

Determinate in tal modo i quattro vertici della ellisse essa risulta perfettamente determinata.

Per avere la tangente t' in un punto P' di K'

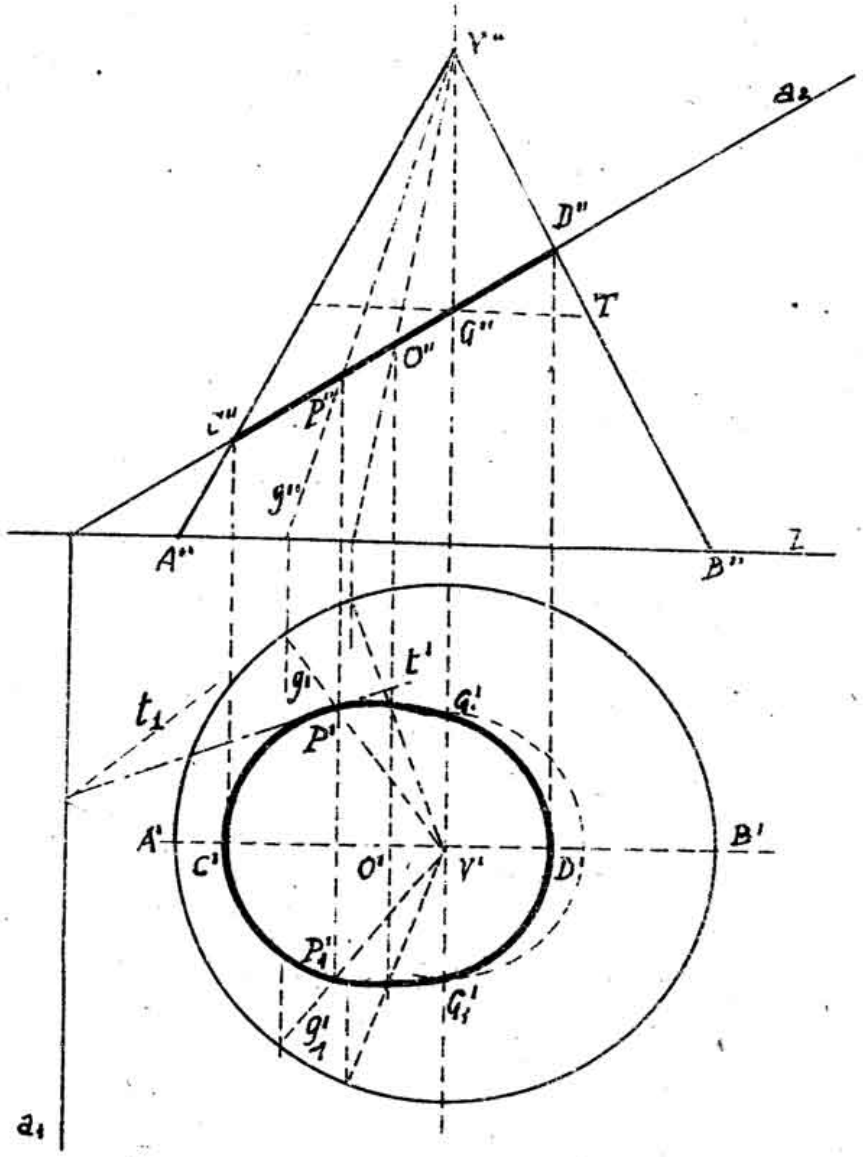

fig. 126a -

basterà cercare la proiezione orizzontale della tangente t nel punto obbiettivo P a K. Ora t è l'intersezione di α col piano tangente Γ lungo la generatrice g passante per P, e questo piano ha per traccia orizzontale la tangente t_1 in G_1 (traccia di g) al circolo C, quindi t' risulterà la congiungente di P' col punto di incontro delle due tracce ~~a₁~~ e t_1.

Nel caso della parabola la conoscenza della tangente t' in P' e dell'asse C'B' permette di determinare subito il fuoco F (proprietà V^a pag. 201). Noti il fuoco e il vertice si può tracciare la direttrice e la parabola è perfettamente determinata. Termina-

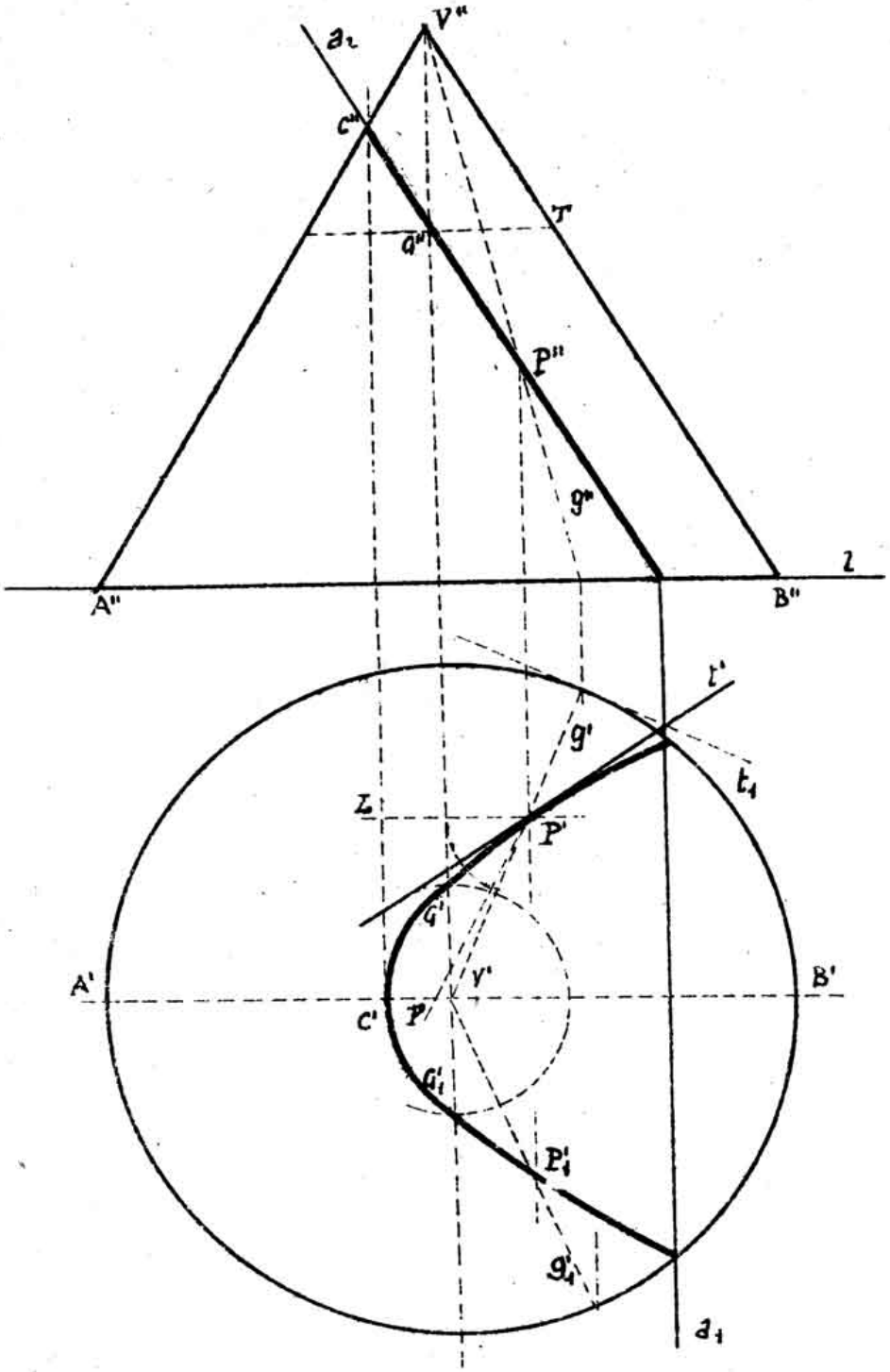

fig-126b-

mici ancora sul terzo caso per costruire gli asintoti alla iperbole.

I punti impropri della conica obiettiva K, sono le tracce proprie delle due generatrici g e g_1 di Γ parallele ad α stesso.

Per avere g e g_1 segniamo il cono col piano $\alpha' \equiv (C_1, C_2)$ parallelo ad α e passante per V.

Dette H' e H'_1 i punti ove C_1 taglia il circolo C le due rette $V'H'$ e $V'H'_1$ sono le proiezioni orizzon-

tali di g e g_1.

Ricordando poi che in una proiezione parallela gli asintoti si proiettano negli asintoti, si ha subito che le parallele condotte da O' a $V'H'$ e $V'H'_1$ sono i due asintoti di K'.

Noti gli asintoti e i vertici, l'iperbole è perfettamente determinata in base alla proprietà VIII dell'iperbole.

Osserviamo infine che il circolo C e la conica K' si ottengono proiettando sul piano orizzontale π_1, la conica K di α, una volta da V ed una volta dal punto improprio H_∞ della direzione normale π_1; ne segue che C e K si corrispondono in una omologia piana avente la traccia a_1 di α come asse di omologia e la proiezione V' di V come centro di omologia (V' è il punto ove VH_∞ incontra α).

Una coppia di punti corrispondenti è data per esempio dai due punti C' e A'.

Poichè l'omologia è perfettamente determinata e K' si può costruire come la trasformata di C in questa omologia.

È chiaro che ciò vale anche se C è una curva qualunque su π_1 ed α un piano arbitrario dello spazio.

