TRATTATO

DI

GEOMETRIA

AD USO DELLE

CLASSI SUPERIORI DELLE SCUOLE MEDIE

DEL

Dr. Francesco Cav. de Močnik.

Prima versione italiana autorizzata dall'autore, fatta sulla ventesima edizione originale tedesca

DI

ENRICO Ing. MENEGAZZI

docente di lingua e letteratura tedesca all'I. R. Scuola Industriale dello Stato in Trieste.

Con 227 figure intercalate nel testo.

Approvato con decreto dell'Eccelso I. R. Ministero del Culto e dell'Istruzione 30 Aprile 1891 No. 8202.

Costa legato alla rustica f. 2.40.

TRIESTE
JULIUS DASE, EDITORE
1891.

TIPOGRAFIA DEL LLOYD AUSTRO-UNGARICO.

INDICE.

Introduzione.

§ 1. Uno spazio rinchiuso da ogni parte chiamasi *corpo.*

Il limite d'un corpo costituisce la sua *superficie,* ed una parte della stessa una *faccia* del corpo.

Il limite d'una superficie costituisce il suo *perimetro,* ed ogni parte dello stesso una *linea.*

I limiti d'una linea diconsi *punti.*

I punti, le linee, le superficie ed i corpi vengono compresi sotto il nome comune di *figure dello spazio.*

Queste possono essere generate da un *movimento.* La strada percorsa da un *punto* in moto dicesi linea; dal movimento di una *linea* si genera una superficie o nuovamente una linea; dal movimento d'una *superficie,* un corpo o di nuovo una superficie, e dal movimento d'un *corpo* non si può generare che nuovamente un corpo.

Il corpo ha *tre dimensioni:* lunghezza, larghezza ed altezza; la superficie ne ha *due:* lunghezza e larghezza; la linea ha *una* sola dimensione: lunghezza. Il punto non ha *nessuna* dimensione.

§ 2. Posto un limite a queste dimensioni, le figure dello spazio si trasformano in *grandezze,* e perciò i corpi, nonchè le superficie e le linee limitate diconsi *grandezze dello spazio.*

La determinazione della *grandezza* (quantità) d'una figura dello spazio limitata, si effettua a mezzo di *misura. Misurare* una figura dello spazio significa: trovare un numero che indichi quante volte un'altra figura della stessa specie, presa come *unità,* stia nella figura data. Questo numero dicesi la *misura* della figura dello spazio.

La grandezza d'una linea limitata forma la sua *lunghezza;* la grandezza d'una superficie limitata forma la sua *area,* mentre *volume, capacità* o *contenuto* è la grandezza d'un corpo.

§ 3. Nelle figure dello spazio limitate, oltre alla loro *grandezza,* devesi prendere in riflesso la loro *forma,* vale a dire il modo con cui le singole parti delle stesse si riuniscono e formano un tutto.

Due figure dello spazio possono avere la stessa grandezza, ma differente forma, ovvero possono avere la stessa forma, ma differente grandezza. Figure dello spazio aventi la stessa grandezza diconsi *equivalenti,* quelle aventi forma eguale, *simili,* e se hanno forma e grandezza eguali, *congruenti* od *eguali.* Le figure dello spazio congruenti non si distinguono fra loro che per il luogo ove si trovano; esse possono essere messe l'una sopra l'altra in modo da *coprirsi,* e viceversa se due figure dello spazio sono tali da poter essere portate a coprirsi, le figure sono congruenti od eguali.

L'equivalenza di due figure dello spazio indicasi col segno $=$, la somiglianza col segno $\backsim$, e la congruenza od eguaglianza col segno $\cong$.

§ 4. La scienza che tratta delle figure dello spazio chiamasi *Geometria.*

La Geometria, seguendo il metodo matematico e basandosi sulle definizioni, sugli assiomi e sui postulati, tratta delle dottrine geometriche in *teoremi,* che devono essere dimostrati, in *problemi,* dei quali si chiede la soluzione, ed in scolî e corollarî che ai primi vanno aggiunti.

§ 5. Per *definizione* s'intende l'enunciazione dei caratteri essenziali d'un concetto.

Per *assioma* s'intende una proposizione che contiene una verità da per sè evidente, che quindi non ha bisogno di essere dimostrata, e che del resto non è neppure suscettibile di dimostrazione. Su tali assiomi indispensabili si basano tutte le scienze matematiche. Gli assiomi generali enunciati nell'Aritmetica (§ 7) valgono del pari per la Geometria.

Il *teorema* è una proposizione che contiene una verità da per sè non evidente, e che deve essere dedotta da altre verità come tali riconosciute, connettendo e scomponendo i loro concetti (deduzione logica). Un teorema geometrico è per lo più concepito in modo che una proposizione condizionale vada congiunta ad altra principale; quella contiene l'*ipotesi,* detta anche *premessa* o *supposizione,* questa l'*asserzione,* o la *conclusione* o *tesi.* Talvolta la supposizione è compresa in una parola del teorema, della quale antecedentemente fu data la definizione. Ogni teorema esige una *dimostrazione,* vale a dire la comprova che la verità enunciata dalla stessa sia necessaria conseguenza di altri assiomi o d'altri teoremi la cui giustezza fu diggià riconosciuta. La dimostrazione può essere *diretta* o *indiretta.* Nella dimostrazione diretta l'asserzione enunciata dal teorema viene dedotta a mezzo d'una serie di conclusioni, quale conseguenza dell'ipotesi e di altre proposizioni già dimostrate; nella dimostrazione indiretta od apagogica invece si deduce la verità dell'asserzione comprovando che il sostenere l'opposto, condurrebbe a conclusioni che stanno in contradizione con quelle proposizioni la cui giustezza fu già riconosciuta.

Per *inversione* d'un teorema s'intende una proposizione che abbia per asserzione tutta od una parte dell'ipotesi del teorema, e per ipotesi tutta od una parte dell'asserzione dello stesso. Non sempre il teorema inverso o reciproco è giusto, ed è perciò che questo, se giusto, deve essere del pari dimostrato.

Il *corollario* è una conseguenza che può essere dedotta o immediatamente o con semplici conclusioni da un'altra proposizione già dimostrata. Lo *scolio* è una proposizione tendente ad estendere o precisare il concetto espresso da un'altra proposizione che lo precede.

§ 6. Il *problema* è una proposizione nella quale chiedesi la risoluzione d'una questione che corrisponda a date condizioni. Ogni problema ha una *soluzione*.

I problemi di Geometria sono, o *grafici* o *numerici;* nei primi addimandasi la costruzione d'una figura geometrica, nei secondi il calcolo di grandezze dello spazio a mezzo di numeri.

PARTE PRIMA.

PLANIMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

Linee rette ed angoli.

I. La linea retta, la superficie ed il piano.

§ 7. La linea più semplice è la *linea retta*, detta anche per brevità *retta*. La linea retta non si può definire; essa fa parte di quelle concezioni elementari che devono essere premesse.

Una linea che non è retta, ma di rette è composta, dicesi *spezzata*. Una linea è *curva* qualora nessuna delle sue parti è retta.

Assioma. *Per due punti non si può far passare che una sola retta.*

Corollarî. *a)* La posizione di una retta nello spazio è pienamente determinata da due punti.

b) Due differenti rette non possono avere di comune che *un* sol punto. In tal caso si dice che le rette *si tagliano* ed il punto comune chiamasi il *punto d'intersezione* delle stesse.

§ 8. La superficie più semplice è la *superficie piana*, detta anche brevemente *piano*. Essa, al pari della linea retta, appartiene a quelle concezioni elementari che devono essere presupposte e che quindi non possono essere assoggettate a veruna definizione.

Una superficie in cui veruna parte è piana, dicesi *superficie curva*.

Assioma. *Una retta che abbia due punti comuni con un piano, è tutta situata nello stesso.*

Per tre punti non situati in linea retta non si può far passare che un piano solo. Infatti: Si conduca una retta per due di quei punti, e si faccia passare per i due punti, e quindi anche per la retta, un piano. Immaginandoci ora che questo piano giri attorno la retta, quale asse, si scorge, che una sola delle posizioni che assume il piano durante la rotazione, soddisfa alla condizione di passare anche per il terzo punto.

Corollario. La posizione d'un piano nello spazio è determinata:
a) da tre punti non situati in linea retta;
b) da una retta ed un punto fuori della stessa;
c) da due rette che si tagliano.

§ 9. Quella parte della Geometria che tratta delle figure dello spazio situate in un solo piano, dicesi *Planimetria.* Le figure dello spazio non situate in un solo piano, formano oggetto della *Stereometria.*

II. Raggi e segmenti.

§ 10. Ogni retta illimitata viene divisa da ciascuno dei suoi punti in due rette semilimitate, giacenti *alle due parti* del comune punto-limite, ed aventi, rispetto a questo, *direzioni opposte.* Ogni retta semilimitata da un punto, chiamasi *raggio.* Dei due raggi nei quali una retta illimitata viene divisa da un punto, l'uno dicesi *complemento* dell'altro.

Una retta limitata da due punti è un *segmento;* i suoi due punti-limiti chiamansi *punti estremi.* Il segmento fra due punti determina la *distanza* degli stessi.

Un raggio si segna a mezzo del suo punto-limite e d'un altro punto giacente sul raggio stesso; il segmento, invece, a mezzo dei suoi due punti estremi.

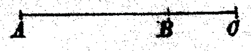
Il segmento AB può essere percorso da un punto in moto in due modi, vale a dire, nella direzione di A verso B, ovvero nella direzione opposta, da B verso A. Preso riflesso a queste due differenti direzioni, si chiamerà AB, il segmento percorso dal punto in moto da A verso B, mentre BA dinoterà il segmento percorso dal punto in moto da B verso A; per cui considerando uno di questi due segmenti come *positivo*, l'altro a lui opposto sarà *negativo*, e si avrà $AB = -BA$.

Per lo più non si prendono in riflesso queste due differenti direzioni, e si valutano i segmenti soltanto a seconda della loro lunghezza assoluta.

§ 11. Due segmenti sono *eguali*, se posti l'uno sopra l'altro, in modo che due dei loro punti estremi e le loro direzioni combacino, anche gli altri due punti estremi si confondano; se poi questi due ultimi punti non andassero a coprirsi, quel segmento è minore, il cui secondo punto estremo cade fra i punti estremi dell'altro segmento.

Prolungando il segmento AB (fig. 1) oltre il punto B sino a C, il segmento AC che ne risulta, è la *somma* dei due segmenti AB e BC, e viceversa il segmento AB è la *differenza* dei segmenti AC e BC.

Fig. 1.



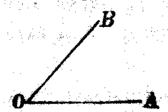
§ 12. Per *misurare* un dato segmento si esamina quante volte un altro segmento, preso per *unità di misura*, sia contenuto nel segmento dato. Quale *unità di misura* lineare fu fissato il *metro*. Il *metro* (*m*) dividesi in *10 decimetri* (*dm*); il decimetro in *10 centimetri* (*cm*) ed il centimetro in *10 millimetri* (*mm*). *1000* metri fanno *un chilometro* (*km*), *10000* metri, *un miriametro* (*μm*).

III. Angoli.

§ 13. Se da un punto d'un piano si conducono due raggi nello stesso, la *quantità di rotazione* che ha fatto l'uno dei due raggi attorno il loro punto comune, per giungere nella direzione dell'altro, dicesi *angolo* dei due raggi. I due raggi che formano l'angolo, chiamansi *lati* o *gambe*, il punto comune dal quale dipartono, *vertice* dell'angolo. Il piano giacente fra i due lati e nel quale si suppone essersi compiuta la rotazione, chiamasi *piano dell'angolo.*

Un angolo si indica o con tre lettere poste l'una al vertice e le altre ai due lati dell'angolo, o con una sola lettera posta fra i due lati nelle vicinanze del vertice, o finalmente a mezzo della lettera al vertice, quando questo non sia comune ad altri angoli. Nel segnare un angolo con tre lettere debbesi usare l'avvertenza di porre la lettera al vertice nel mezzo.

Fig. 2.

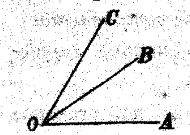


L'angolo AOB (fig. 2) può essere generato in due modi: o dal rotare d'un raggio attorno ad O dalla direzione OA in quella di OB, ovvero dalla rotazione dello stesso in direzione opposta, da OB ad OA. Prendendo in riflesso queste due differenti direzioni in cui si compie la rotazione, sarà AOB l'angolo generato dal raggio nel rotare che fa da OA verso OB, mentre BOA indicherà l'angolo formatosi dalla rotazione dello stesso raggio da OB verso OA, per cui, considerando l'uno di questi angoli come *positivo*, l'altro sarà *negativo*, e si avrà $AOB = -BOA$.

Per lo più non si prende in considerazione in qual senso si compie tale rotazione, e per angolo s'intende comunemente l'assoluta quantità di giro necessaria alla sua formazione.

§ 14. Due angoli sono *eguali*, se posti l'uno sopra l'altro, in modo che i loro vertici, una coppia di lati e le direzioni delle rotazioni coincidano, anche gli altri due lati vadano a coprirsi; se poi gli altri due lati non andassero a cadere l'uno sull'altro, i due angoli sarebbero *disuguali*. In questo secondo caso risulterebbe minore quell'angolo, il cui secondo lato venisse a cadere fra i lati dell'altro angolo.

Fig. 3.



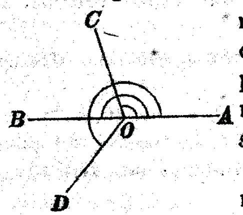
Immaginiamoci che il raggio OA (fig. 3), rotando in un piano attorno il punto O, sia pervenuto dalla sua primiera direzione in quella di OB, e poi ulteriormente nell'altra OC; l'angolo AOC generatosi in tal modo dall'intera rotazione, dicesi la *somma* degli angoli AOB e BOC, mentre all'opposto, l'angolo AOB esprime la *differenza* degli angoli AOC e BOC.

§ 15. Un raggio che ruoti in un piano attorno il suo punto-limite, forma successivamente all'ingiro di questo tutti gli angoli possibili colla primiera sua direzione.

Se il raggio mobile è rotato di tanto, da pervenire di nuovo nella primiera sua posizione, esso ha compiuto una intera *rotazione*. L'angolo formatosi da una intera rotazione, dicesi angolo *pieno*; i suoi due lati si coprono. *Tutti gli angoli pieni sono eguali tra loro.*

Pervenendo il raggio OA (fig. 4) nella direzione OB, opposta alla sua primitiva, esso ha compiuto mezza rotazione; infatti la quantità di giro, in seguito alla quale OA pervenne nella direzione opposta OB, è evidentemente eguale a quella che esso ulteriormente dovrebbe fare, per giungere da questa direzione opposta, alla sua primitiva.

Fig. 4.



L'angolo AOB generato da una mezza rotazione del raggio mobile, chiamasi *angolo diritto* o *piatto*; i suoi lati giacciono in linea retta, alle parti opposte del vertice. Un angolo diritto è la metà d'un angolo pieno. *Tutti gli angoli diritti sono eguali fra loro.*

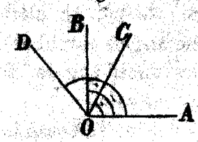
Un angolo AOC minore d'un angolo diritto, dicesi *rientrante* o *concavo*; un angolo AOD maggiore d'uno diritto, chiamasi *saliente* o *convesso*.

Ad ogni angolo rientrante di due raggi corrisponde un angolo saliente; in ogni caso sarà sempre da considerarsi soltanto l'angolo rientrante, ammenochè non si abbia espressamente stabilito diversamente.

§ 16. Un angolo AOB (fig. 5) che è la metà d'uno diritto, nomasi *retto*; esso è generato dalla quarta parte d'una rotazione. *Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro.* L'angolo retto viene segnato colla lettera R.

Un angolo diritto è eguale a due retti, un angolo pieno a quattro retti.

Fig. 5.



Un angolo AOC che sia minore d'un retto dicesi *acuto*; un angolo AOD maggiore d'un retto, ma minore d'uno diritto, chiamasi *ottuso*. Gli angoli acuti e gli ottusi vanno compresi sotto il nome di *angoli obliqui*.

Due angoli la cui somma è $=$ ad un R, si dicono *complementari*; due angoli invece la cui somma è $=$ a $2R$, si chiamano *supplementari*.

Scolio. Se il raggio mobile, compiuta una rotazione, prosegue il suo moto, esso viene ripetutamente a trovarsi, mano a mano, in quelle direzioni in cui trovavasi diggià durante la prima rotazione. Gli angoli che si generano in tal modo, sono eguali al prodotto di quattro retti per il numero delle rotazioni, più l'angolo che il raggio mobile nel primo giro formava colla sua direzione primitiva.

§ 17. Due angoli aventi lo stesso vertice ed un lato comune, situati nello stesso piano alle due parti di questo lato, diconsi *attigui*.

Due angoli attigui i cui lati non comuni, avendo direzioni opposte, sono situati sulla stessa retta, chiamansi *adiacenti*.

Teorema. *La somma di due angoli adiacenti è eguale a due retti.* Infatti essi valgono assieme un angolo piatto (§§ 14 e 15).

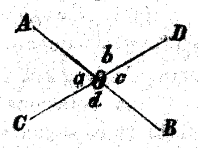
Scolî. *a*) La somma di tutti gli angoli attigui che si formano dalla stessa parte d'una retta passante per il loro vertice comune, è eguale a *due* retti.

b) La somma di tutti gli angoli attigui che si gènerano attorno un vertice comune, è eguale a *quattro* retti.

§ 18. Due angoli, come a e c, b e d (fig. 6), ognuno dei quali è generato dai complementi dei raggi che formano i lati dell'altro, diconsi *opposti al vertice*.

Teorema. *Due angoli opposti al vertice sono eguali fra loro.*

Fig. 6.



Ipotesi: a e c sono angoli opposti al vertice.

Asserzione: $a = c$

Dimostrazione: $a + b = 2R$, perchè angoli adiacenti,

$b + c = 2R$, " " "

quindi: $a + b = b + c$, percui sottraendo da ambe le parti b, si ha: $a = c$.

Similmente si dimostra essere $b = d$.

Corollario. Se degli angoli formati da due rette che si tagliano, uno è retto od obliquo, retti od obliqui saranno del pari gli altri. (Segue dai §§ 17 e 18).

§ 19. Due rette che si tagliano, diconsi *perpendicolari* o *normali* l'una all'altra, quando formano fra loro angoli retti; *oblique fra loro* invece, se tali angoli sono obliqui. Che CD sia normale ad AB, si segna nel modo seguente: $CD \perp AB$.

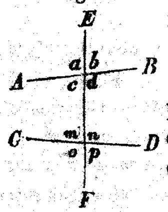
§ 20. Per *misurare* un angolo si esamina quante volte un altro angolo, preso per *unità*, stia in quello. Quale *unità angolare* fu fissato il *grado* (^{0}), vale a dire la *360^{esima}* parte d'un angolo pieno. Il grado dividesi in *60 minuti* ($'$) ed ogni minuto in *60 secondi* ($''$).

IV. Linee parallele.

§ 21. Una retta EF (fig. 7) che tagli due o più altre rette, dicesi la *trasversale* di queste rette.

Se due rette AB e CD vengono intercette da una terza EF, attorno i loro punti d'intersezione si formano otto angoli.

Fig. 7.



Gli angoli c, d, m, n, giacenti fra le due rette intersecate, diconsi *interni;* gli angoli a, b, o, p, all'opposto, chiamansi *esterni.*

Un angolo esterno ed uno interno dalla stessa parte della trasversale ed aventi vertici differenti, diconsi *corrispondenti;* tali sono gli angoli a ed m, b ed n, c ed o, d e p.

Due angoli, o tutti e due esterni o tutti e due interni che giacciono in differenti parti della trasversale ed hanno differenti vertici, diconsi *alterni;* tali sono gli angoli a e p, b ed o, c ed n, d ed m.

Due angoli, o tutti e due esterni o tutti e due interni giacenti dalla stessa parte della trasversale ed aventi vertici differenti, chiamansi *semi-corrispondenti* o *coniugati;* tali sono gli angoli a ed o, b e p, c ed m, d ed n.

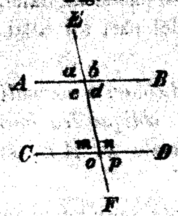
§ 22. Teoremi.

1. *Se due rette vengono intersecate da una terza in modo che due angoli corrispondenti sieno eguali fra loro, eguali del pari saranno a due a due,* a) *gli altri angoli corrispondenti,* b) *gli angoli alterni,* e c) *supplementari a due a due risulteranno gli angoli semi-corrispondenti* (fig. 8).

Ipotesi: $a = m$.

Prima asserzione: $b = n$, $c = o$, $d = p$.

Fig. 8.



Dimostrazione: $a + b = 2R$ ed $m + n = 2R$ (§ 17), per cui $a + b = m + n$; essendo poi $a = m$ per supposizione, ne risulta $b = n$.

Similmente si dimostra che c ed o sono eguali.

Finalmente dal § 18 si ha: $a = d$ ed $m = p$, per cui, essendo $a = m$, ne risulta del pari $d = p$.

Seconda asserzione: $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.

Dimostrazione: Per supposizione è $a = m$, e secondo il § 18 si ha $m = p$, percui $a = p$.

Similmente si dimostra essere $b = o$, $c = n$, $d = m$.

Terza asserzione: $a + o = 2R$, $b + p = 2R$,
$c + m = 2R$, $d + n = 2R$.

Dimostrazione: $a + c = 2R$ (§ 17), $c = o$ per la prima asserzione già dimostrata, quindi $a + o = 2R$.

Similmente si dimostra essere $b + p = 2R$, $c + m = 2R$ e $d + n = 2R$.

2. *Se due rette vengono intersecate da una terza in modo che due angoli alterni sieno eguali, eguali del pari saranno a due a due* a) *gli altri angoli alterni,* b) *gli angoli corrispondenti* e c) *supplementari a due a due saranno gli angoli semi-corrispondenti.*

Dimostrazione: Sia $c = n$. Essendo $c = b$, come angoli opposti al vertice, ne segue pure $b = n$. Ma b ed n sono due angoli corrispondenti, per cui, basandosi su quanto fu detto al punto 1, le altre asserzioni devono essere considerate come di già dimostrate.

3. *Se due rette vengono intersecate da una terza in modo che due angoli semi-corrispondenti sieno supplementari,* a) *supplementari del pari a due a due saranno gli altri angoli semi-corrispondenti, ed eguali risulteranno a due a due* b) *gli angoli corrispondenti* e c) *gli angoli alterni.*

Dimostrazione: Sia $a + o = 2R$. Essendo poi $a + c = 2R$, ne risulta $a + c = a + o$, per cui $c = o$. Ma c ed o sono due angoli corrispondenti, quindi a tenore del punto 1, restano dimostrate del pari le rimanenti asserzioni.

Corollario. Dai tre teoremi ora dimostrati si deduce indirettamente che: Se due rette fanno con una terza traversale due angoli corrispondenti o due alterni che non siano eguali, o due angoli semi-corrispondenti che non siano supplementari, anche gli altri angoli corrispondenti ed alterni non saranno a due a due eguali, nè supplementari risulteranno a due a due gli altri angoli semi-corrispondenti.

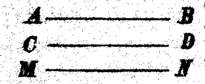
§ 23. Due rette giacenti nello stesso piano e che per quanto prolungate non hanno nessun punto comune, diconsi *parallele.* Per indicare che due rette AB e CD sono parallele, si scrive: $AB \parallel CD$.

Assioma. *Per un punto fuori d'una retta non si può condurre alla stessa che una sola parallela.*

Corollari. a) *Se due rette sono parallele ad una terza, parallele del pari saranno anche fra loro.*

Sia (fig. 9) $AB \parallel MN$ e $CD \parallel MN$; dovrà essere pure $AB \parallel CD$.

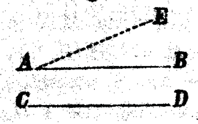
Fig. 9.



Infatti, supponendo che AB non fosse parallela alla CD, essa dovrebbe incontrare la CD in un dato punto; ma allora sarebbe possibile di condurre per questo punto due parallele alla MN, il che starebbe in contradizione coll'assioma precedente.

b) *Una retta* AE (fig. 10) *che taglia un'altra* AB, *taglia del pari qualunque altra retta* CD *parallela a questa.*

Fig. 10.



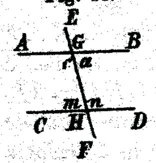
Supponiamo che la AE non tagli la CD, allora essa dovrebbe essere parallela alla stessa, percui per il punto A sarebbe possibile di condurre due parallele alla CD, il che contradice al precedente assioma.

c) *Un piano è determinato da due rette parallele.* (Si confronti il coroll. del § 8).

§ 24. Teoremi.

1. *Se due rette vengono tagliate da una trasversale in modo che due angoli alterni o due corrispondenti siano eguali, o che due angoli semi-corrispondenti siano supplementari, le due rette intersecate sono parallele* (fig. 11).

Fig. 11.



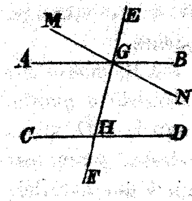
Dimostrazione: Supponiamo che la retta EF tagli le altre due AB e CD in modo che ne risulti $c = n$. Ora dovendo essere del pari $a = m$, ne viene che la porzione del piano $BGHD$ situata da una parte della EF, fra BG, GH ed HD, potrà essere portata, a mezzo d'adeguato spostamento, sull'altra parte del piano, in guisa, che cadendo i segmenti GH ed HG ed i raggi GB e HD nella direzione HC, rispettivamente GA, le due parti del piano si coprano. Le rette AB e CD formano quindi colla GH, d'ambo le parti di questa, la stessa figura geometrica, percui se quelle rette avessero da una parte della GH un punto comune, un altro ne dovrebbero avere dall'altra parte della traversale; ma allora le due rette si taglierebbero in due punti il che, stante il § 7, *b*, non è possibile. Le rette AB e CD sono quindi parallele.

Siccome poi, giusta il § 22, due angoli alterni sono del pari eguali, se due angoli corrispondenti sono eguali o se due semi-corrispondenti sono supplementari, ne viene che l'annunciato teorema è pienamente dimostrato.

2. (*Inversione del teorema 1*). *Se due rette parallele vengono intersecate da una trasversale, saranno, eguali a due a due* a) *gli angoli alterni,* b) *gli angoli corrispondenti,* e c) *supplementari a due a due, gli angoli semi-corrispondenti.*

Farà mestiere di dimostrare soltanto che, stante l'ipotesi fatta, due angoli alterni siano eguali, poichè allora, a mente del § 22, 2, anche le altre asserzioni saranno confermate.

Fig. 12.



Ipotesi: $AB \parallel CD$.

Asserzione: Angolo $BGH = CHG$.

Dimostrazione: Se BGH non fosse eguale a CHG, dovrebbe essere o $BGH > CHG$ ovvero $BGH < CHG$. Supponendo $BGH > CHG$, si potrebbe per il punto G condurre una retta MN in modo che ne risulti l'angolo $NGH = CHG$; ma allora sarebbe $MN \parallel CD$, il che non è possibile, dacchè per la fatta supposizione, è la AB che è parallela alla CD, e per un punto G non si può condurre che una sola parallela ad un'altra retta. In modo affatto eguale si può dimostrare che BGH non possa essere neppure minore di CHG, percui resta dimostrato che gli angoli BGH e CHG debbano essere eguali.

3. *Se due rette vengono tagliate da una terza in modo che la somma degli angoli semi-corrispondenti interni posti da una parte della trasversale sia minore di due retti, le due rette sufficientemente prolungate devono tagliarsi da quella stessa parte della trasversale* (fig. 12).

Dimostrazione: Siano le due rette MN e CD tagliate dalla EF in guisa, che ne risulti $HGN + GHD < 2R$. Guidando ora per il punto G una retta AB in modo che si abbia $HGB + GHD = 2R$, le due rette AB e CD dovranno, giusta il numero 1, essere parallele fra loro. Ma la retta MN taglia la AB, quindi anche la CD dovrà essere dalla stessa intercetta (§ 23, *b*); ma ciò non può aver luogo che nella direzione del raggio GN, dacchè per essere $HGN < HGB$ il raggio GN deve giacere fra GB e GH, ed il suo raggio complementare GM venendo a stare per conseguenza fra GA e GE non può in verun punto intersecare la CD.

Corollario. Se sui lati d'un angolo concavo si erigono delle normali, queste si tagliano in un punto situato fra i due lati.

Segue dal punto 3, guidando una retta per i piedi delle normali.

§ 25. Teoremi.

1. *Due rette normali ad una terza sono parallele fra loro.*

La *dimostrazione* basasi sul § 24, 1.

2. *Se di due parallele l'una è normale ad una retta, anche l'altra lo dovrà essere del pari.*

Si dimostra in virtù del § 24, 2.

3. *Da un punto fuori di una retta non si può condurre alla stessa che una sola normale.*

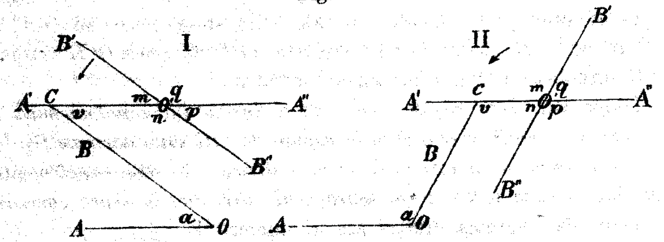
Dimostrazione indiretta: Ammettendo che dal dato punto si potessero condurre due normali, queste, pur avendo un punto comune, dovrebbero essere, giusta il numero 1, parallele fra di loro, il che è assurdo.

4. *In un punto d'una retta non si può erigere a questa che una sola normale.*

Dimostrazione come al punto 3.

§ 26. Siano dati l'angolo AOB (fig. 13) ed il punto O'. Si conducano da questo punto le rette $A'A'' \parallel AO$ e la $B'B'' \parallel BO$, per cui i lati dei quattro angoli formantisi attorno il punto O' saranno paralleli a quelli dell'angolo dato; però, parte degli stessi, come $O'A'$ ed OA, od $O'B'$ ed OB, lo sono *nello stesso senso*, e parte invece, come $O'A''$ ed OA, od $O'B''$ ed OB, lo sono *in senso contrario*.

Fig. 13.



Teorema. *Due angoli i cui lati a due a due sono paralleli, sono:* a) *eguali, se ambedue le coppie di lati sono parallele nello stesso senso, od ambedue lo sono in senso contrario; sono:* b) *supplementari invece, se una coppia è parallela nello stesso senso e l'altra in senso contrario.*

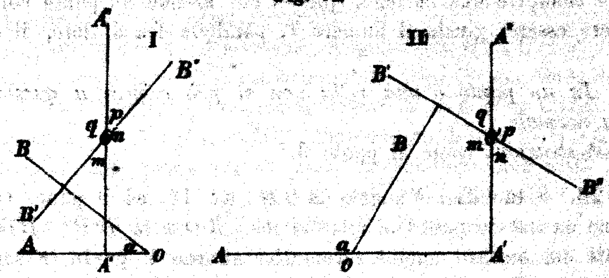
Dimostrazione: a) Si prolunghi la OB sino che essa tagli la $A'A''$ in C. In base al § 24, 2, sarà $m = v$ ed $a = v$, per cui dovrà essere del pari $m = a$. Essendo ora $m = a$ ed $m = p$ (§ 18) ne segue $p = a$.

b) Da *a)* si ha: $m = a$, per cui, essendo $n + m = 2R$, dovrà essere egualmente $n + a = 2R$; ma $n = q$, quindi anche $q + a = 2R$.

Eguale sarà la dimostrazione prendendo il punto O' nel piano compreso fra i due lati dell'angolo AOB.

2. Se nella precedente fig. 13 si ruota di 90° il sistema delle due rette $A'A''$ e $B'B''$ attorno il punto O', in una data direzione, segnata colà da una freccia, esso viene ad assumere rispetto all'angolo AOB una posizione come segnata dalla fig. 14; vale a dire risulterà $A'A'' \perp OA$ ed $B'B'' \perp OB$, mentre gli angoli m, n, p, q saranno rimasti invariati.

Fig. 14.



I lati di questi angoli nella loro nuova posizione diconsi *normali nello stesso senso*, o *normali in senso contrario* ai lati dell'angolo AOB, secondo che gli stessi, prima della loro rotazione di 90°, erano paralleli nello stesso senso o paralleli in senso contrario ai lati di detto angolo. Così per esempio $O'A'$ sarebbe normale nello stesso senso ad OA, del pari $O'B'$ ad OB, mentre $O'A''$ rispetto ad OA, come $O'B''$ rispetto ad OB sarebbero normali in senso contrario.

Teorema. *Due angoli i cui lati a due a due sono normali fra loro sono:* a) *eguali se ambedue le coppie di lati sono normali fra loro nello stesso senso od ambedue nel senso contrario;* b) *sono supplementari se due lati lo sono nello stesso senso e gli altri due in senso contrario.*

Segue dal teorema dimostrato al numero 1.

V. Teoremi per esercizio.

§ 27. Si dimostrino i seguenti teoremi:

1. Le bisettrici di due angoli adiacenti sono normali fra loro.

2. La normale alla bisettrice d'un angolo, eretta nel vertice di questo, dimezza il suo angolo adiacente.

3. La bisettrice d'uno dei due angoli opposti al vertice dimezza del pari l'altro.

4. Le bisettrici di due angoli corrispondenti od alterni di due rette parallele tagliate da una traversale, sono parallele fra loro.

5. Le bisettrici di due angoli semi-corrispondenti di due rette tagliate da una traversale, sono normali fra loro.

CAPITOLO SECONDO.

Figure piane.

I. Il triangolo.

1. Definizione e proprietà generali dei triangoli.

§ 28. Una figura piana limitata da tre segmenti chiamasi *triangolo*. I tre segmenti diconsi *lati* del triangolo.

Ogni triangolo ha tre *vertici*, tre *lati* e tre *angoli*. Ad ogni lato si *oppone* un angolo, mentre gli altri due angoli sono ed esso *adiacenti*; ogni angolo è *racchiuso* da due lati, mentre il terzo è a lui *opposto*.

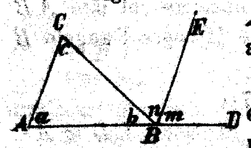
Se in un triangolo ABC si prende un suo lato qualunque AB quale *base*, la normale CD abbassata su questo lato dal vertice a lui opposto, dicesi l'*altezza* del triangolo.

§ 29. Un *triangolo* in cui verun lato è eguale agli altri due, dicesi *scaleno*; un triangolo che ha due lati fra loro eguali, dicesi *isoscele* od *equicrure*, mentre *equilatero* è quello i cui lati sono tutti eguali fra loro.

Nel triangolo isoscele prendesi per *base* il lato disuguale, e per *vertice*, il vertice dell'angolo ad esso opposto. Gli altri due lati diconsi *cruri* del triangolo isoscele.

§ 30. Teorema. *La somma dei tre angoli d'un triangolo è eguale a due retti.*

Fig. 15.



Dimostrazione: Si prolunghi (fig. 15) il lato AB sino in D, e si conduca $BE \parallel AC$; sarà allora $\left.\begin{array}{l} m = a \\ n = c \end{array}\right\}$ giusta il § 24, 2.; essendo però $m + n + b = 2R$ (§ 17, scolio *a*), ne segue del pari $a + c + b = 2R$.

Si potrebbe anche condurre per C una retta ausiliaria parallela alla AB. Quale sarebbe allora la dimostrazione?

Corollari. *a*) Noti che siano due angoli d'un triangolo o la loro somma, nota è del pari la grandezza del terzo angolo.

b) In un triangolo non si può dare che un solo angolo retto od un solo angolo ottuso.

§ 31. Un triangolo dicesi *acutangolo*, se tutti i suoi angoli sono acuti; *rettangolo* se un angolo è retto; *ottusangolo* se un angolo è ottuso.

In un triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto chiamasi *ipotenusa*, e gli altri due lati che comprendono l'angolo retto, diconsi *cateti*. I triangoli acutangoli ed ottusangoli vanno compresi sotto il nome generico di triangoli *obliquangoli*.

§ 32. Per *angolo esterno* d'un triangolo s'intende l'angolo che uno dei lati del triangolo forma col prolungamento di un altro lato.

Teorema. *Ogni angolo esterno d'un triangolo è eguale alla somma dei due interni non adiacenti* (fig. 15).

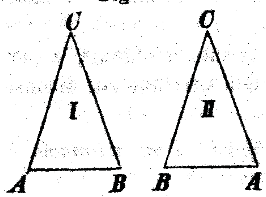
Poichè $CBD = m + n = a + c$.

Corollario. La somma dei tre angoli esterni d'un triangolo è eguale a quattro retti.

§ 33. Teoremi.

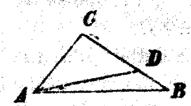
1. *In ogni triangolo a lati eguali si oppongono angoli eguali.*
2. *Al lato maggiore d'un triangolo si oppone l'angolo maggiore.*
3. *In ogni triangolo ad angoli eguali si oppongono lati eguali.*
4. *All'angolo maggiore d'un triangolo si oppone il lato maggiore.*

Fig. 16.



1. Dimostrazione (fig. 16): Sia nel triangolo ABC il lato $BC = AC$. Si costruisca ora un secondo triangolo (II) eguale al dato (I), ma rivolto come lo mostra la figura, e lo si sposti verso l'altro sino che i due angoli eguali C vadano a coprirsi. Ora essendo $BC = AC$, i due punti B ed A del triangolo II dovranno cadere sui punti A e B del triangolo I e perciò il lato BA del primo dovrà coincidere col lato AB del secondo; ma allora l'angolo A del triangolo II copre l'angolo B del triangolo I per cui ne segue $A = B$.

Fig. 17.



2. Dimostrazione (fig. 17): Sia il lato $BC > AC$. Si faccia $CD = AC$ e si conduca il segmento AD. In virtù dell'antecedente teorema 1 si avrà, nel triangolo CAD, l'angolo $DAC = ADC$; ora essendo l'angolo $BAC > DAC$, sarà anche $BAC > ADC$. Ma già ADC, come angolo esterno del triangolo ABD, è maggiore dell'angolo interno ABC a lui non adiacente, quindi tanto più sarà l'angolo $BAC > ABC$.

3. Dimostrazione (*indiretta*). Si abbia (fig. 16) l'angolo $A = B$. Se il lato BC non fosse eguale ad AC, dovrebbe essere $BC \gtrless AC$. Ma allora, in base al teorema antecedente, dovrebbe essere del pari

$A \gtrless B$, ciò che è contrario alla fatta ipotesi $A = B$. Ne segue quindi $BC = AC$.

4. Dimostrazione (indiretta). Sia (fig. 17) l'angolo $BAC > ABC$. Ammettendo che non fosse $BC > AC$, dovrebbe essere $BC = AC$ ovvero $BC < AC$. Dalla prima supposizione si trarrebbe la conseguenza, $BAC = ABC$; dalla seconda invece, $BAC < ABC$, conseguenze ambedue contrarie alla ipotesi fatta di essere $BAC > ABC$. Sarà quindi $BC > AC$.

Corollari. Dal numero 1 segue:

a) In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali fra loro. Conosciuto un angolo d'un triangolo isoscele, conosciuti sono del pari gli altri due angoli (§ 30).

b) L'angolo esterno al vertice d'un triangolo isoscele è il doppio d'uno degli angoli alla base (§ 32).

c) In un triangolo equilatero tutti gli angoli sono fra loro eguali e quindi ciascuno di 60°.

Dal numero 4 segue:

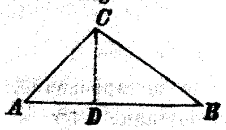
d) Nel triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore d'un cateto.

e) Nel triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è il maggiore.

§ 34. Teoremi. 1. *Ogni lato d'un triangolo è minore della somma degli altri due lati.*

Dimostrazione: Sia nel triangolo ABC (fig. 18), AB il lato maggiore.

Fig. 18.



Si guidi $CD \perp AB$ e sarà (giusta il § 33, *d*):

$$\begin{array}{l} AD < AC \text{ e} \\ \underline{BD < BC, \text{ quindi}} \\ AD + BD < AC + BC \text{ ovvero} \\ AB < AC + BC. \end{array}$$

Che sia poi $AC < AB + BC$ e $BC < AB + AC$, segue immediatamente dalla fatta ipotesi.

2. *Ogni lato d'un triangolo è maggiore della differenza degli altri due lati.*

Per il teorema antecedente si ha:

$$AC + BC > AB \text{ ed } AB + AC > BC;$$

sottraendo quantità eguali si avrà egualmente:

$$BC > AB - AC,\ AC > AB - BC \text{ ed } AB > BC - AC.$$

§ 35. Si chiama *piede* d'una perpendicolare o d'una obliqua, il punto in cui la perpendicolare o l'obliqua incontra la retta alla quale è condotta.

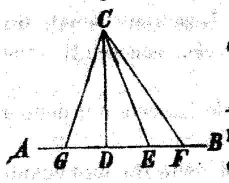
Teorema. *Se da un punto fuori d'una retta si conducono alla stessa la normale e differenti segmenti obliqui,*

1. *la normale è minore di qualunque altro segmento;*

2. *due segmenti obliqui, i cui piedi distano egualmente dal piede della normale, sono eguali;*

3. *di due segmenti obliqui, i cui piedi non distano egualmente dal piede della normale, il più lontano da questo è il maggiore.*

Fig. 19.



Dimostrazione: Sia (fig. 19) $CD \perp AB$.

1. Che CD debba essere minore di CE, di CF e di CG segue dal § 33, *d*.

2. Stante l'eguaglianza dei due segmenti DG e DE, ne segue, che sovrapponendo l'angolo retto CDG sull'altro CDE, in modo che CD cada su CD e DG lungo DE, il punto G deve coincidere con E e quindi CG con CE; laonde sarà $CE = CG$.

3. Nel $\triangle\ CDE$ l'angolo CED è acuto, per cui ottuso sarà il suo angolo adiacente CEF; nel $\triangle\ CEF$ sarà allora il lato $CF > CE$.

Dai teoremi 2 e 3 seguono del pari indirettamente i loro teoremi *reciproci*.

La normale guidata da un punto ad una retta, determina la *distanza* del punto da quella retta.

Corollario. Da un punto fuori di una retta non si possono condurre alla stessa che *due soli* segmenti eguali.

2. Congruenza dei triangoli.

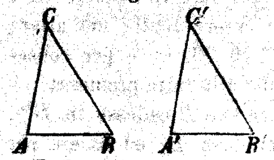
§ 36. Due triangoli sono *congruenti* (§ 3) se sovrapponendoli, si possono far coincidere. Onde ciò sia fattibile dovranno i loro sei elementi, cioè i tre lati ed i tre angoli, essere a due a due rispettivamente eguali. Ne segue quindi che: *in triangoli congruenti i lati opposti agli angoli eguali sono eguali, come del pari eguali sono gli angoli opposti ai lati eguali.*

Siccome i tre lati ed i tre angoli d'un triangolo non sono fra loro indipendenti, ne viene che dalla concordanza di meno di sei elementi si possa dedurre la congruenza di due triangoli. Ciò ha luogo nei seguenti *quattro casi sulla congruenza dei triangoli.*

§ 37. I Teorema di congruenza. *Due triangoli sono congruenti se hanno un lato eguale compreso fra due angoli rispettivamente eguali* (fig. 20).

Premessa: Lato $AB = A'B'$, angolo $A = A'$ e $B = B'$.

Fig. 20.



Tesi: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione: Sovrappongasi il $\triangle A'B'C'$ sull'altro ABC in guisa che i punti A' e B' cadano sui punti A e B; ciò è possibile essendo $AB = A'B'$. Ma per supposizione si ha angolo $A = A'$ e $B = B'$, per cui i lati $A'C'$ e $B'C'$ d'uno dei triangoli dovranno cadere sui lati AC e BC dell'altro non solo, ma anche il punto d'intersezione C' dei primi lati coincidere col punto d'intersezione C degli altri; ne segue quindi che i due triangoli ABC ed $A'B'C'$ si coprono perfettamente.

Corollario. Due triangoli sono congruenti se hanno un lato, un angolo adiacente e l'angolo opposto a questo lato rispettivamente eguali (§ 30, *a*).

§ 38. II Teorema di congruenza. *Due triangoli sono congruenti se hanno un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali* (fig. 20).

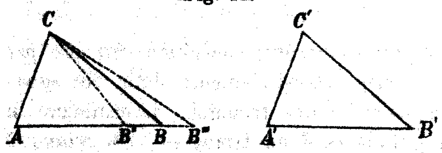
Premessa: Siano $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ e $C = C'$.

Tesi: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione: Sovrapponiamo il triangolo $A'B'C'$ sull'altro ABC in guisa che C' cada su C, $C'A'$ lungo CA, e $C'B'$ lungo CB; ciò è possibile essendo per supposizione l'angolo C' eguale a C. Anche i punti A' e B' dovranno cadere sui punti A e B, dacchè per la premessa fatta è $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; ma allora anche i lati AB ed $A'B'$ dovranno coprirsi, per cui sarà $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§ 39. III Teorema di congruenza. *Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente eguali due lati e l'angolo opposto al lato maggiore di questi due lati.*

Fig. 21.



Premessa: Siano (fig. 21) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $BC > AC$ rispettivamente $B'C' > A'C'$, e l'angolo $A' = A$.

Tesi: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione: Si ponga il $\triangle A'B'C'$ sul $\triangle ABC$ in modo che il punto A' cada su A, C' su C ed $A'B'$ lungo AB; ciò è possibile stante l'eguaglianza dei lati AC ed $A'C'$ e degli angoli A ed A'. Ciò posto anche il punto B' dovrà coincidere col punto B, poichè in caso inverso esso dovrebbe cadere o sur un punto interno B'' del lato B ovvero sur un altro punto B''' del suo prolungamento. Cadendo B' su B''

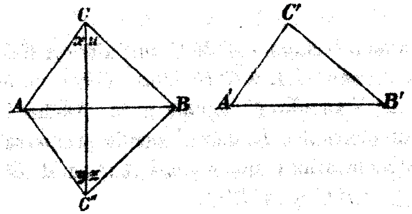
e guidata la $B''C$, ne risulterebbe $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§ 38) e quindi $B''C = B'C' = BC$, per cui il $\triangle CB''B$ dovrebbe essere isoscele ed i due angoli eguali $B''BC$ e $BB''C$ dovrebbero essere acuti; ma allora sarebbe l'angolo $AB''C$ ottuso, $AC > B''C$ (§ 33, *e*) e per conseguenza del pari $AC > BC$, il che contradirebbe alla fatta premessa. — Conduce del pari ad una contradizione il supporre che B cadesse in B'''.

Ne viene quindi che B' debba coincidere con B, ed essere per conseguenza i triangoli ABC ed $A'B'C'$ fra loro congruenti.

Scolio. Le conclusioni fatte nella precedente dimostrazione sono giuste soltanto nel caso che l'angolo eguale dei due triangoli sia, come quello che si oppone al maggiore dei due lati supposti ripremesso, quello che si oppone al maggiore dei due lati supposti rispettivamente eguali; poichè se ciò non fosse, tali conclusioni non si potrebbero punto trarre, e dall'avere due triangoli *due lati rispettivamente eguali ed eguale l'angolo opposto al minore di questi due lati* non si potrebbe inferire sulla congruenza dei due triangoli.

§ 40. IV Teorema di congruenza. *Due triangoli sono congruenti se hanno tutti e tre i lati rispettivamente eguali* (fig. 22).

Fig. 22.



Premessa: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$.

Tesi: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dimostrazione: Si ponga il $\triangle A'B'C'$ sull'altro ABC in modo che i due lati maggiori $A'B'$ ed AB si coprano ed il punto C' venga a cadere dalla parte opposta di AB in C''. Per la premessa fatta poi i due triangoli ACC'' e BCC'' sono isosceli, quindi gli angoli alle loro basi eguali, e si avrà: $x = y$, $u = z$ e per conseguenza anche $x + u = y + z$ ovvero $ACB = AC''B = A'C'B'$.

Essendo ora $ACB = A'C'B'$, ne viene (giusta il § 38) $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

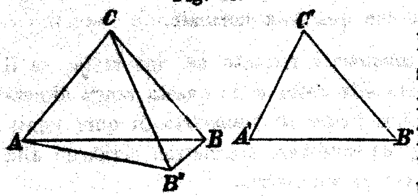
§ 41. Dovendo due triangoli congruenti concordare fra loro per forma e grandezza, ne viene che quegli stessi elementi, dalla cui eguaglianza noi deduciamo la congruenza di due triangoli, determinano in modo assoluto la forma e la grandezza d'un triangolo. *Un triangolo perciò è pienamente determinato: a)* da un lato e due angoli; *b)* da due lati e l'angolo da essi racchiuso; *c)* da due lati e l'angolo opposto al maggiore di questi due lati; *d)* dai tre lati.

Casi speciali di non congruenza dei triangoli.

§ 42. Teorema. *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali, ma disuguali siano gli angoli da essi compresi, anche i terzi* *lati sono disuguali, e precisamente quello sarà maggiore che si oppone al maggiore di quei due angoli* (fig. 23).

Ipotesi: $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ e l'angolo $ACB > A'C'B'$.

Fig. 23.



Asserzione: $AB > A'B'$.

Dimostrazione: Si facciano l'angolo $ACB'' = A'C'B'$ ed il segmento $CB'' = C'B'$, ed ammettiamo, che ciò facendo, il punto B'' cada al di fuori del triangolo ABC. Si guidino ora la AB'' e la BB'' e si avrà $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§ 38) e perciò $AB'' = A'B'$. Essendo poi $BC = B''C$, risulta l'angolo $CB''B = CBB''$, quindi $CB''B > ABB''$ ed ancor più $AB''B > ABB''$; ma allora a tenore del § 33, 4, dovrà essere $AB > AB''$ e perciò anche $AB > A'B'$.

Qui fu supposto che il punto B'' cada esternamente al triangolo ABC, ma esso potrà trovarsi del pari o sul lato AB od all'interno del triangolo ABC. Come procederebbe la dimostrazione in questi due ultimi casi?

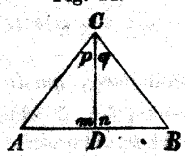
§ 43. Teorema. *Se due triangoli hanno due lati eguali, ma disuguali i terzi lati, anche gli angoli opposti a questi saranno disuguali e precisamente quello sarà maggiore che si opporrà al maggiore di questi due ultimi lati* (fig. 23).

Dimostrazione: Siano $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ ed $AB > A'B'$. Supponendo $ACB = A'C'B'$ dovrebbe essere (giusta il § 38) $AB = A'B'$, il che è contro l'ipotesi; nè ACB potrebbe essere $< A'C'B'$, dacchè si trarrebbe la conseguenza parimenti contraria all'ipotesi, che AB sia minore di $A'B'$ (§ 42); ne risulta quindi $ACB > A'C'B'$.

Applicazioni dei casi di congruenza.

§ 44. Teoremi. 1. *La retta che parte dal vertice d'un triangolo isoscele e va alla metà della sua base, è normale a questa e dimezza l'angolo al vertice.*

Fig. 24.



Ipotesi: $AC = BC$, $AD = BD$ (fig 24).

Conclusione: $CD \perp AB$ e $p = q$.

Dimostrazione: $\triangle ACD \cong BCD$ (§ 40) per cui $m = n$, ovvero $CD \perp AB$, e $p = q$.

2. *La normale condotta dal vertice d'un triangolo isoscele alla sua base, dimezza questa e l'angolo al vertice* (§ 39).

3. *La bisettrice dell'angolo al vertice d'un triangolo isoscele dimezza la base ed è normale alla stessa* (§ 38).

4. *La normale eretta nella metà della base d'un triangolo isoscele passa per il suo vertice.*

Segue dal numero 1, dacchè la retta congiungente il vertice colla metà della base è normale alla stessa, e nel punto di mezzo della base non si può innalzare alla stessa che una sola normale.

§ 45. *Due punti sono simmetrici* rispetto ad una retta, se il segmento che li unisce è normale alla retta e da questa venga dimezzato; la retta stessa poi chiamasi l'*asse di simmetria* di quei punti. Così p. e. i punti A e B della fig. 24 sarebbero simmetrici riguardo alla retta CD che sarebbe il loro asse di simmetria.

Due figure piane sono simmetriche rispetto ad una retta, se ad ogni punto dell'una corrisponde un punto simmetrico dell'altra; tali sarebbero i triangoli ADC e BDC. Due figure piane simmetriche si sovrappongono se vengono rivoltate attorno l'asse di simmetria.

Una figura piana dicesi simmetrica, se a mezzo di una retta (l'asse di simmetria) può essere scissa in due parti simmetriche; una tale figura sarebbe il triangolo ABC.

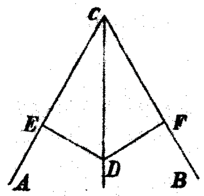
§ 46. 1. *Ogni segmento* è una figura simmetrica; il suo asse di simmetria è la normale eretta nel suo punto di mezzo.

Ogni punto dell'asse di simmetria d'un segmento è equidistante dalle estremità dello stesso e viceversa.

Segue dalla congruenza dei triangoli rettangoli ADC e BDC (fig. 24).

2. *Ogni angolo* è una figura simmetrica che ha per asse di simmetria la bisettrice.

Fig. 25.



Sia (fig. 25) CD l'asse di simmetria dell'angolo ACB, per cui $ACD = BCD$, $DE \perp AC$ e $DF \perp BC$ e risulterà dalla congruenza dei due triangoli rettangoli CED e CFD che:

Ogni punto dell'asse di simmetria d'un angolo è equidistante dai due lati dell'angolo e viceversa.

§ 47. Un *triangolo isoscele* è simmetrico rispetto alla sua altezza che ne è l'asse di simmetria.

In un triangolo isoscele l'asse di simmetria della base, quella dell'angolo al vertice e l'altezza, si confondono in una retta (§ 44).

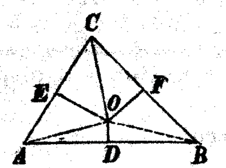
2. *Un triangolo equilatero* è simmetrico rispetto ad ognuna delle sue tre altezze che ne sono altrettanti assi di simmetria.

Ogni altezza d'un triangolo equilatero è tanto l'asse di simmetria d'un lato che d'un angolo.

§ 48. Teoremi.

1. *I tre assi di simmetria dei tre lati di un triangolo si tagliano in un punto equidistante dai tre vertici.*

Fig. 26.

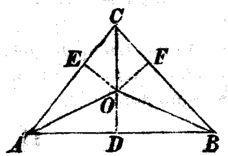


Dimostrazione: Se (fig. 26) gli assi di simmetria DO ed EO dei lati AB ed AC si tagliano nel punto O (§ 24, coroll.), questo, in base al § 46, è equidistante tanto da A e B quanto da A e C; il punto O, essendo quindi equidistante da B e C, deve giacere nell'asse di simmetria del lato BC.

Il punto O cadrà quindi nell'interno, sul perimetro, od all'esterno del triangolo, a seconda che il triangolo sarà acutangolo, rettangolo od ottusangolo.

2. *I tre assi di simmetria dei tre angoli d'un triangolo si tagliano in un punto equidistante dai tre lati.*

Fig. 27.



Dimostrazione: Se (fig. 27) gli assi di simmetria degli angoli BAC ed ABC si tagliano nel punto O (§ 24, 3), questo, a tenore del § 46, 2, è equidistante tanto da AB ed AC, quanto da AB e BC; laonde il punto O, essendo equidistante da AC e BC, deve giacere nell'asse di simmetria dell'angolo ACB.

Scolio. Similmente si dimostra che l'asse di simmetria d'uno degli angoli interni d'un triangolo, e quella degli angoli adiacenti agli altri due, si tagliano in un punto equidistante dai tre lati del triangolo.

3. Teoremi per esercizio.

§ 49. 1. Se da un punto interno d'un triangolo si guidano dei segmenti alle estremità d'un lato, *a*) la somma di questi segmenti è minore della somma degli altri due lati, e *b*) l'angolo formato dagli stessi è maggiore di quello formato dagli altri due lati.

Si prolunghi un segmento sino ad incontrare un lato, e si applichino i §§ 34, 1, e 32.

2. La bisettrice dell'angolo esterno al vertice d'un triangolo isoscele è parallela alla base dello stesso.

3. La retta condotta dal vertice d'un triangolo isoscele parallelamente alla base, dimezza l'angolo esterno.

4. Le altezze abbassate sui lati eguali d'un triangolo isoscele sono eguali.

5. Se in un triangolo due altezze sono eguali, il triangolo è isoscele.

6. Se si uniscono due punti qualsisiano di due rette parallele a mezzo d'un segmento, qualunque altro segmento passante per il suo punto di mezzo sarà dallo stesso dimezzato.

7. Se in un triangolo rettangolo l'uno degli angoli acuti è doppio dell'altro, anche l'ipotenusa avrà una lunghezza doppia del cateto minore.

A lato del triangolo dato si ponga un altro triangolo ad esso congruente in modo che i loro cateti maggiori vengano a combaciare, e ne risulterà un triangolo equilatero.

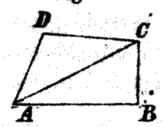
II. Il quadrilatero.

1. Definizioni e teoremi.

§ 50. Una figura piana limitata da quattro segmenti, dicesi *quadrilatero.*

Il segmento AC (fig. 28) che unisce due vertici opposti d'un quadrilatero, chiamasi *diagonale.*

Fig. 28.



Un quadrilatero ha quattro vertici, quattro angoli e due diagonali.

§ 51. Teorema. *La somma di tutti gli angoli d'un quadrilatero è eguale a quattro retti.*

Dimostrazione: Si scomponga (fig. 28) il quadrilatero a mezzo d'una diagonale in due triangoli; la somma degli angoli di ciascuno di questi importa due retti, quindi quella di tutti e due sarà di quattro retti.

§ 52. Rispetto alla reciproca posizione dei loro lati, i quadrilateri si dividono in *trapezoidi, trapezi* e *parallelogrammi.*

Il *trapezoide* è un quadrilatero che non ha verun lato parallelo ad un altro; il *trapezio* non ha che due lati opposti paralleli, mentre il *parallelogrammo* ha tutti i lati a due a due paralleli.

Teoremi sul parallelogrammo.

§ 53. 1. *Gli angoli opposti d'un parallelogrammo sono a due a due eguali.*

La giustezza di questa asserzione emerge immediatamente dal § 25, 1, *a.*

2. *Un quadrilatero è un parallelogrammo se gli angoli opposti sono a due a due eguali.* (Inversione del numero 1).

La dimostrazione si basa sui §§ 51 e 24, 1.

Corollario. Se in un parallelogrammo un angolo è retto ovvero obliquo, retti od obliqui saranno del pari gli altri.

Si distinguono perciò parallelogrammi *rettangoli* ed *obliquangoli.*

§ 54. 1. *I lati opposti d'un parallelogrammo sono a due a due eguali.*

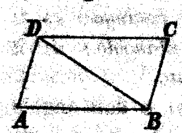


Fig. 29.

Ipotesi: Il quadrilatero $ABCD$ (fig. 29) sia un parallelogrammo, quindi $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Tesi: $AB = DC$, $AD = BC$.

Dimostrazione: Si guidi la diagonale BD e ne risulterà $\triangle ABD \cong CDB$ (§§ 24, 2, e 37), per cui sarà $AB = DC$, $AD = BC$.

Questo teorema suolsi enunciare anche in questa guisa: *Parallele comprese fra parallele sono eguali fra loro.*

2. *Un quadrilatero è un parallelogrammo, se i lati opposti sono a due a due eguali.* (Inversione del teorema 1).

Dimostrazione: Siano nel quadrilatero $ABCD$ (fig. 29) $AB = DC$ ed $AD = BC$. Ne risulta $\triangle ABD \cong CDB$ (§ 40), per cui gli angoli alterni ABD e CDB, come pure gli altri due ADB e CBD saranno eguali; laonde $AB \parallel DC$ ed $AD \parallel BC$.

Corollari. a) *Ogni parallelogrammo viene diviso dalla diagonale in due triangoli congruenti.*

È giusto anche del pari il relativo teorema inverso?

b) *Se due rette sono parallele, tutti i punti dell'una hanno eguale distanza dall'altra.*

Poichè le perpendicolari che segnano le distanze che hanno i punti di una delle rette dall'altra, sono, giusta il § 25, 1, parallele, e quindi, secondo il § 54, 1, anche eguali fra loro.

La distanza costante che ha ogni punto d'una delle due parallele dall'altra, dicesi la *distanza* fra le due parallele.

Se in un parallelogrammo si prende uno dei lati quale *base*, la distanza della stessa dal lato opposto, chiamasi l'*altezza* del parallelogrammo. Per *altezza* d'un trapezio s'intende la distanza fra i due lati paralleli.

3. *Se in un quadrilatero due lati opposti sono eguali e paralleli, il quadrilatero è un parallelogrammo.*

Dimostrazione: Sia nel quadrilatero $ABCD$ (fig. 29) AB eguale e parallelo a DC. Si avrà allora $\triangle ABD \cong CDB$ (§ 38), quindi gli angoli alterni ADB e CBD saranno eguali e perciò $AD \parallel BC$.

§ 55. Se in un parallelogrammo due lati consecutivi sono eguali, tali devono essere anche gli altri. In tal caso il parallelogrammo dicesi *a lati eguali*. Se all'incontro due lati consecutivi non sono eguali, il parallelogrammo dicesi *a lati disuguali*.

Rispetto alla grandezza degli angoli (§ 53) ed alla lunghezza dei lati, si distinguono quattro specie di parallelogrammi: *a*) il parallelogrammo obliquangolo a lati disuguali od il *romboide*; *b*) il parallelogrammo obliquangolo ed equilatero od il *rombo*, detto anche *losanga*; *c*) il parallelogrammo rettangolo a lati disuguali od il *rettangolo*; *d*) il parallelogrammo rettangolo ed equilatero od il *quadrato*.

Il *romboide* è determinato da due lati consecutivi e dall'angolo da essi compreso, il *rombo* da un lato e da un angolo, il *rettangolo* da due lati consecutivi ed il *quadrato* da un lato.

§ 56. 1. *Le diagonali di un parallelogrammo si dimezzano mutuamente.*

2. *Le diagonali d'un rettangolo sono eguali fra loro.*

3. *Le diagonali d'un rombo sono normali l'una all'altra.*

4. *Le diagonali d'un quadrato sono eguali e perpendicolari l'una all'altra.*

Le *dimostrazioni* si basano sulla congruenza dei triangoli.

Di questi quattro teoremi sono veri anche i loro *reciproci*.

Scolî. *a*) Un *rettangolo è simmetrico* rispetto ad ogni retta che dimezza due lati opposti.

b) Il *rombo è simmetrico* rispetto ad ogni diagonale.

c) Il *quadrato è simmetrico* tanto rispetto ad ogni retta che dimezza due lati opposti, quanto rispetto ad ogni diagonale; esso ha quattro assi di simmetria.

Teoremi sul trapezio.

§ 57. 1. *Il segmento che unisce i mezzi dei due lati concorrenti d'un trapezio, è:* a) *parallelo agli altri due lati, ed* b) *eguale alla loro semisomma.*

Dimostrazione: Sieno (fig 30) $AB \parallel DC$, $AM = MD$ e $BN = NC$.

a) Per il punto M conduciamo la EF parallela a BC e prolunghiamo la CD sino in F. Sarà allora $\triangle AEM \cong DFM$, per cui $EM = MF$. Essendo $EF = BC$ (§ 54, 1.) sarà del pari $\frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} BC$, ovvero $EM = BN$; laonde $BNME$ è un parallelogrammo (§ 54, 3), dunque $MN \parallel EB$.

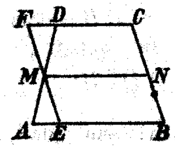


Fig. 30.

b) Dalla congruenza dei due triangoli AEM e DFM risulta $AE = DF$. Ora si ha $MN = BE = AB - AE$ e del pari $MN = CF = CD + DF$ per cui sarà $2MN = AB + CD$ ovvero $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

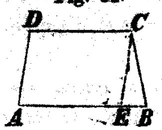
Il segmento MN dicesi la *mediana* del trapezio.

2. *Se per il punto di mezzo d'uno dei lati concorrenti d'un trapezio si conduce una parallela ai due lati paralleli, l'altro lato concorrente del trapezio viene con ciò del pari dimezzato.*

Dimostrazione: Sieno (fig. 30) $AB \parallel DC$, $AM = MD$ e $MN \parallel AB \parallel DC$. Si conduca per M la $EF \parallel BC$ e si prolunghi la CD sino in F. I due triangoli AEM e DFM saranno congruenti, per cui si avrà $EM = MF$, ed essendo $EM = BN$ e $MF = NC$, anche $BN = NC$.

3. *Un trapezio in cui gli angoli adiacenti ad un lato parallelo sono eguali, ha i lati concorrenti del pari eguali.*

Fig. 31.



Dimostrazione: Siano (fig. 31) $AB \parallel DC$ ed $A = B$. Si guidi la $CE \parallel DA$ e saranno $EC = AD$ e l'angolo $CEB = A = B$, per cui nel $\triangle BEC$ risulterà $EC = BC$ (§ 33, 3) e quindi anche $AD = BC$.

Un trapezio in cui i lati concorrenti sono eguali, dicesi *trapezio isoscele* od *antiparallelogrammo.*

4. Inversione: *In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascun lato parallelo sono eguali.*

Dimostrazione: Sieno (fig. 31) $AB \parallel DC$ ed $AD = BC$. Si guidi la $CE \parallel DA$ e sarà $EC = AD = BC$ per cui nel $\triangle BEC$ risulterà l'angolo $CEB = B$; essendo poi $CEB = A$ ne viene che eguali debbano essere del pari gli angoli A e B, per cui si avrà $A + D = B + C = 2R$ e perciò anche $D = C$.

5. *In un trapezio isoscele il segmento che unisce i punti medî dei due lati paralleli è normale a questi.*

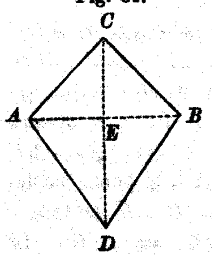
Questo teorema si dimostra a mezzo della sovrapposizione.

Scolio. *Il trapezio isoscele è una figura simmetrica;* il suo asse di simmetria passa per i punti di mezzo dei lati paralleli.

Il deltoide.

§ 58. Un quadrilatero che abbia due coppie di lati consecutivi eguali, chiamasi *deltoide.*

Fig. 32.



Il quadrilatero $ADBC$ (fig. 32) sarà un deltoide, qualora siano $AC = BC$ ed $AD = BD$. Esso consta di due triangoli isosceli la cui base comune è la diagonale AB. Ne deriva perciò che:

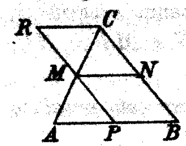
1. *Le diagonali d'un deltoide sono normali fra loro.*

2. *Il deltoide è una figura simmetrica;* il suo asse di simmetria è la diagonale che unisce i vertici dei lati eguali.

Teoremi sulle parallele guidate nel triangolo.

§ 59. 1. *Il segmento che unisce i punti di mezzo di due lati d'un triangolo, è: a) parallelo al terzo lato, e b) eguale alla metà di questo* (fig. 33).

Fig. 33.



Dimostrazione: Sieno $AM = MC$ e $BN = NC$.

a) Si guidino per il punto M la $PR \parallel BC$ e per C la $CR \parallel BA$ e sarà $\triangle AMP \cong CMR$, quindi $MP = MR$. Essendo $PR = BC$ (§ 54, 1), anche $\frac{1}{2} PR$ sarà $= \frac{1}{2} BC$, cioè $PM = BN$; $BNMP$ è quindi un parallelogrammo (§ 54, 3) laonde $MN \parallel PB$.

b) Essendo $MN \parallel AB$, sarà $\triangle CMN \cong MAP$ e perciò $MN = AP$; ma MN è anche $= PB$, quindi $2MN = AP + PB = AB$ e perciò $MN = \frac{1}{2} AB$.

2. *Se dal punto di mezzo di un lato d'un triangolo si guida una parallela ad un secondo lato, questa dimezza del pari anche il terzo lato* (fig. 33).

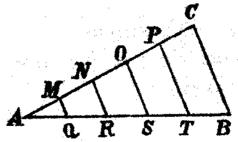
Dimostrazione: Siano $AM = MC$ e $MN \parallel AB$.

Si conduca $MP \parallel CB$ e ne risulterà $\triangle AMP \cong MCN$ e perciò anche $PM = NC$; ma PM è $= BN$, dunque anche $BN = NC$.

I due precedenti teoremi si possono derivare direttamente da quegli analoghi sul trapezio del § 57, 1 e 2, considerando il triangolo quale un trapezio il cui lato parallelo minore siasi ridotto a zero.

3. *Se si divide un lato d'un triangolo in parti eguali e dai punti di divisione si conducono delle parallele ad un secondo lato, anche il terzo lato viene diviso nello stesso numero di parti eguali* (fig. 34).

Fig. 34.



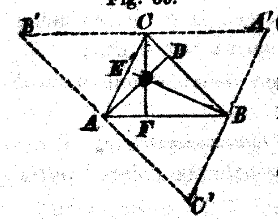
Ipotesi: $AM = MN = NO = OP = PC$ e $MQ \parallel NR \parallel OS \parallel PT \parallel CB$.

Tesi: $AQ = QR = RS = ST = TB$.

Dimostrazione: $AQ = QR$ (giusta il numero 2) e $QR = RS = ST = TB$ (dietro il § 57, 2).

§ 60. Teorema. *Le tre altezze d'un triangolo passano per lo stesso punto.*

Fig. 35.



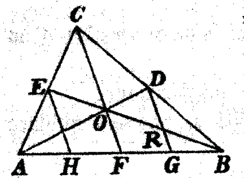
Dimostrazione: Siano nel triangolo ABC (fig. 35) $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ e $CF \perp AB$.

Si tirino per i punti A, B, C delle parallele ai lati BC, AC ed AB e si otterrà il $\triangle A'B'C'$. Essendo $AB' = AC' = BC$ (§ 54, 1), ne viene che A è il punto medio del lato $B'C'$. Similmente B e C saranno i punti medî dei lati $A'C'$ ed $A'B'$. Le altezze AD, BE e CF del triangolo ABC sono quindi gli assi di simmetria dei lati del triangolo $A'B'C'$ e come tali debbono (a seconda del § 48, 1) tagliarsi nello stesso punto.

§ 61. Teorema. *Le tre mediane d'un triangolo,* vale a dire i segmenti guidati dai tre vertici ai punti di mezzo dei loro lati opposti, *si tagliano tutte in un punto che divide ciascuna di esse in due parti, delle quali quella al vertice è doppia dell' altra.*

Dimostrazione: Siano (§ 36) D, E ed F i punti medî dei lati BC, AC ed AB; le mediane BE e CF si taglino nel punto O. Si conducano le DG ed EH parallele a CF e queste, giusta il § 59, 2, dimezzeranno la BF e la AF in modo che sarà $BG = GF = FH$, per cui (secondo il § 59, 3) si avrà $BR = RO = OE$ e perciò anche $BO = 2\,OE$. La mediana BE viene quindi tagliata da un altra CF nel punto O ed in guisa che il suo segmento al vertice sia doppio dell' altro. Se si guida ora la terza mediana AD, anche questa dovrà tagliare la BE in modo che ne risultino gli stessi segmenti; ma ciò non è possibile se non quando passi per lo stesso punto O.

Fig. 36.



Il punto O d' incontro delle tre mediane d' un triangolo è il *centro di gravità* dello stesso.

2. Teoremi per esercizio.

§ 62. 1. In ogni quadrilatero la somma delle diagonali è maggiore di quella di due lati opposti.

2. Qualunque segmento condotto per il punto d' intersezione delle diagonali d' un parallelogrammo viene da quello stesso punto dimezzato.

3. Le diagonali d' un rombo dimezzano gli angoli per i vertici dei quali esse passano.

4. Il punto d' intersezione delle diagonali d' un rombo è equidistante dai suoi quattro lati.

5. In un trapezio isoscele le diagonali sono eguali fra loro.

6. Se in un trapezio le diagonali sono eguali, il trapezio è isoscele.

7. I punti di mezzo dei lati d' un parallelogrammo costituiscono i vertici d' un altro parallelogrammo; se il primo è un rombo, un rettangolo od un quadrato, il secondo sarà un rettangolo, un rombo od un quadrato.

8. I centri dei lati d' un trapezio isoscele formano i vertici d' un rombo.

9. Le bisettrici dei quattro angoli d' un parallelogrammo (o degli angoli esterni dello stesso) rinchiudono un rettangolo.

10. Le normali guidate da un punto della base ai cruri d' un triangolo isoscele, hanno una lunghezza complessiva eguale all' altezza del triangolo abbassata su uno dei due cruri.

III. Il poligono.

1. Definizioni e teoremi.

§ 63. Una figura piana limitata da più segmenti dicesi *poligono.*

Un poligono ha tanti lati quanti angoli ed altrettanti sono i suoi vertici. Un poligono dicesi *concavo,* se concavi sono del pari tutti i suoi angoli. Soltanto di tali poligoni si terrà qui parola.

Rispetto al *numero dei lati* si distinguono poligoni di tre, di quattro, di cinque... di n lati, ovvero *triangoli, quadrilateri, pentagoni... poligoni di* n *lati.*

§ 64. Il segmento che unisce due vertici non successivi d' un poligono chiamasi *diagonale.*

Sarà ben facile cosa il dedurre le seguenti proposizioni:

1. Da ogni vertice d' un poligono di n lati si possono guidare $n-3$ diagonali.

2. Il numero di tutte le diagonali possibili in un poligono di n lati è eguale ad $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Le diagonali che partono tutte dallo stesso vertice, scompongono un poligono di n lati in $n-2$ triangoli.

§ 65. Teorema. *La somma degli angoli d' un poligono è eguale a tante volte 2 retti, quanto è il numero dei lati diminuito di 2.*

Dimostrazione: Decomponendo un poligono di n lati a mezzo di diagonali che partono dallo stesso vertice, si hanno $n-2$ triangoli che hanno $(n-2)\,2R$ quale somma totale dei loro angoli. Tale somma però esprime eziandio quella degli angoli del poligono di n lati.

La dimostrazione potrebbesi fare del pari, guidando da un punto interno del poligono dei segmenti a tutti i vertici dello stesso.

§ 66. Due poligoni sono *congruenti,* quando tutti i lati e gli angoli sono a due a due eguali e disposti nel medesimo ordine.

Teoremi. 1. *Due poligoni sono congruenti, se scomposti a mezzo di diagonali in triangoli, questi saranno rispettivamente congruenti e disposti nel medesimo ordine.*

Dimostrazione: Sovrapponendo i due poligoni l'uno sull'altro in modo che combacino rispettivamente i triangoli egualmente disposti, anche i vertici dei due poligoni coincideranno, per cui i poligoni saranno congruenti.

2. **Inversione** *Se dai vertici di due angoli rispettivamente eguali di due poligoni congruenti si conducono le diagonali, queste scompongono i due poligoni in triangoli che a due a due saranno congruenti.*

Dimostrazione: Sovrapponendo l'uno sull'altro i due poligoni congruenti in modo che i corrispondenti vertici coincidono, anche le diagonali a due a due si copriranno e del pari quindi i relativi triangoli.

§ 67. Teorema. *Due poligoni sono congruenti se in essi sono a due a due eguali:* a) $n-2$ *lati successivi e gli* $n-1$ *angoli a questi adiacenti;* b) $n-1$ *lati successivi e gli* $n-2$ *angoli da essi compresi;* c) n *lati ed* $n-3$ *angoli successivi.*

Dimostrazione: Si scompongano i due poligoni a mezzo di diagonali corrispondenti in $n-2$ triangoli; questi saranno a due a due congruenti, e precisamente $n-3$ coppie in tutti e tre i casi suaccennati, e ciò per il § 38, l'ultima coppia, però, nel primo caso per il § 37, nel secondo per il § 38 e nel terzo per il § 40; quindi i due poligoni, a tenore del § 66, 1, dovranno essere congruenti fra loro.

Corollario. Per la determinazione d'un poligono si richieggono in generale $2n-3$ elementi successivi fra di loro indipendenti, purchè fra i tre elementi che mancano vi sia almeno un angolo.

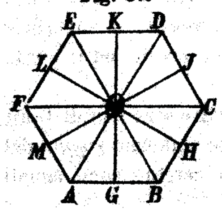
2. Poligoni regolari.

§ 68. Un poligono dicesi *regolare* quando ha i lati e gli angoli eguali. Fra i triangoli, l'*equilatero* è un poligono regolare, come il *quadrato* lo è fra i quadrilateri.

L'angolo di un poligono regolare è eguale a $2R - \frac{4R}{n}$ (§ 65).

Teorema. *Gli assi di simmetria di due lati consecutivi d'un poligono regolare si tagliano in un punto equidistante,* a) *da tutti i vertici, e* b) *da tutti i lati del poligono.*

Fig. 37.



Dimostrazione: Sia $ABCDEF$ (fig. 37) un poligono regolare, GO l'asse di simmetria del lato AB, ed HO quello del lato BC. Che GO ed HO si taglino in un punto O, emerge dal corollario del § 24. Guidando ora da questo punto tanto i segmenti a tutti i vertici, quanto le normali a tutti i lati, si ha:

$\triangle AOG \cong BOG \cong BOH \cong COH \ldots,$

perciò sarà $OA = OB = OC = OD \ldots$

e $OG = OH = OI = OK \ldots$

Il punto O è il *centro* del poligono regolare.

Corollari. *a*) Gli assi di simmetria dei lati e degli angoli d'un poligono regolare si tagliano nel centro del poligono.

b) I segmenti che uniscono il centro d'un poligono regolare con tutti i suoi vertici, dividono il poligono in tanti triangoli congruenti isosceli quanti sono i suoi lati.

Tali triangoli presi singolarmente o più assieme formano un *settore poligonale*, mentre la relativa parte del perimetro del poligono forma la rispettiva sua *base*.

Si tirino dei segmenti dal centro d'un poligono regolare di n lati a tutti i suoi vertici; che valore avranno *a*) l'angolo al vertice, e *b*) l'angolo alla base di ciascuno dei triangoli isosceli così formatisi?

Si calcolino tali angoli:

a) per il triangolo equilatero,	*b*) per il quadrato,
c) per il pentagono regolare,	*d*) per l'esagono regolare,
e) per il decagono regolare,	*f*) per il dodecagono regolare.

§ 69. 1. *L'asse di simmetria di un lato o di un angolo qualunque d'un poligono regolare riesce asse di simmetria del poligono stesso.*

Della verità di questa asserzione ognuno si convince, rivoltando le due parti della figura che ne risultano attorno il relativo asse di simmetria.

2. *Un poligono regolare di* n *lati ha* n *assi di simmetria.*

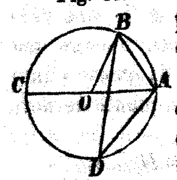
Se n è un numero pari, ogni due lati ed ogni due angoli opposti hanno lo stesso asse di simmetria, se n poi è un numero dispari, l'asse di simmetria d'ogni lato si confonde coll'asse di simmetria d'un angolo.

IV. Il cerchio.

1. Nozioni generali sul cerchio.

§ 70. Se un segmento OA (fig. 38) ruota in un piano attorno ad una delle sue estremità O fino a tanto che ritorna nella sua posizione primitiva, l'altra estremità dello stesso segmento descrive una linea curva detta *linea circolare* o *circonferenza;* la superficie piana da essa limitata dicesi *circolo* o *cerchio*, ed il punto O, *centro* del cerchio.

Fig. 38.



Tutti i punti d'una linea circolare sono equidistanti dal centro. Questa distanza costante chiamasi *raggio* del cerchio. Tutti i raggi dello stesso cerchio sono eguali fra loro.

Ogni parte della linea circolare dicesi *arco*, l'intera linea circolare invece, *periferia* o *circonferenza* del cerchio.

Un segmento AB che unisce due punti della circonferenza, chiamasi *corda* o *sottesa*. Se questa passa per il centro, viene detta *diametro*. Ogni diametro è doppio del raggio.

Un angolo AOB il cui vertice si trova nel centro di un cerchio ed i cui lati sono raggi dello stesso chiamasi *angolo al centro*, mentre *angolo alla circonferenza* od *angolo inscritto al cerchio* è quello il cui vertice trovasi sulla circonferenza di un cerchio ed ha per lati corde dello stesso.

Si chiama *segmento* di cerchio la porzione del piano compresa tra un arco e la sua corda; *settore*, la parte del cerchio compresa tra due raggi e l'arco.

Ad ogni corda corrispondono due angoli al centro, due archi, due settori e due segmenti, che in generale sono disuguali. Però, se non viene espressamente stabilito altrimenti, saranno da considerarsi soltanto l'angolo al centro concavo, l'arco minore della semicirconferenza ed i settori e segmenti minori di mezzo cerchio.

§ 71. *La posizione d'un punto rispetto ad un cerchio* è dipendente dalla sua *distanza dal centro* dello stesso.

Un punto è situato all'esterno, sulla periferia o nell'interno d'un cerchio, a seconda che la sua distanza dal centro è maggiore, eguale o minore del raggio.

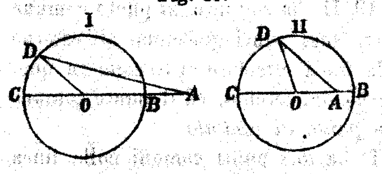
Tali relazioni, che si possono dedurre immediatamente dalla definizione del cerchio data al § 70, sono vere anche nelle loro *inversioni*.

Corollari. *a*) Due cerchi di raggio eguale sono congruenti.

b) Il cerchio è una figura *simmetrica*; ogni diametro dello stesso è un suo asse di simmetria.

§ 72. Teorema. *Di tutti i segmenti che da un punto si possono condurre alla periferia d'un cerchio,* a) *quello è maggiore nel quale giace il centro del cerchio, mentre* b) *il minore è quello il cui prolungamento passa per il centro.*

Fig. 39.



Dimostrazione: Dal punto A dato (fig. 39) si conducano per il centro O del cerchio una retta che tagli la sua periferia nei punti B e C, ed un segmento AD qualunque che vada alla circonferenza dello stesso. Sarà allora:

a) $AD < DO + AO$ ovvero $AD < AC$;

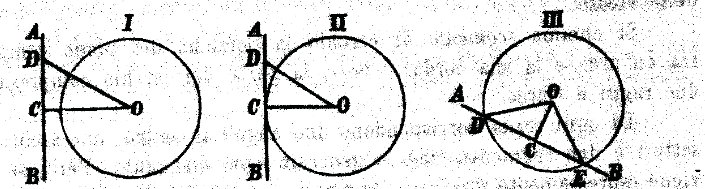
b) $AD > AO - DO$ (in I) e $AD > DO - AO$ (in II), ovvero $AD > AB$.

2. Rette ed angoli in relazione al cerchio.

§ 73. *La posizione d'una retta rispetto ad un cerchio dipende dalla sua distanza dal centro dello stesso.*

Teorema. *Una retta non ha verun punto comune con un cerchio, ovvero ne ha uno o due, a seconda che la sua distanza dal centro è maggiore, eguale o minore del raggio del cerchio.*

Fig. 40.



Dimostrazione: *a*) Se (fig. 40, I) la normale OC abbassata dal centro sulla retta AB è maggiore del raggio, il suo piede C trovasi all'esterno del cerchio, per cui tanto più lo sarà un altro punto D della retta AB, essendo per ogni punto $OD > OC$.

b) Se (fig. 40, II) la normale OC abbassata da O sulla AB è eguale al raggio del cerchio, il suo piede C deve trovarsi sulla periferia di questo, mentre qualunque altro punto D della retta AB dovrà giacere all'esterno del cerchio, essendo per ogni punto $OD > OC$.

c) Se finalmente (fig. 40, III) la normale OC abbassata da O sulla retta AB è minore del raggio del cerchio, il suo piede dovrà cadere all'interno di questo e la retta illimitata AB per uscire dal cerchio, che è una figura chiusa, dovrà tagliare la periferia dello stesso in due punti D ed E, situati alle due parti del punto C, che congiunti con O ci daranno $OD = OE$, perchè raggi del medesimo cerchio. Un terzo punto non potrebbe essere comune alla retta ed alla linea circolare, dacchè dal punto O non si possono condurre più di due segmenti eguali alla retta AB (§ 35, coroll.).

§ 74. Se una retta AB (fig. 40, II) ha soltanto *un* punto comune colla linea circolare, e tutti gli altri suoi punti giacciono all'esterno del cerchio, si dice che la retta e la linea circolare si *toccano* in quel punto. La retta stessa chiamasi *tangente* del cerchio, ed il punto comune alla tangente ed alla linea circolare *punto di contatto*.