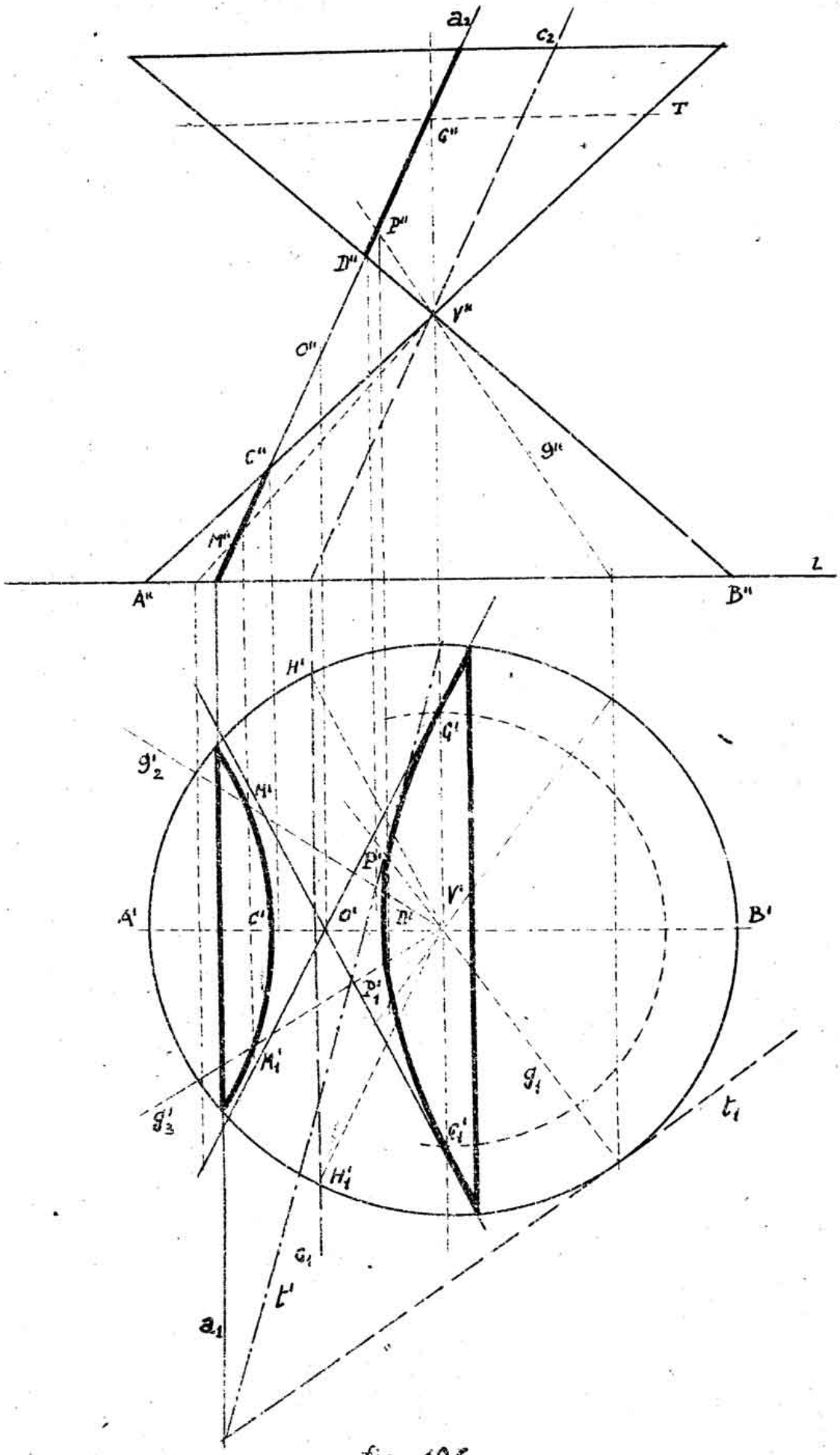

fig. 126

Superficie cilindriche

66 - Date nello spazio una curva C ed una retta d, l'insieme dei punti delle rette g parallele a d uscenti dai punti di C formano una superficie cilindrica (o semplicemente cilindro) G.

La curva C si chiama direttrice, d direzione e g le generatrici della superficie cilindrica.

Le generatrici sono tutte parallele fra loro.

Detto V_∞ il punto improprio della retta d, la superficie cilindrica G si può considerare come la totalità dei punti delle rette che da V_∞ proiettano i punti di C.

In altri termini G è un cono avente il vertice nel punto improprio V_∞.

Per le superficie cilindriche valgono perciò tutte le considerazioni svolte per i coni; in particolare si ha che il piano tangente in un punto P di una generatrice g non varia al variare di P lungo g.

Si può cioè parlare di piani tangenti lungo le generatrici di G come per i coni (1).

---

(1) Nel metodo delle proiezioni ortogonali una superficie cilindrica è perfettamente determinata quando se ne

I problemi I°, II°, e III° del numero 60 valgono inalterati.

Se una direttrice piana K di un cilindro G è una conica il cilindro si dice quadrico o di secondo ordine.

Abbiamo già avvertito che la proiezione parallela di una conica K, di un piano α, sopra un altro piano è una conica della stessa specie di K; ne segue che le sezioni piane (non parallele alle generatrici di un cilindro di secondo ordine) sono tutte ellissi o tutte parabole o tutte iperbole.

Abbiamo perciò tre specie di cilindri di secondo ordine, cilindri ellittici, cilindri parabolici e cilindri iperbolici, nei primi tutte le sezioni piane sono ellissi (in particolare circoli) nei secondi parabole e nei terzi iperbole.

In un cilindro ellittico esistono sempre delle sezioni piane circolari, ma non ne esistono nè nei cilindri parabolici nè in quelli iperbolici. Per i coni abbiamo invece detto che ogni cono quadrico ha sempre sezioni piane circolari. Sicchè se è lecito definire coni quadrici quei coni che hanno delle sezioni piane circolari, non è invece lecito definire cilindri quadrici quelli che hanno sezioni piane circolari.

/. conoscono le proiezioni di una curva direttrice e quella della retta d di direzione.

In tal modo infatti si otterrebbero i soli cilindri ellittici e si escluderebbero quelli parabolici e quelli iperbolici.

Considerando il piano improprio dello spazio è facile vedere che esso sega ogni cilindro ellittico nel solo vertice, tocca ogni cilindro parabolico lungo una generatrice ed infine sega ogni cilindro iperbolico in due generatrici.

E questa proprietà porta di nuovo a concludere facilmente che le sezioni piane di un cilindro quadrico sono sempre coniche della stessa specie.

- § 12. -

SUPERFICIE DI ROTAZIONE

Proprietà generali.

67. Una linea piana l, il cui piano ruoti attorno ad una sua retta fissa a genera una superficie detta superficie di rotazione.

La linea l dicesi linea generatrice della superficie, la retta a dicesi asse di rotazione.

Una superficie siffatta è dunque il luogo della linea mobile l, i cui punti descrivono dei circoli posti nei piani perpendicolari all'asse a e col centro in a.

Tali circoli diconsi paralleli della superficie.

I piani passanti per l'asse secano la superficie secondo linee che durante il moto si sovrappongono l'una sull'altra e perciò sono uguali; inoltre ciascuna di esse, in quanto da una rotazione di 180° intorno ribaltata su se stessa, è simmetrica rispetto all'asse. Queste linee diconsi meridiani della superficie di rotazione. Una linea meridiana si compone, in altri termini, di una linea generatrice e della simmetrica di questa rispetto all'asse.

Poichè i piani dei meridiani passano per l'asse

essi sono perpendicolari ai piani dei paralleli. Per ogni punto P della superficie (fuori dell'asse) passa un ben determinato meridiano (posto nel piano (P_a) e un ben determinato parallelo (posto nel piano $\perp$ ad $\underline{a}$ pel punto P)...

Un punto A d'incontro (semplice) di $\underline{l}$ con $\underline{a}$, rimane fisso durante la rotazione di $\underline{l}$ attorno ad $\underline{a}$ e può dar luogo ad un punto semplice e ad un punto doppio per la superficie di rotazione Γ. Infatti la tangente $\underline{t}$ alla linea $\underline{l}$ in A, può essere o no perpendicolare all'asse $\underline{a}$. Se è $\underline{t}$ perpendicolare ad $\underline{a}$, al ruotare di $\underline{l}$ attorno ad $\underline{a}$, $\underline{t}$ descrive il piano normale all'asse nel punto A; se invece $\underline{t}$ non è perpendicolare ad $\underline{a}$, detta tangente descrive un cono circolare retto di asse $\underline{a}$.

Nel primo caso A è semplice per la superficie Γ, nel secondo caso è invece doppio.

Il piano tangente a Γ in un suo punto generico P è determinato dalle tangenti rispettive u, v al meridiano e al parallelo uscenti da P.

La tangente $\underline{u}$ al parallelo nel punto P è perpendicolare al raggio del parallelo stesso ed è anche perpendicolare all'asse della superficie ($\underline{u}$ infatti appartiene al piano del parallelo e questo piano è $\perp$ a) la retta $\underline{u}$ è dunque perpendicolare

al piano a P, cioè al piano del meridiano passante per P.

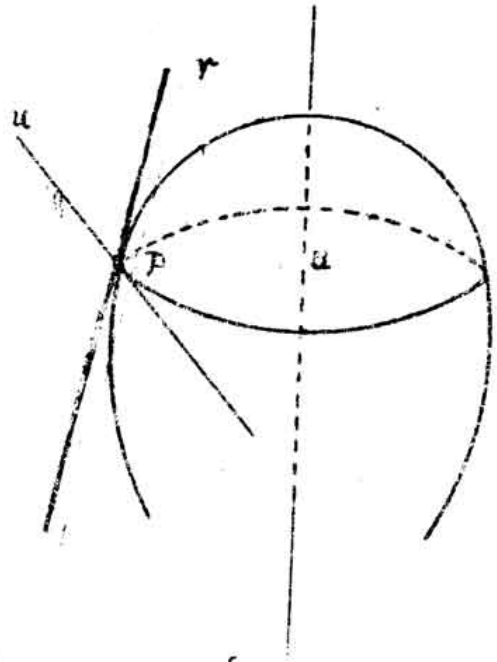

fig - 127

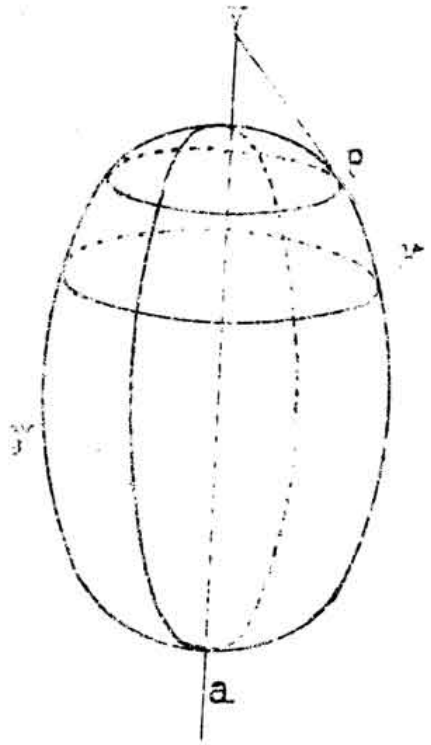

fig - 128

Ne segue che la retta r è perpendicolare alla u, e ciò si esprime dicendo che:

Il parallelo ed il meridiano passanti per uno stesso punto di una superficie di rotazione, si tagliano ortogonalmente.

Segue pure che:

Il piano tangente in un punto (semplice) ad una superficie di rotazione è normale al piano meridiano passante per quel punto:

Le tangenti ai paralleli nei punti di una curva meridiana formano un cilindro che ha come sezione normale lo stesso meridiano.

Sia γ una curva meridiana e P un suo punto generico (fuori dell'asse). La tangente v a γ in P incontra l'asse in un punto V. Ruotando γ attorno all'asse $\underline{a}$, il punto P descrive un parallelo e la tangente $\underline{v}$ a γ nel punto P ruota anch'essa attorno ad $\underline{a}$, restando tangente a γ; dunque:

<u>Le tangenti ai meridiani nei punti di un parallelo, formano un cono di rotazione che ha il vertice sull'asse.</u>

Rappresentazione delle superfici di rotazioni e problemi relativi.

68. Le superficie di rotazione, per il fatto che rimangono pienamente determinate quando sia dato l'asse ed un loco qualunque meridiano, si rappresentano, nel metodo delle proiezioni ortogonali, mediante le immagini degli elementi pra detti.

Per semplificare le costruzioni supporremo l'asse $\underline{a}$ di rotazione perpendicolare al quadro orizzontale e quanto alla linea meridiana, rappresenteremo quella posta nel piano parallelo al secondo piano di proiezione. Detta $c \equiv (c'/c'')$ tale linea essa si proietta in vera grandezza sul piano verticale,

mentre la sua prima immagine si riduce ad un segmento sopra una retta parallela alla linea di terra e passante per la traccia orizzontale dell'asse.

La linea C dicesi linea meridiana principale.

Come abbiamo avvertito ogni meridiano si compone di due parti simmetriche rispetto all'asse che sono due posizioni della linea generatrice, differenti per una rotazione di 180°. Ne segue che una sola di queste parti è sufficiente ad individuare la superficie.

69 - Fra i problemi che si riferiscono alle superficie di rotazione notiamo i seguenti:

I - Determinare (se esistono) i punti di una superficie di rotazione Γ che hanno una data prima proiezione P'.

Sia P_1 uno dei punti cercati e p_1 il parallelo passante per esso.

La prima proiezione p_1' di p_1 è un cerchio eguale a p_1 di centro O' e raggio $O'P'$. La seconda proiezione P_1'' appartiene invece alla traccia verticale d_2 del piano δ che contiene p_1, ed è noto che questa retta è parallela alla linea di terra. Basterà quindi trovare un punto perchè esso resti pienamente determinato. Osserviamo a tal fine che il

punto M' comune a p'_1 e alla parallela ad $\underline{\ell}$ condotta per O (che è la traccia orizzontale del piano della curva meridiana principale C) è la prima immagine di uno dei due punti (M, N, ...) comuni a p_1 e alla curva $\underline{c}$. Segue subito la costruzione di M'' e quindi di d_2. Ed ora, poichè tutti i punti del parallelo p_1 hanno le proiezioni verticali sulla retta d_2, la seconda immagine P''_1 di P_1 appartiene a d_2 e alla retta normale alla linea di terra per P'_1.

Pertanto, se si indicano con M''_1, M''_2 .... le intersezioni di C'' con la normale alla linea di terra condotta per M' e si intersecano le rette, condotte per punti ora detti e parallele alla linea di terra, con la normale a questa retta passante per P', si ottengono le proiezioni verticali P''_1, P''_2 ..... dei punti cercati.

<u>Osservazione</u>. Perchè esistano punti P di Γ aventi P' per prima immagine, occorre che il raggio O'E' sia compreso tra la minima e la massima distanza dei punti di C'' da a''.

<u>II°. Rappresentare il piano tangente ad una superficie di rotazione in un suo punto $P_1 \equiv (P' P''_1)$.</u>

Detto α il piano tangente esso è individuato dalle tangenti $\underline{u}$ e $\underline{v}$ al parallelo e al meridiano passanti per P_1. Sappiamo che il parallelo ha per prima immagine il cerchio p'_1 di centro O' e rag-

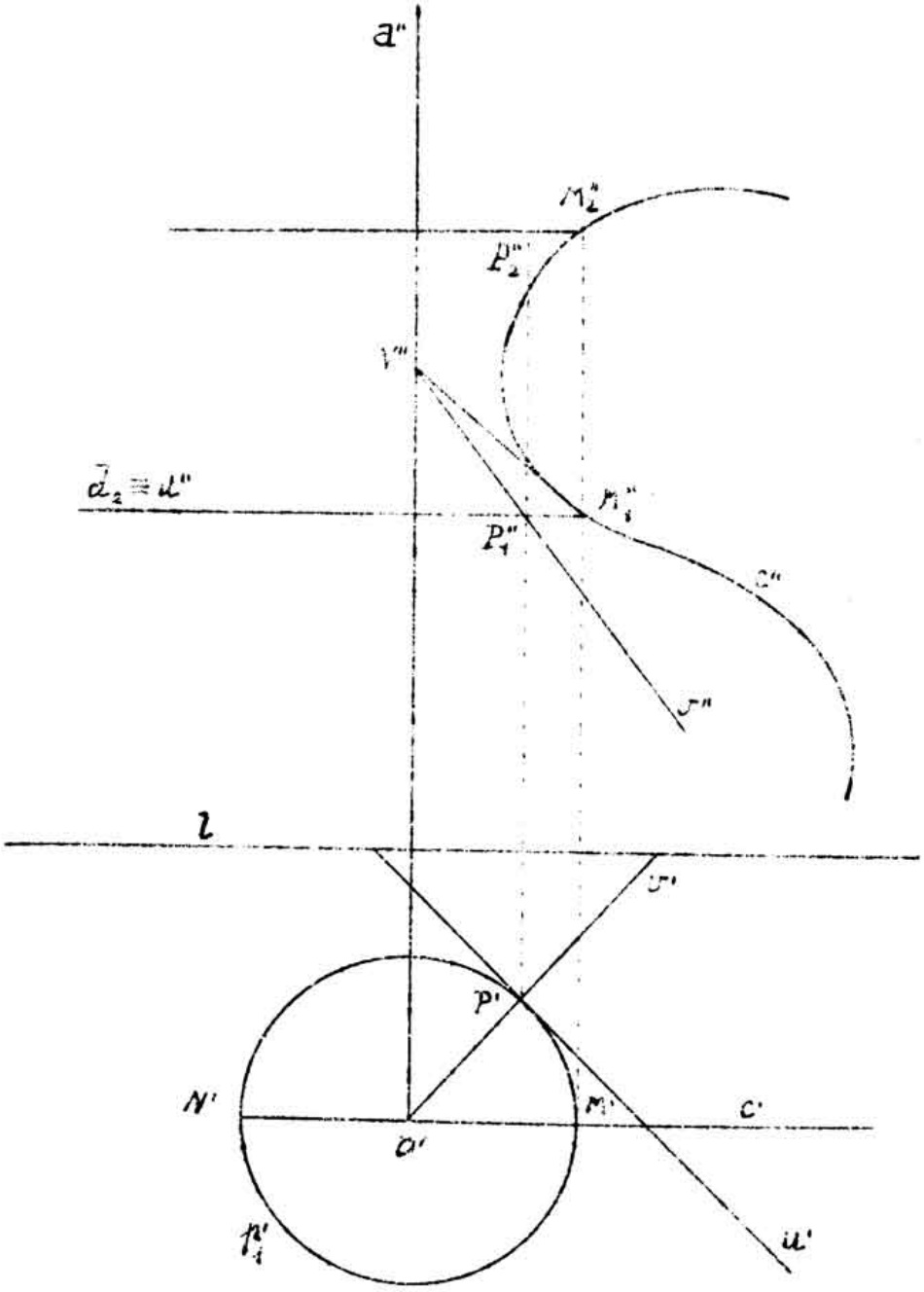

fig. 128

giò $O'P'$ e che la sua seconda immagine appartiene alla retta d_2 parallela ad $\underline{\ell}$ e passante per P'_1.

Le immagini di $\underline{u}$ sono allora la tangente u' in P' a p'_1 e la retta d_2.

Conduciamo la tangente a C'' in M''_1 e chiamo che il punto V'' in cui essa incontra la seconda proiezione dell'asse, è l'immagine verticale del vertice del cono rotondo formato dalle tangenti ai meridiani di Γ nei punti del parallelo p_1 (n° precedente). Ho sapute che la proiezione verticale v'' della retta v è la $V''P''_1$, mentre la proiezione orizzontale è ovviamente la retta v' congiungente O' con P'.

Il piano α cercato è allora perfettamente determinato dalle due rette $\underline{u} \equiv (u'u'')$ e $v \equiv (v'v'')$.

- § 13 -

CENNI SULL'ELICA E SUGLI ELICOIDI

70 - Sia K un cilindro di rotazione, α un piano perpendicolare all'asse $\underline{a}$ del cilindro, C_1 il circolo sezione di K col piano α.

Sia A un punto qualunque di C_1 e supponiamo che A si muova di moto rotatorio uniforme su C_1 mentre il piano α (e con esso C_1) si muova sull'asse

di moto traslatorio uniforme nella direzione dell'asse del cilindro.

La curva $\mathcal{E}$ generata in tal modo dal punto A dicesi elica cilindrica. Siano A e B due punti comuni ad una generatrice g del cilindro e all'elica $\mathcal{E}$ e sia di che fra A e B non cadano altri punti d'intersezione di g ed $\mathcal{E}$.

Il segmento di generatrice avente A e B per estremi dicesi passo dell'elica, l'arco di elica compreso fra A e B dicesi spira dell'elica.

Se il cilindro si suppone indefinito l'elica si può pensare come costituita da infinite spire.

Dalla definizione stessa data sopra, segue che il passo dell'elica è costante e che le spire sono uguali fra loro.

Se un cilindro si muove con movimento rigido su se stesso in modo che uno dei suoi punti descriva un'elica cilindrica tracciata su di esso, quest'elica scorre in sè medesima. Perciò l'elica gode delle stesse proprietà in ogni suo punto, o, come si suol dire è uguale a se stessa in tutte le sue parti.

Il movimento ora detto dicesi movimento elicoidale e, come è noto dalla Meccanica, ad esso può ridursi qualunque movimento rigido dello spazio.

Il moto traslatorio ed il moto rotatorio sono e-

evidentemente casi particolari del moto elicoidale, così come pel cilindro, le generatrici ed i circoli ad esse normali sono casi limiti di eliche.

E' bene notare che la retta, il circolo e l'elica, sono le sole curve dello spazio che possano scorrere (indefinitamente) su se stesse.

72. Consideriamo il cilindro definito di altezza uguale al passo AB dell'elica e sviluppiamolo sul piano τ tangente a K lungo la generatrice g, passante per A (facciamo cioè rotolare senza strisciamento il cilindro K sopra il piano τ finchè la generatrice g ritorni per la prima volta sul piano τ in una posizione che diciamo g').

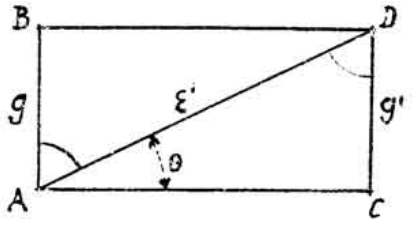

fig-129

Otterremo evidentemente come sviluppo di K un rettangolo ABCD avente il lato AB eguale al passo dell'elica ed il lato AC eguale alla lunghezza della circonferenza base del cilindro.

Eseguito lo sviluppo, l'arco di elica ε compreso fra A e B (spira) si sarà disteso lungo la diagonale AB del rettangolo sopra detto.