Se una retta AB (fig. 40, III) ha *due* punti comuni colla linea circolare, si dice che la retta *taglia* la circonferenza del cerchio. La retta stessa chiamasi *secante*, mentre *corda* (§ 70) dicesi quella parte DE della stessa che trovasi fra i due punti d'intersezione.

Corde del cerchio.

§ 75. Teoremi. 1. *Il segmento tracciato dal centro di un cerchio alla metà d'una sua corda è normale a questa.*

2. *La normale condotta dal centro d'un cerchio ad una corda, dimezza la corda stessa.*

3. *La normale condotta ad una corda nel suo punto di mezzo, passa per il centro del cerchio; ovvero: l'asse di simmetria d'una corda passa per il centro del cerchio.*

Questi tre teoremi risultano direttamente dalle proposizioni 1, 2 e 4 del § 44.

§ 76. Teorema. *Per tre punti* A, B *e* C, *non situati in linea retta, non può passare che una sola circonferenza.*

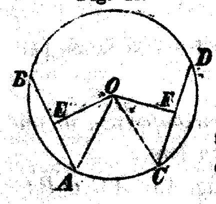
Dimostrazione: Il centro della circonferenza passante per i punti A e B giace nell'asse di simmetria del segmento AB (§ 75, 3); il centro della circonferenza passante per A e C trovasi del pari nell'asse di simmetria del segmento AC; il centro dunque d'una circonferenza passante per tutti e tre i punti, sarà il punto di concorso O dei due assi di simmetria (§ 24, coroll.); il relativo raggio sarà $AO = OB = OC$.

Siccome i due assi di simmetria non possono tagliarsi che in un sol punto O, ne viene che per quei tre punti A, B, C non possa passare che *una unica* circonferenza.

§ 77. Teoremi.

1. *Corde eguali dello stesso cerchio sono egualmente distanti dal centro.*
2. *Se due corde d'un cerchio sono disuguali, la maggiore ha la minor distanza dal centro.*
3. *Due corde equidistanti dal centro d'un cerchio sono eguali.*
4. *Di due corde d'un cerchio, quella è minore che ha la maggiore distanza dal centro.*

Fig. 41.

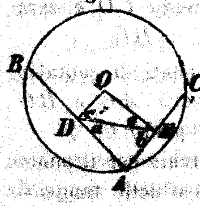


1. Dimostrazione: Sia (fig. 41) $AB = CD$, $OE \perp AB$ ed $OF \perp CD$. Si conducano OA ed OC e sarà $\triangle AEO \cong CFO$ per cui $OE = OF$.

2. Dimostrazione: Sia (fig. 42) $AB > AC$, $OD \perp AB$ ed $OE \perp AC$. Guidando la DE si avrà nel triangolo ADE angolo $b > a$ (§ 33, 2) e perciò $d < c$ e quindi $OD < OE$.

3. Dimostrazione: Sia (fig. 41) $OE = OF$. Si avrà $\triangle AEO \cong CFO$, quindi $AE = CF$ e per conseguenza $AB = CD$.

Fig. 42.



4. Dimostrazione: Sia (fig. 42) $OD < OE$. Supposto $AB \leqq AC$ ne verrebbe per conseguenza, a tenore dei numeri 1 e 2, che OD è eguale o maggiore di OE, ciò che è contro la fatta ipotesi.

Corollario. Il *diametro* è la massima corda del cerchio.

§ 78. Teoremi. 1. *Nello stesso cerchio, ad angoli al centro eguali corrispondono corde ed archi eguali.*

2. *Nello stesso cerchio, a corde eguali corrispondono angoli al centro ed archi eguali.*

3. *Nello stesso cerchio, ad archi eguali corrispondono corde ed angoli al centro eguali.*

Le *dimostrazioni* di questi teoremi si fanno a mezzo della sovrapposizione.

§ 79. La circonferenza del cerchio si divide in 360 parti eguali, dette *gradi* (gradi d'arco). Il grado (°) si divide in 60 *minuti d'arco* ('), ed il minuto d'arco in 60 *secondi d'arco* (''). Siccome poi a questi gradi d'arco corrispondono altrettanti angoli al centro fra loro eguali (§ 78, 3), così si suole esprimere la grandezza d'un angolo al centro a mezzo dei gradi, minuti e secondi del corrispondente suo arco, dicendosi:

L'arco è la misura del relativo angolo al centro.

Tangenti del cerchio.

§ 80. Teoremi. 1. *La normale ad un raggio eretta nella sua estremità è una tangente del cerchio* (segue dal § 73, *b*).

2. *Il raggio d'un cerchio che va al punto di contatto d'una tangente è normale alla tangente stessa.*

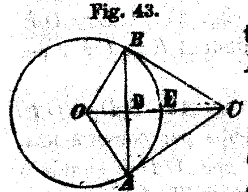
3. *La normale ad una tangente guidata dal centro d'un cerchio passa per il punto di contatto.*

4. *La normale ad una tangente eretta nel punto di contatto passa per il centro del cerchio.*

Le *dimostrazioni* per le inversioni dei numeri 2, 3 e 4 si fanno per via indiretta.

§ 81. Teorema. *Le tangenti condotte alla circonferenza di un cerchio da un punto fuori dello stesso sono eguali fra loro.*

Fig. 43.



Dimostrazione: Siano (fig. 43) AC e BC tangenti del cerchio O, quindi $AC \perp OA$ e $BC \perp OB$. Si guidi il segmento CO e sarà $\triangle OAC \cong OBC$, dunque $AC = BC$.

La corda AB fra i due punti di contatto della circonferenza e le tangenti AC e BC chiamasi *corda tangenziale* del punto C.

Corollari. *a*) La retta condotta al centro d'un cerchio per il punto d'incontro di due tangenti, dimezza l'angolo racchiuso delle tangenti e quello racchiuso dai due raggi, dimezza l'arco e la corda tangenziale, ed insiste perpendicolarmente su questa corda.

b) L'angolo formato da due tangenti d'una circonferenza, è il supplemento dell'angolo formato dai raggi passanti per i due punti di contatto.

c) Il punto d'incontro di due tangenti d'una periferia trovasi sul prolungamento del raggio normale alla corda di contatto.

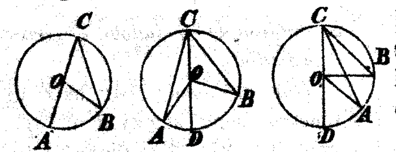
Angoli alla periferia.

§ 82. Teorema. *L'angolo alla periferia è eguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.*

Per *dimostrare* questa proposizione si distinguono tre casi, a seconda che il centro del cerchio trovasi sur un lato (fig. 44, I) dell'angolo alla periferia, nella porzione del piano compresa fra i due lati dell'angolo (fig. 44, II) od al di fuori della stessa (fig. 44, III).

Fig. 44.

I II III



Nel primo caso sarà $AOB = B + C$, per cui, essendo $B = C$, ne deriva $AOB = 2C$ ovvero $C = \frac{1}{2} AOB$.

Nel secondo e terzo caso, condotto per C il diametro, si procederà due volte come nel primo, e sommati, rispettivamente sottratti, i relativi angoli, si perverrà alla dimostrazione della tesi prefissasi.

Corollari. a) *Nel medesimo cerchio, gli angoli alla periferia sottesi dallo stesso arco sono eguali fra loro*, dacchè ognuno di essi è eguale alla metà dell'angolo al centro sotteso dallo stesso arco.

b) *Nello stesso cerchio, ad angoli inscritti eguali, corrispondono archi eguali.* (Inversione di *a*).

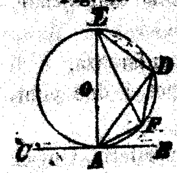
c) *Due angoli alla periferia sottesi dallo stesso arco e giacenti in due segmenti opposti, sono l'uno all'altro supplementari.* Infatti la somma dei loro angoli al centro è eguale a quattro retti.

§ 83. Un angolo alla periferia, passante per le estremità d'un diametro, chiamasi *angolo nel semicerchio*.

Teorema. *Ogni angolo nel semicerchio* è *retto*, dacchè l'angolo al centro sotteso dallo stesso arco è piatto.

§ 84. Teorema. *L'angolo formato da una tangente d'una circonferenza con una corda passante per il punto di contatto, è eguale all'angolo iscritto nel segmento opposto e sotteso dalla stessa corda.*

Fig. 45.



Dimostrazione: Sia BC la tangente della circonferenza nel punto A. Si conduca il diametro AE e si avrà: *a*) $BAD + DAE = R$, $AED + DAE = R$ (§ 83) e perciò anche $BAD = AED$; *b*) di più sarà $CAD = R + EAD$ ed $AFD = R + EFD$ ovvero $AFD = R + EAD$ (§ 82, *a*) e quindi $CAD = AFD$.

3. Poligoni iscritti e circoscritti al cerchio.

§ 85. Un poligono, i cui vertici trovansi sulla circonferenza di un cerchio, ed i cui lati sono corde della stessa, *è iscritto al cerchio.* Reciprocamente il cerchio *è circoscritto al poligono.*

Un poligono *è circoscritto ad un cerchio* quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. Reciprocamente il cerchio *è iscritto nel poligono.*

§ 86. Teoremi.

1. *Qualunque triangolo è iscrittibile.*

Dimostrazione: Gli assi di simmetria dei lati d'un triangolo (fig. 26) si tagliano in un punto O equidistante di OA dai tre vertici (§ 48, 1). Laonde la circonferenza descritta col raggio AO dal punto O come centro, dovrà passare per tutti i vertici del triangolo.

2. *Qualunque triangolo è circoscrittibile.*

Dimostrazione: Gli assi di simmetria degli angoli d'un triangolo (fig. 27) si tagliano in un punto equidistante di OD dai tre lati (§ 48, 2). Laonde la circonferenza descritta col raggio OD dal punto O come centro, dovrà essere tangenziale a tutti e tre i lati del triangolo.

Scolio. Dallo scolio del § 43, 2, emerge che oltre alla circonferenza notata al numero 2, ve ne sono altre tre tangenziali ad un lato ed al prolungamento degli altri due lati d'un triangolo. Queste tre circonferenze sono le *tre circonferenze tangenziali esterne* del triangolo, mentre la prima è la sua *circonferenza tangenziale interna.*

§ 87. Teoremi.

1. *In qualunque quadrilatero iscritto in un cerchio, gli angoli opposti sono supplementari.*

Segue dal § 82, *c*.

2. *In qualunque quadrilatero circoscritto ad un cerchio, le somme di due lati opposti sono eguali.*

Segue dal § 81.

§ 88. Inversioni.

1. *Se gli angoli opposti di un quadrilatero sono supplementari, il quadrilatero è iscrittibile.*

2. *Un quadrilatero è circoscrittibile quando le somme dei lati opposti sono eguali.*

Dimostrazione indiretta: Se la circonferenza passante per tre di quei vertici A, B, C non passasse del pari per il quarto D, essa dovrebbe tagliare in un punto il lato CD ovvero il prolungamento dello stesso. Unendo ora questo punto con A si otterrebbe un quadrilatero iscritto, e ne risulterebbe che un angolo esterno d'un triangolo sarebbe eguale ad uno suo interno opposto.

Dimostrazione indiretta: Se la circonferenza che è tangente a tre lati del quadrilatero non lo fosse del pari al quarto, si potrebbe da un' estremità di questo quarto lato condurre una tangente al cerchio per cui si otterrebbe un quadrilatero circoscritto, e ne risulterebbe che un lato d'un triangolo sarebbe eguale alla differenza degli altri suoi due lati.

§ 89. Teorema. 1. *Ad ogni poligono regolare si può circoscrivere ed iscrivere una circonferenza.*

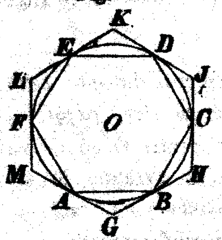
La *dimostrazione* è contenuta nel § 68.

La distanza del centro d'un poligono regolare dai suoi vertici è il raggio della circonferenza circoscritta, mentre la distanza del centro dai lati del poligono, ovvero l'*apotema*, è il raggio della circonferenza iscritta al poligono.

2. *Se una circonferenza è divisa in* n *parti eguali,* a) *le corde guidate fra ogni due successivi punti di divisione formano un poligono regolare iscritto di* n *lati, mentre* b) *le tangenti condotte per ogni due punti di divisione racchiudono un poligono regolare circoscritto dello stesso numero di lati.*

Dimostrazione: Sia (fig. 46) arco $AB = BC = CD = \ldots$

Fig. 46.



a) Se si conducono le corde $AB, BC, CD \ldots$, il poligono $ABCD \ldots$ che ne risulta, avendo i lati AB, BC, $CD \ldots$ e gli angoli A, B, C, $D \ldots$ eguali (§§ 78, 3 e 82, *a*), sarà regolare.

b) Se per i punti A, B, C, $D \ldots$ si guidano delle tangenti alla periferia e queste si tagliano nei punti $G, H, J, K \ldots$, i triangoli $AGB, BHC, CJD \ldots$ che ne risultano, saranno congruenti ed isosceli, e ciò per l'eguaglianza dei lati AB, BC, $CD \ldots$ e degli angoli a loro adiacenti (§ 84), per cui anche la somma di ogni due lati sarà eguale, ovvero si avrà $GH = HJ = JK = \ldots$ Dalla congruenza degli stessi triangoli emerge eziandio l'eguaglianza degli angoli G, H, $J \ldots$; laonde il poligono $GHJK \ldots$ è regolare.

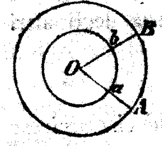
§ 90. *Il lato dell' esagono regolare iscritto ad un cerchio è eguale al raggio dello stesso cerchio.*

Dimostrazione: Guidando dal centro dei segmenti ai vertici dell'esagono, i triangoli che ne risultano sono equilateri, dacchè ogni loro angolo è di 60°.

4. Reciproca posizione di due circonferenze.

§ 91. Due circonferenze, come quelle della fig. 47, che hanno lo stesso centro, diconsi *concentriche.*

Fig. 47.



La superficie compresa fra due circonferenze concentriche, dicesi *anello circolare* o *corona circolare*, una parte dello stesso, come $aABb$, dicesi *settore anulare*, e la differenza aA dei due raggi, la *larghezza* dell'anello o del settore anulare.

Due archi di cerchio o due settori circolari che corrispondono agli stessi angoli al centro, diconsi *omologhi;* tali sarebbero gli archi ab ed AB, i settori aOb ed AOB.

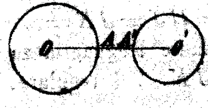
§ 92. Due circonferenze che non hanno un centro comune, diconsi *eccentriche;* la retta che unisce i loro centri chiamasi l'*asse dei centri* delle due circonferenze. Due circonferenze eccentriche possono avere uno o due punti comuni o non averne veruno affatto. Non potrebbero aver tre punti in comune, dacchè in tal caso dovrebbero coprirsi (§ 76).

Due circonferenze sono *tangenti* se hanno *un* punto comune, e precisamente tangenti *esternamente*, quando l'una non giaccia entro dell'altra, *tangenti internamente*, quando l'una trovasi entro all'altra. Due *circonferenze* sono *secanti* quando hanno *due* punti comuni. La superficie comune a due cerchi secanti, chiamasi *lente* o *biangolo*, le altre non comuni, *lunule.*

§ 93. *La reciproca posizione di due circonferenze dipende dalla lunghezza del loro asse dei centri e dalla lunghezza dei loro raggi.*

Sieno R e r i raggi di due circonferenze coi centri O ed O' ed $OO' = c$ il loro asse dei centri. Supposto $R > r$, si avranno le seguenti relazioni risguardanti la reciproca loro posizione.

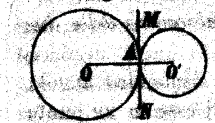
Fig. 48.



1. *Per* $c > R + r$ *le due circonferenze giacciono l'una del tutto all'infuori dell'altra* (fig. 48).

Dimostrazione: Da $c > R + r$ segue $c - r > R$ ossia $OA' > R$. Il punto A', e quindi tanto più qualunque altro della circonferenza O', giaceranno al di fuori della circonferenza O, dacchè le loro distanze dal punto O sono maggiori di OA (§ 72, *b*).

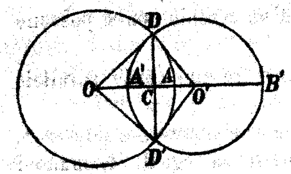
Fig. 49.



2. *Per* c = R + r *le due circonferenze sono tangenti esternamente* (fig. 49).

Dimostrazione: Se la circonferenza O' taglia l'asse dei centri in A, se quindi sarà $O'A = r$, dovrà essere del pari $OA = OO' - O'A = R + r - r = R$; il punto A è quindi comune a tutte le due circonferenze. Qualunque altro punto della circonferenza O' giacerebbe al di fuori della circonferenza O, dacchè, stante il § 72, *b*, la sua distanza dal punto O sarebbe maggiore di OA.

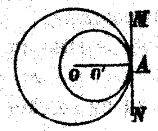
Fig. 50.



3. *Per* R + r > c > R − r, *le due circonferenze si tagliano in due punti* (fig. 50).

Dimostrazione: Tagli la circonferenza O' l'asse dei centri nei punti A' e B'. Da $c < R + r$ segue $c - r < R$, ossia $OA' < R$; il punto A' giace quindi nell'interno della circonferenza O. Da $c > R - r$ segue $c + r > R$, vale a dire $OB' > R$; il punto B' giace quindi all'esterno della circonferenza. I due archi della circonferenza O' che da A' vanno a B' devono perciò tagliare l'altra in due punti D e D'.

Fig. 51.



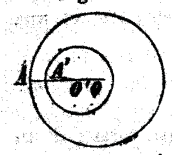
4. *Per* c = R − r, *i due cerchi sono tangenti internamente* (fig. 51).

La *dimostrazione*, simile a quella al numero 2, si fa appoggiandosi al § 72.

5. *Per* c < R − r, *l'una delle circonferenze giace del tutto internamente all'altra* (fig. 52).

La *dimostrazione*, analoga a quella al numero 1, si fa come al § 72, *a*.

Fig. 52.



Scolio. Nelle cinque precedenti proposizioni furono contemplati tutti i casi possibili, fra loro escludentisi, che si possono dare rispetto all'asse dei centri confrontato colla somma e differenza dei raggi delle due circonferenze, per cui facil cosa sarà il dimostrare per via indiretta, che di queste proposizioni valgono eziandio le loro *inversioni*.

§ 94. Teoremi. 1. *L'asse dei centri di due circonferenze tangenti passa per il punto di contatto.*

Segue dalle dimostrazioni fatte ai numeri 2 e 4 del § 93.

2. *Se per il punto di contatto di due circonferenze si conduce la tangente ad una di esse, questa riesce del pari tangente dell'altra.*

Supposto (fig. 49 e 51) $MN \perp OA$ dovrà essere del pari $MN \perp O'A$.

3. *L'asse dei centri di due circonferenze secanti è normale alla corda comune e dimezza questa ed i rispettivi angoli al centro delle due circonferenze* (§ 44).

Scolio. Per *angolo* di due circonferenze secanti s'intende l'angolo formato fra loro dalle tangenti condotte a ciascuna di esse in un punto di loro intersezione.

5. Teoremi per esercizio.

§ 95. 1. Fra tutte le corde che si possono guidare da un punto interno del cerchio, quella è la minore che è normale al raggio passante per quel punto (§ 77, 4).

2. Due corde non passanti per il centro d'un cerchio non si possono dimezzare.

3. Gli archi di circonferenza che trovansi fra due corde parallele sono eguali.

La dimostrazione si basa sulla eguaglianza degli angoli alterni e sul § 82, *b*.

4. Le estremità di due archi di circonferenza eguali formano i vertici d'un trapezio isoscele.

5. Le estremità di due corde eguali e parallele d'una circonferenza formano i vertici d'un rettangolo.

6. Tutte le corde parallele ad una tangente d'una circonferenza vengono dimezzate dal diametro passante per il punto di contatto.

7. Le tangenti condotte per i vertici d'un rettangolo iscritto in un cerchio racchiudono un rombo (§ 81).

8. Per ogni poligono di numero pari di lati iscritto ad un cerchio sussiste l'equazione.

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots,$$

ove α_n dinota l'n^{esimo} angolo del poligono.

Si conducano dei raggi ai vertici e si applichi il § 82.

9. Per ogni poligono di numero pari di lati circoscritto ad una circonferenza sussiste l'equazione

$$l_1 + l_3 + l_5 + \ldots = l_2 + l_4 + l_6 + \ldots,$$

ove l_n dinota l'n^{esimo} lato del poligono.

10. Se tre circonferenze passanti per i tre differenti vertici d'un triangolo a due a due si tagliano sui tre differenti lati dello stesso, le circonferenze devono passare tutte per lo stesso punto (§ 87, 1).

V. Problemi di costruzione.

§ 96. Il *problema di costruzione* (§ 6) ha di mira la *determinazione grafica d'una figura* che soddisfaccia a date condizioni. Ogni problema di costruzione esige una *soluzione*, vale a dire l'enunciazione e la comprova del metodo impiegato nella costruzione della figura richiesta.

Un problema dicesi *determinato*, qualora sono poste tante condizioni quante sono *sufficienti e necessarie* per la relativa costruzione; *indeterminato* e *più che determinato* dicesi poi quel problema, nel quale vi sono meno o più condizioni enunciate di quelle richieste alla determinazione della figura.

Un problema determinato ammette o una soluzione sola, o un numero determinato di soluzioni; nel primo caso il problema dicesi *determinato ad una soluzione*, nel secondo, *determinato a più soluzioni*. Il problema indeterminato ammette un numero infinito di soluzioni, quello più che determinato può non ammettere soluzione veruna.

Un problema di costruzione si riguarda come sciolto, se venne ridotto a semplice *postulato*.

I postulati della Planimetria sono:

1. Per due punti dati tirare una *retta* di lunghezza qualunque.

2. Descrivere attorno un punto, quale centro, una *circonferenza* di dato raggio.

La soluzione grafica di questi postulati si eseguisce a mezzo del *regolo* e del *compasso*.

§ 97. La soluzione d'un problema risulta talvolta conseguenza immediata d'un teorema; per lo più, però, basasi sull'adeguata riunione di più teoremi. Il complesso delle considerazioni fatte affine di pervenire al metodo che conduce alla costruzione della chiesta figura, costituisce l'*analisi* del problema.

Dall'analisi risultano tanto la *costruzione*, quanto la *dimostrazione*; quest'ultima afferma che la prima è stata fatta sulla base di verità matematiche.

Alla dimostrazione si unisce non di rado la *determinazione*, vale a dire la discussione della questione, se e sotto quali condizioni sia solubile il problema, e se esso ammette una o più soluzioni.

Da quanto precede risulta, che la completa soluzione d'un problema geometrico di costruzione consta in generale di quattro parti: dell'*analisi*, della *costruzione*, della *dimostrazione* e della *determinazione*.

Nell'analisi si fa uso di più metodi fra loro differenti, dei quali, i più importanti sono: il *metodo dei luoghi geometrici*, il *metodo delle figure ausiliarie*, il *metodo delle figure simili* ed il *metodo dell'analisi algebrica*.

Di questi due ultimi metodi si terrà parola più tardi.

1. Problemi fondamentali.

§ 98. Quei problemi di costruzione che per la loro semplicità trovano più frequente applicazione e la cui soluzione, trattandosi di temi più composti, devesi ritenere come nota, vengono chiamati *problemi fondamentali*.

1. *Costruire un triangolo, dati i suoi tre lati* AB, AC e BC.

Analisi: A mezzo del lato AB sono determinati due vertici A e B del triangolo ABC richiesto. Acciocchè il terzo vertice C abbia da A la distanza AC, esso deve giacere sulla circonferenza che con raggio eguale ad AC è descritta attorno il punto A come centro; ma il punto C deve avere del pari la distanza BC dal punto B, quindi esso deve trovarsi eziandio sulla circonferenza che con raggio eguale a BC verrà descritta da B come centro; il punto C quindi non potrà trovarsi che nell'intersezione di queste due circonferenze.

Costruzione: Si tracci un segmento AB eguale ad uno dei lati dati, e fatto centro prima in A e poi in B, si descrivano due circonferenze coi lati AC e BC come raggi; il punto d'intersezione delle due circonferenze è il terzo vertice del triangolo richiesto.

La *dimostrazione* è conseguenza immediata della costruzione.

Determinazione: Acciocchè le due circonferenze descritte da A e B si taglino, e sia quindi possibile la costruzione del triangolo ABC, dovranno sussistere (a mente del § 93, 3) le disuguaglianze $AB < AC + BC$ ed $AB > AC - BC$; in tal caso vi si danno due triangoli, che essendo congruenti devonsi considerare come un'unica soluzione. Per $AB \geqq AC + BC$ o per $AB \leqq AC - BC$ la costruzione del triangolo domandato non è possibile.

Casi speciali di questo problema fondamentale sono:

a) *Costruire un triangolo isoscele, dati la base ed un lato dello stesso.*

b) *Costruire un triangolo equilatero, dato il suo lato.*

2. *Costruire un triangolo congruente ad un altro dato.*

Lo si costruisce a mezzo dei tre lati del triangolo dato, secondo il problema 1.

3. *Trasportare un angolo dato in un punto dato di una retta data.*

Soluzione: Si portino sui lati dell'angolo dato, partendo dal vertice, due segmenti eguali, e si uniscano le loro estremità a mezzo d'un altro segmento; la figura che ne risulta è un triangolo isoscele. Si costruisca ora, secondo il problema 2, un triangolo congruente a questo ultimo e tale che il suo vertice cada sul punto dato ed un suo lato combaci colla retta data.

4. *Costruire un triangolo, dati un lato ed i suoi angoli adiacenti.*

Si trasportino nelle estremità del lato noto gli angoli dati; l'intersezione dei lati AC e BC di questi due angoli ci dà il terzo vertice del chiesto triangolo ABC.

La *dimostrazione* è conseguenza immediata della costruzione.

Determinazione: Il triangolo non potrà essere costruito se non quando è $A + B < 2R$.

5. *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo da essi compreso.*

Si costruisca l'angolo dato, si facciano i suoi lati eguali a quelli dati, e si uniscano le loro estremità a mezzo d'un segmento.

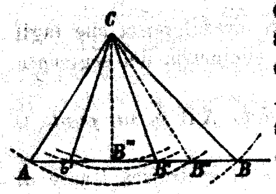
Caso speciale di questo problema sarebbe:

Costruire un triangolo rettangolo di cui sieno dati i cateti.

6. *Costruire un triangolo, dati due lati* A C *e* B C *e l'angolo* A *opposto ad uno di essi* (fig. 53).

Costruzione: Si costruisca l'angolo A dato, e sopra un lato dello stesso si trasporti il lato AC ad esso adiacente; ciò fatto, con centro C, e con raggio eguale all'altro lato BC, opposto all'angolo A, si descriva un arco di circonferenza che tagli in B l'altro lato dell'angolo A; guidato ora il segmento BC, la figura ABC che ne risulta, è il triangolo richiesto.

Fig. 53.



La *dimostrazione* emerge dalla costruzione.

Determinazione: Se BC è $> AC$, l'arco di circonferenza descritto da C col lato BC, taglia il secondo lato dell'angolo A in un sol punto B, dacchè l'altro punto d'intersezione cade nel complemento del raggio AB. Se il lato opposto all'angolo A è minore di AC, ma maggiore della normale CB''' abbassata da C su AB, quell'arco taglia il detto lato in due punti B' e b', e finalmente non vi si dà verun punto d'intersezione, se il lato opposto è minore di CB''' (§§ 73 e 35). Nel primo caso, *un* solo triangolo ABC soddisfà al problema; nel secondo, il problema è determinato a *due soluzioni*, dacchè ambidue i triangoli non congruenti $AB'C$ ed AbC che ne risultano contengono i tre elementi dati; nel terzo caso finalmente, il problema non ammette veruna soluzione. *Un* solo triangolo si otterrebbe del pari, qualora il lato opposto ad A fosse eguale ad AC od a CB'''.

Caso speciale di questo problema sarebbe il seguente problema determinato con una soluzione:

Costruire un triangolo rettangolo di cui sieno dati l'ipotenusa ed un cateto.

7. *Costruire l'asse di simmetria d'un dato segmento* A B.

Fatto centro in A e B, si descrivono collo stesso raggio al di sopra ed al di sotto del segmento dato degli archi di circonferenza che si taglino in C e D; questi punti saranno equidistanti da A e B e la retta CD sarà quindi l'asse di simmetria del segmento AB (§ 46, 1).

La stessa costruzione vale eziandio per la soluzione del problema:

Dimezzare un dato segmento.

8. *Costruire l'asse di simmetria di un dato angolo* A C B.

Si determinino, con un arco di circonferenza, sui lati dell'angolo dato due punti M ed N equidistanti dal vertice C e si costruisca l'asse di simmetria del segmento MN che sarà asse di simmetria del pari dell'angolo MCN od ACB (§ 47, 1).

Questa è la soluzione dello stesso problema differentemente enunciato:

Dimezzare un angolo dato.

9. *Da un punto* C, *posto fuori di una data retta* A B, *condurre alla stessa una normale.*

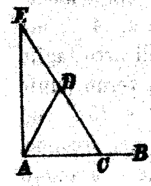
Fatto centro in C si descriva un arco di circonferenza che tagli la AB in M ed N, e si costruisca l'asse di simmetria del segmento MN.

10. *Erigere una normale ad una retta data* A B *in un punto* C *della stessa.*

Sulla retta data si faccia $CM = CN$ e si costruisca l'asse di simmetria del segmento MN.

11. *Innalzare in una estremità* A *di un dato segmento* A B *una normale allo stesso* (fig. 54).

Fig. 54.



Costruzione: Si prenda una parte AC qualunque del segmento dato, e su quella si costruisca un triangolo equilatero; prolungando ora il lato CD della sua lunghezza sino in E e condotto il segmento AE, questo sarà la chiesta normale.

Dimostrazione: $CAD = 60°$ e (§ 33, b) $DAE = \frac{1}{2} ADC = 30°$; quindi $CAE = 90°$.

12. *Da un punto* C *fuori di una retta data* A B *condurre alla stessa una parallela.*

Soluzione 1: Si guidi per il punto C una retta che tagli la AB in D, e si costruisca in C un angolo $DCE = ADC$ (secondo il probl. 3) in modo che questi sieno alterni fra loro; il secondo lato CE dell'angolo costruito è la parallela domandata (24, 1).

Soluzione 2: Si abbassi da C la $CF \perp AB$, si eriga nello stesso punto la $CE \perp CF$ e ne risulterà $CE \parallel AB$ (§ 25, 1).

Soluzione 3: Si conduca per C una retta che tagli la AB in D, e fatto centro in D si descriva col raggio CD un arco di circonferenza che tagli la AB in E; se ora si descrivono collo stesso raggio e coi punti C ed E quali centri due archi di circonferenza che si taglino in F, la retta CF è parallela alla AB (§ 54, 2).

13. *Dividere un dato segmento* A B (fig. 34) in un certo numero di parti eguali.

Si conduca da A, sotto un angolo qualunque, un raggio AC, e sullo stesso si trasporti un segmento di lunghezza arbitraria tante volte quante sono le parti in cui deve essere diviso il segmento dato; si unisca il punto C con B a mezzo d'un segmento, e guidate a questo dai rimanenti punti le parallele MQ, NR, OS, PT, il segmento dato resterà diviso nel numero chiesto di parti eguali (§ 59, 3).

§ 99. 1. *Trovare il centro di un cerchio.*

A mezzo degli assi di simmetria di due corde non parallele secondo il § 76.

2. *Dimezzare un arco di circonferenza.*

Fatto centro nelle sue estremità si descrivano con raggio eguale due archi di circonferenza secanti, e per il loro punto d'intersezione si conduca un segmento al centro dato del cerchio; questo dimezzerà l'angolo al centro corrispondente all'arco dato e perciò anche, secondo il § 78, 1, il relativo arco.

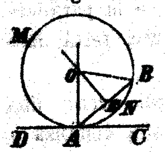
3. *Per un punto dato sulla circonferenza di un cerchio condurre a questa una tangente* (§ 80, 1).

4. *Per un punto fuori d'un cerchio condurre allo stesso una tangente.*

Sia C (fig. 43) il punto dato ed O il centro del cerchio; si conduca il segmento CO, e con questo, come diametro, si descriva una circonferenza che tagli il cerchio dato nei punti A e B; le rette CA e CB sono le tangenti richieste (§ 80).

5. *Per l'estremità d'un segmento, considerato quale corda, far passare un arco di circonferenza tale che ogni suo angolo iscritto sotteso da quella corda sia eguale ad un angolo dato.*

Fig. 55.



Sieno (fig. 55) BAC l'angolo ed AB il segmento dato. Si eriga alla AB il suo asse di simmetria, si conduca $AO \perp AC$ e fatto centro nel punto d'intersezione O delle rette EO ed AO, si descriva una circonferenza col raggio $AO = BO$. Saranno allora (§ 84) AMB ed ANB gli archi per i quali l'angolo dato BAC, rispettivamente il suo adiacente BAD, considerati come iscritti, insistono sulla stessa corda AB.

2. Metodo dei luoghi geometrici.

§ 100. Una linea od una superficie i cui punti tutti soddisfanno ad una data condizione, chiamasi *luogo geometrico* di quei punti.

Così a mo' d'esempio tutti i punti d'un piano aventi da un punto dato una data distanza, giacciono sulla periferia di un cerchio che si

descrive da quel punto con raggio eguale alla data distanza; qualunque altro punto del piano non soddisferebbe alla condizione fatta. Ciò si esprime colla seguente proposizione:

1. *a*) Il *luogo geometrico* di tutti i punti che da un punto dato hanno una data distanza a, è la circonferenza descritta da quel punto come centro col raggio a.

Questo luogo geometrico contiene la soluzione del problema *indeterminato:* Stabilire un punto che da un altro dato abbia una data distanza.

Questo luogo geometrico si potrebbe enunciare anche nel seguente modo:

1. *b*) Il luogo geometrico dei centri dei cerchi passanti per un punto dato ed aventi un dato raggio a, è la circonferenza descritta con quel raggio attorno il punto dato.

Da vari teoremi da noi già pertrattati, risultano i seguenti luoghi geometrici:

2. *a*) Il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti da due altri dati, è l'asse di simmetria del segmento che li unisce (§ 46, 1).

2. *b*) Il luogo geometrico dei centri dei cerchi passanti per due punti dati, è l'asse di simmetria del segmento che li congiunge.

3. *a*) Il luogo geometrico di tutti i punti equidistanti dai lati d'un angolo, è l'asse di simmetria dello stesso angolo (§ 46, 2).

3. *b*) Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti, a due rette non parallele, è l'asse di simmetria dell'angolo da esse formato (§ 81).

4. *a*) Il luogo geometrico di tutti i punti giacenti da una parte d'una data retta ed aventi dalla stessa l'equidistanza a, è la parallela che da quella parte, e nella distanza a, si conduce alla retta data (§ 54, *b*).

4. *b*) Il luogo geometrico dei vertici dei triangoli aventi una data base ed un'altezza a data, è la retta condotta alla distanza a parallelamente alla base.

4. *c*) Il luogo geometrico dei centri dei cerchi aventi un dato raggio a e che toccano da una parte una data retta, è la parallela che dalla stessa parte viene condotta alla retta data alla distanza a (§ 80).

5. Il luogo geometrico dei vertici dei triangoli rettangoli aventi una data ipotenusa, è la circonferenza descritta all'intorno della data ipotenusa con un diametro eguale alla ipotenusa stessa (§ 83).

6. Il luogo geometrico dei vertici dei triangoli nei quali ad un dato lato s'oppone un dato angolo, è l'arco di circonferenza capace dell'angolo dato e descritto attorno il lato quale corda (§ 84).

Come si descriva un tale arco, fu insegnato al § 99, problema 5.

7. Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze che toccano una data retta in un dato punto, è la normale innalzata alla retta in quel punto (§ 80).

8. Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze che toccano una data circonferenza in un dato punto, è la retta passante per quel punto e per il centro della circonferenza data (§ 94).

9. Il luogo geometrico dei centri delle circonferenze di dato raggio, tangenziali ad una data circonferenza, è la circonferenza concentrica a questa, descritta con un raggio eguale alla somma o alla differenza dei raggi dati, a seconda che il contatto è esterno od interno (§ 93, 2 e 4).

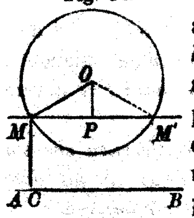
§ 101. La posizione d'un punto non è determinata, se dello stesso si conosce un sol luogo geometrico, dacchè infiniti sono i punti in quello situati; ma se di quel punto invece si conoscono due luoghi geometrici, allora la posizione del punto sarà determinata dall'intersezione di questi.

Il *metodo dei luoghi geometrici* si applica in quei problemi la cui risoluzione si riduce a determinare un *punto* che soddisfaccia a due condizioni distinte. A tale scopo si considerano queste condizioni separatamente l'una dall'altra, e si vanno a tracciare due luoghi geometrici (rette o cerchi), l'uno che soddisfaccia alla prima, l'altro alla seconda delle condizioni date; i punti comuni a tutti e due i luoghi geometrici sono i punti richiesti.

I seguenti problemi servano di esempio:

1. *Determinare un punto che da una retta* A B (fig. 56) *e da un punto* O *fuori della stessa abbia l'equidistanza* a.

Fig. 56.



Analisi: Sia M il punto in questione. Dovendo avere M la distanza a da AB, il suo luogo geometrico è la retta MM' condotta parallelamente alla AB alla distanza $CM = a$ (luogo geom. 4, a); ma il punto M deve distare di a anche da O, per cui la circonferenza descritta da O col raggio a ne sarà un secondo luogo geometrico (luogo geom. 1, a) ed il punto d'intersezione dei due luoghi geometrici il punto M (M') richiesto.

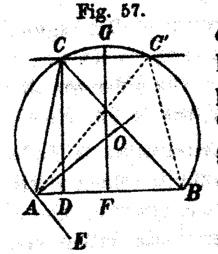
Costruzione: Si conduca alla distanza $CM = a$ la $MM' \parallel AB$; descritta poi da O col raggio a una circonferenza, questa taglierà la parallela tracciata nel punto M (M') in questione.

Dimostrazione: Si guidi il raggio OM (OM') e sarà $CM = OM = a$ ($CM = OM' = a$).

Determinazione: Il problema ha due soluzioni, o una sola o non ne ha alcuna, a seconda che la circonferenza descritta da O taglia la parallela MM', a questa è tangenziale o con essa non ha verun punto comune. Tracciando $OP \perp MM'$ si scorge che i tre casi si avverano per $a > OP$, $a = OP$ ed $a < OP$.

2. *Costruire un triangolo, dati che siano un lato* c, *l'angolo* γ *ad esso opposto e l'altezza abbassata su questo lato.*

Fig. 57.



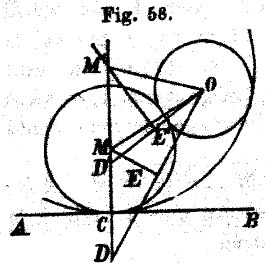
Analisi: Sia ABC (fig. 57) il triangolo richiesto in cui $AB = c$, $ACB = \gamma$ e $CD = h$. I vertici A e B sono dati a mezzo del lato AB, per cui non resta che determinare il vertice C. Ora dovendo essere $ACB = \gamma$, si otterrà un luogo geometrico di C descrivendo interno ad AB, quale corda, un arco di circonferenza capace dell'angolo γ (luogo geom. 6); ma l'altezza del triangolo, vale a dire la distanza del vertice dalla base deve essere eguale ad h, per cui la retta condotta parallelamente alla base AB alla distanza h sarà un secondo luogo geometrico del punto C (C') (luogo geom. 4, a), ed il punto d'intersezione dei due luoghi geometrici il punto C (C') richiesto.

Costruzione: Sulla retta $AB = c$ si faccia in A un angolo $BAE = \gamma$, si conduca $AO \perp AE$ e si costruisca l'asse di simmetria della AB che taglierà la normale AO nel punto O. Si centri ora in questo punto, e con raggio eguale ad AO si descriva un arco di circonferenza; si guidi poscia, alla distanza $CD = h$, la CC' parallela alla AB che taglierà l'arco nel punto C, ed ABC sarà il triangolo domandato.

Dimostrazione: Nel triangolo ABC si ha per costruzione: $AB = c$, l'angolo $ACB = \gamma$ (§ 84) e l'altezza $CD = h$.

Determinazione: Sono possibili o due triangoli ABC ed ABC' fra loro congruenti, od un solo triangolo o non è possibile alcun triangolo, a seconda che sarà $h < FG$, $h = FG$ ovvero $h > FG$.

Fig. 58.



3. *Descrivere una circonferenza che sia tangenziale ad una data retta in un dato punto e che tocchi una data circonferenza.*

Analisi: Siano (fig. 58) AB la retta data, C il punto dato sulla stessa, O ed M i centri della circonferenza data e di quella cercata. La CM normale ad AB sarà allora un luogo geometrico di M (luogo geom. 7) e trasportando su quella normale il segmento CD (CD') eguale al raggio del cerchio dato, si ottiene nell'asse di simmetria EM ($E'M'$) della base DO ($D'O$) del triangolo isoscele MDO ($M'D'O$) un secondo luogo geometrico dello stesso punto M (M').

Tanto la *costruzione*, quanto la *dimostrazione*, risultano immediatamente dall'analisi fatta.

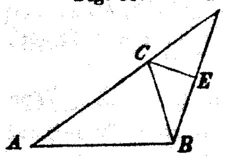
Determinazione: Delle due circonferenze che si ottengono, l'una è tangenziale esterna, l'altra tangenziale interna alla circonferenza data.

3. Metodo delle figure ausiliarie.

§ 102. Nel *metodo delle figure ausiliarie* si suppone costruita la figura che risolve il problema, e si cerca, col mezzo di opportuni teoremi geometrici, il nesso fra gli elementi dati e quelli cercati, ponendo gli uni e gli altri in relazione tra loro a mezzo di linee ausiliarie, costruendo così una *figura ausiliaria* costruibile, da cui si deduce la figura richiesta dal problema.

I seguenti problemi servano d'esempio:

Fig. 59.



1. *Costruire un triangolo di cui siano dati un lato* c, *l'angolo* α *ad esso adiacente e la somma* s *degli altri due lati.*

Analisi: Sia ABC (fig. 59) il triangolo richiesto e quindi $AB = c$, $BAC = \alpha$ ed $BC + AC = s$. Nella soluzione dovendo servire tutti gli elementi dati, farà d'uopo di mettere in relazione con la figura il segmento s che non vi è direttamente contenuto. A tale scopo si prolunghi AC di un segmento CD eguale al lato BC, e guidata la BD, si otterrà un *triangolo ausiliario* BAD che potrà essere costruito, essendo dello stesso noti il lato $AB = c$, il lato $AD = s$ e l'angolo da essi compreso $BAD = \alpha$. Da questo triangolo poi si giunge a quello richiesto BAC costruendo l'asse di simmetria della BD la quale, per essere il $\triangle CBD$ isoscele, taglierà la AD nel punto C.

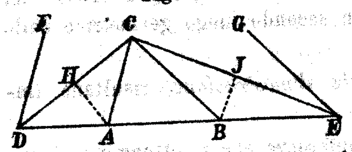
Costruzione: Si conduca $AB = c$, si formi in A l'angolo $BAD = \alpha$, si faccia il lato $AD = s$ e si guidi la BD. Se si costruisce ora l'asse di simmetria della BD, essa taglierà la AD nel punto C, ed ABC sarà il triangolo richiesto.

La *dimostrazione* emerge dalla costruzione.

Determinazione: Il problema può essere risolto soltanto, quando sia $\alpha < 180°$ e $c < s$.

2. *Costruire un triangolo di cui sieno dati il perimetro* p *e due angoli* α *e* β.

Fig. 60.



Analisi: Sia ABC (fig. 60) il triangolo domandato che ha quindi il perimetro $AB + AC + BC = p$ l'angolo $BAC = \alpha$ ed $ABC = \beta$. Si prolunghi la AB di $BE = BC$ e di $AD = AC$ e guidate le rette DC ed EC si otterrà il triangolo ausiliario DEC che sarà costruibile, conoscendosi dello stesso il segmento $DE = p$, l'angolo $EDC = \frac{\alpha}{2}$ e l'angolo $DEC = \frac{\beta}{2}$ (§ 33, *b*). In tal modo sarà però del pari determinato il vertice C del triangolo chiesto, mentre gli altri due vertici A e B dello stesso saranno situati sul segmento DE e saranno i vertici dei due triangoli isosceli costruiti sulle basi CD e CE, od in altre parole essi saranno i punti d'intersezione degli assi di simmetria dei segmenti CD e CE col segmento DE (§ 47, 1).

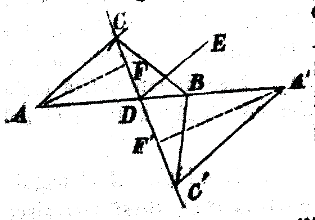
Costruzione: Si faccia il segmento $DE = p$, si trasportino in D ed E gli angoli $EDF = \alpha$ e $DEG = \beta$, si dimezzino gli stessi e si prolunghino le loro bisettrici sino a tagliarsi nel punto C. Gli assi di simmetria HA ed JB dei segmenti CD e CE taglieranno la DE nei punti A e B per cui condotte le AC e BC si otterrà il triangolo ABC richiesto.

La *dimostrazione* risulta dall'analisi.

Determinazione: Il problema è possibile soltanto per $\alpha + \beta < 180°$, ed in tal caso si ottiene un solo triangolo quale risultato della relativa costruzione.

3. *Costruire un triangolo, dati un lato* a, *la differenza* d *degli altri due lati, e l'angolo* α *da questi compreso.*

Fig. 61.



Analisi: Sia ABC (fig. 61) il chiesto triangolo che ha $BC = a$, $AB - AC = d$ e l'angolo $BAC = \alpha$. Si tagli dalla AB un segmento $AD = AC$, in modo quindi che ne risulti $BD = d$, e guidata la CD si avrà l'angolo

$$ADC = R - \frac{\alpha}{2},$$

eguale quindi alla metà dell'angolo adiacente ad α. Il triangolo ausiliario BDC potrà quindi essere costruito, noti essendo dello stesso il lato $BC = a$, $BD = d$ e l'angolo opposto al maggiore di questi due lati $BDC = R + \frac{\alpha}{2}$. In tal guisa però sono determinati del pari i due vertici B e C del triangolo chiesto, mentre il terzo vertice A dello stesso si otterrà costruendo il triangolo isoscele ACD.

Costruzione: Si tracci la $BD = d$, si faccia l'angolo $BDE = \alpha$, si dimezzi a mezzo della DC il suo angolo adiacente ADE, si centri in B e con raggio eguale ad a si descriva un arco che tagli la DC nel punto C (C'); fatto ciò si guidi la BC (BC'), si costruisca l'asse di simmetria della DC (DC') che taglierà in A (A') il prolungamento della BD, e si conduca la AC ($A'C'$); il triangolo ABC ($A'BC'$) è il triangolo domandato.

La *dimostrazione* risulta dall'analisi.

Determinazione: Si ottengono due triangoli congruenti ABC ed $A'C'B$.

4. Problemi per esercizio.

A. Secondo il metodo dei luoghi geometrici.

§ 103. 1. Determinare un punto che sia equidistante da due punti dati e che da un terzo abbia una data distanza.

2. Trovare sopra un retta data un punto che sia equidistante da due punti situati al di fuori della stessa.

3. Fissare sopra una retta data un punto che abbia una data distanza da un'altra retta data.

4. Stabilire un punto che sia equidistante tanto da due rette parallele date, che da una trasversale delle stesse.

5. Fissare sopra un lato d'un triangolo un punto che sia equidistante dagli altri due lati.

6. In un dato quadrilatero costruire un punto che abbia eguale distanza da due vertici dati e che sia equidistante dagli altri due vertici.

7. Guidare fra i due lati d'un dato angolo un segmento dato che sia normale ad un lato dello stesso.

§ 104. 1. Sopra un dato segmento, quale ipotenusa, costruire un triangolo rettangolo il cui vertice sia situato sopra una retta data.

2. Costruire un triangolo rettangolo, date che siano l'ipotenusa e l'altezza abbassata su questa.

3. Costruire un triangolo isoscele, date la base e l'altezza.

4. Costruire un triangolo conoscendo: *a*) un angolo e le altezze abbassate sui lati che lo comprendono; *b*) due lati e l'altezza corrispondente ad uno degli stessi; *c*) due lati e l'altezza corrispondente al terzo lato; *d*) un lato, la sua corrispondente altezza e quella abbassata sopra un secondo lato; *e*) un lato e le altezze corrispondenti agli altri due lati.

Nei problemi *c*, *d* ed *e*, in cui si suppone che un lato rimanga fisso, si ottengono, quali luoghi geometrici del piede dell'altezza abbassata sopra un altro lato, una circonferenza descritta da una estremità del lato dato con un raggio eguale all'altezza, ed una tangente guidata a questo cerchio dall'altra estremità di quel lato.

§ 105. 1. Descrivere con un raggio dato una circonferenza *a*) che passi per due punti dati; *b*) che tocchi una retta data in un dato punto; *c*) che tocchi una retta data e passi per un punto dato al di fuori della stessa; *d*) che tocchi due rette concorrenti.

2. Descrivere con un raggio dato una circonferenza *a*) che sia tangenziale ad una data circonferenza in un dato punto; *b*) che tocchi una data circonferenza e passi per un punto dato al di fuori della stessa; *c*) che sia tangenziale ad una data circonferenza e ad una retta data; *d*) che tocchi due circonferenze date.

3. Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato e sia tangenziale in un punto dato *a*) ad una retta data, *b*) ad una circonferenza data.

4. Descrivere una circonferenza che sia tangenziale a due rette date concorrenti e che tocchi una di queste in un punto dato.

5. Descrivere una circonferenza che tocchi un cerchio dato e sia tangenziale ad una retta data in un punto dato.

6. Descrivere una circonferenza che sia tangenziale ad una retta data e che tocchi una data circonferenza in un dato punto.

7. Descrivere una circonferenza che sia tangenziale a due circonferenze date e che tocchi una delle stesse in un punto dato.

Se O ed O' sono i centri delle circonferenze date, A il punto dato di contatto della prima circonferenza, ed M il centro di quella richiesta, la retta OA sarà un luogo geometrico di M. Guidando il diametro $BO'B' \parallel OA$ ed i segmenti OB ed OB' che tagliano la circonferenza O' in C e C', i due triangoli OCM ed $OC'M'$ sono isosceli e perciò gli assi di simmetria delle loro basi OC ed OC' sono un secondo luogo geometrico di M (M'). — Due sono le circonferenze che si ottengono.

B. Secondo il metodo delle figure ausiliarie.

§ 106. Ogni altezza divide il triangolo in due altri triangoli rettangoli che possono servire da figure ausiliarie.

1. Costruire un triangolo rettangolo (la cui ipotenusa viene divisa dalla corrispondente altezza in due segmenti), noti che siano: *a*) un cateto e l'altezza sulla ipotenusa; *b*) l'altezza ed un angolo acuto; *c*) un cateto ed il segmento dell'ipotenusa ad esso adiacente; *d*) l'altezza ed un segmento dell'ipotenusa.

2. Costruire un triangolo equilatero di cui si conosca l'altezza.

3. Costruire un triangolo isoscele conoscendo *a*) il lato e l'altezza, *b*) l'altezza ed un angolo.

4. Costruire un triangolo rettangolo isoscele, data l'altezza dello stesso.

5. Costruire un triangolo, dati: *a*) un lato, l'altezza abbassata sopra un secondo lato e l'angolo opposto a questo lato; *b*) un lato, la corrispondente altezza ed un angolo adiacente a questo lato; *c*) l'altezza abbassata sopra un lato e gli angoli ad esso adiacenti, *d*) le altezze abbassate su due lati e l'angolo opposto ad uno di questi due lati.

§ 107. Se fra i dati d'un problema che ha per iscopo la costruzione d'un triangolo, è contenuta la somma o la differenza di due lati (od un lato e l'altezza), prolungando od accorciando debitamente un lato si ottiene, quale figura ausiliaria, un triangolo nel quale la data somma o la data differenza è espressa da un lato dello stesso.

1. Costruire un triangolo rettangolo di cui sieno dati: *a*) l'ipotenusa e la somma (differenza) dei due cateti; *b*) un cateto e la somma (differenza) dell'ipotenusa e dell'altro cateto; *c*) un angolo acuto e la somma (differenza) dei due cateti.

2. Costruire un triangolo equilatero, conoscendo la somma (differenza) del lato e dell'altezza.

3. Costruire un triangolo isoscele, se oltre alla somma (differenza) della base e del lato sia noto: *a*) l'angolo alla base, *b*) l'angolo al vertice.

4. Costruire un triangolo, dati: *a*) la somma di due lati, il terzo lato e l'angolo opposto a questo lato; *b*) la differenza di due lati, il terzo lato e l'angolo suo adiacente; *c*) la somma (differenza) di due lati e quella di due angoli.

§ 108. I problemi relativi alla costruzione di *parallelogrammi* e di *quadrilateri* si sciolgono in generale col costruire uno dei triangoli nei quali il parallelogrammo (quadrilatero) resta diviso da una delle diagonali o da tutte e due.

1. Costruire un quadrato di cui si conosca *a*) il lato, *b*) la diagonale, *c*) la somma (differenza) della diagonale e del lato.

2. Costruire un rettangolo di cui sieno dati: *a*) due lati consecutivi; *b*) un lato e la diagonale; *c*) un lato e l'angolo ad esso opposto delle due diagonali; *d*) la diagonale e l'angolo formato dalle due diagonali; *e*) la somma (differenza) di due lati e la diagonale; *f*) la somma (differenza) di due lati ed un angolo; *g*) un lato e la somma (differenza) della diagonale e dell'altro lato.

3. Costruire un rombo conoscendo: *a*) il lato ed un angolo; *b*) il lato e l'altezza; *c*) il lato ed una diagonale; *d*) le due diagonali; *e*) il lato e la somma (differenza) delle diagonali; *f*) la somma (differenza) del lato e dell'altezza, nonchè un angolo.

4. Costruire un romboide di cui si conoscono: *a*) due lati e l'angolo da essi compreso; *b*) due lati ed una diagonale; *c*) un lato e le due diagonali; *d*) le diagonali e l'angolo da esse compreso; *e*) due lati e l'altezza abbassata sopra uno degli stessi; *f*) la somma (differenza) di due lati, un angolo ed una diagonale.

5. Costruire un deltoide dati: *a*) due lati disuguali ed una diagonale; *b*) le due diagonali ed un lato.

§ 109. Un trapezio è determinato, se dei due triangoli, in cui resta diviso da una sua diagonale, uno si conosce pienamente, e dell'altro sia noto un dato indipendente dal primo. Se il trapezio è isoscele basta uno solo di questi triangoli per determinarlo.

Se sono date le due basi, si guida per un vertice una parallela ad uno dei lati non paralleli e si ottiene, quale figura ausiliaria, un triangolo, in cui un lato è eguale alla differenza delle due basi.

1. Costruire un trapezio isoscele di cui si conoscono: *a*) una base, il lato non parallelo e la diagonale; *b*) una base, il lato non parallelo e l'altezza; *c*) le due basi e l'altezza; *d*) le due basi ed il lato non parallelo; *e*) il lato non parallelo, la diagonale e l'altezza; *f*) una base, un angolo e l'altezza; *g*) la somma (differenza) di una base e del lato non parallelo, la diagonale ed un angolo.

2. Costruire un trapezio di cui siano noti: *a*) tutti e quattro i lati; *b*) tre lati e l'altezza; *c*) tre lati ed un angolo; *d*) una base, l'angolo ad essa adiacente ed una diagonale; *e*) le basi, un lato non parallelo ed una diagonale; *f*) i due lati non paralleli, una diagonale e l'altezza; *g*) la somma (differenza) d'una base e di un lato non parallelo, gli altri due lati ed una diagonale; *h*) la somma (differenza) d'una base e di un lato non parallelo, l'angolo adiacente alla base e l'altezza.

C. Problemi non vincolati ad un dato metodo.

§ 110. 1. Dividere un angolo retto in tre parti eguali.

Si costruisca (fig. 54) il triangolo equilatero ACD, e si dimezzi l'angolo CAD.

2. Determinare sopra una retta data un punto, tale che i segmenti condotti dallo stesso a due punti dati fuori della retta, formino con questa angoli eguali.

Si abbassi da uno dei punti una normale alla retta data, la si prolunghi al di là del piede della sua lunghezza, e si congiunga la sua estremità col secondo punto dato; questo segmento di congiunzione taglierà la retta data nel punto richiesto.

3. Per un punto dato guidare una retta che con un'altra data formi un angolo dato.

Si trasporti l'angolo dato sulla retta data e per il punto dato si guidi una parallela al secondo lato dell'angolo.

4. Per un punto dato, situato fra i lati d'un angolo, guidare una retta, in modo che il segmento della stessa compreso fra i due lati dell'angolo sia da quel punto dimezzato.

Per il punto dato si conduca una parallela ad uno dei lati dell'angolo, e quella reciderà un dato segmento dell'altro lato dell'angolo. Si prolunghi questo segmento della sua lunghezza, e si unisca la sua estremità col punto dato.

5. Per un punto dato, situato nell'interno d'un angolo, guidare una retta che recida segmenti eguali dei due lati dell'angolo.

6. Abbiasi da condurre fra i due lati d'un angolo una retta di data lunghezza che recida segmenti eguali dei lati dell'angolo.

7. Si guidi in un cerchio dato una corda di data lunghezza parallela ad una retta data.

8. Stabilire sopra una retta data un punto tale che la tangente condotta dallo stesso ad una circonferenza data abbia una data lunghezza.

Si guidi alla circonferenza una tangente qualunque della lunghezza data, e per l'estremità di quella tangente si faccia passare una circonferenza concentrica alla circonferenza data; il punto d'intersezione di questa circonferenza colla retta data sarà il punto richiesto.

§ 111. 1. Costruire un poligono eguale ad un altro dato.

2. Costruire un poligono di n lati, note che siano le condizioni enunciate al § 67.

3. Costruire un poligono regolare di n lati, conosciuto che sia il suo lato.

4. Dividere la circonferenza *a*) in 2, 4, 8..., *b*) in 3, 6, 12... parti eguali.

5. Iscrivere in un dato cerchio un triangolo di cui sieno dati: *a*) due lati; *b*) un lato ed un suo angolo adiacente; *c*) due angoli; *d*) un lato e la rispettiva sua altezza.

In *c* si osservi che costruendo un angolo alla periferia eguale ad uno degli angoli dati, la rispettiva sua corda determina del pari un lato del triangolo, per cui il problema dato si riduce a quello enunciato in *b*.

6. Circoscrivere ad una data circonferenza un triangolo di cui sieno noti: *a*) due angoli; *b*) un lato ed un suo angolo adiacente.

Si applichi il § 81 *b*.

7. Iscrivere in un cerchio di dato raggio un quadrilatero, se dello stesso si conoscono *a*) tre lati, *b*) due lati opposti ed un angolo, *c*) un lato ed i suoi due angoli adiacenti.

8. Circoscrivere ad una circonferenza di dato raggio un quadrilatero di cui sieno noti *a*) due lati consecutivi e l'angolo da essi compreso, *b*) un lato e gli angoli adiacenti ad un lato consecutivo.

CAPITOLO TERZO.

Segmenti proporzionali e simiglianza delle figure piane.

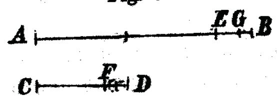
I. Rapporti e proporzioni geometriche.

§ 112. Una grandezza dicesi *misura* di altra grandezza della stessa specie, quando quest'ultima sia formata di altrettante parti eguali e tra loro ed alla prima grandezza. Supposto $A = aM$, ove a rappresenta un numero intero qualunque, M è una misura di A. Una grandezza M dicesi *misura comune* di A e B, se essa è una misura tanto di A quanto di B.

Per *trovare la misura comune di due grandezze della stessa specie*, si sottrae la grandezza minore B dalla maggiore A tante volte quante siano possibili; in simil guisa si sottrae poscia il residuo C dalla grandezza minore B, il nuovo residuo D dall'antecedente C e così di seguito. Se ciò facendo si perviene ad un residuo R che sia una misura di quello che immediatamente lo precede, R sarà una misura *comune*, anzi la *massima misura comune* di A e B. (Vedi Aritm. §§ 72 e 117).

Chiariremo questo procedimento applicandolo a due segmenti AB e CD (fig. 62).

Fig. 62.



Si porti il segmento minore CD sul maggiore AB tante volte quante siano possibili — nel nostro caso 2 volte; il residuo EB sul segmento minore CD (2 volte), il residuo FD sull'antecedente EB (1 volta), il nuovo residuo GB sull'antecedente FD, e supponiamo che GB sia contenuto esattamente due volte in FD. Si avrà allora:

$$FD = 2\,GB$$
$$EB = FD + GB = 3\,GB$$
$$CD = 2\,EB + FD = 8\,GB$$
$$AB = 2\,CD + EB = 19\,GB.$$

I segmenti AB e CD hanno GB per massima misura comune, e precisamente questa è contenuta 19 volte in AB, 8 volte in CD.

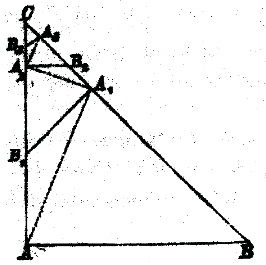
§ 113. Se, seguendo il metodo indicato al § 112, non si perviene ad un residuo eguale a zero, le due grandezze non hanno alcuna misura comune.

Due grandezze che hanno una misura comune, diconsi *commensurabili*, *incommensurabili* in caso contrario.

Un esempio di due grandezze incommensurabili è offerto dall'ipotenusa ed il cateto di un triangolo rettangolo isoscele.

Siano (fig. 63) $AB = AC$ ed $AC \perp AB$. Si faccia

Fig. 63.



$$B A_1 = BA \quad \text{ed} \quad A_1 B_1 \perp BC,$$
$$B_1 A_2 = B_1 A_1 \quad \text{ed} \quad A_2 B_2 \perp AC,$$
$$B_2 A_3 = B_2 A_2 \quad \text{ed} \quad A_3 B_3 \perp BC, \text{ ecc.}$$

Sarà allora:

$$A B_1 = C A_1 = A_1 B_1,$$
$$A_1 B_2 = C A_2 = A_2 B_2,$$
$$A_2 B_3 = C A_3 = A_3 B_3, \text{ ecc.}$$

Quindi:

$$CB = 1 \,.\, CA + CA_1,$$
$$CA = 2 \,.\, CA_1 + CA_2,$$
$$CA_1 = 3 \,.\, CA_2 + CA_3, \text{ ecc.,}$$

percui, rimanendo un residuo ad ogni nuova operazione, le grandezze CB e CA non hanno una misura comune.

§ 114. Sotto il *rapporto* $A : B$ ovvero $\frac{A}{B}$ di due grandezze della stessa specie si intende il quoziente dei numeri astratti, a mezzo dei quali tali grandezze vengono riferite alla stessa misura comune. Così a mo' d'esempio si avrebbe nella fig. 62

$$AB : CD = 19\, GB : 8\, GB = 19 : 8.$$

Teoremi. 1. *Il rapporto fra due grandezze commensurabili è un numero intero od una frazione; un tale rapporto quindi è sempre razionale.* (Vedi Aritm. § 118, 1).

2. *Il rapporto fra due grandezze incommensurabili non può essere nè un numero intero nè una frazione; un tale rapporto quindi sarà sempre irrazionale; esso però potrà venire determinato con ogni approssimazione voluta, considerandolo quale limite d'una frazione variabile.* (Vedi Aritm. § 118, 2).

3. *Due rapporti irrazionali sono eguali, se formano i limiti della stessa frazione variabile.* (Vedi Aritm. § 114).

§ 115. L'eguaglianza di due rapporti dicesi una *proporzione*. Una proporzione i cui termini medî sono eguali, chiamasi *proporzione continua*; tale sarebbe la proporzione $A : B = B : C$. In tal caso il termine medio dicesi la *media* od il *medio proporzionale geometrico* fra i due termini estremi, mentre il quarto termine dicesi la *terza proporzionale continua* fra il primo termine ed il termine medio.

Se due specie di grandezze dipendono l'una dall'altra in guisa, che dinotando con A e B due valori corrispondenti delle stesse, ad mA della prima specie, qualunque sia m, corrispondono mB della seconda,

in guisa che due grandezze dell'una specie stiano come le corrispondenti grandezze dell'altra, *le due specie di grandezze si dicono direttamente proporzionali* od *in rapporto diretto*. Se all'incontro, essendo A e B due valori fra loro corrispondenti delle due specie di grandezze, ad mA corrisponde $\frac{B}{m}$, in guisa quindi che due grandezze dell'una stiano in rapporto inverso alle corrispondenti grandezze dell'altra specie, *le due specie di grandezze diconsi inversamente proporzionali* od *in rapporto inverso*.

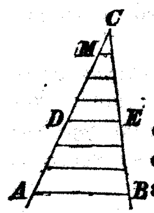
Teorema. *Se due specie di grandezze sono direttamente od inversamente proporzionali per ogni due valori commensurabili d'una delle stesse, tali dovranno essere del pari per ogni due valori incommensurabili di quella stessa specie.* (Vedi Aritm. § 122).

II. Proporzionalità dei segmenti.

§ 116. Più rette passanti per uno stesso punto formano un *fascio di raggi*; il punto comune chiamasi *vertice* del fascio. Se le rette sono situate in un piano, il fascio è piano. Ogni retta che tagli i raggi d'un fascio piano, nomasi *trasversale* del fascio (§ 21).

Teorema. *Due raggi sono tagliati proporzionalmente da due trasversali parallele.*

Fig. 64.



Ipotesi: $DE \parallel AB$ (fig. 64).

Tesi: $CD : DA = CE : EB,$
$CA : DA = CB : EB,$
$CA : CD = CB : CE.$

Dimostrazione: Siano i due segmenti CD e DA commensurabili e CM sia una loro misura comune per cui si abbia $CD = m. \; CM$, $DA = n. \; CM$ e perciò anche $CD : DA = m : n$. Se si divide la CD in m parti, e la DA in n parti eguali, e dai punti di divisione si conducono delle parallele alla AB, anche la CB resterà divisa in $m + n$ parti eguali (§ 59, 3), delle quali m spetteranno alla CE ed n alla EB per cui si avrà $CE : EB = m : n$. Dal confronto di questa proporzione colla antecedente risulta $CD : DA = CE : EB$.

Dalla proporzione $CD : DA = CE : EB$ emerge del pari la giustezza della seconda e della terza delle proporzioni sopra enunciate. Infatti

$$(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB \text{ ovvero } CA : DA = CB : EB,$$
$$(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE \text{ ovvero } CA : CD = CB : CE.$$

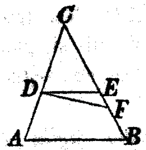
Queste proporzioni poi, a mente del § 115, reggono del pari qualora i segmenti CD e DA fossero incommensurabili.

In modo consimile si potrebbe dimostrare questo teorema esteso al caso in cui una delle trasversali parallele taglia i complementi dei due raggi.

Corollario. Qualunque retta parallela ad uno dei lati d' un triangolo divide gli altri due in segmenti fra loro proporzionali.

§ 117. Teorema. *Se due raggi sono tagliati proporzionalmente da due trasversali, queste sono parallele fra loro.* (Inversione del teorema al § 116).

Fig. 65.

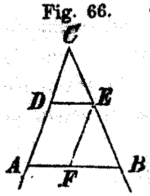


Dimostrazione: Sia (fig. 65) $CA:CD = CB:CE$. Se la retta condotta dal punto D parallelamente alla AB tagliasse la CB nel punto F, dovrebbe, giusta il § 116, sussistere la proporzione $CA:CD = CB:CF$. Ma allora, stante la supposizione fatta, dovrebbe essere $CF = CE$, ovvero il punto F dovrebbe cadere sul punto E. Dunque la DE è parallela alla AB.

Corollario. Qualunque trasversale che divide due lati d'un triangolo in parti proporzionali, è parallela al terzo lato.

§ 118. Teorema. *Se due raggi sono tagliati da due trasversali parallele, i segmenti delle trasversali sono proporzionali ai segmenti di ciascuno dei raggi* (fig. 66).

Fig. 66.

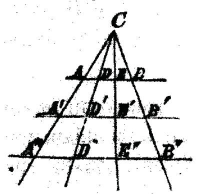


Dimostrazione: Supposto $DE \parallel AB$, si ha: $CA:CD = CB:CE$ (§ 116). Si conduca $EF \parallel CA$ e si consideri B quale vertice e perciò EF e CA quali trasversali. Sarà allora $AB:AF = CB:CE$, ovvero, per essere $AF = DE$, $AB:DE = CB:CE$. Dunque

$$AB:DE = CA:CD = CB:CE.$$

§ 119. Teorema. *Se un fascio piano di raggi viene tagliato da due o più trasversali parallele,* a) *ogni due segmenti d'un raggio sono proporzionali ai rispettivi segmenti di qualsiasi altro raggio,* e b) *ogni due segmenti d'una trasversale sono proporzionali ai rispettivi segmenti di qualsiasi altra trasversale* (fig. 67).

Fig. 67.



Supposizione: $AB \parallel A'B' \parallel A''B'' \ldots$

Tesi: a) $CA:CA':CA'' \ldots$
$= CD:CD':CD'' \ldots$
$= CE:CE':CE'' \ldots$
b) $AD:A'D':A''D'' \ldots$
$= DE:D'E':D''E'' \ldots$
$= EB:E'B':E''B'' \ldots$

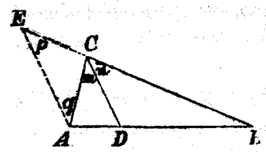
La *dimostrazione* segue dai §§ 116 e 118.

§ 120. 1. *La bisettrice d'un angolo d'un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali ai due lati di quell'angolo.*

Supposizione: Sia (fig. 68) nel triangolo ABC, CD la bisettrice dell'angolo C, quindi $m = n$.

Tesi: $AD:BD = AC:BC$.

Fig. 68.



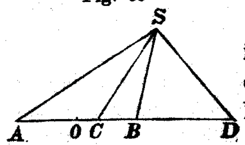
Dimostrazione: Si prolunghi la BC, e per il punto A si conduca la AE parallela alla CD sino all'incontro della BC. Si avrà allora $m = q$, $n = p$, ed essendo $m = n$, $q = p$ e perciò anche $EC = AC$. Nel triangolo ABC è $CD \parallel EA$, per cui si può stabilire la proporzione $AD:BD = EC:BC$, da cui ne segue $AD:BD = AC:BC$.

2. *La bisettrice d'un angolo esterno d'un triangolo taglia il prolungamento del lato opposto del triangolo in un punto, le cui distanze dalle estremità di quel lato sono proporzionali ai lati passanti per quelle stesse estremità.* (La *dimostrazione* è analoga a quella al numero 1).

III. Divisione armonica dei segmenti.

§ 121. Se due punti C e D (fig. 69), l'uno giacente sul segmento AB, l'altro sul suo prolungamento, hanno una tale posizione, che le loro distanze dalle estremità di quel segmento siano direttamente proporzionali, ovvero in altre parole, che fra tali distanze esista la proporzione:

Fig. 69.



$$AC:BC = AD:BD,$$

il segmento AB dicesi *diviso armonicamente* da quei due punti C e D.

Dalla proporzione $AC:BC = AD:BD$ segue $CB:DB = CA:DA$.

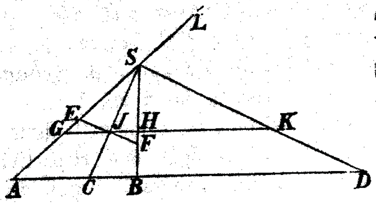
Quindi se il segmento AB è diviso armonicamente dai punti C e D, anche il segmento CD lo è dai punti A e B.

I punti A, B, C, D sono *punti armonici* ed i punti C e D *punti coniugati armonici* rispetto al segmento AB. Coniugati armonici sarebbero eziandio B ed A rispetto al segmento CD.

Quattro raggi che partono da uno stesso punto, formano un *fascio armonico*, se passano per quattro punti armonici. I raggi stessi chiamansi *raggi armonici*, mentre *raggi coniugati armonici* diconsi quelli che passano per due punti coniugati armonici.

§ 122. Teoremi. 1. *Se si conduce una parallela ad un raggio d'un fascio armonico, il raggio a questo coniugato dimezza il segmento della parallela compresa fra gli altri due raggi.*

Fig. 70.



Dimostrazione: Siano (fig. 70) SA, SC, SB, SD i raggi d'un fascio armonico ed abbiasi $EF \| SD$. Si conduca per il punto J la $GK \| AD$ e sarà, giusta i §§ 116 e 118:

$$JE:KS = GJ:GK, \text{ e}$$
$$JF:KS = HJ:HK.$$

Venendo poi i segmenti GK ed AD (vedi § 119) divisi proporzionalmente da quei quattro raggi, ed essendo quindi G, J, H, K quattro punti armonici, si potrà stabilire la proporzione: $GJ:HJ = GK:HK$, ovvero $GJ:GK = HJ:HK$, quindi anche $JE:KS = JF:KS$, dunque $JE = JF$.

2. *Un fascio armonico viene diviso da ogni trasversale in quattro punti armonici.*

Dimostrazione: Siano (fig. 70) SA, SC, SB, SD i raggi d'un fascio armonico e GK una trasversale qualunque di questo fascio. Si conduca per il punto J la $EF \| SD$, e si avrà (vedi §§ 116 e 118):

$$GJ:GK = JE:KS \text{ ed } HJ:HK = JF:KS.$$

Ma per quanto fu dimostrato al numero 1, JE è eguale ad JF, quindi $GJ:GK = HJ:HK$ ovvero $GJ:HJ = GK:HK$; dunque G, J, H, K sono quattro punti armonici.

§ 123. Teorema. *La bisettrice d'un angolo d'un triangolo e quella del suo angolo adiacente dividono armonicamente il lato del triangolo opposto al primo angolo.*

Dimostrazione: Abbiasi nel triangolo ABS (fig. 70) l'angolo $ASC = BSC$ e l'angolo $BSD = LSD$. Sarà allora:

$$AC:BC = AS:BS \text{ ed } AD:BD = AS:BS \text{ (§ 120, 1 e 2);}$$

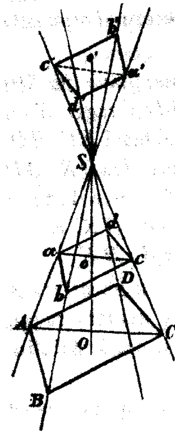
dunque

$$AC:BC = AD:BD.$$

IV. Somiglianza delle figure piane.

§ 124. Teoremi. 1. *Se i raggi d'un fascio piano* (fig. 71), *a partire dal suo vertice* S, *vengono divisi proporzionalmente dai punti* A *ed* a, B *e* b, C *e* c..., *i segmenti corrispondenti fra ogni due punti d'intersezione delle figure* ABCD... *ed* abcd... *sono fra loro proporzionali e gli angoli formati da quei segmenti sono a due a due eguali.*

Fig. 71.



Dimostrazione: Sia $SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = \ldots$

Da questa supposizione segue immediatamente (§ 117) $AB \| ab$, $AC \| ac$, $BC \| bc \ldots$, e perciò (§ 118)

$$AB:ab = SB:Sb \text{ e } BC:bc = SB:Sb,$$

e quindi anche $AB:ab = BC:bc$; ecc.

Che sia l'angolo $ABC = abc$, l'angolo $BAC = bac$, l'angolo $BCD = bcd \ldots$ risulta dal § 26, 1.

Le stesse relazioni sussistono se, come nelle figure $ABCD\ldots$ ed $a'b'c'd'\ldots$, di ogni due rispettivi punti d'intersezione, l'uno è situato sopra un raggio del fascio e l'altro sul complemento dello stesso; in questo caso però i rispettivi segmenti sono a due a due paralleli in senso inverso.

Scolio. Se A, B, C, $D\ldots$ sono punti d'una periferia d'un cerchio, anche i punti a, b, c, $d\ldots$ si troveranno sopra una circonferenza di un altro cerchio. Infatti, sia O il centro della circonferenza passante per i punti A, B, $C\ldots$, ed o il punto del raggio SO corrispondente ad O. Si avrà allora: $AO:ao = BO:bo = CO:co = \ldots$; essendo poi $AO = BO = CO = \ldots$, anche ao sarà $= bo = co = \ldots$, dunque i punti a, b, $c\ldots$ si trovano sulla periferia d'un cerchio il cui centro è o.

2. Inversione: *Due figure piane nelle quali i relativi segmenti sono proporzionali ed i cui angoli sono rispettivamente eguali, si possono collocare sur un fascio di raggi in modo che i rispettivi loro punti cadano sugli stessi raggi o sui loro complementi ed abbiano dal vertice distanze proporzionali* (fig. 71).

Dimostrazione: Sia $AB:ab = AC:ac = BC:bc = \ldots$, l'angolo $ABC = abc$, $BAC = bac$, $BCD = bcd$.

Se si collocano le due figure piane in modo che due segmenti concorrenti in un punto dell'una, siano paralleli nello stesso senso ai relativi segmenti dell'altra, anche due altri segmenti qualsiano corrispondenti delle due figure, dovranno essere paralleli nello stesso senso, avendo quelle figure i relativi segmenti proporzionali e gli angoli a due a due eguali.

Se due figure hanno una tale posizione che ogni due segmenti corrispondenti siano paralleli, le rette passanti per ogni due punti corrispondenti si taglieranno nello stesso punto. Supponiamo che S sia il punto d'incontro delle rette Aa e Bb; se la retta Cc non passasse per lo stesso punto S, ma tagliasse la Bb in S', dovrebbero giusta il § 118, sussistere le proporzioni $AB:ab = SB:Sb$ e $BC:bc = S'B:S'b$ e perciò anche, essendo $AB:ab = BC:bc$, $SB:Sb = S'B:S'b$ donde si ricava $(SB - Sb):(S'B - S'b) = SB:S'B'$ ovvero $Bb:Bb = SB:S'B$, e quindi anche $S'B = SB$. Il punto S' deve essere quindi identico ad S ovvero la Cc deve passare per il punto S. Similmente si dimostra che la retta Dd debba passare per il punto S, per cui SA, SB, SC, $SD\ldots$ sono i raggi d'un fascio, e giusta il § 116, si può stabilire la proporzione:

$$SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = \ldots$$

Eguale sarebbe la dimostrazione qualora le due figure avessero una tale posizione da avere i corrispondenti segmenti paralleli in senso inverso.

§ 125. Due figure piane diconsi *simili* ($\backsim$), se possono essere collocate sopra un fascio di raggi in modo che cadendo i corrispondenti loro punti sugli stessi raggi o loro complementi, quei punti abbiano dal vertice distanze proporzionali. Collocate in questa posizione le figure simili diconsi *omotetiche*, e precisamente *omotetiche dirette*, quando i corrispondenti punti cadono sugli stessi raggi, *omotetiche inverse*, quando quei punti cadono sui prolungamenti dei raggi.

I *punti* corrispondenti diconsi *omologhi*, ed *omologhi* pure i *segmenti* (lati, diagonali, altezze, raggi) corrispondenti delle due figure.

In due figure omotetiche due segmenti omologhi qualsiano sono paralleli nello stesso senso od in senso contrario.

Per *centro di similitudine* di due figure omotetiche s'intende il punto in cui si tagliano le rette passanti per ogni coppia di punti omologhi di quelle figure. Il centro di similitudine è *esterno*, quando le due figure sono omotetiche dirette, *interno*, quando le stesse sono omotetiche inverse.

Se il rapporto costante delle distanze di due punti omologhi dal centro di similitudine è $= 1$, le figure simili sono nello stesso tempo *eguali*.

Corollari. *a*) In due figure simili i segmenti omologhi sono proporzionali e gli angoli da essi formati a due a due eguali.

b) Due *circonferenze* sono omotetiche dirette ed inverse.

Scolio. La definizione or data delle figure simili precisa maggiormente il concetto della somiglianza, *quale eguaglianza della forma*, esposto al § 3.

Simiglianza dei triangoli.

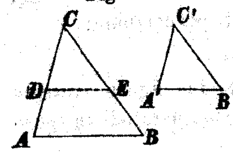
§ 126. Due *triangoli* sono *simili* se hanno i lati omologhi proporzionali e gli angoli da questi formati a due a due eguali fra loro.

Teorema. *Se in un triangolo si conduce una parallela ad un lato, il triangolo che ne nasce è simile a quello dato* (fig. 72).

Dimostrazione: La proporzionalità dei lati dei due triangoli risulta dal § 118, l'eguaglianza degli angoli dal § 24, 2.

§ 127. I Caso di simiglianza. *Due triangoli sono simili se hanno due angoli rispettivamente eguali* (fig. 72).

Fig. 72.



Ipotesi: $A = A'$ e $C = C'$.

Tesi: $\triangle ABC \backsim A'B'C'$.

Dimostrazione: Si faccia $CD = C'A'$ e si conduca $DE \parallel AB$. Sarà allora l'angolo $CDE = A = A'$ e perciò $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§ 37); ma $\triangle ABC$ è $\backsim DEC$ (§ 126), dunque anche $\triangle ABC \backsim A'B'C'$.

Corollario. Due triangoli sono simili se hanno o i lati a due a due paralleli o a due a due normali fra loro (§ 26).

§ 128. II Caso di simiglianza. *Due triangoli sono simili se hanno un angolo eguale compreso fra due lati aventi lo stesso rapporto* (fig. 72).

Sia $AC:A'C' = BC:B'C'$ e $C = C'$.

Facendo $CD = C'A'$ e conducendo $DE \parallel AB$ si avrà $AC:CD = BC:CE$, ovvero $AC:A'C' = BC:CE$. Per supposizione si ha $AC:A'C' = BC:B'C'$, quindi $CE = B'C'$ e perciò $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§ 38); ma $\triangle ABC$ è $\backsim DEC$, dunque $\triangle ABC \backsim A'B'C'$.

§ 129. III Caso di simiglianza. *Due triangoli sono simili se hanno due lati rispettivamente proporzionali ed eguale l'angolo opposto al maggiore di questi due lati* (fig. 72).

La dimostrazione, che si fonda sul § 39, è analoga a quella del § 128.

§ 130. IV Caso di simiglianza. *Due triangoli sono simili se hanno tutti e tre i lati rispettivamente proporzionali* (fig. 72).

Sia $AC:A'C' = AB:A'B'$ e

$AC:A'C' = BC:B'C'$.

Si faccia $CD = C'A'$ e si guidi $DE \parallel AB$. Sarà allora

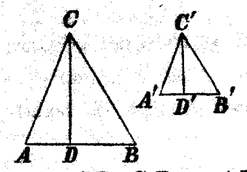
$AC:CD = AB:DE$ ed $AC:CD = BC:CE$, ovvero

$AC:A'C' = AB:DE$ ed $AC:A'C' = BC:CE$.

Paragonando queste proporzioni con quelle della premessa, risulta $DE = A'B'$ e $CE = B'C'$ e perciò $\triangle CDE \cong A'B'C'$ (§ 40); ma $\triangle ABC$ è $\backsim CDE$, dunque $\triangle ABC \backsim A'B'C'$.

§ 131. Teorema. *In due triangoli simili le altezze omologhe stanno fra loro come due lati omologhi.*

Fig. 73.

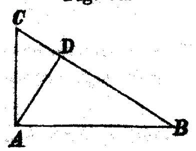


Dimostrazione: Sia (fig. 73) $\triangle ABC \backsim A'B'C'$, CD l'altezza sul lato AB, e $C'D'$ l'altezza sul lato omologo $A'B'$.

I due triangoli ACD ed $A'C'D'$ sono simili, avendo due angoli rispettivamente eguali, per cui si potrà stabilire la proporzione: $CD : C'D' = AC : A'C'$, e del pari l'altra $CD : C'D' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

§ 132. Teorema. *Se dal vertice dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo si abbassa una normale sulla ipotenusa, 1: ogni cateto è media proporzionale geometrica fra l' intera ipotenusa ed il segmento adiacente a quel cateto; 2: la normale è media proporzionale geometrica fra i due segmenti dell' ipotenusa.*

Fig. 74.



Dimostrazione: Sia (fig. 74) l'angolo BAC retto, ed $AD \perp BC$.