Basta infatti osservare che la curva trasformata

di E dopo lo sviluppo) è quella descritta dal punto A soggetto ai due moti rettilinei uniformi di direzione $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.

Dunque: La trasformata di una spira dell'elica nello sviluppo del cilindro è un segmento di retta.

Se in luogo di sviluppare su T il cilindro definito sopra detto, sviluppiamo l'intero cilindro indefinito K, invece del rettangolo ABCD si otterrà la striscia del piano T limitata dalle rette (indefinite) g, g'.

In tali condizioni la spira dell'elica successiva a quella considerata si svilupperà nel segmento BE eguale e parallelo ad AD e lo stesso dicasi per altre spire. E' chiaro poi che nell'operazione inversa, che conduce dalla striscia g g' al cilindro K, ogni segmento MN avente gli estremi sui lati della striscia si avvolge in una spira di una certa elica del cilindro. Ne segue anzi che ogni segmento PQ giacente sulla striscia ora detta è lo sviluppo di un arco di elica del cilindro, e possiamo dire che per due punti P e Q di un cilindro passa almeno un'elica del cilindro (per una maggiore

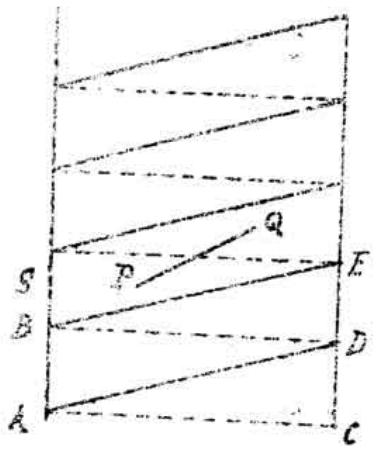

fig - 130

determinazione vedi N° 75 bis, a pag. 264).

73 - Lo sviluppo delle superficie coniche e cilindriche sopra un piano gode delle due seguenti importanti proprietà di cui omettiamo la dimostrazione.

a) - Ogni arco MN di linea $\underline{l}$ appartenente alla superficie, si trasforma in un arco M'N' di una curva piana avente la stessa lunghezza di MN.

b) - L'angolo di due curve qualunque tracciate sulla superficie è uguale all'angolo delle curve (piane) trasformate.

Dalla prima di queste proprietà segue che l'elica è la geodetica del cilindro, ogni suo arco $\underline{s}$ sufficientemente piccolo, segna il più breve cammino fra i propri estremi, nel senso che ogni altro arco s', di curva giacente sul cilindro, limitato dagli stessi estremi A e B, ha lunghezza maggiore dell'arco s. Tale proprietà è una conseguenza del fatto che, nello sviluppo sopra detto, ogni arco AB di elica si mutua in un segmento A'B' del piano T e che questo segmento nel piano T, segna il più breve cammino fra A' e B'.

Dalla seconda proprietà segue poi che le tangenti all'elica incontrano sotto angolo costante la generatrice del cilindro.

Invero consideriamo la generatrice g del cilindro

passante per un punto qualunque P dell'elica e sia $\underline{t}$ la tangente ad $\mathcal{E}$ in P. Nello sviluppo la tangente $\underline{t}$ si trasforma insieme all'elica nella stessa retta $\underline{t}'$ che rappresenta l'elica e perciò l'angolo $\widehat{g\,t}$ viene a coincidere con l'angolo $\widehat{s'g'} \equiv \widehat{t'g'}$. E poichè al variare di P l'angolo $\widehat{g'\,t'}$ rimane costante, si conclude per la proprietà b) che anche l'angolo $\widehat{g\,t}$ rimane costante al variare di P.

Chiamando φ l'angolo $\widehat{g'\,t'}$, p il passo dell'elica, r il raggio del cilindro, dal triangolo ABC si ha:

$$p = 2\pi r : \cot\varphi$$

L'angolo complementare di φ, che la trasformata dell'elica forma con una qualunque sezione retta del cilindro si dice <u>angolo d'inclinazione</u> dell'elica.

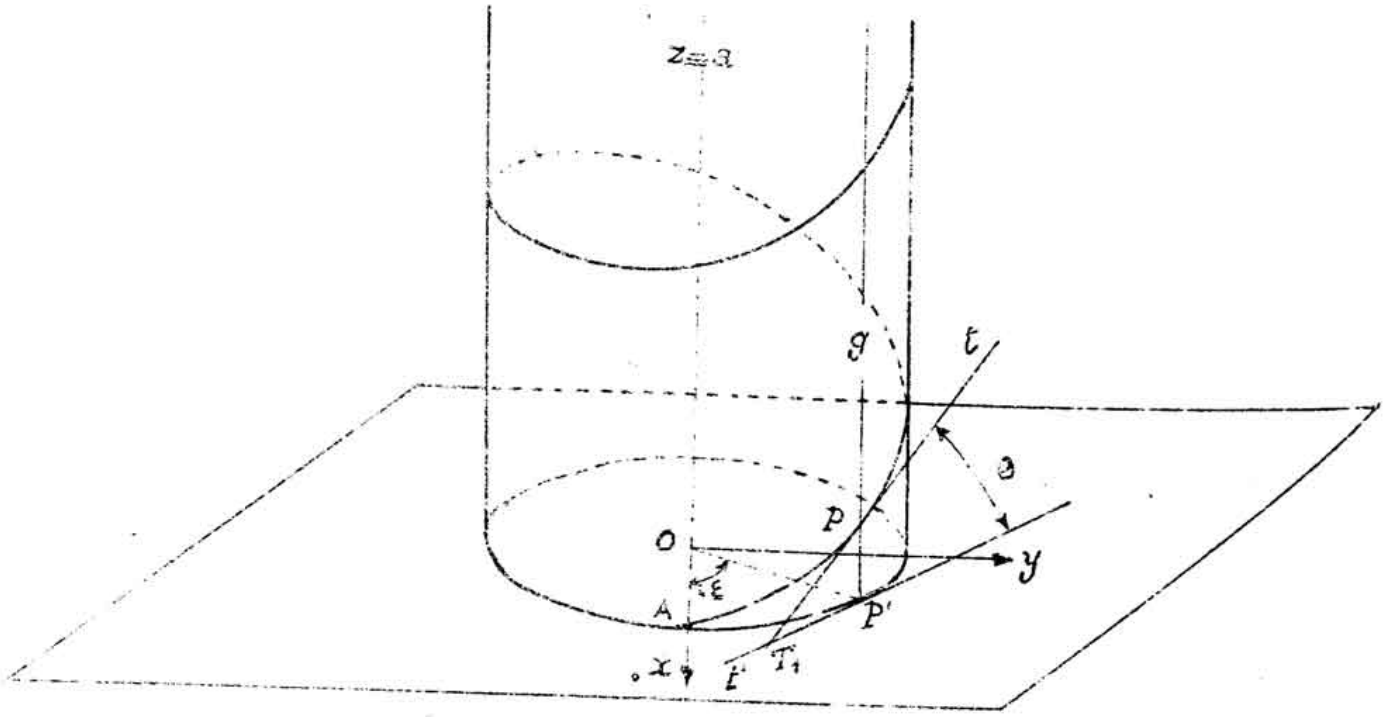

fig - 131

Posto

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ si ha: } tg\,\vartheta = \frac{p}{2\pi r}$$

74 - <u>Equazioni dell'elica</u> - Assumiamo l'asse z del cilindro sul quale l'elica è tracciata come asse z e supponiamo (come è lecito) che la intersezione O dell'elica con il piano xy ($\perp z$) appartenga al semiasse positivo Ox. Siano ancora: r il raggio del cilindro, $P = (x, y, z)$ un punto qualunque dell'elica, P' la sua proiezione sul piano xy, ω l'angolo AOP' contato nel verso positivo delle rotazioni.

Posto ciò si ha subito:

$$x = r\cos\omega \qquad y = r\,\text{sen}\,\omega.$$

La ordinata z è poi evidentemente proporzionale al valore di ω e perciò si ha $z = K\omega$, ove K è una costante il cui valore assoluto rappresenta il rapporto tra la velocità di traslazione nella direzione dell'asse e la velocità angolare di rotazione.

In definitiva le equazioni parametriche dell'elica sono:

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\,\text{sen}\,\omega, \quad z = K\omega.$$

75 - Da quanto precede emerge chiaramente che un'elica è completamente individuata da un punto P e dalla tangente t in questo punto. Sviluppando

infatti il cilindro nel piano tangente ad esso in P, l'elica si dispone sopra la retta t e quindi essa è perfettamente determinata. Quando si conosca invece un punto dell'elica e l'angolo di inclinazione (o, ciò che è lo stesso, l'angolo costante secondo cui l'elica incontra le generatrici del cilindro) la tangente in quel punto si potrà scegliere in due modi diversi (simmetrici rispetto alla generatrice del cilindro passante per il punto stesso) e si avranno perciò due eliche soddisfacenti alle condizioni assegnate. Un osservatore collocato lungo l'asse del cilindro, nell'uno o nell'altro senso, vedrà sempre una determinata di queste eliche innalzarsi girando da sinistra a destra e l'altra girando da destra a sinistra. Si dice pertanto che queste due eliche hanno senso opposto, e la prima si chiama destrorsa la seconda sinistrorsa.

Si osservi che per la elica destrorsa la costante K che compare nell'equazione dell'elica è positiva, mentre è negativa per la elica sinistrorsa.

§ 5 bis. Vogliamo determinare le eliche passanti per due punti A e B di un cilindro.

Sviluppiamo il cilindro sul piano a partire dalla generatrice uscente da A, dimodochè A nello sviluppo avrà due posizioni che indicheremo con A e A'. Indiche-

remo ancora con B la posizione che nello sviluppo prende il punto obbiettivo B_1 e detta B' la proiezione di B su AA' porremo:

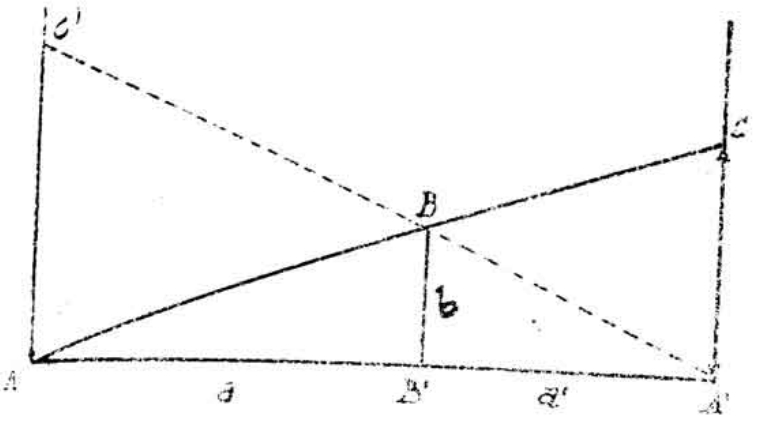

fig. 132

$a = AB'$ $a' = A'B'$ $b = BB'$

Conteremo le spire della elica incontri da A a partire dal punto A stesso.

Se un'elica contiene B nella prima spira, lo sviluppo di questa spira sarà il segmento ABC oppure, a seconda del senso dell'elica stessa, destrorsa o sinistrorsa, A'B'C'. Considerando i triangoli simili ABB' e ACA', si trova che i rispettivi passi sono:

$$p_1 = A'C \qquad p_1' = AC'$$

$$p_1 = \frac{2\pi a b}{a} \qquad p_1 = \frac{2\pi a b}{a'}$$

Se invece l'elica conterrà B sulla seconda spira si verificherà uno dei casi rappresentati in figura.

Consideriamo il primo caso, elica per es. destrorsa il passo dell'elica sarà $p_2 = A'C$; chiamando B'' il punto dove BB' incontra AC sarà $B'B'' = b - p_2$ e perciò dalla similitudine dei triangoli AA'C, AB'B''

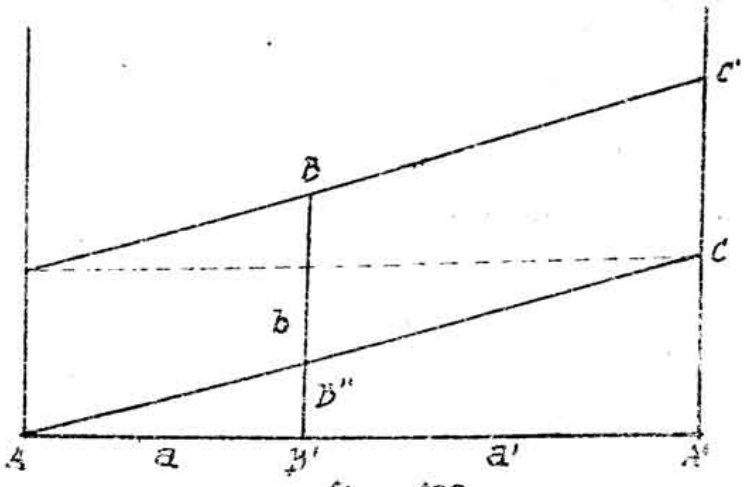

fig - 133

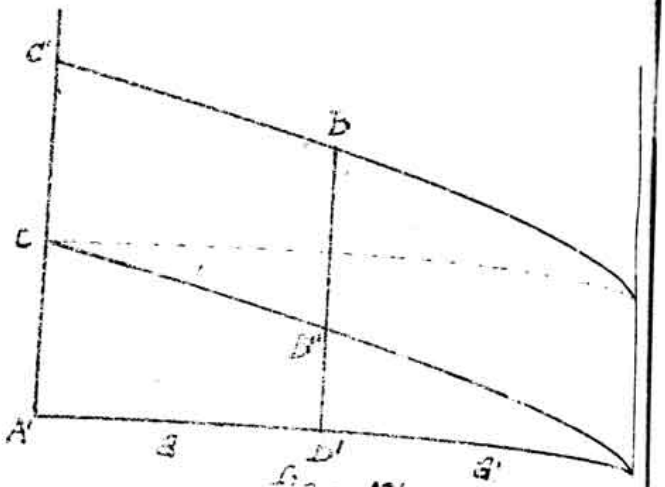

fig - 134

$$p_2 = A'C = \frac{B'B''}{AB'} AA' \qquad p_2 = \frac{b - p_2}{a} 2\pi r$$

e infine

$$p_2 = \frac{2\pi r b}{a + 2\pi r}$$

Analogamente per il secondo caso si trova

$$p'_2 = \frac{2\pi r b}{a' + 2\pi r}$$

Se in generale B è sulla K^{esima} spira per il passo p_K o p'_K si trova analogamente

$$p_K = \frac{2\pi r b}{a + (K-1) 2\pi r} \qquad p'_K = \frac{2\pi r b}{a' + (K-1) 2\pi r}$$

Nella figura sono segnati i casi $K = 3$

Queste formule determinano pienamente e per qualunque K, il passo dell'elica. D'altra parte l'pro-

gine A, il passo e il verso determinano alla loro volta l'elica; e si può concludere:

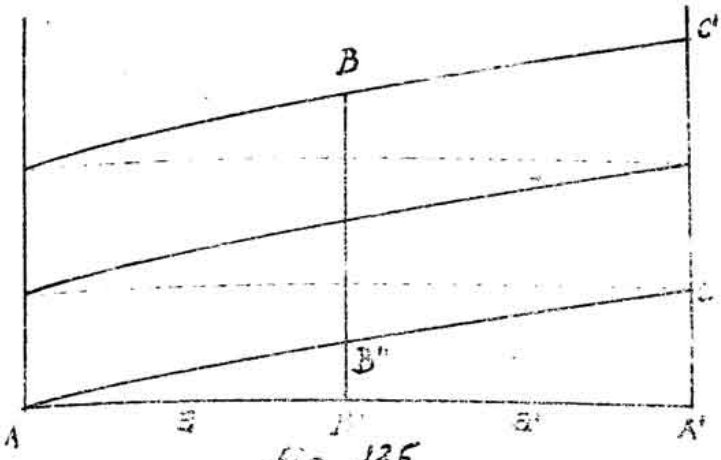

fig 135

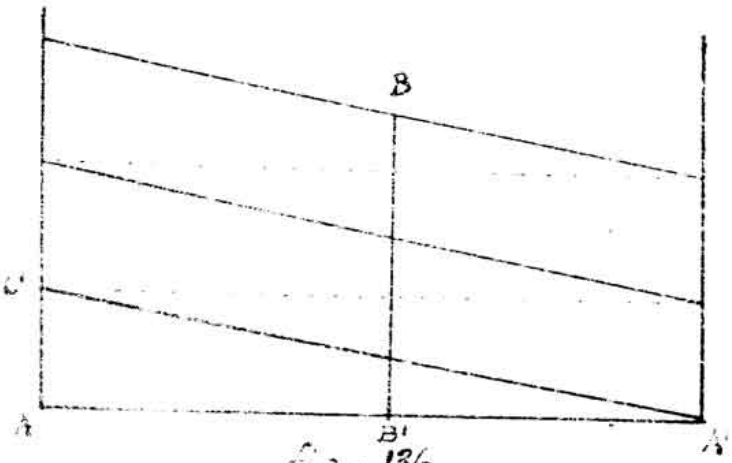

fig 136

Assegnati sul cilindro due punti A e B esiste una e una sola elica di verso assegnato (destrorso o sinistrorso) che parte da A e contiene B nella K^{ma} spira qualunque sia K, essendo le spire contate partendo da A.

Come casi limite, consideriamo i due casi:

1° B appartiene al circolo del cilindro uscente da A (base del cilindro); sarà $b = 0$, e le dette eliche vengono tutte a coincidere nel circolo stesso.

2° B è nella stessa generatrice uscente da A. Sullo sviluppo anche B avrà due posizioni B e B' e sarà $a = 0$ e $a = 2\pi r$, oppure $a' = 2\pi r$ e $a' = 0$.

Le conclusioni sono le stesse del caso generale solo che questa volta una delle eliche si riduce alla generatrice AB.

Di tutte le eliche uscenti da A e B sarà la geodetica, evidentemente, quella che contiene B nella prima spira e sarà la destrorsa o la sinistrorsa a seconda che è $AB < A'B'$ oppure $AB > A'B'$. Nel caso della figura essendo $AB > A'B'$ sarà la sinistrorsa.

Proiettando A e B dell'asse $\underline{l}$ del cilindro si ottengono due semipiani che formano due angoli diedri uno convesso l'altro concavo. L'elica che segna la geodetica sarà evidentemente quella che è contenuta nell'angolo diedro convesso e si conclude:

Dati sopra un cilindro circolare retto due punti A e B il più breve cammino sul cilindro che conduce da A a B è l'arco di elica che contiene A e B nella stessa spira e che è contenuta nell'angolo diedro convesso che dall'asse del cilindro proietta A e B.

76 - Rappresentazione dell'elica - Supposto che il cilindro sul quale l'elica è tracciata abbia le generatrici normali al piano orizzontale, la prima proiezione del cilindro stesso si ridurrà al cerchio C sezione del cilindro col piano π_1. Siano M_1 ed N_1 le tracce orizzontali delle generatrici di contatto del cilindro con i piani di profilo ad esso tangenti. Le generatrici ora dette hanno per seconde immagini due rette perpendicolari alla linea di terra costituenti il contorno apparente del cilindro sul piano

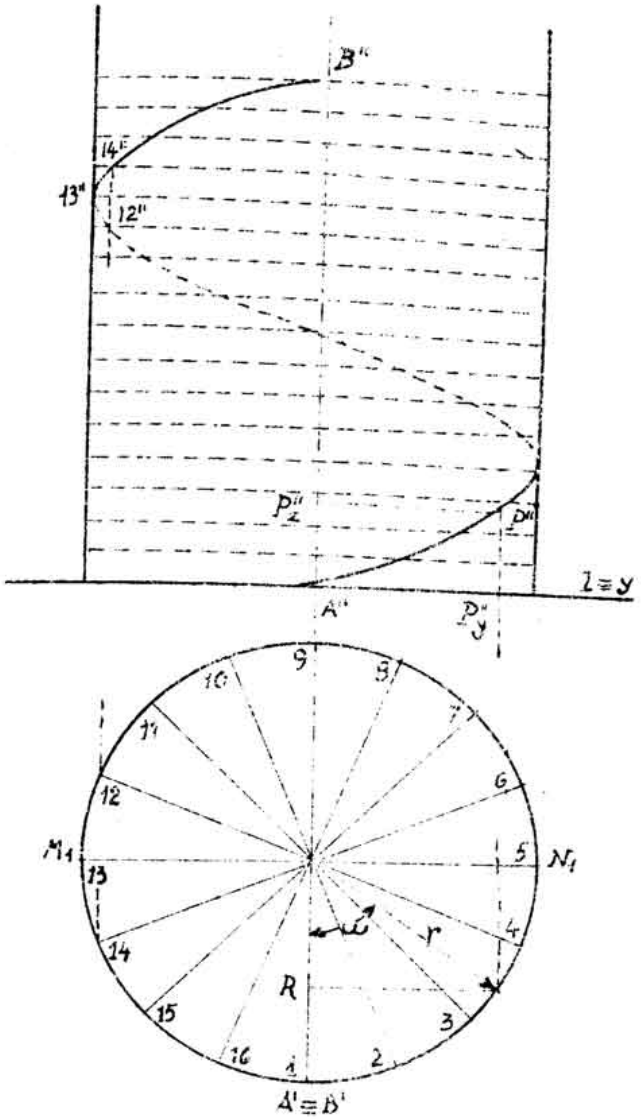

fig. 137

verticale. Il cilindro è così perfettamente individuato.