Essendo nei triangoli ABC ed ACD l'angolo $C = C$, $BAC = ADC = R$, anche il terzo angolo B sarà $= CAD$ e perciò $\triangle ABC \backsim DAC$. Egualmente sarà $\triangle ABC \backsim DBA$ e per conseguenza anche $\triangle DAC \backsim DBA$.

1. Dalla somiglianza dei $\triangle ABC$ e DAC si ha: $BC : AC = AC : CD$;
   " " " $\triangle ABC$ e DBA " $BC : AB = AB : BD$.
2. " " " $\triangle DAC$ e DBA " $CD : AD = AD : BD$.

§ 133. Se nella fig. 74 si pone $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CD = p$, e $BD = q$, ove a, b, c, p, q dinotano le misure di quei segmenti, si ottiene in forza delle proporzioni enunciate al § 132, 1

$$a : b = b : p; \text{ quindi } \quad a : c = c : q; \text{ quindi}$$
$$ap = b^2, \quad aq = c^2.$$

Sommando queste due ultime equazioni si ha:

$$ap + aq = b^2 + c^2.$$

Essendo poi $ap + aq = a(p + q) = a \cdot a = a^2$, ne risulta infine

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

In ogni triangolo rettangolo il quadrato della misura dell' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati delle misure dei due cateti. (Teorema di Pitagora).

Scolio. Se per *prodotto di due segmenti* s'intende il prodotto delle misure di quei segmenti, e se per *quadrato d' un segmento* s'intende il quadrato della misura di quel segmento, il teorema di Pitagora potrà venir enunciato in modo più breve come segue:

In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati dei due cateti.

Sempre nel significato ora esposto si potrà scrivere del pari:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Di questo modo più breve d'enunciazione si farà in seguito ripetuto uso.

Simiglianza dei poligoni.

§ 134. Due *poligoni sono simili* se hanno i lati omologhi proporzionali e gli angoli da questi formati a due a due eguali.

Da questa definizione in uno al § 124 risultano i seguenti teoremi:

1. *In due poligoni simili le diagonali omologhe stanno come i lati omologhi.*
2. *Due poligoni simili vengono divisi a mezzo di diagonali omologhe in triangoli simili.*
3. *Due poligoni sono simili se si possono dividere in un numero eguale di triangoli rispettivamente simili e nel medesimo ordine disposti.*
4. *I perimetri di due poligoni simili stanno come i loro lati omologhi.*
5. *Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili fra loro.*
6. *In due poligoni regolari dello stesso numero di lati i raggi delle circonferenze a loro iscritte o circoscritte* (§ 89, 1) *stanno come i loro lati omologhi.*
7. *I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno fra loro come i raggi delle circonferenze a loro iscritte e circoscritte.*

V. Applicazione della simiglianza a teoremi relativi al cerchio.

§ 135. Teorema. *Se da un punto d' una circonferenza si guidano le corde all' estremità d' un diametro e la normale su questo, 1: ogni corda è media proporzionale fra tutto il diametro ed il segmento adiacente a quella corda, 2: la normale è media proporzionale fra i due segmenti del diametro.* (Segue dai §§ 83 e 132).

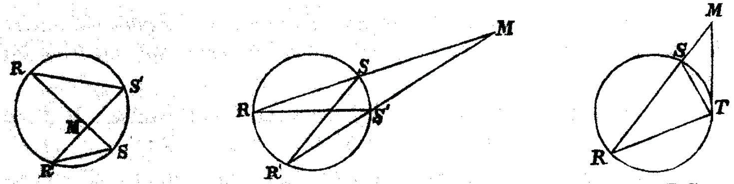
§ 136. Se da un punto posto all' interno od all' esterno d' un cerchio si conduce allo stesso una secante, le parti della stessa comprese fra quel punto ed i suoi punti d' intersezione col cerchio chiamansi *i segmenti di quella secante.*

Teoremi. 1. *Se da un punto del piano d'un cerchio si guidano allo stesso due secanti, i segmenti dell'una formano i termini esterni, i segmenti dell'altra i termini medi d'una proporzione.*

2. *Se per un punto del piano d'un cerchio si conducono allo stesso una secante ed una tangente, la tangente è media proporzionale tra i due segmenti della secante.*

Fig. 75.

I II III



Dimostrazione: 1. Si guidino (fig. 75, I e II) i segmenti RS' ed $R'S$ e sarà l'angolo $MRS' = MR'S$ (§ 82, *a*), perciò $\triangle MRS' \sim MR'S$, laonde $MR : MR' = MS' : MS$.

2. Si guidino (fig. 75, III) i segmenti RT ed ST e sarà l'angolo $MRT = MTS$ (§ 84), perciò $\triangle MRT \sim MTS$, laonde $MR : MT = MT : MS$.

§ 137. Se da un punto del piano d'un cerchio si conducono allo stesso delle secanti, il *prodotto dei due segmenti* di ciascuna di queste *è costante* e precisamente

a) *eguale al quadrato della metà della minima corda del punto dato, se questo è situato all'interno del cerchio,*

b) *eguale al quadrato della tangente guidata dal punto stesso, se questo è situato all'esterno del cerchio.*

Fig. 76.

I II

Dimostrazione: *a*) Sia (fig. 76, I) M un punto nell'interno del cerchio ed RS una secante qualunque passante per quel punto. Si conducano per M il raggio OC e la minima corda, vale a dire la corda AB normale ad OC, e sarà $MR : MA = MB : MS$ (§ 136, 1), quindi (§ 133, scolio) $MR . MS = MA . MB$; ma MB è eguale ad MA, dunque $MR . MS = MA^2$.

b) Se invece (fig. 76, II) M è un punto esterno al cerchio, MSR una secante qualunque ed MT una tangente passante per quel punto, si avrà $MR : MT = MT : MS$ (§ 136, 2), e per conseguenza $MR . MS = MT^2$.

§ 138. Il *prodotto costante* $MR . MS$ (fig. 76) dei due segmenti d'una secante qualunque condotta ad un cerchio da un punto dato M, chiamasi la *potenza* di questo punto rispetto a quel cerchio.

La potenza di un punto rispetto ad un cerchio è eguale all'eccesso del quadrato della distanza di questo punto al centro sul quadrato del raggio.

Dal triangolo rettangolo AMO della fig. 76, I risulta: $MA^2 = OA^2 - MO^2$, quindi $MR . MS = MA^2 = OA^2 - MO^2$.

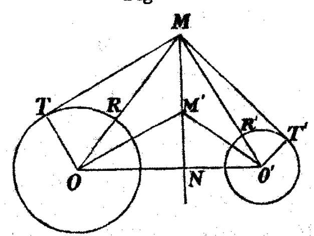
Dal triangolo rettangolo MTO della fig. 76, II si ricava: $MT^2 = MO^2 - OT^2$, laonde $MR . MS = MT^2 = MO^2 - OT^2$.

§ 139. Un punto ha *la stessa potenza* rispetto a due cerchi, se la differenza dei quadrati delle distanze di quel punto dai centri dei due cerchi è eguale alla differenza dei quadrati dei due raggi.

Infatti la potenza del punto M (fig. 77) rispetto al cerchio O è $MO^2 - RO^2$, la potenza dello stesso punto rispetto al cerchio O' è $MO'^2 - R'O'^2$, quindi, se $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$ anche $MO^2 - RO^2 = MO'^2 - R'O'^2$ od in altre parole M avrà la stessa potenza rispetto a tutti e due i cerchi.

Teorema. *Se un punto* M *ha la stessa potenza rispetto a due cerchi* O *ed* O', *anche qualunque punto della normale abbassata da* M *sulla linea dei centri* OO' *ha la stessa potenza rispetto a quei cerchi.*

Fig. 77.



Siano $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$ ed $MN \perp OO'$. Si avrà $MO^2 = ON^2 + MN^2$ ed $MO'^2 = O'N^2 + MN^2$, quindi $MO^2 - MO'^2 = ON^2 - O'N^2$. Per un altro punto qualunque M' della normale MN si otterrebbe del pari $M'O^2 - M'O'^2 = ON^2 - O'N^2$ e perciò $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$.

Il luogo geometrico di tutti i punti che hanno la stessa potenza rispetto a due cerchi dati, chiamasi l'*asse radicale* di quei cerchi. La retta MN è perciò l'asse radicale dei cerchi O ed O'.

Corollari. *a*) L'asse radicale di due cerchi è normale alla linea dei loro centri.

b) Le tangenti condotte da un punto dell'asse radicale situato all'esterno dei due cerchi sono fra loro eguali. Infatti da $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - T'O'^2$, segue $MT^2 = MT'^2$, e perciò $MT = MT'$.

c) Se le tangenti condotte da un punto esterno a due cerchi sono fra loro eguali, il punto è situato sull'asse radicale di quei cerchi. Infatti da $MT^2 = MT'^2$ segue $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - T'O'^2$.

d) Se due cerchi si tagliano, il loro asse radicale è la secante che passa per i due punti di loro intersezione (§ 94, 3).

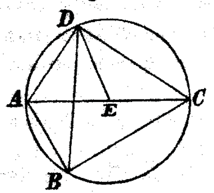
e) Se due cerchi si toccano, il loro asse radicale è la tangente comune ai due cerchi e passante per il loro punto di contatto (§ 94, 1 e 2).

§ 140. Teorema. *In ogni quadrilatero iscritto il prodotto delle diagonali è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti* (Teorema di *Tolomeo*).

Dimostrazione: Siano (fig. 78) a, b, c, d, m, n le misure dei lati AB, BC, CD, AD e delle diagonali AC e BD.

Si faccia l'angolo $CDE = ADB$ e si indichino con m' ed m'' i segmenti AE ed EC. Si avrà allora, essendo l'angolo $ACD = ABD$ (§ 82, a), $\triangle ECD \sim ABD$ e perciò:

Fig. 78.



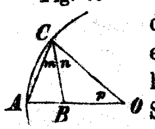
$$EC : CD = AB : BD \text{ ovvero } m'' : c = a : n,$$
da cui $m''n = ac$.

Similmente si dimostra essere $\triangle AED \sim BCD$, quindi $AE : AD = BC : BD$ ovvero $m' : d = b : n$, da cui $m'n = bd$, laonde
$$(m'' + m')\, n = ac + bd, \text{ ovvero}$$
$$mn = ac + bd.$$

§ 141. Un segmento dicesi diviso in *proporzione continua* ovvero in *media ed estrema ragione*, qualora la parte maggiore dello stesso sia media proporzionale fra tutto il segmento e la sua parte minore (*taglio aureo*).

Teoremi. 1. *Il lato del decagono regolare iscritto è eguale al segmento maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione.*

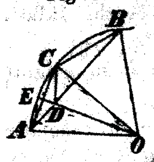
Fig. 79.



Dimostrazione: Sia la corda AC (fig. 79) il lato del decagono regolare iscritto. Si guidino i raggi AO e CO e ne risulterà l'angolo $AOC = 36°$ e perciò l'angolo $ACO = 72°$, essendo il triangolo ACO isoscele. Se si dimezza ora l'angolo ACO, si avrà $m = n = p$ e perciò $\triangle ACO \sim ABC$, per cui si potrà stabilire la proporzione $AO : AC = AC : AB$, e per essere $AC = BC = BO$, anche l'altra $AO : BO = BO : AB$.

2. *Il quadrato del lato del pentagono regolare iscritto è eguale alla somma dei quadrati del raggio e del lato del decagono regolare iscritto allo stesso cerchio.*

Fig. 80.



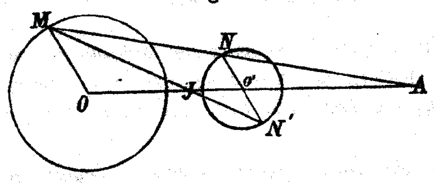
Dimostrazione: Siano (fig. 80) r, a e b le misure del raggio OA e dei lati AB ed AC del pentagono e del decagono regolare iscritto. Guidate le bisettrici OC ed OD degli angoli al centro AOB ed AOC del pentagono e del decagono, si vede che la OD prolungata sino in E insiste perpendicolarmente sulla AC nel suo punto medio, per cui si avrà l'angolo $BAO = BOD = 54°$ e perciò $\triangle ABO \sim OBD$, quindi $AB : BO = BO : BD$ ovvero, se $AD = m$ e $BD = n$, $a : r = r : n$, da cui $an = r^2$.

Si conduca la CD, ed il $\triangle ACD$ sarà isoscele, per cui l'angolo $ACD = CAD = ABC$ e per conseguenza $\triangle ABC \sim ACD$, e perciò anche $AB : AC = AC : AD$ ovvero $a : b = b : m$, da cui $am = b^2$; essendo $an = r^2$ ed $am = b^2$ sarà pure
$$a(n + m) = r^2 + b^2 \text{ ovvero } a^2 = r^2 + b^2.$$

§ 142. Teorema. *Tutte le rette condotte per l'estremità di due raggi paralleli di due cerchi passano per uno stesso punto del prolungamento della loro linea dei centri, se tali raggi sono paralleli nello stesso senso, per un punto della linea dei centri stessi, se i raggi sono paralleli in senso contrario.*

Sebbene questa proposizione sia conseguenza del § 124, pure facciamo seguire qui appresso una speciale dimostrazione della stessa.

Fig. 81.



Sia OM (fig. 81) parallelo ad $O'N$, nello stesso senso, ed a $O'N'$ in senso contrario; si ponga $OM = R$, $O'N = O'N' = r$ ed $OO' = c$ e sarà, giusta il § 118,
$$\frac{OA}{O'A} = \frac{R}{r} \text{ ed } \frac{OJ}{O'J} = \frac{R}{r},$$
e perciò anche $\dfrac{OA}{OA - O'A} = \dfrac{R}{R - r}$ ed $\dfrac{OJ}{OJ + O'J} = \dfrac{R}{R + r}$ ovvero
$$OA = \frac{cR}{R - r} \text{ ed } OJ = \frac{cR}{R + r}, \text{ quindi,}$$
essendo $O'A = OA - c$ ed $O'J = c - OJ$,
$$O'A = \frac{cr}{R - r} \text{ ed } O'J = \frac{cr}{R + r}.$$

Siccome poi queste espressioni sono costanti qualsiano le posizioni dei due raggi paralleli, ne consegue che in A si taglieranno tutte le rette passanti per le estremità di ogni due raggi paralleli nello stesso senso, in J tutte quelle che congiungono le estremità di due raggi paralleli in senso contrario.

I punti A ed J diconsi i *centri di similitudine* dei due cerchi, e precisamente A il centro *esterno*, J il centro *interno* di similitudine. Ogni retta passante per un centro di similitudine dicesi *raggio di similitudine* di quel punto, e precisamente raggio *esterno* od *interno* di similitudine, a seconda che esso passa per un centro esterno od interno di similitudine.

Scolio. Dalle ultime formole si ricava:

$$OJ : O'J = OA : O'A,$$

vale a dire *la linea dei centri viene divisa armonicamente dai due centri di similitudine.*

§ 143. *Se un raggio di similitudine di due cerchi ha un punto comune con una delle circonferenze, un secondo ne dovrà avere pure coll' altra circonferenza.*

Supponiamo che il raggio esterno di similitudine AM (fig. 81) abbia il punto M comune col cerchio O, ed OM ed $O'N$ siano paralleli e diretti nello stesso senso. La retta MN deve passare, giusta il § 142, per il punto A, per cui i punti M, N, A sono situati in linea retta, cioè la AM ha anche un punto N comune colla circonferenza O'.

Nella stessa guisa si fa la dimostrazione per un raggio interno di similitudine JM.

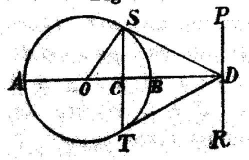
Corollari. *a*) Se un raggio di similitudine ha *due* punti comuni con una delle circonferenze, altri due ne avrà coll' altra circonferenza, per cui quel raggio sarà una *secante* comune alle due circonferenze.

b) Se un raggio di similitudine ha *un* sol punto comune con una delle circonferenze, uno solo ne avrà anche coll' altra circonferenza, per cui quel raggio sarà una *tangente* comune alle due circonferenze, e precisamente una tangente *esterna* od *interna*, a seconda che il raggio di similitudine è esterno od interno.

c) Se un raggio di similitudine non ha *verun* punto comune con una delle circonferenze, non ne avrà neppure comune alcuno coll' altra, per cui quel raggio sarà tutto situato all' *esterno* dei cerchi.

§ 144. Per *poli coniugati* d' un cerchio s' intendono due punti C e D (fig. 82) che dividono armonicamente (§ 121) un diametro AB di quel cerchio; di questi due poli, l' uno trovasi sul diametro, l' altro sul suo prolungamento.

Fig. 82.



Una retta dicesi la *polare* d' un punto rispetto ad un cerchio dato, e questo punto

il *polo* di quella retta, se essa passa per il polo coniugato di quel punto ed insiste perpendicolarmente sulla retta di congiunzione di quei due punti fra loro coniugati. Se ST e PR sono normali alle CD, ST è la polare del punto D e D il polo della retta ST; similmente PR sarebbe la polare del punto C e C il polo della retta PR.

Corollari. *a*) *Il prodotto delle distanze del centro del cerchio al polo ed alla polare è costante ed eguale al quadrato del raggio.*

Infatti la proporzione $AC : BC = AD : BD$ si può scrivere nel modo seguente: $(OB + OC) : (OB - OC) = (OD + OB) : (OD - OB)$ e questa proporzione deriva dall' altra $OB : OC = OD : OB$ dalla quale si ricava $OC . OD = OB^2$.

b) Inversione: *Se per due punti* C *e* D *di un diametro d' un cerchio sussiste l' eguaglianza* $OC . OD = OB^2$, *la polare del punto* C *passa per* D, *e quella del punto* D *per* C.

Infatti se la polare d' uno dei punti, p. e. quella di C, non passasse per D, ma tagliasse la AB in D', dovrebbe essere (coroll. *a*) $OC . OD' = OB^2$; ma allora, stante la supposizione fatta, sarebbe $OD' = OD$ ed il punto D' dovrebbe coincidere con D.

§ 145. 1. *Se da un punto dato esterno ad un cerchio si guidano allo stesso due tangenti, la corda di contatto è la polare di quel punto dato.*

Dimostrazione: Se per il punto D (fig. 82) si conducono le tangenti DS e DT, fra la corda di contatto ST di quelle tangenti ed il raggio OS sussiste la proporzione $OC : OS = OS : OD$ (§ 132), e per essere $OS = OB$, anche l' altra $OC : OB = OB : OD$, da cui si ricava $OC . OD = OB^2$; la corda di contatto ST delle tangenti, normale alla CD nel punto C, è quindi (§ 144, *b*) la polare del punto D.

Corollari. *a*) La polare d' un punto esterno al cerchio taglia questo, e si allontana tanto più dal centro dello stesso quanto più il punto si avvicina al cerchio. Se il punto è sulla circonferenza la polare coincide colla tangente in quel punto.

b) Il polo d' una corda d' un cerchio è il punto d' intersezione delle tangenti guidate al cerchio per le estremità di quella corda.

2. *Se per un punto dato all' interno d' un cerchio si conduce una corda normale al raggio passante per quel punto, e se per l' estremità di quella corda si guidano due tangenti, la retta condotta per la loro intersezione parallelamente alla corda è la polare di quel punto dato.*

Dimostrazione: Se C (fig. 82) è il punto dato ed $ST \perp AB$, il punto d' intersezione delle tangenti SD e TD è situato sul prolungamento del diametro AB (§ 81, *c*), quindi (vedi numero 1)

$OC \cdot OD = OB^2$. La retta PR guidata parallelamente alle ST e perciò normale alla CD, sarà la polare del punto C.

Corollari. *a*) La polare d'un punto all'interno d'un cerchio è situata all'esterno di questo, e si allontana di più in più dallo stesso a misura che il punto dato si avvicina al suo centro. Se il punto coincide col centro, la sua polare trovasi a distanza infinita.

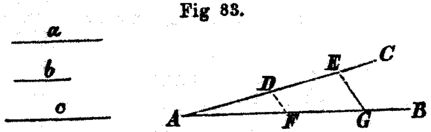
b) Il polo d'una retta situata all'esterno d'un cerchio è il punto medio della corda di contatto delle tangenti condotte dal punto d'intersezione della retta con un diametro normale alla stessa.

VI. Problemi di costruzione.

1. Problemi fondamentali.

§ 146. 1. *Trovare la quarta proporzionale a tre segmenti dati* a, b, c.

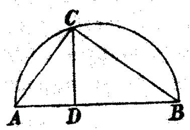
Fig 83.



Si costruisca (fig. 83) un angolo qualunque BAC, si faccia $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, si guidino la DF ed a questa la parallela EG; FG sarà la quarta proporzionale ad a, b, c.

2. *Costruire la terza proporzionale continua a due segmenti dati* a *e* b.

Fig. 84.



Soluzione 1. Secondo il probl. 1, ponendo $c = b$.

Soluzione 2. Si conduca (fig. 84) $DC \perp AB$, si faccia $DA = a$, $DC = b$, si guidino la AC ed a questa normale la CB sino ad incontrare il prolungamento di AD; sarà allora $DA : DC = DC : DB$ (§ 132), ovvero $a : b = b : DB$, quindi DB è la terza proporzionale continua fra a e b.

Soluzione 3. Se a è maggiore di b, si ricorrerà alla seguente semplice costruzione: Fatto $AB = a$ si descrivano una semicirconferenza sopra AB come diametro, e col centro A e raggio b, un arco che tagli quella semicirconferenza in C; condotta la $CD \perp AB$ si avrà la proporzione $AB : AC = AC : AD$ (§ 135), ovvero $a : b = b : AD$.

3. *Costruire la media proporzionale fra due segmenti* a *e* b.

Soluzione 1. Sopra una retta indefinita (fig. 84) si prendano $AD = a$ e $DB = b$. Si descriva una semicirconferenza sopra AB come diametro e si conduca per il punto D la $DC \perp AB$. DC sarà la media proporzionale fra AD e DB (§ 135).

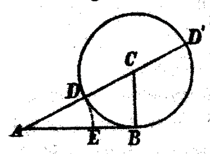
Soluzione 2. Fatto AB eguale al segmento maggiore a ed $AD = b$, si descriva sopra AB, quale diametro, una semicirconferenza e si conduca $DC \perp AB$; la corda AC è la chiesta media proporzionale fra a e b (§ 135).

4. *Dividere un dato segmento* A B *in parti che stiano fra loro come* m : n : p . . .

Guidato per il punto A un raggio qualunque AX, si trasportino sullo stesso, a partire da A, dei segmenti che stiano come $m : n : p \ldots$, e si proceda poi come nel problema 13 del § 98.

5. *Dividere un segmento dato* A B (fig. 85) *in proporzione continua* (*in media ed estrema ragione*).

Fig. 85.



Nell'estremità B del segmento dato si innalzi a questo la normale $BC = \frac{1}{2} AB$; dal punto C, come centro, si descriva una circonferenza col raggio CB; per A e C si guidi una secante che tagli la circonferenza in due punti D e D', si faccia $AE = AD$, ed AB sarà divisa dal punto E in media ed estrema ragione.

Infatti $AD' : AB = AB : AD$ (§ 136, 2), quindi

$$AB : (AD' - AB) = AD : (AB - AD).$$

Essendo poi $AD' - AB = AD' - DD' = AD = AE$ ed $AB - AD = AB - AE = BE$, ne viene che

$$AB : AE = AE : BE.$$

6. *Costruire un triangolo simile ad un altro dato* A B C (fig. 72).

Corrispondentemente ai casi di simiglianza, la costruzione può essere fatta in quattro modi differenti; il più semplice fra questi, però, consisterà nel riportare nelle estremità d'un segmento qualunque $A'B'$ gli angoli A e B e prolungare i lati degli stessi sino che si tagliano nel punto C'; sarà allora $\triangle A'B'C' \backsim ABC$.

Il problema è in genere *indeterminato;* diviene determinato soltanto quando alla condizione di simiglianza si aggiunga un'altra condizione, p. e. il segmento $A'B'$ abbia una data lunghezza.

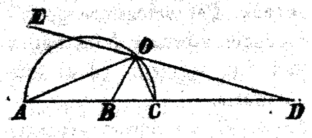
7. *Condurre una tangente comune a due circonferenze.*

Si determinino il centro esterno e quello interno di similitudine dei due cerchi (§ 142) e guidate per ciascuno di quei punti delle tangenti ad una delle circonferenze (§ 99, probl. 4), queste saranno eziandio tangenti all'altra circonferenza (§ 143, *b*).

Determinazione: Se i cerchi sono esterni l'uno all'altro, quattro sono le tangenti comuni possibili, due esterne e due interne; se i cerchi si toccano esteriormente, tali tangenti sono tre, due esterne ed una interna; se si tagliano, sono possibili solo le due tangenti esterne; se i cerchi si toccano internamente, una sola tangente, e precisamente una esterna, soddisfà al problema, mentre non ve ne ha alcuna, se un cerchio è situato del tutto nell'interno dell'altro.

§ 147. 1. ***Dato un segmento e sullo stesso o sul suo prolungamento un punto, determinare il coniugato armonico di quel punto*** (fig. 86).

Fig. 86.



a) Abbiasi da determinare il coniugato esterno D del punto B rispetto al segmento AC.

Si descriva una semicirconferenza sopra AC, come diametro; dal punto B si guidi un segmento BO qualunque, si conduca la CO e si faccia l'angolo $COD = COB$; D sarà il punto coniugato richiesto.

b) Sia da determinare il coniugato B del punto D rispetto al segmento AC.

Si guidi ad arbitrio la DO, si faccia l'angolo $COB = COD$ e B sarà il chiesto punto coniugato.

La dimostrazione si fonda in tutti e due i casi sui §§ 83 e 123.

2. *Costruire l'asse radicale di due cerchi.*

a) Se i due cerchi si tagliano, si guidi la loro corda comune (§ 139, *d*).

b) Se i due cerchi si toccano, si costruisca nel punto di contatto la loro tangente comune (§ 139, *e*).

c) Se i due cerchi O ed O' non sono nè tangenziali, nè secanti, si descriva un cerchio ausiliario M che tagli gli altri due dati. La corda comune ad O ed M sarà il loro asse radicale, così pure sarà asse radicale di O' ed M la corda comune a questi, per cui l'intersezione di queste due corde sarà un punto dell'asse radicale richiesto, e la normale condotta da questo punto alla linea dei centri dei due cerchi sarà l'asse radicale richiesto.

3. *Costruire la polare di un punto dato.*

Si proceda come al § 145, 1 o 2, a seconda che il punto dato è situato all'esterno od all'interno del cerchio.

4. *Costruire il polo d'una data retta.*

Si proceda come al § 145, 1, coroll. *b*, ovvero come al § 145, 2, coroll *b*, a seconda che la data retta taglia il cerchio o si trova al di fuori dello stesso.

2. Metodo delle figure simili.

§ 148. Se fra gli elementi dati d'una figura ve ne siano che determinino la forma della figura stessa, per modo che siano fra loro simili tutte le figure formate con quegli elementi, si può applicare alla soluzione del problema il *metodo delle figure simili.* Si traccia cioè coi dati elementi una figura ausiliaria simile alla figura cercata

e si costruisce in questa il segmento omologo a quello dato nel problema e non utilizzato nella costruzione della figura ausiliaria; il rapporto fra questi due segmenti ci dà pure quello esistente fra ogni due segmenti omologhi della figura ausiliaria e quella cercata. Per sciogliere perciò il problema basterà costruire ogni lato (diagonale, altezza) della figura richiesta, quale quarta proporzionale a quei due segmenti ed al lato omologo (diagonale, altezza) della figura ausiliaria.

La forma d'un triangolo è determinata da due angoli, dal rapporto esistente fra due lati e dall'angolo da essi rinchiuso, dal rapporto fra i tre lati.

Per poter applicare questo metodo non fa mestieri d'una figura ausiliaria simile in tutte le sue parti a quella cercata; basterà che quella lo sia *parzialmente*, qualora con ciò si possa trovare uno o più elementi della figura complessiva, a mezzo dei quali il problema venga ridotto ad altro di già noto.

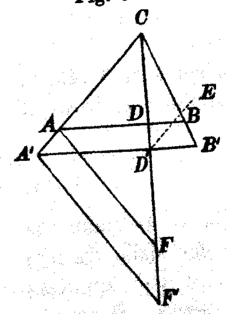
Col rapporto fra un'altezza ed un lato adiacente, ovvero con un angolo alla base, è del tutto stabilita la forma di uno dei triangoli in cui può venire diviso il triangolo richiesto.

A maggiore schiarimento di tale metodo facciamo seguire i seguenti problemi.

1. *Costruire un triangolo di cui siano dati due angoli* α *e* β *e la somma* s *dell'altezza abbassata dal vertice del terzo angolo ed un lato adiacente*

Analisi: I due angoli dati determinano pienamente la forma del triangolo in questione, vale a dire qualunque triangolo costruito con quegli angoli sarebbe simile a quello richiesto. Se in questo triangolo simile ausiliario si costruisce la somma dell'altezza abbassata dal vertice del terzo angolo ed un lato adiacente, tale somma deve stare a quella data come un lato qualunque del triangolo ausiliario sta al suo omologo in quello richiesto. Si potrà quindi costruire un lato qualunque del triangolo richiesto quale quarta proporzionale a tre dati segmenti e con quella poi e gli angoli dati passare alla costruzione del triangolo domandato.

Fig. 87.



Costruzione: Si guidi (fig. 87) un segmento qualunque $A'B'$ e nelle sue estremità si costruiscano gli angoli α e β, in modo che ne risulti il triangolo $A'B'C$. Si abbassi in questo triangolo l'altezza CD', la si prolunghi di $D'F' = A'C$ e si trasporti sulla CF' il segmento CF eguale alla somma s data. Guidata la $F'A'$, e per F la $FA \parallel F'A'$ e per A la $AB \parallel A'B'$, ABC sarà il triangolo richiesto.

Dimostrazione: Essendo $AB \parallel A'B'$ sarà l'angolo $BAC = B'A'C = \alpha$, $ABC = A'B'C = \beta$ e $CD : CD' = AC : A'C$, e quindi anche $(CD + AC) : (CD' + A'C) = AC : A'C = CF : CF'$, per cui essendo $CD' + A'C = CF'$ e $CF = s$, ne segue $(CD + AC) : CF' = s : CF'$ da cui $CD + AC = s$.

Determinazione: Cogli elementi dati il triangolo richiesto è pienamente determinato.

2. *Costruire un triangolo, dati il rapporto fra l'altezza ed un lato adiacente* (h : a), *l'angolo* (α) *opposto a questo lato e la somma dell'altezza e della base* (h + c = s) (fig. 87).

Analisi: Stante il rapporto dato, la forma del *triangolo* rettangolo BDC, contenente il lato $BC = a$ e l'altezza $CD = h$, è pienamente determinata; per cui, costruendo un triangolo simile a quello, si otterrà un angolo ABC eguale all'angolo β del triangolo richiesto. Ora di quest'ultimo sono conosciuti due angoli, per cui, costruendo di nuovo un triangolo simile a questo dovrà la somma dell'altezza e della base del triangolo simile stare a quella data, come un lato qualunque del triangolo simile sta al lato omologo del triangolo domandato.

Da quanto precede risulta la seguente

Costruzione: Si traccino due segmenti qualsiano h' ed a' che stiano nel rapporto $h : a$, si eriga nel punto D' d'uno di questi segmenti la normale $CD' = h$, e fatto centro nel punto C si descriva col raggio a' un arco di circonferenza che tagli la normale in B'. Condotta ora la CB' si costruisca sulla $B'D'$, per esempio in D', un angolo $B'D'E = \alpha$, si guidi $CA \parallel ED'$, si prolunghi la CD' di $D'F' = A'B'$ e si trasporti sulla CF' il segmento CF eguale alla somma s data. Ciò fatto guidate la $F'A'$, per il punto F la $FA \parallel F'A'$ e per il punto A la $AB \parallel A'B'$, ABC sarà il triangolo richiesto.

Dimostrazione: Per costruzione si ha $BAC = B'A'C = B'D'E = \alpha$. Dippiù $CD : CA = CD' : CA = h' : a' = h : a$, del pari

$$(CD + AB) : (CD' + A'B') = CA : CA' = CF : CF'$$

ovvero $(CD + AB) : (CD' + A'B') = s : (CD' + A'B')$

per cui risulta $CD + AB = s$.

Determinazione: Per $h < a$ ed $\alpha + ABC < 180^{\circ}$ la soluzione è sempre possibile, ed un solo triangolo soddisfà alle condizioni del problema.

3. Problema d'Apollonio.

§ 149. Problema. *Dati tre elementi, (punti, rette o circonferenze), costruire una circonferenza che passi per i punti dati, e sia tangenziale alle rette ed alle circonferenze date.*

Questo problema generale comprende dieci problemi speciali, che sono:

Costruire una circonferenza,

1. che passi per tre punti dati;
2. che passi per due punti dati, e sia tangenziale ad una retta data;
3. che passi per due punti dati, e sia tangenziale ad una circonferenza data;
4. che passi per un punto dato, e sia tangenziale a due rette date;
5. che passi per un punto dato, e sia tangenziale ad una retta e ad una circonferenza data;
6. che passi per un punto dato, e sia tangenziale a due circonferenze date;
7. che sia tangenziale a tre rette date;
8. che sia tangenziale a due rette e ad una circonferenza data;
9. che sia tangenziale ad una retta ed a due circonferenze date;
10. che sia tangenziale a tre circonferenze date.

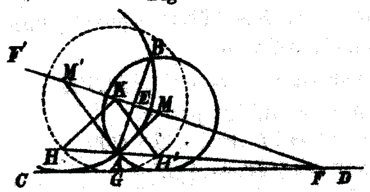
La Geometria moderna ci dà una *soluzione generale* del problema d'Apollonio, noi, però, ci limiteremo a dare la soluzione di alcuni dei casi sopraccitati.

a) Problema 1: Costruire una circonferenza che passi per tre punti dati.

La soluzione di questo problema è contenuta nel § 76. Una sola è la circonferenza che vi corrisponde, mentre il problema non è possibile, qualora i punti dati siano situati in linea retta.

b) Problema 2: Costruire una circonferenza che passi per due punti dati, e sia tangenziale ad una retta data.

Fig. 88.



Siano (fig. 88) A e B i punti dati CD la data retta ed M il centro della circonferenza richiesta. A seconda del § 75 il punto M sarà situato nell'asse di simmetria FEF' del segmento AB. Costruendo ora una circonferenza ausiliaria attorno un punto qualunque K della FF', che tocchi la retta CD nel punto G (§ 80, 3), questa sarà una tangente comune tanto alla circonferenza ausiliaria K, quanto a quella richiesta M, per cui il punto d'incontro F della FF' e CD sarà un centro di similitudine di questi cerchi (§ 143, *b*). Guidando ora la retta AF, che taglierà la circonferenza ausiliaria in H ed H', e la $AM \parallel HK$, si otterrà in M il centro della circonferenza domandata. Se poi si traccia $AM' \parallel H'K$, si avrà in M' il centro di una seconda circonferenza che soddisfarà del pari al problema proposto.

Quali cambiamenti subirà la costruzione per $AB \perp CD$?

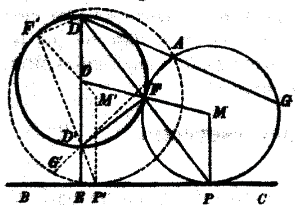
c) Problema 4: Costruire una circonferenza che passi per un punto dato, e sia tangenziale a due rette date.

Il centro d'una circonferenza che tocchi due rette date è situato nell'asse di simmetria dell'angolo formato da queste rette (§ 100, luogo geom. 3, *b*). Se ora dal punto dato si guida all'asse di simmetria una normale e questa si prolunga della propria lunghezza, l'estremità sua dà un secondo punto della chiesta circonferenza. Il problema dunque è ricondotto a quello posto al numero 2, ed ha come questo due soluzioni.

Quali cangiamenti subirà la costruzione se le due rette date sono parallele?

d) **Problema 5: Costruire una circonferenza che passi per un punto dato, e sia tangenziale ad una retta data e ad una circonferenza data.**

Fig. 89.



Siano (fig. 89) A il punto, BC la retta ed O la circonferenza data; se M è la circonferenza che passa per A, e tocca la retta BC nel punto P e la circonferenza O esternamente nel punto F, dovrà essere $MP \perp BC$ ed MFO una linea retta (§ 94, 1). Guidando ora prima per P ed F una retta che incontri la circonferenza O nel punto D e poi il diametro DOD' che prolungato tagli la BC in E, si avrà l'angolo $MPF = MFP = OFD = ODF$, quindi $DE \parallel MP$ e perciò anche $DE \perp BC$. Dippiù è $\triangle DFD' \backsim DEP$ per cui si può stabilire la proporzione $DD' : DP = DF : DE$ della quale si ricava $DD' . DE = DP . DF$. Se la retta passante per A e per l'estremità D più lontana dalla BC del diametro DD' normale alla BC, taglia la circonferenza M in G si avrà $DA : DP = DF : DG$ ovvero $DA . DG = DP . DF$ e quindi anche $DD' . DE = DA . DG$. Ora essendo noti DD', DE e DA, noto del pari sarà DG e quindi anche il punto G, per cui il problema si riduce a quello posto al numero 2, cioè costruire una circonferenza che passi per due punti A e G e tocchi una retta data BC. — Anche per una circonferenza M', che passi per A, sia tangenziale alla BC e tocchi internamente la circonferenza O, la retta guidata per il punto A e per l'estremità D' più vicina alla BC del diametro DD' ci dà un secondo punto determinante G'.

In generale si otterranno quattro circonferenze, delle quali due toccheranno esternamente e due internamente la circonferenza data.

e) Problema 7: Costruire una circonferenza che sia tangenziale a tre rette date.

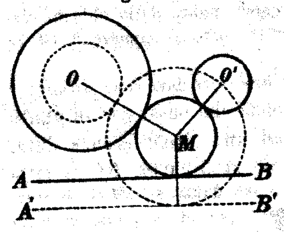
Siano R, R', R'' le tre rette date. A tenore del § 100, 3, *b*, il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenziali alle rette R e R' sarà l'asse di simmetria dell'angolo da esse formato; similmente l'asse di simmetria dell'angolo racchiuso dalle rette R e R'' sarà il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenziali a queste stesse rette, per cui il punto d'intersezione dei due assi di simmetria — per il quale dovrà passare del pari quello dell'angolo formato dalle R' e R'' (§ 48, 2) — sarà il centro della circonferenza richiesta. — Gli assi di simmetria dei tre angoli adiacenti a quelli formati dalle tre rette, daranno i centri di altre tre circonferenze tangenziali alle tre rette date.

f) Problema 9: Costruire una circonferenza che sia tangenziale ad una retta data ed a due circonferenze date.

Siano (fig. 90) AB la retta data, ed O e O' le circonferenze date aventi i raggi r ed r'. Si conduca alla distanza r' la retta ausiliaria $A'B' \parallel AB$, si

descriva col raggio $r - r'$ una circonferenza ausiliaria concentrica alla O e se ne costruisca un'altra che passi per O' e sia tangenziale alla retta $A'B'$ ed alla circonferenza ausiliaria concentrica ad O. Riferendosi al problema 5, si vede che quattro saranno le circonferenze ausiliarie che corrispondono a queste ultime condizioni; di queste circonferenze una è segnata nella figura qui accanto. Se ora per ognuna di queste circonferenze ausiliarie se ne costruisce un'altra ad essa concentrica con un raggio di r' minore, essa sarà tangenziale tanto alla retta AB quanto alle date circonferenze O ed O'; si ottengono in tal modo quattro circonferenze tangenziali. — Se si descrive poi la circonferenza concentrica ad O col raggio $r + r'$ si ottengono in simil guisa altre quattro circonferenze che soddisfanno al problema proposto.

Fig. 90.



VII. Teoremi e problemi per esercizio.

§ 150. *Teoremi.*

1. Le altezze d'un triangolo sono inversamente proporzionali ai lati ai quali sono normali.

2. Due altezze qualunque d'un triangolo si tagliano in modo che il prodotto dei segmenti dell'una è eguale al prodotto dei segmenti dell'altra.

3. Se due triangoli aventi base comune ed eguale altezza si tagliano con una trasversale parallela alla base, i segmenti della stessa che trovansi nell'interno dei due triangoli sono eguali fra loro.

4. Le diagonali d'un trapezio si tagliano in segmenti fra loro proporzionali.

5. Se l'altezza d'un triangolo rettangolo divide l'ipotenusa in media ed estrema ragione (in proporzione continua), l'uno dei due cateti è eguale al segmento dell'ipotenusa ad esso non adiacente e viceversa (§ 132).

6. Se si divide un lato d'un triangolo in media ed estrema ragione e per il punto di divisione si conduce la parallela ad un secondo lato, anche il terzo lato viene diviso in media ed estrema ragione.

7. Se a due circonferenze tangenziali esterne si conducono la tangente interna ed una esterna ad esse comune, i tre punti di contatto sono i vertici d'un triangolo rettangolo (§§ 81 e 83).

§ 151. *Problemi di costruzione.*

1. Dividere la circonferenza d'un cerchio in 5, 10, 20, 40... parti eguali (§ 141 e § 146, problema 5).

2. Dividere la periferia d'un cerchio in 15, 30, 60... parti eguali $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.

3. Iscrivere in una data circonferenza un triangolo che sia simile ad un altro dato.

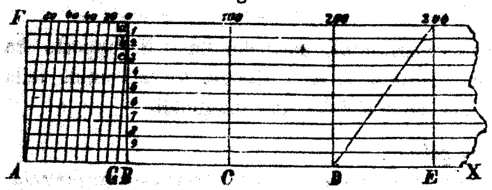
4. Per un punto, situato fra i lati d'un angolo, condurre una retta da quelli limitata, in modo che la retta venga divisa dal punto secondo un dato rapporto $m : n$.

Si faccia uso di una parallela ausiliaria.

5. Costruire un poligono simile ad un altro dato e tale che i suoi lati e quelli del poligono dato stiano in un determinato rapporto $m : n$.

6. Costruire una scala trasversale o ticonica dei decimi.

Fig. 91.



Si trasportino (fig. 91) sopra una retta AX 10 parti eguali, si erigano alla stessa in A, B e nei successivi punti di divisione delle normali e ad egual distanza fra loro si guidino 10 parallele alla AX. Si divida ora, tanto la AB, quanto il segmento Fo ad esso opposto, in dieci parti eguali — il che si otterrà in via più breve determinando prima la lunghezza di una di queste parti a mezzo d'una diagonale D 300 condotta in una divisione qualunque. — Fatto ciò, si guidino le trasversali per G e 0, e per ogni due punti successivi di divisione di AB ed Fo. Se i dieci segmenti della scala ticonica rappresentano 1000 parti eguali, AB ne conterrà 100, BG 10, $a1$ 1, $b2$ 2, e così di seguito di queste parti eguali, per cui supposto che l'intero segmento AX indichi la lunghezza di un metro, AB indicherà quella di un decimetro, BG quella d'un centimetro ed $a1$ quella d'un millimetro.

La dimostrazione si basa sulla simiglianza dei triangoli.

7. Costruire un triangolo rettangolo di cui sieno dati un angolo acuto ed a) la somma dell'ipotenusa e dell'altezza sullo stesso, b) la mediana sull'ipotenusa.

Questo problema di costruzione, al pari dei susseguenti, è da sciogliersi col metodo delle figure simili.

8. Costruire un triangolo rettangolo di cui sieno dati il rapporto fra i due cateti ed a) l'ipotenusa b) l'altezza abbassata sull'ipotenusa.

9. Costruire un triangolo isoscele, essendo dati un angolo e la somma della base e dell'altezza.

10. Costruire un triangolo, dati che sieno: a) due angoli e la somma d'uno dei lati opposti e l'altezza sullo stesso; b) il rapporto fra due lati, l'angolo da essi compreso e la somma (differenza) del terzo lato e dell'altezza abbassata sul medesimo; c) un lato ed i suoi rapporti cogli altri due lati.

11. Costruire un quadrilatero, dati che siano una diagonale ed i quattro angoli, che l'altra diagonale forma coi lati.

12. Costruire, facendo uso dei triangoli parziali, un triangolo di cui siano dati i rapporti fra l'altezza ed i suoi lati adiacenti ed a) il terzo lato, b) la mediana del terzo lato.

13. Costruire un triangolo, dati che siano il rapporto fra l'altezza ed un lato adiacente, l'angolo opposto a questo lato e a) uno degli altri due lati, b) la somma degli altri due lati.

14. Costruire un rettangolo di cui siano dati il rapporto fra un lato e la diagonale e la somma dell'altro lato e della diagonale.

15. Costruire un rettangolo, noti che siano il rapporto di due lati e a) la diagonale, b) la somma (differenza) della diagonale ed un lato.

16. Costruire un parallelogrammo, dati che siano il rapporto fra due lati, l'angolo da essi compreso ed a) l'altezza, b) la somma della diagonale e d'un lato, c) la somma delle due diagonali.

§ 152. *Problemi di calcolo.*

1. Sieno b e c i cateti ed a l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo; date due di queste grandezze, calcolare la terza (§ 133).

2. Di un triangolo rettangolo sono dati l'ipotenusa ed il rapporto fra i due cateti; si calcolino questi ultimi.

3. Noti che siano un cateto ed il rapporto fra l'ipotenusa e l'altro cateto, calcolare questo e l'ipotenusa.

4. Sieno p e q i segmenti dell'ipotenusa a adiacenti ai cateti b e c, ottenuti dall'abbassare l'altezza sull'ipotenusa; dati a) b e p, b) p e q, c) p e h calcolare le altre grandezze.

5.* Di un triangolo rettangolo sono date l'ipotenusa e a) la somma, b) la differenza dei due cateti; si calcolino i cateti.

La soluzione di questo problema e degli altri seguenti segnati con asterisco conduce ad un'equazione quadratica od impura o a due incognite; questi problemi quindi saranno da tralasciarsi per il momento, riserbandosi di pertrattarli quando più tardi si ripeterà il complesso degli esercizi.

6.* Di un triangolo rettangolo sono dati un cateto e a) la somma, b) la differenza fra l'ipotenusa e l'altro cateto; si determinino l'ipotenusa ed il secondo cateto.

7. Essendo a il lato ed h l'altezza d'un triangolo equilatero, data una di queste grandezze trovare l'altra.

8. La base d'un triangolo isoscele è a, il crure b e l'altezza h; date due di queste grandezze trovare l'altra.

9. Il lato d'un quadrato è a, d la sua diagonale; data l'una di queste grandezze calcolare l'altra.

10.* Di un dato quadrato si conosce la somma del suo lato e della sua diagonale; si determini ciascuna di queste grandezze.

11. Da un punto la cui distanza minima da un cerchio è a, si è condotta a questo una tangente; quale è il raggio del cerchio se la tangente ha la lunghezza t?

12. L'occhio d'un osservatore scorge la superficie terrestre sino ad una distanza che viene determinata dalla tangente che si imagina condotta dal suo occhio alla sfera terrestre; quale sarà la distanza visiva v, se a è la elevazione dell'occhio dal suolo ed r il raggio terrestre?

Avuto riflesso al § 136, 2, si ottiene $v = \sqrt{a(a+2r)}$.

13. Sino a che distanza si potrà vedere dalla cima d'una torre alta 48 m? ($r = 858 \cdot 474$ miglia geografiche di $7418 \cdot 93$ metri).

CAPITOLO QUARTO.

Area delle figure piane rettilinee.

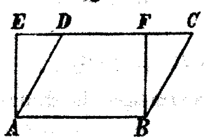
§ 153. Per determinare l'*area* d'una figura piana, vale a dire la quantità di estensione superficiale contenuta nel suo perimetro, si esamina quante volte una superficie data, presa come *unità*, sia contenuta in quella da misurarsi. Quale *unità superficiale* si prende il quadrato che ha per lato l'unità di lunghezza. Se questa è il metro, il *metro quadrato* (m^2) sarà l'unità superficiale. — Un metro quadrato ha 100 decimetri quadrati (dm^2) da 100 centimetri quadrati (cm^2) da 100 millimetri quadrati (mm^2). Per la misurazione di terreni adoperasi l'*aro* pari a 100 m^2. Un *ettaro* ha 100 ari.

Figure *equivalenti* sono quelle che hanno aree eguali.

I. Equivalenza delle figure piane.

§ 154. Teorema. *Ogni parallelogrammo obliquangolo è equivalente ad un rettangolo di egual base ed eguale altezza.*

Fig. 92.



Dimostrazione: Sia (fig. 92) $ABCD$ un parallelogrammo obliquangolo. Si conducano $AE \perp AB$ e $BF \perp AB$, ed il rettangolo $ABFE$ avrà con $ABCD$ la stessa base e la stessa altezza. Essendo $\triangle ADE \cong BCF$, ne consegue $ABFD + ADE = ABFD + BCF$ ovvero $ABFE = ABCD$.

Corollario. Parallelogrammi di base ed altezza eguale sono equivalenti.

§ 155. Teorema. *Ogni triangolo è equivalente alla metà d'un parallelogrammo della medesima base e della medesima altezza.*

Segue dal § 54, coroll. a.

Corollario. Triangoli di base ed altezza eguale sono equivalenti.

§ 156. Teoremi. *Ogni trapezio è equivalente ad un parallelogrammo che abbia la medesima altezza e per base la semisomma dei lati paralleli del trapezio.*

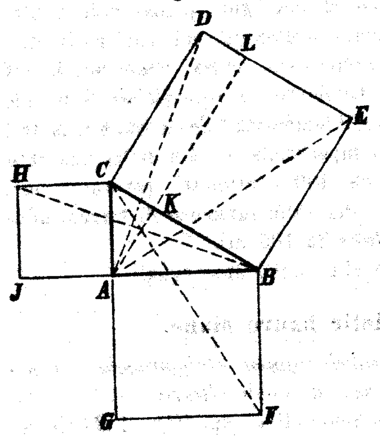
La *dimostrazione* si basa sul § 57, 1.

§ 157. Teoremi. 1. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*

Dimostrazione: Sia (fig. 93) il $\triangle ABC$ rettangolo in A ed abbiasi da dimostrare che il quadrato $BCDE$ costruito sul lato BC sia eguale alla somma dei quadrati $ABFG$ ed $ACHJ$ costruiti sui lati AB ed AC, il che si segna:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Fig. 93.



Si abbassi da A su BC la normale AK e la si prolunghi sino in L. I rettangoli BL e CL che ne risultano sono equivalenti ai quadrati AF ed AH.

Infatti, guidando AE e CF sarà $\triangle ABE = \frac{BL}{2}$ e $\triangle BCF = \frac{AF}{2}$ (§ 155); ma $\triangle ABE \cong BCF$; quindi $BL = AF$.

Si tirino AD e BH e si avrà egualmente $\triangle ACD = \frac{CL}{2}$, $\triangle BCH = \frac{AH}{2}$ ed essendo $\triangle ACD \cong BCH$, anche $CL = AH$.

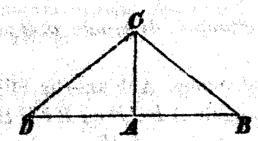
Da quanto fu esposto risulta:

$BL + CL = AF + AH$ ovvero $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

La verità di questo teorema anche in senso aritmetico fu dimostrata al § 133.

2. *Se il quadrato costruito sopra un lato d'un triangolo è eguale alla somma dei quadrati costruiti sopra gli altri due lati, l'angolo opposto al primo lato è retto.* (Inversione del teorema antecedente).

Fig. 94.



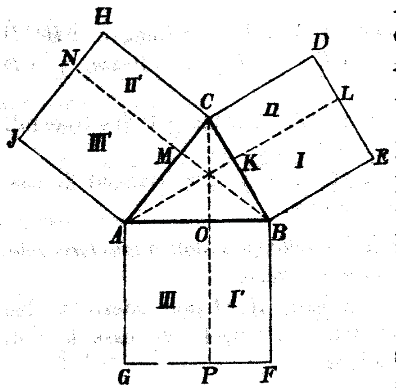
Dimostrazione: Sia (fig. 94) $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Si guidi alla AC nel punto A la perpendicolare $AD = AB$ e si tracci la CD; ne risulterà $CD^2 = AD^2 + AC^2$ ossia $CD^2 = AB^2 + AC^2$, quindi $BC^2 = CD^2$ ovvero $BC = CD$. I due $\triangle BAC$ e DAC sono dunque congruenti, quindi:

l'angolo $BAC = CAD = R$.

§ 158. Il piede della normale abbassata da un punto sopra una retta dicesi la *proiezione di quel punto* sopra la retta. Per *proiezione d'un segmento* sopra una retta intendesi il segmento che unisce le proiezioni delle estremità di quel segmento sopra la retta. Supposto nella fig. 95 $AL \perp ED$ e $CD \perp ED$, LD è la proiezione del segmento AC sulla ED; egualmente poi, se $CO \perp AB$, AO è la proiezione del segmento AC sulla AB.

Teoremi. 1. *In ogni triangolo il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il rettangolo formato da uno di questi due lati e dalla proiezione dell'altro su questo.*

Fig. 95.



Dimostrazione: Siano (fig. 95) $BCDE$, $ABFG$, $ACHJ$ i quadrati costruiti sui lati BC, AB, AC del triangolo ABC nel quale A è un angolo acuto.

Si guidino a BC, AC, AB le normali AK, BM, CO e si prolunghino sino in L, N, P per cui ogni quadrato resterà diviso in due rettangoli che segneremo con I, II, III, I', II', III'.

Condotte le adeguate linee ausiliarie e fatte delle dimostrazioni simile a quella del § 157, 1, si avrà I = I', II = II', III = III', da cui

$$BD = AF + AH - 2AP.$$

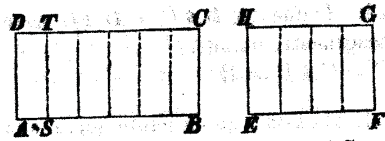
2. *In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, più due volte il rettangolo formato da uno di questi due lati e dalla proiezione dell'altro su questo.*

La *dimostrazione* è simile all'antecedente, fatta al numero 1.

II. Rapporti di area.

§ 159. Teoremi. 1. *Le aree di due rettangoli di eguale altezza stanno fra loro come le loro basi.*

Fig. 96.



Dimostrazione: Abbiano (fig. 96) i due rettangoli $ABCD$ ed $EFGH$ le altezze AD ed EH e le basi AB ed EF commensurabili.

Sia AS una misura comune alle due basi per cui ne risulti $AB = m \cdot AS$ ed $EF = n \cdot AS$ ovvero $AB : EF = m : n$. Si divida la AB in m parti, la EF in n parti eguali ad AS, e si erigano nei punti di divisione delle perpendicolari alle basi. I due rettangoli $ABCD$ ed $EFGH$ conterranno allora, l'uno m, l'altro n rettangoli congruenti ad $ASTD$ per cui si avrà:

$$ABCD = m \cdot ASTD \text{ ed } EFGH = n \cdot ASTD$$

e perciò anche: $ABCD : EFGH = m : n$ e di conseguenza:

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

La medesima proporzione sussisterà del pari qualora le basi AB ed EF fossero incommensurabili (§ 115).

2. *Le aree di due rettangoli di basi eguali stanno fra loro come le loro altezze.*

Infatti, come si scorge dal numero 1, nei due rettangoli $ABCD$ ed $EFGH$ si possono considerare AB ed EF come altezze, e AD ed EH come basi.

Corollario. *a*) Le aree di due parallelogrammi o di due triangoli di eguale altezza stanno fra loro come le loro basi.

b) Le aree di due parallelogrammi o di due triangoli di basi eguali stanno fra loro come le loro altezze.

§ 160. Teorema. *Le aree di due rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le rispettive altezze.*

Dimostrazione: Siano B e b le basi, A ed a le altezze di due rettangoli R ed r, e sia R' un terzo rettangolo di base b e di altezza A. Per il § 159 si avrà allora:

$$R : R' = B : b,$$

$$R' : r = A : a; \text{ quindi per via di moltiplicazione:}$$

$$R : r = B \cdot A : b \cdot a.$$

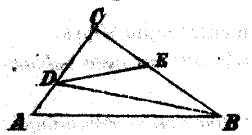
Corollari. *a*) Le aree di due parallelogrammi o di due triangoli stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le rispettive altezze.

b) Le aree di due quadrati stanno fra loro come le seconde potenze dei loro lati.

§ 161. Teorema. *Le aree di due triangoli che hanno un angolo comune stanno fra loro come i prodotti dei lati che comprendono quell'angolo.*

Dimostrazione: Abbiano (fig. 97) i due triangoli ABC e DEC l'angolo C comune e siano i lati che lo comprendono

Fig. 97.



$AC = b$, $BC = a$, $CD = c$ e $CE = d$.

Si conduca BD e sarà:

$\triangle ABC : DBC = AC : CD = b : c$ e così pure

$\triangle DBC : DEC = BC : CE = a : d$,

per cui moltiplicando si otterrà:

$$\triangle ABC : DEC = a \,.\, b : c \,.\, d.$$

Corollario. Due triangoli che hanno un angolo comune sono equivalenti, se sono eguali i prodotti dei lati che comprendono quell'angolo.

§ 162. Teorema. *Le aree di due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi.*

Dimostrazione: Sia $\triangle ABC \backsim A'B'C'$, $BC = a$, $AC = b$, $B'C' = a'$, $A'C' = b'$. Essendo l'angolo $C = C'$ si potrà applicare il § 161 e si otterrà:

$$\triangle ABC : A'B'C' = a \,.\, b : a' \,.\, b' = (a : a')\ (b : b').$$

Ma per la supposizione fatta, $b : b' = a : a'$, per cui, sostituendo si ricava: $\triangle ABC : A'B'C' = (a : a')\ (a : a') = a^2 : a'^2$.

§ 163. Teoremi. 1. *Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi.*

Segue dal § 134, 2 e dal § 162.

2. *Le aree di due poligoni regolari di egual numero di lati stanno fra loro come i quadrati dei raggi delle circonferenze ad essi iscritte o circoscritte.*

Segue dal numero 1, con riflesso al § 134, 6.

III. Determinazione dell'area.

§ 164. Teorema. *L'area d'un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Dimostrazione: Sia R un rettangolo che abbia la base B e l'altezza A, ed M rappresenti l'unità superficiale, vale a dire un quadrato che abbia per lato l'unità lineare m. Secondo il § 160 si ha:

$$\frac{R}{M} = \frac{B \,.\, A}{m \,.\, m} = \frac{B}{m} \,.\, \frac{A}{m}, \text{ ove}$$

$\frac{R}{M}$ è il numero che indica quante volte l'unità superficiale M è

contenuta nel dato rettangolo, $\frac{B}{m}$ ed $\frac{A}{m}$ invece sono i numeri che dinotano quante volte la relativa unità lineare è contenuta nella base B, rispettivamente nell'altezza A di quel rettangolo.

Quindi il numero indicante l'area d'un rettangolo è eguale al prodotto dei numeri indicanti le unità lineari contenute nella base e nell'altezza del rispettivo rettangolo.

Questa proposizione si esprime più brevemente come sopra.

Corollario. *L'area d'un quadrato è eguale alla seconda potenza del suo lato.*

§ 165. Teoremi. 1. *L'area d'un parallelogrammo obliquangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza* (§§ 154 e 164).

2. *L'area d'un triangolo è eguale al semiprodotto della sua base per la sua altezza* (§§ 155 e 164).

3. a) *L'area d'un trapezio è eguale al prodotto della sua altezza per la semisomma dei suoi lati paralleli* (§ 156).

b) *L'area d'un trapezio è eguale al prodotto della sua mediana per la sua altezza* (§ 57, 1).

4. *L'area d'un poligono regolare è eguale al semiprodotto del suo perimetro per il suo apotema o cateto (distanza del centro del poligono da uno dei lati).*

Dimostrazione: Dinotino l il lato, a l'apotema ed s l'area d'un poligono regolare di n lati. Guidando dal centro dei segmenti ai vertici del poligono, questo viene con ciò diviso (secondo il § 68, coroll. *b*) in n triangoli congruenti. L'area d'uno di questi triangoli è $\frac{l \,.\, a}{2}$ e quindi quella del poligono intero:

$$s = n \,.\, \frac{l \,.\, a}{2} = \frac{n l \,.\, a}{2}$$

ove nl è il numero esprimente il perimetro del poligono.

Scolio. Si determina l'*area d'un poligono irregolare*, scomponendolo per mezzo di diagonali in triangoli e sommando poi le aree di questi.

IV. Problemi di costruzione e di calcolo.

§ 166. *Trasformazione delle figure rettilinee.*

Trasformare una figura significa costruirne un'altra ad essa equivalente, e che soddisfaccia a date condizioni.

1. *Trasformare un dato triangolo in altro isoscele che abbia per base un lato del primo.*

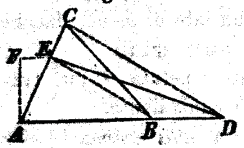
Soluzione a mezzo dei luoghi geometrici.

2. *Mantenendo invariato un lato, trasformare un triangolo in un altro che abbia adiacente a quel lato un dato angolo* α.

Si formi in una estremità del lato un angolo eguale ad α e si conduca per il vertice opposto a questo lato una parallela allo stesso lato; il punto d'intersezione della parallela col secondo lato dell'angolo α sarà il terzo vertice del triangolo richiesto.

3. ***Mantenendo invariato l'angolo*** A ***d'un triangolo*** A B C (fig. 98), ***trasformarlo in un altro di data base*** c.

Fig. 98.



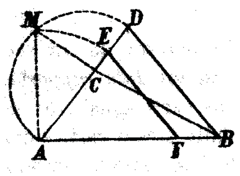
Si trasporti c sulla AB sino in D, si conducano la CD e la BE a questa parallela, si uniscano a mezzo d'un segmento i punti D ed E ed ADE sarà il triangolo domandato. Infatti i due triangoli ADE ed ABC sono equivalenti avendo comune il $\triangle ABE$ ed essendo $\triangle BED = BEC$.

4. ***Mantenendo invariato l'angolo*** A ***d'un triangolo*** A B C (fig. 98), ***trasformarlo in un altro di data altezza*** a.

Si eriga la $AF = a$ normale ad AB, si guidino $FE \parallel AB$ e $CD \parallel EB$, si uniscano a mezzo d'un segmento i punti E e D e sarà $\triangle ADE = ABC$.

5. ***Mantenendo invariato l'angolo*** A ***d'un triangolo*** A B C (fig. 99), ***trasformarlo in un altro in cui il lato opposto a quell'angolo sia parallelo ad una data retta*** BD.

Fig. 99.

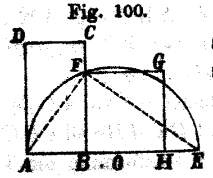


Analisi: Sia AFE il triangolo richiesto nel quale sia $EF \parallel DB$ e perciò $AB:AF = AD:AE$. Acciocchè i due triangoli ABC ed AFE siano equivalenti, dovranno soddisfare al corollario del § 161, quindi $AB \cdot AC = AF \cdot AE$ ovvero $AB:AF = AE:AC$. Confrontata questa proporzione colla antecedente si scorge che $AD:AE = AE:AC$ vale a dire che AE è media proporzionale geometrica fra AD ed AC.

Costruzione: Si costruisca (secondo il § 146, problema 3, soluz. 2) la media proporzionale geometrica AM fra AD e AC, si faccia $AE = AM$ e si guidi $EF \parallel DB$; il triangolo AFE è il chiesto.

6. *Trasformare un rettangolo* A B C D (fig. 100) *in un quadrato.*

Fig. 100.

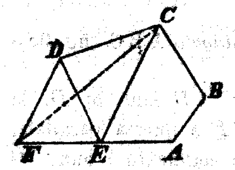


Si prolunghi la AB sino in E in modo che s'abbia $BE = BC$, e sulla AE, come diametro, si descriva una semicirconferenza che tagli la BC nel punto F. Il quadrato $BFGH$ costruito col lato BF è equivalente al rettangolo dato.

Infatti guidate le AF ed EF si ha $AB:BF = BF:BE$ (§ 135) ovvero $AB:BF = BF:BC$ e quindi anche $BF^2 = AB \cdot BC$.

7. ***Trasformare un poligono*** A B C D E (fig. 101) ***in un altro che abbia un lato di meno.***

Fig. 101.



Si guidi la diagonale CE che recide il triangolo CDE dal poligono dato; dal punto D conducasi la DF parallela a CE finchè incontri in F il lato AE prolungato, e si tiri la CF; il poligono $ABCDE$ dato sarà equivalente al poligono $ABCF$ avente un lato di meno, dacchè ambidue sono formati di parti eguali.

Colla medesima costruzione opportunamente ripetuta, si può trasformare un poligono qualunque in un triangolo equivalente.

8. *Costruire un quadrato che sia equivalente* a) *alla somma,* b) *alla differenza di due quadrati dati.*

a) Si costruisca un triangolo rettangolo che abbia per cateti i lati dei due quadrati dati e l'ipotenusa sarà il lato del quadrato ricercato (§ 157, 1).

b) La relativa costruzione si fonda del pari sul § 157, 1.

9. *Costruire un quadrato che sia equivalente alla somma di tre o più quadrati.*

Si trovi prima un quadrato eguale alla somma di due dei quadrati dati (problema 8, *a*), poi un altro quadrato eguale alla somma del quadrato ora trovato ed un terzo dei quadrati dati e così di seguito.

§ 167. *Spartizione delle figure rettilinee.*

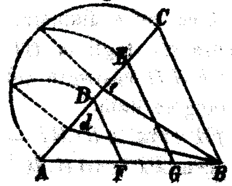
1. *Dividere un triangolo mediante rette che partano da un suo vertice* a) *in parti eguali,* b) *in parti che stiano in un dato rapporto.*

Si divida il lato opposto a quel vertice *a*) in parti eguali, *b*) in parti che stiano nel dato rapporto e si guidino dallo stesso vertice dei segmenti ai punti di divisione di quel lato (§ 154, coroll., ovvero § 159 coroll. *a*).

2. *Dividere un triangolo* A B C *mediante rette che partano da un punto* M *d'un suo lato* A B, *in tre parti che stiano come* m : n : p.

Si divida il triangolo (secondo il numero 1) a mezzo delle rette CD e CE nel dato rapporto e si trasformino (secondo il § 166, probl. 3) i triangoli ADC e BEC in altri due aventi le basi AM e BM.

Fig. 102.



3. *Dividere un triangolo* A B C (fig. 102), *mediante rette parallele ad un lato* B C, *in parti che stiano in un dato rapporto* m : n : p.

Se i punti d ed e dividono il lato AC nel rapporto $m:n:p$, i triangoli ABd, dBe ed eBC hanno la chiesta grandezza. Si trasformino ora i triangoli ABd ed ABe, conservando l'angolo A

(appar § 166, problema 5), in altri due AFD ed AGE in cui i lati FD e GE opposti all'angolo A sono paralleli al lato BC; FD e GE saranno le rette di divisione cercate.

Facendo $m=n=p$ il $\triangle ABC$ viene diviso in tre parti eguali.

4. *Dividere un parallelogrammo mediante rette parallele ad un lato* a) *in parti eguali*, b) *in parti proporzionali*.

La soluzione risulta dal § 154 o dal § 159, coroll. *a*.

5. *Dividere un trapezio a mezzo di rette che taglino le sue basi* a) *in parti eguali*, b) *in parti proporzionali*.

La soluzione è analoga a quella del problema antecedente.

6. *Dividere un trapezio, mediante rette parallele alle sue basi, in parti che stiano in un dato rapporto.*

Prolungando i due lati non paralleli sino ad incontrarsi, il problema viene ricondotto a quello esposto al numero 3.

§ 168. *Problemi di calcolo.*

1. In un *triangolo equilatero* 1) l è il lato, 2) a l'altezza; se ne determini l'area s.

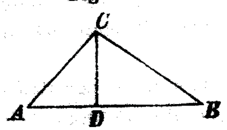
$$1)\ s=\frac{l^2}{4}\sqrt{3} \qquad 2)\ s=\frac{a^2}{3}\sqrt{3}.$$

2. Si calcoli l'area s d'un *triangolo isoscele*, noti che siano il crure c e la base b.

$$s=\frac{b}{4}\sqrt{4c^2-b^2}.$$

3. Dati i tre lati d'un *triangolo*, si determini l'altezza abbassata sopra un lato e l'area del triangolo.

Fig. 103.



Sieno nel triangolo ABC (fig. 103) $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, l'altezza $CD=h$ ed il segmento $AD=x$. Giusta i §§ 158, 1, e 164 si ha $a^2=b^2+c^2-2cx$, da cui $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

Ma $h^2=b^2-x^2=(b+x)\,(b-x)$, ovvero

$$h^2=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2c},$$

e perciò $h=\frac{1}{2c}\sqrt{(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a+b-c)\,(a-b+c)}$.

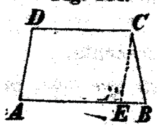
Esprimendo con s l'area del triangolo ABC si avrà $s=\frac{c.h}{2}$ e quindi anche $s=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$.

Si ponga il perimetro del triangolo $a+b+c=2p$, e sottraendo da ambedue le parti successivamente $2a$, $2b$, $2c$ sarà

$$b+c-a=2\,(p-a)$$
$$a-b+c=2\,(p-b)$$
$$a+b-c=2\,(p-c),\ \text{quindi}$$
$$s=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

4. Dati i quattro lati d'un *trapezio*, calcolarne l'altezza e l'area.

Fig. 104.



Siano (fig. 104) $AB=a$, $CD=b$, $AD=c$, $BC=d$, h l'altezza ed s l'area. Si guidi la $CE \parallel DA$ e nel triangolo BEC che ne risulta sarà $BE=a-b$, $BC=d$ e $CE=c$ per cui in seguito al problema 3, l'altezza abbassata sopra il lato BE sarà

$$h=\frac{1}{2\,(a-b)}\cdot\sqrt{(c+d+a-b)\,(c+d-a+b)\,(a-b+c-d)\,(a-b-c+d)};$$

ma h dinota del pari l'altezza del trapezio, quindi la sua area sarà $s=\frac{a+b}{2}\cdot h$, ovvero

$$s=\frac{a+b}{4\,(a-b)}\cdot\sqrt{(b+c+d-a)\,(a+c+d-b)\,(a+d-b-c)\,(a+c-b-d)}.$$

V. Teoremi e problemi per esercizio.

§ 169. *Teoremi.*

1. La somma delle tre normali abbassate sui tre lati d'un triangolo equilatero da un punto interno dello stesso è eguale all'altezza del triangolo.

2. Il parallelogrammo è dimezzato da qualunque retta passante per il punto d'intersezione delle sue diagonali.

3. Se per i quattro vertici d'un quadrilatero si guidano delle parallele alle diagonali, il parallelogrammo da quelle formato ha la doppia superficie del quadrilatero.

4. Se per un punto qualunque d'una diagonale d'un parallelogrammo si conducono delle parallele ai lati, i parallelogrammi non attraversati dalla diagonale sono equivalenti (§ 54, coroll. *b*).

5. Se per il punto di mezzo d'uno dei lati non paralleli d'un trapezio si conducono dei segmenti all'estremità dell'altro, il triangolo con ciò determinato è eguale alla metà del trapezio.

6. Si dimostri, a mezzo di adatte costruzioni, che le seguenti formole aritmetiche sono anche vere in senso geometrico:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2.$$

7. La somma dei quadrati di due lati d'un triangolo è eguale alla doppia somma dei quadrati costruiti l'uno sulla metà del terzo lato, l'altro sulla mediana di questo stesso lato (§ 158, 1 e 2).

8. La quadrupla somma dei quadrati costruiti sulle mediane d'un triangolo è eguale alla tripla somma dei quadrati costruiti sui lati.

9. In ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei quattro lati è eguale alla somma dei quadrati delle due diagonali.

10. Se sopra i tre lati d'un triangolo rettangolo si costruiscono tre poligoni simili, dei quali siano lati omologhi quelli del triangolo, l'area del poligono costruito sopra l'ipotenusa è eguale alla somma delle aree dei poligoni costruiti sopra i due cateti (§ 163, 1 e § 157, 1).

11. Fra tutti i triangoli isoperimetri di base eguale, l'isoscele ha l'area massima.

Siano b la base ed s la somma degli altri due lati; supposti questi disuguali, il maggiore sarà $\frac{s}{2}+x$, l'altro $\frac{s}{2}-x$ per cui l'area a del triangolo sarà

$$a=\tfrac{1}{4}\sqrt{(s+b)\,(s-b)\,(b-2x)\,b+2x)}=\tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2-b^2)\,(b^2-4x^2)}.$$

Quanto più piccolo sarà x, tanto maggiore sarà l'area a, per cui questa sarà un massimo per $x=0$, ovvero qualora il triangolo sia isoscele.

12. Fra tutti i triangoli equivalenti di base eguale l'isoscele ha il minimo perimetro.

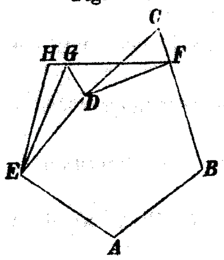
Da $a=\tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2-b^2)\,(b^2-4x^2)}$ risulta $s=\sqrt{\frac{16\,a}{b^2-4x^2}+b^2}$,

laonde s, e perciò anche il perimetro $p=s+b$ raggiunge il suo minimo valore per $x=o$, ovvero quando il triangolo è isoscele.

13. Fra tutti i poligoni isoperimetri di n lati, il regolare è il massimo in superficie.

a) Il poligono di area massima di n lati e di dato perimetro deve essere *equilatero*. Infatti, se due dei suoi lati AB e BC fossero disuguali, si potrebbe, senza mutarne il perimetro, trasformare il poligono in un altro di area maggiore, costruendo sulla base AC del triangolo ABC un triangolo isoscele il cui crure abbia il valore $\tfrac{1}{2}(AB+BC)$ (proposizione 11). Ma un poligono a lati disuguali non può essere di area massima qualora possa aumentare di area senza alterare nello stesso tempo il suo perimetro.

Fig. 105.



b) Il poligono massimo di n lati e di dato perimetro deve essere anche *equiangolo*. Infatti, abbiasi nel poligono di n lati $ABCDE$ (fig. 105) l'angolo $EDC > DCB$. Si guidi la DF in modo che ne risulti l'angolo $EDF > DFB$ e si costruisca il $\triangle DFG \cong DFC$. L'angolo saliente $EDG = EDF + FDG$, ed il poligono $ABFGDE$ avrà lo stesso perimetro e la stessa area del poligono $ABCDE$, mentre il poligono $ABFGE$ avrà un perimetro minore ma un'area maggiore di $ABCDE$. Da ciò ne segue che si può scegliere sul prolungamento della FG un punto H tale che sia

$GH+HE=GD+DE$ e che il poligono di n lati $ABFHE$ abbia lo stesso perimetro, ma un'area maggiore di $ABCDE$; epperò fra tutti i poligoni isoperimetri di n lati, quello $ABCDE$ ad angoli disuguali non può essere il massimo.

14. Fra tutti i poligoni di n lati, fra loro equivalenti, il regolare ha il minimo perimetro.

Sia p un poligono regolare di n lati dal perimetro u, P un poligono regolare di n lati equivalente al primo, ma di perimetro U, e p' infine un poligono regolare di n lati avente il perimetro U. Sarà allora (secondo il probl. 13) $P<p'$, e quindi anche $p<p'$. essendo $p=P$, e del pari $u>U$, essendo $p \backsim p'$.

§ 170. *Problemi di costruzione.*

1. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele di cui sia dato *a*) la base, *b*) il lato.

2. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo che del primo abbia conservato un angolo (probl. 5 del § 166).

3. Trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo di cui sia dato *a*) un cateto, *b*) l'ipotenusa.

4. Trasformare un triangolo dato in un triangolo equilatero (probl. 2 e 5 del § 166.

5. Trasformare un triangolo in un triangolo simile ad un triangolo dato (probl. 5 del § 166).

6. Trasformare un parallelogrammo in un altro che abbia *a*) un angolo dato, *b*) un lato dato, *c*) un angolo dato ed un lato dato.

7. Dimezzare un triangolo a mezzo d'una retta normale ad un lato (probl. 1 del § 167 e probl. 2 del § 170).

§ 171. *Problemi di calcolo.*

1. Quale è l'area di un triangolo rettangolo, di cui siano noti *a*) l'ipotenusa ed un cateto, *b*) un cateto e l'altezza abbassata sulla ipotenusa.

2.* *Si calcoli l'area d'un triangolo rettangolo conoscendone:*

a) *l'ipotenusa e la somma dei due cateti:*

b) *un cateto e la somma dell'ipotenusa e dell'altro cateto.*

3.* Di un triangolo rettangolo sono date l'area e l'altezza corrispondente all'ipotenusa; si determinino i suoi tre lati.

4.* Si trovino i due cateti d'un triangolo rettangolo, date che siano l'ipotenusa e l'area dello stesso.

5.* Dati il perimetro e l'area d'un triangolo rettangolo calcolare ciascuno dei suoi lati.

6. La diagonale d'un quadrato è d (36 *cm*), si determini la sua area.

7. Dati un lato a (7·2 *m*) e la diagonale d (12·5 *m*) d'un rettangolo, calcolarne l'area.

8.* Trovare i lati d'un rettangolo di cui si conoscono il perimetro e l'area.

9. Quale è il lato d'un triangolo equilatero che ha $2\,m^2$ di area?

10.* Calcolare l'area d'un triangolo equilatero di cui sia nota la somma del lato e dell'altezza.

11. Data la base b ($2 \cdot 34\ m$) e l'area s ($3 \cdot 76\ m^2$) d'un triangolo isoscele calcolarne il crure c.

12.* Trovare l'area d'un triangolo isoscele, se dello stesso sono dati:

a) le altezze corrispondenti alla base e ad un crure;

b) la base e l'altezza abbassata sopra un crure;

c) il perimetro e l'altezza corrispondente alla base.

13. Si determini l'area s d'un triangolo di cui siano conosciuti due lati a e b e l'altezza h sopra il terzo lato.

14. Calcolare l'area s d'un triangolo di cui siano dati due lati a e b e la mediana m sopra il terzo lato.

Si prolunghi nel triangolo ABC la mediana CD della propria lunghezza sino in E, e si guidi la AE; sarà $\triangle ABC = AEC$ e quindi per il § 168, 3:

$$s = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)(b+2m-a)(a+2m-b)(a+b-2m)}.$$

15. Si calcoli l'area s d'un triangolo, se dello stesso sono note le mediane m, m', m''.

Essendo (fig. 36 e § 61) $\triangle ABC = 3\,AOB$, si avrà, giusta il probl. 14:

$$s = \tfrac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m'+m''-m)(m+m''-m')(m+m'-m'')}.$$

16. Date le tre altezze a, a', a'' d'un triangolo, calcolarne l'area s.

$$s = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')(p'+p''-p)(p+p''-p')(p+p'-p'')}},$$

in cui si è posto $\frac{1}{a} = p$, $\frac{1}{a'} = p'$, $\frac{1}{a''} = p''$.

17. Si determini l'area d'un deltoide le cui diagonali siano D (45 cm) e d (32 cm).

18. Trovare l'area d'un rombo, se dello stesso si conoscono *a*) le due diagonali, *b*) il lato ed una diagonale.

19. Quali relazioni sussistono fra i lati a e b, e le diagonali D e d d'un parallelogrammo?

Applicando il § 158, 1 e 2, si ottiene $D^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

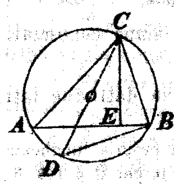
CAPITOLO QUINTO.

Determinazione di misure relative al cerchio.

I. Calcolo dei poligoni iscritti e circoscritti.

§ 172. *Il triangolo iscritto e circoscritto.*

Fig. 106.



1. Sia O (fig. 106) il centro, CD il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, e $CE \perp AB$; dippiù si ponga $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CE = h$ ed $OC = R$. Dalla simiglianza dei due triangoli CBD e CEA risulta $CD : CA = CB : CE$, ovvero $2R : b = a : h$, da cui si ricava $2hR = ab$, ovvero $2chR = abc$, e quindi anche $4sR = abc$, se s dinota l'area del triangolo ABC.

Da quest'ultima equazione poi si ottiene:

$$s = \frac{abc}{4R} \text{ e } R = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \quad (§\ 168,\ 3),$$

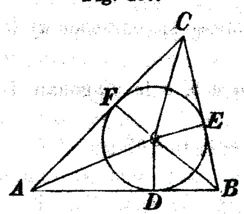
se si pone $2p = a + b + c$.

Per il triangolo equilatero iscritto si ha: $a = b = c$ e perciò:

$$s = \frac{a^3}{4R},\ R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ \text{ed } a = R\sqrt{3}.$$

2. Sia O (fig. 107) il centro, $OD = OF = OE = r$ il raggio della circonferenza iscritta al triangolo ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ed s l'area del triangolo. Sarà allora:

Fig. 107.



$$s = \triangle BOC + AOC + AOB, \text{ ovvero}$$

$$s = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}, \text{ e perciò}$$

$$2s = (a+b+c)\,r.$$

Per cui ponendo $a + b + c = 2p$, si avrà:

$$s = rp \text{ ed } r = \frac{s}{p}, \text{ ovvero}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad (§\ 168,\ 3).$$

Per il triangolo equilatero circoscritto avente il lato a si ottiene:

$$s = \frac{3ar}{2},\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ ed } a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}.$$

Scolio. Dinotando con r_1, r_2, r_3 i raggi delle circonferenze che toccano uno dei lati a, b, c ed i prolungamenti degli altri due (§ 86, scolio), si ha nello stesso modo:

$$r_1 = \frac{s}{p-a},\ r_2 = \frac{s}{p-b},\ r_3 = \frac{s}{p-c},$$

da cui ne segue

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \text{ ed } r\,r_1\,r_2\,r_3 = s^2.$$

§ 173. *Il quadrato iscritto e circoscritto.*

Siano l_4 ed L_4 il lato del quadrato iscritto e quello del quadrato circoscritto ed r il raggio del cerchio; sarà allora

$$l_4 = r\sqrt{2},\ L_4 = 2r, \text{ ed inversamente}$$

$$r = \frac{l_4}{2}\sqrt{2} = \frac{L_4}{2}.$$

§ 174. *L'esagono regolare iscritto e circoscritto.*

Sia (fig. 108) $OA = r$ il raggio del cerchio, $AE = l_6$ il lato dell'esagono regolare iscritto, $HK = L_6$ quello dell'esagono regolare circoscritto, ed $OL \perp HK$; si avrà

$$l_6 = r \text{ (§ 90)}.$$

E poichè $HK : AE = OL : OG$, ovvero $L_6 : r = r : \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$,

ovvero $L_6 : r = r : \frac{r}{2}\sqrt{3}$, sarà

$$L_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

§ 175.* *Il pentagono ed il decagono regolare iscritti in un cerchio.*

1. Giusta il § 141, 1, si ha: $r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10})$, quindi $l_{10}^2 + r l_{10} = r^2$, da cui si ricava

$$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

2. Dal § 141, 2, risulta

$$l_5^2 = l_{10}^2 + r^2 = \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + r^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5});\ \text{dunque}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Scolio. Per mezzo della formola $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, e dinotando con r il raggio del cerchio circoscritto, con r' quello del cerchio iscritto al pentagono regolare che ha per lato l_5 e per diagonale d, si deducono le seguenti espressioni

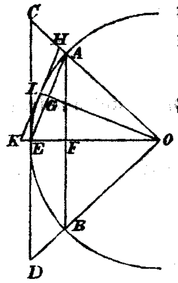
$$r = \frac{l_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}},\ r' = \frac{l_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}},\ d = \frac{l_5}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

*

§ 176. 1. *Dato il lato* l_n *di un poligono regolare iscritto in un cerchio dato, trovare il lato* L_n *del poligono regolare dello stesso numero di lati circoscritto a quello stesso cerchio.*

Sia (fig. 108) $OA = r$ il raggio del cerchio ed $AB = l_n$ il lato del poligono regolare iscrittovi di n lati. Si abbassi la $OE \perp AB$ e per il punto E si guidi la tangente; si prolunghino ora i raggi OA ed OB sino ad incontrare la tangente nei punti C e D; il segmento $CD = L_n$ sarà il lato del poligono regolare circoscritto di n lati.

Fig. 108.



Sarà allora $\triangle CDO \sim ABO$, e perciò

$$CD : AB = OE : OF, \text{ ovvero}$$

$$L_n : l_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}, \text{ dunque}$$

$$L_n = \frac{r\,l_n}{\sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}}.$$

2. *Dato il lato* l_n *di un poligono regolare iscritto, trovare il lato* l_{2n} *del poligono di doppio numero di lati iscritto nello stesso cerchio.*

Abbiano r ed l_n lo stesso significato come al numero 1; si guidi $OE \perp AB$, e la corda $AE = l_{2n}$ sarà il lato del poligono regolare iscritto di $2n$ lati.