Si supponga ora di conoscere un punto dell'elica, per es., l'intersezione A col piano di proiezione, la quale apparterrà al cerchio C (nella nostra figura A è uno degli estremi del diametro $1_0 6_0$); il passo $p = AB$ (ciò che, dato il cilindro, equivale a dare l'angolo d'inclinazione $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{2\pi r}$, essendo r il raggio del cilindro) e il verso che supponiamo sinistrorso.

Ciò posto, osserviamo anzitutto che la proiezione orizzontale dell'elica è il cerchio C e per essere l'elica sinistrorsa, quando un punto si sposta sull'elica innalzandosi, la sua prima proiezione si muove nel senso opposto a quello delle lancette dell'orologio.

Supponiamo ora che $P \equiv (P', P'')$ sia un punto dell'elica di cui sia data la proiezione orizzontale P'. Per determinare la proiezione verticale P'' osserviamo che quando il punto P descrive con continuità una spira dell'elica il punto P' descrive pure, con continuità, l'intero cerchio C a partire da A nel senso sopra detto tornando in $A' \equiv B'$. Ora dalla definizione stessa dell'elica si ha che sussiste proporzionalità fra gli archi di circonferenza (di origine A) descritti da P' e le distanze di P da π_1. Ne segue che se per es. è l'arco $\widehat{AP'}$ eguale ad $\frac{m}{n}$ dell'intera circonferenza, il punto P deve essersi innalzato sul piano orizzontale (a partire dalla posizione iniziale A di quota zero) di $\frac{m}{n} AB = \frac{m}{n} p$.

Notiamo ancora che si ha evidentemente $AB = A''B''$.

Dopo ciò è facile immaginare come si possa ottenere la proiezione verticale di un'elica dato il passo e il verso.

Si divida la circonferenza C in un numero qualunque n di parti eguali a partire dalla traccia orizzontale A dell'elica, e per i punti di divisione si conducano le perpendicolari alla linea di terra. Si divida poi il segmento $A''B''$ (eguale al passo) nello stesso numero n di parti eguali e pei punti di

divisione si condurranno le parallele alla linea di terra. Le intersezioni delle rette normali alla linea di terra ordinatamente con le corrispondenti parallele ad $\underline{l}$ saranno altrettanti punti della proiezione verticale dell'elica data.

Con modo sopra indicato si ottiene la proiezione verticale di quanti si vogliono punti di una spira dell'elica, con lo stesso procedimento si potrà (continuando) ottenere la proiezione verticale di quanti si vogliono punti di un arco arbitrario dell'elica.

Per definire la natura geometrica della curva che rappresenta la seconda proiezione assumiamo sul piano Π_2 come assi cartesiani y e z rispettivamente la linea di terra e la seconda proiezione dell'asse del cilindro orientati il primo verso destra ed il secondo verso l'alto.

Diciamo P''_y, P''_z le proiezioni ortogonali sugli assi y e z di un punto qualsiasi P'' della seconda proiezione dell'elica.

Si ha subito (cfr. figura)

$$P''_y P'' = P'P = z = K\omega$$

$$P''_z P'' = y = R P' = r \operatorname{sen} \omega$$

risolvendo la prima relazione rispetto ad ω e sostituendo nella seconda si ha:

$$y = r \operatorname{sen} \frac{z}{K}$$

e quindi concludiamo che: la seconda proiezione dell'elica è una sinusoide.

Nel prossimo numero impareremo a costruire la tangente ed il piano osculatore all'elica in ogni suo punto.

- § 14 -

CENNI SULLE SUPERFICIE ELICOIDALI

77 - Elicoide sviluppabile. L'insieme delle tangenti ad un'elica circolare è una superficie che si chiama elicoide sviluppabile. In base ad una definizione già data, l'elicoide sviluppabile è perciò la sviluppabile osculatrice dell'elica.

Determiniamo la traccia di questa superficie sul piano orizzontale π_1.

Sia t la tangente all'elica in un suo punto P ed immaginiamo di sviluppare il cilindro sul piano gt tangente al cilindro nel punto P. L'elica si svilupperà allora lungo la retta t, e il cerchio sezione del cilindro col quadro si svilupperà sulla tangente t' in P' al cerchio stesso. Ne segue che se indichiamo con T_1 il punto comune a t e t', T_1 sarà il trasformato dopo lo sviluppo della traccia A dell'eli-

ca e perciò $\overline{T_1 P'} = AP'$ (vedi figura 138).

Dunque la prima immagine t' di $\underline{t}$ è la tangente al cerchio C del punto P' e la traccia orizzontale T_1 di $\underline{t}$ si ottiene prendendo su t' a partire da P' (e in verso opportuno), un segmento uguale all'arco $\overline{P'A}$ di C.

Ne segue che la traccia orizzontale dell'elicoide sviluppabile è la curva che si ottiene portando sulle tangenti di un cerchio a partire dal punto di contatto, il segmento eguale all'arco compreso fra il punto di contatto ora detto ed una origine fissa.

Questa curva è perciò l'<u>evolvente del cerchio</u>.

Si noti che da A partono due rami dell'evolvente ciascuno dei quali è il luogo delle tracce delle tangenti in punti dell'elica situati rispettivamente al disopra e al disotto del quadro.

La costruzione della seconda immagine t'' di $\underline{t}$, della quale si conosce la prima immagine t', e la traccia orizzontale T_1, segue ovviamente, ricordando che $\underline{t}$ passa per P.

Si osservi che noto l'angolo di inclinazione dell'elica, la costruzione della tangente $\underline{t}$ all'elica in un suo punto $P \equiv (P'; P'')$ si riduce alla ricerca della seconda proiezione di una retta di cui sono noti: un punto $(P'; P'')$, la prima proiezione t' (tangente in P' a C) e l'angolo che $\underline{t}$ forma con il quadro orizz.

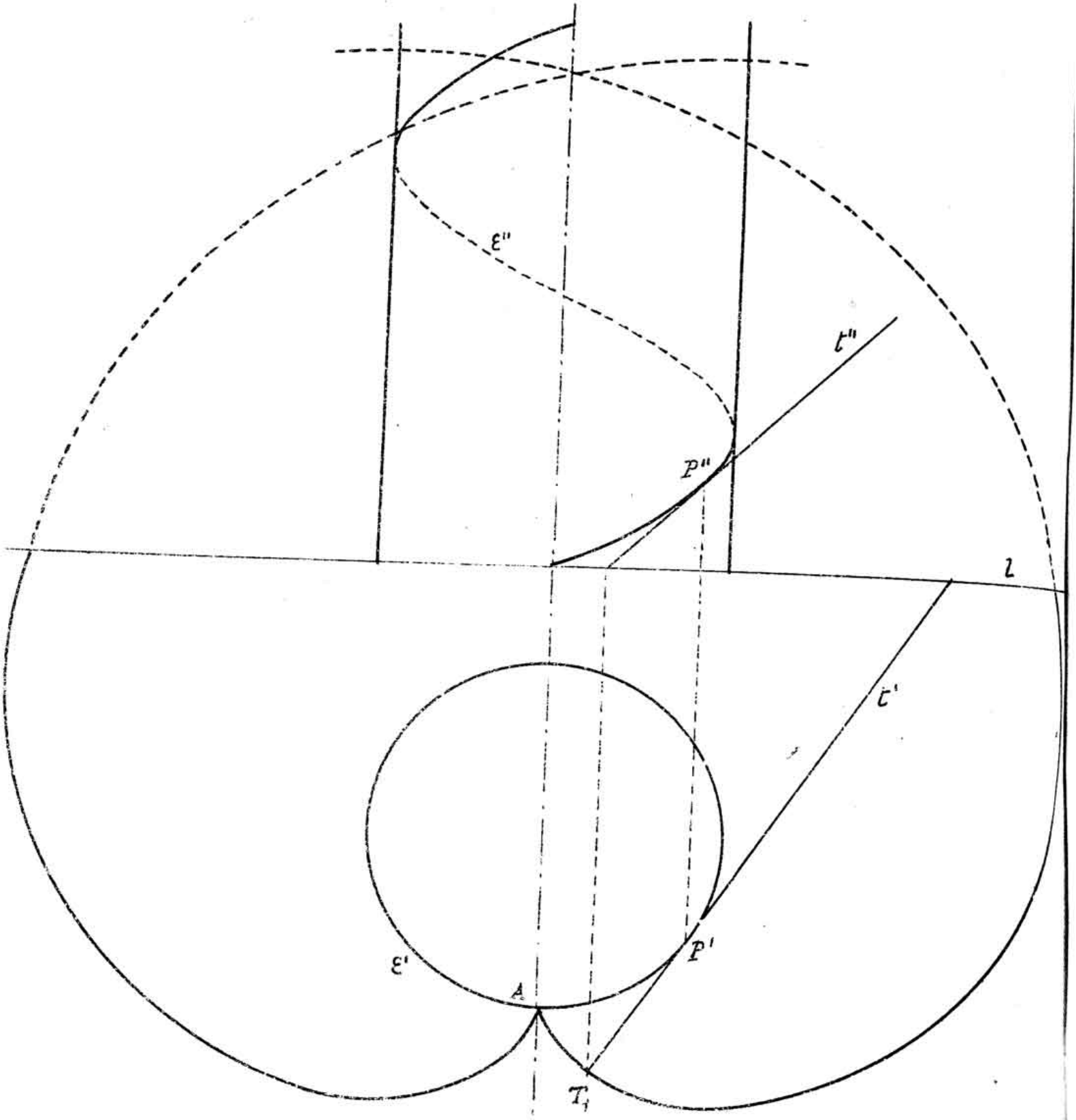

fig - 138

zontale.

Nei complementi dimostreremo che il piano tangente all'elicoide sviluppabile lungo i punti di una generatrice è invariabile e coincide col piano osculatore dell'elica nel punto di contatto della generatrice considerata. Ne segue che la ricerca dei piani tangenti all'elicoide sviluppabile si riduce alla ricerca dei piani osculatori all'elica.

D'altra parte si dimostra che il piano osculatore τ all'elica in ogni suo punto P passa per la normale in P all'asse del cilindro.

Si conclude che il piano τ è il piano passante per la tangente t all'elica in P e per la normale detta.

78 - <u>Elicoide retto</u> - dicesi la superficie luogo delle rette che si appoggiano ad un'elica e incontrano ortogonalmente l'asse dell'elica stessa.

La superficie dicesi anche <u>elicoide a piano direttore</u> perchè le direzioni delle sue rette (generatrici) appartengono tutte alla <u>giacitura</u> perpendicolare all'asse dell'elica.

La rappresentazione di una superficie siffatta riesce quanto mai semplice.

Segnate le proiezioni ε' ed ε'' dell'elica ε, le

immagini g' e g'' di una generatrice g passante per un punto $P \equiv (P'P'')$ di $\mathcal{E}$, sono rispettivamente il raggio del circolo $\mathcal{E}'$ passante per P' e la perpendicolare (n° 20) alla proiezione verticale dell'asse dell'elica condotta per P''.

79. Elicoide obliquo. dicesi la superficie luogo delle rette che si appoggiano ad un'elica $\mathcal{E}$ e incontrano sotto angolo costante $\varphi \left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$ l'asse dell'elica stessa.

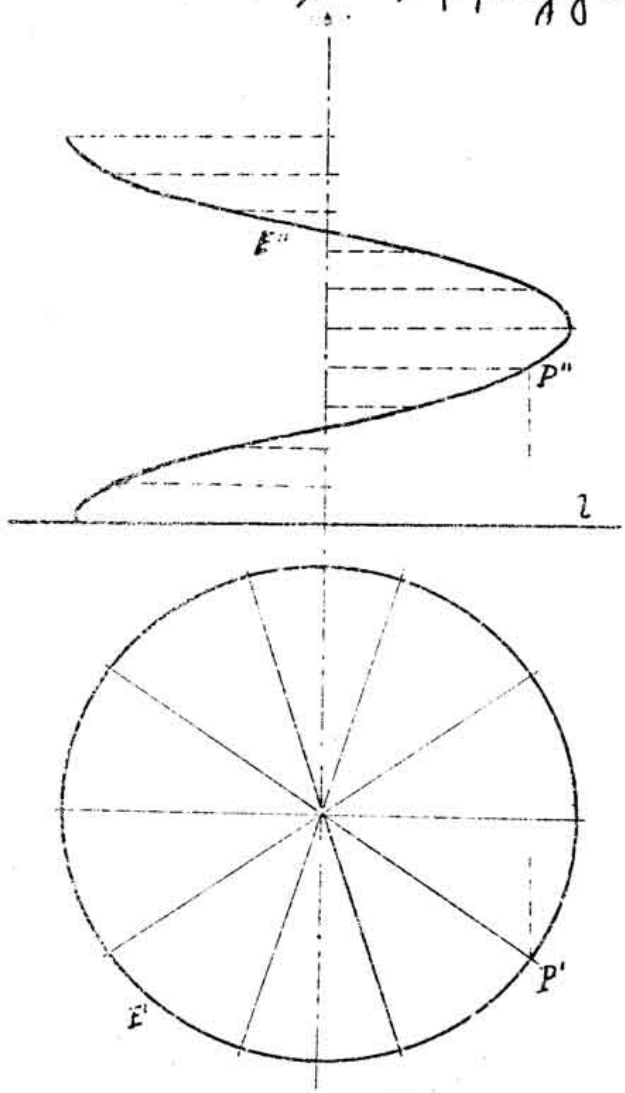

fig - 139

La superficie dicesi anche <u>elicoide a cono direttore</u> perchè le sue rette (generatrici) sono parallele a quelle di un cono rotondo di asse r parallelo all'asse dell'elica e le cui generatrici formano con r un angolo uguale a φ.

Per rappresentare l'elicoide obliquo, seguiamo al solito le due proiezioni $\mathcal{E}'$ ed $\mathcal{E}''$ dell'elica $\mathcal{E}$, supp-

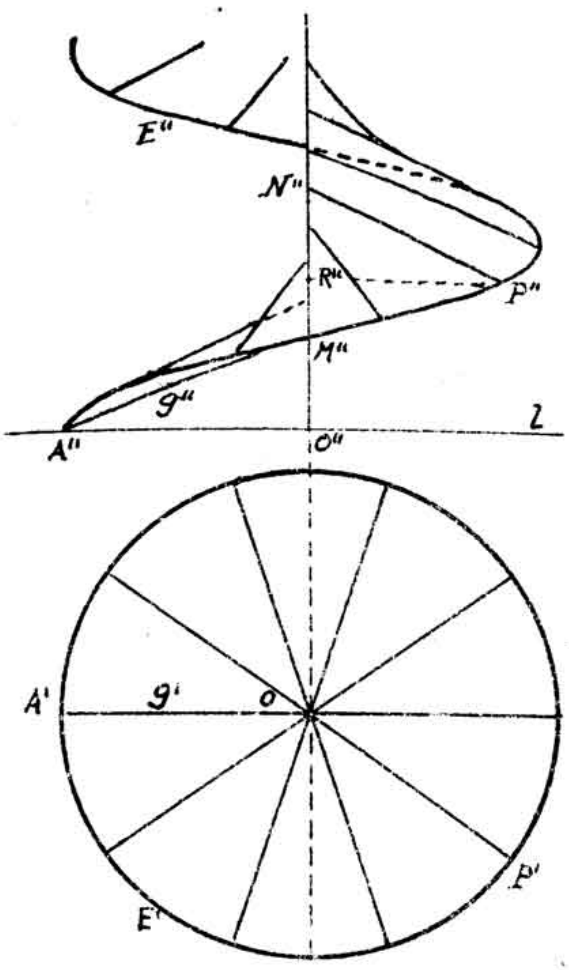

fig 140

ponendo che la tracciata di $\mathcal{E}$ sia uno degli estremi, ad esempio il sinistro, del diametro $\underline{v}$ di $\mathcal{E}'$ parallelo alla linea di terra.

Dopo ciò incominciamo col determinare le proiezioni della generatrice $\underline{g}$ dell'elicoide passante per A. La prima proiezione g' di $\underline{g}$ è evidentemente la retta $\underline{v}$. Detto M il punto comune a $\underline{g}$ e all'asse dell'elica, il triangolo AOM in quanto è situato in un piano parallelo a Π_2 si proietta su questo in vera grandezza. Sarà quindi $A''\widehat{M''}O'' = \varphi$ e quindi la g'' si otterrà conducendo per A'' una retta formante con $l \equiv (A''O'')$ un angolo eguale a $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Dopo ciò riuscirà assai facile rappresentare la generatrice $\underline{g}$ dell'elicoide passante per un punto qualunque $P \equiv (P'P'')$ dell'elica.

La prima immagine g' è ovviamente la retta

OP'. Sia ora N il punto comune all'asse dell'elica e alla g ed R il piede della perpendicolare condotta da P all'asse dell'elica.

I due triangoli AOM e PRN risultano eguali e sarà quindi OM = RN e per conseguenza O"M" = R"N".

La seconda proiezione g" di g si ottiene pertanto, conducendo da P" la perpendicolare ad a", staccando su a" a partire dal piede R" della perpendicolare ora detta, un segmento R"N" eguale a O"M" e congiungendo infine P" con N".

80. <u>Traccia dell'elicoide sul piano orizzontale</u>.

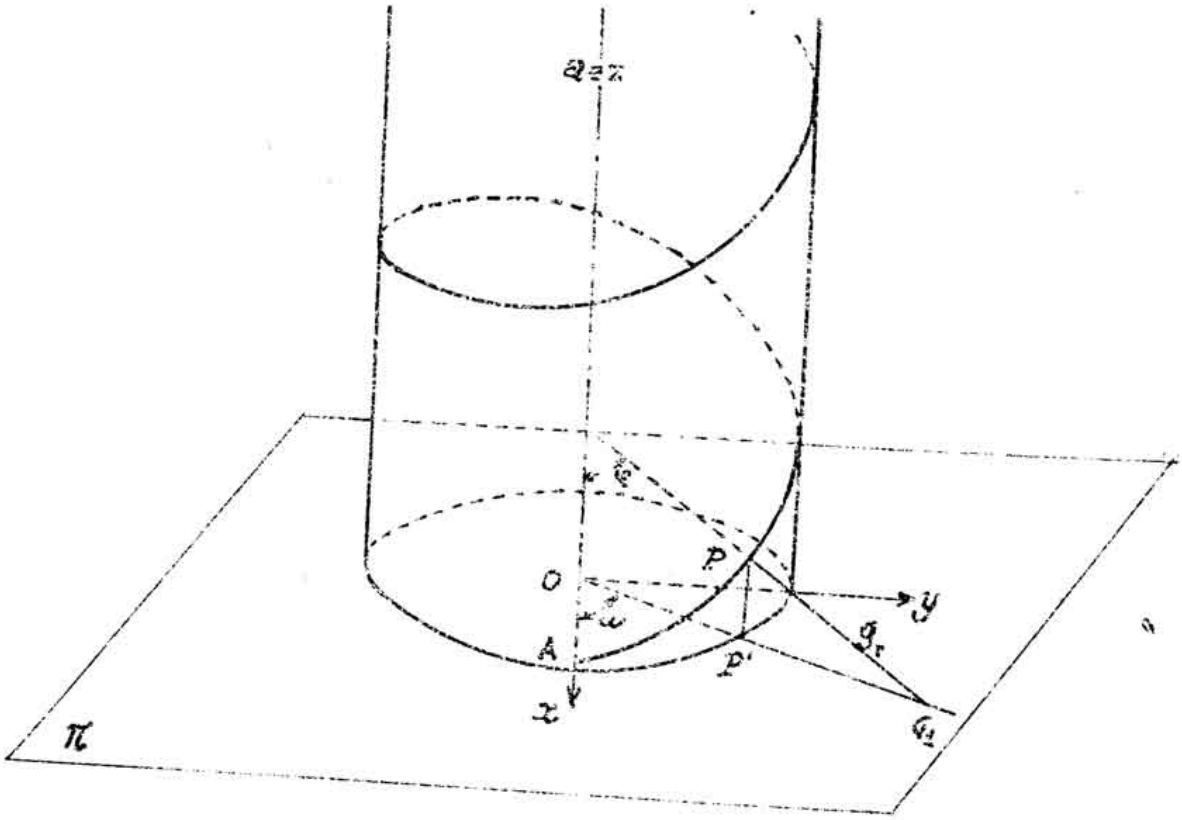

fig. 144

Sia G_1 la traccia della generatrice per un punto $P(xyz)$ dell'elica γ.

La traccia cercata è evidentemente il luogo descritto da G_1 al variare di g_P.

Posto come al solito, $A \equiv \pi_1 \varepsilon_1$, $\omega = A\hat{O}G_1$ nel triangolo $PP'G_1$ avremo:

$$P'G_1 = P'P \operatorname{tg} \varphi = z \cdot \operatorname{tg} \varphi = K \omega \operatorname{tg} \varphi$$

e poichè $K \operatorname{tg} \varphi =$ costante posto:

$$OG_1 = \rho \quad K \operatorname{tg} \varphi = K'$$

si ha:

$$\rho = \ell + K' \omega$$

Ne concludiamo che: <u>La curva sezione dell'elicoide col piano orizzontale è una spirale di Archimede.</u>

<u>Osservazione</u>.

Le tre superficie alle quali abbiamo brevemente accennato appartengono ad una categoria generale di superficie dette <u>elicoidali</u> le quali <u>sono generate da una curva invariabile di forma soggetta simultaneamente a due moti uniformi</u>: uno di rotazione attorno ad un asse, l'altro di traslazione parallelamente all'asse stesso.