Dal § 135, 1, segue:

$$2r : AE = AE : EF, \text{ ovvero, essendo}$$

$$EF = OE - OF = r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}},$$

$$2r : l_{2n} = l_{2n} : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right), \text{ da cui si ricava}$$

$$l_{2n}^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right), \text{ ovvero}$$

$$l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right)}.$$

§ 177. *Relazioni fra i perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti di* n *e di* 2n *lati.*

Sia (fig. 108), come nel § 176, $OA = r$, $AB = l_n$, $CD = L_n$ ed $AE = l_{2n}$; di più $HLK \parallel AE$, quindi $HK = L_{2n}$. Si ponga per brevità $FO = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} = a$, quindi $r^2 - \frac{l_n^2}{4} = a^2$, e si otterrà $\frac{l_n^2}{4} = r^2 - a^2$, ovvero $\frac{l_n}{2} = \sqrt{r^2 - a^2}$, quindi $l_n = 2\sqrt{r^2 - a^2}$.

Applicando le formole sviluppate nel § 176, 1 e 2 si ha:

$$L_n = \frac{r\,l_n}{\sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}} = \frac{2r\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \text{ ed}$$

$$l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right)} = \sqrt{2r(r-a)}.$$

Del pari segue dal § 176, 1:

$$L_{2n}^2 = \frac{r^2 l_{2n}^2}{r^2 - \frac{l_{2n}^2}{4}} = \frac{r^2 . 2r(r-a)}{r^2 - \frac{2r(r-a)}{4}} = \frac{4r^2(r-a)}{r+a} = \frac{4r^2}{(r+a)^2} \cdot (r^2 - a^2),$$

e perciò:
$$L_{2n} = \frac{2r}{r+a}\sqrt{r^2 - a^2}.$$

Segnándo con p_n, P_n, p_{2n}, P_{2n} i perimetri dei poligoni regolari iscritti e circoscritti di n e di $2n$ lati, si ottiene:

$$p_n = 2n\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad p_{2n} = 2n\sqrt{2r(r-a)},$$

$$P_n = \frac{2nr}{a}\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad P_{2n} = \frac{4nr}{r+a}\sqrt{r^2 - a^2},$$

dalle quali espressioni segue:

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{p_n + P_n} \ldots 1), \qquad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}} \ldots 2),$$

vale a dire P_{2n} è il medio armonico (vedi Aritm. § 130) fra p_n e P_n, e p_{2n} il medio geometrico fra p_n e P_{2n}.

Le due ultime formole si prestano in ispecie al calcolo successivo dei perimetri dei poligoni regolari.

Scolio. Delle relazioni analoghe a quelle sussistenti fra i perimetri si potrebbero trovare eziandio fra le aree dei poligoni regolari di n e di $2n$ lati iscritti e circoscritti ad un cerchio.

II. Rettificazione della periferia e quadratura del cerchio.

§ 178. Teoremi. 1. *Qualunque sia il numero dei lati del poligono iscritto e di quello circoscritto, la periferia del cerchio è compresa sempre fra i perimetri di quei poligoni.*

Dimostrazione: Se per ogni due vertici consecutivi d'un poligono *iscritto* si conducono delle corde ad un punto dell'arco compreso fra ogni due di quei vertici, il poligono iscritto formato in tal modo ha un perimetro maggiore ed un numero doppio di lati del primo (§ 34, 1). Proseguendo in tal modo a duplicare il numero dei lati dei poligoni iscritti, i perimetri degli stessi andranno aumentando, senza però mai uguagliare la circonferenza, poichè i lati dei poligoni iscritti sono corde, e come tali devonsi trovare sempre nell'interno del cerchio.

Se fra ogni due lati consecutivi di un poligono *circoscritto* si conduce una tangente al cerchio, il poligono circoscritto in tal modo

generatosi ha un perimetro minore ed un numero doppio di lati del primo (§ 34, 1). Continuando in tal guisa a costruire dei poligoni circoscritti di un numero sempre doppio di lati, i perimetri degli stessi andranno mano a mano diminuendo, senza però mai uguagliare la circonferenza, dacchè i loro lati, essendo tangenti d'un cerchio, devono essere situati all'esterno dello stesso.

2. *La differenza fra il perimetro del poligono iscritto e quello del poligono circoscritto ad un cerchio diventa infinitamente piccola, qualora il numero dei lati di quei poligoni vada sempre più aumentando.*

Dimostrazione: Siano CD ed AB (fig. 108) i lati, P_n e p_n i perimetri del poligono circoscritto e di quello iscritto di n lati.

Giusta il § 134, 7 si ha:

$P_n : p_n = OE : OF$, e perciò $(P_n - p_n) : P_n = (OE - OF) : OE$; quindi

$$P_n - p_n = \frac{P_n}{OE} \cdot (OE - OF).$$

Coll'aumentare di n, diminuisce P_n e del pari $\frac{P_n}{OE}$, essendo OE una quantità costante; ma $OE - OF = EF$ è minore del lato AE del poligono regolare di $2n$ lati, per cui diventando quel lato infinitamente piccolo, se n diventa infinitamente grande, $P_n - p_n$ tende a diventare infinitamente piccolo col crescere all'infinito di n.

§ 179. Teoremi. 1. *L'area d'un cerchio è maggiore dell'area di qualsiasi poligono iscritto, ma minore di qualsiasi poligono circoscritto a quel cerchio.*

Poichè l'area del poligono iscritto è una parte dell'area del cerchio, e questo una parte dell'area del poligono circoscritto.

2. *La differenza fra l'area d'un poligono regolare iscritto e quella d'un poligono regolare circoscritto allo stesso cerchio diviene, coll'aumentare continuo del numero dei lati, infinitamente piccola.*

Dimostrazione: Siano CD ed AB (fig. 108) i lati, S_n ed s_n le aree del poligono regolare di n lati circoscritto e quelle del poligono regolare di n lati iscritto allo stesso cerchio. In base al § 163, 2 sarà allora:

$$S_n : s_n = OE^2 : OF^2, \text{ e perciò}$$

$$(S_n - s_n) : S_n = (OE^2 - OF^2) : OE^2, \text{ da cui:}$$

$$S_n - s_n = \frac{S_n}{OE^2}(OE^2 - OF^2).$$

Siccome col crescere di n, S_n e perciò anche $\frac{S_n}{OE^2}$ decrescono, mentre l'espressione $OE^2 - OF^2 = OA^2 - OF^2 = AF^2$ diviene infinitamente piccola, ne consegue che col crescere all'infinito del numero dei lati la differenza $S_n - s_n$ debba tendere a diventare infinitamente piccola.

§ 180. I perimetri di due poligoni regolari, l'uno iscritto e l'altro circoscritto allo stesso cerchio, nei quali il numero di lati va costantemente aumentando, tendono (appar § 178, 1 e 2) ambidue, l'uno crescendo, l'altro diminuendo, verso il loro limite comune, la circonferenza. Analoghe relazioni sussistono, giusta il § 179, 1 e 2, fra le aree dei poligoni regolari iscritti e circoscritti e l'area del rispettivo cerchio.

Su quanto fu ora esposto si basano le seguenti definizioni:

La *periferia d'un cerchio* è il limite comune a cui tendono i perimetri del poligono regolare iscritto e di quello regolare circoscritto a quel cerchio, qualora il numero dei lati di quei poligoni vada di continuo aumentando; l'*area del cerchio* poi è il limite comune delle aree di quegli stessi poligoni.

§ 181. Teorema. *Le circonferenze di due cerchi stanno fra loro come i loro raggi od i loro diametri.*

È conseguenza del concetto dei limiti or ora enunciato, e del § 134, 7.

Corollarî. *a*) Siano c e C le circonferenze di due cerchi, r ed R i loro raggi, d e D i loro diametri, e si avrà: $c:C=r:R$, e del pari $c:C=d:D$. Dalla seconda di queste proporzioni risulta $c:d=C:D$, vale a dire *il rapporto della circonferenza al diametro è costante per tutti i cerchi.* Questo rapporto costante si segna con π, quindi:

$$\frac{c}{d}=\frac{c}{2r}=\pi.$$

b) Da queste ultime formole si ricava: $c=d\pi$, ovvero $c=2r\pi$, vale a dire la *circonferenza d'un cerchio è eguale al prodotto del suo diametro per il numero* π.

c) Per $r=1$ si ha $c=2\pi$, quindi $\pi=\frac{c}{2}$; per cui il numero π *esprime la semicirconferenza d'un cerchio di raggio eguale ad* 1.

§ 182. *Calcolo del numero* π.

Dinotando con π la semicirconferenza d'un cerchio di raggio eguale ad 1, 2π ne esprimerà l'intera circonferenza. Per determinare approssimativamente una tale periferia, si calcolano i perimetri del poligono regolare iscritto e di quello circoscritto di un numero n di lati così grande, che i valori di quei perimetri differiscano di una quantità trascurabile rispetto all'approssimazione che si vuol raggiungere. I decimali in cui i due perimetri concordano, valgono del pari per la circonferenza cercata.

Si voglia p. e. il valore di π con 4 decimali esatti. Si partirà, perchè più comodo per il calcolo, dall'esagono regolare iscritto avente il lato $l_6=r=1$ ed il perimetro $p_6=6$. Il lato dell'esagono circoscritto sarà allora, giusta il § 174, $L_6=1\cdot1547005\ldots$, il rispettivo perimetro $P_6=6\cdot928203\ldots$ Dai due perimetri P_6 e p_6 si calcoleranno, col

metodo seguito nei problemi 1 e 2 del § 176 od in modo ancor più semplice dalle formole 1) e 2) del § 177, i perimetri P_{12} e p_{12}; da questi si determineranno P_{24} e p_{24} e così di seguito sino ai perimetri $P_{1536}=6\cdot283194\ldots$ e $p_{1536}=6\cdot283181$. Siccome questi due ultimi perimetri non differiscono fra loro che nella quinta decimale, si avrà, con una esattezza di quattro decimali, $2\pi=6\cdot2832$, ovvero

$$\pi=3\cdot1416.$$

Portando il calcolo sino a 20 decimali si ottiene nello stesso modo:

$$\pi=3\cdot14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Il primo a determinare il numero π fu *Archimede*, il quale trovò $3\frac{1}{7}>\pi>3\frac{10}{71}$. Ove non si tratti di grande esattezza, il primo di quei valori potrà servire alla bisogna; esso è d'altronde più esatto dell'altro comunemente adoperato di $3\cdot14$.

Ludolf van Ceulen spinse il calcolo del valore di π sino a 35 decimali ed è da lui che il numero π ebbe il nome di numero di *Ludolf*.

§ 183. Teoremi. 1. *Le aree di due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi.*

2. *L'area d'un cerchio è eguale al semiprodotto della sua circonferenza per il suo raggio.*

La verità di queste due proposizioni emerge dal concetto dei limiti enunciato al § 163, 2, e dal § 165, 4.

Corollario. Esprima r il raggio, c la circonferenza ed s l'area d'un cerchio, e sarà: $s=c\,.\,\frac{r}{2}$, ovvero, essendo $c=2r\pi$,

$$s=r^2\pi,$$

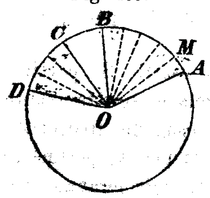
vale a dire l'*area d'un cerchio è eguale al prodotto del quadrato del raggio per il numero* π.

Scolio. *L'area d'un anello o d'una corona circolare è eguale al prodotto della somma delle due circonferenze per la metà della differenza dei due raggi.*

III. Rettificazione dell'arco di cerchio e quadratura del settore circolare.

§ 184. Teoremi. 1. *Nel medesimo cerchio gli archi stanno fra loro come i relativi angoli al centro.*

Fig. 109.



Dimostrazione: Siano (fig. 109) gli archi AB e CD commensurabili ed AM sia una misura comune degli stessi; supposto ora arco $AB=m\,.\,AM$, ed arco $CD=n\,.\,AM$, si potrà stabilire la proporzione: arco AB : arco $CD=m:n$. Guidando poi dei raggi ad ogni punto di divisione dei due archi, ne risulterà l'angolo $AOB=m\,.\,AOM$, l'angolo $COD=n\,.\,AOM$ (§ 78, 3), per cui si avrà:

angolo AOB: angolo $COD = m:n$, e perciò anche: arco AB: arco CD = angolo AOB: angolo COD.

Che questa proporzione debba sussistere, anche se AB e CD fossero incommensurabili, segue dal § 115.

2. *Due archi omologhi stanno fra loro come le rispettive circonferenze* (fig. 47).

Dimostrazione: Siano C e c le circonferenze di due cerchi aventi i raggi OA ed Oa, ed AB ed ab due archi che in quelle circonferenze corrispondono all'angolo al centro α. Sarà allora, giusta il numero 1, $AB : C = \alpha : 360$, ed $ab : c = \alpha : 360$, quindi arco $AB : C =$ arco $ab : c$, ovvero arco AB : arco $ab = C : c$

Corollario. Due archi omologhi stanno fra loro come i rispettivi raggi (§ 181).

§ 185. *Lunghezza d'un arco di circonferenza.*

1. Sia a la lunghezza d'un arco corrispondente all'angolo al centro α d'un cerchio di raggio r. In base al § 184, 1 si avrà:

$$a : 2r\pi = \alpha : 360, \text{ e perciò } a = r \cdot \frac{\alpha\pi}{180}.$$

2. Per $r = 1$ si ha: $a = \frac{\alpha\pi}{180}$. L'espressione $\frac{\alpha\pi}{180}$, che d'ora in poi segneremo per brevità con *arc* α, dà quindi la lunghezza dell'arco di α gradi per il raggio eguale ad 1.

3. Da $a = r \cdot \frac{\alpha\pi}{180} = r \cdot \text{arc}\ \alpha$ segue, che *la lunghezza d'un arco di circonferenza è eguale alla lunghezza dell'arco omologo nel cerchio di raggio* 1, *moltiplicata per il raggio del primo arco.*

4. La lunghezza d'un arco nel cerchio di raggio 1 viene assunta spesso quale misura del relativo angolo, per cui si suole segnare con 2π un angolo pieno, con π un angolo piatto, con $\frac{\pi}{2}$ un angolo retto, con *arc* α in genere, un angolo α. Si noti, però, che nel far ciò si vuol esprimere che dalla lunghezza d'un arco nel cerchio di raggio eguale all'unità, si possa senza ambiguità dedurre il numero dei gradi del rispettivo angolo al centro, dacchè, le lunghezze degli archi e gli angoli, essendo grandezze eterogenee, non potrebbero a rigore essere misurate le une colle altre.

§ 186. Teoremi. 1. *Nel medesimo cerchio i settori stanno fra loro come i relativi angoli al centro.*

2. *Due settori circolari omologhi stanno fra loro come le aree dei rispettivi cerchi.*

Le *dimostrazioni* sono analoghe a quelle del § 184, 1 e 2.

Scolio. Due settori circolari omologhi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi (§ 183, 1).

§ 187. Teorema. *L'area d'un settore circolare è eguale al semiprodotto della lunghezza del suo arco per il raggio.*

Dimostrazione: Dinotando con s l'area d'un settore circolare avente il raggio r e l'angolo al centro α, e con a la lunghezza del relativo suo arco, si avrà (giusta il § 186, 1) $s : r^2\pi = \alpha : 360$, quindi $s = \frac{r^2\alpha\pi}{360}$, ovvero, essendo $\frac{r\alpha\pi}{180} = a$ (§ 185, 1),

$$s = \frac{ar}{2}.$$

Scolio. *L'area d'un segmento circolare* è eguale alla differenza o alla somma dell'area del relativo settore circolare e di quella del triangolo compreso fra la corda ed i due raggi, secondo che il segmento è minore o maggiore del semicerchio.

IV. Teoremi e problemi per esercizio.

§ 188. *Teoremi.*

1. Le diagonali d'un quadrilatero iscritto ad un cerchio stanno fra loro come la somma dei prodotti dei lati che concorrono nelle estremità di quelle diagonali.

Si determinino le aree dei due triangoli nei quali resta diviso il quadrilatero da una delle diagonali, e ciò, giusta il § 172, 1, a mezzo dei tre lati e del raggio della circonferenza circoscritta; lo stesso facciasi per gli altri due triangoli risultanti dall'altra diagonale, e si ponga la somma delle aree dei primi triangoli eguale alla somma di quelle dei secondi.

2. Se sopra i cateti d'un triangolo rettangolo iscritto in un semicerchio si descrivono delle semicirconferenze, la somma delle lunule (§ 92) che ne nascono è eguale all'area del triangolo rettangolo (Teorema d'Ippocrate).

Da $a^2 = b^2 + c^2$ si ricava per i semicerchi descritti sui tre lati del triangolo: $\frac{a^2\pi}{8} = \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8}$, per cui non rimane che da sottrarre d'ambe le parti di questa equazione la somma $s_1 + s_2$ dei segmenti circolari corrispondenti ai due cateti.

3. L'area del cerchio è maggiore di qualunque poligono ad esso isoperimetro.

Sia a l'area d'un poligono regolare di n lati isoperimetro ad un cerchio la cui circonferenza sia $2r\pi$. Iscrivendo al poligono una circonferenza, questa avrà un raggio $\rho < r$, essendo (vedi § 178, 1) $2\rho\pi < 2r\pi$. Se si pone quindi $\rho = r - d$, si avrà, giusta il § 165, 4, $a = 2r\pi \cdot \frac{r-d}{2} = r^2\pi - dr\pi$. L'area del cerchio $r^2\pi$ è quindi maggiore di quella a del poligono regolare di n lati, e quindi a fortiori maggiore (§ 169, 13) dell'area di qualunque poligono, anche irregolare, isoperimetro al cerchio.

4. **Fra tutte le figure piane che hanno la medesima area, il cerchio ha il più piccolo perimetro.**

Siano a e p l'area ed il perimetro d'un cerchio, s e P l'area ed il perimetro d'un poligono qualunque, e di più abbiasi $a = s$. Segnando con A l'area d'un cerchio che abbia il perimetro P, sarà $s < A$ (dietro 3), e perciò anche $a < A$ e del pari $p < P$, avendo il circolo minore anche un perimetro minore.

§ 189. *Problemi di calcolo.*

1. In un cerchio, r è il raggio, p la periferia ed a l'area; data una di queste grandezze calcolare le altre due.

Sia dato: *a*) $r = 5{\cdot}28\,m$; *b*) $p = 17{\cdot}75\,m$; *c*) $a = 4{\cdot}0115\,dm^2$.

2. La lunghezza d'un arco di α^0 per il raggio r è a, l'area del relativo settore circolare è s; date due di queste grandezze determinare le altre due.

3. Si trovi la lunghezza di *arc* 1°, *arc* 1′, *arc* 1″ (§ 185, 2).

4. La lunghezza d'un arco di cerchio è eguale al raggio; quanti gradi (ρ^0) contiene l'angolo ad esso corrispondente?

$$\rho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57\ 29578^0.$$

5. Si calcoli l'area d'un segmento circolare il cui raggio sia r, e la cui corda sia eguale al raggio.

6. Quale è l'area d'un segmento circolare la cui corda c è il lato del triangolo equilatero iscritto al cerchio?

7. Data l'area a d'una corona circolare e la differenza d dei raggi dei due cerchi, calcolare i raggi stessi.

8. Si divida il diametro d'un cerchio di raggio r nel rapporto $m : n$, e per il punto di divisione si faccia passare un cerchio concentrico a quello dato; quale è l'area dell'anello circolare in tal guisa formato?

9. Quale è l'area d'un settore anulare corrispondente ad un angolo al centro di 48°, se i raggi dei relativi archi sono di $0{\cdot}5\,m$ e di $0{\cdot}4\,m$?

10. Calcolare le diagonali d'un quadrilatero iscritto, noti che siano i suoi lati (§ 140 e § 188, 1).

11. In un cerchio di raggio r è iscritto un rettangolo di cui un lato è a; quale ne è l'area?

12* Quale è l'area d'un poligono regolare di sedici lati iscritto in un cerchio di raggio r? $(4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}})$.

13. Come stanno fra loro le aree di due triangoli equilateri, se il cerchio circoscritto all'uno è equivalente a quello iscritto nell'altro?

14. In un quadrante d'un cerchio di raggio r s'iscriva un cerchio che tocchi i lati e l'arco del quadrante; si determini l'area d'un terzo cerchio il cui raggio sia eguale alla somma del raggio del quadrante e di quello del cerchio in esso iscritto $(2r^2\pi)$.

15. Un rettangolo ha per base il lato di un triangolo equilatero iscritto in un cerchio di raggio r, e per altezza, il lato dell'esagono regolare circoscritto allo stesso cerchio; quale è la circonferenza d'un cerchio equivalente a quel rettangolo? $(2r\sqrt{2\pi})$.

APPENDICE ALLA PLANIMETRIA.

Soluzione di problemi di costruzione secondo il metodo dell'analisi algebrica.

1. Costruzione geometrica di espressioni algebriche.

§ 190. Esprimendo dei segmenti dati a mezzo delle loro misure, si ottengono del pari per altri segmenti da quelli in un dato modo dipendenti delle espressioni numeriche. Così, p. e., indicando i due cateti d'un triangolo rettangolo a mezzo delle loro misure, a e b, $\sqrt{a^2+b^2}$ sarà l'espressione numerica per la rispettiva ipotenusa. Viceversa poi ad un'espressione numerica della forma $\sqrt{a^2+b^2}$ si può ridonare il suo significato geometrico, costruendola quale ipotenusa d'un triangolo rettangolo i cui cateti abbiano a rispettivamente b unità lineari.

La *costruzione d'un segmento* espresso da una misura x determinata da una *espressione algebrica*, si può ridurre ad uno dei seguenti casi principali:

1. Si abbia da costruire $x = a + b$. Se si trasportano sopra una data retta, $AB = a$ ed in continuazione $BC = b$, il segmento AC rappresenta la somma $a + b$.

2. Per costruire $x = a - b$, si porta sopra una data retta, a partire dal punto A verso una data direzione, $AB = a$ e poi da B in direzione opposta, $BC = b$; il segmento AC rappresenta la differenza $a - b$.

Per $b > a$, x è negativo, ed AC assume rispetto ad A una direzione contraria a quella prima assunta.

3. L'espressione $x = \frac{bc}{a}$, derivante dalla proporzione $a : b = c : x$, si costruisce, appar § 146, 1, quale *quarta proporzionale* ai tre segmenti dati a, b, e c.

4. Per costruire l'espressione $x = \frac{b^2}{a}$, derivante dalla proporzione $a : b = b : x$, si costruisce, secondo il § 146, 2, la *terza proporzionale continua* ad a e b.

5. $x=\sqrt{ab}$, derivante dall'equazione $x^2=ab$, ovvero dalla proporzione $a:x=x:b$, è la *media proporzionale* fra i segmenti a e b e come tale si costruisce appar § 146, 3.

6. $x=\sqrt{a^2+b^2}$ si costruisce quale ipotenusa d'un triangolo rettangolo avente i due cateti dati a e b. Per $b=a$ si ottiene $x=a\sqrt{2}$ quale ipotenusa d'un triangolo rettangolo isoscele avente il cateto a.

7. $x=\sqrt{a^2-b^2}$ si costruisce quale cateto d'un triangolo rettangolo che abbia a per ipotenusa e b per secondo cateto. Per $b=\frac{a}{2}$ si ottiene $x=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ quale altezza d'un triangolo equilatero avente il lato a.

§ 191. La costruzione di espressioni algebriche composte si può ricondurre sempre alla costruzione d'una delle forme fondamentali sopraccitate.

Esempî.

1. $x=a-b+c$. Si costruisca $m=a-b$ e poi $x=m+c$.
2. $x=\frac{abc}{df}$. Si costruisca $m=\frac{ab}{d}$ e poscia $x=\frac{mc}{f}$.
3. $x=\frac{ab+cd}{f}$. Si costruisca $m=\frac{ab}{f}$, $n=\frac{cd}{f}$ e poscia
$$x=m+n.$$
4. $x=2a-a\sqrt{2}$. Si costruisca $m=a\sqrt{2}$, indi $x=2a-m$.
5. $x=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$. Si costruisca quale lato d'un decagono regolare iscritto in un cerchio di raggio r (§ 175, 1).

Costruzione: $x=\sqrt{\frac{5r^2}{4}}-\frac{r}{2}=\sqrt{r+\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{r}{2}$.

6. $x=\sqrt{a^2+bc}$. Si costruisca $m=\sqrt{bc}$, indi
$$x=\sqrt{a^2+m^2}.$$
7. $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Si costruisca $m=\sqrt{a^2+b^2}$, poscia $n=\sqrt{m^2-c^2}$ e finalmente $x=\sqrt{n^2+d^2}$.
8. $x=a\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2a^2-a^2\sqrt{2}}$. Si costruisca $m=a\sqrt{2}$, $n=\sqrt{a.m}$ e poi $x=\sqrt{m^2-n^2}$.

2. Soluzione algebrica di problemi geometrici di costruzione.

§ 192. Se la soluzione d'un problema geometrico di costruzione dipende dalla determinazione d'un dato segmento, si potrà all'uopo applicare il *metodo dell'analisi algebrica*, che consiste nel cercare e nel costruire poi geometricamente un'espressione algebrica corrispondente alla misura del segmento chiesto.

Innanzi tutto si tradurranno in linguaggio algebrico le condizioni del tema, e segnato con x il segmento chiesto, e con altre lettere le quantità note, si stabilirà, a mezzo di adatti teoremi geometrici, *un'equazione* fra x e le quantità note. Sciolta questa equazione si otterrà per x un'epressione algebrica alla quale si dovrà ridonare il suo significato geometrico *costruendola geometricamente.*

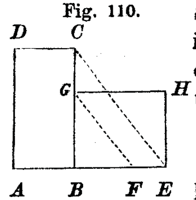
La *dimostrazione* della giustezza della costruzione è contenuta nella stessa analisi, mentre la *determinazione* è immediata conseguenza del significato geometrico dell'espressione numerica trovata.

Esempî con soluzione.

§ 193. Problema. *Trasformare un rettangolo* ABCD (fig. 110) *in un altro di cui sia dato un lato.*

Analisi algebrica: Il problema è da considerarsi sciolto, qualora sia determinata la lunghezza del secondo lato del rettangolo chiesto.

Fig. 110.



Si segni con x questa lunghezza sconosciuta, con a il lato BE noto, e con b e c i due lati AB e BC del rettangolo dato. Dovendo essere questi due rettangoli equivalenti si avrà l'equazione

$ax=bc$, che sciolta ci dà
$$x=\frac{bc}{a}.$$

Dunque x è la quarta proporzionale ad a, b, e c.

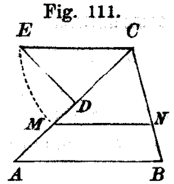
Costruzione: Si faccia $BF=AB=b$, si guidino il segmento EC ed a questo la parallela FG che taglia in G la BC. Sarà allora $BE:BF=BC:BG$, ovvero $a:b=c:BG$, quindi $x=BG$, e perciò $BEHG$ il chiesto rettangolo.

Determinazione: La soluzione è sempre possibile ed è una sola.

§ 194. Problema. *Dividere un triangolo* ABC (fig. 111) *in due parti eguali a mezzo d'una retta* MN *parallela ad un lato* AB.

Analisi: In questo caso si tratta di determinare il segmento CM, che segneremo con x, per avere il punto M per il quale deve passare la $MN \parallel AB$. Si ponga $AC=a$ e si avrà $\triangle CMN \sim CAB$, per cui, giusta il § 162, dovrà sussistere la proporzione $\triangle CMN : CAB = x^2 : a^2$.

Fig. 111.



Dovendo poi essere $\triangle CMN=\frac{CAB}{2}$, si avrà
$$x^2=\frac{a^2}{2}=\frac{2a^2}{4}, \text{ e perciò}$$
$$x=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

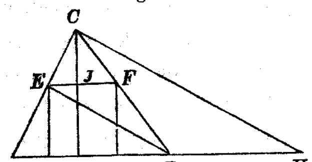
Sarà quindi x l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo isoscele col cateto $\frac{a}{2}$.

Costruzione: Si eriga nel punto medio D della AC una normale, e si trasporti su questa un segmento $DE = DC$. Sarà allora $CE^2 = CD^2 + DE^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$, e perciò $CE = x$. Facendo ora $CM = CE$ e guidando la $MN \parallel AB$, risulterà $\triangle CMN =$ trapezio $ABNM$.

§ 195. Problema. *Iscrivere un quadrato in un dato triangolo* ABC (fig. 112).

Analisi: Egli è chiaro che il chiesto quadrato $EFHG$ sarà determinato, qualora s'abbia fissato sul lato AC il punto E, per il quale si deve guidare il segmento EF parallelo ad AB, onde risulti $EF = EG$. Si ponga il segmento ignoto $AE = x$, $AC = b$, $AB = c$ e l'altezza $CD = a$.

Fig. 112.



Dalla simiglianza dei triangoli ABC ed EFC si ha $AB : CD = EF : CJ$; ma $EF : CJ = EG : CJ = AE : CE$; dunque $AB : CD = AE : CE$, ovvero $c : a = x : (b - x)$, da cui si ricava

$$x = \frac{bc}{a + c}.$$

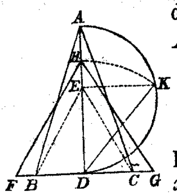
x quindi è la quarta proporzionale ad $(a + c)$, b e c.

Costruzione: Si prolunghi AB di $BK = CD$, si guidino la KC e la $BE \parallel KC$. Sarà allora $AK : AC = AB : AE$, ovvero $(a + c) : b = c : AE$, perciò $AE = x$ ed $EFHG$ il chiesto quadrato.

§ 196. Problema. *Trasformare un triangolo isoscele in un triangolo equilatero.*

Analisi: Sia ABC (fig. 113) un triangolo isoscele avente la base BC e l'altezza AD, EBC un triangolo equilatero costruito sul lato BC, ed HFG il triangolo equilatero domandato. Come si vede, la determinazione di questo ultimo triangolo dipenderà unicamente dal punto H. Si ponga $DH = x$, $AD = m$ e $DE = n$, e sarà

Fig. 113.



$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2, \text{ ovvero}$$
$$\triangle BDE : BDA = n^2 : x^2;$$
$$\text{ma } \triangle BDE : BDA = n : m,$$

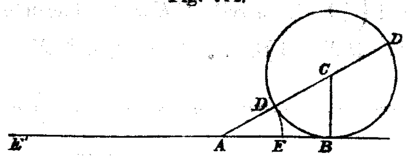
perciò $n^2 : x^2 = n : m$, da cui $x = \sqrt{mn}$.

x sarà quindi la media proporzionale fra m ed n.

Costruzione: Si descriva attorno AD, quale diametro, una semicirconferenza, si guidi $EK \perp AD$; sarà allora $DK = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{mn} = x$. Facendo ora $DH = DK$, e guidando $HF \parallel EB$ ed $HG \parallel EC$, HFG sarà il triangolo equilatero richiesto.

§ 197.* Problema. *Dividere un dato segmento* AB (fig. 114) *in proporzione continua (in media ed estrema ragione).*

Fig. 114.



Analisi: Se E è il punto di divisione chiesto, e se si indica con a il segmento AB, e con x la parte maggiore AE dello stesso, dovrà per le condizioni del problema sussistere la proporzione $a : x = x : (a - x)$, donde si ricava

$$x^2 = a^2 - ax.$$

Sciolta questa equazione si ha

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Il primo di questi valori $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$, che è positivo e minore di a, determina quindi un punto di divisione E situato fra A e B, quale lo esige il problema dato. Il radicale poi di quella espressione rappresenta l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che ha per cateti a ed $\frac{a}{2}$, per cui, levando da quell'ipotenusa un segmento eguale ad $\frac{a}{2}$, si otterrà la lunghezza di x.

Costruzione: Si eriga nell'estremità B del segmento AB la normale $BC = \frac{a}{2}$, si conduca AC e, fatto centro in C, si descriva con un raggio $CB = \frac{a}{2}$ una circonferenza che tagli la AC in D; sarà allora

$$AD = AC - CD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = x.$$

Facendo poi $AE = AD$ si avrà

$$AB : AE = AE : BE.$$

La soluzione algebrica di questo problema conduce visibilmente alla stessa costruzione del § 146, 5 da noi dedotta dalle proprietà del cerchio.

Determinazione: Il problema non ammette che una sola soluzione. Il secondo valore: $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ è negativo, ed anche in senso assoluto maggiore di a, per cui non soddisfà al problema proposto.

Sebbene il valore negativo di x non permetta alcuna soluzione del problema in questione, pure, cangiandogli il segno, esso conduce alla soluzione d'un altro problema affine a quello proposto. Infatti il valore di $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ risulta dalla proporzione $a : x = x : (a + x)$, la quale contiene evidentemente la soluzione algebrica del seguente problema: ***Ad un dato segmento a aggiungerne un altro, in modo che questo sia medio proporzionale fra il segmento dato e la somma di quei segmenti.***

Per costruire questo valore di x, basterà prolungare il segmento AD, ottenuto nell'antecedente costruzione, sino al suo secondo punto d'intersezione D' colla circonferenza descritta col centro C ed il raggio $\frac{a}{2}$, e fare $AE' = AD'$. Sarà allora:

$$AE' = AD' = CD' + AC = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = x, \text{ quindi}$$
$$AB : AE' = AE' : BE'.$$

Da quanto fu detto si scorge non solo che ambidue i problemi suesposti possono essere sciolti colla stessa ed unica costruzione geometrica, ma anche che il valore di x del secondo problema può essere derivato immediatamente da quello negativo di x del primo problema, prendendo quest'ultimo valore col segno contrario. La soluzione algebrica quindi del primo problema contiene in sè anche quella del secondo, tosto che si trasportino sulla AB i due valori di x, il negativo ed il positivo, l'uno, però, da A verso E', l'altro da A verso E, ottenendo in tal modo la soluzione del seguente problema generalizzato:

Sopra una retta indefinita, passante per due punti dati A ***e*** B, ***stabilire un punto, tale che la sua distanza da*** A ***sia media proporzionale fra la sua distanza da*** B ***ed il segmento*** AB ***dato.***

La soluzione di quest'ultimo problema mostra come, ammettendo valori negativi, vengono tolte limitazioni poste nel problema e reso quindi il medesimo suscettibile di una soluzione più generale.

3. Problemi per esercizio.

§ 198. Si costruiscano le seguenti espressioni:

1. $x = \frac{ab}{a-b}$. 2. $x = \frac{abc^2}{def}$. 3. $x = \frac{a^2+b^2}{c}$.

4. $x = \frac{b^2+bc}{a}$. 5. $x = \frac{ab+bc}{a-b}$. 6. $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

7. $x = \sqrt{ab+cd-ef}$. 8. $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab}$.

9. $x = \sqrt{\frac{a^2b+c^2d}{f+g}}$. 10. $x = \sqrt{\left\{a^2 - a\sqrt{a^2-b^2}\right\}}$.

§ 199. Si sciolgano a mezzo dell'analisi algebrica i seguenti problemi:

1. Costruire un rettangolo, data la somma s e la differenza d di due lati.

2. Dividere il lato maggiore d'un rettangolo in modo che la differenza dei quadrati dei segmenti sia eguale all'area del rettangolo.

3. Per ogni vertice d'un triangolo dato descrivere una circonferenza in modo che ognuna delle stesse sia tangenziale esterna alle altre due.

4. Si costruisca sopra un lato d'un triangolo un rettangolo equivalente a quello formato dagli altri due lati del triangolo.

5. Si guidi in un triangolo una retta parallela ad un lato ed eguale ad un segmento dato.

6. In un triangolo dato ABC guidare una retta MN parallela al lato BC in guisa, che il segmento superiore AM sia eguale al segmento minore AN.

7. Dato un rettangolo, costruire un quadrato tale, che i perimetri delle due figure stiano come le loro aree.

8. Dividere un segmento a in due parti in modo che la differenza dei quadrati delle stesse sia eguale ad un dato quadrato m^2.

9. Costruire un triangolo rettangolo di cui siano noti un cateto a e la somma s dell'ipotenusa e dell'altro cateto.

10. Costruire un rettangolo, dati che siano un lato e la somma della diagonale e dell'altro lato.

11. Trasformare un rettangolo ab in un quadrato x^2.

12. Trasformare un parallelogrammo, i cui lati sono a e b, in un rombo che abbia un angolo comune col parallelogrammo (§ 161, corollario).

13. Da un punto esterno ad un cerchio condurre allo stesso una secante che resti dimezzata dalla periferia del cerchio (§ 136, 2).

14. Iscrivere in un dato cerchio un triangolo equilatero.

Si ponga x per il lato del triangolo iscritto ed r per il raggio del cerchio, e sarà:

$$x = \sqrt{3r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}.$$

15. Trasformare in un quadrato x^2 un triangolo equilatero avente il lato a.

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}}.$$

16. Costruire un rettangolo xy, conoscendone la diagonale d e la differenza m di due lati.

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} + \frac{m}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} - \frac{m}{2}.$$

17.* Si prolunghi una data corda a d'un cerchio in guisa, che la tangente guidata allo stesso dall'estremità del prolungamento abbia una data lunghezza b (§ 136, 2).

Il prolungamento sarà $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.

18.* Si trasformi un quadrato, avente il lato a, in un rombo in cui la somma delle diagonali sia eguale al perimetro del quadrato.

Indicando con $2x$ e $2y$ le diagonali del rombo, si otterrà:

$$x = a + \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ ed } y = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

19.* Costruire un quadrato x^2 di cui sia nota la somma s del lato e della diagonale.

$$x = -s + s\sqrt{2}.$$

20.* Costruire un rettangolo xy, se dello stesso siano dati il perimetro p e l'area a^2.

$$x = \frac{p}{4} \pm \sqrt{\frac{p^2}{16} - a^2}, \text{ ed } y = \frac{p}{4} \mp \sqrt{\frac{p^2}{16} - a^2}.$$

21.* Costruire un triangolo rettangolo isoscele se dello stesso sia noto il perimetro p.

$$x = p - \frac{p}{2}\sqrt{2}, \text{ ove } x \text{ dinota il cateto.}$$

22.* Costruire un triangolo rettangolo di cui siano note la somma s dei due cateti e l'altezza a abbassata sull'ipotenusa.

Si ottiene $x = -a + \sqrt{s^2 + a^2}$, ove x dinota l'ipotenusa.

23.* Costruire un triangolo rettangolo, se dello stesso sono date la differenza d dei due cateti e l'altezza a abbassata sull'ipotenusa.

24.* Costruire un triangolo rettangolo, conoscendo le somme a e b dell'ipotenusa con ciascuno dei due cateti.

Si indichino con z l'ipotenusa e con x ed y i due cateti, e si otterrà $x = a - z$, $y = b - z$, quindi $z^2 = (a - z)^2 + (b - z)^2$, da cui $z = a + b - \sqrt{2ab}$, $x = \sqrt{2ab} - b$ ed $y = \sqrt{2ab} - a$.

25.* Costruire un triangolo rettangolo di cui siano date le differenze a e b dell'ipotenusa con ciascuno dei due cateti.

26.* Abbiasi da iscrivere in un quadrante d'un cerchio di raggio r una circonferenza che sia tangenziale ai due lati ed all'arco del quadrante.

Indicando con x la distanza del centro della circonferenza richiesta dall'arco del quadrante contata sulla bisettrice dell'angolo retto, si ha

$$x = -r \pm r\sqrt{2}.$$

Quale significato si potrebbe attribuire al valore negativo di x?

PARTE SECONDA.

STEREOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO.

Rette e piani nello spazio.

§ 200. *Due rette nello spazio* possono avere, l'una rispetto all'altra, tre posizioni differenti. Se sono situate nello stesso piano, esse sono o *parallele*, o, se sufficientemente prolungate, si *tagliano*. Se non sono situate nello stesso piano, esse nè sono parallele nè si tagliano, e l'una passa al disopra o al disotto dell'altra. Tali rette diconsi *incrocianti*.

Corollario. *a*) Per un punto nello spazio non può essere condotta che *una* sola parallela ad un'altra retta (§ 23, assioma).

b) Più parallele che tagliano la stessa retta sono situate in un piano in uno alla retta stessa.

§ 201. Teoremi. 1. *Una retta che non è situata in un piano, non può avere comune col medesimo che un solo punto.*

Poichè se la retta avesse un secondo punto comune col piano, essa dovrebbe essere tutta situata nel piano (§ 8, assioma).

Il punto ove una retta incontra il piano, dicesi il *piede* di questa retta nel piano.

2. *Se due piani si tagliano, la loro linea d'intersezione è una retta.*

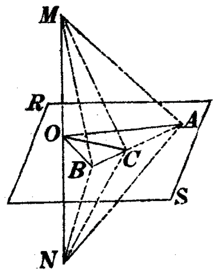
Se la linea d'intersezione non fosse una retta, allora sulla stessa si dovrebbero trovare tre punti non situati in linea retta. Questi tre punti poi dovrebbero trovarsi in tutti e due i piani, per cui questi, contro la supposizione fatta, formerebbero un sol piano (§ 8).

I. Posizione d'una retta rispetto ad un piano.

§ 202. *Una retta nello spazio* può avere, rispetto ad un *piano*, tre posizioni diverse: essa può essere tutta situata *nel piano*, essere *inclinata* verso lo stesso, quando sufficientemente prolungata incontra il piano in un punto, oppure esser ad esso *parallela*, quando, se anche prolungata non incontra mai il piano per quanto questo venga esteso in ogni senso.

§ 203. Teorema. *Se una retta è normale a due rette condotte per il suo piede in un piano, essa sarà del pari normale a qualsiasi altra retta condotta per il suo piede, e che si trovi in quel piano.*

Fig. 115.



Dimostrazione: Siano (fig. 115) OA ed OB due rette nel piano RS; di più sia $MO \perp OA$, $MO \perp OB$, ed OC una terza retta qualunque condotta in quel piano e passante per il punto O. Si prolunghi la retta MO al di sotto del piano RS, si faccia il prolungamento $ON = OM$, si conduca la retta AB e questa tagli la OC nel punto C. Congiungendo ora i punti M ed N con A, si ha $\triangle MOA \cong NOA$, per cui $MA = NA$. Analogamente unendo i punti M ed N con B, ne risulta $\triangle MOB \cong NOB$, per cui $MB = NB$. Quindi $\triangle MAB \cong NAB$, perciò l'angolo $MAB = NAB$. Guidando ora le rette MC ed NC, risulta $\triangle MAC \cong NAC$, per cui $MC = NC$, quindi $OC \perp MN$ (§ 44, 1), ovvero $MO \perp OC$.

§ 204. Se una retta è normale a tutte le rette condotte per il suo piede in un piano, la retta ed il piano sono fra loro *normali*; in caso diverso la retta dicesi *obliqua* al piano.

Corollario. *Se una retta è normale a due rette che si tagliano, essa è pure normale rispetto al piano dalle stesse determinato* (§ 203).

§ 205. Teoremi. 1. *In un punto di un piano non si può innalzare che una sola normale al piano stesso.*

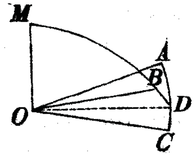
Poichè se si potessero innalzare due normali, conducendo per le stesse un piano, sarebbe possibile di innalzare in un piano e nello stesso punto d'una retta, due normali a questa retta (§ 25, 4).

2. *Da un punto fuori d'un piano non si può abbassare sullo stesso che una sola normale.*

Se fossero possibili due normali, queste, assieme alla retta di congiunzione dei loro piedi, formerebbero un triangolo con due angoli retti.

§ 206. Teorema. *Se una retta è normale ad altre tre rette nel loro punto comune d'intersezione, queste tre rette sono situate in un sol piano.*

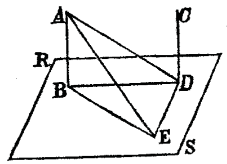
Fig. 116.



Dimostrazione: Sia (fig. 116) OM normale alle rette OA, OB ed OC. Si faccia passare per OA ed OC il piano AOC. Se OB non fosse situato in questo piano, un altro piano passante per le rette OM ed OB taglierebbe il primo lungo una retta OD che con OM formerebbe un angolo $MOD = R$ (§ 203). Ora per supposizione l'angolo $MOB = R$, per cui sarebbe $MOD = MOB$, il che è una contraddizione.

§ 207. Teoremi. 1. *Due rette normali ad un piano, sono parallele fra loro.*

Fig. 117.



Dimostrazione: Siano (fig. 117) AB e $CD \perp$ al piano RS. Si conduca BD e da un punto qualunque A della AB il segmento AD. Si guidi nel piano RS la $DE \perp BD$, si faccia $DE = AB$ e si conducano le AE e BE. I due triangoli ABD e BDE sono congruenti, quindi $AD = BE$; i due triangoli ADE ed EBA sono allora del pari congruenti, per cui l'angolo $ADE = EBA = R$. Siccome poi la stessa retta ED è perpendicolare alle rette AD, BD e CD, ne segue (§ 206) che CD debba trovarsi colle rette AD e BD, e perciò anche colla AB, in un sol piano; quindi $CD \parallel AB$ (§ 25, 1).

2. *Se di due rette parallele l'una è normale ad un piano, anche l'altra lo è del pari.*

Dimostrazione: Sia (fig. 117) $AB \parallel CD$ ed $AB \perp$ al piano RS. Se la CD non è $\perp RS$, lo sarà un'altra retta $C'D$. Allora, condotto per AB e D un piano, sarebbe, giusta il numero 1, $C'D \parallel AB$; nello stesso piano però, secondo la supposizione fatta, è $CD \parallel AB$; per cui per lo stesso punto sarebbe possibile di condurre due parallele alla AB, ciò che contraddice all'assioma del § 23.

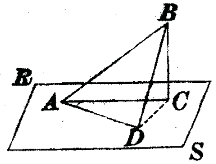
Corollari. *a*) Due rette normali ad un piano si trovano in *un* piano.

b) Tutte le normali abbassate dai differenti punti d'una retta sopra un piano si trovano in un sol piano, ed i loro piedi trovansi sulla stessa retta.

§ 208. Se da un punto nello spazio si abbassa una *normale* sopra un piano, il piede di questa normale dicesi la *proiezione* (proiezione ortogonale) *del punto* in quel piano, ed il piano stesso, *il piano di proiezione*.

Per *proiezione d'una linea* sopra un piano s'intende quella linea di questo piano che comprende le proiezioni di tutti i punti di quella linea. La *proiezione d'un segmento* sopra un piano è il segmento su questo piano che trovasi fra le proiezioni dei punti estremi del segmento dato (§ 207, *b*).

Fig. 118.



Se un punto estremo A del segmento AB (fig. 118) è situato nel piano di proiezione RS, esso è la proiezione di sè stesso su quel piano, per cui basterà abbassare dall'altro punto estremo B la BC normale al piano RS, ed unire i piedi A e C a mezzo del segmento AC, per avere in AC la proiezione del segmento AB sul piano RS.

La *proiezione d'una figura piana* sopra un piano è la figura che risulta dalle proiezioni delle linee formanti il contorno della figura data.

§ 209. Teorema. *L'angolo che forma un segmento colla sua proiezione sopra un piano, è il più piccolo angolo che questo segmento possa formare con una retta passante per il suo piede e condotta in quel piano.*

Dimostrazione: Sia (fig. 118) $BC \perp$ al piano RS, quindi AC la proiezione del segmento AB sul piano RS. Se per A si conduce nel piano RS una retta AD qualunque, e fatto $AD = AC$, si guidano le CD e BD, sarà $BC < BD$ (§ 35, 1). Nei triangoli BAC e BAD poi risulta l'angolo $BAC < BAD$ (§ 43).

L'angolo che forma un segmento colla sua proiezione sopra un piano, serve di *misura* dell'inclinazione del segmento verso il piano, e chiamasi l'*angolo d'inclinazione* del segmento con quel piano.

§ 210. Teorema. *Una retta che condotta nel piano per il piede d'un segmento sia normale alla proiezione di questo, è pure normale al segmento stesso.*

Sia (fig. 117) $AB \perp$ al piano RS, quindi BD la proiezione della AD su RS, e nel piano RS abbiasi $DE \perp BD$. Che $DE \perp AD$, segue dalla dimostrazione al § 207, 1.

Nello stesso modo si dimostra anche il *teorema inverso.*

§ 211. Teorema. *Se da un punto fuori d'un piano si conducono allo stesso una normale e più segmenti obliqui, risulta:*

1. *che la normale è il più corto fra quei segmenti;*

2. *che due segmenti, aventi la stessa proiezione sul piano, sono di egual lunghezza;*

3. *che di due segmenti che hanno differenti proiezioni sul piano, quello è maggiore che ha la proiezione maggiore.*

La *dimostrazione*, simile a quella del § 35, viene fatta immaginando condotti dei piani per i segmenti dati.

Dai teoremi enunciati ai numeri 2 e 3 seguono anche indirettamente i rispettivi *teoremi inversi.*

La normale abbassata da un punto sopra un piano, dà la *distanza* di questo punto dal piano.

Corollari. *a*) Se da un punto fuori d'un piano si conducono a questo dei segmenti eguali, i piedi di questi segmenti sono situati sulla circonferenza che ha per centro il piede della normale abbassata da quel punto sul piano.

b) Il *luogo geometrico* di tutti i punti che distano egualmente da tre punti dati dello spazio e non situati in linea retta, è la retta che, innalzata nel centro del cerchio passante per quei tre punti, insiste normalmente sul piano del cerchio stesso.

§ 212. Teorema. *Due rette, ciascheduna delle quali è parallela nello spazio ad una terza, sono parallele anche fra di loro.*

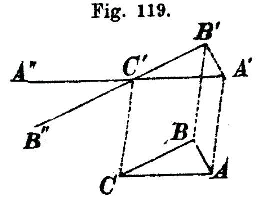
Immaginandosi condotto un piano al quale la terza retta sia normale, anche le due prime rette, giusta il § 207, 2, devono insistere normalmente a questo piano e quindi essere fra loro parallele (§ 207, 1).

§ 213. Teorema. *Due angoli nello spazio i cui lati sono a due a due paralleli, sono* a) *eguali, se ambedue le coppie di lati sono parallele nello stesso senso o tutte e due nel senso opposto; sono* b) *supplementari, se due lati sono paralleli nello stesso senso e gli altri in senso opposto.*

Dimostrazione: *a*) Sia (fig. 119) $AC \parallel A'A''$ e $BC \parallel B'B''$.

Fatto $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$, si guidino i segmenti AA', BB', CC', AB ed $A'B'$; sarà allora AA' eguale e parallelo a CC' (§ 54, 3), BB' eguale e parallelo a CC' e quindi anche AA' eguale e parallelo a BB' (§ 212). Essendo per conseguenza $AB = A'B'$ (§ 54, 3), risulta $\triangle ACB \cong A'C'B'$, quindi l'angolo $ACB = A'C'B'$. Ma l'angolo $A'C'B' = A''C'B''$, perciò l'angolo $ACB = A''C'B''$.

Fig. 119.



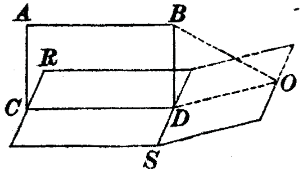
b) Secondo *a*) $ACB = A'C'B'$, ed essendo $A'C'B' + A''C'B' = 2R$, segue $ACB + A''C'B' = 2R$.

§ 214. Teorema. *Due rette parallele che incontrano un piano, formano collo stesso angoli eguali d'inclinazione.*

Infatti esse formano angoli eguali colle normali abbassate sul piano da un punto di ognuna d'esse (§ 207, 1 e § 213).

§ 215. Teorema. 1 *Una retta situata al di fuori d'un piano, parallela ad un' altra che trovasi nel piano, è parallela al piano stesso.*

Fig. 120.



Dimostrazione: Sia (fig. 120) $AB \parallel CD$. Se AB avesse col piano RS un punto comune O, questo dovrebbe trovarsi contemporaneamente in un piano $ABCD$ condotto per le rette AB e CD, per cui O sarebbe un punto comune a tutti e due i piani, ovvero un punto della loro linea d'intersezione CD, il che è contro alla fatta supposizione.

2. *Se una retta è parallela ad un piano, e se per la stessa si guida un secondo piano che taglia il primo, la retta è parallela del pari alla linea d'intersezione dei due piani.*

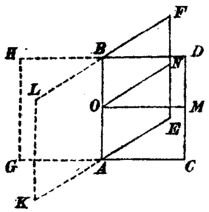
La *dimostrazione* viene fatta del pari indirettamente.

II. Posizione reciproca dei piani.

§ 216. *Due piani* possono avere, l'uno rispetto all'altro, tre posizioni diverse; o i due piani combaciano, o sufficientemente estesi si tagliano lungo una retta, e sono *inclinati* fra di loro, ovvero i due piani per quanto si estendano non si incontrano mai, ed allora sono *paralleli.*

§ 217. *L'angolo del quale* uno dei due piani che si tagliano *deve rotare* attorno la comune linea d'intersezione per pervenire nella posizione dell'altro, dicesi *angolo diedro* ò *cuneo*; la retta comune d'intersezione dicesi *spigolo* o *costola* del diedro; i due piani, *facce del diedro,* ovvero *lati del cuneo.*

Fig. 121.



Nella fig. 121 AB è lo spigolo, AD ed AF le facce del diedro $D(AB)F$ formato dai piani AD ed AF.

$F(AB)H$ dicesi *angolo diedro adiacente* a $D(AB)F$; $H(AB)L$ *angolo diedro opposto* a $D(AB)F$.

§ 218. Se in un punto qualunque O (fig. 121) dello spigolo d'un angolo diedro si innalzano allo spigolo stesso due normali OM ed ON, in modo che l'una di queste normali cada in una faccia, l'altra nell'altra faccia del diedro, l'angolo MON che ne risulta ha sempre la stessa grandezza in qualunque punto dello spigolo si siano innalzate le normali, avendo tali angoli i lati paralleli. Questo angolo costante dicesi *angolo d'inclinazione* dei due piani del diedro.

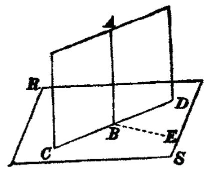
Teorema. *Ad angoli diedri eguali corrispondono angoli d'inclinazione eguali, e viceversa* (*dimostrazione* per sovrapposizione).

L'angolo d'inclinazione delle facce d'un angolo diedro serve quindi di *misura* per l'angolo diedro stesso.

§ 219. Due piani sono *perpendicolari* o *normali* fra loro, quando il loro angolo d'inclinazione è retto.

Teoremi. 1. *Se una retta è normale ad un piano, qualunque piano passante per la stessa è normale del pari al primo piano.*

Fig. 122.



Se (fig. 122) $AB \perp RS$, anche il piano ACD deve essere perpendicolare ad RS. Infatti, se si conduce nel piano RS la $BE \perp CB$, ABE è l'angolo d'inclinazione dei due piani ACD ed RS; ma $ABE = R$, essendo $AB \perp RS$, quindi anche $ACD \perp RS$.

2. *Se due piani sono normali fra loro, la normale alla linea d'intersezione guidata in uno dei due piani è normale del pari all'altro piano.*

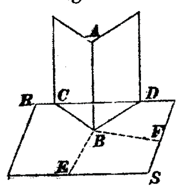
Sia (fig. 122) $ACD \perp RS$ ed $AB \perp CD$; si guidi $BE \perp CD$ e sarà $ABE = R$ ed $ACD \perp RS$; la retta AB essendo quindi normale alla CD ed alla BE sarà del pari normale al piano RS.

3. *Se due piani sono normali fra loro, e se si erige in un punto della loro comune intersezione una normale ad uno dei due piani, questa deve essere tutta compresa nell'altro piano.*

Se (fig. 122) la normale ad RS innalzata nel punto B non coincidesse colla BA guidata normalmente alla CD nel piano ACD — quindi giusta il numero 2, normale ad RS — sarebbe possibile di innalzare in B due normali ad RS, il che contraddice al § 205, 1.

Corollario. Se tre rette che si tagliano in un punto sono a due a due normali fra loro, anche i piani passanti per ogni due di quelle rette devono essere fra loro normali (segue dal numero 1).

Fig. 123.



§ 220. Teorema. *Se due piani che si tagliano sono normali ad un terzo, anche la loro retta d'intersezione è normale a questo terzo piano.*

Sia (fig. 123) $AC \perp RS$ ed $AD \perp RS$. Si guidino $BE \perp BC$ e $BF \perp BD$, per cui (§ 219, 2) $BE \perp AC$, quindi $BE \perp AB$; ma $BF \perp AD$, quindi $BF \perp AB$, e perciò $AB \perp RS$.

Corollario. Se tre piani che si tagliano sono a due a due normali fra loro, anche le loro rette d'intersezione sono del pari a due a due normali fra loro.

§ 221. Teoremi. 1. *Due piani ai quali è normale una stessa retta, sono paralleli fra di loro.*

Se i due piani si tagliassero, la normale ed i segmenti che uniscono i suoi piedi con un punto qualunque della retta d'intersezione dei due piani, formerebbero un triangolo con due angoli retti.

2. *Se due piani sono paralleli, una retta normale all'uno, è normale pure all'altro piano.*

Si dimostra del pari indirettamente.

§ 222. Teoremi. 1. *Due piani paralleli ad un terzo sono paralleli fra loro.*

Poichè una normale innalzata nel terzo piano è normale anche agli altri due piani (§ 221, 2), e quindi questi paralleli fra di loro (§ 221, 1).

2. *Da un punto fuori d'un piano non si può condurre allo stesso che un solo piano parallelo.*

Segue indirettamente dal numero 1.

§ 223. Teoremi. 1. *Se due piani paralleli vengono intersecati da un terzo, le loro rette d'intersezione sono del pari parallele fra loro.*

Si dimostra indirettamente.

2. *Segmenti paralleli fra piani paralleli sono eguali.*

La dimostrazione segue dal numero 1 e dal § 54, 1.

Corollario. Tutte le normali comprese fra piani paralleli sono eguali.

La lunghezza costante di una tale normale dà la *distanza* dei due piani.

§ 224. Teoremi. 1. *Una retta che taglia due piani paralleli forma cogli stessi angoli d'inclinazione eguali.*

Costruendo in un punto qualunque della retta una normale ad uno dei due piani, questa è normale del pari all'altro piano. Ora un piano condotto per la normale e per la retta data taglierebbe i due piani dati lungo due rette fra di loro parallele che colla retta data formerebbero due angoli d'inclinazione eguali, perchè corrispondenti.

2. *Un piano che taglia due piani paralleli forma cogli stessi angoli d'inclinazione eguali.*

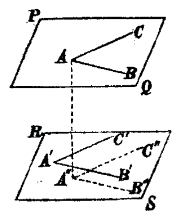
Si conduca nel piano intersecante una retta normale alle due rette parallele d'intersezione, e si proceda in modo analogo a quello seguito nella dimostrazione al numero 1.

§ 225. Teorema. *Due angoli diedri le cui facce sono a due a due parallele, sono eguali se ambedue le coppie di facce sono parallele nello stesso senso o tutte e due nel senso opposto.*

Si estenda una faccia d'uno dei due angoli diedri sino che tagli una faccia dell'altro e si applichi il § 224, 2.

Corollario. Due angoli diedri eguali posti in modo che i loro spigoli siano paralleli, possono essere portati sempre in posizione tale da aver ambedue le coppie di facce parallele nello stesso senso od in senso inverso.

Fig. 124.

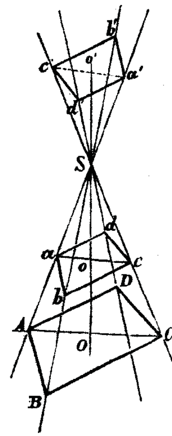


§ 226. Teorema. *I piani di due angoli nello spazio aventi i lati paralleli, sono paralleli fra di loro.*

Sia (fig. 124) $AB \parallel A'B'$ ed $AC \parallel A'C'$. Si guidi $AA'' \perp RS$, $A''B'' \parallel A'B'$ ed $A''C'' \parallel A'C'$. Sarà AA'' normale ad $A''B''$ e ad $A''C''$, ed (§ 212) $A''B'' \parallel AB$ ed $A''C'' \parallel AC$, quindi AA'' normale ad AB e ad AC e di conseguenza anche a PQ; laonde $PQ \parallel RS$ (§ 221, 1).

§ 227. Teoremi. 1. *I raggi d'un fascio dello spazio vengono tagliati proporzionalmente da due piani paralleli.*

Fig. 125.



Sia il piano $ABCD \parallel abcd$ (fig. 125). Trovandosi SA ed SB nello stesso piano, si avrà (§ 116) $SA : Sa = SB : Sb$, e del pari $SB : Sb = SC : Sc$, quindi $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$

2. *Se i raggi d'un fascio dello spazio vengono tagliati proporzionatamente da due piani, questi sono paralleli fra di loro.*

Dalla proporzione $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$ segue (§ 117) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, per cui i piani $ABCD$ ed $abcd$ guidati per gli angoli ABC ed abc dovranno essere paralleli fra di loro (§ 226).

3. *Se i raggi d'un fascio dello spazio vengono tagliati da due piani paralleli, e se si uniscono i corrispondenti punti d'intersezione a mezzo di segmenti, le figure in tal modo ottenute sono simili fra di loro.*

Sia il piano $ABCD \parallel abcd$, per cui (secondo il numero 1) $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$, quindi (§ 117) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd \ldots$ e sarà (§ 118), $AB : ab = SA : Sa$ e $BC : bc = SA : Sa$, quindi $AB : ab = BC : bc$, $BC : bc = CD : cd$ ecc., l'angolo $A = a$, l'angolo $B = b$, l'angolo $C = c$ ecc., quindi $ABCD \backsim abcd$.

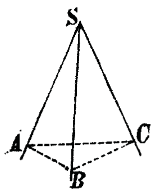
III. Angoli poliedri.

§ 228. Se da un punto partono tre o più raggi non situati nello stesso piano, lo spazio illimitato viene diviso dai piani che si estendono fra ogni due raggi consecutivi in due spazî semilimitati detti *angoli poliedri*.

Il punto dal quale partono i raggi, dicesi *vertice;* i raggi stessi, *spigoli* o *costole*; gli angoli formati da due spigoli consecutivi diconsi *angoli piani* o semplicemente *facce*, e gli angoli d'inclinazione dei piani di ogni due facce consecutive, *angoli diedri* o semplicemente *angoli* dell'angolo poliedro.

In seguito non si tratterà che di quegli angoli poliedri i cui angoli diedri sono concavi.

Fig. 126.



Se (fig. 126) S è il vertice dell'angolo poliedro ed SA, SB, SC i suoi spigoli, l'angolo poliedro si segnerà con $SABC$ e le facce, come gli angoli piani, con ASB, ASC, BSC, ovvero con (AB), (AC), (BC).

Un angolo poliedro ha tante facce quanti spigoli. Secondo il numero delle facce, l'*angolo poliedro* dicesi *triedro*, *tetraedro*, *pentaedro* ecc.

§ 229. Se da un punto qualunque situato all'interno d'un angolo poliedro si abbassano delle normali sui piani delle sue facce, quelle normali formano gli spigoli d'un nuovo angolo poliedro, detto *angolo poliedro polare* del primo.

Se (fig. 127) S' è un punto situato all'interno dell'angolo poliedro $SABC$, e se $S'A' \perp SBC$, $S'B' \perp SAC$, $S'C' \perp SAB$, l'angolo poliedro polare dell'angolo poliedro $SABC$ sarà $S'A'B'C'$.

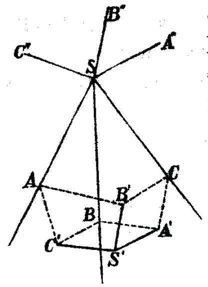
Più semplice è la costruzione dell'angolo poliedro polare, se si guidano dal vertice dell'angolo poliedro dato delle normali ai piani delle sue facce, e ciò in direzione opposta agli spigoli opposti a detti piani, come si scorge nella stessa figura in $SA''B''C''$.

Teoremi. 1. *Ogni angolo poliedro è polare al proprio angolo poliedro polare.*

Se $S'A' \perp SBC$, anche piano $S'A'C'B \perp SBC$; se $S'B' \perp SAC$, anche piano $S'A'CB' \perp SAC$, per cui la retta d'intersezione SC dei piani SBC ed SAC è normale al piano $S'A'C'B'$ (§ 200). Similmente si ha spigolo $SB \perp S'A'B'C$ ed $SA \perp S'B'AC'$.

2. *Se due angoli poliedri sono polari l'uno dell'altro, le facce dell'uno sono supplementi degli angoli diedri dell'altro.*

Fig. 127.



Alla faccia BSC dell'angolo poliedro $SABC$ corrisponde l'angolo diedro allo spigolo $S'A'$ dell'angolo poliedro polare $S'A'B'C'$. La grandezza di questo angolo è data da $BA'C$, dacchè la $S'A'$, normale al piano SBC, è normale del pari ad $A'C$ e ad $A'B$. Essendo SC normale al piano $S'A'CB'$, ed SB normale al piano $S'A'BC'$, gli angoli SCA' ed SBA' del quadrilatero $SBA'C$ dovranno essere retti, per cui $BSC + BA'C = 2R$, ed analogamente $ASC + AB'C = 2R$ ed $ASB + AC'B = 2R$.

§ 230. Prolungando tutti gli spigoli d'un angolo poliedro oltre il suo vertice, l'angolo poliedro determinato da tali prolungamenti dicesi *angolo poliedro opposto* del primo.

Due angoli poliedri opposti $SABC$ ed $SA'B'C'$ (fig. 128) hanno tutte le facce e gli angoli diedri a due a due eguali e disposti nello stesso ordine; però questi elementi si succedono nei due angoli poliedri in un *senso inverso* di rotazione.

§ 231. Due angoli poliedri diconsi *congruenti*, se possono essere messi l'uno entro l'altro in modo che si coprano gli spigoli e le facce. Onde due angoli poliedri siano tali che sovrapposti l'uno sull'altro combacino perfettamente, non basta che negli stessi le facce e gli angoli diedri siano a due a due eguali, ma è pure necessario che questi elementi si succedano nel *medesimo senso* di rotazione.

Due angoli poliedri, nei quali le facce e gli angoli a due a due eguali si succedono in *senso inverso*,

1. non possono in generale essere portati a coprirsi;

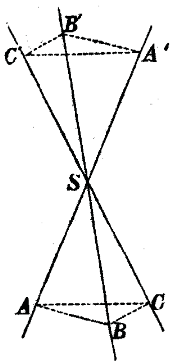
2. possono, però, venir portati alle due parti opposte di un piano, in modo che *i segmenti fra ogni due punti corrispondenti dei due angoli poliedri siano normali a quel piano e dallo stesso vengano dimezzati.*

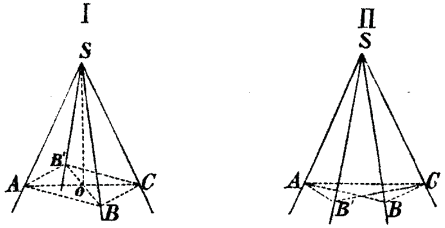
Dimostrazione: Siano (fig. 128) $SABC$ ed $SA'B'C'$ due angoli poliedri opposti.

1. Se si pone (fig. 128, I) la faccia $(A'C')$ sull'altra ad essa eguale (AC), in modo che SA' venga a cadere sopra SA, SC' sopra SC, gli spigoli SB' ed SB vanno a cadere in differenti parti del piano SAC ed i due angoli poliedri non possono coprirsi.

Ponendo però (fig. 128, II) le due facce eguali $(A'C')$ ed (AC) l'una sull'altra in modo che SA' cada sopra SC ed SC' sopra SA, gli spigoli SB' e SB vengono a stare dalla stessa parte del piano SAC, l'uno accanto all'altro, senza che i due angoli poliedri possano essere portati a coprirsi, ammenochè gli angoli diedri $B(AS)C$ ed $A(CS)B$, e di conseguenza anche $B'(A'S)C'$ ed $A'(C'S)B'$, non fossero tra loro eguali.

Fig. 128.





2. Si trasporti (fig 128, I) l'angolo poliedro $SABC$ sull'altro $SA'B'C'$ in modo che abbiano una faccia $(AC) = (A'C')$ comune e vengano a cadere da due parti opposte. Facendo ora $SB = SB'$, e conducendo BA e $B'A'$ normali allo spigolo SA, sarà $\triangle SAB \cong SA'B'$, perciò $SA = SA'$, ovvero A' identico con A, ed $AB = AB'$. Si guidi la BB' che taglia la faccia comune SAC nel punto O, e sarà $SA \perp AO$, perchè $SA \perp$ al piano BAB'; l'angolo BAO ci dà quindi la grandezza dell'angolo diedro $B(AS)O$ e l'angolo $B'AO$ quella dell'angolo diedro $B'(AS)O$, per cui l'angolo $BAO = B'AO$; $\triangle BAO \cong B'AO$, quindi $BO = B'O'$, e l'angolo $AOB = AOB'$, ovvero $BB' \perp AO$. Nel triangolo isoscele SBB', la cui base è dimezzata in O, è $BB' \perp SO$, quindi $BB' \perp$ al piano SAC. Il segmento BB' fra i punti B e B' è normale quindi al piano SAC e da questo viene dimezzato.

Ciò che fu dimostrato per i punti B e B', vale anche per due altri punti corrispondenti qualsiano dei due angoli poliedri.

Tali angoli poliedri diconsi *simmetrici*.

Fra due angoli poliedri simmetrici, posti nel modo sopraindicato, esiste relazione eguale a quella che passa fra l'oggetto e l'immagine in uno specchio piano, se come specchio si considera la faccia comune ai due angoli poliedri.

Corollari. *a*) Ogni angolo poliedro è simmetrico al suo angolo poliedro opposto.

b) Due angoli poliedri simmetrici ad un terzo sono congruenti fra di loro.

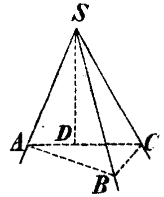
c) Se di due angoli poliedri congruenti l'uno è simmetrico ad un terzo, anche l'altro lo è del pari.

Proprietà dell'angolo triedro.

§ 232. Teoremi. 1. *In ogni angolo triedro la somma di due facce è maggiore della terza.*

Dimostrazione: Sia (fig. 129) (AC) la faccia maggiore; si conduca nel piano ASC la retta SD in modo che ASD sia eguale ad ASB; si faccia $SD = SB$, e si guidi per B e D un piano qualsiasi che tagli gli spigoli SA ed SC nei punti A e C. Risulta allora $\triangle ASD \cong ASB$, quindi $AD = AB$. Essendo $BC > AC - AB$, ovvero $BC > AC - AD$, quindi $BC > CD$, si avrà nei triangoli SBC ed SDC l'angolo $BSC > DSC$ (§ 43), quindi $ASB + BSC > ASD + DSC$, ovvero $ASB + BSC > ASC$, ovvero $(AB) + (BC) > (AC)$.

Fig. 129.



2. *In ogni angolo triedro la somma di tutte le facce è minore di* $4R$.

Dimostrazione: Si taglino con un piano qualsiasi (fig. 129) i tre spigoli nei punti A, B, C, e questi saranno i vertici di tre nuovi triedri. Segnando con A, B, C gli angoli del triangolo ABC, e con A', A'', B', B'', C', C'' gli altri angoli piani dei tre nuovi triedri, si avrà, giusta il numero 1:

$$A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > A + B + C,$$

ovvvero $$A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > 2R.$$

Ma:

$$ASB + ASC + BSC + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' = 6R,$$

quindi sottraendo da ambedue le parti l'ultima disuguaglianza, si avrà:

$$ASB + ASC + BSC < 4R, \text{ ovvero}$$
$$(AB) + (AC) + (BC) < 4R.$$

Scolio. In modo del tutto eguale si dimostra il seguente teorema generalizzato:

In ogni angolo poliedro la somma di tutte le facce è minore di $4R$.

§ 233. Teorema. *In ogni angolo triedro la somma dei tre angoli diedri è maggiore di* 2 R, *ma minore di* 6 R.

Dimostrazione: Siano A, B, C gli angoli diedri d'un triedro, ed a', b', c' le facce del suo triedro polare. Sarà, giusta il § 229, 2:

$$A + a' = 2R,$$
$$B + b' = 2R,$$
$$\underline{C + c' = 2R,} \text{ quindi}$$
$$A + B + C + a' + b' + c' = 6R; \text{ ma secondo il § 232, 2, è}$$
$$\underline{a' + b' + c' < 4R,} \text{ laonde}$$
$$A + B + C > 2R.$$

Da $A + B + C + a' + b' + c' = 6R$, segue $A + B + C < 6R$.

§ 234. Teoremi.

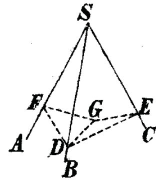
1. *Ad angoli diedri eguali d'un triedro si oppongono facce eguali.*

2. *All'angolo diedro maggiore d'un triedro si oppone la faccia maggiore.*

3. *A facce eguali d'un triedro si oppongono angoli diedri eguali.*

4. *Alla faccia maggiore d'un triedro si oppone l'angolo diedro maggiore.*

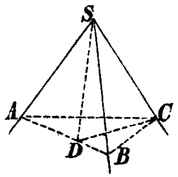
Fig. 130.



1. Dimostrazione: Sia (fig. 130) $A(SC)B = B(SA)C$. Si guidino da un punto D dello spigolo SB la $DG \perp ASC$, la $DE \perp SC$ e la $DF \perp SA$, e si conducano la GE e la GF; sarà allora (§ 210) $GE \perp SC$ e $GF \perp SA$, per cui DEG e DFG saranno gli angoli diedri che per supposizione sono eguali. I triangoli rettangoli DGE e DGF sono congruenti, quindi $DE = DF$, e perciò $\triangle SED \cong SFD$, quindi l'angolo $DSE = DSF$, ovvero $(DE) = (DF)$.

2. Dimostrazione: Sia (fig. 131) $A(SC)B > B(SA)C$. Si faccia passare per SC un piano CSD in modo che esso formi con ASC un angolo diedro eguale a $B(SA)C$; avendo il triedro $SACD$ due angoli diedri eguali, ne consegue, giusta il numero 1, che anche le facce (AD) e (CD), ad essi opposte, sono eguali. Nel triedro $SBCD$ si ha $(BD) + (CD) > (BC)$, quindi $(BD) + (AD) > (BC)$, ovvero $(AB) > (BC)$.

Fig. 131.



La *dimostrazione* del numero 3 si fa in via indiretta, basandosi sul numero 2.

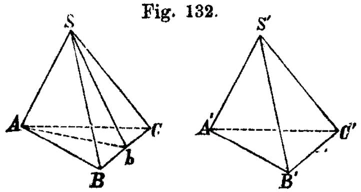
La *dimostrazione* del numero 4 si fa in via indiretta, basandosi sui numeri 1 e 2.

§ 235. Teoremi *sulla congruenza e simmetria dei triedri.*

1. *Due triedri sono congruenti o simmetrici, se hanno un angolo diedro eguale compreso tra due facce rispettivamente eguali.*

2. *Due triedri sono congruenti o simmetrici, se hanno una faccia eguale adiacente a due angoli diedri rispettivamente eguali.*

Fig. 132.



1. Dimostrazione: Sia (fig. 132) $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ ed $A(SB)C = A'(S'B')C'$. Si collochino i due triedri l'uno entro l'altro in modo che i vertici S' ed S, gli spigoli $S'B'$ ed SB, e le facce $(A'B')$ e (AB) coincidano

fra loro; stante l'eguaglianza degli angoli diedri, le facce laterali $B'S'C'$ e BSC dovranno coprirsi, ed essendo le facce $(B'C')$ e (BC) eguali, $S'C'$ dovrà cadere sopra SC, e del pari $A'S'C'$ sopra ASC, dacchè per due rette concorrenti non si può far passare che *un* solo piano. Da tutto ciò ne segue, che i due triedri si coprono perfettamente.

Se poi gli elementi eguali si succedono in senso inverso, allora l'uno dei due triedri è congruente al triedro opposto dell'altro e perciò (§ 231, *a* e *c*) simmetrico all'altro triedro.

2. Dimostrazione: Se ai due triedri dati immaginiamo costruiti i loro triedri polari, questi, giusta il numero 1, saranno congruenti, dacchè negli stessi sono rispettivamente eguali due facce e l'angolo diedro da esse compreso (§ 229, 2). Ma allora questi triedri hanno tutti gli elementi rispettivamente eguali, e questi si succedono nello stesso ordine, per cui lo stesso avrà luogo (§ 229, 2) anche nei due triedri dati, che saranno perciò congruenti.

La dimostrazione per la simmetria, come al numero 1.

3. *Due triedri nei quali due facce e l'angolo diedro opposto ad una di queste due facce sono rispettivamente eguali, sono congruenti o simmetrici, purchè non siano supplementari gli angoli diedri opposti all'altra coppia di facce eguali.*

4. *Due triedri nei quali due angoli diedri e la faccia opposta ad uno di questi due angoli sono rispettivamente eguali, sono congruenti o simmetrici, purchè non siano supplementari le facce opposte all'altra coppia di angoli diedri eguali.*

3. Dimostrazione: Sia (fig. 132) $(AB) = (A'B')$, $(AC) = (A'C')$, $A(SC)B = A'(S'C')B'$ ed $A(SB)C + A'(S'B')C' \gtrless 2R$. Se si collocano i due triedri l'uno entro l'altro, in modo che S' cada sopra S, $S'C'$ sopra SC ed $(A'C')$ sopra (AC), anche le facce laterali $C'S'B'$ e CSB dovranno coprirsi, essendo eguali gli angoli diedri; ma allora lo spigolo $S'B'$ dovrà cadere sopra SB, dacchè se $S'B'$ non cadesse su SB ma lungo un'altra retta Sb, dovrebbe essere, giusta il numero 1, il triedro $SAbC \cong S'A'B'C'$, quindi $A(Sb)C = A'(S'B')C$ ed $(Ab) = (A'B') = (AB)$, e perciò (§ 234, 3) anche $A(SB)b = A(Sb)B$; ma $A(Sb)B + A(Sb)C = 2R$, perchè angoli diedri adiacenti, quindi $A(SB)b + A'(S'B')C' = 2R$, ovvero $A(SB)C + A'(S'B')C' = 2R$, ciò che contraddice alla supposizione fatta. $S'B'$ ed SB dovranno quindi coprirsi, ed i due triedri essere perciò congruenti.

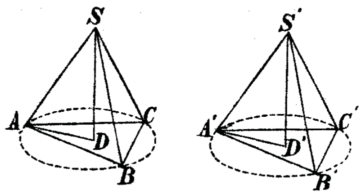
La dimostrazione per la simmetria, come al numero 1.

4. Dimostrazione: Per mezzo dei triedri polari, come al numero 2, e basandosi sul numero 3.

5. *Due triedri che hanno tutte le tre facce rispettivamente eguali, sono congruenti o simmetrici.*

6. *Due triedri che hanno tutti i tre angoli diedri rispettivamente eguali, sono congruenti o simmetrici.*

Fig. 133.



5. *Dimostrazione:* Sia (fig. 133) $(AB)=(A'B')$, $(AC)=(A'C')$, e $(BC)=(B'C')$. Si faccia $SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C'$, e per i punti A, B, C ed A' B' C' si guidino i piani ABC ed $A'B'C'$; si abbassino su questi piani le normali SD ed $S'D'$, e si circoscrivano ai triangoli ABC ed $A'B'C'$ delle circonferenze i cui centri saranno i piedi D e D' di quelle normali (§ 221, *a*). Essendo allora $\triangle ASB \cong A'S'B'$, quindi $AB=A'B'$, ed analogamente $AC=A'C'$ e $BC=B'C'$, i triangoli ABC ed $A'B'C'$ saranno congruenti, e perciò eguali le circonferenze circoscrittevi ed i loro raggi AD ed $A'D'$. Dalla congruenza poi dei triangoli rettangoli ADS ed $A'D'S'$ segue finalmente $DS=D'S'$.

Trasportando ora il triedro $S'A'B'C'$ sull'altro $SABC$ in modo che i triangoli $A'B'C'$ ed ABC si coprano, anche le circonferenze circoscritte a questi triangoli verranno a combaciare cadendo il centro D dell'una sul centro D' dell'altra; siccome poi dal punto D non si può innalzare che una sola normale al piano ABC, ne viene che $D'S'$ deve cadere nella direzione di DS ed il punto S' confondersi con S, essendo $D'S'=DS$. Gli spigoli e le facce dei due triedri combaciano fra di loro, quindi i due triedri sono congruenti.

La dimostrazione per la simmetria come al numero 1.

6. *Dimostrazione:* Per mezzo dei triedri polari, come al numero 2, ed appoggiandosi al numero 5.

IV. Problemi.

§ 236. *Problemi di costruzione.*

1. Per tre punti dati non situati in linea retta far passare un piano.

2. Da un punto dato nello spazio guidare una normale ad una retta data.

Si faccia passare per il punto e la retta data un piano, e nello stesso si abbassi dal punto dato la normale sulla retta data.

3. Da un punto dato nello spazio guidare una parallela ad una retta data.

La soluzione è analoga alla precedente.

4. In un punto dato d'una retta condurre alla stessa il piano normale (§ 204, coroll.).

5. Da un punto A fuori d'un piano guidare al piano stesso la normale (fig. 117).

Si conduca nel piano RS una retta qualsiasi DE, si abbassi dal punto A, nel piano determinato da A e da DE, la AD normale a DE, si eriga nel piano RS la DB normale alla DE, e si guidi da A, nel piano passante per l'angolo BAD, la normale AB; questa sarà pure normale al piano RS.

Infatti, per costruzione è DE normale al piano BAD, quindi piano $RS \perp ABD$ (§ 219, 1), e perciò anche $AB \perp$ al piano RS (§ 219, 2).

6. In un punto D d'un piano RS (fig. 117) innalzare una normale al piano stesso.

Si abbassi da un punto A qualsiasi situato all'infuori del piano la AB normale al piano RS dato (problema 5), e fatto passare per AB e D un piano, si guidi nello stesso dal punto D la $DC \parallel AB$; DC sarà la normale richiesta (§ 207, 2).

7. Per una data retta situata in un piano guidare allo stesso un piano normale (Probl. 6 e § 219, 1).

V. Teoremi e problemi per esercizio.

§ 237. *Teoremi per esercizio.*

1. La proiezione sopra un piano d'un segmento obliquo è tanto minore quanto maggiore ne è l'angolo d'inclinazione.

2. Ogni punto del piano bisettore d'un angolo diedro è equidistante dalle facce dello stesso.

3. Se si uniscono per mezzo di segmenti i punti d'intersezione di più parallele con due piani del pari paralleli fra loro, le figure che ne risultano sono due poligoni congruenti.

§ 238. *Problemi di costruzione.*

1. Da un punto dato sopra un piano guidare una retta che abbia un dato angolo d'inclinazione sul piano.

Si eriga in un altro punto qualsiasi del piano una normale allo stesso, e si faccia passare per questa e per il punto dato un piano; costruendo ora in questo piano e nel punto dato l'angolo d'inclinazione chiesto in modo che l'uno dei suoi lati cada nel piano dato, l'altro lato dell'angolo sarà la retta obliqua richiesta.

2. Determinare un piano che abbia una data inclinazione rispetto ad altro piano dato.

Si erigano al piano dato due normali, l'una arbitraria, e l'altra in un punto qualsiasi C d'una retta AB del piano dato; si faccia passare per queste due normali un piano, e nello stesso si costruisca nel punto C il dato angolo d'inclinazione, in modo che uno dei suoi lati cada nel piano dato; il piano passanto per l'altro lato di questo angolo e per la retta data AB sarà il piano richiesto.

3. Da un punto situato all'infuori di due piani che si tagliano, condurre agli stessi un piano normale (§ 219, 1).

4. Date le tre facce d'un triedro costruire in un piano uno dei suoi angoli diedri.

Si confronti la costruzione indicata al § 234, 1.

5. Dati i tre angoli diedri d'un triedro, costruire una sua faccia.

Si costruisca, giusta il § 229, il triangolo polare, e la costruzione sarà ricondotta a quella del probl. 4.

CAPITOLO SECONDO.

Dei corpi in generale.

I. Corpi a superficie piane.

§ 239. Un corpo che è limitato da soli piani, dicesi *corpo a superficie piane,* ovvero *poliedro.* Un poliedro non può essere racchiuso da *meno di quattro piani.* I piani che limitano il corpo, diconsi le *facce,* e l'assieme delle loro aree costituisce la *superficie totale* del corpo stesso; le rette d'intersezione delle facce diconsi *spigoli* o *costole,* e gli angoli poliedri formati dalle facce *angoli* del poliedro.