Nei tre casi considerati la curva che genera la superficie si riduce ad una retta.

- § 15 -

VITI A FILETTO RETTANGOLARE E TRIANGOLARE

81 - Una vite è costituita da un cilindro di rotazione centrale che si chiama il nucleo o fusto e di una parte periferica o filetto generato dal movimento elicoidale intorno all'asse del cilindro di una opportuna figura F posta in un piano passante per l'asse e adiacente ad una generatrice del cilindro stesso.

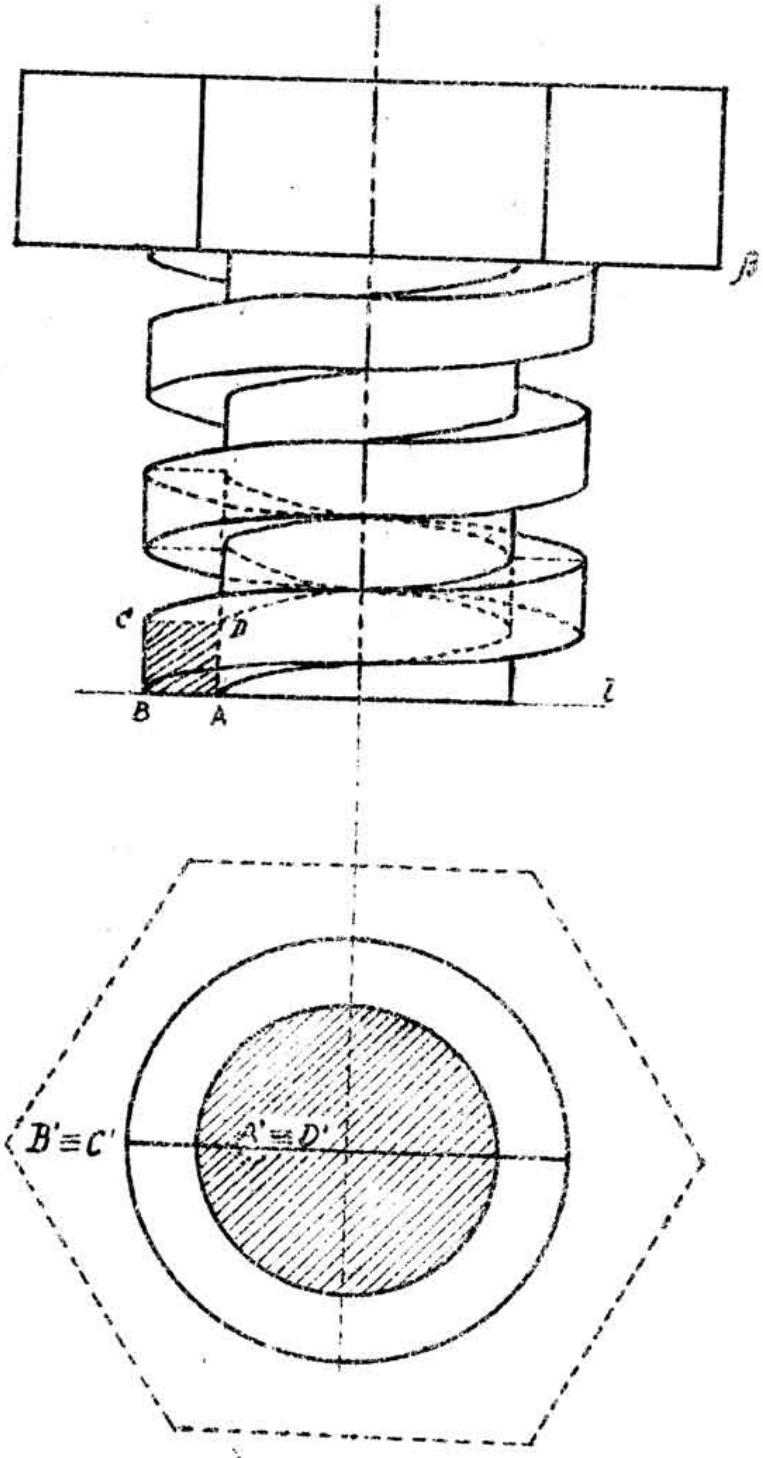

fig. 42

Il passo del movimento elicoidale deve essere ≥ all'altezza massima della figura F relativa alla direzione dell'asse, in modo che fra le spire suc

cesse del filetto rimangono degli interstizi.

Nella vite a filetto rettangolare la figura F che genera il filetto è un rettangolo ABCD con un lato AD, (cfr. Fig. 142) adiacente ad una generatrice del cilindro di nucleo. Il passo è generalmente il doppio di AD, in modo che gli intervalli fra le spire successive del filetto abbiano la stessa altezza delle spire stesse.

I 4 vertici ABCD del rettangolo descrivono 4 eliche circolari $\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{E}_D$ di cui quelle descritte da A e da D ($\mathcal{E}_A$, $\mathcal{E}_D$) stanno nel cilindro di nucleo, e quelle descritte da B e da C ($\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_C$) in un cilindro coassiale a questo e di raggio eguale ad $r + AB$, se si indica con r il raggio del cilindro di nucleo. I lati AB e CD del rettangolo descrivono due zone di elicoide retto (o a piano direttore).

Evidentemente con una traslazione parallela all'asse del cilindro sopra detto e di ampiezza eguale a metà del passo si potranno sempre far coincidere $\mathcal{E}_A$ con $\mathcal{E}_D$ ed $\mathcal{E}_B$ con $\mathcal{E}_C$.

Si rappresenta facilmente una vite a filetto rettangolare nel metodo delle proiezioni ortogonali, segnando la rappresentazione delle quattro eliche suddette e i contorni apparenti in proiezione verticale del cilindro di nucleo e di quello ad esso coassiale, avendo cura di segnare nella seconda proiezione le parti

di spira delle varie eliche che sono visibili. Di $\mathcal{E}_A$ ed $\mathcal{E}_D$ è visibile solo un quarto di ciascuna spira, di $\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_C$ sono visibili le mezze spire anteriori più un archetto posteriore al piano parallelo a π_2 passante per l'asse fino al contorno apparente del nucleo.

Nella vite a <u>filetto triangolare</u>, la figura F che genera il filetto è un triangolo isoscele ABC, posto in un piano α passante per l'asse del perno e con la base AB sopra una generatrice del perno stesso.

Il passo del movimento elicoidale è generalmente eguale ad AB, sicchè A e B si muovono sulla stessa linea $\mathcal{E}_1$ mantenendosi distanti fra di loro di una spira. Il punto C descrive un'elica $\mathcal{E}_2$ di egual passo di $\mathcal{E}_1$ e coassiale con questa ma di raggio maggiore e ciascuno dei lati AC e BC descrive una zona di elicoide obliquo (a vano diretto el. La seconda proiezione di tale vite si costruisce segnando le mezze spire anteriori delle due eliche $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$. Il contorno apparente delle due zone di elicoidi sopra detti è costituito da archetti curvilinei individuati dalle seconde proiezioni di AC e BC nelle successive posizioni assunte nel moto di generazione della vite.

Nella pratica però a cotesti archetti si sostituiscono, e senza con ciò scostarsi da una sufficiente approssimazione, i segmenti rettilinei delle tangenti comuni alle

curve sinusoidali seconde proiezioni delle eliche descritte da A e C e da B e C.

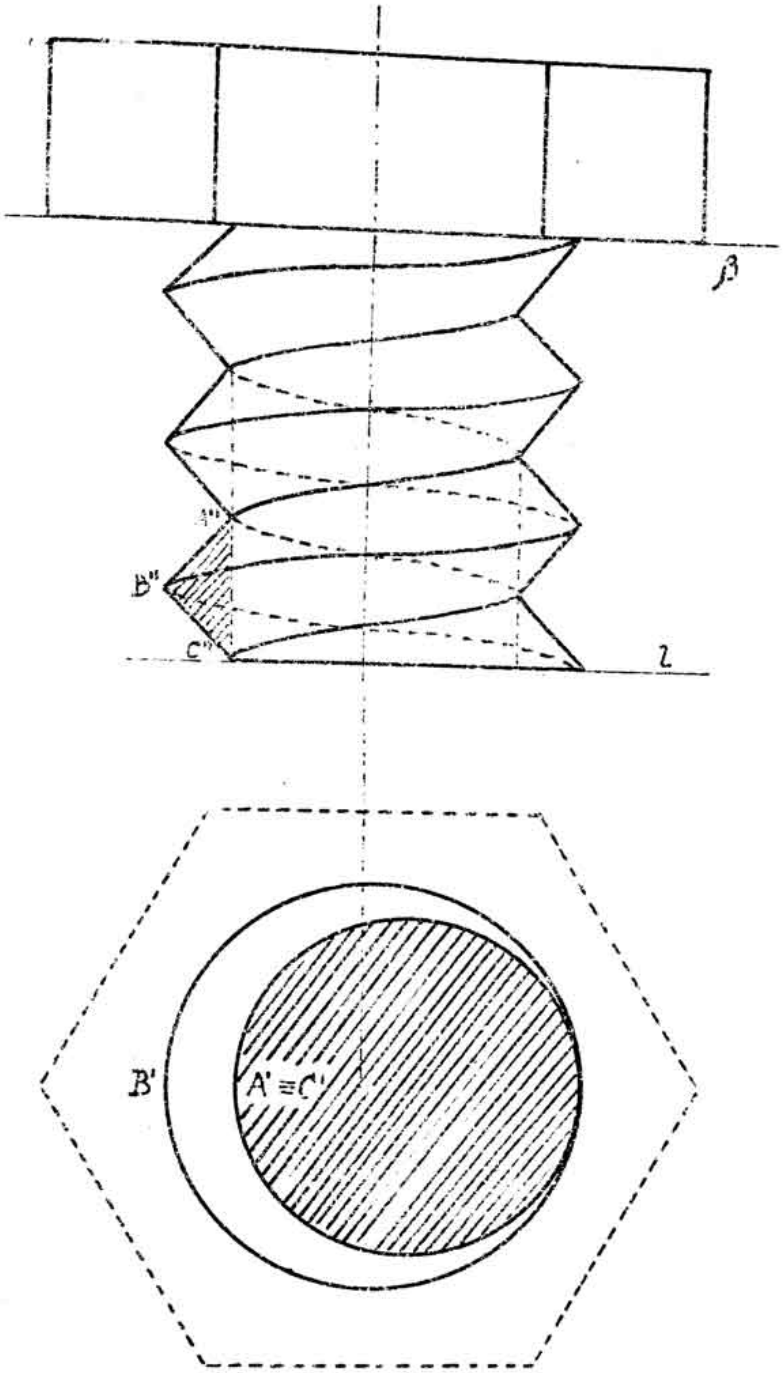

fig-143