1. La piramide.

§ 240. Se un angolo triedro o poliedro qualsiasi viene tagliato da un piano che interseca tutti i suoi spigoli, il poliedro in tal modo limitato dicesi *piramide.* Il piano della sezione dicesi la *base,* e gli altri piani racchiudenti il corpo diconsi *facce laterali;* le rette lungo le quali queste facce si tagliano fra loro, diconsi *spigoli laterali,* e le rette d'intersezione delle facce laterali colle due basi, *spigoli della base.* Il punto comune a tutti gli spigoli dicesi *vertice,* e la sua distanza dalla base, *altezza* della piramide.

Le facce laterali d'una piramide sono triangoli.

Un piano che passa per due spigoli non consecutivi, dicesi *sezione diagonale* della piramide.

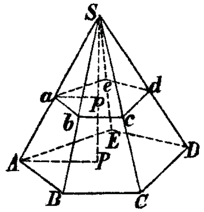
A seconda del numero dei lati della base si distinguono piramidi *triangolari, quadrangolari,* in generale *poligonali.* La piramide triangolare è il poliedro più semplice, e si chiama anche *tetraedro,* poichè è limitata da quattro triangoli.

Una piramide nella quale tutti gli spigoli laterali sono eguali, dicesi *retta,* altrimenti *obliqua.* La base d'una piramide retta è un poligono iscrivibile il cui centro è il piede dell'altezza; le sue facce laterali sono triangoli isosceli.

Una piramide retta è *regolare,* se la sua base è un poligono regolare. Le sue facce laterali sono triangoli isosceli congruenti; l'altezza d'ognuno degli stessi dicesi l'*apotema* o l'*altezza laterale* della piramide regolare.

§ 241. Teoremi. 1. *Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base,* a) *la figura risultante dalla intersezione è simile alla base, e* b) *le loro aree stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice.*

Fig. 134.



Dimostrazione: Sia (fig 134) $abcde \parallel ABCDE$.

a) Segue immediatamente dal § 227, 3.

b) Se $SP \perp ABCDE$ e quindi anche $Sp \perp abcde$, il piano che passa per SAP taglia i due poligoni lungo le rette ap ed AP, per cui sarà $ap \parallel AP$, e perciò $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Ma $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$ (§ 163, 1), quindi $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.

Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la porzione della piramide compresa fra i due piani paralleli dicesi *tronco di piramide,* quella compresa fra il piano della sezione ed il vertice, *piramide complementare* del tronco. Il tronco di piramide è limitato da due poligoni paralleli e simili, quali basi, ed ha tanti trapezî per facce laterali, quanti sono i lati dei due poligoni. La distanza delle due basi dicesi l'*altezza* del tronco.

Se la piramide è *retta* o *regolare,* retto o regolare è del pari il tronco. In un tronco di piramide retto i trapezî laterali sono isosceli; se il tronco è regolare, tali trapezî sono eziandio congruenti. In un tronco di piramide regolare l'altezza d'ognuno dei trapezî laterali dicesi l'*apotema* o l'*altezza laterale* del tronco regolare.

2. *Se due piramidi, di base equivalente e di eguale altezza, si tagliano con piani paralleli alle basi ed equidistanti dai vertici, le sezioni risultanti sono equivalenti.*

Siano P e P' due piramidi colle basi $b = b'$ e le altezze $a = a'$. Si segnino con s ed s' le sezioni fatte nelle stesse distanze dal vertice $d = d'$, e sarà (dietro 1) $s : b = d^2 : a^2$, ed $s' : b' = d'^2 : a'^2 = d^2 : a^2$; quindi $s : b = s' : b'$, e del pari $s = s'$, essendo $b = b'$.

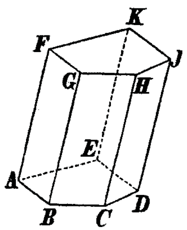
3. *Ogni sezione piana fatta per il vertice e la base d'una piramide è un triangolo.*

Corollario. Ogni piramide poligonale si può scomporre per mezzo di sezioni diagonali in piramidi triangolari aventi l'altezza della piramide intera.

2. Il prisma ed il prismatoide.

§ 242. Se tre o più piani che si intersecano lungo rette parallele, vengono tagliati da due piani paralleli, il poliedro in tal modo limitato dicesi *prisma*. Le superficie delle due sezioni parallele chiamansi le *basi*, le altre superficie racchiudenti il corpo, le *facce laterali* del prisma; le rette lunge le quali si tagliano fra loro le facce laterali, diconsi *spigoli laterali*, mentre *spigoli delle basi* diconsi le rette d'intersezione delle facce laterali colle due basi. La distanza delle due basi è l'*altezza* del prisma.

Fig. 135.



Il corpo $ABCDEFGHJK$ (fig. 135) sarà un prisma, qualora sia, $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DJ \parallel EK$ e piano $ABCDE \parallel FGHJK$.

Corollarî. 1. Le due basi d'un prisma sono poligoni fra loro congruenti (§§ 223, 54 e 213).

2. Tutte le facce laterali d'un prisma sono parallelogrammi.

3. Tutti gli spigoli laterali d'un prisma sono eguali.

Un piano passante per due spigoli laterali non consecutivi d'un prisma, dicesi *sezione diagonale* del prisma.

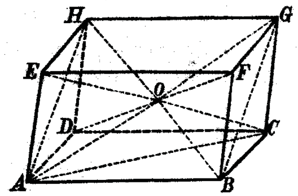
§ 243. A seconda del *numero* degli spigoli laterali si hanno prismi *triangolari*, *quadrangolari*, in generale *poligonali*. Riguardo alla *inclinazione* che quegli spigoli hanno rispetto alle basi, si distinguono prismi *retti* ed *obliqui*, a seconda che gli spigoli laterali stanno perpendicolarmente od obliquamente sulle basi.

Un prisma le cui basi sono parallelogrammi, dicesi *parallelepipedo*. Un parallelepipedo retto le cui basi sono rettangoli dicesi parallelepipedo *rettangolare*. Un parallelepipedo rettangolare in cui tutti gli spigoli sono eguali, dicesi *cubo* o *dado*, e ciascuno spigolo dello stesso, *lato* del cubo. Ogni parallelepipedo è limitato da sei parallelogrammi, ogni parallelepipedo rettangolo da sei rettangoli, ogni cubo da sei quadrati.

§ 244. Per *diagonale* d'un parallelepipedo s'intende il segmento che unisce i vertici di due angoli poliedri che non hanno veruna faccia comune fra di loro. Un parallelepipedo ha quattro diagonali.

Teoremi. 1. *In ogni parallelepipedo le diagonali si tagliano nello stesso punto, e si dimezzano vicendevolmente.*

Fig. 136.



Dimostrazione: Si faccia passare per gli spigoli AB ed HG (fig. 136) un piano, e la sezione risultante $ABGH$ sarà un parallelogrammo (§ 54, 3) le cui diagonali AG e BH dovranno dimezzarsi nel punto O (§ 56, 1); similmente si dimostra che la BH e la CE, la CE e la DF, la DF e la AG si dimezzano nello stesso punto O.

2. *In ogni parallelepipedo rettangolare il quadrato d'una diagonale è eguale alla somma dei quadrati dei tre spigoli concorrenti in un angolo poliedro* (fig. 136).

Sia il parallelepipedo $ABCDEFGH$ rettangolare, e sarà

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = AB^2 + BC^2 + CG^2$$
$$= AB^2 + BC^2 + BF^2.$$

§ 245. Teoremi. 1. *Le sezioni fatte parallelamente alla base d'un prisma sono congruenti alla base stessa.*

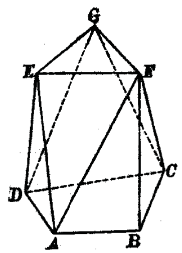
2. *Ogni sezione diagonale d'un prisma poligonale è un parallelogrammo.*

Ambidue questi teoremi si basano sul § 223.

Corollario. Ogni prisma poligonale si può scomporre per mezzo di sezioni diagonali in prismi triangolari aventi l'altezza del prisma intero.

§ 246. Un corpo che ha per *basi* due poligoni paralleli qualsiano, e per *facce laterali* in genere dei triangoli che hanno comune con una delle basi un lato e coll'altra un vertice, dicesi *prismatoide* (Fig. 137).

Fig. 137.



La distanza delle due basi parallele $ABCD$ ed EFG dicesi l'*altezza* del prismatoide, e le rette d'intersezione delle facce laterali fra loro e colle basi diconsi *spigoli laterali*, rispettivamente *spigoli delle basi*.

Se due lati opposti delle due basi (come AB ed EF) sono paralleli, due dei triangoli laterali (ABF ed AEF) formano un trapezio ($ABFE$); che se poi i lati paralleli sono anche eguali, la figura risultante è un parallelogrammo. Da quanto fu detto risulta chiaramente, che fra le facce laterali d'un prismatoide vi possono essere anche dei trapezî e dei parallelogrammi.

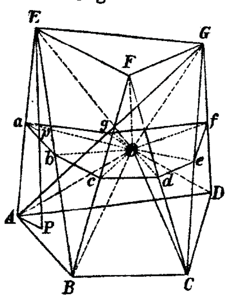
Se le due basi d'un prismatoide hanno un numero eguale di lati a due a due paralleli, il prismatoide chiamasi *obelisco*, e precisamente *obelisco trilatero, quadrilatero* o *polilatero*, a seconda del numero delle sue facce laterali. L'obelisco trilatero è, o un tronco di piramide, od un prisma triangolare.

Un prismatoide in cui una delle due basi si è ridotta ad uno spigolo, dicesi *sfenisco* (cuneo).

Scolio. Il prismatoide, sotto forma di obelisco, comprende tutti i corpi sinora trattati, ad ottenere i quali basta che le basi dello stesso soddisfacciano a peculiari condizioni. Se i lati opposti delle basi d'un obelisco non sono soltanto paralleli, ma anche eguali, l'obelisco si cangia in un prisma; se i detti lati sono proporzionali, l'obelisco si cangia in un tronco di piramide, e se la base superiore va sempre più impiccolendo sino a ridursi ad un punto, l'obelisco si cangia in una piramide.

§ 247. Teorema. *La sezione fatta per il punto di mezzo* a *d'uno spigolo laterale* AE *d'un prismatoide* (fig. 138) *parallelamente alle due basi,* a) *dimezza gli altri spigoli laterali e* b) *l'altezza.*

Fig. 138.



Sia $Ea = Aa$ ed $abcdefg \parallel ABCD$.

a) Essendo le rette d'intersezione ab, bc, $cd\ldots$, del piano $abcdefg$ colle facce laterali, parallele agli spigoli delle basi AB, EF, $BC\ldots$, sarà $Eb = Bb$, $Fc = Bc\ldots$, essendo $Ea = Aa$.

b) Se l'altezza EP del prismatoide viene tagliata in p dal piano $abcdefg$, sarà $ap \parallel AP$, per cui $Ep : Pp = Ea : Aa$; quindi $Ep = Pp$, essendo $Ea = Aa$.

La sezione $abcdefg$ dicesi la *sezione media* del prismatoide.

3. Dei poliedri in genere e dei poliedri regolari in ispecie.

§ 248. Un poliedro i cui diedri sono tutti rientranti, dicesi *convesso;* di tali poliedri soltanto si terrà parola in seguito.

Teoremi. 1. *In ogni poliedro il numero* A *degli angoli piani è doppio di quello* S *degli spigoli.*

Poichè ogni poliedro ha tanti angoli quanto è il complessivo numero dei lati delle facce; questo numero, però, è doppio del numero degli spigoli, dacchè ogni spigolo risulta come lato di due facce adiacenti, quindi: $A = 2S$.

2. ***In ogni poliedro il triplice numero* P *degli angoli poliedri, come pure il triplice numero* F *delle facce, è al più eguale al doppio numero* S *degli spigoli.***

Avendo ogni angolo poliedro, e così pure ogni faccia, almeno tre angoli, ne viene che $3P$, e similmente $3F$, debbono essere eguali o minori del numero complessivo degli angoli piani che (secondo il numero 1) importa $2S$. Laonde:

$$3P \leqq 2S \quad \text{e} \quad 3F \leqq 2S$$

§ 249. Teoremi. 1. *La somma* Σ *di tutti gli angoli che si trovano sulla superficie d'un poliedro è eguale a tante volte* 4 *retti, quanto è il numero degli angoli poliedri* P *diminuito di* 2.

Dimostrazione: Si proiettino tutte le facce del poliedro sopra un piano che non sia normale a veruno spigolo del poliedro; la proiezione di ciascuna faccia sarà un poligono dello stesso numero di lati della faccia proiettata, per cui la somma Σ di tutti gli angoli che trovansi sulla superficie del poliedro, sarà eguale alla somma degli angoli di tutti i poligoni che si ottengono dal proiettare tutte le facce del poliedro su quel piano. Ammesso che le proiezioni di p_1 angoli poliedri cadessero sul perimetro della proiezione del poliedro, e che le proiezioni di p_2 angoli poliedri cadessero nell'interno della proiezione del poliedro, la somma di tutti gli angoli dei poligoni ottenuti dal proiettare il solido in questione, ci dà la doppia somma degli angoli di un poligono di p_1 lati, più p_2 angoli pieni. Si avrà quindi:

$$\Sigma = 2(p_1 - 2) . 2R + p_2 . 4R = (p_1 + p_2 - 2) . 4R,$$

ovvero, essendo $p_1 + p_2 = P$,

$$\Sigma = (P - 2) . 4R.$$

2. *In ogni poliedro la somma* Σ *di tutti gli angoli che si trovano sulla sua superficie è eguale a tante volte* 4 *retti, quanto è la differenza fra il numero* S *degli spigoli ed il numero* F *delle facce.*

Dimostrazione: Se n_1, n_2, n_3,... sono i lati delle singole facce del poliedro, $(n_1 - 2) . 2R$, $(n_2 - 2) . 2R$, $(n_3 - 2) . 2R\ldots$, saranno le somme dei loro angoli, e $\Sigma = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots) . 2R - F . 4R$ la somma degli angoli di tutte le facce. Ma $n_1 + n_2 + n_3, \ldots = 2S$, dacchè ogni spigolo forma i lati di due poligoni, quindi $\Sigma = S . 4R - F . 4R$, ovvero

$$\Sigma = (S - F) . 4R.$$

§ 250. Teorema. *In ogni poliedro la somma degli angoli poliedri* P *e delle facce* F *è di* 2 *maggiore del numero* S *degli spigoli* (Teorema di *Eulero*).

Dimostrazione: Giusta il § 249 la somma di tutti gli angoli alla superficie d'un poliedro è $\Sigma = (P-2) \cdot 4R$, ovvero $\Sigma = (S-F) \cdot 4R$, da cui $P-2 = S-F$, ovvero

$$P+F=S+2.$$

L'equazione $P+F=S+2$, come pure le disuguaglianze sviluppate al § 248, $3P \leqq 2S$ e $3F \leqq 2S$, sono *simmetriche* rispetto a P ed F, vale a dire valgono sempre anche se in esse si scambiano fra loro P ed F.

Corollarî. 1. Da $P+F=S+2$ segue:

Se il poliedro ha un numero pari di spigoli, il numero degli angoli poliedri e quello delle facce devono essere o tutti e due pari o tutti e due dispari; se il numero degli spigoli è dispari, il numero delle facce sarà pari o dispari, a seconda che dispari o pari sarà il numero degli angoli poliedri.

2. Sottraendo da $2P+2F=2S+4$ le disuguaglianze

$$3F \leqq 2S \text{ e } 3P \leqq 2S, \text{ si ha:}$$
$$2P \geqq F+4 \text{ e } 2F \geqq P+4.$$

Il doppio numero $\left\{\begin{array}{l}\text{degli angoli poliedri}\\ \text{delle facce}\end{array}\right\}$ d'un poliedro è per lo meno di 4 maggiore del numero $\left\{\begin{array}{l}\text{delle facce.}\\ \text{degli angoli poliedri.}\end{array}\right.$

3. Si levino da $3P+3F=3S+6$ le disuguaglianze

$$3F \leqq 2S \text{ e } 3P \leqq 2S, \text{ e si otterrà:}$$
$$3P \geqq S+6 \text{ e } 3F \geqq S+6.$$

Il triplo numero $\left\{\begin{array}{l}\text{degli angoli poliedri}\\ \text{delle facce}\end{array}\right\}$ d'un poliedro è per lo meno di 6 maggiore del numero degli spigoli.

4. In un poliedro non è possibile che $\left\{\begin{array}{l}\text{un angolo poliedro qualsiasi}\\ \text{una faccia qualsiasi}\end{array}\right\}$ abbia più di cinque spigoli.

Se ogni angolo poliedro avesse sei spigoli, dovrebbe essere, poichè ogni spigolo è comune a due angoli poliedri, $6P=2S$, ovvero $3P=S$, ciò che contraddice a quanto fu detto al numero 3. Se poi ogni faccia fosse limitata da sei spigoli, siccome ogni spigolo è comune a due facce adiacenti, ne risulterebbe $6F=2S$, ovvero $3F=S$, ciò che contraddice del pari a quanto fu asserito al numero 3.

§ 251. Un poliedro in cui tutte le facce sono poligoni regolari e congruenti, chiamasi *poliedro regolare* o *corpo platonico.*

Teorema. *Non si danno più di cinque poliedri regolari.*

Dimostrazione: Siano le facce d'un poligono regolare dei poligoni di m lati dei quali n concorrano a formare un angolo poliedro. Sia P il numero degli angoli poliedri, F quello delle facce ed S quello degli

spigoli. Il numero complessivo dei lati di tutte le facce sarà eguale a $2S$, perchè ogni spigolo è lato di due facce adiacenti, sarà eguale ad nP, perchè n lati concorrono in ogni angolo poliedro, sarà eguale ad mF, perchè ogni faccia ha m lati. Ne risulta quindi $nP=2S$, ed $mF=2S$, ovvero

$$P=\frac{2S}{n} \text{ ed } F=\frac{2S}{m}.$$

Ora dal § 250 si ha $P+F=S+2$, perciò

$$\frac{2S}{n}+\frac{2S}{m}=S+2, \text{ da cui}$$
$$S=\frac{2mn}{2(m+n)-mn}.$$

Onde S risulti positivo, m ed n dovranno avere valori tali da essere $2(m+n)>mn$; ed è perciò che non si potranno formare poliedri regolari che per i seguenti valori di m ed n.

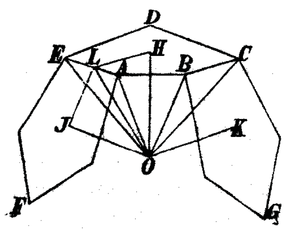
1. $m=3$, $n=3$, donde $S=6$, $P=4$, $F=4$;
2. $m=4$, $n=3$, „ $S=12$, $P=8$, $F=6$;
3. $m=3$, $n=4$, „ $S=12$, $P=6$, $F=8$;
4. $m=5$, $n=3$, „ $S=30$, $P=20$, $F=12$;
5. $m=3$, $n=5$, „ $S=30$, $P=12$, $F=20$.

I corpi da ciò determinati sono: 1, il *tetraedro* regolare; 2, l'*esaedro* regolare (o cubo); 3, l'*ottaedro* regolare; 4, il *dodecaedro* regolare, e 5, l'*icosaedro* regolare.

Dal confronto di questi corpi emerge che l'esaedro e l'ottaedro hanno un numero eguale di spigoli, che il numero degli angoli poliedri dell'uno è eguale al numero delle facce dell'altro, e che il numero dei lati di ogni faccia dell'uno è eguale al numero degli spigoli di ogni angolo poliedro dell'altro. Questi due poliedri regolari diconsi perciò fra loro *coordinati*. Tali sono del pari il dodecaedro e l'icosaedro. Il tetraedro poi è coordinato a sè stesso, dacchè il numero degli angoli poliedri è eguale al numero delle facce, ed il numero dei lati d'ogni faccia è eguale al numero degli spigoli d'ogni poliedro.

§ 252. Teorema. *Ogni poliedro regolare ha un punto equidistante* a) *da tutte le facce e* b) *da tutti i vertici.*

Fig. 139.



Dimostrazione: a) Siano (fig. 139) AEC, AEF... le facce d'un poliedro regolare ed H, J... i loro centri. Se da H ed J si guidano al punto di mezzo L dello spigolo AE i segmenti HL ed JL, questi devono insistere perpendicolarmente su AE, per cui sarà HLJ l'angolo d'inclinazione dei piani AEC ed AEF che insistono normalmente al piano di quell'angolo (§ 219, 1). Le normali erette sulle facce AEC ed AEF nei punti H ed J devono trovarsi nel piano HLJ (§ 219, 3) e tagliarsi in un punto O. Condotta la OL sarà $\triangle OHL \cong OJL$, quindi $OH = OJ$; vale a dire il punto O è equidistante dalle due facce. Ciò che vale per la faccia AEF attigua alla AEC, vale pure per le rimanenti facce attigue alla AEC e per quelle attigue a quest'ultime facce. Il punto O è quindi equidistante da tutte le facce del poliedro regolare.

b) Essendo le OH, OJ, $OK\ldots$ normali alle facce AEC, AEF, $BCG\ldots$, e passando le stesse per i centri H, J, $K\ldots$, ne segue (giusta il § 211) che tutti i segmenti obliqui condotti da O ai vertici delle facce laterali siano eguali. Il punto O quindi ha anche egual distanza da tutti i vertici del poliedro.

Il punto O dicesi il *centro* del poliedro regolare.

Dal presente teorema e da quanto fu dimostrato al § 251 derivano i seguenti teoremi risguardanti la *trasformazione* dei poliedri regolari:

1. I centri delle facce d'un poliedro regolare sono i vertici del poliedro regolare coordinato.

2. I piani egualmente inclinati agli spigoli, condotti per i vertici d'un poliedro regolare, sono le facce del poliedro regolare coordinato.

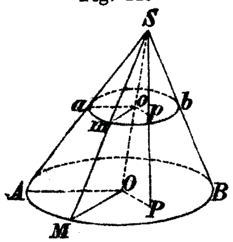
II. Corpi a superficie curve.

§ 253. Un corpo limitato in parte o del tutto da superficie curve dicesi corpo a *superficie curve* o corpo *rotondo*.

1. Il cono.

§ 254. Una retta che passando costantemente per un punto situato al di fuori del piano d'una linea circolare si muove lungo questa sino che ritorna nella primiera sua posizione, genera una superficie curva detta *superficie conica*. La linea circolare data dicesi la *direttrice*, ed il punto fisso dato, il *vertice* della superficie conica.

Fig. 140.



Teorema. *Ogni sezione fatta parallelamente al piano della direttrice d'una superficie conica è un cerchio.*

Dimostrazione: Sia (fig. 140) S il vertice, la linea circolare AMB la direttrice della superficie conica, e piano $amb \parallel AMB$. Se da S si conduce al centro O della direttrice il segmento SO che taglia il piano della sezione in o, e se per SO ed un punto qualsiasi m della linea della sezione si fa passare

un piano che tagli la superficie conica lungo la retta SmM, le due rette om ed OM saranno parallele, per cui si avrà $om : OM = So : SO$, e del pari $oa : OA = So : SO$, quindi $om : OM = oa : OA$, da cui $om = oa$, essendo $OM = OA$. Risulta quindi che tutti i punti del perimetro della sezione sono egualmente distanti da o, ovvero che la sezione è un cerchio.

§ 255. Se una superficie conica viene tagliata da un piano parallelo a quello della direttrice, il corpo in tal modo determinato chiamasi *cono*. La superficie della sezione, che è un cerchio (§ 254), dicesi la *base*, la superficie conica che l'avviluppa, il *mantello* del cono. Il segmento che unisce il vertice col centro della base, è l'*asse*, quello lungo il quale il mantello viene tagliato da un piano passante per l'asse, il *lato* o l'*apotema* del cono. La istanza del vertice dalla base del cono, dicesi l'*altezza* del cono.

Se l'asse è normale alla base, il cono è *retto*, in caso inverso *obliquo*. Un cono retto si può immaginare generato dalla rotazione d'un triangolo rettangolo attorno un suo cateto, quale asse. In un cono retto tutti i lati sono eguali e l'altezza è nello stesso tempo l'asse del cono. In un cono obliquo vi è un lato che è il più corto ed un lato che è il più lungo fra tutti i lati del cono; questi due lati sono situati in un piano che passa per l'asse e la sua proiezione.

Un cono retto i cui lati sono eguali al diametro della base, dicesi *equilatero*.

Se per un punto della periferia della base si guidano una tangente ed un lato del cono, il piano che passa per queste due linee e che ha comune colla superficie conica soltanto quel lato, dicesi *piano tangenziale* del cono.

§ 256. Teoremi. 1. *Se si taglia un cono con un piano parallelo alla base,* a) *la sezione risultante è un cerchio,* e b) *le superficie della sezione e della base stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice del cono.*

Dimostrazione: Sia (fig. 140) piano $amb \parallel AMB$.

a) Segue dal § 254.

b) Se $SP \perp AMB$, sarà del pari $Sp \perp amb$, per cui guidando per OSP un piano che tagli i due cerchi lungo i segmenti OP ed op, sarà $op \parallel OP$, e perciò $ao : AO = So : SO = Sp : SP$. E poichè (§ 183, 1) $amb : AMB = ao^2 : AO^2$, ne segue $amb : AMB = Sp^2 : SP^2$.

Un cono tagliato da un piano parallelo alla sua base si scompone in due parti, l'una, situata fra il piano intersecante e la base detta *tronco di cono*, l'altra al di sopra di questo, detta *cono complementare* del tronco. Il tronco di cono è limitato da due cerchi paralleli disuguali, quali basi, e da una superficie conica avviluppante le basi, quale mantello. Qualunque segmento lungo il quale viene tagliato il mantello da un piano che passa per l'asse, dicesi *lato* od *apotema* del tronco di cono. La distanza delle due basi dà l'altezza del tronco.

Anche il tronco di cono, al pari del cono stesso, può essere *retto* od *obliquo*.

2. *Qualunque sezione fatta per l'asse d'un cono è un triangolo.*

Poichè ogni piano che passa per l'asse taglia la base lungo un diametro, ed il mantello lungo due segmenti.

In un cono retto tutte le sezioni fatte per l'asse sono triangoli isosceli, congruenti e normali alla base. In un cono obliquo soltanto uno di questi triangoli è isoscele, come del pari un solo, e precisamente quello che passa per la proiezione dell'asse è il triangolo normale alla base. Questi due triangoli poi sono normali l'uno all'altro.

3. *Ogni sezione fatta per l'asse d'un tronco è un trapezio.*

Poichè ogni piano che passa per l'asse taglia le basi lungo due diametri, ed il mantello lungo due segmenti non paralleli.

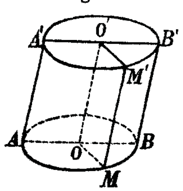
Tanto per il tronco di cono retto, che per quello obliquo, vale, per i trapezî risultanti dalle sezioni fatte per i loro assi, ciò che fu detto dei triangoli risultanti dal tagliare il cono con consimili piani.

2. Il cilindro.

§ 257. Una retta che si muove lungo la circonferenza d'un cerchio, mantenendosi parallela ad un'altra retta fissa passante per il centro di quel cerchio, sino che ritorna nella primiera sua posizione, descrive una superficie curva, detta *superficie cilindrica*. La circonferenza data, chiamasi la *direttrice*, e la retta fissa che passa per il centro di quella, l'*asse* della superficie cilindrica.

Teorema. *Ogni sezione fatta parallelamente al piano della direttrice d'una superficie cilindrica è un cerchio di raggio eguale a quello della direttrice.*

Fig. 141.



Dimostrazione: Sia la circonferenza ABM (fig. 141) la direttrice della superficie cilindrica, e supponiamo che un piano $A'B'M'$, parallelo a quello della direttrice, tagli l'asse OO' nel punto O'. Se si fa passare per OO' ed un punto qualsiasi M della linea d'intersezione un piano che tagli la superficie cilindrica lungo la retta MM', sarà $OO' \parallel MM'$ ed $O'M \parallel OM$, e perciò $OO'M'M$ un parallelogrammo,

quindi $O'M' = OM$. Risulta quindi che la distanza da O' d'ogni punto della linea d'intersezione è eguale al raggio della direttrice; dunque la sezione è un cerchio eguale a quello della direttrice.

§ 258. Se si taglia una superficie cilindrica con due piani paralleli a quello della direttrice, il corpo in tal guisa limitato chiamasi *cilindro*. Le superficie delle due sezioni sono le *basi*, la superficie cilindrica che le limita, il *mantello* del cilindro. Il segmento che unisce i centri dei due cerchi è l'*asse*, ogni linea d'intersezione del mantello con un piano che passa per l'asse è un *lato* del cilindro, la distanza delle sue basi, l'*altezza* del cilindro.

Tutti i lati d'un cilindro sono paralleli ed eguali fra loro.

Se l'asse è normale alle basi, il cilindro è *retto*, altrimenti *obliquo*. Un cilindro retto si può immaginare generato dalla rotazione d'un rettangolo attorno un suo lato, quale asse. In un cilindro retto l'asse e nello stesso tempo l'altezza.

Un cilindro retto il cui lato è eguale al diametro della base, dicesi *equilatero*. Se per un punto della periferia della base si guidano una tangente alla base ed un lato del cilindro, il piano che passa per queste due rette non ha di comune col mantello del cilindro che quel lato; un tal piano chiamasi *piano tangenziale* del cilindro.

§ 259. Teoremi. 1. *Ogni sezione fatta parallelamente alla base d'un cilindro è un cerchio eguale a quello della base.*

Segue dal § 257.

2. *Ogni sezione fatta per l'asse d'un cilindro è un parallelogrammo.*

Infatti, i lati del quadrilatero che risulta dall'intersecare il mantello con un piano secante sono lati del cilindro.

In un cilindro retto le sezioni fatte per l'asse sono rettangoli eguali fra loro e normali alla base. In un cilindro obliquo tali sezioni sono parallelogrammi disuguali fra loro; uno solo di questi, e precisamente quello che passa per la proiezione dell'asse sulla base, insiste perpendicolarmente sulla base.

3. La sfera.

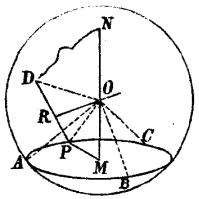
§ 260. La superficie descritta da una semicirconferenza che gira intorno al suo diametro sino a pervenire nella primiera sua posizione, chiamasi *superficie sferica*, il corpo da questa limitato *sfera*.

Ogni punto della superficie sferica è equidistante dal centro del cerchio generatore; tale centro è perciò il *centro* della sfera. Un segmento condotto dal centro alla superficie sferica chiamasi *raggio*, un segmento che passa per il centro ed unisce due punti della superficie sferica, dicesi *diametro* della sfera. Nella stessa sfera tanto i raggi quanto i diametri sono eguali fra loro. Le estremità d'un diametro diconsi *punti opposti* della sfera.

Corollario. Il luogo geometrico di tutti i punti dello spazio che da un punto dato hanno la distanza r, è la superficie sferica descritta attorno quel punto col raggio r.

§ 261. Teorema. *Quattro punti* A, B, C *e* D (fig. 142), *non situati in un piano, determinano pienamente una sfera.*

Fig. 142.



Il luogo geometrico di un punto equidistante dai punti A, B, C è la normale MN innalzata nel centro M del cerchio che passa per quei tre punti (§ 211, b), ed ogni punto di questa normale è equidistante da tutti i punti della periferia di quel cerchio. Facendo passare quindi per la MN e per il quarto punto D, non situato nel cerchio, un piano che tagli la periferia del cerchio stesso in P, ed innalzando in questo piano nel punto di mezzo R della retta di congiunzione DP una normale che tagli la MN in O, O sarà non solo equidistante da D e P (§ 46, 1), ma anche da D e dai tre punti A, B e C che con P trovansi sulla stessa circonferenza; dunque il punto O sarà il centro della superficie sferica che passa per A, B, C e D.

Siccome *un* solo punto O corrisponde alle suddette condizioni, così una sola del pari sarà la superficie sferica che passa per i quattro punti A, B, C e D.

La retta in relazione colla sfera.

§ 262. A seconda che la *distanza* d'una retta *dal centro* d'una sfera è minore, eguale o maggiore del suo raggio, la retta *taglia la sfera* in due punti, *la tocca* in un punto od è situata del tutto *all'infuori* della sfera.

1. Ogni retta tangenziale ad una sfera è normale al raggio che passa per il punto di contatto (§ 80).

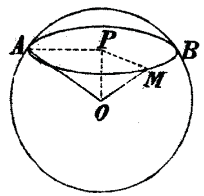
2. Tutti i segmenti tangenziali condotti ad una sfera da un punto sito all'infuori della stessa, sono eguali fra di loro (§ 81).

Il piano in relazione colla sfera.

§ 263. La *distanza* d'un piano *dal centro* d'una sfera, è o minore, od eguale o maggiore del suo raggio. Nel primo caso il piano *taglia* la sfera ed ha quindi con questa più punti comuni, nel secondo caso il piano *tocca* la sfera in un sol punto, nel terzo caso il piano è situato del tutto *all'infuori* della sfera.

Teorema. *Ogni sezione fatta da un piano in una sfera è un cerchio.*

Fig. 143.



Dimostrazione: Sia AMB (fig. 143) una sezione della sfera fatta da un piano. Si abbassi dal centro O della sfera la OP perpendicolare al piano della sezione, e si guidino dal punto P alla circonferenza della sezione dei segmenti qualsiansi PA e PM, ed i raggi OA ed OM. Risulterà $\triangle$ rettangolo $OPA \cong OPM$, e perciò $PA = PM$. Essendo quindi tutti i punti della circonferenza della sezione equidistanti da P, la sezione è un cerchio.

Il cerchio AMB dicesi *cerchio d'intersezione della sfera.*

§ 264. Teoremi relativi ai *cerchi d'intersezione della sfera.*

1. Il segmento che unisce il centro d'una sfera col centro d'un cerchio d'intersezione è normale al piano di quest'ultimo.

2. La normale abbassata dal centro d'una sfera sopra un cerchio d'intersezione passa per il centro di questo.

3. La normale innalzata nel centro d'un cerchio d'intersezione d'una sfera passa per il centro di questa.

4. A cerchi d'intersezione eguali corrispondono eguali distanze dal centro della sfera, e viceversa.

5. Al cerchio d'intersezione maggiore corrisponde la minor distanza del centro della sfera, e viceversa.

Le *dimostrazioni* di queste proposizioni sono simili a quelle fatte nei §§ 75 e 77 per i teoremi analoghi risguardanti le corde d'un cerchio.

Scolî. a) Fra tutti i cerchi d'intersezione della sfera, il massimo è quello passante per il centro della sfera; esso si chiama perciò *cerchio massimo* della sfera, ed ha un raggio eguale a quello della sfera.

b) Due cerchi massimi si tagliano lungo un loro diametro e si dimezzano vicendevolmente.

c) Da due punti d'una superficie sferica che non sieno fra loro opposti, è determinata pienamente la posizione d'un cerchio massimo. L'arco di cerchio massimo compreso fra due punti dà la *distanza sferica* di quei punti.

d) Le estremità del diametro della sfera normale al piano d'un suo cerchio d'intersezione (§ 264, 3) hanno eguale distanza sferica da ogni punto della circonferenza di quel cerchio. Le estremità del diametro chiamansi perciò *centri sferici* di quel cerchio d'intersezione.

I punti delle circonferenze di cerchi d'intersezione eguali hanno distanze sferiche eguali dai rispettivi loro centri sferici.

§ 265. Teoremi ***sui piani tangenziali della sfera.***

1. Un piano che nell' estremità d' un raggio della sfera è normale al raggio stesso, è tangenziale alla sfera (§ 80, 1).

2. Il raggio della sfera passante per il punto di contatto è normale al piano tangenziale (§ 80, 2).

3. La normale guidata dal centro della sfera al piano tangenziale passa per il punto di contatto (§ 80, 3).

4. La normale ad un piano tangenziale d'una sfera, eretta nel punto di contatto, passa per il centro della sfera (§ 80, 4).

§ 266. Le due parti in cui una sfera resta divisa dal piano d' un cerchio d' intersezione, chiamansi *segmenti sferici*, e le rispettive parti della superficie sferica, *calotte sferiche.* Il cerchio d' intersezione forma la base tanto dei due segmenti sferici, quanto delle calotte sferiche. La parte del diametro della sfera normale alla base d' una calotta compresa fra la calotta stessa e la sua base, chiamasi l' *altezza* del segmento sferico e della calotta sferica.

La parte del solido sferico compreso fra i piani di due cerchi d' intersezione paralleli, dicesi *strato sferico*, la relativa porzione di superficie sferica, *zona sferica.* La distanza dei due cerchi paralleli dà l' *altezza* tanto dello strato sferico, quanto della zona sferica.

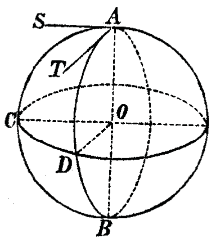
Se un settore di un cerchio massimo della sfera ruota attorno un suo raggio, il solido in tal guisa generato chiamasi *settore sferico.* Lo stesso consta di un segmento sferico e d' un cono che ha per vertice, il centro della sfera e per base, la base del segmento sferico.

§ 267. Una sfera dicesi *iscritta* ad un poliedro, se tutte le facce dello stesso sono piani tangenziali di quella sfera. Una sfera è *circoscritta* ad un poliedro, se tutti i vertici di questo trovansi sulla superficie della sfera.

Ad ogni poliedro regolare si può iscrivere e circoscrivere una sfera. (Segue dal § 252).

Angoli, fusi e triangoli sferici.

Fig. 144.



§ 268. L' angolo d' inclinazione dei piani di due cerchi massimi d' una sfera chiamasi *angolo sferico* di quei due cerchi. La misura d' un angolo sferico CAD (fig. 144) è data dall' arco di cerchio CD compreso fra i due cerchi massimi della sfera, e le cui estremità distano di 90° da ciascuno dei punti d' intersezione dei due cerchi. Infatti, essendo $CO \perp AO$ e $DO \perp AO$, COD sarà l' angolo d' inclinazione dei piani dei due

*

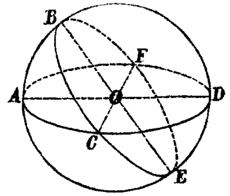
cerchi massimi della sfera ACB e ADB, e l' arco CD la misura di tale angolo. L' angolo sferico CAD è eguale all' angolo SAT formato dalle tangenti condotte ai due circoli della sfera in un punto della loro intersezione.

§ 269. Per *fuso sferico* s' intende la parte $ACBDA$ (fig. 144) della superficie sferica compresa fra le semicirconferenze di due cerchi massimi della sfera.

Nella stessa sfera ad angoli sferici eguali corrispondono fusi sferici eguali, e viceversa.

La dimostrazione si fa a mezzo della sovrapposizione.

Fig. 145.



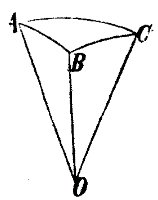
§ 270. La porzione ABC (fig. 145) della superficie sferica compresa fra tre archi di cerchi massimi, chiamasi *triangolo sferico.*

Gli archi AB, AC e BC sono i *lati*, e gli angoli sferici ACB, ABC e BAC gli *angoli* del triangolo sferico. I lati d' un triangolo sferico sono dati sempre in misura d' arco.

I lati d' un *triangolo sferico* sono nello stesso tempo i lati d' un secondo triangolo sferico che col primo forma l' intera superficie sferica. Però, se espressamente non si noti il contrario, per triangolo sferico si deve intendere quello dei due triangoli che è minore della metà della superficie sferica. Ad ogni triangolo sferico, che, minore della metà della superficie sferica, ha un lato maggiore di 180°, corrisponde un secondo triangolo che ha comuni col primo due lati, ed il cui terzo lato è minore di 180°, completando esso il terzo lato dell' altro triangolo a 360°. I due triangoli assieme danno la metà della superficie sferica, e ciascuno di essi viene detto il *triangolo sferico adiacente* dell' altro. Siccome dai lati e dagli angoli d' un triangolo sferico si possono determinare eziandio i lati e gli angoli del suo triangolo adiacente, così in seguito ci occuperemo soltanto di quei triangoli sferici i cui lati sono minori di 180°.

§ 271. Sia ABC (fig. 146) un triangolo sferico in cui ogni lato sia minore di 180°, ed O il centro della sfera. Si guidino i raggi AO, BO e CO e per ogni due di questi raggi si faccia passare un piano. Il triedro $OABC$ che ne risulta ha per misura delle sue facce, i lati AB, AC e BC, e per misura dei suoi angoli diedri, gli angoli del triangolo sferico ABC. Si vede quindi che fra i lati e gli angoli d' un triangolo sferico sussistono le stesse relazioni che sussistono fra le facce e gli angoli diedri d' un triedro.

Fig. 146.



In relazione ai §§ 232, 233 e 234 varranno del pari per i triangoli sferici le seguenti proposizioni:

1. *La somma di due lati è maggiore del terzo.*
2. *La somma dei tre lati è minore di* 360°.
3. *La somma dei tre angoli è maggiore di* 180°, *ma minore di* 540°.
4. *Ad angoli eguali si oppongono lati eguali.*
5. *All'angolo maggiore si oppone anche il lato maggiore.*
6. *A lati eguali si oppongono angoli eguali.*
7. *Al lato maggiore si oppone anche l'angolo maggiore.*

Un triangolo sferico dicesi *equilatero*, *isoscele* o *scaleno*, a seconda che ha tre lati eguali, due lati eguali o non ha verun lato eguale.

Un triangolo sferico può avere (vedi 3) due od anche tre angoli retti. Un triangolo sferico che non ha verun angolo retto è *obliquangolo*, mentre *rettangolo* è quello che ha un angolo retto.

§ 272. Due triangoli sferici i cui lati ed angoli sono rispettivamente eguali, diconsi *eguali* o *simmetrici*, a seconda che tali elementi si succedono nello stesso ordine od in ordine inverso (§ 231).

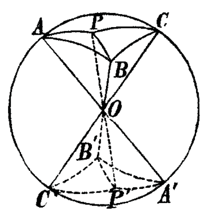
Ai sei teoremi del § 235 riflettenti l'eguaglianza e la simmetria dei triedri, corrispondono altri teoremi analoghi riguardanti l'eguaglianza e la simmetria dei triangoli sferici.

§ 273. Un triangolo sferico i cui vertici sono punti opposti dei vertici d'un altro, dicesi *triangolo opposto* al secondo. Tale sarebbe il triangolo $A'B'C'$ (fig. 147) rispetto all'altro ABC.

Due triangoli sferici opposti, come due angoli poliedri opposti (§ 231), sono in genere simmetrici, ed eguali soltanto se isosceli.

Teorema. *Due triangoli sferici opposti sono equivalenti.*

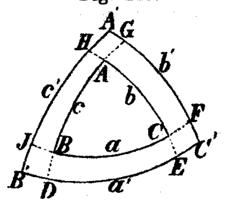
Fig. 147.



Dimostrazione: I cerchi d'intersezione (fig. 147) fatti passare per i tre vertici di ognuno dei due triangoli opposti ABC ed $A'B'C'$ sono eguali fra loro, perchè descritti attorno due triangoli piani eguali i cui lati sono corde dei due triangoli sferici. Per cui se P e P' dinotano i centri sferici corrispondenti dei due cerchi d'intersezione eguali, anche le distanze sferiche PA, PB, PC e $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ devono essere eguali fra loro (§ 264, *d*). I triangoli PAB, PAC e PBC, e del pari i triangoli $P'A'B'$, $P'A'C'$ e $P'B'C'$ sono quindi isosceli, perciò i primi eguali ai secondi, e per conseguenza la somma degli uni eguale alla somma degli altri, ovvero il triangolo ABC equivalente ad $A'B'C'$.

§ 274. Se dai vertici d'un triangolo sferico, quali poli, si descrivono degli archi di cerchi massimi, il triangolo sferico che ne risulta, dicesi il *polare* del primo.

Fig. 148.



Sia ABC (fig. 148) un triangolo sferico; si faccia $AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90^\circ$, e per i punti D ed E, F e G, H ed J si descrivano gli archi di cerchi massimi $B'C'$ $A'C'$ ed $A'B'$. Il triangolo sferico $A'B'C'$ sarà il triangolo sferico *polare* del triangolo sferico ABC, e questo viceversa il triangolo sferico polare di $A'B'C'$.

Teoremi. 1. *Due triangoli sferici, l'uno, polare all'altro, appartengono a due triedri che sono del pari, l'uno, polare all'altro.*

I raggi condotti dal centro della sfera ai vertici dei due triangoli sferici formano gli spigoli dei due triedri corrispondenti a quei triangoli sferici. Siccome i lati d'uno dei triangoli distano di 90° dai vertici dell'altro, così ogni raggio dell'uno deve essere normale, tanto ai due raggi dell'altro, quanto al piano passante per questi due raggi; quindi ogni spigolo d'uno dei triedri deve essere normale ad una faccia dell'altro, od in altre parole i due triedri devono essere l'uno, polare all'altro (§ 229).

2. *In due triangoli sferici polari, i lati dell'uno sono supplementi degli angoli dell'altro.*

Siano A, B, C gli angoli, ed a, b, c i lati opposti del triangolo sferico ABC; similmente siano A', B', C' gli angoli, ed a', b', c' i lati del triangolo polare $A'B'C'$. Sarà allora

$$a + A' = 2R, \quad b + B' = 2R, \quad c + C' = 2R; \text{ ed}$$
$$a' + A = 2R, \quad b' + B = 2R, \quad c' + C = 2R.$$

Segue dal § 229, 2, ma può essere dedotto del pari direttamente dalla fig. 148.

Posizione reciproca di due sfere.

§ 275. Due sfere che hanno lo stesso centro, diconsi *concentriche*. Due sfere che hanno differenti centri, diconsi *eccentriche*, e *linea dei centri* delle due sfere dicesi il segmento che unisce i loro centri.

1. Due sfere sono *tangenti esteriormente* od *internamente*, a seconda che le loro superficie hanno un punto comune sulla stessa linea dei centri o sul suo prolungamento.

2. Due sfere sono *secanti*, se le loro superficie hanno più punti comuni fra loro.

Teorema. *L'intersezione di due superficie sferiche è un cerchio.*

Infatti, se da due punti qualsiano dell'intersezione delle superficie sferiche si guidano delle normali alla linea dei centri, i piedi di queste normali fra di loro eguali, cadono in uno stesso punto.

Corollarî. *a*) La linea dei centri di due sfere tangenziali passa per il punto di contatto.

b) Se per il punto di contatto di due sfere si guida un piano tangenziale ad una di esse, tale piano riesce tangenziale del pari all'altra.

c) La linea dei centri di due sfere secanti è normale al piano del loro comune cerchio d'intersezione e passa per il centro di questo.

§ 276. La reciproca *posizione di due sfere* dipende dalla grandezza della loro linea dei centri c e dal valore dei loro raggi R ed r.

1. Se $c > R + r$, l'una delle sfere trovasi del tutto al di fuori dell'altra.

2. Se $c = R + r$, le due sfere sono tangenti esteriormente.

3. Se $R + r > c > R - r$, le due sfere sono secanti.

4. Se $c = R - r$, le due sfere sono tangenti internamente.

5. Se $c < R - r$, l'una delle sfere trovasi del tutto entro all'altra.

III. Problemi.

§ 277. *Problemi di costruzione.*

1. Descrivere attorno un punto dato una sfera di raggio dato.

2. Per un punto dato far passare un piano tangenziale *a*) ad un cono, *b*) ad un cilindro, *c*) ad una sfera.

3. Far passare per una retta un piano tangenziale ad una sfera.

§ 278. *Problemi di calcolo.*

1. Siano R il raggio d'una sfera, r il raggio d'un cerchio d'intersezione e d la distanza di questo cerchio dal centro della sfera; date due di queste grandezze, determinare l'altra.

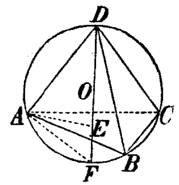
2. Una sfera viene tagliata da un piano che divide il diametro $2R$ ad esso normale nel rapporto $m:n$; quale sarà il raggio r della sezione?

3. Dato lo spigolo a d'un poliedro regolare, determinare i raggi r ed R della sfera iscrittavi e della sfera circoscrittavi.

Come si scorge direttamente dalla fig. 139, per ogni poliedro regolare sussiste l'equazione $r^2 = R^2 - \rho^2$, se con ρ si indica il raggio della circonferenza circoscritta ad una faccia del poliedro.

a) Supponiamo che al *tetraedro* $ABCD$ (fig. 149) sia stata circoscritta una sfera, e che DE sia normale ad ABC, quindi E il centro della circonferenza circoscritta ad ABC. Si prolunghi DE sino ad incontrare la superficie sferica in F, per cui FD sarà un diametro della sfera, ed il punto suo di mezzo O il centro della sfera e del tetraedro. Dal triangolo rettangolo DAF si ha $DF : AD = AD : DE$, ovvero $2R : a = a : \sqrt{a^2 - \rho^2}$, da cui si ricava $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$, essendo $\rho^2 = \frac{a^2}{3}$ (§ 172, 1).

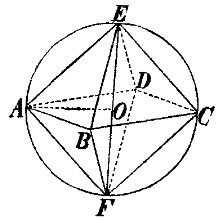
Fig. 149.



Da $r^2 = R^2 - \rho^2 = \frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}$, segue $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

b) La diagonale EF dell'*ottaedro* (fig. 150) è un diametro della sfera circoscrittavi normale ad $ABCD$, il cui piede O è tanto il centro della sfera circoscrittavi quanto il centro della circonferenza circoscritta al quadrato $ABCD$. Sarà quindi (secondo il § 173) $AO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Fig. 150.

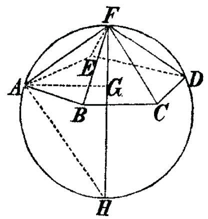


Da $r^2 = R^2 - \rho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$, segue

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

c) Circoscritta una sfera all'*icosaedro* (fig. 151), si conduca FG normale al pentagono regolare $ABCDE$; G sarà il centro della circonferenza circoscritta a questo pentagono ed FH un diametro della sfera. Dal triangolo rettangolo FAH si ha $FH : AF = AF : FG$, ovvero, essendo

Fig. 151.



$$AG = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} \text{ (§ 175, coroll.)},$$

$$2R : a = a : \sqrt{\left\{a^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})\right\}}, \text{ da cui}$$

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Da $r^2 = R^2 - \rho^2 = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3}$, segue

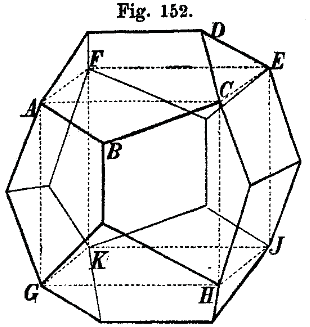
$$r = \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}.$$

d) Per l'*esaedro* o *cubo* si ha:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \text{ ed } r = \frac{a}{2}.$$

e) Come si scorge dalla fig. 152, il *dodecaedro* si può scomporre nel cubo $GHJKACEF$, ed in sei prismi triangolari tronchi che poggiano sulle facce di questo cubo. Il raggio della sfera circoscritta al cubo è nello stesso tempo il raggio della sfera circoscritta al dodecaedro.

Fig. 152.



Siccome lo spigolo del cubo, quale diagonale d'un pentagono regolare, è eguale ad $\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$ (§ 175, coroll.), così ne discende che il raggio della sfera circoscritta al cubo è eguale (vedi *d*) ad $\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{3}=\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$. Ma tale deve essere eziandio il valore del raggio R della sfera circoscritta al dodecaedro, laonde $R=\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$.

Da $r^2=R^2-\rho^2=\frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5})-\frac{a^2}{10}(5+\sqrt{5})$ (§ 175, coroll.), segue $r=\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$.

4. Calcolare lo spigolo d'un poligono regolare conoscendo *a*) il raggio della sfera iscrittavi, *b*) il raggio della sfera circoscrittavi. (Inversione del probl. 3).

IV. Teoremi e problemi per esercizio.

§ 279. *Teoremi per esercizio.*

1. I punti di mezzo di due coppie di spigoli opposti d'un tetraedro regolare sono i vertici d'un parallelogrammo, il cui piano è parallelo alla terza coppia di spigoli.

2. I segmenti che uniscono i punti di mezzo delle tre coppie degli spigoli opposti d'un tetraedro regolare, si tagliano vicendevolmente nello stesso punto (vedi probl. 1).

3. I punti di mezzo degli spigoli d'un tetraedro regolare sono i vertici d'un ottaedro regolare.

4. Due piani non paralleli fra loro, tangenziali ad un cilindro retto, si tagliano lungo una retta parallela all'asse.

5. Se si fanno passare per una retta due piani tangenziali ad una sfera ed un terzo piano per il centro di questa sfera, l'angolo d'inclinazione dei due piani tangenziali viene dal terzo piano dimezzato.

§ 280. *Problemi di costruzione.*

1. Costruire un tetraedro regolare di cui sia dato lo spigolo.

2. Costruire un dado di cui sia noto lo spigolo.

3. La rappresentazione di tutte le facce d'un corpo in un unico piano, chiamasi lo *sviluppo del corpo.* Si costruisca lo sviluppo

a) d'un prisma,
b) d'una piramide,
c) d'un tronco di piramide,
d) d'un tetraedro regolare,

e) d'un dado,
f) d'un ottaedro regolare,
g) d'un dodecaedro regolare,
h) d'un icosaedro regolare,
i) d'un cilindro retto,
k) d'un cono retto,
l) d'un tronco di cono retto.

4. Attorno un punto dato, quale centro, descrivere una sfera che tocchi *a*) un piano, *b*) una sfera.

5. Decrivere una sfera di dato raggio che tocchi *a*) un piano, *b*) una sfera in un punto dato della stessa.

CAPITOLO TERZO.

Eguaglianza, simmetria e simiglianza dei corpi.

I. Eguaglianza e simmetria dei corpi.

§ 281. Due corpi diconsi *eguali*, se possono essere posti in posizione tale che le superficie dell'uno coprano le superficie dell'altro.

Due corpi che possono essere collocati alle parti opposte d'un piano in guisa che ogni segmento il quale unisce due punti corrispondenti degli stessi sia normale a quel piano e da questo venga dimezzato, diconsi *simmetrici* (§§ 69 e 217). Il piano stesso dicesi *piano di simmetria.*

Tanto nei corpi eguali, che in quelli simmetrici, ogni due segmenti (spigoli, altezze, diagonali, raggi, assi) ed ogni due angoli diedri corrispondenti sono eguali, ed ogni due facce corrispondenti congruenti; gli angoli poliedri poi sono a due a due eguali o simmetrici, a seconda che i corpi sono eguali o simmetrici. Due corpi simmetrici quindi non possono, generalmente parlando, essere portati a coprirsi.

Per costruire un poliedro che sia simmetrico ad un altro dato, basterà determinare per un angolo poliedro del corpo dato il relativo angolo poliedro opposto, e, partendo da questo, costruire un secondo corpo che col dato abbia nel medesimo ordine disposti gli spigoli e gli angoli diedri eguali e le facce congruenti. Tanto gli angoli poliedri dei due corpi, quanto i corpi stessi saranno allora simmetrici.

Corollari. *a*) Due corpi simmetrici ad un terzo sono eguali fra loro.

b) Se di due corpi eguali l'uno è simmetrico ad un terzo, tale dovrà essere anche l'altro.

§ 282. Teorema. *Se in due piramidi gli angoli poliedri al vertice sono eguali o simmetrici e tre spigoli laterali corrispondenti sono a due a due eguali, eguali o rispettivamente simmetriche saranno del pari le piramidi stesse.*

Dimostrazione: *a*) Se nel primo caso si portano a coprirsi i due angoli poliedri eguali, anche i piani delle basi, e quindi del pari le basi stesse, dovranno coincidere, eguali essendo i tre spigoli laterali corrispondenti.

b) Nel secondo caso, costruito ad uno degli angoli poliedri simmetrici, per esempio a quello della prima piramide, il relativo angolo poliedro opposto, si determinerà su questo una piramide simmetrica alla prima, che sarà (vedi *a*) eguale alla seconda, mentre questa sarà simmetrica alla prima.

§ 283. Teorema. *Se in due prismi due angoli poliedri sono eguali o simmetrici ed una coppia di basi ed una coppia di spigoli laterali sono eguali, eguali o rispettivamente simmetrici saranno del pari i prismi stessi.*

Dimostrazione: *a*) Se nel primo caso si portano a coprirsi i due angoli poliedri eguali, anche le due basi eguali, e come di leggieri si vede anche tutte le facce laterali, e per conseguenza anche le altre due basi devono coincidere fra loro.

b) Se i due angoli solidi sono simmetrici, la relativa dimostrazione è analoga a quella esposta al § 282, *b*.

Corollario. Due parallelepipedi sono eguali, se hanno due angoli poliedri rispettivamente eguali aventi spigoli eguali.

§ 284. 1. Due *coni* o due *cilindri* sono eguali, se hanno le basi, gli assi e gli angoli d'inclinazione degli assi colle basi rispettivamente eguali.

2. Due *sfere* sono eguali, se i loro raggi sono eguali.

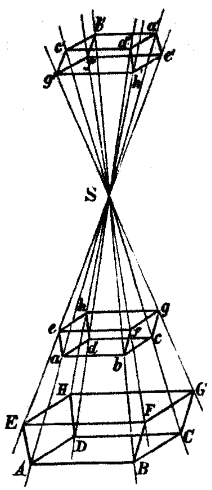
La dimostrazione di queste due proposizioni si fa a mezzo della sovrapposizione.

Nel cono, nel cilindro e nella sfera la simmetria coincide colla eguaglianza.

II. Simiglianza dei corpi.

§ 285. Teoremi. 1. *Se i raggi d'un fascio dello spazio* (fig. 153), *a partire dal vertice* S, *vengono divisi proporzionalmente dai punti* A *ed* a, B *e* b, C *e* c..., *le sezioni passanti per ogni tre punti d'intersezione corrispondenti dei corpi* ABCDE... *ed* abcde... *sono simili fra loro, ed eguali a due a due sono gli angoli diedri formati da quelle sezioni.*

Fig. 153.



Dimostrazione: Sia $SA:Sa = SB:Sb = SC:Sc = \ldots$

Da questa premessa segue immediatamente $AB \parallel ab$, $AC \parallel ac$, $BC \parallel bc \ldots$, ed $ABC \parallel abc$, $ACD \parallel acd \ldots$, (§§ 124 e 227, 2), quindi (vedi § 227, 3) $ABC \backsim abc$, $ACD \backsim acd \ldots$

Se quattro punti A, B, C, D sono situati in un piano, anche i quattro punti corrispondenti a, b, c, d saranno situati in un sol piano; infatti, essendo $abc \parallel ABCD$ ed $acd \parallel ABCD$, anche abc ed acd debbono trovarsi nello stesso piano, per cui $ABCD \backsim abcd$, $ABFE \backsim abfe \ldots$ (§ 134, 3).

Che anche gli angoli diedri corrispondenti siano eguali, risulta dal § 225.

Le stesse relazioni sussistono del pari se di ogni due punti corrispondenti, come nei corpi $ABCDE\ldots$ ed $a'b'c'd'e'\ldots$, l'uno è situato sopra un raggio del fascio, l'altro sul complemento dello stesso; in tal caso però i relativi segmenti fra ogni due punti d'intersezione sono fra loro paralleli in senso inverso.

Scolî. *a*) Se A, B, C, D sono punti d'una circonferenza, tali lo sono del pari i punti a, b, c, d. La dimostrazione procede come nello scolio del § 124, 1.

b) Se i punti A, B, C, D, $E\ldots$ si trovano sopra una superficie sferica, anche i punti a, b, c, d, $e\ldots$ si troveranno sopra una tale superficie. La dimostrazione è analoga a quella dello scolio del § 124, 1.

2. Teorema inverso. *Due corpi in cui le corrispondenti sezioni sono nello stesso ordine a due a due simili ed i relativi angoli diedri a due a due eguali, si possono collocare sopra un fascio di raggi in modo che i corrispondenti punti, cadendo sugli stessi raggi o loro complementi, abbiano dal vertice distanze proporzionali* (fig. 153).

Dimostrazione: I relativi segmenti si susseguono nei due corpi o nello stesso senso od in senso inverso.

Se nel primo caso si collocano i due corpi in modo che abbiano a due a due paralleli nel medesimo senso tanto un segmento, quanto due facce che lungo quel segmento s'intersecano, anche ogni due altri segmenti ed ogni due altre facce corrispondenti dovranno essere paralleli nel medesimo senso, stante la simiglianza delle facce e l'eguaglianza degli angoli diedri dalle stesse formati.

Ma se due corpi hanno fra loro una tale posizione parallela, le rette passanti per ogni due punti corrispondenti degli stessi devono tagliarsi nello stesso punto S. La dimostrazione procede come al § 124, 2.

SA, SB, SC... sono perciò raggi d'un fascio, quindi (§ 227 1):

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$$

Nel secondo caso i corpi vengono collocati in modo che i segmenti corrispondenti e le sezioni corrispondenti siano a due a due paralleli in senso inverso L'ulteriore andamento della dimostrazione rimane lo stesso.

§ 286. Due corpi che possono essere collocati in un fascio di raggi in modo che i loro punti corrispondenti, cadendo sugli stessi raggi o loro prolungamenti, abbiano dal vertice distanze proporzionali, diconsi *simili* od anche *omotetici*, quando si abbia riguardo alla loro posizione *prospettica*.

Ogni due punti (segmenti, facce, angoli diedri ed angoli poliedri) corrispondenti diconsi *punti* (*segmenti*, *facce*, *angoli diedri* ed *angoli poliedri*) *omologhi*.

Nei corpi omotetici i segmenti omologhi sono a due a due paralleli nello stesso senso od in senso inverso.

Il punto nel quale si tagliano le rette passanti per ogni due punti corrispondenti di due corpi omotetici, chiamasi *centro di similitudine* dei due corpi, e precisamente centro di similitudine *esterno* od *interno*, a seconda che le coppie dei punti omologhi sono situate dalla stessa parte, od alla parte opposta di tale centro.

Se il rapporto costante delle distanze del centro di similitudine da due punti omologhi è eguale all'unità, i due corpi sono *eguali*, se il loro centro di similitudine è esterno, sono *simmetrici* se tale centro è interno. L'eguaglianza e la simmetria non sono quindi che casi speciali della simiglianza.

Corollarî. *a*) Due corpi simili hanno i segmenti omologhi proporzionali, le facce omologhe simili, e gli angoli diedri omologhi eguali, mentre i loro angoli solidi omologhi sono od a due a due eguali, od a due a due simmetrici.

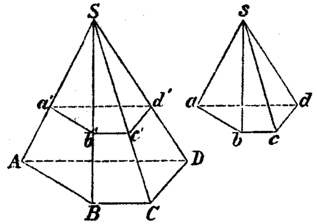
b) Se di due corpi eguali o simmetrici l'uno è simile ad un terzo, tale lo è pure l'altro.

§ 287. Teoremi. 1. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, la piramide recisa è simile alla piramide intera.*

Segue immediatamente dal § 286.

2. *Due piramidi sono simili se hanno gli angoli solidi al vertice eguali o simmetrici, e tre spigoli laterali omologhi a due a due proporzionali* (fig. 154).

Fig. 154.

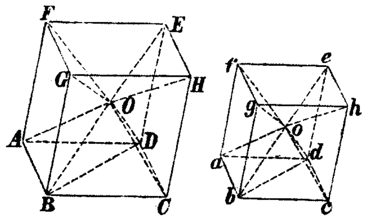


Dimostrazione: a) Se nel primo caso si prende sullo spigolo SA la parte $Sa' = sa$, e per il punto a' si fa passare un piano $a'b'c'd' \parallel ABCD$, le due piramidi SAC ed $Sa'c'$ saranno simili (vedi 1). Ma la piramide $Sa'c'$ è eguale ad sac (§ 282), laonde piramide SAC simile ad sac.

b) Se gli angoli poliedri al vertice sono simmetrici, si costruirà nell'angolo poliedro opposto di S una piramide che sia simmetrica ad SAC. La stessa (vedi *a*) dovrà essere simile ad sac, dunque piramide SAC simile ad sac.

§ 288. Teorema. *Due poliedri simili si possono scomporre nello stesso numero di piramidi simili.*

Fig. 155.



Dimostrazione: Siano (fig. 155) ABE ed abe due poliedri omotetici Si immaginino guidate per una coppia di punti omologhi le rette Aa e Bb, e per il punto di loro intersezione S, che sarà il centro di similitudine dei due poliedri, si supponga condotto un raggio SO ad un punto O situato all'interno del poliedro ABE. Sussistendo allora la proporzione $SO : So = SA : Sa$, il punto o sarà il punto omologo all'interno del poliedro abe.

Facendo passare ora per i due punti O ed o e per gli spigoli dei due poliedri dei piani, questi scompongono i poliedri in tante piramidi quante sono le loro facce. Che poi tali piramidi siano a due a due simili, emerge direttamente dal § 285.

§ 289. 1. Due *coni* o due *cilindri* sono simili, se i loro assi sono proporzionali ai diametri della base e con queste formano angoli eguali d'inclinazione.

2. Due *sfere* sono simili e nello stesso tempo fra loro omotetiche.

Due sfere hanno *due centri di similitudine*, l'uno *esterno*, l'altro *interno*, come pure *raggi di similitudine esterni* ed *interni* (§ 142).

Teoremi. 1. Le rette condotte per l'estremità di due raggi di due sfere, paralleli nello stesso senso od in senso inverso, si tagliano tutte nel centro esterno, rispettivamente nel centro interno di similitudine delle due sfere (§ 285, 2).

2. Quando un raggio di similitudine è secante o tangente ad una delle due sfere, secante o tangente è pure all'altra.

3. Se un piano passante per un centro di similitudine è secante o tangente ad una delle due sfere, secante o tangente è pure all'altra.

CAPITOLO QUARTO.

Misurazione dei corpi.

§ 290. La misurazione dei corpi ha per iscopo la determinazione della loro *superficie* e del loro *volume*.

La *superficie totale* d'un corpo si ottiene sommando le aree delle facce che lo limitano.

Per determinare il *volume* d'un corpo, vale a dire la quantità di spazio racchiusa dalle facce che lo limitano, si esamina quante volte un corpo, preso quale *unità*, sia contenuto in quello dato. Quale *unità di volume* si prende il cubo che ha per lato l'unità lineare. Se questa si riferisce alla misura metrica, si ha il *metro cubo* (m^3), il *decimetro cubo* (dm^3), il *centimetro cubo* (cm^3)... Un $m^3 = 1000\, dm^3$ da 1000 cm^3, da 1000 mm^3. Il *litro* ha la capacità di un dm^3; 100 litri fanno un *ettolitro*.

Due corpi aventi volumi eguali diconsi *equivalenti*.

I. Misurazione di corpi a superficie piane.

1. Il prisma.

Superficie d'un prisma.

§ 291. La *superficie totale* s_t *d'un prisma* si ottiene se alla *superficie laterale* s_l dello stesso, ottenuta dalla somma delle aree delle facce laterali considerate come parallelogrammi, si aggiunge la doppia superficie $2\, s_b$ della base; sarà quindi $s_t = s_l + 2\, s_b$.

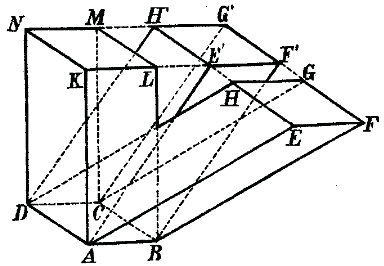
La superficie laterale d'un prisma retto è eguale ad un rettangolo che ha per lati il perimetro della base e l'altezza del prisma.

Equivalenza dei prismi.

§ 292. Teorema. *Ogni parallelepipedo è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che ha con esso lui eguale base ed eguale altezza.*

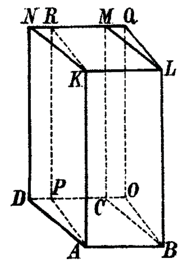
Dimostrazione: 1. Sulla base di qualsiasi parallelepipedo obliquangolo è sempre possibile di erigere un altro parallelepipedo retto ad esso equivalente e di eguale altezza. Se nel parallelepipedo AG (fig. 156) le facce opposte AF e DG sono oblique alla base AC, si erigano negli spigoli AB e CD dei piani normali a quella base e si estendano le altre due facce laterali DE e CF e la base superiore EG di tanto quanto è necessario acciocchè con quei piani racchiudano il parallelepipedo AG' nel quale due facce laterali sono normali alla base. I due parallelepipedi sono equivalenti, poichè eguali sono i due prismi triangolari $AEE'BFF'$ e $DHH'CGG'$ (§ 283); levando quindi dal corpo prismatico $ADH'EBCG'F$ prima l'uno e poi l'altro dei due prismi triangolari, i due residui, vale a dire i parallelepipedi AG e AG' dovranno essere eguali. — Se nel parallelepipedo dato AG, e quindi anche nell'altro suo equivalente AG', le facce laterali DE e CF, rispettivamente DE' e CF' sono del pari oblique alla base AC, esse potranno essere sostituite, senza alterare il volume del corpo, dalle facce laterali DK e CL normali alla base, ottenendo in tal modo il parallelepipedo retto equivalente AM.

Fig. 156.



2. Di più ogni parallelepipedo retto AM (fig. 157) la cui base AC non è rettangolare, si può trasformare in un altro AQ rettangolare che con quello abbia base equivalente ed egual altezza. A tale scopo si fanno passare per gli spigoli AK e BL dei piani che sono normali alla faccia laterale AL. I due parallelepipedi AM ed AQ sono equivalenti, essendo eguali i prisma triangolari $BCOLMQ$ ed $ADPKNR$ ad essi non comuni.

Fig. 157.



Resta quindi dimostrato che ogni parallelepipedo non rettangolare si può trasformare in un altro rettangolare che col primo abbia base equivalente ed egual altezza.

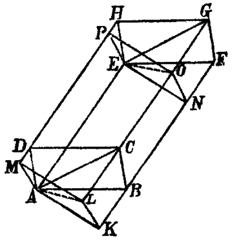
Corollario. Parallelepipedi di base equivalente ed eguale altezza sono equivalenti.

§ 293. Teorema. *La sezione diagonale divide il parallelepipedo in due prismi triangolari equivalenti.*

Dimostrazione: 1. Se il parallelepipedo è *retto*, la giustezza della proposizione enunciata emerge dal § 283.

2. Sia il parallelepipedo AG (fig. 158) *obliquo*.

Fig. 158.



Si conducano per i punti A ed E due piani normali agli spigoli del parallelepipedo AG, ed il parallelepipedo retto $AKLMENOP$ che ne nasce, viene diviso (giusta il numero 1) dalla sezione diagonale $AEOL$ in due prismi eguali $ALMEOP$ ed $AKLENO$.

Se si immagina collocata la piramide quadrangolare $EOGHP$ entro l'altra pure quadrangolare $ALCDM$ in modo che coincidano le loro facce laterali congruenti EOP ed ALM, gli spigoli OG ed LC, PH ed MD, normali a queste facce laterali, e per conseguenza anche i rimanenti altri spigoli dovranno coprirsi. Allora le due piramidi $EOGHP$ ed $ALCDM$ sono eguali, quindi $EOGHP + ACDEOP = ALCDM + ACDEOP$, ovvero prisma $ACDEGH = ALMEOP$. Egualmente ne discende prisma $ABCEFG = AKLENO$. Siccome poi i prismi $ALMEOP$ ed $AKLENO$ sono equivalenti, lo saranno pure i prismi $ACDEGH$ ed $ABCEFG$.

Corollarî. *a*) Ogni prisma triangolare è equivalente ad un parallelepipedo rettangolare di base equivalente ed eguale altezza.

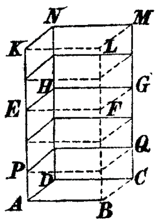
b) Ogni prisma poligonale è equivalente ad un parallelepipedo rettangolare di base equivalente ed eguale altezza.

c) Prismi di base equivalente ed eguale altezza sono equivalenti.

Rapporti di volume nei parallelepipedi.

§ 294. Teorema. *I volumi di due parallelepipedi rettangoli di base eguale, stanno tra loro come le loro altezze.*

Fig. 159.



Dimostrazione: Supponiamo (fig. 159) che le altezze AE ed AK dei due parallelepipedi rettangoli AG ed AM siano commensurabili e che AP sia una loro misura comune contenuta m volte in AE ed n volte in AK, tale quindi che si abbia $AE : AK = m : n$. Dividendo AK in n parti eguali, AE ne conterrà m di queste, per cui condotti per tutti i punti di divisione dei piani paralleli alla base, i parallelepipedi AG ed AM saranno divisi in m, rispettivamente in n parallelepipedi AQ, e si avrà $AG : AM = m : n$, ovvero

$$AG : AM = AE : AK.$$

Nello stesso modo che al § 115 si dimostra che tale proporzione sussiste del pari qualora le altezze AE ed AK fossero incommensurabili.

§ 295. Teorema. *I volumi di due parallelepipedi rettangoli di altezza eguale stanno tra loro come le basi.*

Dimostrazione: Siano P e p due parallelepipedi rettangoli, dei quali

P abbia M ed N per lati della base B, ed a per altezza,

p „ m „ n „ „ „ „ b, „ a „ „ ;

di più abbiasi un terzo parallelepipedo rettangolare

P' che abbia m ed N per lati della base, ed a per altezza.

Se nei due parallelepipedi P e P' si considera il rettangolo coi lati N ed a quale loro base comune, M ed m saranno le rispettive loro altezze, per cui si avrà, giusta il § 294,

$$P : P' = M : m,$$

e similmente

$$P' : p = N : n.$$

Moltiplicando queste proporzioni si ricava

$$P : p = M . N : m . n.$$

Ma $M . N : m . n = B : b$ (§ 160); dunque

$$P : p = B : b.$$

§ 296. Teorema. *I volumi di due parallelepipedi rettangolari stanno tra loro come i prodotti delle misure delle loro basi e delle loro altezze.*

Dimostrazione: Siano B e b le misure delle basi ed A ed a le misure delle altezze di due parallelepipedi rettangolari P e p; abbiasi poi un altro parallelepipedo rettangolare P' di base b ed altezza A. Sarà allora:

$$P : P' = B : b \text{ (§ 295)},$$

$$P' : p = A : a \text{ (§ 294), e moltiplicando}$$

$$P : p = B . A : b . a.$$

Questa proposizione si enuncia ordinariamente nel modo seguente:

I volumi di due parallelepipedi rettangoli stanno tra loro come i prodotti delle loro basi per le altezze.

Se in seguito per brevità di dizione si parlerà di *prodotti formati da superficie e linee*, si intenderanno i prodotti dei *numeri astratti* esprimenti quelle superficie e quelle linee.

Determinazione del volume dei prismi.

§ 297. Teorema. *Il volume d'un parallelepipedo rettangolare è eguale al prodotto della sua base per l'altezza.*

Dimostrazione: Sia P un parallelepipedo rettangolo la cui base B abbia i lati a e b, e la cui altezza sia c; di più si assuma v, vale a dire un cubo che abbia per base l'unità superficiale s e per altezza l'unità lineare l, quale unità di volume. Giusta il § 296, sarà allora

$$\frac{P}{v}=\frac{B.c}{s.l}=\frac{B}{s}\cdot\frac{c}{l},$$

in cui $\frac{P}{v}$ è la misura del volume del parallelepipedo, $\frac{B}{s}$ la misura della superficie della base B, e $\frac{c}{l}$ la misura dell'altezza c del parallelepipedo.

Essendo (giusta il § 160) $\frac{B}{s}=\frac{a.b}{l.l}=\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}$, ne deriva

$$\frac{P}{v}=\frac{a}{l}\cdot\frac{b}{l}\cdot\frac{c}{l},$$

cioè *il volume d'un parallelepipedo rettangolare è eguale al prodotto di tre dei suoi spigoli concorrenti* (lunghezza, larghezza ed altezza).

§ 298. Teorema. *Il volume d'un cubo è eguale alla terza potenza del suo lato* (§ 297).

Se V e v esprimono i volumi di due cubi aventi i lati L e l, si avrà $V=L^3$, e $v=l^3$, per cui

$$V:v=L^3:l^3;\text{ quindi}$$

i volumi di due cubi stanno fra loro come le terze potenze dei loro lati.

§ 299. *Il volume di qualsiasi prisma è eguale al prodotto della base per l'altezza.*

Segue dal § 297 abbinato al § 293 *a*) e *b*).

2. La piramide ed il prismatoide.

Superficie e volume della piramide.

§ 300. Per trovare la *superficie totale* s_t *d'una piramide,* si calcoleranno le aree delle facce laterali, quali triangoli, ed alla loro somma, che esprime la superficie laterale s_l della piramide, si aggiungerà l'area s_b della base. Sarà quindi $s_t=s_l+s_b$.

1. *La superficie laterale d'una piramide regolare è eguale ad un triangolo che abbia per base il perimetro della base e per altezza, l'altezza laterale della piramide.*

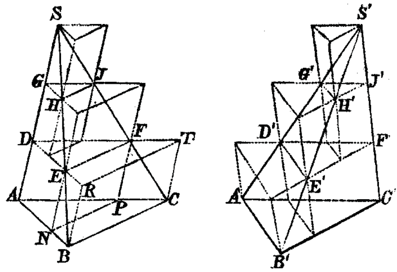
2. *Le superficie di due piramidi simili* (in generale di due poliedri simili) *stanno fra loro come i quadrati dei loro spigoli omologhi.*

Infatti, ogni due facce laterali omologhe, essendo simili, (§ 286), stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi, per cui tale rapporto sussisterà del pari fra le somme delle facce laterali dei due corpi.

§ 301. Teorema. *Due piramidi di base equivalente ed eguale altezza sono equivalenti* (fig. 160).

Dimostrazione: Siano ABC ed $A'B'C'$ le basi equivalenti delle due piramidi $SABC$ ed $S'A'B'C'$ collocate sullo stesso piano ed aventi

Fig. 160.



i vertici S ed S' situati in un piano parallelo a quello delle basi. Dividendo l'altezza di ciascuna piramide in n parti eguali, e facendo passare per i punti di divisione dei piani paralleli alle basi, due dei piani condotti ad eguale altezza determinano nelle due piramidi due sezioni, come la DEF e $D'E'F'$, fra loro equivalenti (§ 241, 2).

Se ad ogni tronco di piramide compreso fra due di quelle sezioni si costruiscono due prismi, l'uno circoscritto avente per base la sezione inferiore, l'altro iscritto avente per base la sezione superiore del tronco — quali sarebbero i prismi $ABCDRT$ ed $ANPDEF$ rispetto ad $ABCDEF$ — due prismi circoscritti e due prismi iscritti corrispondenti, come pure le somme di tutti i prismi circoscritti e quelle dei prismi iscritti alle due piramidi, sono fra loro equivalenti. Dinotando con C la somma dei prismi circoscritti, con J la somma dei prismi iscritti e con P e P' i volumi delle due piramidi $SABC$ ed $S'A'B'C'$, sarà

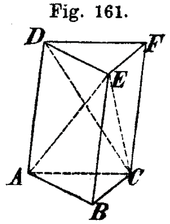
$$C>P>J \text{ ed } C>P'>J.$$

Siccome ogni prisma circoscritto in ogni piramide è equivalente al prisma iscritto immediatamente inferiore, così la differenza $C-J$ è eguale al prisma inferiore circoscritto $ABCDRT$, che si può rendere minore di qualsiasi quantità assegnabile, potendosi fissare per n un valore qualsiasi.

Le piramidi P e P' sono quindi equivalenti, costituendo esse i limiti verso i quali tendono le stesse grandezze variabili C ed J i cui valori vanno sempre più avvicinandosi (Aritm. § 114).

§ 302. Teorema. *Ogni prisma triangolare si può decomporre in tre piramidi triangolari equivalenti* (fig. 161).

Fig. 161.



Dimostrazione: Per i tre punti A, E e C del prisma triangolare $ABCDEF$ si fa passare un piano, il quale divide il prisma in due piramidi, l'una triangolare $EABC$, l'altra quadrangolare $EACFD$. Un altro piano che passa per i punti C, E e D, divide la piramide $EACFD$ in due piramidi triangolari $EACD$ ed $ECDF$. L'intero prisma viene in tal modo diviso in tre piramidi triangolari $EACD$, $ECDF$ ed

$EABC$, delle quali la prima è equivalente alla seconda e questa alla terza (§ 301).

Corollari. *a)* Ogni piramide triangolare è la terza parte d'un prisma triangolare di base equivalente ed eguale altezza.

b) Ogni piramide poligonale è la terza parte d'un prisma di base equivalente ed eguale altezza.

§ 303. Teorema. *Il volume d'una piramide è eguale alla terza parte del prodotto della base per l'altezza.*

Segue dal § 302 *a)* e *b)* e § 299.

§ 304. Teorema. *I volumi di due piramidi simili stanno fra loro come le terze potenze dei loro spigoli omologhi.*

Dimostrazione: Siano P e p due piramidi simili aventi le basi B e b e le altezze A ed a. Si segnino con S ed s due spigoli omologhi delle stesse e si avrà:

$$P : p = B \,.\, A : b \,.\, a.$$

Essendo le basi B e b simili fra loro, e le altezze A ed a proporzionali a due spigoli omologhi S ed s, ne viene che

$$B : b = S^2 : s^2, \text{ ed } A : a = S : s.$$

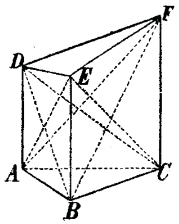
Moltiplicando queste due proporzioni si ottiene

$$B \,.\, A : b \,.\, a = S^3 : s^3.$$

In generale i volumi di due poliedri simili stanno fra loro come le terze potenze dei loro spigoli omologhi (§ 288).

§ 305. Teorema. *Un prisma triangolare sezionato obliquamente è eguale alla somma di tre piramidi che col prisma hanno comune la base, ed i cui vertici sono i vertici della sezione obliqua.*

Fig. 162.



Dimostrazione: Sia $ABCDEF$ (fig. 162) il prisma sezionato obliquamente. Se si fanno passare due piani, l'uno per i punti A, E e C, l'altro per i punti C, E e D, il prisma viene diviso in tre piramidi $EABC$, $EACD$ ed $ECDF$, per cui $ABCDEF = EABC + EACD + ECDF$.

La piramide $EABC$ ha per base ABC e per vertice il punto E. Guidando un piano per i punti B, C e D, la piramide $EACD$ sarà (giusta il § 301) equivalente alla piramide $BACD$ nella quale si può considerare del pari ABC quale base e D qual vertice. Guidando un piano per i punti A, B ed F, la piramide $ECDF$ che ne risulta sarà equivalente all'altra $BACF$ in cui si può considerare ABC come base ed F come vertice.

Superficie e volume d'un tronco di piramide.

§ 306. La *superficie totale* s_t *d'un tronco di piramide* si ottiene, se alla superficie s_l delle facce laterali che sono altrettanti trapezî, si aggiunge la superficie $2s_b$ delle due basi. Sarà quindi

$$s_t = s_l + 2s_b$$

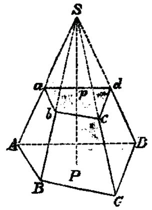
La superficie laterale d'un tronco di piramide regolare è eguale al prodotto del perimetro della sezione media per l'altezza laterale del tronco.

Infatti, un piano guidato parallelamente alla base per il punto di mezzo d'uno spigolo laterale dimezza anche gli altri spigoli laterali, dando per sezione media un poligono regolare. Ciò premesso, la verità del teorema enunciato risulta senz'altro dal corollario del § 165, 3 *b*.

§ 307. Teorema. *Il volume d'un tronco di piramide è eguale alla somma dei volumi di tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per basi, le basi del tronco e la media proporzionale geometrica tra queste due basi.*

Dimostrazione: Si completi a piramide il tronco $ABCDabcd$ (fig. 163) ed il volume di questo sarà:

Fig. 163.



$$V = \text{pir. } SABCD - \text{pir. } Sabcd.$$

Segnando con B e b le due basi $ABCD$ ed $abcd$, con a l'altezza pP, e con x l'altezza incognita Sp, sarà:

$$\text{Pir. } SABCD = \frac{B(a+x)}{3}, \text{ pir. } Sabcd = \frac{bx}{3}, \text{ quindi}$$

$$V = \frac{B(a+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Ba}{3} + \frac{x}{3}(B-b).$$

Per la determinazione di x si avrà (§ 241, 1) la proporzione: $B : b = (a+x)^2 : x^2$, ovvero $\sqrt{B} : \sqrt{b} = (a+x) : x$, da cui

$$x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Colla sostituzione di questo valore si ottiene:

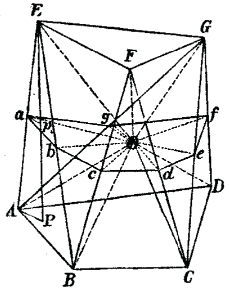
$$V = \frac{Ba}{3} + \frac{a\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}(B-b) = \frac{Ba}{3} + \frac{a\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$
$$= (B + \sqrt{Bb} + b) \,.\, \frac{a}{3}.$$

Volume del prismatoide.

§ 308. Teorema. *Il volume d'un prismatoide è eguale alla terza parte del prodotto che si ottiene moltiplicando la somma del medio aritmetico delle due basi e della doppia sezione media per l'altezza del prismatoide* (fig. 164).

Dimostrazione: Siano B e b le basi, a l'altezza, M la sezione media $abcdefg$ (§ 247) e V il volume del prismatoide.

Fig. 164.



Se per un punto O qualsiasi della sezione media e per gli spigoli del prismatoide si fanno passare dei piani, il prismatoide si scompone in piramidi, delle quali, due hanno per basi le basi del prismatoide e per altezza la metà dell'altezza del prismatoide. La somma di queste due piramidi sarà quindi

$$B \cdot \frac{a}{6} + b \cdot \frac{a}{6} = \frac{B+b}{2} \cdot \frac{a}{3}.$$

Le rimanenti piramidi i cui vertici sono situati in O, hanno per basi le facce laterali del prismatoide nelle quali ogni due spigoli laterali vengono dimezzati dalla sezione media. Da ognuna di queste piramidi, come p. e. dalla $OABE$, viene recisa dalla sezione media una piramide minore $OabE$ che avendo con quella lo stesso vertice O ha perciò con quella del pari eguale altezza; i loro volumi staranno come le basi ABE ed abE (§ 303); ma $AE = 2aE$, quindi $ABE = 4abE$ (§ 162), e perciò pir. $OABE = 4OabE$; ma piramide $OabE$ (prendendo Oab come base ed E qual vertice) è eguale ad $Oab \cdot \frac{a}{6}$, laonde pir. $OABE = 4 \cdot Oab \cdot \frac{a}{6}$. Similmente si ottiene pir. $OBEF = 4 \cdot Obc \cdot \frac{a}{6}$, pir. $OBCF = 4 \cdot Ocd \cdot \frac{a}{6}, \ldots$; quindi la somma di tutte queste piramidi sarà

$$4 \cdot (Oab + Obc + Ocd + \ldots) \cdot \frac{a}{6} = 4M \cdot \frac{a}{6} = 2M \cdot \frac{a}{3},$$ e perciò

$$V = \left(\frac{B+b}{2} + 2M\right) \cdot \frac{a}{3}.$$

Scolio. Applicando questa formola al prisma, alla piramide ed al tronco di piramide, si ottengono le note espressioni per i volumi di questi corpi.

3. Poliedri regolari.

§ 309. 1. La *superficie d'un poliedro regolare* si ottiene calcolando l'area di uno dei poligoni regolari che formano le sue facce, e moltiplicandola per il numero delle facce.

2. *Il volume d'un poliedro regolare è eguale alla terza parte del prodotto della sua superficie per il raggio della sfera iscrittagli.*

La dimostrazione emerge dai §§ 252 e 303.

II. Misurazione dei corpi a superficie curve.

1. Il cono.

Superficie e volume del cono.

§ 310. Se alla base d'un cono si iscrive o circoscrive un poligono regolare, e questo si consideri quale base di una piramide avente per vertice il vertice del cono, la *piramide* in tal modo ottenuta dicesi *iscritta*, rispettivamente *circoscritta* al cono.

Gli spigoli laterali della piramide iscritta sono lati, le facce laterali della piramide circoscritta, piani tangenziali del cono.

Teoremi. 1. *La superficie del mantello d'un cono retto, qualunque sia il numero dei lati della base della piramide iscrittagli e di quella circoscrittagli, è compresa fra le superficie laterali di queste piramidi.*

Dimostrazione: Se ad un cono retto si iscrivono delle piramidi le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati, la superficie laterale di quelle piramidi va successivamente aumentando, poichè col crescere del numero dei lati della base, crescono del pari le loro basi ed i loro apotemi (§ 300); le superficie laterali di tali piramidi non potranno però mai coincidere col mantello del cono, poichè le loro facce laterali sono situate sempre all'interno del cono.

Se ad un cono retto si circoscrivono delle piramidi le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati, la superficie laterale delle stesse va sempre più diminuendo, senza però coincidere con quella del mantello del cono, poichè le loro facce laterali, quali piani tangenziali del cono, devono trovarsi sempre all'esterno del cono.

2. *La differenza fra le superficie laterali della piramide circoscritta e di quella iscritta ad un cono retto diventa infinitamente piccola coll'aumentare continuo del numero dei lati della base di quelle piramidi.*

Dimostrazione: Sieno S_n ed s_n le superficie laterali della piramide circoscritta e di quella iscritta di n lati, P e p i perimetri delle loro basi, A ed a i loro apotemi. Sarà allora

$$S_n = \tfrac{1}{2} PA \text{ ed } s_n = \tfrac{1}{2} pa, \text{ quindi}$$
$$S_n - s_n = \tfrac{1}{2}(PA - pa) = \tfrac{1}{2}(P - p)A + \tfrac{1}{2}(A - a)p.$$

Col crescere all'infinito di n, $P - p$ s'avvicina allo zero (§ 178, 2), ed a al suo limite A, per cui $A - a$ diventa zero, e per conseguenza $S_n - s_n$ infinitamente piccolo, per n infinitamente grande.

§ 311. Teoremi. 1. *Il cono è maggiore di qualsiasi piramide iscrittagli, ma minore di qualsiasi piramide circoscrittagli.*

Infatti la piramide iscritta è una parte del cono, e questo una parte della piramide circoscrittagli.

2. *La differenza fra i volumi della piramide circoscritta e di quella iscritta ad un cono qualsiasi diventa infinitamente piccola coll' aumentare continuo del numero dei lati della base di quelle piramidi.*

Dimostrazione: Sieno V_n e v_n i volumi della piramide circoscritta e di quella iscritta, B e b le loro basi, a la loro altezza comune. Sarà allora
$$V_n - v_n = \tfrac{1}{2}(B-b)\,.\,a.$$
Col crescere di n, la differenza $B-b$ diventa infinitamente piccola (§ 179, 2) e con essa $V_n - v_n$.

§ 312. Le proposizioni svolte ai §§ 310 e 311 conducono alle seguenti definizioni:

La *superficie del mantello d'un cono retto* è il limite comune delle superficie laterali delle piramidi iscrittegli e circoscrittegli le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati; il *volume d'un cono* è il limite comune dei volumi delle piramidi iscrittegli e circoscrittegli le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati.

§ 313. Teorema. *La superficie del mantello d'un cono retto è eguale al semiprodotto della periferia della base per il lato del cono.*

Segue dai §§ 312 e 300, 1.

Siano r il raggio della base ed l il lato del cono. La superficie del mantello sarà $m = 2r\pi\,.\,\frac{l}{2} = r\pi l$, la superficie totale $s = r^2\pi + r\pi l = (r+l)\,r\pi$

Per il cono equilatero si ha $l = 2r$, quindi $s = 3r^2\pi$.

§ 314. Teorema. *Il volume d'un cono è eguale alla terza parte del prodotto della base per l'altezza.*

Segue dal concetto dei limiti esposto al § 303.

Indicando con r il raggio della base e con a l'altezza d'un cono, il suo volume sarà $v = \frac{r^2 a\pi}{3}$.

Se il cono è retto, ed l ne è il lato, risulterà $a = \sqrt{l^2 - r^2}$ e perciò $v = \frac{r^2\pi}{3}\sqrt{l^2 - r^2}$.

Per il cono equilatero, in cui $l = 2r$, si avrà $v = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}$.

Scolio. I volumi di due coni simili stanno tra loro come le terze potenze dei raggi delle loro basi. Infatti le altezze stanno come i raggi delle basi (§ 286, a).

Superficie e volume d'un tronco di cono.

§ 315. Teorema. *La superficie del mantello d'un tronco di cono retto è eguale al prodotto della periferia della sezione media per il lato del tronco.*

Segue dal concetto dei limiti spiegato al § 306.

Se R ed r sono i raggi delle basi d'un tronco di cono retto avente il lato l, $\frac{R+r}{2}$ sarà il raggio della sezione media, $m = (R+r)\,\pi\,.\,l$ la superficie del mantello, ed $s = [R^2 + r^2 + (R+r)\,l]\,.\,\pi$ la superficie totale del tronco di cono.

§ 316. Teorema. *Il volume d'un tronco di cono retto è eguale alla somma dei volumi di tre coni che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per basi, la base inferiore, la base superiore e la media proporzionale fra queste due basi del tronco.*

Segue dal § 307.

Segnando con R ed r i raggi delle due basi e con a l'altezza del tronco, si ottiene quale espressione del suo volume,
$$v = (R^2\pi + r^2\pi + Rr\pi)\,.\,\frac{a}{3}.$$

2. Il cilindro.

§ 317. Se alla base d'un cilindro si iscrive o circoscrive un poligono regolare, e questo si consideri quale base d'un prisma i cui lati siano paralleli ed eguali all'asse del cilindro, il *prisma* ottenuto in tal modo dicesi *iscritto*, rispettivamente *circoscritto* al cilindro.

Gli spigoli laterali del prisma iscritto sono lati, le facce laterali del prisma circoscritto, piani tangenziali del cilindro.

Con deduzioni analoghe a quelle del § 310, 1 e 2, si perviene ai seguenti due *teoremi:*

1. *La superficie del mantello d'un cilindro retto, qualunque sia il numero dei lati della base del prisma iscrittogli e di quello circoscrittogli, è compresa tra le superficie laterali di questi prismi.*

2. *La differenza tra le superficie laterali del prisma circoscritto e di quello iscritto ad un cilindro retto diventa infinitamente piccola coll' aumentare continuo del numero dei lati della base di quei prismi.*

§ 318. Teoremi. 1. *Il cilindro è maggiore di qualsiasi prisma iscrittogli, ma minore di qualsiasi prisma circoscrittogli.*

2. *La differenza fra i volumi del prisma circoscritto e di quello iscritto ad un cilindro diventa infinitamente piccola coll' aumentare continuo del numero dei lati della base di quei prismi.*

Le dimostrazioni sono analoghe a quelle del § 311, 1 e 2.

§ 319. Le seguenti definizioni si basano sui §§ 317 e 318:

La *superficie del mantello del cilindro retto* è il limite comune verso il quale tendono le superficie laterali dei prismi iscrittigli e circoscrittigli le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati;

il *volume d'un cilindro* è il limite comune verso il quale tendono i volumi dei prismi iscrittigli e circoscrittigli le cui basi hanno un numero sempre maggiore di lati.

§ 320. Teorema. *La superficie del mantello di un cilindro retto è eguale al prodotto della periferia della base per l'altezza.*

Segue dai §§ 319 e 291.

Indicando con r il raggio della base d'un cilindro retto e con a la sua altezza, sarà $m = 2\,r\,a\,\pi$ la superficie del suo mantello, ed $s = 2\,r^2\pi + 2\,r\,a\,\pi = 2\,r\,\pi\,(r + a)$ la sua superficie totale.

Nel cilindro equilatero in cui $a = 2\,r$, sarà $s = 6\,r^2\pi$.

§ 321. Teorema. *Il volume d'un cilindro è eguale al prodotto della base per l'altezza.*

Segue dai §§ 319 e 299.

Il volume d'un cilindro la cui base ha il raggio r e la cui altezza è a, è $v = r^2 a\,\pi$.

Nel cilindro equilatero in cui $a = 2\,r$, sarà $v = 2\,r^3\pi$.

Scolio. I volumi di due cilindri simili stanno tra loro come le terze potenze dei raggi delle loro basi (§ 286, *a*).

3. Superficie e corpi di rotazione.

§ 322. Se una linea retta (spezzata o curva), ovvero una figura piana ruota attorno una retta fissa, ogni punto di quella linea o di quella figura piana descrive durante un intiero giro una circonferenza il cui piano è normale alla retta fissa. La retta fissa dicesi l'*asse di rotazione* o semplicemente l'*asse*, la superficie generata dalla rotazione della linea retta (spezzata o curva) *superficie di rotazione* di quella linea, ed il corpo generato dalla rotazione della figura piana, *corpo di rotazione* di quella figura.

§ 323. La *superficie di rotazione d'un segmento* che ruota attorno un asse che trovasi nel piano del segmento, ma all'infuori del segmento stesso, è, a seconda della posizione del segmento verso l'asse, la superficie del mantello d'un cono retto, d'un tronco di cono retto o d'un cilindro retto, ovvero la superficie d'un cerchio o d'un anello circolare, se il segmento è normale all'asse.

Se una *linea spezzata* ruota attorno ad un asse fuori della stessa, ma situata nello stesso piano, la sua superficie di rotazione è eguale alla somma delle superficie di rotazione di tutti i segmenti di cui si compone la retta spezzata stessa.

Teorema. *La superficie di rotazione della base di un triangolo isoscele che ruota attorno un asse passante per il suo vertice e situato nel*

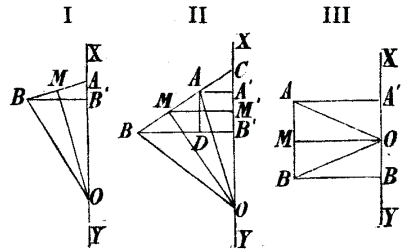
piano del triangolo, è eguale alle superficie del mantello d'un cilindro retto che ha per raggio della base l'altezza del triangolo, e per altezza la proiezione della base del triangolo sull'asse di rotazione (fig. 165).

Dimostrazione: A seconda della posizione che l'asse XY passante per il vertice O assume rispetto al triangolo AOB, si distinguono tre casi differenti.

I. Se la XY coincide con un lato AO del triangolo, la superficie di rotazione della base AB, che segneremo con $S(AB)$, è eguale alla superficie del mantello di un cono retto, quindi $S(AB) = \pi BB'.AB$, se $BB' \perp XY$. Guidando $OM \perp AB$ risulterà $\triangle ABB' \backsim \triangle AOM$, quindi $BB' : AB' = OM : AM$, ovvero $BB' : AB' = OM : \frac{AB}{2}$, da cui si ricava $BB'.AB = 2\,OM.AB'$, e perciò

$$S(AB) = 2\pi\,OM.AB'.$$

Fig. 165.



II. Se l'asse XY è situato all'infuori del triangolo AOB, senza però essere parallelo alla base AB, la superficie di rotazione della base del triangolo è la superficie del mantello di un tronco di cono retto. Conducendo $OM \perp AB$ ed AA', MM' e BB' normali ad XY, si ottiene $S(AB) = 2\pi\,MM'.AB$. Abbassando $AD \perp BB'$ si ha $\triangle MOM' \backsim \triangle ABD$, perciò $MM' : OM = AD : AB$, ed $MM'.AB = OM.AD = OM.A'B'$; quindi

$$S(AB) = 2\pi\,OM.A'B'.$$

III. Se l'asse XY è parallelo alla base AB del triangolo, questa descrive durante la sua rotazione la superficie del mantello d'un cilindro retto. Guidando quindi $OM \perp AB$ ed AA' e BB' normali ad XY, si ottiene

$$S(AB) = 2\pi\,OM.A'B'.$$

§ 324. Se in un poligono regolare si prende quale asse di rotazione una retta che passi per un vertice e per il centro del poligono, i lati rotanti sono le basi di triangoli isosceli che hanno per altezza comune il raggio del cerchio iscritto a quel poligono. Una eccezione s'avvera soltanto quando il numero dei lati del poligono è dispari, poichè in tal caso uno dei lati rotanti è normale all'asse e la sua superficie di rotazione è un cerchio.

Dal teorema enunciato al § 323 discendono le seguenti proposizioni:

1. *La superficie di rotazione generata dalla base d'un settore poligonale regolare* (§ 68, *b*) *che ruota attorno un asse passante per il centro del poligono, è eguale alla superficie del mantello d'un cilindro retto che ha per base, il cerchio iscritto al poligono, e per altezza, la proiezione della base del settore sull'asse di rotazione.*

2. *La superficie di rotazione generata dal semiperimetro d'un poligono regolare di un numero pari di lati che ruota attorno ad un asse passante per due vertici opposti del poligono, è eguale alla superficie del mantello d'un cilindro retto che ha per base, il cerchio iscritto al poligono, e per altezza, l'asse di rotazione.*

§ 325. Il *corpo di rotazione generato da una figura piana rettilinea* che ruota attorno ad un asse esterno alla figura, ma situato nel suo piano, si ottiene sommando o sottraendo convenientemente i coni, i tronchi di cono ed i cilindri retti che in tale rotazione si generano.

Teorema. *Il corpo di rotazione generato da un triangolo isoscele che ruota attorno ad un asse passante per il suo vertice e situato nel suo piano, è eguale al volume d'un cono che abbia per base, la superficie di rotazione della base, e per altezza, l'altezza del triangolo* (fig. 165).

Dimostrazione: Anche qui, come nel § 323, si distinguono tre casi differenti.

I. Se l'asse XY coincide con un lato AO del triangolo, il corpo di rotazione generato dal triangolo AOB, che indicheremo con $V(AOB)$, sarà eguale alla somma di due coni, per cui si avrà

$$V(AOB) = \tfrac{1}{3}\pi \cdot BB'^2 \cdot AB' + \tfrac{1}{3}\pi BB'^2 \cdot B'O = \tfrac{1}{3}\pi BB'^2 \cdot OA;$$

essendo poi $BB' \cdot OA = AB \cdot OM$, perchè ognuno di questi prodotti è eguale alla doppia area del triangolo AOB, risulta $V(AOB) = \pi BB' \cdot AB \cdot \frac{1}{3} OM$, ovvero, essendo $\pi BB' \cdot AB$ la superficie conica descritta dalla base AB,

$$V(AOB) = S(AB) \cdot \tfrac{1}{3} OM.$$

Questa dimostrazione vale per qualsiasi triangolo in cui sia $AO > B'O$.

II. Se l'asse è situato all'infuori del triangolo ed è convergente rispetto ad AB, si prolungherà AB sino ad incontrare l'asse in C, e si avrà

$$\begin{aligned} V(AOB) &= V(BOC) - V(AOC) \\ &= S(BC) \cdot \tfrac{1}{3} OM - S(AC) \cdot \tfrac{1}{3} OM \text{ (dimostrazione I)} \\ &= S(AB) \cdot \tfrac{1}{3} OM. \end{aligned}$$

III. Se $XY \parallel AB$, il cono generato dal $\triangle AA'O$ sarà $\frac{1}{3}$ del cilindro descritto dal rettangolo $AA'OM$, e perciò il corpo generato dal $\triangle AOM$, $\frac{2}{3}$ dello stesso cilindro. Similmente ne discende che il

corpo generato dal $\triangle BOM$ è $\frac{2}{3}$ del cilindro descritto dal rettangolo $BB'OM$, quindi

$$V(AOB) = \tfrac{2}{3} V(AA'BB') = \tfrac{2}{3}\pi OM^2 \cdot A'B'.$$

Ma $2\pi OM \cdot A'B'$ è la superficie di rotazione descritta dal lato AB, dunque

$$V(AOB) = S(AB) \cdot \tfrac{1}{3} OM.$$

§ 326. Dal teorema esposto al § 325, avuto riflesso al § 324, risultano le seguenti proposizioni:

1. *Il corpo di rotazione generato da un settore poligonale regolare che ruota attorno ad un asse passante per il centro del poligono, è eguale al volume d'un cono che abbia per base, la superficie di rotazione della base del settore, e per altezza, il raggio della circonferenza iscritta al poligono.*

2. *Il corpo di rotazione generato da un semipoligono regolare di un numero pari di lati che ruota attorno ad un asse passante per due vertici opposti del semipoligono, è eguale al volume d'un cono che abbia per base, la superficie di rotazione del semiperimetro, e per altezza, il raggio del cerchio iscritto al semipoligono.*

4. La sfera.

Superficie e volume della sfera.

§ 327. Se si iscrive o circoscrive ad un semicerchio un semipoligono regolare, ed il tutto si fa ruotare attorno al diametro del semicerchio, questo descrive una sfera, il semiperimetro del poligono una *superficie di rotazione*, ed il semipoligono stesso un *corpo di rotazione* che dicesi *iscritto*, rispettivamente *circoscritto* a quella sfera.

Ognuna di queste superficie di rotazione ha più circoli paralleli comuni colla sfera; tutti gli altri punti della superficie di rotazione iscritta sono situati all'interno, tutti gli altri punti della superficie di rotazione circoscritta sono situati al di fuori della superficie della sfera.

Teoremi. 1. *La superficie della sfera, qualunque sia il numero dei lati dei poligoni rotanti, è compresa fra la superficie di rotazione iscritta e quella circoscritta alla sfera.*

Dimostrazione: Se ad una sfera si iscrivono e circoscrivono delle superficie di rotazione di poligoni aventi un numero di lati sempre maggiore, le superficie di rotazione (§ 324, 2) iscritte vanno successivamente aumentando, quelle circoscritte invece di mano in mano diminuendo, senza però che, nè le une aumentando, nè le altre diminuendo, vengano a coincidere colla superficie della sfera, dacchè le superficie di rotazione iscritte sono situate sempre all'interno, quelle circoscritte sempre all'esterno della superficie della sfera.

2. *La differenza fra la superficie di rotazione iscritta e quella circoscritta ad una sfera, diventa, col continuo aumentare del numero dei lati dei poligoni rotanti, infinitamente piccola.*

Dimostrazione: Siano S_{2n} ed s_{2n} le superficie di rotazione di due poligoni di $2n$ lati, l'una circoscritta, l'altra iscritta ad una sfera, r e ρ i raggi delle circonferenze iscritte ai due poligoni, e $2R$ e $2r$ i loro assi di rotazione. Giusta il § 324, 2 sarà

$$S_{2n} = 2r\pi \,.\, 2R, \text{ ed } s_{2n} = 2\rho\pi \,.\, 2r, \text{ quindi}$$
$$S_{2n} - s_{2n} = 4r\pi\,(R - \rho).$$

Col crescere di n, tanto R che ρ si avvicinano al loro limite comune r, per diventare $R - \rho$ eguale a nullo; essendo poi $4r\pi$ un valore costante, ne viene che la differenza $S_{2n} - s_{2n}$ diventerà infinitamente piccola per n infinitamente grande.

§ 328. Teoremi. 1. *La sfera è maggiore di qualsiasi corpo di rotazione iscrittole, ma minore di qualsiasi corpo di rotazione circoscrittole.*

Infatti il corpo di rotazione iscritto è una parte della sfera, e questa una parte del corpo di rotazione circoscritto.

2. *La differenza fra i volumi del corpo di rotazione circoscritto e di quello iscritto ad una sfera, diventa infinitamente piccola col continuo aumentare del numero dei lati dei poligoni rotanti.*

La *dimostrazione*, analoga a quella del § 327, 2, si fa come al § 326, 2.

§ 329. Le seguenti definizioni si basano su quanto fu detto ai §§ 327 e 328:

La *superficie della sfera* è il limite comune a cui tendono le superficie di rotazione iscrittele e circoscrittele di un numero sempre maggiore di lati; il *volume della sfera* è il limite comune a cui tendono i volumi di quei corpi di rotazione.

§ 330. Teorema. *La superficie d'una sfera è eguale alla superficie del mantello d'un cilindro retto che abbia per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro della stessa.*

Segue dai concetti sui limiti esposti al § 329 ed al § 324, 2.

Se r è il raggio della sfera, sarà

$$s = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi;$$

vale a dire: *la superficie della sfera è eguale all'area quadrupla di un suo cerchio massimo.*

Scolio. *Le superficie di due sfere stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi.*

Poichè $S : s = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2.$

§ 331. Teorema. *Il volume della sfera è eguale al volume d'un cono che abbia per base la superficie, e per altezza il raggio della sfera.*

Discende dai §§ 329 e 326, 2.

Siano r il raggio, s la superficie e v il volume d'una sfera, e si avrà

$$s = 4r^2\pi, \text{ quindi } v = 4r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Scolio. *I volumi di due sfere stanno fra loro come le terze potenze dei loro raggi.*

Infatti $V : v = \frac{4}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3.$

Superficie del fuso e del triangolo sferico.

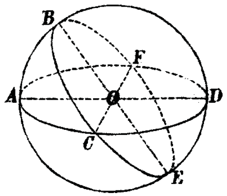
§ 332. Teorema. *La superficie del fuso è eguale al prodotto dell'area d'un cerchio massimo per il rapporto fra l'angolo sferico e 90°.*

Indicando con s la superficie d'un fuso il cui angolo sferico è m^0, si ha $s : 4r^2\pi = m^0 : 360^0$, e perciò

$$s = r^2\pi \,.\, \frac{m^0}{90}.$$

§ 333. Siano A, B e C gli angoli del triangolo sferico ABC (fig. 166), s la sua superficie ed r il raggio della rispettiva sfera.

Fig. 166.



I triangoli sferici ABC e BCD formano il fuso $ACDBA$, quindi, giusta il § 332,

$$ABC + BCD = r^2\pi \,.\, \frac{A}{90^0}; \text{ similmente}$$
$$ABC + ACE = r^2\pi \,.\, \frac{B}{90^0}, \text{ e perchè}$$
$$DEC = ABF \text{ (§ 273)},$$
$$ABC + DEC = r^2\pi \,.\, \frac{C}{90^0};$$

sommando si ha

$$2ABC + (ABC + BCD + ACE + DEC) = r^2\pi \,.\, \frac{A+B+C}{90^0}, \text{ ovvero}$$
$$2s + 2r^2\pi = r^2\pi \,.\, \frac{A+B+C}{90^0}, \text{ quindi}$$
$$s = r^2\pi \,.\, \frac{A+B+C-180^0}{180^0}.$$

Il calcolo dell'area d'un triangolo sferico dipende quindi unicamente dalla determinazione della differenza sempre positiva di $A+B+C-180^0$, ovvero dalla determinazione dell'eccedenza dei tre angoli su 180^0. Tale eccedenza, detta *eccesso sferico* del triangolo, segnasi ordinariamente con e.

Segnando la quantità costante $\frac{180^0}{\pi} = 57 \cdot 29578^0 = 206265''$, o, ciò che vale lo stesso, segnando la misura in gradi d'un arco di lunghezza eguale al raggio (§ 189, 4) con ρ, l'espressione s si trasforma in

$$s = r^2 \,.\, \frac{e}{\rho},$$

cioè: *la superficie d'un triangolo sferico è eguale al quadrato del raggio della sfera moltiplicato per il quoziente dell'eccesso sferico per la misura in gradi d'un arco di circonferenza di lunghezza eguale al raggio della sfera.*

Esempio:

$$\begin{aligned} A &= 59^{\circ}\ 4'\,35'' \\ B &= 94^{\circ}\,23'\,10'' \\ C &= 102^{\circ}\ 4'\,50'' \\ \hline & \ 255^{\circ}\,32'\,35'' \\ e &= 75^{\circ}\,32'\,35'' \\ e'' &= 271955'' \\ \log e'' &= 5{\cdot}43\ 450 \\ \log \rho'' &= 5{\cdot}31\ 443 \\ \hline & \ 0{\cdot}12\ 007 \\ s &= 1{\cdot}31847\,r^2. \end{aligned}$$

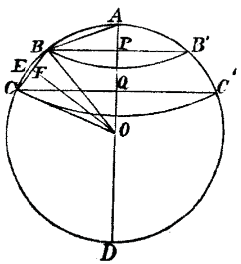
Scolio. La superficie d'un triangolo sferico serve nello stesso tempo di *misura* per l'angolo triedro che ha per sezione colla sfera il triangolo stesso (§ 271).

Superficie della calotta sferica e della zona sferica.

§ 334. Teorema. *La superficie d'una calotta sferica è eguale alla superficie del mantello d'un cilindro retto che abbia per base il cerchio massimo della sfera, e per altezza, l'altezza della calotta.*

Segue dal concetto dei limiti dato al § 324, 1.

Fig. 167.



Siano (fig. 167) $OA = r$ il raggio della sfera, ed $AP = h$ l'altezza della calotta sferica ABB' corrispondente all'arco AB. La superficie s della calotta sarà espressa da

$$s = 2r\pi \,.\, h \ldots .1).$$

Se sono dati h e $BP = \rho$, si ottiene, essendo

$$\rho^2 = (2r - h)\,.\,h \ (\S\ 135), \text{ ovvero}$$
$$2rh = \rho^2 + h^2,$$
$$s = (\rho^2 + h^2)\,\pi \ldots .2).$$

Se fosse nota la corda $AB = c$, si ricaverebbe dalla formola 2)

$$s = c^2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots .3).$$

§ 335. Teorema. *La superficie d'una zona sferica è eguale alla superficie del mantello d'un cilindro retto che abbia per base il cerchio massimo della sfera, e per altezza, l'altezza della zona.*

Segue dal § 324, 1.

Sia s la superficie della zona sferica $BCC'B'$ corrispondente all'arco BC (fig. 167), $OA = r$ e $PQ = a$ l'altezza della zona. Sarà allora $\quad s = 2r\pi \,.\, a \ldots\ldots .1).$

Conoscendo oltre ad r anche i raggi delle basi $BP = \rho$ e $CQ = \rho'$, si ottiene, essendo $a = OP - OQ$,

$$s = 2r\pi\left(\sqrt{r^2 - \rho^2} - \sqrt{r^2 - \rho'^2}\right) \ldots .2).$$

Volume del settore sferico, del segmento sferico e dello strato sferico.

§ 336. Teorema. *Il volume d'un settore sferico è eguale al volume d'un cono che abbia per base, la calotta del settore, e per altezza, il raggio della sfera.*

Segue dal concetto dei limiti dato al § 326, 1.

Se r ed h hanno i significati loro dati al § 334, il volume v del settore sferico generato dalla rotazione del settore circolare AOB (fig. 167) sarà espresso dalla formola

$$v = 2r\pi \,.\, h \,.\, \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\,r^2 h\pi.$$

§ 337. Il *volume d'un segmento sferico*, a seconda che esso è minore o maggiore della semisfera, è eguale alla *differenza* o alla *somma* dei volumi del corrispondente settore sferico e d'un cono che abbia per base, la base del segmento, e per altezza, la distanza di questa base dal centro della sfera.

Se r, ρ ed h hanno i significati loro dati al § 334, il volume v del segmento sferico ABB' corrispondente all'arco AB (fig. 167) sarà espresso dalla formola

$$v = \tfrac{2}{3}\,r^2 h\pi - \tfrac{1}{3}\,\rho^2 (r - h)\,\pi,$$

ovvero, essendo $\rho^2 = (2r - h)\,h$,

$$v = \tfrac{2}{3}\,r^2 h\pi - \tfrac{1}{3}\,h\,(2r - h)\,(r - h)\,\pi, \text{ ossia}$$
$$v = \tfrac{1}{3}\,h^2\,(3r - h)\,\pi.$$

§ 338. Il *volume d'uno strato sferico è eguale alla differenza dei volumi dei relativi segmenti sferici.*

Mantenuti sempre fermi i significati dati antecedentemente alle lettere r ed h, e ponendo (fig. 167) $AQ = h'$, il volume v dello strato sferico $BCC'B'$ corrispondente all'arco BC, verrà dato dalla formola

$$v = \tfrac{1}{3}\left[h'^2\,(3r - h') - h^2\,(3r - h)\right]\pi \ldots .1).$$

Se fossero dati r, l'altezza $PQ = a$ dello strato, e la distanza $OQ = d$, l'espressione 1), essendo $h' = r - d$ ed $h = r - a - d$, si trasformerebbe nell'altra

$$v = \tfrac{1}{3}\left[(r - d)^2\,(2r + d) - (r - a - d)^2\,(2r + a + d)\right]\pi, \text{ ovvero}$$
$$v = \tfrac{1}{3}\,a\left[3r^2 - 3d^2 - 3ad - a^2\right]\pi \ldots .2).$$

Conoscendo i raggi delle due basi $BP = \rho$ e $CQ = \rho'$, nonchè l'altezza dello strato $PQ = a$, risulterebbe

$$\rho'^2 = r^2 - d^2,$$
$$\rho^2 = r^2 - a^2 - d^2 - 2ad, \text{ quindi}$$
$$\rho'^2 + \rho^2 = 2r^2 - 2d^2 - 2ad - a^2, \text{ e perciò}$$
$$\frac{\rho'^2 + \rho^2 + a^2}{2} = r^2 - d^2 - ad,$$

il cui valore sostituito nella formola 2) dà

$$v = \tfrac{1}{3}\, a\, [\tfrac{3}{2}(\rho'^2 + \rho^2 + a^2) - a^2]\,\pi, \text{ ovvero}$$
$$v = \tfrac{1}{2}(\rho^2\pi \,.\, a + \rho'^2\pi \,.\, a) + \tfrac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi \ldots 3).$$

La formola 3) contiene la proposizione:

Uno strato sferico è eguale al medio aritmetico fra il cilindro iscrittogli e quello circoscrittogli aumentato della sfera iscritta allo strato.

III. Problemi per esercizio.

§ 339. Problemi sulla misurazione dei *poliedri*.

1. In un cubo, a è lo spigolo, d la diagonale, s la superficie e v il volume; data una di queste grandezze, trovare le altre.

Dato: 1) $a = 1\,m\; 3\,dm\; 3\,cm$; 2) $d = 0\cdot775\, m$; 3) $s = 10\,cm^2$; 4) $v = 12\cdot326391\, m^3$;

2. In un *parallelepipedo rettangolare di base quadratica, a* ($3\cdot2\,dm$) è uno spigolo della base ed s ($52\cdot48\,dm^2$) la superficie del corpo; se ne determini il volume v.

3. Si calcolino la superficie s ed il volume v d'un parallelepipedo rettangolare, dati che siano il rapporto dei tre spigoli e la diagonale d'una faccia laterale.

Siano x, y, e z gli spigoli disuguali, d la diagonale d'una faccia laterale aventi i lati y e z ed $x:y:z = m:n:p$. Sarà allora

$$s = \frac{2(mn + mp + np)}{n^2 + p^2} \,.\, d^2 \quad \text{e} \quad v = \frac{mnp}{(n^2 + p^2)\sqrt{n^2 + p^2}} \,.\, d^3.$$

4. Il volume d'un parallelepipedo rettangolare è v, il rapporto dei tre spigoli è $m:n:p$; si calcolino gli spigoli.

5. Quale è la superficie e quale è il volume d'un *prisma retto* di altezza a, la cui base è un esagono regolare avente il lato l?

6. Due prismi retti di altezza a ($4\cdot1\,dm$), l'uno esagonale, l'altro quadrangolare, hanno per base un poligono regolare avente il lato l ($2\cdot1\,dm$); in che rapporto stanno *a*) le loro superficie, *b*) i loro volumi?

7. In una *piramide retta*, la cui base è un triangolo equilatero, a è lo spigolo della base e b lo spigolo laterale; se ne determini la superficie s ed il volume v.

8. Quale è lo spigolo della base di una piramide avente l'altezza a ed il volume v, se la sua base è un triangolo equilatero?

9. Si trovino la superficie ed il volume di una piramide retta la cui altezza è a, e la cui base è un esagono regolare col lato l.

10. La base d'una piramide è un triangolo equilatero il cui lato è l; quale ne sarà *a*) la superficie, *b*) quale il volume, se gli spigoli laterali sono fra loro perpendicolari?

11. Le basi d'un *tronco di piramide retto* sono triangoli equilateri i cui lati sono l_1 ed l_2; se s è uno spigolo laterale del tronco, quale ne sarà *a*) la superficie, *b*) quale il volume?

12. Una piramide di base b e di altezza a viene tagliata nella distanza d dal vertice da un piano parallelo alla base; si calcolino i volumi delle due parti della piramide.

13. A che distanza dal vertice si dovrà tagliare una piramide retta con un piano parallelo alla base, acciocchè questo piano divida *a*) la superficie laterale, *b*) la piramide stessa nel rapporto $m:n$?

14. Un *prismatoide* di altezza a ha per basi due triangoli equilateri fra loro eguali, i cui lati di lunghezza l non sono paralleli fra loro; quale sarà il volume del prismatoide?

La sezione media è un esagono regolare.

15. La base d'uno sfenisco è un trapezio avente i lati paralleli p e p' e l'altezza a; le facce laterali passanti per p e p' si tagliano, nella distanza d dalla base dello sfenisco, lungo uno spigolo di lunghezza s; se le altre due facce laterali sono triangoli, quale sarà il volume v del corpo?

$$v = \tfrac{1}{6}\, da\,(p + p' + s).$$

16. Esprimere *a*) per mezzo dello spigolo a la superficie s, *b*) il volume v d'un *poliedro regolare.*

a) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ essendo l'area d'un triangolo equilatero avente il lato a, la superficie del tetraedro sarà $s = a^2\sqrt{3}$, quella dell'ottaedro $s = 2a^2\sqrt{3}$, quella dell'icosaedro $s = 5a^2\sqrt{3}$ e quella dell'esaedro $s = 6a^2$.

L'area d'un pentagono regolare avente il lato a è (giusta il § 175, scolio) $\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$, per cui la superficie del dodecaedro sarà $s = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

b) Dai §§ 309, 2 e 278, 3, risulta

per il tetraedro $v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$, per l'ottaedro $v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$, per l'esaedro $v = a^3$,

per l'icosaedro $v = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$ e per il dodecaedro $v = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$.

17. Si determinino la superficie ed il volume d'un poliedro regolare di cui si conosca *a*) il raggio della sfera iscrittavi, *b*) il raggio della sfera circoscrittavi.

§ 340. Problemi sulla misurazione di *corpi rotondi*.

1. In un *cono retto*, r è il raggio della base, a l'altezza, l il lato, m il mantello e v il volume;

si determinino 1) a, l ed m, dati r e v;
2) r, a e v, „ l ed m;
3) r, m e v, „ a ed l.

Dati: 1) $r = 4\,dm$, $v = 70 \cdot 37167\,dm^3$; 2) $l = 8 \cdot 1\,dm$, $m = 89 \cdot 1873\,dm^2$; 3) $a = 1 \cdot 32\,m$, $l = 1 \cdot 43\,m$.

2. Quali sarebbero le soluzioni in 1) per $l = 2r$, cioè per il cono *equilatero*?

3. Il perimetro della base d'un cono retto è p, la sezione fatta per l'asse è un triangolo rettangolo; quale è la superficie del mantello?

4. R ed r sono i raggi delle basi d'un *tronco di cono retto* la cui superficie è s; quale sarà il volume di questo cono?

5. Quale è l'altezza a d'un tronco di cono retto avente i raggi R ed r, se la superficie del suo mantello è eguale alla somma delle superficie delle due basi?

6. A quale distanza dalla base minore devesi tagliare un tronco di cono retto con un piano parallelo alle basi, acciocchè a) l'area della sezione sia $\frac{m}{n}$ di quella della base maggiore, b) la sezione dimezzi il tronco?

7. Quale è la superficie d'una piramide di base quadratica a) iscritta, b) circoscritta ad un cono retto di raggio r e di altezza a?

8. Quale è il volume d'un tronco di piramide di base quadratica iscritto ad un tronco di cono di altezza a, i cui raggi sono R ed r?

9. In un *cilindro retto*, r è il raggio della base, a l'altezza, m il mantello e v il volume; date due di queste grandezze calcolare le altre due.

Dati: 1) $r = 1 \cdot 064\,m$, $a = 2 \cdot 725\,m$; 2) $r = 6 \cdot 42\,dm$, $m = 15 \cdot 18\,dm^2$; 3) $m = 20\,dm^2$, $v = 7 \cdot 07356\,dm^3$.

10. Quali sarebbero le soluzioni in 9) per $a = 2r$, cioè per il cono *equilatero*?

11. In un cilindro retto avente il volume v, l'altezza sta al diametro della base come $m : n$; quale è la superficie di un tale cilindro?

12. Si calcoli il volume d'un *tubo cilindrico*, se dello stesso sono dati i due raggi R e r e l'altezza a.

13. Dati il volume v, l'altezza a ed il raggio maggiore R, trovare la grossezza g del relativo tubo cilindrico.

14. La misura di saggio per il litro $= 1\,dm^3$ ha la forma d'un cilindro, la cui altezza è il doppio del diametro della base; si esprimano in millimetri le dimensioni di tale misura.

15. La misura di saggio per il decilitro ha la forma d'un tronco di cono, il cui diametro superiore è eguale al diametro d'un cilindro equilatero che col tronco ha eguale capacità, ed il cui diametro inferiore è $\frac{5}{4}$ del diametro superiore; quali sono le dimensioni di tale misura?

16. Sopra ognuna delle basi d'un cilindro retto di raggio r si costruisca un cono il cui vertice è il centro della base opposta; si determini la circonferenza lungo la quale si tagliano i mantelli dei due coni.

17. Ad un cilindro retto di raggio r e di altezza a si iscriva un prisma di base quadratica; quale sarà la superficie di ogni faccia laterale d'un tale prisma?

18. Quale è la superficie del mantello d'un cilindro 1) iscritto, 2) circoscritto ad un cubo avente lo spigolo a?

19. Un triangolo ruota successivamente attorno ai suoi lati a, b e c quali assi; si determinino le relazioni esistenti fra i volumi dei *corpi di rotazione* A, B e C in tal modo generati.

$$Aa = Bb = Cc.$$

20. Un trapezio isoscele di altezza a ed i cui lati paralleli sono p e $p + m$, ruota attorno al lato parallelo p quale asse; si calcoli a) la superficie di rotazione, b) il corpo di rotazione in tal modo formato.

21. I corpi di rotazione generati dal ruotare successivamente un trapezio attorno ai due lati paralleli stanno come $m : n$; in che rapporto stanno i lati paralleli stessi?

22. Si determini a) la superficie, b) il volume d'un corpo generato dalla rotazione di un esagono regolare attorno ad un asse di simmetria d'un suo angolo, qualora il lato dell'esagono abbia una lunghezza di $8\,cm$.

23.* Il lato d'un pentagono regolare è a; quale è a) la superficie, b) quale il corpo generato dalla rotazione dello stesso attorno ad un asse di simmetria d'un suo lato? (§ 175, scolio).

24. In una sfera, r è il raggio, s la superficie e v il volume; da una di queste grandezze trovare le altre.

Dato: 1) $r = 0 \cdot 3589\,m$; 2) $r = 1\,m\,1\,dm\,5 \cdot 8\,cm$; 3) $s = 64 \cdot 184\,dm^2$; 4) $v = 5 \cdot 33774\,dm^3$.

25. Si trovi il raggio d'una sfera che sia equivalente a) in superficie, b) in volume ad un cilindro, ad un cono, ad un tronco di cono.

26. Da una *sfera cava* metallica il cui diametro esterno è $2r$ ($18\,cm$) ed il cui spessore è s ($2\,cm$) devesi fondere una palla massiccia; quale ne sarà il diametro?

27. Quale è lo spessore d'una sfera cava la cui parte massiccia ha il volume v, se il suo raggio maggiore è r?

28. Si calcoli l'area d'un fuso sferico corrispondente ad un angolo di $22^\circ 30'$, se il raggio della relativa sfera è $1\,m$?

29. Se il raggio d'una sfera è $1\,m$, quali saranno le aree dei triangoli sferici corrispondenti agli angoli di:

a) $125^\circ, 87^\circ, 82^\circ$; *c*) $96^\circ 34' 47''$, $71^\circ\ 5' 29''$, $63^\circ 19' 35''$;
b) $90^\circ, 51^\circ 59', 56^\circ 40'$; *d*) $21^\circ 42' 50''$, $142^\circ 18' 53''$, $30^\circ 46' 24''$.

30. Si determini il *segmento sferico anulare* A generato dal ruotare del segmento circolare BCE (fig. 167) attorno al diametro AD, se sono date la corda $BC = \sigma$, e la sua proiezione sull'asse $PQ = a$.

$$A = \frac{a\sigma^2\pi}{6}.$$

31. L'occhio d'un osservatore sulla terra abbraccia collo sguardo una calotta limitata dalla circonferenza che congiunge i punti di contatto delle tangenti immaginate condotte dal suo occhio alla terra; quale sarà la calotta, se a dinota l'elevazione dell'occhio dal suolo ed r il raggio della terra?

$$s = \frac{2r^2a\pi}{r+a}.$$

32. Quale è la superficie della terra che si abbraccia collo sguardo ad una altezza di $137\cdot 88\,m$? ($r = 858\cdot 474$ miglia geogr., 1 miglio geogr. $= 7418\cdot 93\,m$).

33. Una sfera di raggio r viene tagliata da un piano in modo che le calotte sferiche risultanti stiano come $m:n$; quali sarebbero i volumi dei relativi segmenti sferici?

$$S_1 = (m+3n)\cdot\frac{4m^2r^3\pi}{3(m+n)^3} \text{ ed } S_2 = (3m+n)\cdot\frac{4n^2r^3\pi}{3(m+n)^3}.$$

34. Il segmento d'una sfera di raggio r ha un volume doppio di quello d'una sfera che ha per raggio l'altezza del segmento; si calcoli tale altezza.

35. Quale è la superficie d'una sfera iscritta ad un cono retto di altezza a e di raggio r?

36. Ad un cilindro equilatero si iscrivano una sfera ed un cono retto; quale è la ragione che passa fra i volumi di questi tre corpi?

37. Ad una sfera si circoscrivano un cilindro equilatero ed un cono equilatero; in che rapporto stanno *a*) le superficie *b*) i volumi di questi tre corpi?

38. Si trasformi una sfera di superficie s in un cilindro retto che colla sfera abbia egual volume ed il cui mantello sia eguale alla superficie della sfera; quale ne sarà *a*) il raggio, *b*) quale l'altezza?

39. Ad un triangolo equilatero si iscriva un cerchio; in che rapporto sta la superficie del mantello del cono generato dalla rotazione del triangolo attorno ad una sua altezza, con la superficie della sfera generata dalla rotazione del cerchio?

40. Ad un cubo avente il lato a si circoscriva una sfera ed a questa un tetraedro regolare; quale è *a*) la superficie, *b*) il volume del tetraedro?

41. Una sfera viene tagliata da un piano che divide il diametro $2R$ ad esso normale nel rapporto $m:n$; se sulla sezione si costruiscono due coni i cui vertici siano situati sulla superficie della sfera, in che rapporto sta il volume della sfera al volume di questo doppio cono?

42. Ad un cono retto il cui raggio della base è r ed il cui lato è l viene iscritta una sfera; quale è *a*) il raggio ρ del circolo parallelo lungo il quale il mantello del cono tocca la sfera, *b*) quale il volume v del segmento sferico reciso da questo circolo?

$$\rho = \frac{r(l-r)}{l} \text{ e } v = \frac{\rho^3\pi}{3}\cdot\frac{2l+r}{l+r}\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}.$$

43. La superficie d'una sfera è eguale a quella d'una zona di altezza a corrispondente ad una sfera di raggio r; si determinino la superficie ed il volume d'un ottaedro regolare a cui sia iscritta la prima sfera.

44. Un tetraedro regolare è equivalente in volume ad uno strato sferico le cui basi hanno dal centro della relativa sfera di raggio r le distanze d e d'; quale è *a*) la superficie, *b*) quale il volume d'una sfera circoscritta a quel tetraedro?

PARTE TERZA.

TRIGONOMETRIA

§ 341. Per esprimere la reciproca dipendenza dei lati e degli angoli d'un triangolo per mezzo d'equazioni e coll'aiuto di queste, dati alcuni elementi del triangolo, trovare *numericamente* gli altri che mancano, si sono introdotti in luogo degli angoli dei numeri esprimenti i rapporti che esistono fra certi segmenti che da quegli stessi angoli sono pienamente determinati. Tali numeri chiamansi *funzioni degli angoli*, ovvero *funzioni goniometriche* o *trigonometriche*, mentre *Goniometria* appellasi la dottrina delle proprietà e delle vicendevoli relazioni di quelle funzioni.

L'applicazione delle funzioni goniometriche al calcolo dei triangoli è oggetto della *Trigonometria*, e precisamente della Trigonometria *piana* o *sferica*, a seconda che si tratti di triangoli piani o sferici.

CAPITOLO PRIMO.

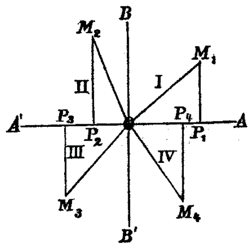
Goniometria.

I. Definizione e rappresentazione delle funzioni goniometriche.

§ 342. Se per un punto O (fig. 168) d'un piano si conducono nello stesso due rette AA' e BB' fra loro normali, il piano illimitato verrà da queste diviso in quattro parti congruenti, dette *quadranti*. Se poi in quel piano, a partire dalla retta fissa OA, si fa ruotare il raggio OM attorno il punto O in una data direzione (qui verso sinistra), esso percorrerà successivamente tutti i quadranti del piano, generando colla retta OA durante la sua rotazione tutti gli angoli da 0^0 a 360^0. I quadranti percorsi dal raggio in moto saranno chiamati nell'ordine in cui si compie la rotazione, primo, secondo, terzo, quarto quadrante.

Un angolo AOM, di cui un lato sia OA e l'altro OM_1, OM_2... si trovi nel primo, secondo... quadrante, dicesi per brevità *angolo nel primo, secondo... quadrante.*

Fig. 168.



Se da un punto M_1 d'uno dei lati d'un angolo AOM_1 si abbassa la *normale* M_1P_1 sull'altro suo lato, il segmento OP_1 che ne risulta chiamasi la *proiezione* del segmento OM_1 sulla retta OA (§ 158); la retta OA è l'*asse di proiezione*, ed il triangolo rettangolo M_1P_1O il *triangolo di proiezione* dell'angolo AOM_1. Il triangolo di proiezione è situato sempre nello stesso quadrante in cui trovasi l'angolo.

Se da più punti d'uno dei lati d'un angolo si abbassano delle normali all'altro lato, i triangoli di proiezione che nascono sono simili fra loro, per cui i rapporti esistenti fra ogni due lati d'uno dei triangoli di proiezione sono eguali a quelli che sussistono fra i lati omologhi degli altri triangoli di proiezione. Ne segue quindi che per ogni angolo si danno fra i lati del suo triangolo di proiezione dei rapporti, detti *funzioni* di quell'angolo, pienamente determinati e dipendenti unicamente dalla grandezza dell'angolo stesso.

§ 343. I singoli rapporti esistenti fra i lati del triangolo di proiezione d'un angolo hanno nomi speciali. Supposto (fig. 168) che MPO sia il triangolo di proiezione d'un angolo $AOM = \alpha$ posto in un quadrante qualunque, sarà:

1. il rapporto della normale all'ipotenusa, il *seno* dell'angolo α, $\frac{MP}{OM} = \text{sen}\, \alpha$;

2. il rapporto della proiezione all'ipotenusa, il *coseno* di questo angolo, $\frac{OP}{OM} = \cos \alpha$;

3. il rapporto della normale alla proiezione, la *tangente* dell'angolo α, $\frac{MP}{OP} = \text{tang}\, \alpha$;

4. il rapporto della proiezione alla normale, la *cotangente* di questo angolo, $\frac{OP}{MP} = \cot \alpha$;

5. il rapporto dell'ipotenusa alla proiezione, la *secante* dell'angolo α, $\frac{OM}{OP} = \sec \alpha$;

6. il rapporto dell'ipotenusa alla normale, la *cosecante* di questo angolo, $\frac{OM}{MP} = \text{cosec}\, \alpha$.

Problemi.

1. Costruito un angolo di 60° ed il suo triangolo di proiezione, si misurino i lati di quest'ultimo e dagli stessi si calcolino per mezzo della divisione le sei funzioni dell'angolo.

2. Nella stessa guisa si determinino le singole funzioni per gli angoli *a*) di 30°, *b*) di 75°, *c*) di 135°, *d*) di 195°, *e*) di 285°.

3. Dato sen $\alpha = \frac{23}{36}$, costruire il rispettivo angolo α a mezzo del triangolo di proiezione. In qual quadrante si troverà α?

4. Si costruisca nello stesso modo l'angolo α, dato che sia *a*) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, *b*) tang $\alpha = \frac{58}{19}$, *c*) $\cot\alpha = 1$, *d*) $\sec\alpha = \frac{45}{37}$, *e*) cosec $\alpha = \frac{33}{28}$.

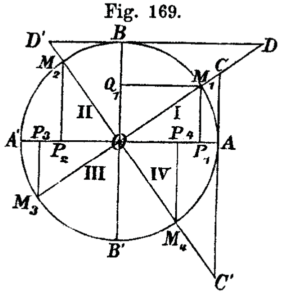
§ 344. *Rappresentazione nel cerchio delle funzioni goniometriche.*

Le funzioni goniometriche si possono rappresentare per mezzo di segmenti che trovansi in un cerchio.

Se (fig. 169) in un cerchio di raggio r si guidano due diametri AA' e BB' fra loro normali, un raggio OM che staccatosi dal raggio fisso OA ruotasse all'ingiro di O verso sinistra, percorrerebbe successivamente tutti i quattro quadranti, formando all'intorno di O tutti gli angoli possibili col raggio fisso OA.

a) Sia $AOM = \alpha$ uno di questi angoli, e dall'estremità M del raggio mobile OM si guidi sul raggio fisso OA o sul suo prolungamento OA' la normale MP. Sarà allora, a tenore del § 343,

Fig. 169.



$$\frac{MP}{OM} = \frac{MP}{r} = \sin\alpha \text{ ed } \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{r} = \cos\alpha.$$

b) La normale AC eretta al raggio fisso OA nella sua estremità A taglia il prolungamento del raggio mobile OM in C, risultando $\triangle OAC \backsim \triangle OPM$. Sarà allora

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{r} = \text{tang}\,\alpha, \text{ ed}$$
$$\frac{OM}{OP} = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{r} = \sec\alpha.$$

c) Finalmente si guidi alla OB, nell'estremità B, la normale BD; questa taglierà il prolungamento del raggio mobile OM in D risultando $\triangle OBD \backsim \triangle OPM$. Sarà quindi

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{r} = \cot\alpha \text{ ed } \frac{OM}{MP} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{r} = \text{cosec}\,\alpha.$$

I segmenti MP, OP, AC, OC, BD ed OD i cui rapporti col raggio r del cerchio determinano le funzioni goniometriche, si chiamano *linee goniometriche*, e precisamente MP la *linea del seno*, OP la *linea del coseno*, AC la *linea della tangente*, OC la *linea della secante*, BD la *linea della cotangente* ed OD la *linea della cosecante*.

Siccome poi i rapporti di queste linee al raggio dipendono unicamente dalla grandezza dell'angolo α, e siccome essi hanno lo stesso valore, qualunque sia il raggio, ne segue che i valori delle funzioni goniometriche rimarranno inalterati anche ponendo il raggio eguale all'unità di lunghezza, per cui per $r = 1$, i suddetti rapporti si trasformano nelle seguenti espressioni

$$MP = \sin\alpha, \quad AC = \text{tang}\,\alpha, \quad BD = \cot\alpha,$$
$$OP = \cos\alpha; \quad OC = \sec\alpha; \quad OD = \text{cosec}\,\alpha;$$

nelle quali, però, sotto MP, OP, AC, OC, BD ed OD non devonsi intendere le linee goniometriche, bensì le *misure* delle stesse.

Le funzioni goniometriche si possono considerare quali misure delle rispettive linee goniometriche riferite ad un cerchio di raggio $= 1$.

§ 345. *Segni delle funzioni goniometriche.*

Nei triangoli di proiezione M_1P_1O, M_2P_2O, M_3P_3O ed M_4P_4O (fig. 168) corrispondenti ad angoli di varî quadranti, la normale trovasi ora al di sopra, ora al di sotto dell'asse di proiezione OA, la proiezione invece ora a destra, ora a sininistra del vertice O. Ne segue quindi che nel determinare la normale e la proiezione si debba avere riflesso a tali posizioni differenti, distinguendole col segno positivo o negativo; ne viene poi per conseguenza che anche le funzioni goniometriche andranno munite d'un segno corrispondente alla grandezza dell'angolo.

In generale le normali e le proiezioni si considerano come *positive* nella posizione che hanno nel primo quadrante, quindi la normale *al di sopra* di OA, la proiezione *alla destra* di O; le normali che trovansi *al di sotto* di OA e le proiezioni che trovansi *alla sinistra* di O devonsi quindi ritenere come *negative*.

Da quanto fu detto si vede che gli angoli del 1. e 2. quadrante hanno una normale positiva, quelli del 3. e 4. una normale negativa; la proiezione è positiva se l'angolo trovasi nel 1. e 4. quadrante, negativa se tale angolo trovasi nel 2. e 3.

Dalle definizioni date al § 343 e dovendosi ritenere sempre l'ipotenusa come presa nel suo valore assoluto (positiva), ne derivano per i segni delle funzioni goniometriche le seguenti norme:

1. Il *seno* e la *cosecante* hanno il segno della *normale* del triangolo di proiezione; sono quindi positivi per un angolo del 1. e 2. quadrante, negativi per un angolo del 3. o 4.

2. Il *coseno* e la *secante* hanno il segno della *proiezione*, per cui sono positivi se appartengono ad angoli del 1. o 4. quadrante, negativi se appartengono ad angoli del 2. o 3. quadrante.

3. La *tangente* e la *cotangente* sono positive o negative a seconda che la normale e la proiezione hanno *segni eguali* o *contrari*; sono quindi positive per un angolo del 1. e 3. quadrante, negative per un angolo del 2. e 4.

Agli stessi risultati si perverrebbe se si considerassero le funzioni goniometriche quali misure delle linee goniometriche del cerchio (fig. 169).

La *linea del seno* e *quella della tangente* sono positive se stanno al *di sopra* del raggio fisso OA, negative se stanno al *di sotto* dello stesso.

La *linea del coseno e quella della cotangente* sono positive se si trovano *alla destra* del centro O, negative se si trovano alla *sinistra* di tale punto.

La *linea della secante e quella della cosecante* sono positive se stanno sul *prolungamento diretto*, negative se stanno sul *prolungamento inverso* del raggio mobile.

§ **346.** *Andamento generale delle funzioni col crescere dell' angolo.* Col variare dell' angolo, variano del pari le rispettive linee goniometriche e perciò anche le loro misure, ovvero le rispettive funzioni goniometriche.

A. *Valore del seno e del coseno* (fig. 169).

1. Quanto più piccolo è l' angolo α, tanto minore è il seno, laddove il coseno si va senza fine avvicinando all' unità; se i due lati combaciano, si ha $\operatorname{sen} 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Per angoli molto piccoli la differenza fra l' arco ed il seno dell' angolo è tanto minore quanto più l' angolo s' avvicina a 0, rimanendo però sempre il seno minore dell' arco.

2. Se l' angolo α cresce da 0^0 a 90^0, cresce pure il seno, dapprima rapidamente poscia più lentamente, mentre il $\cos\alpha$ decresce, dapprima lentamente, poscia rapidamente; ambidue sono positivi. Per $\alpha = 90^0$ la linea del seno coincide col lato mobile e ne risulta $\operatorname{sen} 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Crescendo l' angolo α da 90^0 a 180^0, il seno è positivo e diminuisce, il coseno invece è negativo e cresce in valore assoluto. Per $\alpha = 180^0$, si ha $\operatorname{sen} 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Crescendo l' angolo α da 180^0 a 270^0, il seno è negativo aumentando in valore assoluto, il coseno è del pari negativo decrescendo in valore assoluto. Per $\alpha = 270^0$ si ha $\operatorname{sen} 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Per un angolo $\alpha > 270^0$ ma $< 360^0$, il seno è negativo e decresce in valore assoluto, il coseno è positivo e cresce. Per $\alpha = 360^0$ tanto il seno che il coseno raggiungono il valore che avevano per $\alpha = 0^0$, vale a dire $\operatorname{sen} 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Il seno ed il coseno hanno quindi dei valori che oscillano fra $+1$ e -1.

B. *Valore della tangente e della secante* (fig. 169).

1. Quanto più piccolo è l' angolo, tanto minore è la tangente, mentre la secante si avvicina all' unità; se i due lati combaciano, si ha $\operatorname{tang} 0^0 = 0$ e $\sec 0^0 = +1$. Di più, quanto più piccolo è l' angolo tanto minore è la differenza fra l' arco e la tangente dell' angolo, rimanendo però sempre la tangente maggiore dell' arco.

2. Crescendo l' angolo α da 0^0 a 90^0, la tangente e la secante sono positive ed aumentano. Per $\alpha = 90^0$, tanto la tangente quanto la secante sono infinitamente grandi.

3. Continuando l' angolo α a crescere oltre i 90^0 sino a 180^0, tanto la tangente quanto la secante sono negative e decrescono in valore assoluto. Per $\alpha = 180^0$, si ha $\operatorname{tang} 180^0 = 0$; $\sec 180^0 = -1$.

4. Aumentando l' angolo α da 180^0 a 270^0, i valori assoluti della tangente e della secante crescono, riuscendo positiva la tangente, negativa la secante. Per $\alpha = 270^0$ tanto la tangente quanto la secante sono infinitamente grandi.

5. Crescendo l' angolo α da 270^0 a 360^0, tanto la tangente quanto la secante decrescono in valore assoluto, riuscendo negativa la tangente e positiva la secante. Per $\alpha = 360^0$ si ha $\operatorname{tang} 360^0 = 0$, $\sec 360^0 = +1$.

La tangente quindi può raggiungere tutti i valori reali che trovansi fra $-\infty$ e $+\infty$, la secante quelli fra $+1$ e $+\infty$ e fra -1 e $-\infty$.

C. *Valore della cotangente e della cosecante* (fig. 169).

1. Per angoli molto piccoli, la cotangente e la cosecante crescono senza fine e diventano infinitamente grandi per $\alpha = 0^0$.

2. Nel 1. quadrante la cotangente e la cosecante sono ambedue positive e decrescono coll' aumentare dell' angolo; $\cot 90^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = +1$.

3. Nel 2. quadrante i valori assoluti della cotangente e della cosecante crescono col crescere dell' angolo, e diventano infinitamente grandi per un angolo eguale a 180^0; la cotangente è negativa, la cosecante positiva.

4. Nel 3. quadrante i valori assoluti della cotangente e della cosecante decrescono coll' aumentare dell' angolo; la cotangente è positiva, la cosecante negativa; $\cot 270^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 270^0 = -1$.

5. Nel 4. quadrante la cotangente e la cosecante sono negative ed aumentano in valore assoluto; per $\alpha = 360^0$ ambedue sono infinitamente grandi.

La cotangente ha valori che o cillano fra $-\infty$ e $+\infty$, la cosecante valori che oscillano fra $+1$ e $+\infty$ e fra -1 e $-\infty$.

Scolî. *a*) Ogni funzione ha per ciascun quadrante quattro valori assoluti, due positivi e due negativi. Mentre per mezzo d'un angolo dato sono del tutto determinate le sue funzioni, ad ogni funzione positiva o negativa data corrispondono invece due angoli situati in differenti quadranti. Delle relazioni più intime esistenti fra tali angoli si terrà parola nei §§ 349—353.

b) Le deduzioni fatte qui sopra si possono estendere anche ad angoli che corrispondono a più d'un giro completo; la formola generale di tali angoli è $n.360^0+\alpha$, ovvero $2n\pi+\alpha$ (§ 185, 4). Egli è evidente che le funzioni di $n.360^0+\alpha$ sono eguali a quelle corrispondenti ad α. Se si considerano gli angoli nella loro generalità, il problema: data una funzione cercare l'angolo che vi corrisponda, ha infinite soluzioni, poichè, anche fatta astrazione dell'ambiguità notata nello scolio *a*), infiniti angoli che differiscono di 360^0 o d'un multiplo di 360^0 hanno una funzione dello stesso valore.

II. Relazioni fra le funzioni goniometriche dello stesso angolo.

§ 347. Siccome, giusta la definizione del § 343, la cotangente, la secante e la cosecante sono rispettivamente i valori reciproci della tangente, del coseno e del seno, ne viene che si potrà porre

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan g\,\alpha}\ldots 1),\qquad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\ldots 2),\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\ldots 3).$$

Dalle stesse definizioni (fig. 168) risulta:

$$\operatorname{tang}\alpha\,.\,\cos\alpha=\frac{MP}{OP}\cdot\frac{OP}{OM}=\frac{MP}{OM}=\operatorname{sen}\alpha,\ \text{e}$$

$$\cot\alpha\,.\,\operatorname{sen}\alpha=\frac{OP}{MP}\cdot\frac{MP}{OM}=\frac{OP}{OM}=\cos\alpha;\ \text{perciò}$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ldots 4)\qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\ldots 5).$$

Dal triangolo di proiezione MPO si ha

$$MP^2+OP^2=OM^2.$$

Dividendo questa equazione successivamente per OM^2, OP^2 ed MP^2, si ricava:

$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2+\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=1,\ \text{ovvero,}\ \operatorname{sen}\alpha^2+\cos\alpha^2=1\ldots 6)$$

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+1=\left(\frac{OM}{OP}\right)^2,\quad ,,\quad \operatorname{tang}\alpha^2+1=\sec\alpha^2\ldots 7)$$

$$1+\left(\frac{OP}{MP}\right)^2=\left(\frac{OM}{MP}\right)^2,\quad ,,\quad 1+\cot\alpha^2=\operatorname{cosec}\alpha^2\ldots 8).$$

§ 348. Conosciuta che sia una funzione d'un angolo, le altre possono essere dedotte per mezzo delle equazioni qui sopra esposte.

P. e. sia dato $\operatorname{sen}\alpha$. Dall'equazione 6) si ricava

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha^2}.$$

Da 4) e 5) poi si ha

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha^2}}\ \text{e}\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha^2}}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Le equazioni 2) e 3) ci forniscono finalmente i valori di

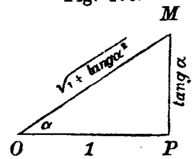
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha^2}}\ \text{e}\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Il triangolo di proiezione però ci offre una soluzione più semplice e più spedita d'un tale problema. A tale scopo si pone nel rapporto esprimente la data funzione goniometrica il termine conseguente eguale ad 1, per cui l'antecedente diventa eguale alla funzione, e da questi due valori si calcola il terzo lato dal triangolo; fatto ciò, si potranno rilevare direttamente dal triangolo di proiezione le formole per le altre funzioni, basandosi sulle definizioni che ne sono state date.

P. e. sia data $\operatorname{tang}\alpha$.

Se relativamente al triangolo di proiezione MPO (fig. 170), si pone nella formola $\operatorname{tang}\alpha=\frac{MP}{OP}$, il lato $OP=1$, si ha $MP=\operatorname{tang}\alpha$ ed $OM=\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}$. Di più ne discende

Fig. 170.



$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{MP}{OM}=\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{OP}{OM}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}},$$

$$\cot\alpha=\frac{OP}{MP}=\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{OM}{OP}=\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}\ \text{e}\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{OM}{MP}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Dagli esempi qui sviluppati si scorge che una funzione d'un angolo determina ambiguamente le altre sue funzioni, eccezione fatta per quella che ne è il valore reciproco.

III. Relazioni fra le funzioni di angoli tra loro dipendenti.

§ 349. *Angoli complementari.*

Due *angoli complementari* (§ 16) si indicano in generale con α e $90^0-\alpha$.

Siano (fig. 169) $OA=1$, $AOM_1=\alpha$ e quindi $BOM_1=90^0-\alpha$. Dalla stessa figura si ricavano immediatamente le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha; \\ \operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha, & \cot(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tang}\alpha; \\ \sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha, & \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha. \end{array}\right\}\ldots 9).$$

Siccome la secante e la cosecante non vengono adoperate nei calcoli logaritmici, così in seguito si svilupperanno soltanto le formole relative al seno, al coseno, alla tangente ed alla cotangente.

§ 350. *Due angoli la cui differenza è di* 90°.

La forma generale per questi angoli è α e $90^\circ + \alpha$.

Sia (fig. 169) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$ ed $M_2M_1 \perp M_1M_3$, quindi $AOM_2 = 90^\circ + \alpha$ e $\triangle M_2P_2O \cong \triangle OP_1M_1$; sarà allora

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = M_2P_2 = OP_1 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -OP_2 = -M_1P_1 = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Supposto α eguale all'angolo ottuso AOM_2, sarà $AOM_3 = 90^\circ + \alpha$ e $\triangle M_3P_3O \cong \triangle OP_2M_2$, e perciò

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = -M_3P_3 = -OP_2 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -OP_3 = -M_2P_2 = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Ponendo finalmente $AOM_3 = \alpha$ e perciò $AOM_4 = 90^\circ + \alpha$, si ha, essendo $\triangle M_4P_4O \cong \triangle OP_3M_3$,

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = -M_4P_4 = -OP_3 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = OP_4 = -M_3P_3 = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Per ogni angolo α sarà quindi

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \\ \cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha. \end{array}\right\}\ldots 10).$$

Da queste due equazioni si ricava

$$\operatorname{tang}(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha \text{ e } \cot(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha.$$

§ 351. *Angoli supplementari.*

Due angoli *supplementari* (§ 16) si indicano in generale con α e $180^\circ - \alpha$.

Sia (fig. 169) $OA = 1$ ed $AOM_1 = \alpha$, quindi $A'OM_1 = 180^\circ - \alpha$. Si avrà allora $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = M_1P_1$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -OP_1$, $\operatorname{sen}\alpha = M_1P_1$, $\cos\alpha = OP_1$; laonde

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha, & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha; \\ \operatorname{tang}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha, & \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha; \end{array}\right\}\ldots 11).$$

e perciò

Scolio. Se in una data questione non si prendono in considerazione che angoli concavi, un solo angolo, e precisamente un angolo acuto o l'ottuso suo supplementare, a seconda che la funzione è positiva o negativa, corrisponde ad un dato coseno, ad una data tangente o ad una data cotangente; all'opposto il seno, che in questo caso è sempre

positivo, non determina un angolo solo, ma bensì due angoli, dacchè due appunto sono gli angoli, l'uno acuto, l'altro ottuso, che corrispondono allo stesso seno.

§ 352. *Due angoli la cui differenza è di* 180°.

Supposto (fig. 169) l'angolo $AOM_1 = \alpha$ e perciò l'angolo saliente $AOM_3 = 180^\circ + \alpha = \pi + \alpha$ (§ 185, 4), ne risultano, come lo mostra la figura, le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{tang}(\pi + \alpha) = \operatorname{tang}\alpha, \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, & \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha. \end{array}$$

§ 353. *Due angoli la cui somma o differenza è un multiplo di* 180°.

1. Supposto (fig. 169) l'angolo concavo $AOM_1 = \alpha$ e perciò l'angolo saliente $AOM_1 = 360^\circ - \alpha = 2\pi - \alpha$, risulta dalla figura:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{tang}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha, \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha, & \cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha. \end{array}$$

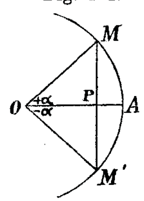
2. In generale si avrà:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(2n\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{sen}[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \mp\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha, & \cos[(2n+1)\pi \pm \alpha] = -\cos\alpha, \\ \operatorname{tang}(2n\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tang}\alpha, & \operatorname{tang}[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \pm\operatorname{tang}\alpha, \\ \cot(2n\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha, & \cot[(2n+1)\pi \pm \alpha] = \pm\cot\alpha. \end{array}$$

§ 354. *Angoli negativi.*

Considerati come *positivi* quegli angoli che vengono generati (fig. 171) dal ruotare del lato mobile dalla direzione di A verso M (sinistra), *negativi* saranno gli altri che nascono dal rotare dello stesso lato nella direzione opposta da A verso M' (§ 13).

Fig. 171.



Se l'angolo $AOM' = AOM$ e si pone $AOM = +\alpha$, sarà l'angolo $AOM' = -\alpha$. Si faccia $OM = OM' = 1$, si conducano da M ed M' le normali ad OA, ed i triangoli che ne risulteranno saranno eguali, per cui le normali dovranno concorrere nel medesimo punto P. Essendo ora $MP = \operatorname{sen}\alpha$, $M'P = \operatorname{sen}(-\alpha)$, ed $OP = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$, ne segue

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha, & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\}\ldots 12).$$

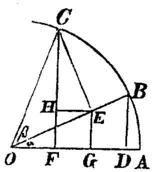
laonde

IV. Funzioni di angoli composti.

§ 355. *Somma di due angoli.*

Se (fig. 172) l'angolo $AOB = \alpha$ e $BOC = \beta$, $AOC = \alpha + \beta$. Si guidino $BD \perp OA$, $CE \perp OB$ e $CF \perp OA$, e BDO, CEO e CFO saranno i triangoli di proiezione degli angoli α, β ed $\alpha + \beta$.

Fig. 172.



Si conducano $EG \perp OA$ ed $EH \perp CF$, e ne risulterà $EG = HF$, $EH = GF$ e l'angolo ECH del triangolo di proiezione ECH eguale ad α (§ 26, 2). Sarà allora

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{CF}{OC} = \frac{EG+CH}{OC} = \frac{EG}{OC} + \frac{CH}{OC},$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OF}{OC} = \frac{OG-EH}{OC} = \frac{OG}{OC} - \frac{EH}{OC}.$$

Essendo poi

$$\frac{EG}{OC} = \frac{EG}{OE}\cdot\frac{OE}{OC} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta, \quad \frac{CH}{OC} = \frac{CH}{CE}\cdot\frac{CE}{OC} = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

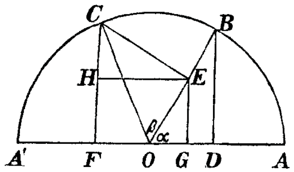
$$\frac{OG}{OC} = \frac{OG}{OE}\cdot\frac{OE}{OC} = \cos\alpha\cos\beta, \quad \frac{EH}{OC} = \frac{EH}{CE}\cdot\frac{CE}{OC} = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

ne risulta $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \ldots 13)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \ldots 14).$

Tanto gli angoli α e β, quanto la loro somma $\alpha+\beta$, furono supposti acuti. Se la somma $\alpha+\beta$ dei due angoli acuti α e β fosse maggiore di 90°, come nella fig. 173, la dimostrazione con tutte le sue deduzioni rimarrebbe la stessa, eccezione fatta per i segni, per i quali ha luogo durante lo sviluppo un cangiamento che svanisce nel risultato finale. Le suddette formole valgono quindi, qualsiasi angolo acuto si ponga per α e β.

Fig. 173.



Se le formole 13) e 14) valgono per due angoli α e β qualsisiano, varranno eziandio, se uno di questi due angoli, per esempio α, aumentasse di 90°, assumendo il valore $\alpha' = 90^\circ + \alpha$. Infatti

$$\operatorname{sen}(\alpha'+\beta) = \operatorname{sen}(90^\circ+\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) \quad (\S\ 350),$$

$$\cos(\alpha'+\beta) = \cos(90^\circ+\alpha+\beta) = -\operatorname{sen}(\alpha+\beta);$$

dunque $\operatorname{sen}(\alpha'+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$

$\cos(\alpha'+\beta) = -\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$

Essendo poi $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)$ (§ 350) $= \operatorname{sen}\alpha'$,

$\operatorname{sen}\alpha = -\cos(90^\circ+\alpha) = -\cos\alpha'$, ne risulta per conseguenza $\operatorname{sen}(\alpha'+\beta) = \operatorname{sen}\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\operatorname{sen}\beta,$

$\cos(\alpha'+\beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\beta.$

Si scorge quindi che le formole 13) e 14) valgono per ogni valore di α e β; infatti, valendo esse per la somma di ogni due angoli acuti, dovranno valere eziandio qualora uno di questi due angoli aumenti di 90°, e per conseguenza anche per ogni ripetuto aumento di 90° che dovesse subire l'uno o l'altro dei due angoli; laonde le piuccitate formole valgono per la somma di due angoli qualsisiano.

*

Essendo $\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$, si ottiene dividendo tanto il numeratore che il denominatore di questa ultima frazione per $\cos\alpha\cos\beta$,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots\ldots 15).$$

Egualmente si ha

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \ldots\ldots\ldots 16),$$

§ 356. *Angoli doppi ed angoli metà.*

1. Ponendo nelle formole 13) sino 16) $\beta = \alpha$, si ha:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \ldots\ldots 17)$ $\qquad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \operatorname{sen}\alpha^2 \ldots 18)$

$\operatorname{tang} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha^2} \ldots\ldots 19)$ $\qquad \cot 2\alpha = \dfrac{\cot\alpha^2 - 1}{2\cot\alpha} \ldots\ldots\ldots 20),$

dalle quali formole, note che siano le funzioni d'un angolo, si possono trovare quelle del suo angolo doppio.

2. Le formole 17) e 18) si trasformano nelle seguenti, se si pone α invece di 2α, quindi $\frac{\alpha}{2}$ invece di α.

$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \ldots 21)$ $\qquad \cos\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 22).$

Ma $\quad 1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2$ (secondo la formola 6) e

$$\cos\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

quindi sommando e sottraendo queste equazioni si ha:

$1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots\ldots 23)$ $\qquad 1 - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 24)$

e perciò

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \ldots\ldots 25)$ $\qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \ldots\ldots 26).$

Da queste due ultime espressioni si ricava con la divisione:

$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \ldots\ldots 27)$ $\qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \ldots\ldots 28).$

Per mezzo delle formole 25) sino 28) si possono trovare quindi le funzioni dell'angolo metà, noto che sia il coseno dell'angolo intero

§ 357. *Differenza di due angoli.*

$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta.$

Applicando a questa somma le formole 13) e 14) si ottiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\beta,$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}\beta.$$

Se si sciolgono queste due equazioni, considerando nelle stesse sen $(\alpha-\beta)$ e cos $(\alpha-\beta)$ quali incognite, si ottengono, essendo $\cos\beta^2 + \operatorname{sen}\beta^2 = 1$,

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \ldots . 29)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \ldots . 30),$$

le quali formole, al pari di quelle ai numeri 13) e 14), valgono per qualsiasi valore di α e β.

Le equazioni 29) e 30) possono essere sviluppate indipendentemente da qualsiasi altra formola, impiegando un metodo del tutto eguale a quello adoperato nella derivazione delle formole 13) e 14) del § 355.

Dalle formole 29) e 30) si ottiene nel modo indicato al § 355,

$$\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots\ldots 31)$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \ldots\ldots\ldots 32).$$

Scolio. Se nelle formole 13) e 14), 29) e 30) si pone $\beta = n \,.\, 360^0$, si ricava, essendo sen $(n \,.\, 360^0) = 0$ e cos $(n \,.\, 360^0) = 1$,

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm n \,.\, 360^0) = \operatorname{sen}\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm n \,.\, 360^0) = \cos\alpha,$$

le quali equazioni riferite ad $\alpha + n \,.\, 360^0$ sono eziandio contenute nel § 353, 2.

§ 358. *Somme e differenze delle funzioni goniometriche.*

Per mezzo dell'addizione e sottrazione delle formole 13) e 14), 29) e 30) si ottiene

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

ovvero, ponendo $\alpha+\beta=\varphi$, ossia $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi+\psi)$,
$\alpha-\beta=\psi$, „ $\beta = \frac{1}{2}(\varphi-\psi)$,

$$\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots . 33)$$
$$\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots . 34)$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots . 35)$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots . 36).$$

Dividendo le formole dal numero 33) al 36) si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \ldots . 37)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi \pm \operatorname{sen}\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi \pm \psi) \ldots 38)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi \pm \operatorname{sen}\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\cot\tfrac{1}{2}(\varphi \mp \psi) \ldots 39)$$

$$\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \ldots 40).$$

V. Calcolo delle funzioni goniometriche.

§ 359. Le formole di già sviluppate possono essere utilizzate innanzi tutto per calcolare le funzioni goniometriche dei varî angoli. Siccome le funzioni di qualsiasi angolo possono essere ricondotte sempre a quelle dell'angolo acuto, ne viene che basta occuparsi della determinazione delle funzioni di angoli acuti. A tale scopo basterà estendere il calcolo ai soli angoli che non superano i 45^0, dacchè $45^0 + \varphi$ e $45^0 - \varphi$ sono angoli complementari, e perciò devono sussistere le relazioni

$$\operatorname{sen}(45^0+\varphi) = \cos(45^0-\varphi),$$
$$\cos(45^0+\varphi) = \operatorname{sen}(45^0-\varphi),$$
$$\operatorname{tang}(45^0+\varphi) = \cot(45^0-\varphi),$$
$$\cot(45^0+\varphi) = \operatorname{tang}(45^0-\varphi).$$

Qui appresso facciamo seguire il calcolo per la determinazione delle funzioni di angoli che variano fra 0^0 e 45^0.

Siccome per uno di questi angoli la lunghezza dell'arco corrispondente (per il raggio 1) ha un valore compreso fra il seno e la tangente dell'angolo, ne discende

$$\operatorname{arc}\alpha < \operatorname{tang}\alpha \quad \text{ed} \quad \operatorname{arc}\alpha > \operatorname{sen}\alpha.$$

Dalla prima disuguaglianza segue $\operatorname{arc}\alpha\cos\alpha < \operatorname{sen}\alpha$, ovvero $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha^2} < \operatorname{sen}\alpha$, quindi tanto più, essendo $\operatorname{arc}\alpha > \operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\operatorname{arc}\alpha^2} < \operatorname{sen}\alpha$. Per $\alpha < 45^0$ è $1 - \operatorname{arc}\alpha^2 < 1$, dunque $1-\operatorname{arc}\alpha^2 < \sqrt{1-\operatorname{arc}\alpha^2}$, e tanto più $\operatorname{arc}\alpha(1-\operatorname{arc}\alpha^2) < \operatorname{sen}\alpha$, ovvero $\operatorname{arc}\alpha - \operatorname{arc}\alpha^3 < \operatorname{sen}\alpha$, e perciò

$$\operatorname{arc}\alpha - \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{arc}\alpha^3.$$

Per angoli minori di 45^0 la differenza fra l'arco ed il seno è quindi minore della terza potenza dell'arco.

Per $\alpha = 1'$, arc $1' = 0{\cdot}000\ 290\ 8882$, per cui

$$\operatorname{arc}1' - \operatorname{sen}1' < 0{\cdot}000\ 290\ 8882^3; \text{ essendo poi}$$

$0{\cdot}000\ 290\ 8882^3 < \frac{1}{10^{10}}$, tanto più si potrà porre $\operatorname{arc}1' - \operatorname{sen}1' < \frac{1}{10^{10}}$; si avrà quindi, con una esattezza di 10 decimali,

$$\operatorname{sen}1' = 0{\cdot}000\ 290\ 8882.$$

Calcolato poi con questo valore il $\cos 1' = \sqrt{1-(\operatorname{sen}1')^2}$, le formole 17), 18), 13) e 14) daranno il seno ed il coseno di $2', 4', 8' \ldots$, il seno ed il coseno di $1'+2'=3'$, di $2'+3'=5'$, di $2'+5'=7' \ldots$, colla scorta dei quali si potranno determinare il seno ed il coseno di $6', 10', 14', 9', 15', 21' \ldots$ sino a $60' = 1^0$. Noti che siano poi sen 1^0 e cos 1^0 si troveranno in un modo affatto eguale i seni ed i coseni di tutti gli angoli sino a 45^0.

Nella determinazione dei seni e coseni di archi che non contengono che secondi, si potrà porre tanto più l'arco stesso per il seno, e si otterrà per tal modo, essendo arc $1'' = \frac{\text{arc } 1'}{60}$,

$$\operatorname{sen} 1'' = 0{\cdot}000\ 004\ 8481\ldots$$

Di più si ha

$\operatorname{sen} 2'' = 2 \operatorname{sen} 1''$, $\operatorname{sen} 3'' = 3 \operatorname{sen} 1''$, $\operatorname{sen} 4'' = 4 \operatorname{sen} 1''$, e così via.

Da questi valori poi si determinano i coseni dei singoli secondi.

Trovati i seni ed i coseni degli angoli fra 0^0 e 45^0, si calcoleranno con le formole 4) e 5) le tangenti e cotangenti di quegli stessi angoli.

§ 360. Siccome le funzioni goniometriche sono, generalmente parlando, quantità irrazionali, ne viene che le stesse sono tanto più esattamente determinate, quanto più decimali si sviluppano nel calcolarle; ma coll'aumentare delle cifre decimali, le moltiplicazioni e divisioni delle funzioni si vanno sempre più complicando, per cui si è costretti, per togliere un tale inconveniente, a ricorrere nei calcoli trigonometrici ai logaritmi. A tale scopo furono determinati e raccolti in apposite *tavole logaritmiche* i logaritmi briggiani delle funzioni dei singoli angoli.

Coll'aiuto di tali tavole si trova con un maneggio semplicissimo, spiegato nell'introduzione alle stesse, il logaritmo d'una funzione corrispondente ad un dato angolo, ovvero l'angolo corrispondente al logaritmo d'una data funzione*).

VI. Equazioni goniometriche.

§ 361. Per sciogliere una equazione fra più funzioni dipendenti dallo stesso angolo incognito, la si trasforma coll'aiuto delle formole goniometriche fondamentali in guisa che in essa non apparisca che una sola funzione goniometrica, e nella equazione in tal modo trasformata si determina questa unica funzione quale incognita. Per avere poi l'angolo corrispondente al valore trovato di questa funzione, si cerca coll'aiuto delle tavole logaritmiche il logaritmo di questa funzione e poi l'angolo corrispondente a questo logaritmo.

---

*) Una esauriente spiegazione sulla disposizione e sul maneggio di tali tavole trovasi nella introduzione alle mie *tavole logaritmiche a cinque decimali, ad uso delle scuole.* Vienna, presso Gerold, 1877.

Esempio. 1. $2 \cos x = \cot x$.

Si sostituisca $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, e sarà $2 \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, quindi

$$\operatorname{sen} x = \tfrac{1}{2},$$

dalla quale equazione è determinato l'angolo x.

Per trovare l'angolo x, basterà prendere i logaritmi d'ambe le parti dell'equazione $\operatorname{sen} x = 0{\cdot}5$, e si avrà $\log \operatorname{sen} x = 9{\cdot}69897 - 10$, da cui $x = 30^\circ$. Ma questo valore non è il solo che corrisponde ad x; un secondo angolo dei quattro quadranti (§ 346, a) e precisamente il suo angolo supplementare di 150°, ha per seno $\frac{1}{2}$, per cui $x = 150^\circ$ sarà un secondo valore di x. Se si vuole poi estendere il concetto d'un angolo anche agli angoli negativi ed a quelli maggiori di 360°, si ottiene (§ 357, scolio) la soluzione generale $x = 30^\circ \pm n \,.\, 360^\circ$ ed $x = 150^\circ \pm n \,.\, 360^\circ$, ove n è 0 od un numero intero qualunque. Esteso in tal modo il concetto d'un angolo, x assume infiniti valori; di solito, però, basterà limitarsi a quelli due dei primi quattro quadranti.

2. $a \operatorname{sen}(\alpha + x) = b \cos(\beta + x)$.

Si ottiene

$$a \operatorname{sen} \alpha \cos x + a \cos \alpha \operatorname{sen} x = b \cos \beta \cos x - b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} x, \text{ ovvero}$$

$$\operatorname{sen} x\,(a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \beta) = \cos x\,(b \cos \beta - a \operatorname{sen} \alpha), \text{ dunque}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{b \cos \beta - a \operatorname{sen} \alpha}{a \cos \alpha + b \operatorname{sen} \beta}.$$

3. $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$.

Si ponga $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x^2}$, e si avrà

$$a \operatorname{sen} x + b \sqrt{1 - \operatorname{sen} x^2} = c, \text{ ovvero } b \sqrt{1 - \operatorname{sen} x^2} = c - a \operatorname{sen} x,$$

la quale equazione innalzata al quadrato dà

$$\operatorname{sen} x = \frac{a c \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Si ottengono in tal modo due valori per $\operatorname{sen} x$, dei quali però uno solo corrisponde all'equazione data, ottenendosi del pari lo stesso risultato dall'equazione $a \operatorname{sen} x - b \cos x = c$. Resta quindi da esaminare ancora quale dei due valori corrisponda all'una e quale all'altra delle equazioni.

La soluzione riesce più semplice coll'introduzione d'*un angolo ausiliario.* A tale scopo si porti l'equazione data alla forma

$$\operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a},$$

e si determini un angolo ausiliario φ tale che sia $\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}$.

Sarà allora

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{tang} \varphi \cos x = \frac{c}{a}, \text{ ovvero } \operatorname{sen} x \cos \varphi + \cos x \operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

laonde

$$\operatorname{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Da questa equazione, essendo ora noto φ, si può calcolare il valore di $x + \varphi$, e quindi anche di x.

4. Siano date le due equazioni:

$$\operatorname{sen} x^2 + \cos y^2 = a \quad \text{e} \quad \cos x^2 - \operatorname{sen} y^2 = b.$$

Se nella seconda equazione si sostituiscono $\cos x^2 = 1 - \operatorname{sen} x^2$ e $\operatorname{sen} y^2 = 1 - \cos y^2$, si ha

$$-\operatorname{sen} x^2 + \cos y^2 = b.$$

Da questa equazione e dalla prima equazione data si ricava

$$2 \operatorname{sen} x^2 = a - b \quad \text{e} \quad 2 \cos y^2 = a + b, \text{ quindi}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-b)} \quad \text{e} \quad \cos y = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

5. $x + y = \beta$; $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = n$.

Essendo $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-y)$
$= 2 \cos \frac{1}{2}\beta \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-y)$, ne discende

$$2 \cos \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y) = n, \text{ e}$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2}\beta}.$$

Da questa equazione si determina $\frac{1}{2}(x-y)$, per trovare poi i valori di x ed y da $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\beta$ e $\frac{1}{2}(x-y)$.

VII. Problemi per esercizio.

§ 362. 1. Si determinino per mezzo di costruzione tang 45° e cot 45°, e da queste si calcoli sen 45° e cos 45°.

2. Si determinino per mezzo di costruzione sen 30° e cos 60° e da questi si calcolino cos 30°, tang 30°, cot 30°; sen 60°, tang 60°, cot 60°; sen 15°, cos 15°, tang 15°, cot 15°.

3. Si determini sen 36° (vedi § 175, 2) e dallo stesso si calcoli cos 36°, tang 36°, cot 36°; sen 72°, cos 72°, tang 72°, cot 72°; sen 18°, cos 18°, tang 18°, cot 18°.

4. Si esprimano per mezzo di funzioni d'angoli acuti:

a) sen 125°, *b*) sen 200°, *c*) sen 430°, *d*) sen 98° 12′;
e) cos 139°, *f*) cos 288°, *g*) cos 538°, *h*) cos 110° 38′ 42″;
i) tang 91°, *k*) tang 199°, *l*) tang 620°, *m*) tang 159° 9′ 30″;
n) cot 163°, *o*) cot 315°, *p*) cot 726°, *q*) cot 128° 41′ 55″.

5. Si calcolino le altre funzioni dell'angolo α, dato che sia:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, *b*) $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$;

c) $\operatorname{tang} \alpha = \dfrac{n}{\sqrt{1+2n}}$, *d*) $\cot \alpha = \dfrac{\sqrt{m^2+2mn}}{m}$.

6. Si trasformi

a) $\cos \alpha + \dfrac{\cot \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ in una espressione che non contenga che $\operatorname{sen} \alpha$;

b) $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \dfrac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \alpha}$ in una espressione che non contenga che $\cos \alpha$;

c) $1 - \cos \alpha^2 \cot \alpha^2 (\operatorname{tang} \alpha^2 - 1)$ in una espressione che non contenga che $\operatorname{tang} \alpha$;

d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha^2} - \operatorname{tang} \alpha^2 (\cot \alpha^2 - 1)$ in una espressione che non contenga che $\cot \alpha$.

Si dimostri l'esattezza delle seguenti formole:

7. $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$. 8. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tang} \alpha^2}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$.

9. $\operatorname{tang}(45^\circ \pm \alpha) = \dfrac{1 \pm \operatorname{tang} \alpha}{1 \mp \operatorname{tang} \alpha}$. 10. $\cot(45^\circ \pm \alpha) = \dfrac{\cot \alpha \mp 1}{\cot \alpha \pm 1}$.

11. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tang} \alpha$. 12. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot \alpha$.

13. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \dfrac{1 - \operatorname{tang} \alpha^2}{2}$. 14. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \dfrac{\cot \alpha^2 - 1}{2}$.

15. $\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$. 16. $\cot \alpha \pm \cot \beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\beta \pm \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$.

17. $\dfrac{\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta}{\cot \alpha \pm \cot \beta} = \pm \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta$.

18. $\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2} \pm \cos \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{1 \pm \operatorname{sen} \alpha}$.

19. $\operatorname{sen}(\beta + \gamma - \alpha) + \operatorname{sen}(\alpha + \gamma - \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta - \gamma) - \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma$.

20. $\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

21. $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha + \ldots + \operatorname{sen} n\alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{n\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$.

22. $\operatorname{sen} \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \dfrac{\cos \frac{n\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$.

Le formole 21. e 22. risultano dalle formole 36) e 34) del § 358, ponendo nelle stesse $m\alpha + \frac{3\alpha}{2}$ ed $m\alpha + \frac{\alpha}{2}$ invece di φ e ψ, sostituendo poi a mano a mano per m i valori di 0, 1, 2... $n-1$ e sommando le equazioni così ottenute.

Si dimostri di più per $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ che:

23. $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma = 4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}$.

24. $\cos \dfrac{\alpha}{2} + \cos \dfrac{\beta}{2} + \cos \dfrac{\gamma}{2} = 4 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{4} \cos \dfrac{\alpha + \gamma}{4} \cos \dfrac{\beta + \gamma}{4}$.

25. $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \gamma$.

26. $\cot \dfrac{\alpha}{2} + \cot \dfrac{\beta}{2} + \cot \dfrac{\gamma}{2} = \cot \dfrac{\alpha}{2} \cot \dfrac{\beta}{2} \cot \dfrac{\gamma}{2}$.

Come si potrebbero ottenere per mezzo della sostituzione le formole 24. e 26. delle formole 23. e 25.?

Si trovino a mezzo delle tavole logaritmiche i seguenti logaritmi:

27. log sen $38^\circ 17'$
28. log sen $17^\circ 8' 20''$
29. log sen $51^\circ 58' 33''$
30. log sen $0^\circ 48' 37''$
31. log tang $1^\circ 25' 40''$
32. log tang $69^\circ 27' 39''$
33. log tang $23^\circ 23' 23''$
34. log tang $89^\circ 19' 31''$
35. log cos $57^\circ 48'$
36. log cos $39^\circ 9' 47''$
37. log cos $50^\circ 9' 9''$
38. log cos $101^\circ 2' 12''$
39. log cot $77^\circ 31'$
40. log cot $8^\circ 8' 54''$
41. log cot $0^\circ 40' 29''$
42. log cot $153^\circ 29' 8''$

Si cerchino gli angoli corrispondenti ai seguenti logaritmi:

43. $\log \operatorname{sen} x = 9{\cdot}49654 - 10$
44. $\log \operatorname{sen} y = 9{\cdot}79358 - 10$
45. $\log \operatorname{sen} z = 8{\cdot}74109 - 10$
46. $\log \operatorname{sen} A = 9{\cdot}99836 - 10$
47. $\log \operatorname{tang} \alpha = 10{\cdot}13264 - 10$
48. $\log \operatorname{tang} \beta = 10{\cdot}64570 - 10$
49. $\log \operatorname{tang} \gamma = 8{\cdot}95629 - 10$
50. $\log \operatorname{tang} B = 8{\cdot}47380 - 10$
51. $\log \cos C = 8{\cdot}49033 - 10$
52. $\log \cos x = 9{\cdot}17973 - 10$
53. $\log \cos y = 9{\cdot}97706 - 10$
54. $\log \cos z = 8{\cdot}12544 - 10$
55. $\log \cot \alpha = 11{\cdot}44266 - 10$
56. $\log \cot \beta = 10{\cdot}21671 - 10$
57. $\log \cot \gamma = 8{\cdot}90828 - 10$
58. $\log \cot A = 12{\cdot}44033 - 10$

Si sciolgano le seguenti equazioni:

59. $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tang} x$.
60. $a \operatorname{sen} x = b \cot x$.
61. $\operatorname{sen} x = \cos x^2$.
62. $\operatorname{tang} x - \cot x = a$.
63. $2 (\operatorname{tang} x + \cot x) = 5$.
64. $2 \operatorname{tang} y + 3 \cot y = 5$.
65. $\operatorname{sen} (\varphi - x) = \cos (\varphi + x)$.
66. $\operatorname{sen} (\alpha - x) = \cos (\beta + x)$.
67. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tang} x = 1 + \cos x$.
68. $\cot x - \cos x = 1 - \operatorname{sen} x$.
69. $a \operatorname{sen} x^2 + b \cos x^2 = c$.
70. $(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen} 2x$.
71. $a (1 + \cos x) = b \cos \frac{1}{2} x$.
72. $a (1 - \cos 2x) = b \operatorname{sen} 2x$.
73. $a (\cos y + \cot y) = b (1 + \operatorname{sen} y)$.
74. $a \operatorname{sen} x^2 + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos x^2 = 0$.
75. $\operatorname{sen} x = a \operatorname{sen} y$,
$\operatorname{tang} x = b \operatorname{tang} y$.
76. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$,
$\cos x + \cos y = b$.
77. $x + y = \alpha$,
$\cos x + \cos y = m$.
78. $x + y = a$,
$\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = n$.
79. $x + y = 120^\circ$,
$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0{\cdot}5$.
80. $x + y = \alpha$,
$a \operatorname{tang} x = b \operatorname{tang} y$.

CAPITOLO SECONDO.

Trigonometria piana.

I. Soluzione dei triangoli piani.

§ 363. *Risolvere un triangolo* significa: dati gli elementi determinanti un triangolo, trovare gli altri per mezzo del calcolo.

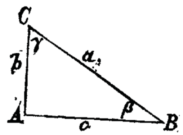
Innanzi tutto farà mestieri di derivare dalle proprietà del triangolo delle equazioni che esprimono le relazioni esistenti fra i lati e le funzioni degli angoli; sciolte queste equazioni nelle quali si devono rinvenire tanto gli elementi determinanti quanto quegli incogniti del triangolo, si troveranno le grandezze ricercate.

1. Triangoli rettangoli.

Teoremi trigonometrici sul triangolo rettangolo.

§ 364. Per la soluzione d'un triangolo rettangolo si richieggono due elementi dello stesso fra di loro indipendenti.

Fig. 174



Sia il triangolo BAC (fig. 174) retto in A. Si indichino, come faremo sempre in seguito, con a l'ipotenusa BC, con b e c i due cateti AC ed AB, e con β e γ gli angoli opposti a questi due cateti.

Dalle definizioni date al § 343 segue immediatamente:

1. $b = a \operatorname{sen} \beta$, $\quad c = a \operatorname{sen} \gamma$;

vale a dire: *ogni cateto è eguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto a quel cateto.*

2. $b = a \cos \gamma$, $\quad c = a \cos \beta$;

vale a dire: *ogni cateto è eguale al prodotto dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente a quel cateto.*

3. $b = c \operatorname{tang} \beta$, $\quad c = b \operatorname{tang} \gamma$;

cioè: *ogni cateto è eguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.*

4. $b = c \cot \gamma$, $\quad c = b \cot \beta$;

cioè: *ogni cateto è eguale al prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo adiacente al primo cateto.*

A questi tre teoremi trigonometrici va aggiunto il teorema di Pitagora $a^2 = b^2 + c^2$, il quale esprime il nesso esistente fra i tre lati d'un triangolo rettangolo.

Casi di soluzione.

§ 365. I. *Dati i due cateti* b *e* c.

Da $b = c \operatorname{tang} \beta = c \cot \gamma$ si ricava per il calcolo degli angoli

$$\operatorname{tang} \beta = \cot \gamma = \frac{b}{c}.$$

Per la determinazione dell'ipotenusa si ha $a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$.

Siano p. e. $b = 325$, $c = 418$.

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{b}{c} \qquad\qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$\log b = 2 \cdot 51\ 188 \qquad\qquad \log b = 2 \cdot 51\ 188$$

$$\log c = 2 \cdot 62\ 118 \qquad\qquad \log \operatorname{sen} \beta = 9 \cdot 78\ 803 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \beta = 9 \cdot 89\ 070 - 10 \qquad\qquad \log a = 2 \cdot 72\ 385$$

$$\beta = 37^0\, 51'\, 54''; \text{ quindi} \qquad\qquad a = 529 \cdot 48.$$

$$\gamma = 52^0\ \ 8'\ \ 6''.$$

II. *Dati l'ipotenusa* a *ed il cateto* b.

Alla determinazione degli elementi che mancano servono le formole:

$$\operatorname{sen} \beta = \cos \gamma = \frac{b}{a} \text{ e } c = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta}, \text{ ovvero } c = \sqrt{(a+b)\ (a-b)}.$$

III. *Dati un cateto* b *ed un angolo*, p. e. β.

$$\gamma = 90^0 - \beta,\ c = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta},\ a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}.$$

IV. *Dati l'ipotenusa* a *ed un angolo*, p. e. β.

$$\gamma = 90^0 - \beta,\ b = a \operatorname{sen} \beta,\ c = a \cos \beta.$$

§ 366. *Calcolo dell'area d'un triangolo rettangolo.*

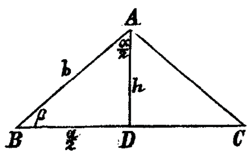
A seconda dei quattro casi enunciati nell'antecedente paragrafo, le seguenti formole si presteranno al calcolo dell'area s d'un triangolo rettangolo:

$$s = \frac{b\,c}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{(a+b)\ (a-b)} = \frac{b^2}{2 \operatorname{tang} \beta} = \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2\beta.$$

2. Triangoli isosceli.

§ 367. Per risolvere un triangolo isoscele ABC (fig. 175) fa d'uopo che dello stesso sieno dati due elementi fra di loro indipendenti.

Fig. 175.



Siccome l'altezza AD abbassata sulla base BC d'un triangolo isoscele divide questo in due triangoli rettangoli eguali aventi per ipotenusa il crure, per cateti la metà della base e l'altezza, e per angoli acuti l'angolo alla base e la metà dell'angolo al vertice del triangolo isoscele, ne viene che ogni problema

relativo al triangolo isoscele ad altro non si riduce che alla soluzione d'un triangolo rettangolo.

Se a è la base, b il crure, h l'altezza, α l'angolo al vertice, β l'angolo alla base ed s l'area d'un triangolo isoscele ABC, le seguenti equazioni, dedotte dal triangolo rettangolo ADB (fig. 175), serviranno al calcolo:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0, \qquad a = 2\,b \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 2\,b \cos \beta.$$

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \beta = b \operatorname{sen} \beta.$$

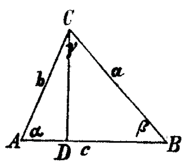
$$s = \frac{a\,h}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tang} \beta = \frac{b^2}{2} \operatorname{sen} 2\,\beta.$$

3. Triangoli in genere.

Teoremi e formole trigonometriche.

§ 368. *In ogni triangolo i lati stanno come i seni degli angoli a loro opposti.*

Fig. 176.



Si abbassi $CD \perp AB$ (fig. 176) e dai triangoli rettangoli BDC ed ADC si ricaverà:

$$CD = BC \,.\, \operatorname{sen} B, \text{ e } CD = AC \,.\, \operatorname{sen} A, \text{ quindi}$$

$$BC \,.\, \operatorname{sen} B = AC \,.\, \operatorname{sen} A,$$

ovvero, ponendo qui, come faremo sempre in seguito, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, e segnando con α, β e γ gli angoli opposti a questi lati,

$$a \operatorname{sen} \beta = b \operatorname{sen} \alpha, \text{ ovvero}$$

Similmente si ricava
$$\left.\begin{aligned} a : b &= \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \beta. \\ a : c &= \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \gamma, \\ b : c &= \operatorname{sen} \beta : \operatorname{sen} \gamma. \end{aligned}\right\} \ldots \text{I}).$$

Queste espressioni rimangono inalterate anche se un angolo, p. e. α, fosse ottuso e la normale CD cadesse quindi sul prolungamento della BA; infatti, in tal caso si avrebbe $a : b = \operatorname{sen} (180^0 - \alpha) : \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \beta$.

§ 369. *In ogni triangolo il quadrato d'un lato è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo che comprendono.*

Si conduca (fig. 176) $CD \perp AB$, e sarà

$$a^2 = CD^2 + BD^2.$$

Ma $CD = b \operatorname{sen} \alpha$, $BD = AB - AD = c - b \cos \alpha$; laonde

$$a^2 = b^2 \operatorname{sen} \alpha^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha + b^2 \cos \alpha^2, \text{ ovvero, essendo}$$

$$b^2 (\operatorname{sen} \alpha^2 + \cos \alpha^2) = b^2,$$

Similmente si ha
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha. \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma. \end{aligned}\right\} \ldots \text{II}).$$

Se la normale CD cade al di fuori del triangolo, si ha $CD = b \operatorname{sen}(180^0 - \alpha)$ e $BD = c + b\cos(180^0 - \alpha)$, per cui anche in questo caso si perviene allo stesso risultato di prima; dunque le equazioni del gruppo II) valgono in generale.

Scolio. Il teorema testè dimostrato si potrebbe del pari derivare direttamente dal § 158. Infatti, dai due teoremi colà esposti si scorge essere $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2c\,.\,CD$, a seconda che l'angolo α è acuto od ottuso; ma $AD = b\cos\alpha$, rispettivamente $= b\cos(180^0 - \alpha)$, per cui in tutti e due i casi sarà
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\,\cos\alpha.$$

§ 370. Dalle equazioni del gruppo II) si possono dedurre delle formole importanti per il calcolo logaritmico. Dalla prima equazione si ha:
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ quindi}$$
$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$
$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$
ma giusta le formole 24) e 23) del § 356
$$1 - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ ed } 1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2, \text{ quindi}$$
$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Se, come al § 168, 3, si pone per brevità $a + b + c = 2p$, si ha
$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$
e perciò
$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Similmente si ricava:
$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \qquad \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$
$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$
$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}; \qquad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \quad \ldots \text{III}).$$

§ 371. ***Equazioni di Mollweide.***

Dalla equazione seconda e terza del gruppo I) del § 368 segue
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$
ovvero, essendo $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$ e quindi $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma$,
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}.$$
Nella stessa guisa si ha
$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}. \quad \ldots \text{IV}).$$
Si enuncino queste formole in parole.

§ 372. Dalla divisione delle equazioni di Mollweide del gruppo IV) si ottiene
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \text{ dunque}$$
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\,.\,\cot\frac{\gamma}{2} \ldots \text{V}),$$
vale a dire: *in ogni triangolo la tangente della semidifferenza di due angoli è eguale al quoziente della differenza e della somma dei due lati opposti, moltiplicato per la cotangente della metà del terzo angolo.*

Casi di soluzione.

§ 373. I. *Dati un lato* a *e due angoli* β *e* γ.

Innanzi tutto si ottiene il terzo angolo $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$; di più si ha $b : a = \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\alpha$ e $c : a = \operatorname{sen}\gamma : \operatorname{sen}\alpha$, delle quali equazioni si ricava
$$b = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ e } c = \frac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

P. e. $a = 788$, $\beta = 55^0\,43'\,18''$, $\gamma = 72^0\,12'\,35''$; sarà allora $\alpha = 52^0\,4'\,7''$.

$$b = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad\qquad c = \frac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$\log a = 2{\cdot}89\ 653$	$\log a = 2{\cdot}89\ 653$
$\log\operatorname{sen}\beta = 9{\cdot}91\ 714 - 10$	$\log\operatorname{sen}\gamma = 9{\cdot}97\ 872 - 10$
$2{\cdot}81\ 367$	$2{\cdot}87\ 525$
$\log\operatorname{sen}\alpha = 9{\cdot}89\ 694 - 10$	$\log\operatorname{sen}\alpha = 9{\cdot}89\ 694 - 10$
$\log b = 2{\cdot}91\ 673$	$\log c = 2{\cdot}97\ 831$
$b = 825{\cdot}52$	$c = 951{\cdot}28.$

§ 374. II. *Dati due lati* a *e* b *e l'angolo* γ *da essi rinchiuso.*

Dalla equazione
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\,.\,\cot\frac{\gamma}{2},$$
sviluppata al § 372, si ricava il valore di $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, il quale unito all'altro valore di $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, dà
$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \alpha \text{ e } \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \beta.$$

Il terzo lato c si ottiene poi dall'equazione $c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$, ovvero più speditamente applicando le equazioni di Mollweide del gruppo IV), $c = \frac{(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, ovvero $c = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$.

P. e. $a = 748$, $b = 375$, $\gamma = 63^\circ\, 35'\, 30''$. Si avrà

$$\begin{array}{rl} a+b = & 1123 \\ a-b = & 373 \\ \frac{1}{2}\gamma = & 31^\circ\, 47'\, 45'' \\ \hline \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = & 58^\circ\, 12'\, 15'' \\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = & 28^\circ\, 10'\, 54'' \\ \hline \alpha = & 86^\circ\, 23'\, 9'' \\ \beta = & 30^\circ\, 1'\, 21'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{1}{2}\gamma \\ \log (a-b) = & 2 \cdot 57\ 171 \\ \log \cot \frac{1}{2}\gamma = & 10 \cdot 20\ 766 - 10 \\ \hline & 12 \cdot 77\ 937 - 10 \\ \log (a+b) = & 3 \cdot 05\ 038 \\ \hline \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 9 \cdot 72\ 899 - 10 \\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 28^\circ\, 10'\, 54''. \end{array}$$

Per il calcolo di c si ha, secondo le equazioni di Mollweide,

$$\begin{array}{rlcrl} \log (a+b) = & 3 \cdot 05\ 038, & \text{ovvero} & \log (a-b) = & 2 \cdot 57\ 171 \\ \log \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = & 9 \cdot 72\ 172 - 10 & & \log \cos \frac{\gamma}{2} = & 9 \cdot 92\ 938 - 10 \\ \hline & 12 \cdot 77\ 210 - 10 & & & 12 \cdot 50\ 109 - 10 \\ \log \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 9 \cdot 94\ 520 - 10 & & \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = & 9 \cdot 67\ 419 - 10 \\ \hline \log c = & 2 \cdot 82\ 690 & & \log c = & 2 \cdot 82\ 690 \end{array}$$

$$c = 671 \cdot 27.$$

La consonanza dei due risultati comprova la giustezza del calcolo.

Scolî. *a*) Ognuno dei due angoli α e β si potrebbe calcolare direttamente da a, b e γ.

Da $a : b = \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \beta$ si ricava $b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta$, ovvero

$$\begin{aligned} b \operatorname{sen} \alpha &= a \operatorname{sen} (\alpha + \gamma) \\ &= a \operatorname{sen} \alpha \cos \gamma + a \cos \alpha \operatorname{sen} \gamma, \text{ dunque} \end{aligned}$$

$b \operatorname{tang} \alpha = a \operatorname{tang} \alpha \cos \gamma + a \operatorname{sen} \gamma$, e perciò

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b - a \cos \gamma}.$$

Il calcolo fatto dietro questa formola non potrebbe essere continuato per mezzo dei logaritmi; ciò riesce possibile colla introduzione d'un angolo ausiliario.

Se per $\gamma < 90^\circ$ si determina un angolo ausiliario φ tale, che sia $\frac{a \cos \gamma}{b} = \operatorname{sen} \varphi^2$, si ottiene $\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{b \cos \varphi^2}$.

Se per $\gamma > 90^\circ$ si sceglie un angolo ausiliario ψ tale, che sia $-\frac{a \cos \gamma}{b} = \operatorname{tang} \psi^2$, si ottiene $\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma \cos \psi^2}{b}$.

b) Anche il terzo lato c si può calcolare da a, b e γ indipendentemente dagli angoli α e β. Infatti

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\gamma^2\right) \quad (\S\ 356,\ 24) \\ &= (a-b)^2 + 4ab \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\gamma^2 = (a-b)^2 . \left[1 + \frac{4ab \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}\right]. \end{aligned}$$

Introducendo ora un angolo ausiliario φ tale, che sia $\frac{4ab \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2} = \operatorname{tang} \varphi^2$, si ottiene $c^2 = \frac{(a-b)^2}{\cos \varphi^2}$, da cui $c = \frac{a-b}{\cos \varphi}$.

§ 375. III. *Dati due lati* a *e* b, *dei quali* a $>$ b, *e l'angolo* α *opposto al lato maggiore.*

Da $a : b = \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \beta$ si ricava $\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$.

Siccome β è determinato per mezzo del seno, si potrebbe prendere tanto l'angolo acuto quanto l'angolo ottuso suo supplementare corrispondente a quel seno (§ 351, scolio); non vi ha però ambiguità, dacchè essendo $a > b$, deve essere $\alpha > \beta$, quindi β un angolo acuto qualunque sia il valore di α.

Da α e β poi si ottiene $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Il lato c si ricava dalla equazione $c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$.

P. e. $a = 1238$, $b = 519$, $\alpha = 78^\circ\, 17'\, 20''$. Dalle formole qui sopra esposte si ottiene

$\beta = 24^\circ\, 14'\, 13''$, quindi $\gamma = 77^\circ\, 28'\, 27''$, e $c = 1234 \cdot 2$.

Se oltre ai lati $a = 1238$ e $b = 519$ fosse dato l'angolo opposto al lato minore $\beta = 24^\circ\, 14'\, 13''$, si ricaverebbe dall'equazione $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b}$, potendo essere α un angolo acuto od ottuso, o

$$\begin{array}{lll} \alpha = 78^\circ\, 17'\, 20'', & \text{ovvero} & \alpha = 101^\circ\, 42'\, 40'', \text{ e quindi} \\ \gamma = 77^\circ\, 28'\, 27'', & \quad " & \gamma = 54^\circ\, 3'\, 7''. \end{array}$$

Dalla equazione $c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$ risulta, o $c = 1234 \cdot 2$, ovvero $c = 1023 \cdot 5$. Il problema ha quindi due soluzioni.

§ 376. IV. *Dati i tre lati* a, b *e* c.

Alla determinazione degli angoli servono le formole del gruppo III) del § 370.

Se la metà dell'angolo cercato s'avvicina di molto a 0°, la formola del coseno non lo determina colla dovuta esattezza, poichè i coseni degli angoli che si accostano a 0° differiscono ben poco fra loro. Lo stesso dicasi della formola del seno per quegli angoli la cui metà si avvicina a 90°. Appropriata riesce in tutti i casi la formola della tangente.

P. e. $a = 330 \cdot 1$, $b = 412 \cdot 2$, $c = 371 \cdot 3$.

Applicando la formola della tangente si avrà

$$\begin{array}{rl} a = & 330 \cdot 1 \\ b = & 412\ 2 \\ c = & \underline{371 \cdot 3} \\ a+b+c = & 1113 \cdot 6 \\ p = & 556 \cdot 8 \\ p-a = & 226 \cdot 7 \\ p-b = & 144 \cdot 6 \\ p-c = & 185 \cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = & \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \log(p-b) = & 2 \cdot 16\,017 \\ \log(p-c) = & \underline{2 \cdot 26\,834} \\ & 4 \cdot 42\,851 \\ \log p = & 2 \cdot 74\,570 \\ \log(p-a) = & \underline{2 \cdot 35\,545} \\ & 19 \cdot 32\,736 - 20 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = & 9 \cdot 66\,368 - 10 \\ \tfrac{1}{2}\alpha = & 24^0\,44'\,55'' \\ \alpha = & 49^0\,29'\,50'' \end{array}$$

Del pari dalle formole per tang $\frac{1}{2}\beta$ e tang $\frac{1}{2}\gamma$ si ottiene

$$\beta = 71^0\,42'\,42'' \text{ e } \gamma = 58^0\,47'\,28''.$$

Scolio. Se nel caso in questione fossero da determinarsi tutti e tre gli angoli, il relativo calcolo si semplificherebbe coll'introduzione del raggio r della circonferenza iscritta al triangolo.

Essendo $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ (§ 172, 2), le formole delle tangenti delle metà degli angoli, esposte al § 370, si trasformano in:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{r}{p-c}.$$

P. e.
$$\begin{array}{rl} a = & 1011 \\ b = & 956 \\ c = & \underline{533} \\ 2p = & 2500 \\ p = & 1250 \\ p-a = & 239 \\ p-b = & 294 \\ p-c = & 717 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(p-a) = & 2 \cdot 37\,840 \\ \log(p-b) = & 2 \cdot 46\,835 \\ \log(p-c) = & \underline{2 \cdot 85\,552} \\ & 7 \cdot 70\,227 \\ \log p = & \underline{3 \cdot 09\,691} \\ \log r^2 = & 4 \cdot 60\,536 \\ r = & 2 \cdot 30\,268 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = & 9 \cdot 92\,428 - 10 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = & 9 \cdot 83\,433 - 10 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = & 9 \cdot 44\,716 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \tfrac{1}{2}\alpha = 40^0\ \ 1'\,48'', & \text{quindi} & \alpha = 80^0\ \ 3'\,36''; \\ \tfrac{1}{2}\beta = 34^0\,19'\,40'', & \text{"} & \beta = 68^0\,39'\,20''; \\ \tfrac{1}{2}\gamma = 15^0\,38'\,32'', & \text{"} & \gamma = 31^0\,17'\ \ 4''. \end{array}$$

§ 377. *Calcolo dell'area* s *d'un triangolo obliquangolo.*

Se h è l'altezza corrispondente al lato a, si ha $h = b \operatorname{sen} \gamma$, quindi

$$s = \frac{ah}{2} = \frac{ab}{2} \operatorname{sen} \gamma \ldots 1),$$

cioè: *L'area d'un triangolo è eguale al semiprodotto di due lati moltiplicato per il seno dell'angolo da essi compreso.*

Nel secondo caso di soluzione basterebbero gli elementi dati per ottenere direttamente per mezzo di questo teorema l'area del triangolo; negli altri casi farà mestieri innanzi tutto trovare gli elementi non dati della suddetta formola.

Per il quarto caso anche la Planimetria offre (§ 168, 3) una formola adatta al calcolo immediato dell'area del triangolo; tale formola, del resto, si può derivare del pari in via trigonometrica. Infatti

$$s = \frac{ab}{2} \operatorname{sen} \gamma = \frac{ab}{2} \,.\, 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma,$$

e perciò, avuto riguardo alla formola III) del § 370,

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ldots 2)$$

Se per la determinazione degli angoli fosse stato utilizzato il raggio r della circonferenza iscritta al triangolo (§ 376, scolio), l'area del triangolo (§ 172, 2) sarebbe espressa dalla semplice formola

$$s = rp \ldots 3).$$

4. Problemi per esercizio.

§ 378. *Esempî numerici per il calcolo di triangoli rettangoli.*

	a	b	c	β	γ	s
1.	233	105	208	$26^0\,47'\ \ 6''$	$63^0\,12'\,54''$	10920
2.	397	228	325	$35^0\ \ 3'\ \ 4''$	$54^0\,56'\,56''$	37050
3.	505	336	377	$41^0\,42'\,32''$	$48^0\,17'\,28''$	63336
4.	56·5	39·6	40·3	$44^0\,29'\,53''$	$45^0\,30'\ \ 7''$	797·94
5.	3·794	2·083	3·171	$33^0\,18'\ \ 2''$	$56^0\,41'\,58''$	3·3026
6.	2·3456	1·5988	1·8828	$36^0\,36'\,36''$	$53^0\,23'\,24''$	1·31685

7. In un triangolo rettangolo a è l'ipotenusa e β un angolo acuto; si determinino l'altezza h abbassata sulla ipotenusa ed i segmenti risultanti p e q dell'ipotenusa adiacenti ai due cateti b e c.

Risolvere un triangolo rettangolo di cui siano dati:

8. p ed h;
9. p e b;
10. p e β;
11. h e β;
12. $b + c = s$ e β;
13. $b - c = d$ e β;
14. $a + b = s$ e β;
15. $a - b = d$ e β;
16. $a + b + c = 2s$ e β;
17. s (area) e β.

§ 379. *Esempî numerici per il calcolo di triangoli isosceli.*

	b	c	a	α	β	s
1.	88	125	117	$41^0\,13'\,10''$	$69^0\,23'\,25''$	5148
2.	240	241	221	$59^0\,43'\,32''$	$60^0\ \ 8'\,14''$	25080

	b	c	a	α	β	s
3.	672	505	377	83° 25′ 4″	48° 17′ 28″	126672
4.	3·12	2·05	1·33	99° 6′ 2″	40° 26′ 59″	2·0748
5.	4·5	2·399	0·834	139° 39′ 20″	20° 20′ 20″	1·8765

6. In un triangolo isoscele la somma della base e dell'altezza abbassata sulla stessa è doppia del crure; si calcolino gli angoli.

§ 380. *Esempî numerici per il calcolo di triangoli obliquangoli.*

	a	b	c	α	β	γ	s
1.	17	113	120	7°37′42″	61°55′38″	110°26′40″	900
2.	119	145	156	46°23′50″	61°55′39″	71°40′31″	8190
3.	388	389	195	75°10′52″	75°45′ 0″	29° 4′ 8″	36666
4.	569	281	680	55°17′31″	23°57′ 8″	100°45′21″	78540
5.	330·1	412·2	371·3	49°29′50″	71°42′42″	58°47′28″	58188
6.	15·47	17·39	22·88	42°30′44″	49°25′49″	88° 3′27″	134·43
7.	1·275	1·2753	0·0565	88°24′10″	89° 3′30″	2°32′20″	0·07203
8.	1·2344	1·4303	0·9332	58°32′51″	81°17′36″	40° 9′33″	0·56932

In un triangolo ABC (fig. 176) sia $CD = h$, $BD = p$, $AD = q$. Si risolva il triangolo, se sono dati:

9. a, b ed h; 10. b, h e p;
11. p, q ed h; 12. h, α e β;
13. $a + b = s$, h e β; 14. $a - b = d$, h ed α.

Risolvere un triangolo, noti che siano:

15. $a + b = s$, c e γ; 16. $a - b = d$, c e γ;
17. $a + b = s$, c ed $\alpha - \beta$; 18. $a - b = d$, c ed $\alpha - \beta$,

Negli esempî 15. e 17. si prolunghi AC di $CD = BC$, e si calcoli il triangolo ausiliario ABD. Negli esempî 16. e 18. si sottri da BC il segmento $CD = AC$, e si basi il calcolo sul triangolo ausiliario ACD.

Risolvere un triangolo, dati che siano:

19. $a + b = s$, α e β; 20. $a - b = d$, α e β;
21. $a + b = s$, γ e $\alpha - \beta$; 22. $a - b = d$, γ ed $\alpha - \beta$.

23. Di un triangolo si conoscono un lato a ed i tre angoli α, β e γ; si calcolino l'altezza h abbassata sul lato a e l'area s del triangolo.

$$h = \frac{a \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad s = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

24. Calcolare i tre lati d'un triangolo di cui siano dati l'area s ed i tre angoli α, β e γ.

25. Essendo noti il perimetro $2p$ e gli angoli α, β e γ d'un triangolo, calcolarne i lati e l'area.

Applicando i §§ 368 e 362, 23 si ha:

$$a = \frac{p \, . \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma}, \quad b = \frac{p \, . \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \gamma}, \quad c = \frac{p \, . \operatorname{sen} \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta};$$

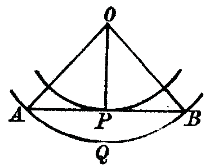
$$s = p^2 \, . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \alpha \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \gamma.$$

II. Applicazione della Trigonometria piana.

1. Problemi di Planimetria.

§ 381. In un cerchio (fig. 177) di raggio $OA = r$, $AB = c$ è la corda, $AOB = \alpha$ è l'angolo al centro corrispondente, Δ l'area del triangolo AOB, S ed s le aree del settore circolare AOB e del segmento circolare $ABQA$.

Fig. 177.



1. Dati r e c, trovare α.

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{c}{2r}.$$

2. Dati r ed α, trovare c, Δ, S ed s

$$c = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \alpha,$$

$$\Delta = \frac{r^2}{2} \operatorname{sen} \alpha, \quad S = \frac{r^2 \pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{180^0} \ (\S\ 187),$$

$$s = S - \Delta = \frac{r^2}{2} \left\{ \frac{\pi \alpha}{180^0} - \operatorname{sen} \alpha \right\}.$$

3. Dati c ed α, trovare r, Δ, S ed s.

$$r = \frac{c}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}, \quad \Delta = \frac{c^2}{4} \cot \tfrac{1}{2} \alpha, \quad S = \frac{c^2 \pi}{8 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{180^0},$$

$$s = S - \Delta = \frac{c^2}{4} \left\{ \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{180^0} - \cot \tfrac{1}{2} \alpha \right\}.$$

§ 382. *Sia* l *il lato d'un poligono regolare di* n *lati,* s *la sua area,* R *ed* r *i raggi della circonferenza circoscrittagli e della circonferenza iscrittagli; dato* n *ed una di queste grandezze, calcolare le altre.*

Nel triangolo rettangolo APO (fig 177) si ha:

$$AP = \frac{l}{2}, \quad AOP = \frac{180^0}{n}, \quad OP = r \text{ ed } OA = R. \text{ Sarà perciò}$$

$$\frac{l}{2} = r \operatorname{tang} \frac{180^0}{n} = R \operatorname{sen} \frac{180^0}{n}; \quad r = R \cos \frac{180^0}{n};$$

$$s = nl \, . \frac{r}{2} = \frac{nl^2}{4} \cot \frac{180^0}{n} = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^0}{n} = \frac{nR^2}{2} \operatorname{sen} \frac{360^0}{n}.$$

§ 383. *Calcolare i lati* a, b *e* c *d'un triangolo di cui siano noti gli angoli* α, β *e* γ, *ed il raggio* R *della circonferenza circoscrittagli.*

Se (fig. 106) $CD = 2R$ è il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, si ha dal triangolo rettangolo CBD:

$$BC = CD \, . \operatorname{sen} BDC, \text{ ovvero, poichè angolo } BDC = BAC = \alpha,$$

$$a = 2R \operatorname{sen} \alpha.$$

Similmente si ottiene

$$b = 2R \operatorname{sen} \beta, \qquad c = 2R \operatorname{sen} \gamma.$$

§ 384. *Dati i tre angoli* α, β *e* γ *d'un triangolo ed il raggio* r *della circonferenza iscrittagli, calcolare i lati del triangolo.*

Se (fig. 107) $OD = OE = OF = r$ è il raggio della circonferenza iscritta al triangolo ABC, sarà

$$BE = r \cot \tfrac{1}{2}\beta,\quad EC = r \cot \tfrac{1}{2}\gamma;\ \text{quindi}$$

$$a = r(\cot \tfrac{1}{2}\beta + \cot \tfrac{1}{2}\gamma) = \frac{r \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r \cos \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma}.$$

Similmente si ottiene

$$b = \frac{r \cos \frac{1}{2}\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma},\qquad c = \frac{r \cos \frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta}.$$

§ 385. 1. *Calcolare l'area* s *d'un parallelogrammo, se dello stesso sono dati due lati* a *e* b *e l'angolo* α *da essi racchiuso.*

Si ottiene $s = ab \operatorname{sen} \alpha$.

2. *Determinare l'area* s *d'un quadrilatero di cui si conoscono le diagonali* p *e* q *ed il loro angolo* φ.

Si determinino, giusta il § 377, 1, le aree dei quattro triangoli in cui resta diviso il quadrilatero a mezzo delle diagonali, e fattane la somma, si avrà

$$s = \frac{pq}{2} \operatorname{sen} \varphi.$$

2. Problemi di Geometria pratica.

§ 386. *Determinare l'altezza* a *d'un oggetto* (d'una torre) A B.

1. Se il suo piede A è accessibile.

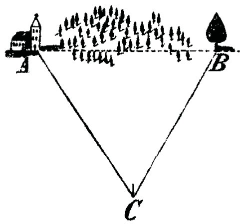
Si misurino, partendo da un punto C, un segmento $CA = b$ ed in C l'angolo d'elevazione $ACB = \alpha$; risulterà $a = b \operatorname{tang} \alpha$.

2. Se il suo piede A è inaccessibile.

Si misurino in un piano verticale passante per B il segmento $CD = b$ quale base, e nelle sue estremità gli angoli di elevazione $ACB = \alpha$ ed $ADB = \beta$; sarà allora $a = \dfrac{b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$.

§ 387. *Dati sul terreno due punti* A *e* B (fig. 178), *trovarne la distanza, se questa a motivo d'un ostacolo non si possa direttamente determinare.*

Fig. 178.



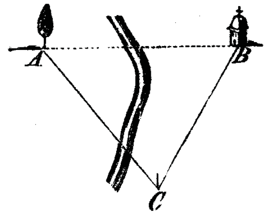
Si misurino, a partire da un terzo punto C, i segmenti $CB = a$ e $CA = b$, e l'angolo $ACB = \gamma$. Dal triangolo ABC che ne risulta si ottiene

$$AB = \frac{a-b}{\cos \varphi}\ (\S\ 374,\ \text{coroll. } b),$$

$$\text{in cui } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma \sqrt{ab}}{a-b}.$$

§ 388. *Determinare sul terreno la distanza di due punti* A *e* B (fig. 179) *se di questi uno solo è accessibile.*

Fig. 179.



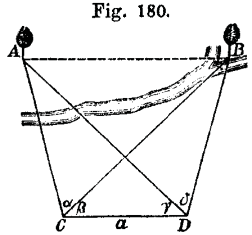
Si scelga un terzo punto fisso C tale che se ne possa misurare la distanza da uno dei punti A e B; si misurino il segmento $BC = a$ e gli angoli $B = \beta$ e $C = \gamma$. Dal triangolo ABC si ottiene, giusta il § 373,

$$AB = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}.$$

§ 389. *Determinare sul terreno la distanza di due punti* A *e* B (fig. 180) *se degli stessi nessuno è accessibile.*

Si scelgano due punti fissi C e D, si determini la lunghezza della retta (base) $CD = a$ che gli congiunge, e alle estremità della stessa si misurino gli angoli $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $ADC = \gamma$ ed $ADB = \delta$. Si avrà

Fig. 180.



$$\text{nel } \triangle ACD \,..\, AD = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)} = b\ (\S 373),$$

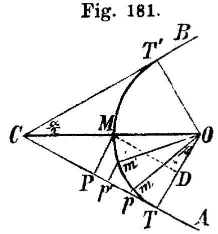
$$\text{„ } \triangle BCD \,..\, BD = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma + \delta)} = c\ (\S 373),$$

$$\text{„ } \triangle ABD \,..\, AB = \frac{b-c}{\cos \varphi}\ (\S\ 374,\ \text{coroll. } b),$$

$$\text{ove } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta \sqrt{bc}}{bc}.$$

§ 390. *Nel tracciato d'una ferrovia furono individuate le rette* A C *e* B C (fig. 181) *e misurato l'angolo* A C B $= \alpha$ *da esse formato; si individui l'arco di circonferenza di raggio* r *tangenziale a quelle rette.*

Fig. 181.



Per la determinazione dei punti di contatto T e T' si ha

$$CT = CT' = r \cot \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Se $MP \perp CT$, il punto medio M dell'arco sarà determinato, se si conoscono i segmenti PT ed MP; questi, essendo $MOT = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$, sono dati dalle formole

$$PT = r \cos \tfrac{1}{2}\alpha,\quad MP = r - r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha.$$

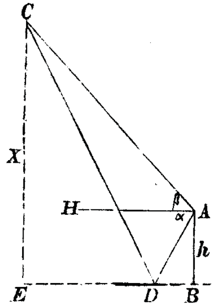
Se fra M e T si volessero stabilire degli altri punti intermedî dell'arco MT, basterebbe a tale scopo immaginare l'arco diviso in n parti eguali, Tm, mm'..., corrispondente ciascuna all'angolo $\beta = \frac{1}{n}\ MOT = \frac{1}{n}\ (90^0 - \frac{1}{2}\alpha)$; allora, se mp, $m'p'$... sono normali a CT, a determinare i punti m, m'... serviranno le equazioni

$$pT = r \operatorname{sen} \beta,\qquad mp = r - r \cos \beta;$$

$$p'T = r \operatorname{sen} 2\beta,\qquad m'p' = r - r \cos 2\beta;\ \text{ecc.}$$

§ 391. *Determinare l'altezza d'una nube dalla sua immagine riflessa dallo specchio d'uno stagno.*

Fig. 182.



Un osservatore A (fig. 182) trovasi ad una altezza $AB = h$ dal livello d'uno stagno D; diretta la visuale ad un punto marcato C della nube egli misura l'angolo $CAH = \beta$ che questa visuale forma con l'orizzontale AH condotta per il suo occhio. Supposto ora che egli veda la nube riflessa nello stagno nella direzione AD e che $HAD = \alpha$ sia l'angolo formato da questa direzione con l'orizzontale, si domanda l'altezza $CE = x$ della nube dal livello dello stagno, noti che siano h, α e β.

Dal $\triangle CED$ si ha $x = CD \,.\, \text{sen}\, CDE$, e siccome, giusta la legge della riflessione, l'angolo $CDE = ADB = \alpha$, ne risulta $x = CD \,.\, \text{sen}\, \alpha$.

La lunghezza di CD si ricava dal triangolo CAD; infatti $CD : AD = \text{sen}\, CAD : \text{sen}\, ACD = \text{sen}\,(\alpha + \beta) : \text{sen}\,(\alpha - \beta)$; laonde

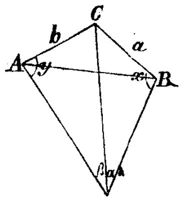
$$CD = AD \,.\, \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,(\alpha - \beta)}.$$

Il triangolo ADB dà poi la lunghezza di $AD = \dfrac{h}{\text{sen}\,\alpha}$.

Dunque
$$x = h \,.\, \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,(\alpha - \beta)}.$$

§ 392. *Dalla posizione di tre punti* A, B *e* C *dati sul terreno, determinare la posizione d'un quarto punto* D *per mezzo degli angoli che formano le visuali condotte in* D *ai tre punti dati* (*Problema di Pothenot*).

Fig. 183.



Nel triangolo ABC (fig. 183) dato, siano $BC = a$, $AC = b$ e l'angolo $ACB = C$. Si misurino nel punto D, di cui si chiede la posizione, gli angoli $BDC = \alpha$ ed $ADC = \beta$.

Si ponga $CBD = x$ e $CAD = y$, e sarà $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, quindi noto. Dalle proporzioni $a : CD = \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\, x$ e $b : CD = \text{sen}\,\beta : \text{sen}\, y$, segue $\dfrac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, y} = \dfrac{b\, \text{sen}\,\alpha}{a\, \text{sen}\,\beta}$, quindi

$$\frac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, y}{\text{sen}\, x + \text{sen}\, y} = \frac{b\, \text{sen}\,\alpha - a\, \text{sen}\,\beta}{b\, \text{sen}\,\alpha + a\, \text{sen}\,\beta} = \frac{\cot\varphi - 1}{\cot\varphi + 1},$$

se l'angolo φ fu scelto in modo che $\cot\varphi = \dfrac{b\, \text{sen}\,\alpha}{a\, \text{sen}\,\beta}$, ovvero

$\dfrac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(x - y)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(x + y)} = \cot(45^0 + \varphi)$ (§ 358, 37 e § 362, 10); laonde

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(x + y) \cot(45^0 + \varphi).$$

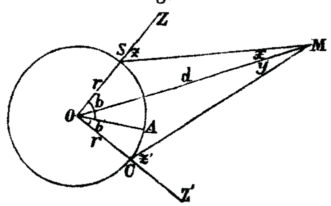
Da $\frac{1}{2}(x + y)$ e $\frac{1}{2}(x - y)$ si ottengono poi x ed y. Di più si ha:

$$DB = \frac{a\, \text{sen}\,(\alpha + x)}{\text{sen}\,\alpha}, \quad DA = \frac{b\, \text{sen}\,(\beta + y)}{\text{sen}\,\beta}, \quad DC = \frac{a\, \text{sen}\, x}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b\, \text{sen}\, y}{\text{sen}\,\beta}.$$

Quale ne sarebbe la soluzione, se D fosse situato nell'interno del triangolo ABC o sul segmento AB?

§ 393. *Determinare la distanza* $\mathrm{OM} = \mathrm{d}$ (fig. 184) *della luna* (M) *dal centro* (O) *della terra, ovvero determinare la distanza geocentrica della luna* (Problema delle *paralassi*).

Fig. 184.



Siano OZ ed OZ' le verticali di due luoghi di osservazione S (Stoccolma) e C (Capo) posti sullo stesso meridiano, ed A un punto dell'equatore, per cui $AS = b$ ed $AC = b'$ sono le latitudini di S e di C. Supposto ora che due osservatori, l'uno in S, l'altro in C, misurino contemporaneamente la distanza zenitale della luna, vale a dire gli angoli $ZSM = z$ e $Z'CM = z'$, si tratta di determinare la distanza d, noti che siano z, z', b, b' ed il raggio terrestre r.

Dal quadrilatero $MSOC$ si ricava $x + y$; infatti,

$$(x + y) + (180^0 - z) + (b + b') + (180^0 - z') = 360^0, \text{ quindi}$$
$$x + y = (z + z') - (b + b') \ldots 1).$$

I singoli valori di x e di y si ottengono dal

$\triangle MOS \ldots r : d = \text{sen}\, x : \text{sen}\,(180^0 - z)$, e dal

$\triangle MOC \ldots r : d = \text{sen}\, y : \text{sen}\,(180^0 - z')$, quindi

$\text{sen}\, x : \text{sen}\, y = \text{sen}\, z : \text{sen}\, z'$, da cui

$(\text{sen}\, x + \text{sen}\, y) : (\text{sen}\, x - \text{sen}\, y) = (\text{sen}\, z + \text{sen}\, z') : (\text{sen}\, z - \text{sen}\, z')$, ovvero, riferendosi alla formola 37) del § 358,

$$\text{tang}\, \frac{x + y}{2} : \text{tang}\, \frac{x - y}{2} = \text{tang}\, \frac{z + z'}{2} : \text{tang}\, \frac{z - z'}{2} \ldots 2).$$

Dalle formole 1) e 2) si ottengono $x + y$ ed $x - y$, dai quali valori si ricava x ed y.

Dai triangoli MOS ed MOC discende

$$d = \frac{r\, \text{sen}\, z}{\text{sen}\, x}, \text{ ovvero } d = \frac{r\, \text{sen}\, z'}{\text{sen}\, y}.$$

Per $r = 1$, $b + b' = 93^0\, 15'\, 27''$, $z = 33^0 20' 24''$ e $z' = 61^0 13' 33''$, si ottiene $d = 62 \cdot 456$.

3. Problemi di Stereometria.

§ 394. *Dato un segmento* S *nello spazio ed il suo angolo d'inclinazione* α *con un piano* MN, *determinare la proiezione* s *del segmento sul piano.*

Sia (fig. 185) $AB = S$ il segmento dato, $Aa \perp MN$ e $Bb \perp MN$, quindi $ab = s$ la proiezione del segmento sul piano MN. Conducendo nel piano $ABab$ la $Ab' \parallel ab$, sarà $Ab' = ab$ e $BAb' = \alpha$; ma $Ab' = AB \cos\alpha$, quindi

$$s = S \cos\alpha.$$

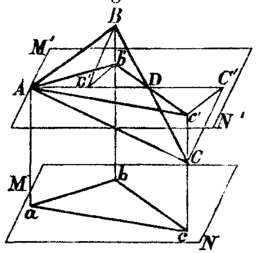
§ 395. *Dati un triangolo* T *ed il suo angolo d'inclinazione* α *con un piano* M N, *determinare la proiezione* t *del triangolo sul piano.*

$$t = T \cos\alpha.$$

Dimostrazione: Sia (fig. 185) ABC il triangolo T. Per un suo vertice A si conduca un piano $M'N'$ parallelo ad MN che tagli il triangolo ABC lungo la AD. La proiezione $Ab'c'$ del triangolo ABC sul piano $M'N'$ sarà evidentemente eguale alla proiezione abc dello stesso triangolo sul piano MN. La AD divide il triangolo ABC nei due triangoli ADB ed ADC e la sua proiezione $Ab'c'$ nei due triangoli ADb' ed ADc'.

Si guidi $BB' \perp AD$, si unisca B' con b' e sarà $BB'b' = \alpha$, e perciò $B'b' = BB' \cos\alpha$. Di più si ha $\triangle ADB = \frac{1}{2} AD \,.\, BB'$, $\triangle ADb' = \frac{1}{2} AD \,.\, B'b' = \frac{1}{2} AD \,.\, BB' \cos\alpha = \triangle ADB \cos\alpha$, e così pure $\triangle ADc' = \triangle ADC \,.\, \cos\alpha$, quindi $t = \triangle ADb' + \triangle ADc' = (\triangle ADB + \triangle ADC) \,.\, \cos\alpha = T \cos\alpha$.

Fig. 185.



§ 396. *Sono dati un poligono* P *ed il suo angolo d'inclinazione* α *con un piano* M N; *si determini la proiezione* p *del poligono sul piano*

$$p = P \cos\alpha.$$

Segue dal § 395, scomponendo il poligono in triangoli per mezzo di diagonali.

§ 397. *Siano* f_1, f_2, *ed* f_3 *le aree di tre facce d'una piramide triangolare, ed* α_3, α_2 *ed* α_1 *gli angoli d'inclinazione formati dalle stesse; si determini l'area* f_4 *della quarta faccia.*

Siccome ogni faccia della piramide triangolare è eguale alla somma delle proiezioni su questa faccia delle altre tre facce, così chiamando β_1, β_2 e β_3 gli angoli d'inclinazione delle facce f_1, f_2 e f_3 colla quarta f_4, risulterà:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \cos\alpha_3 + f_3 \cos\alpha_2 + f_4 \cos\beta_1, \\ f_2 &= f_1 \cos\alpha_3 + f_3 \cos\alpha_1 + f_4 \cos\beta_2, \\ f_3 &= f_1 \cos\alpha_2 + f_2 \cos\alpha_1 + f_4 \cos\beta_3, \\ f_4 &= f_1 \cos\beta_1 + f_2 \cos\beta_2 + f_3 \cos\beta_3. \end{aligned}$$

Moltiplicando queste equazioni successivamente per f_1, f_2, f_3 e f_4 e sottraendo poi la somma delle prime tre dalla quarta, si ha:

$$f_4^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2 f_1 f_2 \cos\alpha_3 - 2 f_1 f_3 \cos\alpha_2 - 2 f_2 f_3 \cos\alpha_1.$$

Si esprima ciò in parole.

§ 398. *Si calcoli il volume* v *d'un parallelepipedo di cui sia data la base ed il cui spigolo laterale* c *formi colla base un angolo d'inclinazione* φ.

Supposta la base un rettangolo avente i lati a e b, si ha

$$v = abc \operatorname{sen}\varphi.$$

Se la base è un parallelogrammo obliquo avente l'angolo γ compreso dai lati a e b, risulta

$$v = abc \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\varphi.$$

§ 399. Si determini (§§ 334 e 335, fig. 167) *a*) una *calotta sferica* C, dati r e l'angolo al centro $AOB = \alpha$; *b*) una *zona sferica* Z, noti che siano r e gli angoli $AOB = \alpha$ ed $AOC = \alpha'$.

a) $C = 2r^2\pi(1 - \cos\alpha)$, *b*) $Z = 2r^2\pi(\cos\alpha - \cos\alpha')$.

4. Problemi di Geografia matematica.

§ 400. 1. *Determinare l'arco di meridiano* m *della terra visibile ad un'altezza* a, *se* r *è il raggio della terra considerata quale sfera.*

La misura in gradi dell'arco α viene data dall'equazione

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+a}.$$

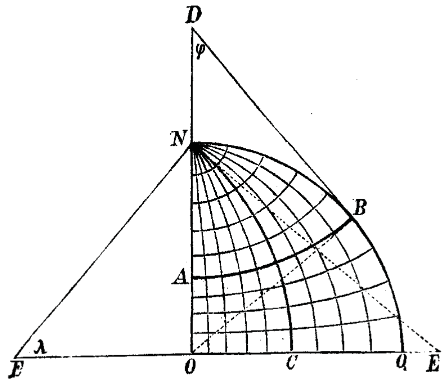
Da questo valore di α si ricava, giusta il § 185, la lunghezza dell'arco m.

2. *Determinare il raggio* ρ *d'un circolo parallelo della terra avente la latitudine geografica* φ, *se* r *è il raggio della terra.*

$$\rho = r \cos\varphi.$$

§ 401. *Si costruisca la rete d'una proiezione equatoriale stereografica della sfera terrestre.* (La fig. 186 non rappresenta che un solo quadrante della rete di proiezione).

Fig. 186.



In questo metodo di proiezione i circoli paralleli ed i meridiani vengono proiettati da un punto O dell'equatore sul piano di quel meridiano che è parallelo al piano tangenziale della terra passante per il punto O. Le proiezioni dell'equatore e del meridiano passante per O sono segmenti, le proiezioni degli altri circoli paralleli e meridiani sono alla loro volta cerchi che si tagliano fra loro sotto gli stessi angoli sotto ai quali si tagliano i cerchi proiettati. I centri dei singoli cerchi di proiezione sono situati sui prolungamenti della ON e della QO. Per la determinazione dei singoli elementi necessari al calcolo si procederà come segue:

a) se si pone $ON = OQ = r$, e se BD è una tangente del cerchio NBQ, si avrà per la proiezione AB d'un circolo parallelo avente la latitudine geografica φ, essendo $BDO = BOQ = \varphi$,

raggio $DA = DB = r \cot \varphi$,

distanza $OA = \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} - r\cot\varphi = r \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$;

b) per la proiezione NC d'un meridiano della longitudine λ riferita al meridiano passante per O, si avrà, se NE è una tangente del cerchio NC ed $NF \perp NE$, essendo $NFO = ONE = \lambda$,

raggio $FC = FN = \frac{r}{\operatorname{sen}\lambda}$,

distanza $OC = \frac{r}{\operatorname{sen}\lambda} - r\cot\lambda = r\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2}$.

5. Problemi per esercizio.

§ 402. *Planimetria.*

1. Di un rettangolo sono dati la diagonale d e l'angolo φ che questa diagonale forma con un lato; si calcolino i lati e l'area del rettangolo.

2. Dati i lati a e b di un rettangolo, determinare gli angoli che i lati formano con una diagonale.

3. Siano d e d' le diagonali d'un rombo; si calcolino gli angoli dello stesso.

4. Dati la diagonale d d'un parallelogrammo e gli angoli φ e ψ che la diagonale forma in una sua estremità coi lati, determinare i lati stessi.

5. Di un parallelogrammo sono note le diagonali d e d' e l'angolo γ da loro compreso; si determinino i lati e gli angoli del parallelogrammo.

6. Si calcolino gli angoli d'un trapezio isoscele, se dello stesso sono dati l'area s ed i due lati paralleli a e b.

7. Calcolare i lati e gli angoli d'un trapezio isoscele di cui si conoscono una diagonale d e gli angoli φ e ψ che la stessa diagonale forma in una sua estremità coi lati.

8. Di un trapezio si conoscono le basi a e b e gli angoli α e β adiacenti alla base a; si calcolino i due lati non paralleli.

9. In un trapezio, a è il lato parallelo maggiore, α e β i suoi angoli adiacenti, e c il lato che con quello dato racchiude l'angolo α; quale è l'area del trapezio?

10. Determinare la parte del cerchio compresa fra due corde parallele, se r è il raggio del cerchio e d e d' sono le distanza delle due corde dal centro.

11. Una secante ed una tangente dello stesso cerchio si tagliano sotto un angolo di 60°; quale sarà il raggio del cerchio, se il segmento esterno della secante è $= 1$ e quello interno $= 3$?

12. Qual angolo racchiudono le tangenti esterne comuni a due cerchi avente i raggi r ed r', se c è la loro linea dei centri?

13. Tre cerchi aventi i raggi R, r e ρ si toccano esternamente; si determinino gli angoli che formano fra loro le tre linee dei centri.

14. Calcolare l'area s d'un triangolo di cui sia dato, oltre ai suoi angoli α, β e γ: *a*) il raggio R della circonferenza circoscrittagli, *b*) il raggio r della circonferenza iscrittagli.

a) $s = 2R^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma$; *b*) $s = r^2 \cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma$.

15. Di un triangolo sono dati gli angoli α, β e γ ed il raggio R della circonferenza circoscrittagli; si determini il raggio r della circonferenza iscrittagli.

$$r = 4R \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

16. I lati d'un quadrilatero $ABCD$ (fig. 78) iscritto in un cerchio sono: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$; si determinino i quattro angoli α, β, γ e δ nei punti A, B, C e D.

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-d)}} \text{ ove } 2p = a + b + c + d.$$

17. Di un quadrilatero iscritto in un cerchio sono dati due lati opposti a e c, un angolo α, ed il raggio R della circonferenza circoscrittagli; si calcolino gli altri lati del quadrilatero.

18. In un quadrilatero iscritto in un cerchio m ed n sono le diagonali, γ l'angolo formato dalle stesse, ed r il raggio del cerchio; si calcolino gli angoli ed i lati del quadrilatero.

19. Dati due lati contigui a e b d'un quadrilatero circoscritto ad un cerchio, l'angolo β formato da questi due lati, ed il raggio r del cerchio, calcolare gli angoli ed i lati del quadrilatero.

Esempî numerici per il calcolo di poligoni regolari.

	n	l	r	R	s
20.	5	2·6042	1·7922	2·2153	11·669
21.	8	1·5	1·8107	1·9598	10·964
22.	10	1·5596	2·4	2·5235	12·715
23.	15	0·83165	1·9563	2	12·202
24.	24	0·39251	2 2503	2·2697	16

25. Se un dodecagono regolare è equivalente ad un esagono regolare avente il lato $l = 4$, quale è il raggio della circonferenza iscritta al dodecagono regolare?

26. (*Il parallelogrammo delle forze*). Siano p e q due forze che agiscono in un punto sotto un angolo φ, ed α e β gli angoli che quelle forze formano colla risultante r. Date tre di queste sei grandezze, determinare le altre:

1) p, q, φ;	3) p, r, α;	5) p, r, φ;	7) r, α, β;
2) p, q, α;	4) p, r, β;	6) p, α, β;	8) p, q, r.

27. Determinare la lunghezza l d'un oggetto di cui si conoscono la distanza d e l'angolo visuale φ sotto il quale viene osservato.

$$l = 2d \,.\, \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2} \varphi.$$

28. Quale è il vero diametro della luna, se il suo diametro apparente medio è di $15' 31 \cdot 69''$, e se 51805 miglia geografiche è la distanza media della luna dalla terra.

29. Quale è il diametro apparente di Venere osservata ad una distanza dalla terra di 5127000 miglia geografiche, se il suo diametro vero è di 1680 miglia geografiche.

30. Acciocchè un oggetto sia visibile alla distanza visiva normale di 25 *cm*, il suo angolo visuale deve essere almeno di $40''$; quale dovrà essere per lo meno il diametro di un tale oggetto?

31. Sotto che angolo φ vede un uomo una torre alta 65 *m* ad una distanza di 85 *m*, se il suo occhio trovasi ad $1 \cdot 6$ *m* al di sopra del suolo?

§ 403. *Stereometria.*

1. La base d'un prisma è un triangolo avente gli angoli α, β e γ; se R è il raggio della circonferenza circoscritta alla base, s la lunghezza degli spigoli laterali del prisma ed φ il loro angolo d'inclinazione colla base, quale è il volume del prisma?

$$v = 2 s R^2 \,\mathrm{sen}\, \alpha \,\mathrm{sen}\, \beta \,\mathrm{sen}\, \gamma \,\mathrm{sen}\, \varphi.$$

2. Sono dati il volume v d'una piramide retta a base quadrata e l'angolo d'inclinazione α degli spigoli laterali colla base; si determini a) la base, b) gli spigoli laterali.

3 In una piramide regolare di n lati, a è lo spigolo della base ed s lo spigolo laterale; quale è a) la superficie, b) il volume della piramide?

4. Si calcolino la superficie ed il volume di una piramide regolare di n lati, il cui spigolo della base è a e la cui altezza è eguale al doppio raggio della circonferenza circoscritta alla base.

5. Il volume d'una piramide regolare, la cui base è un poligono avente il lato a, è v; quale è l'angolo d'inclinazione d'uno spigolo laterale colla base?

6. In un tronco di piramide regolare, la cui base maggiore è un ottagono avente un lato a, p è la proiezione d'uno spigolo laterale sulla

base maggiore, ed α il rispettivo angolo d'inclinazione; si calcoli a) la superficie, b) il volume del tronco.

7. Quale è a) la superficie, b) il volume d'un cono retto il cui lato l forma colla base un angolo d'inclinazione φ?

8. Calcolare la superficie del mantello ed il volume d'un cono retto di cui si conoscono il raggio r della base, e l'angolo α al vertice d'una sezione fatta per l'asse del cono.

9. In un cono obliquo, r è il raggio della base ed α l'angolo d'inclinazione dell'asse a colla base; quale è l'altezza, quale il lato massimo, e quale il lato minimo del cono?

10. In un cono obliquo, α è il minimo angolo d'inclinazione di un lato colla base, a l'altezza e p la proiezione dell'asse sulla base; si calcoli il volume del cono.

11. Si calcoli il volume d'un tronco di cono retto di cui si conoscono il lato l, l'angolo d'inclinazione α che questo lato forma colla base maggiore, e la superficie m del mantello.

$$v = \frac{\pi l}{4} \,.\, \mathrm{sen}\, \alpha \,.\, \left[\frac{m^2}{l^2 \pi^2} + \frac{l^2}{3} \cos \alpha^2 \right].$$

12. In un tronco di cono retto, R e r sono i raggi delle due basi e v il volume; a) qual è l'angolo d'inclinazione α del lato colla base maggiore, b) quale il lato l, c) quale la superficie m del mantello del tronco?

$$\mathrm{tang}\, \alpha = \frac{3v}{\pi (R^3 - r^3)}, \quad l = \frac{R - r}{\cos \alpha}, \quad m = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{\cos \alpha}.$$

13. In un cilindro obliquo la cui base ha il raggio r, l'asse a forma colla base un angolo d'inclinazione α; si calcoli a) l'area della sezione passante per l'asse e che è normale alla base, b) il volume del cilindro.

14. Quale è a) la superficie, b) il volume d'un corpo generato dalla rotazione di un dodecagono regolare avente il lato a, intorno ad una delle diagonali che lo dimezza.

15. Un triangolo, i cui lati a e b racchiudono l'angolo γ, ruota attorno il terzo lato non dato; quale è il volume del corpo di rotazione che in tal modo viene generato?

16. La superficie d'una sfera è s ed m una sua calotta; si determini l'angolo al centro α di quell'arco, dalla cui rotazione è generata la calotta.

17. Dal volume v d'un settore sferico e dall'angolo α della sezione passante per l'asse, trovare il raggio r della sfera.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4 \pi \,\mathrm{sen}\, \frac{\alpha^2}{4}}}.$$

18. In una sfera avente il volume v si iscrive un cono retto in cui l'angolo al vertice della sezione passante per l'asse è α; quale è il volume del cono?

19. L'asse a d'un cono obliquo forma colla base, avente il raggio r, l'angolo d'inclinazione α; quale è il raggio della sfera circoscritta al cono?

20. Un settore circolare il cui angolo al centro è α ed il cui raggio è r, ruota attorno il diametro parallelo alla corda del suo arco; quale è a) la superficie s, b) quale il volume v del corpo di rotazione?

$$s = 2\,r^2\pi\left(2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right), \quad v = \frac{4\,r^3\pi}{3}\,\text{sen}\,\frac{\alpha^3}{2}.$$

21. Sono dati i raggi R e r delle due basi d'un tronco di cono retto e l'angolo d'inclinazione α che il lato forma colla base maggiore; si determini l'altezza d'una calotta che sia eguale alla superficie del mantello del tronco, e che appartenga ad una sfera avente per raggio l'altezza del tronco.

22. Quale altezza deve avere per lo meno un monte, acciocchè in mare se ne possa scorgere la vetta ad una distanza di 100 chilometri?

23. Quale è la superficie della terra che si abbraccia collo sguardo ad una altezza di 75 m.

24. Quante miglia geogr. ha il circolo parallelo passante per Vienna che ha una latitudine di $48^{\circ}\,12'\,35''$? (raggio della terra $=$ 858·474 miglia geogr.).

25. In quale latitudine geografica un grado del circolo parallelo corrisponde a 8·623 miglia geografiche?

26. Due luoghi della terra si trovano al φesimo grado di latitudine settentrionale; se le loro longitudini orientali sono λ e λ', quale è la loro distanza lungo il loro circolo parallelo comune?

$$\varphi = 47^{\circ}\,58', \quad \lambda = 42^{\circ}\,15', \quad \lambda' = 31^{\circ}\,37', \quad r = 858\cdot474.$$

27. Due luoghi hanno la stessa latitudine φ ($48^{\circ}\,12'\,35''$) ed i loro mezzodì differiscono di m (10) minuti; quale ne è la loro distanza lungo il loro circolo parallelo?

28. Due luoghi aventi la stessa latitudine geografica φ ($74^{\circ}\,4'$) hanno una distanza, calcolata lungo il loro circolo parallelo, di a (442) miglia; quanti gradi importa la differenza delle loro longitudini?

29. Si calcolino l'altezza e la superficie a) della zona torrida, b) della zona temperata, c) della zona glaciale della terra, se il raggio terrestre r è eguale a 858·474 miglia geografiche e se $\varphi = 23^{\circ}\,28'$ si prende tanto quale distanza del circolo polare dal polo, quanto quale distanza del circolo del tropico dall'equatore.

CAPITOLO TERZO.

Trigonometria sferica.

I. Soluzione dei triangoli sferici.

1. Triangoli sferici rettangoli.

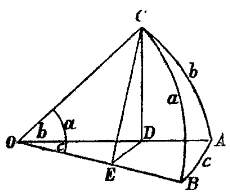
§ 404. Un triangolo sferico può avere uno, due ed anche tre angoli retti. Se tutti e tre gli angoli d'un triangolo sferico sono retti, i tre lati sono quadranti; se sono retti due angoli, i lati opposti a questi sono del pari quadranti, mentre il terzo lato contiene tanti gradi, quanti ne contiene il terzo angolo. La soluzione essendo evidente nell'uno e nell'altro di questi casi, ne viene che basterà tener parola soltanto dei triangoli sferici rettangoli con un solo angolo retto.

Teoremi trigonometrici sui triangoli sferici rettangoli.

§ 405. Sia ABC (fig. 187) un triangolo sferico rettangolo in A, O il centro della relativa sfera, b e c i cateti, B e C gli angoli a questi opposti, ed a l'ipotenusa.

Supposti i tre lati ed i due angoli B e C minori di 90°, si guidino $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, e si unisca D con E; sarà allora (§ 219, 2) $CD \perp$ al piano AOB, e DE, che è la proiezione della CE sul piano AOB, perpendicolare ad OB (§ 210); quindi angolo $CED = B$.

Fig. 187.



1. Ne discende quindi

$OE = OC\,.\cos a$,

$OE = OD\,.\cos c = OC\,.\cos b \cos c$; quindi

$OC\,.\cos a = OC\,.\cos b \cos c$, ovvero

$$\cos a = \cos b\,.\cos c\ldots 1)$$

vale a dire: *il coseno dell'ipotenusa è eguale al prodotto dei coseni dei due cateti.*

2. Di più $CD = OC\,.\,\text{sen}\,b$,

$CD = CE\,.\,\text{sen}\,B = OC\,.\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,B$; laonde

$OC\,.\,\text{sen}\,b = OC\,.\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,B$, ovvero

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,b = \text{sen}\,a\,\text{sen}\,B.\\ \text{Similmente si ha sen}\,c = \text{sen}\,a\,\text{sen}\,C;\end{array}\right\}\ldots 2)$$

vale a dire: *il seno d'un cateto è eguale al prodotto del seno dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto a questo cateto.*

3. Del pari si ha:

$DE = CE \,.\, \cos B = OC \,.\, \operatorname{sen} a \cos B$,

$DE = OD \,.\, \operatorname{sen} c = OC \,.\, \cos b \operatorname{sen} c = OC \,.\, \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$ (dietro la formola 2); quindi $OC \,.\, \operatorname{sen} a \cos B = OC \,.\, \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$, laonde

$$\left.\begin{aligned} &\cos B = \cos b \operatorname{sen} C, \\ \text{ed analogamente}\quad &\cos C = \cos c \operatorname{sen} B; \end{aligned}\right\} \ldots 3)$$

vale a dire: *in ogni triangolo sferico rettangolo il coseno d'un angolo obliquo è eguale al prodotto del coseno del lato opposto per il seno dell'altro angolo obliquo.*

4. Di più si ha

$CD = OD \,.\, \operatorname{tang} b$,

$CD = CE \,.\, \operatorname{sen} B = OE \,.\, \operatorname{tang} a \operatorname{sen} B = OD \,.\, \cos c \operatorname{tang} a \operatorname{sen} B$
$= OD \,.\, \operatorname{tang} a \cos C$ (dietro la formola 3); quindi

$OD \,.\, \operatorname{tang} b = OD \,.\, \operatorname{tang} a \cos C$, ovvero

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C, \\ \text{ed analogamente}\quad &\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B; \end{aligned}\right\} \ldots 4)$$

cioè: *la tangente d'un cateto è eguale al prodotto della tangente della ipotenusa per il coseno dell'angolo obliquo adiacente a questo cateto.*

5. Essendo $CD = OD \,.\, \operatorname{tang} b$,

$CD = DE \,.\, \operatorname{tang} B = OD \,.\, \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B$,

ne segue $OD \,.\, \operatorname{tang} b = OD \,.\, \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B$, ovvero

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B, \\ \text{ed analogamente}\quad &\operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C; \end{aligned}\right\} \ldots 5)$$

cioè: *la tangente d'un cateto è eguale al prodotto del seno dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.*

6. Dalle formole 1) e 3) si ricava finalmente

$$\cos a = \cos b \cos c = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C} \cdot \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}, \text{ ovvero}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots 6)$$

cioè: *il coseno dell'ipotenusa è eguale al prodotto delle cotangenti dei due angoli obliqui.*

Scolî. 1. Nello sviluppo di queste formole si suppone che a, b, c, B e C siano minori di 90^0; se ciò non fosse, basterebbe cangiare convenientemente la figura, ed applicando lo stesso metodo di prima si perverrebbe, con riflesso ai segni, alle stesse equazioni ottenute precedentemente, le quali valgono quindi in qualsiasi caso.

2. Se in un triangolo sferico un lato è eguale a 90^0, il triangolo polare è rettangolo; quindi le equazioni precedenti convenientemente trasformate potranno essere applicate anche in questo caso.

Corollario. Nell'equazione $\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$ (formola 3), $\operatorname{sen} C$ è sempre positivo, quindi $\cos B$ e $\cos b$ dovranno avere sempre lo stesso segno.

Se $b \lesseqgtr 90^0$ e quindi $\cos b \gtreqless 0$, anche $\cos B \gtreqless 0$, e quindi $B \lesseqgtr 90^0$.
Viceversa: Se $B \lesseqgtr 90^0$, anche $b \lesseqgtr 90^0$.

Casi di soluzione.

§ 406. I. *Dati i due cateti* b *e* c.

Dalle equazioni 1) e 5) si ricava

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}.$$

Siano p. e. $b = 27^0\, 28'\, 36''$ e $c = 51^0\, 12'\, 8''$. Si avrà allora

$$\begin{aligned} \log \cos b &= 9 \cdot 94\,802 \\ \log \cos c &= 9 \cdot 79\,697 \\ \hline \log \cos a &= 9 \cdot 74\,499 \\ a &= 56^0\, 13'\, 41'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} b &= 9 \cdot 71\,604 \\ \log \operatorname{sen} c &= 9 \cdot 89\,174 \\ \hline \log \operatorname{tang} B &= 9 \cdot 82\,430 \\ B &= 33^0\, 42'\, 49'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{tang} c &= 10 \cdot 09\,476 \\ \log \operatorname{sen} b &= 9 \cdot 66\,406 \\ \hline \log \operatorname{tang} C &= 10 \cdot 43\,070 \\ C &= 69^0\, 38'\, 54'' \end{aligned}$$

II. *Dati l'ipotenusa* a *ed un cateto* b.

Applicando le formole 1), 2) e 4) si ricava

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Sebbene, generalmente parlando, a $\operatorname{sen} B$ corrispondano due angoli, l'uno acuto e l'altro ottuso, pure tale ambiguità cessa qualora si rifletta che ad un valore di $b \gtrless 90^0$ debba del pari corrispondere un angolo $B \gtrless 90^0$.

III. *Dati un cateto* b *e l'angolo opposto* B.

Le formole 2), 5) e 3) danno

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}, \quad \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b},$$

ovvero le formole 1) e 4)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Trovato a, le formole $\cos c$ e $\cos C$ determinano senza ambiguità i valori di c e di C; ciò nullameno il problema ammette due soluzioni, essendo a determinato soltanto dal suo seno.

IV. *Dati un cateto* b *e l'angolo adiacente* C.

Le formole 4), 5) e 3) danno

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}, \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C, \quad \cos B = \cos b \operatorname{sen} C.$$

V. *Dati l'ipotenusa* a *e l'angolo adiacente* B.

Dalle formole 2), 4) e 6) discende

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B, \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B, \quad \cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

In questo caso un solo valore di b corrisponde a $\operatorname{sen} b$, essendo $b \gtrless 90^0$, a seconda che $B \gtrless 90^0$.

VI. *Dati i due angoli obliqui* B *e* C.

A mezzo delle formole 6) e 3) si ottiene

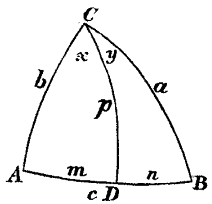
$$\cos a = \cot B \cot C,\quad \cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C},\quad \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} B}.$$

2. Triangoli sferici obliquangoli.

Teoremi e formole trigonometriche sui triangoli sferici obliquangoli.

§ 407. Sia ABC (fig. 188) un triangolo sferico obliquangolo avente i lati a, b, c e gli angoli opposti a questi A, B e C.

Fig. 188.



Se per il punto C si guida un arco di cerchio massimo $CD \perp AB$, e se con m, n e p si segnano gli archi AD, BD e CD, nei due triangoli rettangoli BDC ed ADC, sarà, giusta il § 405, 2,

$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, e
$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$; quindi
$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$, ovvero
$\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B$;

cioè: *in ogni triangolo sferico i seni di due lati stanno fra loro come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Da questa proporzione si ha l'equazione:

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A. \\ \text{Analogamente} & \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A, \\ & \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B. \end{array}\right\} \ldots \mathrm{I}).$$

Le equazioni del gruppo I) valgono eziandio qualora l'arco di cerchio massimo condotto normale cada al di fuori del triangolo ABC; in tal caso si avrebbe, procedendo come prima, $\operatorname{sen}(180^0 - A)$, $\operatorname{sen}(180^0 - B)$ o $\operatorname{sen}(180^0 - C)$, i cui valori sono evidentemente eguali a quelli di $\operatorname{sen} A$, di $\operatorname{sen} B$ o di $\operatorname{sen} C$.

§ 408. 1. Dal triangolo rettangolo BDC (fig. 188) si ha, giusta il § 405, 1.

$\cos a = \cos p \cos n = \cos p \cos (c - m)$, ovvero
$\cos a = \cos p \cos c \cos m + \cos p \operatorname{sen} c \operatorname{sen} m$.

Essendo poi $\cos p \cos m = \cos b$ (§ 405, 1), ne segue

$$\cos p \operatorname{sen} m = \frac{\cos b}{\cos m} \cdot \operatorname{sen} m = \cos b \operatorname{tang} m = \cos b \operatorname{tang} b \cos A \quad (\S\ 405,\ 4)$$
$$= \operatorname{sen} b \cos A.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione di $\cos a$, si ricava

$$\left.\begin{array}{ll} & \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A. \\ \text{Analogamente} & \cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B, \\ & \cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C; \end{array}\right\} \ldots \mathrm{II}\ a)$$

vale a dire: *in ogni triangolo sferico il coseno d'un lato è eguale al prodotto dei coseni degli altri due lati, aumentato del prodotto dei seni di questi stessi lati per il coseno dell'angolo da essi compreso.*

2. Dal triangolo rettangolo ADC discende, giusta il § 405, 3,

$\cos A = \cos p \operatorname{sen} x = \cos p \operatorname{sen} (C - y)$, ovvero
$\cos A = \cos p \operatorname{sen} C \cos y - \cos p \cos C \operatorname{sen} y$.

Ma $\cos p \operatorname{sen} y = \cos B$ (§ 405, 3), quindi

$$\cos p \cos y = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} y} \cdot \cos y = \cos B \cot y = \cos B \cdot \frac{\cos a}{\cot B} \quad (\S\ 405,\ 6)$$
$$= \operatorname{sen} B \cos a.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione per $\cos A$, risulta

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a. \\ \text{Similmente si ha} \\ \cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c; \end{array}\right\} \ldots \mathrm{II}\ b)$$

cioè: *in ogni triangolo sferico il coseno d'un angolo è eguale al prodotto negativo dei coseni degli altri due angoli, aumentato del prodotto dei seni di questi stessi angoli per il coseno del lato da essi compreso.*

Le equazioni dei gruppi II a) e II b) valgono in tutti i casi, poichè agli stessi risultati si perverrebbe del pari qualora l'arco passante per il vertice del triangolo ABC e normale al lato opposto cadesse al di fuori di questo triangolo.

§ 409. 1. Allo scopo di rendere le equazioni del gruppo II a) adatte al calcolo logaritmico, si procede come segue: Dalla prima equazione si ricava

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \text{ quindi}$$

$$1 - \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c + \cos b \cos c - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos b \cos c + \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

oppure, avuto riflesso alle formole 24) e 23) del § 356, ed alla formola 36) del § 358,

$$\left(\operatorname{sen} \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b + c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + c - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Ponendo $a+b+c=2s$, si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},\\
&\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}},\\
&\text{Da cui segue } \operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-a)}}.\\
&\text{In simil guisa si ottiene:}\\
&\operatorname{sen}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}},\quad \operatorname{sen}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},\\
&\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}},\\
&\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-b)}};\quad \operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-c)}}.
\end{aligned}\right\}\text{III } a).$$

2. Fatto lo stesso sviluppo per i valori di $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ delle equazioni del gruppo II b), e posto $A+B+C=2S$, si ottengono le formole

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}},\\
&\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}},\\
&\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}};\\
&\operatorname{sen}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}},\quad \operatorname{sen}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}},\\
&\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}},\quad \cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}},\\
&\operatorname{tang}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}};\quad \operatorname{tang}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}.
\end{aligned}\right\}\text{III } b).$$

§ 410. *Equazioni di Gauss.*

Se nella equazione

$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$, si sostituiscono i valori di $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$ del gruppo III a), si ottiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}\\
&+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}\\
&=\frac{\operatorname{sen}(s-b)+\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen}c}\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}s\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}\\
&=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C,
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{quindi}\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C.\\
&\text{Similmente si ha}\\
&\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C,\\
&\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}\right\}\ldots\text{IV}).$$

Scolio. Siccome nella equazione

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}C,$$

$\cos\frac{1}{2}c$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$ devono essere sempre positivi, ne viene che anche $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ e $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ debbono avere sempre lo stesso segno; se quindi $a+b\lesseqgtr 180^{\circ}$, ovvero $\cos\frac{1}{2}(a+b)\gtreqless 0$, anche $\cos\frac{1}{2}(A+B)\gtreqless 0$, quindi $A+B\lesseqgtr 180^{\circ}$. Viceversa: Se $A+B\lesseqgtr 180^{\circ}$, anche $a+b\lesseqgtr 180^{\circ}$.

§ 411. *Equazioni di Neper.*

1. Dividendo la quarta equazione di Gauss del gruppo IV) per la terza, poscia la seconda per la prima, ne risulta

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c
\end{aligned}\right\}\ldots\text{V } a).$$

2. Dividendo la prima delle equazioni di Gauss per la terza, indi la seconda per la quarta, ne segue

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C
\end{aligned}\right\}\ldots\text{V } b).$$

Casi di soluzione.

§ 412. I. *Dati due lati* a *e* b *e l'angolo* C *da essi compreso.*

Gli angoli A e B risultano dalle equazioni del gruppo V b)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C.$$

Il terzo lato c si può calcolare con vantaggio, applicando una delle equazioni di Gauss del gruppo IV).

Siano p. e. $a=97^{\circ}30'20''$, $b=55^{\circ}12'10''$ e $C=39^{\circ}58'$, quindi $\frac{1}{2}(a+b)=76^{\circ}21'15''$, $\frac{1}{2}(a-b)=21^{\circ}9'5''$ e $\frac{C}{2}=19^{\circ}59'$.

Sarà allora

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b)&=9\cdot96\,971 &\qquad \log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b)&=9\cdot55\,731\\
\log\cot\tfrac{1}{2}C&=10\cdot43\,933 & \log\cot\tfrac{1}{2}C&=10\cdot43\,933\\
&\,20\cdot40\,904 & &\,19\cdot99\,664\\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b)&=9\cdot37\,276 & \log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a+b)&=9\cdot98\,757\\
\log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)&=11\cdot03\,628 & \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)&=10\cdot00\,907\\
\tfrac{1}{2}(A+B)&=84^{\circ}44'40'', & \tfrac{1}{2}(A-B)&=45^{\circ}35'53'';\\
\text{quindi}\quad A&=130^{\circ}20'33'', & B&=39^{\circ}8'47''.
\end{aligned}$$

Per il calcolo di c dalle equazioni del gruppo IV) si ha, a mo' d'esempio,

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C, \quad \text{ovvero} \quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C.$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9\cdot96\,971 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}C &= 9\cdot97\,303 \\
\hline
 & \;\;19\cdot94\,274 \\
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B) &= 9\cdot99\,817 \\
\hline
\log\cos\tfrac{1}{2}c &= 9\cdot94\,457 \\
\tfrac{1}{2}c &= 28^0\,20'\,8'',
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a-b) &= 9\cdot55\,731 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}C &= 9\cdot97\,303 \\
\hline
 & \;\;19\cdot53\,034 \\
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B) &= 9\cdot85\,397 \\
\hline
\log\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c &= 9\cdot67\,637 \\
c &= 56^0\,40'\,16''.
\end{aligned}$$

Applicando più equazioni di Gauss, si ha la prova della giustezza del calcolo.

Scolio. Il lato c si può calcolare direttamente dagli elementi dati, quindi indipendentemente dagli angoli A e B; infatti dal gruppo IIa si ha

$$\cos c = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\cos C,$$

la quale equazione può essere resa logaritmica coll'introduzione d'un angolo ausiliario. A tale scopo nell'equazione portata alla forma

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \operatorname{sen} b\operatorname{tang} a\cos C),$$

si introduce un angolo ausiliario w tale, che sia $\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} a\cos C$, e si otterrà

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cos a\,(\cos b + \operatorname{sen} b\operatorname{tang} w) \\
&= \frac{\cos a}{\cos w}\,(\cos b\cos w + \operatorname{sen} b\operatorname{sen} w)\text{; quindi}
\end{aligned}$$

$$\cos c = \frac{\cos a\cos(b-w)}{\cos w}.$$

§ 413. II. *Dati due angoli* A *e* B *ed il lato* c *da essi compreso.*

Le equazioni del gruppo Va) danno i valori di a e b. Infatti

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c.$$

Il terzo angolo C si trova per mezzo delle equazioni di Gauss.

Scolio. L'angolo C si può calcolare direttamente dagli elementi dati per mezzo della equazione del gruppo IIb),

$$\begin{aligned}
\cos C &= -\cos A\cos B + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\cos c \\
&= \cos A\,(-\cos B + \operatorname{sen} B\operatorname{tang} A\cos c),
\end{aligned}$$

qualora nella stessa si introduca un angolo ausiliario w tale, che sia $\cot w = \operatorname{tang} A\cos c$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\cos C &= \cos A\,(-\cos B + \operatorname{sen} B\cot w) \\
&= \frac{\cos A}{\operatorname{sen} w}\,(-\cos B\operatorname{sen} w + \operatorname{sen} B\cos w),
\end{aligned}$$

quindi
$$\cos C = \frac{\cos A\operatorname{sen}(B-w)}{\operatorname{sen} w}.$$

§ 414. III. *Dati due lati* a *e* b *ed un angolo* A *opposto ad uno di essi.*

Dal gruppo I) si ha per la determinazione dell'angolo B

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}.$$

L'angolo B può essere tanto acuto quanto ottuso, per cui il problema ammette due soluzioni, a meno che una di queste non fosse esclusa da qualche condizione speciale.

Supposto $A = 90^0$, se $a + b \lesseqgtr 180^0$, anche $A + B \lesseqgtr 180^0$, quindi $B \lesseqgtr 90^0$, ed il problema ha una sola soluzione.

Supposto $A < 90^0$, se $a + b \geqq 180^0$, anche $A + B \geqq 180^0$, quindi $B > 90^0$, ed il problema non ammette che una soluzione; se $a + b < 180^0$, anche $A + B < 180^0$, quindi $B \gtrless 90^0$, e vi si danno due triangoli, a meno che l'angolo ottuso B non sia tale che $A + B \geqq 180^0$, il che avviene se $b \leqq a$; in questo caso l'angolo B devesi risguardare come acuto.

Supposto finalmente $A > 90^0$, se $a + b \leqq 180^0$, anche $A + B \leqq 180^0$, quindi $B < 90^0$, ed il problema non ha che una soluzione. Ma se $a + b > 180^0$, e perciò $A + B > 180^0$, B può essere $\gtrless 90^0$, ed il problema ha due soluzioni, a meno che l'angolo acuto B non sia tale, che $A + B \leqq 180^0$, il che avviene per $b \geqq a$; in questo caso l'angolo B non può essere che ottuso.

Il triangolo ha quindi due soluzioni per

$$A < 90^0,\ a + b < 180^0 \text{ ed } a < b, \text{ ovvero per}$$
$$A > 90^0,\ a + b > 180^0 \text{ ed } a > b.$$

Calcolato B, le equazioni di Neper dei gruppi Va) e Vb) determinano c e C, ottenendosi

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

P. e. per $a = 57^0\,38'$, $b = 31^0\,12'$ ed $A = 104^0\,25'\,30''$ si ha innanzi tutto

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{sen} b &= 9\cdot71\,435 \\
\log\operatorname{sen} A &= 9\cdot98\,609 \\
\hline
 & \;\;19\cdot70\,044 \\
\log\operatorname{sen} a &= 9\cdot92\,667 \\
\hline
\log\operatorname{sen} B &= 9\cdot77\,377 \\
B &= 36^0\,26'\,25''.
\end{aligned}$$

Essendo in questo caso $A > 90^0$, $a + b < 180^0$, e quindi $A + B < 180^0$, dovrà essere $B < 90^0$. Di più si ha

$$\begin{array}{rlrl}
a + b = & 88^0\,50' & \frac{1}{2}(a + b) = & 44^0\,25' \\
a - b = & 26^0\,26' & \frac{1}{2}(a - b) = & 13^0\,13' \\
A + B = & 140^0\,51'\,55'' & \frac{1}{2}(A + B) = & 70^0\,25'\,57 \cdot 5'' \\
A - B = & 67^0\,59'\,\ 5'' & \frac{1}{2}(A - B) = & 33^0\,59'\,32 \cdot 5'' \\
\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) = & 9 \cdot 97\ 417 & \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b) = & 9 \cdot 84\ 502 \\
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a - b) = & \underline{9 \cdot 37\ 080} & \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = & \underline{9 \cdot 82\ 886} \\
 & 19 \cdot 34\ 497 & & 19 \cdot 67\ 388 \\
\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) = & \underline{9 \cdot 74\ 747} & \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b) = & \underline{9 \cdot 35\ 914} \\
\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c = & 9 \cdot 59\ 750 & \log \cot \frac{1}{2} C = & 10 \cdot 31\ 474 \\
\frac{1}{2} c = & 21^0\,35'\,40'' & \frac{1}{2} C = & 25^0\,50'\,54'' \\
c = & 43^0\,11'\,20'' & C = & 51^0\,41'\,48''.
\end{array}$$

§ 415. IV. *Dati due angoli* A *e* B *ed un lato* a *opposto ad uno di essi.*

Il gruppo I) dà per b l'espressione

$$\operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}.$$

I valori di c e C si ricavano dalle equazioni di Neper dei gruppi Va) e Vb)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a - b),$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Dovendosi determinare b da $\operatorname{sen} b$, ne viene che il problema non ammette che in casi speciali una sola soluzione. Con deduzioni simili a quelle fatte al § 414 si vede che due soluzioni sono possibili qualora sia $a < 90^0$, $A + B < 180^0$ ed $A < B$, ovvero
$a > 90^0$, $A + B > 180^0$ ed $A > B$.

§ 416. V. *Dati tutti e tre i lati* a, b *e* c.

Per la determinazione degli angoli si ricorre alle formole del gruppo IIIa).

P. e. per $a = 50^0\,54'\,32''$, $b = 37^0\,47'\,18''$, $c = 74^0\,51'\,50''$, si ha

$$\begin{array}{rlrl}
a = & 50^0\,54'\,32'' & \log \operatorname{sen}(s - b) = & 9 \cdot 84\ 171 \\
b = & 37^0\,47'\,18'' & \log \operatorname{sen}(s - c) = & \underline{9 \cdot 08\ 072} \\
c = & \underline{74^0\,51'\,50''} & & 18 \cdot 92\ 243 \\
a + b + c = & 163^0\,33'\,40'' & \log \operatorname{sen} s = & 9 \cdot 99\ 552 \\
s = & 81^0\,46'\,50'' & \log \operatorname{sen}(s - a) = & \underline{9 \cdot 71\ 022} \\
s - a = & 30^0\,52'\,18'' & & 19 \cdot 21\ 669 \\
s - b = & 43^0\,59'\,32'' & \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} A = & 9 \cdot 60\ 835 \\
s - c = & 6^0\,55' & \frac{1}{2} A = & 22^0\,\ 5'\,20'' \\
 & & A = & 44^0\,10'\,40''.
\end{array}$$

Similmente si trova $B = 33^0\,22'\,45''$ e $C = 119^0\,55'\,6''$.

Scolio. Se sono da calcolarsi tutti e tre gli angoli, riuscirà vantaggioso di determinare innanzi tutto il valore di

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s - a) \operatorname{sen}(s - b) \operatorname{sen}(s - c)}{\operatorname{sen} s}} = \operatorname{tang} r,$$

per avere poi

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tang} r}{\operatorname{sen}(s - a)}, \quad \operatorname{tang} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tang} r}{\operatorname{sen}(s - b)}, \quad \text{e} \quad \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tang} r}{\operatorname{sen}(s - c)},$$

colle quali formole si possono calcolare con molta facilità gli angoli A, B e C.

§ 417. VI. *Dati tutti e tre gli angoli* A, B *e* C.

Le formole del gruppo IIIb) danno i valori degli elementi incogniti.

Scolio. Avendo da calcolare tutti e tre i lati, tornerà vantaggioso anche qui di determinare innanzi tutto

$$\sqrt{\frac{-\cos(S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}{\cos S}} = \cot R,$$

per poi applicare le formole

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S - A)}, \quad \cot \frac{b}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S - B)}, \quad \text{e} \quad \cot \frac{c}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S - C)}.$$

3. Determinazione dell'area d'un triangolo sferico.

§ 418. Come fu dimostrato al § 333, l'area f d'un triangolo sferico ABC appartenente ad una sfera di raggio r ed avente gli angoli A, B e C, viene data dalla formola

$$f = r^2 \pi \cdot \frac{A + B + C - 180^0}{180^0},$$

ove $A + B + C - 180^0 = e$ è l'eccesso sferico.

Se invece dei tre angoli fossero dati altri tre elementi del triangolo, si potranno dagli stessi calcolare gli angoli, da questi l'eccesso sferico, e coll'aiuto di questo l'area richiesta. È bensì vero che anche per questi casi si possono trovare delle espressioni speciali per l'eccesso sferico, ma queste per lo più hanno una forma complicata, per cui ci limiteremo ai seguenti due casi che conducono a formole altrettanto eleganti quanto semplici.

§ 419. *Determinare l'eccesso sferico d'un triangolo sferico rettangolo, dati che siano i suoi due cateti* b *e* c.

Essendo $e = B + C - 90^0$, ne segue

$$\begin{aligned}
\cos e &= \cos(-e) = \cos[90^0 - (B + C)] = \operatorname{sen}(B + C) \\
&= \operatorname{sen} B \cos C + \cos B \operatorname{sen} C \\
&= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} + \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} \quad (\S\ 405,\ 2 \text{ e } 4) \\
&= \frac{(\operatorname{sen} b^2 \cos c + \operatorname{sen} c^2 \cos b) \cos a}{\operatorname{sen} a^2 . \cos b \cos c} \\
&= \frac{\operatorname{sen} b^2 \cos c + \operatorname{sen} c^2 \cos b}{1 - \cos a^2} \quad (\S\ 405,\ 1), \text{ ovvero}
\end{aligned}$$

$$\cos e = \frac{(\cos b + \cos c)\,(1 - \cos b \cos c)}{1 - \cos b^2 \cos c^2} \text{ (§ 405, 1), quindi}$$

$$\cos e = \frac{\cos b + \cos c}{1 + \cos b \cos c}.$$

Di più si ha

$$1 - \cos e = \frac{(1 - \cos b)\,(1 - \cos c)}{1 + \cos b \cos c}, \text{ e}$$

$$1 + \cos e = \frac{(1 + \cos b)\,(1 + \cos c)}{1 + \cos b \cos c}; \text{ laonde}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos e}{1 + \cos e}} = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}, \text{ ovvero}$$

$$\text{tang}\,\frac{e}{2} = \text{tang}\,\frac{b}{2} \cdot \text{tang}\,\frac{c}{2} \text{ (§ 356, 27).}$$

§ 420. *Determinare l' eccesso sferico d' un triangolo sferico obliquangolo a mezzo dei suoi tre lati* a, b *e* c.

Si ha $e = A + B - (180^0 - C)$, quindi

$\frac{1}{4} e = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} (A + B) - (90^0 - \frac{1}{2} C)]$, e perciò, giusta il § 358, 38,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{4} e = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A + B) - \text{sen}\,(90^0 - \frac{1}{2} C)}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \cos (90^0 - \frac{1}{2} C)} = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A + B) - \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A + B) + \text{sen}\,\frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{[\cos \frac{1}{2}(a - b) - \cos \frac{1}{2} c] \cdot \cos \frac{1}{2} C}{[\cos \frac{1}{2}(a + b) + \cos \frac{1}{2} c] \cdot \text{sen}\,\frac{1}{2} C} \text{ (§ 410)}$$

$$= \frac{\text{sen}\,\frac{1}{4}(a + c - b)\,\text{sen}\,\frac{1}{4}(b + c - a)}{\cos \frac{1}{4}(a + b + c) \cos \frac{1}{4}(a + b - c)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} C.$$

Ponendo $a + b + c = 2s$, ne discende, giusta il § 409, 1,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{4} e = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(s - b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(s - a)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2}(s - c)} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen}\,s\,\text{sen}\,(s - c)}{\text{sen}\,(s - a)\,\text{sen}\,(s - b)}}, \text{ ovvero}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{4} e = \sqrt{\text{tang}\,\tfrac{1}{2} s\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s - a)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s - b)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s - c)}.$$

Quest' ultima espressione è nota sotto il nome di formola di *Hulier*.

4. Problemi per esercizio.

§ 421. *Esempî per il calcolo di triangoli sferici rettangoli.*

1. $a = 54^0 20'$, $b = 36^0 27'$, $c = 43^0 32' 31''$,
   $A = 90^0$, $B = 46^0 59' 17''$, $C = 57^0 59' 17''$; $f = 0{\cdot}279\,r^2$.
2. $a = 72^0 56' 29''$, $b = 127^0 56' 32''$, $c = 63^0 15' 48''$,
   $A = 90^0$, $B = 124^0 51'$, $C = 68^0 20'$; $f = 0{\cdot}201\,r^2$.
3. $a = 52^0$, $b = 51^0 59'$, $c = 1^0 32' 50''$,
   $A = 90^0$, $B = 88^0 47' 27''$, $C = 1^0 57' 49''$; $f = 0{\cdot}0132\,r^2$.
4. $a = 87^0 13' 13''$, $b = 65^0 46' 53''$, $c = 83^0 12' 38''$,
   $A = 90^0$, $B = 65^0 55' 55''$, $C = 83^0 48' 11''$; $f = 1{\cdot}0426\,r^2$.
5. $a = 80^0\ 6'\ 5''$, $b = 33^0 12' 40''$, $c = 87^0 43' 50''$,
   $A = 90^0$, $B = 33^0 13' 56''$, $C = 88^0 45' 23''$; $f = 0{\cdot}5565\,r^2$.

Si dimostri che per ogni triangolo sferico sussistono le seguenti equazioni:

6. $\text{sen}\,b \cos A = \cos a\,\text{sen}\,c - \text{sen}\,a \cos c \cos B$;
7. $\text{sen}\,B \cos a = \cos A\,\text{sen}\,C + \text{sen}\,A \cos C \cos b$.

Si porrà nella prima equazione dei gruppi II a) e II b) il valore di $\cos b$, rispettivamente di $\cos B$, della seconda equazione del relativo gruppo.

8. $\cot a\,\text{sen}\,b = \cot A\,\text{sen}\,C + \cos C \cos b$;
9. $\cot A\,\text{sen}\,B = \cot a\,\text{sen}\,c - \cos c \cos B$.

Si deducono dai numeri 7. e 6., ponendo per $\text{sen}\,B$ e $\text{sen}\,b$ il valore $\frac{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a}$, rispettivamente $\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A}$.

10. $\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a + b)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(a - b)} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A + B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A - B)}$.

Dalle equazioni di Neper al gruppo V a).

Esempî per il calcolo di triangoli sferici obliquangoli.

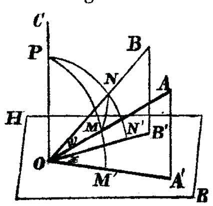
11. $a = 47^0 42'\ 1''$, $b = 63^0 15' 12''$, $c = 50^0\ 2'\ 1''$,
    $A = 55^0 52' 43''$, $B = 88^0 12' 20''$, $C = 59^0\ 4' 25''$; $f = 0{\cdot}4033\,r^2$.
12. $a = 99^0 28' 18''$, $b = 78^0 35' 34''$, $c = 68^0 24' 24''$,
    $A = 105^0\ 5' 32''$, $B = 73^0 38' 28''$, $C = 65^0 31' 34''$; $f = 1{\cdot}1215\,r^2$.
13. $a = 54^0 28'$, $b = 123^0 43'$, $c = 73^0 15' 20''$,
    $A = 21^0 17' 22''$, $B = 158^0 14' 16''$, $C = 25^0 17' 35''$; $f = 0{\cdot}4333\,r^2$.
14. $a = 55^0 52' 43''$, $b = 120^0 55' 35''$, $c = 88^0 12' 20''$,
    $A = 47^0 42'\ 1''$, $B = 129^0 57' 59''$, $C = 63^0 15' 12''$; $f = 1{\cdot}0632\,r^2$.
15. $a = 63^0 14' 39''$, $b = 107^0 52' 24''$, $c = 125^0\ 5' 41''$,
    $A = 69^0 25' 11''$, $B = 93^0 46' 14''$, $C = 120^0 55' 35''$; $f = 1{\cdot}8172\,r^2$.
16. $a = 109^0 39' 21''$, $b = 46^0 42' 11''$, $c = 69^0 50'$,
    $A = 146^0 58' 20''$, $B = 24^0 54' 47''$, $C = 32^0 54' 28''$; $f = 0{\cdot}4327\,r^2$.

II. Applicazione della Trigonometria sferica.

1. Problemi di Stereometria.

§ 422. Le relazioni sviluppate ai §§ 405 e 407—411 fra i lati e gli angoli d' un triangolo sferico danno del pari (§ 271) le relazioni esistenti fra le facce (angoli piani) e gli angoli (angoli diedri) d' un triedro.

Fig. 189.



Ridurre all' orizzonte un angolo misurato nello spazio.

Sia $A O B = w$ (fig. 189) l' angolo misurato nello spazio, OA' ed OB' le proiezioni dei suoi lati sul piano orizzontale HR, ed $A O B' = \alpha$ ed $B O B' = \beta$ gli angoli d' inclinazione degli stessi coll' orizzonte; è da determinare l' angolo $A' O B' = x$ che le due proiezioni racchiudono sul piano orizzontale.

I piani degli angoli d'inclinazione AOA' e BOB' sufficientemente estesi si tagliano lungo la retta OC normale al piano orizzontale (§ 220). Se si descrive nel triedro $OABC$ una sfera all'ingiro di O, la superficie di questa taglia gli spigoli del triedro nei punti M, N e P, risultando un triangolo sferico MNP di cui saranno noti i tre lati $MN = w$, $MP = 90° - \alpha$ ed $NP = 90° - \beta$, e nel quale P rappresenterà l'angolo x richiesto.

Giusta il § 409, 1 sarà quindi

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos(s - w)}{\cos\alpha\cos\beta}},$$

se $\alpha + \beta + w = 2s$.

§ 423. Un *poliedro regolare* è racchiuso da p poligoni di m lati, dei quali n formano un angolo poliedro; se a è il lato d'uno di questi poligoni, quale è (§ 252 e fig. 139):

a) la metà dell'angolo d'inclinazione $JLO = \frac{N}{2}$ di due facce concorrenti in uno spigolo?

b) il raggio $OJ = r$ della sfera iscritta al poliedro?

c) il raggio $OA = R$ della sfera circoscritta al poliedro?

d) la superficie S ed

e) il volume V del poliedro?

Dal triedro $OJLA$ si ha,

$$\text{ponendo } \frac{180°}{m} = \varphi \text{ e } \frac{180°}{n} = \psi,$$

$$\cos AOL = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\psi} \text{ e } \cos JOL = \frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\varphi};$$

quindi

$$\operatorname{sen}\frac{N}{2} = \cos JOL = \frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\varphi},$$

$$r = \frac{a}{2}\cot\varphi\operatorname{tang}\frac{N}{2}, \qquad R = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\frac{N}{2},$$

$$S = \frac{mpa^2}{4}\cot\varphi, \qquad V = \frac{Npa^3}{24}\cot\varphi^2\operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

§ 424. Determinare il volume V d'un parallelepipedo obliquangolo, di cui sono dati i tre spigoli a, b e c, e gli angoli α, β e γ che gli stessi racchiudono.

Se a e b sono due spigoli della base e w l'angolo d'inclinazione dello spigolo laterale c colla base, si ha innanzi tutto

$$V = abc\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}w.$$

Corrispondentemente al triedro formato dagli spigoli a, b, c, si costruisca un triangolo sferico; questo avrà per lati gli angoli α, β, γ, e l'angolo d'inclinazione w sarà espresso nello stesso dall'arco condotto per il vertice opposto normalmente al lato γ. Con riflesso ai §§ 407

e 409 si ha allora, se con B si segna l'angolo racchiuso dai due lati del triangolo α e γ, e con 2σ la somma $\alpha + \beta + \gamma$:

$$\operatorname{sen}w = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen}\gamma}\sqrt{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\alpha)\operatorname{sen}(\sigma-\beta)\operatorname{sen}(\sigma-\gamma)};$$

laonde

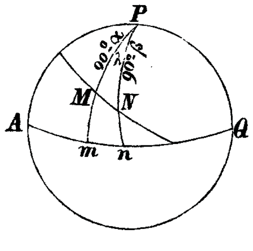
$$V = 2abc\sqrt{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\alpha)\operatorname{sen}(\sigma-\beta)\operatorname{sen}(\sigma-\gamma)}.$$

2. Problemi di Geografia matematica e di Astronomia sferica.

§ 425. 1. *Determinare la distanza sferica di due luoghi della terra, se degli stessi si conoscono le latitudini geografiche e la differenza delle loro longitudini.* (La terra considerata quale sfera).

Se M ed N (fig. 190) sono i due luoghi, la loro distanza MN è un arco di cerchio massimo della sfera. Segnando con P il polo e con AQ l'equatore, Mm ed Nn sono le latitudini dei due luoghi, e l'angolo MPN ne è la differenza mn in longitudine.

Fig. 190.



Si ponga $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$ ed $mn = \lambda$, ed il triangolo sferico MNP sarà determinato, poichè dello stesso si conoscono i due lati $MP = 90° - \alpha$ ed $NP = 90° - \beta$, e l'angolo $MPN = \lambda$ da essi racchiuso; per cui (giusta il § 412, scolio) si avrà

$$\cos MN = \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta + w)}{\cos w},$$

ove w rappresenta un angolo ausiliario calcolato dalla equazione

$$\operatorname{tang}w = \cot\alpha\cos\lambda.$$

Si calcolerà perciò innanzi tutto w, e da questo l'arco MN che si trasformerà in miglia geografiche, sapendo che 15 delle stesse formano un grado.

2. *Calcolare la differenza in longitudine di due luoghi della terra, se degli stessi si conoscono la distanza sferica e le loro latitudini.*

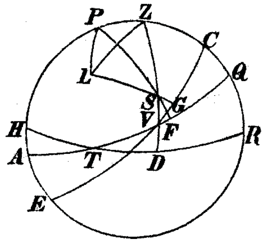
Restando fermi i significati dati al numero 1. alle grandezze α, β e λ, e segnando la distanza MN in misura d'arco con δ, si ottiene, giusta il § 409, 1,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{\cos(\sigma+\alpha)\cos(\sigma+\beta)}{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}(\sigma-\delta)}},$$

ove $2\sigma = 180° - (\alpha + \beta) + \delta$.

§ 426. Sia S (fig. 191) un astro, Z il polo dell'orizzonte HTR, ovvero lo zenit, P il polo dell'equatore AVQ, ovvero il polo artico del mondo, L il polo della eclittica EVC, ed HZR il meridiano passante per un luogo della terra, il cui zenit è Z. I cerchi massimi ZSD, PSF ed LSG, guidati per S e per i poli Z, P ed L sono normali ad HR, AQ ed EC, per cui sarà:

Fig. 191.



$SD = h$ l'altezza dell'astro,
$RD = RZD = w$ l'azimut,
$SZ = 90^0 - h = z$ la distanza zenitale,
$SF = \delta$ la declinazione,
$VF = \alpha$ l'ascensione retta,
$QF = QPF = s$ l'angolo orario,
$SP = 90^0 - \delta = p$ la distanza polare riferita all'equatore,
$SG = \beta$ la latitudine celeste,
$VG = \lambda$ la longitudine celeste,

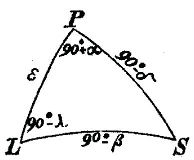
ed $SL = 90^0 - \beta$ la distanza polare eclittica.

Di più sia V l'equinozio di primavera, $HP = \varphi$ l'altezza del polo (nello stesso tempo la latitudine geografica) del luogo della terra avente lo zenit Z, e l'angolo QVC, ovvero l'arco $LP = \varepsilon$, l'obliquità della eclittica.

§ 427. 1. *Data l'ascensione retta* α, *la declinazione* δ *d'un astro e l'obliquità* ε *della eclittica, determinare la longitudine* λ *e la latitudine* β *celesti.*

Nel triangolo LPS (fig. 192) sono dati due lati, $LP = \varepsilon$ (§ 426) e $PS = 90^0 - \delta$, di più l'angolo $P = 90^0 + \alpha$ compreso dagli stessi; sono da trovarsi il lato $LS = 90^0 - \beta$ e l'angolo $L = 90^0 - \lambda$. Dal § 412, scolio, segue, se si pone

Fig. 192.



$$a = 90^0 - \delta, \quad A = 90^0 - \lambda,$$
$$b = \varepsilon,$$
$$c = 90^0 - \beta, \quad C = 90^0 + \alpha,$$
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen} \delta \cos(\varepsilon + n)}{\cos n},$$

essendo $\operatorname{tang} n = \cot \delta \operatorname{sen} \alpha$.

Per la determinazione di λ si ha

$$\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \beta}.$$

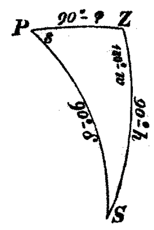
2. *Si determinino* α *e* δ, *conoscendo* λ, β *ed* ε.

La soluzione è analoga a quella al numero 1.

§ 428. 1. *Sono dati l'altezza* h *e l'azimut* w *d'un astro, di più l'altezza del polo* φ *d'un luogo; si cerchino la declinazione* δ *e l'angolo orario* s.

Del triangolo ZPS (fig. 193) sono dati due lati, $ZS = 90^0 - h$ e $ZP = 90^0 - \varphi$, di più l'angolo da essi racchiuso $Z = 180^0 - w$; sono da cercarsi l'angolo $P = s$ ed il lato $PS = 90^0 - \delta$.

Fig. 193.



Riferendosi al § 412, scolio, e ponendo

$$a = 90^0 - h, \quad A = s,$$
$$b = 90^0 - \varphi,$$
$$c = 90^0 - \delta, \quad C = 180^0 - w,$$

si ottiene per il calcolo di δ l'equazione

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{\operatorname{sen} h \operatorname{sen}(\varphi - m)}{\cos m},$$

essendo $\operatorname{tang} m = \cot h \cos w$.

L'angolo orario risulta dall'equazione

$$\operatorname{sen} s = \frac{\operatorname{sen} w \cos h}{\cos \delta}.$$

2. *Dati* δ, s *e* φ, *calcolare* h *e* w.

La soluzione è analoga a quella al numero 1.

3. *Dati* δ, h *e* φ, *calcolare* s *e* w.

Giusta il § 409, 1, si ha

$$\operatorname{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)] \operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)]}{\operatorname{sen}[45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)] \operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)]}},$$

$$\cot \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)] \operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)]}{\operatorname{sen}[45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)] \operatorname{sen}[45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)]}}.$$

4. *Dati* h, w *ed* s, *determinare* δ *e* φ.

Con riflesso al § 414 si ha

$$\cos \delta = \frac{\cos h \operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} s}, \text{ e}$$

$$\operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\cos \frac{1}{2}(w - s)}{\cos \frac{1}{2}(w + s)} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(h - \delta).$$

§ 429. *Determinare il tempo del levare e tramontare d'un astro.*

Il triangolo sferico ZPS (fig. 193) dà (§ 408, IIa)

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Per il levare ed il tramontare dell'astro è $h = 0$, quindi

$$0 = \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s, \text{ da cui}$$
$$\cos s = -\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi, \text{ ovvero}$$
$$\cos(180^0 - s) = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi,$$

ove s dinota l'angolo orario dell'astro al suo levare od al suo tramonto, vale a dire il tempo che passa fra il suo levare e la sua culminazione superiore, oppure fra questa ed il suo tramontare, o quello che si dice l'*arco semidiurno* dell'astro.

P. e. Quale sarà per Vienna l'arco semidiurno del sole al 13 maggio, se la declinazione del sole in quel giorno è $\delta = 18^0\, 25'$?

L'altezza del polo per Vienna è $\varphi = 48^0\, 12'\, 35''$, per cui sarà

$$180^0 - s = 68^0\, 7'\, 39'' \text{ ed } s = 111^0\, 52'\, 21''.$$

Per trasformare questo arco in tempo si ha la proporzione: $360^\circ : 111^\circ 52' 21'' = 24$ ore $: x$ ore, da cui $x = 7^h 27' 29''$.

Per il sole poi, s espresso in tempo indica del pari il tempo vero del suo tramonto, e $24^h - s$ quello del suo levare. Al 13 maggio quindi il sole tramonta a Vienna alle $7^h 27' 29''$ di sera e si alza alle $16^h 32' 31''$, cioè alle $4^h 32' 31''$ di mattina.

Per gli altri astri, però, dato il tempo vero della culminazione, si deve sottrarre dallo stesso, rispettivamente aggiungervi, il valore di s espresso in tempo vero, per ottenere il tempo vero del levare, rispettivamente del tramontare dell'astro.

Scolio. L'arco semidiurno del sole, preso doppio, dà la *lunghezza del giorno.*

Siccome nei solstizî la declinazione $\pm \delta$ del sole è eguale all'obliquità dell'eclittica, $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$, ne viene che

$$\cos(180^\circ - s) = \pm \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} \varphi$$

serve a determinare la *durata del giorno più lungo, rispettivamente del giorno più corto* dell'anno.

3. Problemi per esercizio.

§ 430. 1. Si determini α) $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$, β) $\cos A$ per il *a*) tetraedro, *b*) ottaedro, *c*) dodecaedro, *d*) icosaedro regolare, se A dinota l'angolo d'inclinazione di due facce laterali (§ 423 e § 362, 1—3).

Per $\operatorname{sen} \frac{A}{2}$ si ha *a*) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, *b*) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, *c*) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, *d*) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$.

„ $\cos A$ „ *a*) $\frac{1}{3}$, *b*) $-\frac{1}{3}$, *c*) $-\frac{1}{2}$, *d*) $\frac{2}{3}$.

2. Una sezione fatta per l'asse a d'un cilindro taglia la base dello stesso lungo un segmento che colla proiezione dell'asse forma un angolo β; se r è il raggio della base, e se α dinota l'angolo d'inclinazione dell'asse colla base, quale è l'area della sezione?

3. Trovare il volume d'un prisma triangolare di cui si conoscono tre spigoli a, b, c concorrenti in un vertice, e gli angoli α, β, γ da essi racchiusi (§ 424).

4. Si calcoli il volume v d'una piramide triangolare, dati che siano tre spigoli a, b, c concorrenti in un vertice, e gli angoli α, β, γ formati dagli stessi.

Dal § 424 e dal problema antecedente risulta

$$v = \tfrac{1}{6}\, a b c \sqrt{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen}(\sigma - \alpha) \operatorname{sen}(\sigma - \beta) \operatorname{sen}(\sigma - \gamma)},$$

ove $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$.

5. Abbiasi da determinare il volume v d'una piramide triangolare, se a, b e c sono tre dei suoi spigoli concorrenti in un vertice, e se

A, B, C dinotano gli angoli diedri che si trovano rispettivamente in quegli spigoli.

Dal risultato dell'antecedente problema 4, ed avuto riflesso alle formole dei gruppi III *a*) e III *b*) del § 409 e del gruppo I) del § 407 si ricava

$$v = \frac{2abc}{3 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} - \cos S \cos(S - A) \cos(S - B) \cos(S - C),$$

ove $2S = A + B + C$.

6. La latitudine di Vienna è di $48^\circ 12' 35''$, quella di Roma di $41^\circ 53' 54''$; le rispettive loro longitudini sono $34^\circ 2' 49''$ e $40^\circ 9' 30''$; quale è la distanza sferica di queste due città?

7. La distanza sferica delle due città di Vienna e Parigi è di 139·67 miglia geografiche; se $48^\circ 12' 35''$ è la latitudine della prima città, e $48^\circ 50' 13''$ quella della seconda, quale è la differenza dei loro orologi.

8. Date le latitudini e le longitudini di tre luoghi della terra ed il raggio terrestre, calcolare i lati, gli angoli e l'area del triangolo sferico determinato da quei tre luoghi.

9. La longitudine d'un astro è di $62^\circ 52' 28''$, la sua latitudine di $19^\circ 40' 39''$ e l'obliquità dell'eclittica di $23^\circ 27' 30''$; quale è l'ascensione retta, quale la declinazione dell'astro?

10. Si calcolino l'altezza e l'azimut d'un astro di cui si conoscono la sua declinazione di $21^\circ 58' 15''$, il suo angolo orario di $15^\circ 38' 42''$ e l'altezza del polo di $50^\circ 5' 18''$.

11. Quale sarà l'altezza del sole sopra l'orizzonte di Graz al 15 aprile alle 11 ore ant., se l'altezza del polo per Graz è di $47^\circ 4' 20''$ e se la declinazione del sole in quel giorno è di $9^\circ 50'$?

12. A che ora del 20 maggio aveva il sole a Vienna un'altezza di $38^\circ 30'$, se la declinazione del sole in quel giorno è di $20^\circ 4'$ e se l'altezza del polo per Vienna è di $48^\circ 12' 35''$?

13. La latitudine di Praga è di $50^\circ 5' 18''$, quella di Trieste di $45^\circ 38' 37''$; si calcoli la durata del giorno più lungo di queste due città (§ 429, scolio).

14. Quale è la latitudine d'un luogo il cui giorno più lungo è di 18 ore?

15. Quanti gradi almeno di latitudine deve avere un luogo, acciocchè il giorno suo più lungo duri 24 ore?

PARTE QUARTA.

GEOMETRIA ANALITICA.

§ 431. La *Geometria analitica* ha per oggetto la disamina delle figure geometriche per mezzo del calcolo (analisi).

Nel seguente trattato ci limiteremo alla Geometria analitica *nel piano*.

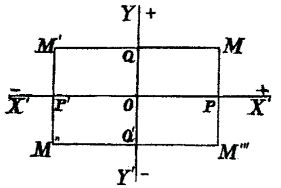
I. Il punto.

Coordinate ortogonali.

§ 432. Per determinare *analiticamente* una figura, la si riferisce a certe linee ed a certi punti fissi che nel loro complesso formano un così detto *sistema di coordinate*. Il sistema di coordinate più semplice e più usitato è l'*ortogonale*.

Si conducano (fig. 194) due rette fisse fra loro normali, XX' ed YY', che si tagliano nel punto O.

Fig. 194.



Queste rette chiamansi *assi delle coordinate*, e precisamente XX' è l'*asse delle ascisse*, YY' l'*asse delle ordinate*; il punto della loro intersezione O dicesi l'*origine delle coordinate*.

Sia ora M un punto del piano passante per XX' ed YY'. Se si abbassano dallo stesso la MP normale alla XX' e la MQ normale alla YY', la posizione del punto M determina pienamente le sue distanze MP ed MQ dagli assi delle coordinate. Viceversa: conoscendo le distanze MP ed MQ, la posizione del punto M è dalle stesse pienamente determinato; infatti, erigendo in P e Q due normali, l'una alla XX', l'altra alla YY', il punto d'incontro delle medesime dà il punto M.

Le distanze MQ ed MP diconsi le *coordinate* del punto M, e precisamente la distanza MQ od il segmento ad essa eguale OP

l'*ascissa*, e la distanza MP l'*ordinata*. L'ascissa si segna ordinariamente con x, l'ordinata con y, qualora si riferiscano ad un punto in genere.

Per esprimere analiticamente che un dato punto M ha le coordinate $OP = a$ ed $MP = b$, si fa uso dell'equazioni

$$x = a, \; y = b,$$

che perciò vengono chiamate le *equazioni del punto M*.

Uno stesso punto viene espresso in tal modo sempre dalle stesse equazioni, come del pari le stesse due equazioni non determinano che uno stesso punto. Il punto M è perciò la rappresentazione geometrica delle equazioni $x = a$, $y = b$, e viceversa, queste sono la rappresentazione analitica del punto M.

Un punto M che abbia le coordinate a e b, segnasi per lo più per brevità con (a, b).

§ 433. I due assi delle coordinate dividono il piano in quattro *quadranti*. Per dinotare in quale dei quattro quadranti si trovi un dato punto, si distinguono le coordinate che sono situate alle parti opposte d'ogni asse coi segni $+$ e $-$. Per lo più si considerano come *positive* quelle ascisse che si trovano *alla destra*, come *negative* quelle che si trovano *alla sinistra* dell'asse delle ordinate; le ordinate sono *positive* o *negative*, a seconda che esse stanno al *di sopra* od al *di sotto* dell'asse delle ascisse.

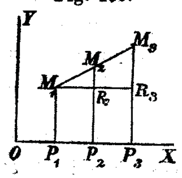
In base a tale convenzione si ha, ponendo (fig. 194) $OP = OP' = a$ ed $OQ = OQ' = b$,

per il punto M ... $x = +a$, $y = +b$;
" " " M' ... $x = -a$, $y = +b$;
" " " M'' ... $x = -a$, $y = -b$;
" " " M''' ... $x = +a$, $y = -b$.

I punti situati nell'asse delle ascisse hanno le loro ordinate eguali a zero, come a zero sono eguali le ascisse di quei punti che si trovano nell'asse delle ordinate. Per l'origine O situata tanto nell'asse delle ascisse, quanto in quello delle ordinate, si ha $x = 0$, $y = 0$.

§ 434. ***Distanza di due punti dati per mezzo delle loro coordinate.***

Fig. 195.



Siano (fig. 195) $OP_1 = x_1$ ed $M_1P_1 = y_1$ le coordinate del punto M_1, $OP_2 = x_2$ ed $M_2P_2 = y_2$ le coordinate del punto M_2. Si conduca $M_1R_2 \parallel OX$, e dal triangolo rettangolo $M_1R_2M_2$ ne discenderà

$$M_1M_2^2 = M_1R_2^2 + M_2R_2^2, \text{ ovvero,}$$

ponendo la distanza $M_1M_2 = d$,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Viceversa: la condizione che un punto (x, y) abbia dal punto (a, b) la distanza d, viene espressa dalla equazione:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=d^2.$$

Per la distanza di un punto (x_1, y_1) dall'origine delle coordinate $(0, 0)$ si ha:

$$d^2=x_1{}^2+y_1{}^2.$$

§ 435. *Condizioni a cui devono soddisfare tre punti per trovarsi in linea retta.*

1. Siano (fig. 195) i punti dati $M_1=(x_1, y_1)$, $M_2=(x_2, y_2)$ ed $M_3=(x_3, y_3)$. Se i tre punti sono situati in linea retta, e se $M_1R_3 \parallel OX$, i triangoli $M_1R_2M_2$ ed $M_1R_3M_3$ sono simili fra loro, per cui si avrà:

$$\frac{M_2R_2}{M_3R_3}=\frac{M_1R_2}{M_1R_3}, \text{ ovvero } \frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1};$$

vale a dire: *le differenze delle ordinate di ogni due punti devono essere proporzionali alle rispettive differenze delle ascisse.*

2. Viceversa: se per tre punti $M_1=(x_1, y_1)$, $M_2=(x_2, y_2)$ ed $M_3=(x_3, y_3)$ sussiste l'equazione di condizione

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\ldots 1),$$

i tre punti si trovano in linea retta.

Supposto che la retta passante per M_1 ed M_2 tagliasse la normale all'asse delle ascisse, avente x_3 per ascissa, in un punto M qualsiasi la cui ordinata sia y, i tre punti M_1 M_2 ed M sarebbero situati in linea retta, per cui secondo il numero 1) dovrebbe sussistere l'equazione

$$\frac{y_2-y_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\ldots 2).$$

Dalle equazioni 1) e 2) segue poi $y=y_3$, cioè i punti (x_3, y) ed (x_3, y_3) devono confondersi in uno, ovvero M è identico con M_3.

§ 436. *Dalle coordinate di due punti* $M_1=(x', y')$ *ed* $M_3=(x'', y'')$ *dedurre quelle d'un terzo punto* M_2 *che divida il segmento* M_1M_3 *che li congiunge in un dato rapporto* $m:n$ (fig. 195).

Siano x, y le coordinate chieste del punto M_2, per cui

$$m:n=M_1M_2:M_2M_3=P_1P_2:P_2P_3, \text{ ovvero}$$

$$m:n=(x-x'):(x''-x), \text{ quindi}$$

$$x=\frac{nx'+mx''}{m+n}.$$

Similmente si ottiene

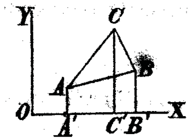
$$y=\frac{ny'+my''}{m+n}.$$

Per il *punto medio* del segmento M_1M_3 si ha $m=n$, e perciò

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \qquad y=\frac{y'+y''}{2}.$$

§ 437. *Area d'un triangolo i cui vertici sono dati per mezzo delle loro coordinate.*

Fig. 196.



Se a è l'area del triangolo ABC (fig 196),

$$a=AA'C'C+CC'B'B-AA'B'B.$$

Riferendo questo triangolo al sistema ortogonale delle coordinate XOY, e segnando:

le coordinate del vertice A...con x_1, y_1,

„ „ „ „ B... „ x_2, y_2,

„ „ „ „ C. . „ x_3, y_3,

si avrà

$$AA'C'C=\frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2},$$

$$CC'B'B=\frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2},$$

$$AA'B'B=\frac{(y_1+y_2)(x_2-x_1)}{2}; \text{ quindi}$$

$$a=\frac{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}{2}.$$

Scolî. 1. In simil guisa si può esprimere l'area di qualsiasi poligono per mezzo delle coordinate dei suoi vertici.

2. Se i punti A, B e C sono situati in linea retta, è $a=0$, e perciò $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$, da cui risulta l'equazione di condizione

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$$

ottenuta già in altra guisa al § 435.

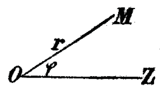
Coordinate obliquangole.

§ 438. Se i due assi XX' ed YY' non sono normali, ma obliqui fra loro, il sistema di coordinate dicesi *obliquangolo*. Le *coordinate obliquangole* di un punto M sono in tal caso le misure dei segmenti condotti da M *parallelamente* ai due assi. Qui appresso non si tratterà che di coordinate parallele ortogonali.

Coordinate polari.

§ 439. Oltre al sistema delle coordinate parallele, usasi talvolta anche il *sistema polare* di coordinate. In questo sistema prendesi un punto fisso O (fig. 197), detto il *polo*, e dallo stesso si guida un raggio fisso OZ, detto l'*asse polare*.

Fig. 197.



La posizione di un punto M è pienamente determinata, se dello stesso si conoscono la distanza MO dal polo, e l'angolo MOZ che la MO forma coll'asse polare. La distanza MO dicesi il *raggio vettore*, che preso sempre in senso assoluto viene segnato in generale con r. L'angolo $MOZ=\varphi$ contasi da 0° sino 360°, ovvero da 0° sino ± 180°. Le grandezze r e φ chiamansi le *coordinate polari* del punto M.

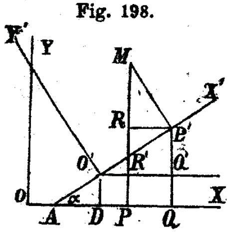
Trasformazione delle coordinate.

§ 440. Nelle ricerche analitiche fa d'uopo talvolta di esprimere le coordinate d'un punto, riferite ad un dato sistema di assi, per mezzo delle coordinate dello stesso punto riferite ad un nuovo sistema d'assi, la cui posizione verso il primo sia pienamente determinata. Un tale problema costituisce la così detta *trasformazione delle coordinate.*

Per gli scopi di questo trattato basterà limitarsi alla disamina dei seguenti casi.

Passaggio da un sistema ortogonale di coordinate ad altro pure ortogonale.

Fig. 198.



Siano (fig. 198) OX ed OY gli assi del sistema ortogonale primitivo, ed $O'X'$ ed $O'Y'$ quelli del nuovo sistema ortogonale; $OP = x$ ed $MP = y$ siano le coordinate di un punto M riferite al primo sistema, $O'P' = x'$ ed $MP' = y'$ le coordinate dello stesso punto riferite al secondo sistema; di più siano $OD = m$ ed $O'D = n$ le coordinate della nuova origine O' rispetto al primo sistema, ed $XAX' = \alpha$ l'angolo formato dai due assi delle ascisse.

Si tratta ora di esprimere le coordinate primitive x, y per mezzo delle nuove coordinate x', y' e delle grandezze m, n ed α.

Si conducano da P' le $P'Q$ e $P'R$ normali ad OX ed MP, e per O' la $O'Q'$ normale a $P'Q$; sarà allora

$$x = OP = OD + DQ - PQ = m + O'Q' - RP',$$
$$y = MP = PR' + RR' + MR = n + P'Q' + MR.$$

Sostituendovi i valori

$$O'Q' = O'P' \cos\alpha = x' \cos\alpha,$$
$$RP' = MP' \operatorname{sen}\alpha = y' \operatorname{sen}\alpha,$$
$$P'Q' = O'P' \operatorname{sen}\alpha = x' \operatorname{sen}\alpha,$$
$$MR = MP' \cos\alpha = y' \cos\alpha,$$

si ottengono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y &= n + x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots 1).$$

Se i due sistemi hanno la stessa origine, si ha $m = n = 0$, e perciò

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y &= x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots 2).$$

Se il nuovo asse delle ascisse è parallelo al primitivo e si cangia soltanto l'origine, è $\alpha = 0$, e le equazioni in 1) si trasformano nelle seguenti;

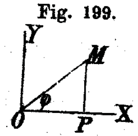
$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \\ y &= n + y' \end{aligned}\right\} \ldots 3).$$

§ 441. *Passaggio da un sistema ortogonale ad un sistema polare di coordinate.*

Qui ci limitiamo al caso più semplice, quando, cioè, il polo O (fig. 199) coincide coll'origine, e l'asse polare OX coincide coll'asse delle ascisse del sistema ortogonale.

Siano $x = OP$ ed $y = MP$ le coordinate ortogonali del punto M, $r = OM$ il raggio vettore, e $\varphi = MOX$ l'angolo che lo stesso forma coll'asse polare.

Fig. 199.



Dal triangolo rettangolo MPO risulta

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \\ y &= r \operatorname{sen}\varphi; \end{aligned}\right\} \ldots 4)$$

di più

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Scolio. Segnando con ξ ed η gli angoli che il raggio vettore OM forma cogli assi positivi della x e della y, contati da $0°$ a $180°$, si ottiene

$$x = r \cos\xi \text{ ed } y = r \cos\eta.$$

Sostituiti questi valori in $x^2 + y^2 = r^2$, risulta

$$\cos\xi^2 + \cos\eta^2 = 1.$$

Problemi.

§ 442. 1. Si determini la posizione dei punti, le cui coordinate sono:

a) $x = 3$, $y = 4$; *b)* $x = -2$, $y = 3$; *c)* $x = -1$, $y = -4$;
d) $x = -2$, $y = 1$; *e)* $x = 0$, $y = 2$; *f)* $x = -3$, $y = 0$.

2. Si costruisca il triangolo ABC avente i vertici $A = (-2, 0)$, $B = (2, -3)$ e $C = (4, 4)$.

3. Si determini la distanza dei punti *a)* (7, 10) e (−5, 5), *b)* (6, −5) e (−2, 1), *c)* (12, −12) e (−9, 8).

4. Si esprima, per mezzo d'una equazione, che il punto (x, y) sia equidistante dai punti (5, 4) e (3, 2).

5. Si fissi il punto equidistante dai punti (3, 4), (2, −3) e (−2, 3), e si indichi tale distanza.

6. Due vertici d'un triangolo sono (4, −2) e (3, 2), il terzo è situato nell'origine; si determinino *a)* la lunghezza d'ogni lato, *b)* le coordinate del punto medio di ciascun lato, e *c)* l'area del triangolo.

II. Equazioni fra due variabili e loro luoghi geometrici.

§ 443. Quelle grandezze alle quali in un calcolo od in uno sviluppo si assegna un valore invariato e fisso, diconsi *costanti*, mentre *variabili* sono quelle grandezze che, restando omogenee a sè stesse, possono assumere qualsiasi valore.

Le relazioni esistenti fra le grandezze variabili e quelle costanti si esprimono per mezzo di *equazioni*; p. e. $y = 2x + 3$. Se x dinota una grandezza variabile, anche y è tale, dacchè $2x + 3$ si cangia col cangiare di x; siccome poi ad ogni valore speciale di x dell'equazione $y = 2x + 3$ corrisponde un dato valore di y, ne viene che y è dipendente da x. Le variabili sono perciò *indipendenti* o *dipendenti*; le prime sono quelle che assumono qualsiasi valore omogeneo a sè stesse, alle seconde invece non si possono assegnare altri valori che quelli determinati dalla variabile indipendente.

Per dinotare che la variabile y dipende da un'altra x, si dice che y è una *funzione* di x, esprimendo ciò col simbolo $y = f(x)$.

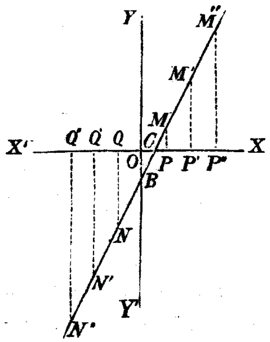
§ 444. Un'equazione fra due variabili x ed y ammette infinite soluzioni; se per x si sostituiscono successivamente dei valori speciali fra loro differenti, ad ogni valore di x corrispondono nella equazione uno o più valori di y. Considerando ogni coppia di valori corrispondenti di x e y quali coordinate di un punto M riferite ad un dato sistema d'assi, si scorge che ogni soluzione dell'equazione può essere rappresentata geometricamente da un punto costruito per mezzo delle relative coordinate.

Quanto meno differiscono fra di loro i valori presi successivamente per x, tanto più si avvicinano fra di loro i punti determinati dalle relative coordinate. Facendo percorrere ad x tutti i valori reali positivi e negativi da $-\infty$ a $+\infty$, il punto variabile M descrive una *linea* determinata che ha la proprietà che le coordinate d'ogni suo punto soddisfanno alla data equazione. Questa linea dicesi il *luogo geometrico dell'equazione*.

Per tracciare una tale linea si determinano della stessa tanti punti quanti sono necessari onde essa sia pienamente determinata.

A maggiore schiarimento servano i seguenti esempî:

Fig. 200.



1. Abbiasi da costruire l'equazione di primo grado,

$$y = 2x - 1,$$

vale a dire, abbiasi di questa equazione a determinare il luogo geometrico.

Sia XX' (fig. 200) l'asse delle ascisse ed O l'origine delle coordinate.

Per $x = 1, 2, 3 \ldots,$
si ha $y = 1, 3, 5 \ldots,$
Per $x = -1, -2, -3 \ldots,$
si ha $y = -3, -5, -7 \ldots,$

Si trasportino sull'asse delle ascisse i valori positivi di x da O in $P, P', P'' \ldots$ e quelli negativi da O in $Q, Q', Q'' \ldots$, si

erigano in questi punti delle normali, e su queste si riportino i corrispondenti valori di y, e precisamente i positivi all'insù ed i negativi all'ingiù. I punti estremi $M, M', M'' \ldots, N, N', N'' \ldots$ delle normali si trovano sulla linea determinata analiticamente dall'equazione $y = 2x - 1$. Che questa linea poi sia retta, risulta dall'essere le differenze delle ordinate proporzionali a quelle delle ascisse (§ 435, 2).

Per ottenere il punto B nel quale la retta taglia l'asse delle ordinate, si pone $x = 0$, per cui $y = 2x - 1 = -1$, quindi $OB = -1$. Per il punto C, nel quale l'asse delle ascisse viene tagliato dalla retta, si ha $y = 0$, quindi $2x - 1 = 0$, e perciò $x = \frac{1}{2}$, ovvero $OC = \frac{1}{2}$.

Si costruisca in simil guisa l'equazione $y = -2x$.

Qual luogo geometrico corrisponde alle seguenti equazioni:

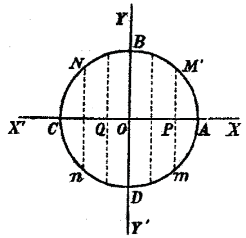
a) $y = 0$, *b*) $x = 0$, *c*) $y = b$, *d*) $x = c$?

Ad ogni equazione di primo grado corrisponde una linea retta.

2. Si costruisca l'equazione quadratica

$$x^2 + y^2 = 9, \text{ ovvero } y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

Fig. 201.



Per $x = 0$	si ha $y = \pm 3$,
$x = 1$	$y = \pm\sqrt{8}$,
$x = 2$	$y = \pm\sqrt{5}$,
$x = 3$	$y = 0$;
$x = -1$	$y = \pm\sqrt{8}$,
$x = -2$	$y = \pm\sqrt{5}$,
$x = -3$	$y = 0$.

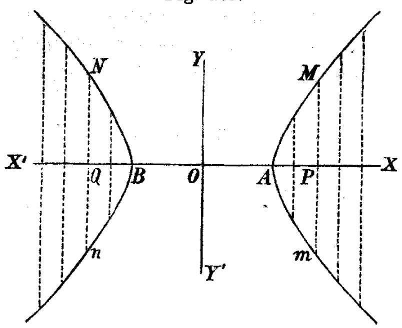
Se si considerano ogni due valori corrispondenti di x ed y quali coordinate di un punto riferite ad un sistema il cui asse delle ascisse sia XX' (fig. 201) e la cui origine sia O, si scorge che tanto ad ogni ascissa corrispondono due coordinate eguali ed opposte, quanto ad ogni ordinata due ascisse eguali ed opposte. La linea corrispondente all'equazione data consta perciò di quattro parti fra loro collegate, che sono simmetriche rispetto agli assi delle coordinate.

Per $x = 0$, si ha $y = \pm 3$; prendendo perciò $OB = +3$ ed $OD = -3$, B e D sono i punti nei quali la linea taglia l'asse delle ordinate. Ad $y = 0$ corrisponde $x = \pm 3$, per cui prendendo $OA = +3$ ed $OC = -3$, si ottengono in A e C i punti nei quali la linea interseca l'asse delle ascisse.

Per valori di x positivi o negativi maggiori di 3 non si ha veruna ordinata, poichè per $x > 3$, y è immaginario; del pari non può essere y maggiore di 3. La linea curva in questione è quindi limitata.

3. Sia da costruire l' equazione quadratica
$$x^2 - y^2 = 9, \text{ ovvero } y = \pm \sqrt{x^2 - 9}.$$
Per $x = \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 5, \quad \pm 6, \quad \pm 7 \ldots,$
si ha $y = \quad 0, \quad \pm \sqrt{7}, \quad \pm 4, \quad \pm \sqrt{27}, \quad \pm \sqrt{40} \ldots$

Fig. 202.



Per tutti i valori di x fra -3 e $+3$, y è immaginario, e perciò (fig. 202) non si ottengono punti della linea. Per $x = \pm 3$, si ha $y = 0$, per cui la linea taglia l' asse delle ascisse nelle distanze $OA = +3$ ed $OB = -3$. Siccome poi ad ascisse positive e negative eguali corrispondono coordinate eguali, ne viene che la linea è formata da due rami fra loro disgiunti e disposti simmetricamente da ambe le parti dell' asse delle ordinate.

Ad ogni ascissa positiva e negativa corrispondono due ordinate eguali ed opposte, e col crescere delle ascisse all' infinito crescono del pari all' infinito le ordinate. Da ciò si inferisce che ogni ramo della linea consta di due parti che si estendono all' infinito e simmetricamente d' ambe le parti dell' asse delle ascisse.

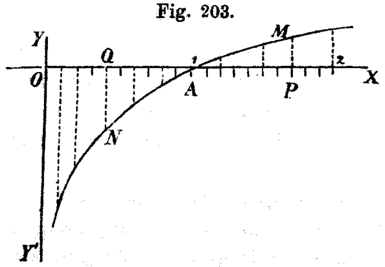
Si costruiscano del pari le equazioni quadratiche:

$a)$ $y^2 = 6x - x^2$, $\qquad c)$ $y^2 = 4x$, $\qquad e)$ $4x^2 + 9y^2 = 36$,
$b)$ $y = x^2 + 3x - 2$, $\qquad d)$ $xy = 10$, $\qquad f)$ $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Dagli esempî or pertrattati si scorge che i luoghi geometrici di equazioni quadratiche hanno le forme le più svariate.

4. Si costruisca l' equazione trascendente
$$10^y = x, \text{ ovvero } y = \log x.$$

Fig. 203.



Siccome y non può essere reale che per valori positivi di x, ne viene che la linea (fig. 203) corrispondente all'equazione $y = \log x$ non possa estendersi che da una parte dell'asse delle ordinate.

Per $x = 1$, $y = 0$, cioè la linea taglia l' asse delle ascisse alla distanza $OA = 1$ dall'origine.
Per $x = 1{\cdot}2, 1{\cdot}5, 1{\cdot}7, 2, 10, 100 \ldots$
è $y = 0{\cdot}08, 0{\cdot}18, 0{\cdot}23, 0{\cdot}3, 1, 2, \ldots$

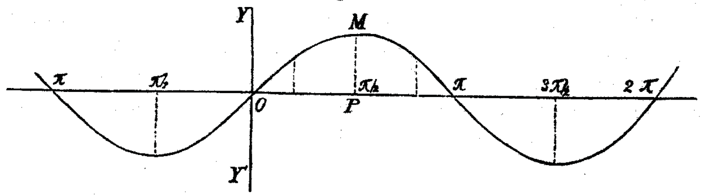
Ad ascisse maggiori di 1 corrispondono quindi delle ordinate positive che con x vanno sempre più crescendo; la linea si estende perciò alla destra di A e al di sopra dell' asse delle ascisse.

Per $x = \quad 0{\cdot}8, \quad 0{\cdot}6, \quad 0{\cdot}4, \quad 0{\cdot}2, \quad 0{\cdot}1, \quad 0{\cdot}01 \ldots,$
si ha $y = -0{\cdot}1, \quad -0{\cdot}22, \quad -0{\cdot}4, \quad -0{\cdot}7, \quad -1, \quad -2 \ldots$

Col diminuire quindi di x da 1 a 0, y diventa negativo, aumentando sempre in valore assoluto; la linea quindi si estende all' ingiù ed alla sinistra di A avvicinandosi sempre più all' asse delle ordinate senza però mai raggiungerlo.

5. Si costruisca l' equazione trascendente (fig. 204)
$$y = \operatorname{sen} x.$$
Per $x = 0, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}, \ 2\pi, \ \frac{5\pi}{2} \ldots,$
si ha $y = 0, \ 1, \ 0, \ -1, \ 0, \ 1 \ldots$
Per $x = -\frac{\pi}{2}, \ -\pi, \ -\frac{3\pi}{2}, \ -2\pi, \ -\frac{5\pi}{2} \ldots,$
si ha $y = -1, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad -1 \ldots$

Fig. 204.



Alle ascisse $x = 0, \ \pm \pi, \ \pm 2\pi, \ \pm 3\pi \ldots$ corrisponde l' ordinata $y = 0$; la linea espressa dall' equazione $y = \operatorname{sen} x$ taglia quindi l' asse delle ascisse tanto nell' origine quanto alle distanze $\pi, \ 2\pi, \ 3\pi \ldots$ a destra ed a sinistra dell' origine stessa.

Da $x = 0$ sino ad $x = \frac{\pi}{2}$ le ordinate sono positive e crescono; per $x = \frac{\pi}{2}$, l' ordinata raggiunge il suo massimo valore di 1; da lì impoi le ordinate decrescono nella stessa guisa sino a che per $x = \pi$, y diventa 0 e la linea taglia l' asse delle ascisse. Una parte del tutto eguale della linea trovasi al di sotto dell' asse delle ascisse fra $x = \pi$ ed $x = 2\pi$. Delle relazioni analoghe sussistono del pari per valori negativi di x.

La linea curva raffigurata geometricamente dalla equazione $y = \operatorname{sen} x$ consta quindi di un numero infinito di parti eguali, le quali alternativamente sono situate al di sopra ed al di sotto dell' asse delle ascisse.

§ 445. Del pari che ogni equazione fra x ed y può essere rappresentata geometricamente da una linea, così viceversa ogni linea per la quale sussiste una data legge di formazione può essere espressa per mezzo d'una equazione. Infatti, fra le coordinate d'un punto variabile M della linea dovrà sussistere una data relazione risultante da una proprietà caratteristica qualsiasi della linea e valevole per ogni posizione del punto variabile. L'equazione che esprime questa relazione fra x ed y dicesi l'*equazione della linea.*

Una equazione quindi fra due variabili è la rappresentazione *analitica* di una data linea, e viceversa la linea è la rappresentazione *geometrica* di una data equazione. Su tale vicendevole dipendenza si fonda la *Geometria analitica.* Essa ha il duplice scopo di dedurre dalle proprietà caratteristiche d'una linea l'equazione a cui devono soddisfare le coordinate dei punti della linea stessa, ed inoltre di dedurre da una data equazione fra due variabili la linea che da questa equazione è rappresentata, specialmente poi di discutere le proprietà delle figure geometriche, modificando, combinando ed interpretando le equazioni che rappresentano queste linee.

Qui appresso si esamineranno analiticamente, secondo il loro ordine, le singole linee rappresentate da equazioni di primo e secondo grado.

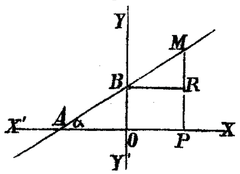
III. La linea retta.

§ 446. *Equazione generale d'una retta.*

Sia AB (fig. 205) la retta data, e supponiamo che la sua posizione sia determinata geometricamente per mezzo dell'angolo $BAX = \alpha$, che essa forma colla direzione positiva dell'asse delle ascisse, e dal segmento $OB = b$ sull'asse delle ordinate, che da tale retta viene tagliato.

Sia M un punto qualsiasi della AB, ed $x = OP$, $y = MP$ siano le sue coordinate. Si guidi la $BR \parallel OX$ e si avrà

Fig. 205.



$$y = MP = MR + RP.$$

Essendo poi

$MR = BR . \operatorname{tang} MBR = x \operatorname{tang} \alpha$, e $RP = b$, ne discende

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + b,$$

ovvero, ponendo $\operatorname{tang} \alpha = a$,

$$y = ax + b$$

Ma tale equazione sussiste fra le coordinate x ed y di qualsiasi punto della retta AB, quindi essa è l'*equazione della retta.*

Siccome poi a e b dinotano due numeri reali qualsisiano, ne viene che $y = ax + b$ è l'espressione analitica per tutte le rette possibili. Mentre per una data retta, a e b hanno valori del tutto determinati

e *costanti*, x ed y all'invece sono *variabili*, vale a dire essi assumono valori differenti per ogni altro punto della retta. La quantità $a = \operatorname{tang} \alpha$, che dipende soltanto dalla direzione della retta verso l'asse delle ascisse, chiamasi la *costante di direzione.*

§ 447. *Discussione dell'equazione* $y = ax + b$.

1. Siccome l'equazione $y = ax + b$ ha due costanti a e b che restano indeterminate sino a che non si tratti d'una data retta, ne segue che *due* sono le *condizioni* indispensabili per la completa determinazione d'una data retta.

2. La costante di direzione $a = \operatorname{tang} \alpha$ è positiva o negativa, a seconda che l'angolo α formato dalla retta coll'asse positivo delle ascisse è acuto od ottuso. La costante b è positiva o negativa, a seconda che la retta taglia l'asse delle ordinate al di sopra o al di sotto dell'asse delle ascisse.

Egli è perciò che dai segni delle costanti si può di già inferire da qual parte gli assi delle coordinate vengono tagliati dalla retta.

3. Per il punto d'intersezione A della retta AB (fig. 205) coll'asse delle ascisse è $y = 0$, per cui dalla equazione data si ricava $x = -\frac{b}{a}$. Per il punto d'intersezione B della retta coll'asse delle ordinate è $x = 0$, laonde $y = b$.

Ponendo $-\frac{b}{a} = c$, quindi $a = -\frac{b}{c}$, l'equazione $y = ax + b$ prende la forma

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

nella quale i denominatori di x ed y dinotano i segmenti che la retta, a partire dall'origine, determina sugli assi.

4. Per $b = 0$, si ottiene $y = ax$, quale *equazione d'una retta passante per l'origine delle coordinate.* Questa equazione non ha che *una* sola costante, dacchè all'altra delle due condizioni viene già soddisfatto dovendo la retta passare per l'origine.

5. Acciocchè la retta, passante per l'origine delle coordinate e data dall'equazione $y = ax$, coincida coll'asse delle ascisse, deve l'angolo α, e perciò anche a, ridursi a zero, e si ottiene in tal guisa $y = 0$, quale *equazione dell'asse delle ascisse.*

Scambiando l'asse delle ascisse con quello delle ordinate si ottiene $x = 0$, quale *equazione dell'asse delle ordinate.*

6. Acciocchè la retta sia parallela all'asse della x alla distanza b, si dovrà porre nell'equazione $y = ax + b$, l'angolo α, e perciò anche $a = 0$, e si ottiene in tal modo $y = b$, quale *equazione d'una retta che alla distanza b è parallela all'asse delle ascisse.*

Scambiando l'asse della x con quello della y ne risulta $x = c$, quale *equazione d'una retta che alla distanza c è parallela all'asse delle ordinate.*

§ 448. *Il luogo geometrico d'una equazione di primo grado fra due variabili è una linea retta.*

Dimostrazione: Ogni equazione di primo grado fra due variabili, $Ax + By + C = 0$, si può ridurre alla forma $y = ax + b$. Se si considera l'equazione $y = ax + b$ quale espressione analitica d'una linea in cui x ed y siano le coordinate dei suoi punti, ed a e b quantità costanti, tre punti qualsisiano di questa linea aventi le coordinate x_1, y_1, x_2, y_2 ed x_3, y_3 hanno le equazioni

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b, \qquad y_3 = ax_3 + b.$$

Sottraendo la prima equazione da ciascuna delle altre, si ottiene $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ ed $y_3 - y_1 = a(x_3 - x_1)$, e perciò anche

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

I punti (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sono situati quindi (§ 435, 2) in linea retta, ovvero, ciò che è il medesimo, il luogo geometrico dell'equazione $y = ax + b$ è una linea retta.

§ 449. *Costruzione d'una retta data per mezzo della sua equazione.*

Si determinino due punti per i quali deve passare la retta, ricavando dall'equazione e costruendo due coppie di valori di x ed y. In generale più opportuna riesce all'uopo la determinazione dei punti d'intersezione della retta coi due assi, sostituendo nell'equazione prima $y = 0$ poi $x = 0$.

§ 450. *Equazione d'una retta che passa per un punto dato* (x_1, y_1).

Nell'equazione domandata che ha la forma

$$y = ax + b \ldots 1),$$

sono da determinarsi a e b in conformità al problema.

Affinchè la retta passi per il punto (x_1, y_1), le sue coordinate x_1 ed y_1, poste al luogo di x ed y, devono soddisfare all'equazione 1), per cui si ha

$$y_1 = ax_1 + b \ldots 2).$$

Sottraendo questa equazione dall'antecedente, risulta

$$y - y_1 = a(x - x_1) \ldots 3),$$

quale equazione d'una retta che passa per il punto (x_1, y_1).

Questa equazione contiene ancora una costante indeterminata a, come deve essere infatti, potendosi da un punto condurre un numero infinito di linee rette.

§ 451. *Equazione d'una retta che passa per due punti dati* (x_1, y_1) *ed* (x_2, y_2).

L'equazione chiesta ha la forma

$$y = ax + b \ldots 1)$$

in cui a e b sono ancora da determinarsi.

Affinchè la retta passi per il punto (x_1, y_1), le sue coordinate x_1 ed y_1, poste invece di x ed y, dovranno soddisfare a quella equazione, e si ha in tal guisa l'equazione di condizione

$$y_1 = ax_1 + b \ldots 2).$$

Ma la retta deve passare eziandio per il punto (x_2, y_2), laonde

$$y_2 = ax_2 + b \ldots 3).$$

Si sottragga l'equazione 2) prima da 1) e poi da 3) e si otterrà dapprima

$$y - y_1 = a(x - x_1) \ldots 4),$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \ldots 5),$$

e poi, colla eliminazione di a, la chiesta equazione

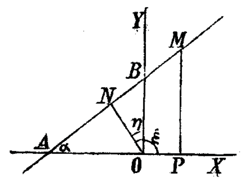
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ldots 6).$$

§ 452. *Forma normale dell'equazione d'una retta.*

Supponiamo che la posizione della retta AB (fig. 206) sia determinata geometricamente dalla lunghezza della normale $ON = p$ abbassata sulla retta dall'origine, e dagli angoli $XON = \xi$ ed $YON = \eta$, che questa normale forma cogli assi positivi delle coordinate.

La forma generale dell'equazione d'una tale retta sarà, ponendo $BAX = \alpha$, tang $\alpha = a$ ed $OB = b$,

Fig. 206.



$$y = ax + b, \text{ ovvero}$$

$$y - ax - b = 0.$$

Moltiplicando l'equazione per $\cos\alpha$, si ha

$$y\cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha - b\cos\alpha = 0,$$

ovvero, essendo $\alpha = \eta = \xi - 90^0$, e perciò

$$-\operatorname{sen}\alpha = \cos\xi \text{ (§ 350), e}$$

$$\cos\alpha = \cos\eta \text{ e } b\cos\alpha = p,$$

$$x\cos\xi + y\cos\eta - p = 0.$$

La stessa equazione si otterrebbe in modo analogo per qualsiasi altra posizione della retta; nei casi, però, in cui $\cos\alpha$ e b hanno segni contrarî, l'equazione generale deve essere moltiplicata per $-\cos\alpha$, anzichè per $\cos\alpha$.

L'equazione $x\cos\xi + y\cos\eta - p = 0$ dicesi la *forma normale dell'equazione d'una retta.* Essa contiene tre costanti, $\cos\xi$, $\cos\eta$ e p, che si possono ridurre a due, poichè $\cos\xi^2 + \cos\eta^2 = 1$ (§ 441, scolio); quindi noto $\cos\xi$, è determinato del pari $\cos\eta$. Gli angoli ξ e η vengono contati da 0° a 180°, e positiva si considera in tutti i casi la lunghezza p.

Scolio. Da quanto precede risulta chiaramente che per derivare dalla forma generale dell'equazione d'una retta la sua forma normale, basterà moltiplicare tutti i termini della prima equazione per il fattore

$$\pm \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan g\,\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ne segue quindi che per ogni valore di x ed y dovrà essere

$$x\cos\xi + y\cos\eta - p = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}},$$

e perciò

$$\cos\xi = \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}},\ \cos\eta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ p = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}},$$

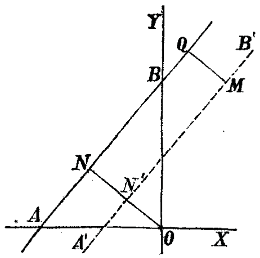
nei quali valori si deve prendere eguale segno per la $\sqrt{1+a^2}$ e per b.

§ 453. *Distanza di un punto dato da una retta data.*

1. Sia (fig. 207) $M = (x', y')$ il punto dato, ed $x\cos\xi + y\cos\eta - p = 0$ l'equazione della retta data AB, espressa nella sua forma normale.

Dovendosi ritenere $p = ON$ come positivo, ne viene che la normale $P = MQ$ abbassata dal punto M sulla retta AB è da supporsi positiva o negativa, a seconda che M e l'origine O sono situati dalla stessa parte od alle parti opposte della AB. Consideriamo il primo caso, cioè, che P sia positivo.

Fig. 207.



Guidiamo per M la $A'B' \parallel AB$; la ON' normale alla $A'B'$, confondendosi colla ON, formerà anche essa cogli assi delle coordinate gli angoli ξ e η; l'equazione della $A'B'$ sarà quindi, se $ON' = p$,

$$x\cos\xi + y\cos\eta - p' = 0.$$

Ma il punto $M = (x', y')$ si trova su questa retta, quindi

$$x'\cos\xi + y'\cos\eta - p' = 0, \text{ e perciò}$$
$$p' = x'\cos\xi + y'\cos\eta.$$

Essendo poi $MQ = ON - ON'$, ovvero $P = p - p'$, ne segue

$$P = p - x'\cos\xi - y'\cos\eta, \text{ ovvero}$$
$$P = -(x'\cos\xi + y'\cos\eta - p).$$

Siccome a tale risultato si giunge per qualsiasi altra posizione del punto M, ne segue che *prendendo negativamente la prima parte dell'equazione d'una retta, data nella sua forma normale, si ottiene la distanza del punto* (x, y) *da quella retta.*

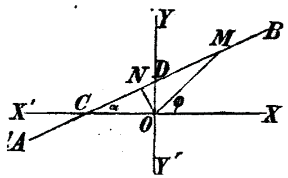
2. Se l'equazione della retta AB fosse data nella forma generale $y = ax + b$, si otterrebbe, essendo, giusta il § 452, scolio,

$$x\cos\xi + y\cos\eta - p = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}},$$
$$P = -\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

§ 454. *Equazione polare d'una retta.*

Per ottenere nel modo più semplice l'equazione della retta AB (fig. 208) in coordinate polari, si supponga il polo nell'origine O delle coordinate ortogonali e si assuma l'asse delle ascisse OX quale asse polare; per il punto M si avrà allora $r = OM$ e $\varphi = MOX$.

Fig. 208.



Se quindi $ON = p$ dinota la distanza del polo dalla retta AB, e se l'angolo $BCX = \alpha$, il triangolo rettangolo MNO dà

$$OM = \frac{ON}{\operatorname{sen} NMO}, \text{ ovvero,}$$

essendo $NMO = \varphi - \alpha$,

$$r = \frac{p}{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)}$$

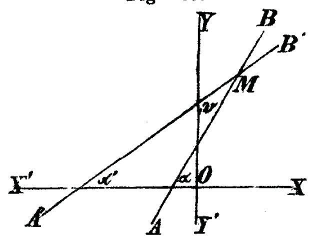
quale *equazione polare* della retta AB.

Questa equazione si può dedurre del pari per mezzo della trasformazione delle coordinate, qualora nell'equazione generale della retta AB per coordinate ortogonali, $y = ax + b$, in cui $a = \tan g\,\alpha$ e $b = OD$, si ponga (§ 440) $y = r\operatorname{sen}\varphi$ ed $x = r\cos\varphi$, notando che $b = \frac{p}{\cos\alpha}$.

Due rette.

§ 455. *Punto d'intersezione di due rette date per mezzo delle loro equazioni.*

Fig. 209.



Siano $y = ax + b \ldots 1)$,

$y = a'x + b' \ldots 2)$

le equazioni delle due rette AB ed $A'B'$ (fig. 209); si cerchino le coordinate del loro punto d'intersezione M.

Per tutti i punti della retta AB è $y = ax + b$; per tutti i punti della retta $A'B'$ è $y = a'x + b'$; per il punto situato sopra ambedue le rette, cioè per il punto d'intersezione M, dovrà essere tanto $y = ax + b$ quanto $y = a'x + b'$. Al punto M converranno quindi quelle coordinate di x ed y che soddisfanno nello stesso tempo ad ambedue le equazioni. I valori di tali coordinate, ottenuti dalla soluzione delle equazioni date, sono

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ ed } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

§ **456.** *Reciproca posizione di due rette.*

1. Le equazioni delle rette AB e $A'B'$ (fig. 209) che coll'asse delle ascisse formano gli angoli α ed α', siano

$$y = ax + b \text{ ed } y = a'x + b',$$

in cui $a = \operatorname{tang}\alpha$ ed $a' = \operatorname{tang}\alpha'$. Per la determinazione dell'*angolo* $AMA' = v$ racchiuso dalle due rette si ha:

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'}, \text{ ovvero } \operatorname{tang} v = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

2. Se le due rette AB ed $A'B'$ sono *parallele* fra loro, se quindi $\alpha = \alpha'$, si ha $a = a'$.

Se le due rette sono *normali* fra loro, o il che è il medesimo, se $\alpha = 90^0 + \alpha'$, si ha $\operatorname{tang}\alpha = -\cot\alpha'$ (§ 350), e perciò anche $a = -\frac{1}{a'}$.

Le equazioni $a = a'$ ed $a = -\frac{1}{a'}$ esprimono le condizioni alle quali le rette devono soddisfare per essere *parallele*, rispettivamente *normali* fra loro.

§ **457.** *Equazione della bisettrice d'un angolo i cui lati sono dati per mezzo delle loro equazioni.*

1. Siano $x\cos\xi_1 + y\cos\eta_1 - p_1 = 0$ ed $x\cos\xi_2 + y\cos\eta_2 - p_2 = 0$, ovvero per brevità

$$A_1 = 0 \text{ ed } A_2 = 0,$$

le equazioni dei lati d'un angolo, espresse nella loro forma normale.

a) Se l'origine si trova nell'angolo dato o in quello a lui opposto al vertice, le distanze d'un punto qualsiasi (x, y) della bisettrice dai lati dell'angolo saranno (giusta il § 453) $-A_1$ e $-A_2$, rispettivamente $+A_1$ e $+A_2$. Siccome poi queste distanze, giusta il § 46, 2, sono eguali, ne discende che in tutti e due i casi dovrà essere $A_1 = A_2$, per cui

$$A_1 - A_2 = 0$$

esprimerà l'equazione della bisettrice dell'angolo.

b) Se l'origine si trova in uno degli angoli adiacenti all'angolo dato, le distanze d'ogni punto (x, y) della bisettrice dai lati dell'angolo hanno segni contrarî; tali distanze sono quindi $-A_1$ e $+A_2$, ovvero $+A_1$ e $-A_2$, e dovendo le stesse essere eguali, ne segue che in ogni caso sarà $A_1 = -A_2$, per cui

$$A_1 + A_2 = 0$$

esprimerà l'equazione della bisettrice dell'angolo.

2. Se le equazioni dei lati d'un angolo sono date nella loro forma generale $y = a_1x + b_1$ ed $y = a_2x + b_2$, ne discende da 1., con riflesso allo scolio del § 452,

$$\frac{y - a_1x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} - \frac{y - a_2x - b_2}{\sqrt{1 + a_2^2}} = 0,$$

quale equazione della bisettrice dell'angolo in cui trovasi l'origine delle coordinate, ed

$$\frac{y - a_1x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} + \frac{y - a_2x - b_2}{\sqrt{1 + a_2^2}} = 0,$$

quale equazione della bisettrice del suo angolo adiacente.

§ **458.** *Condizioni alle quali tre rette devono soddisfare affinchè si taglino in uno stesso punto.*

Siano $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ ed $R_3 = 0$ le equazioni di tre rette, nelle quali $R = 0$ fu posto quale simbolo dell'equazione d'una retta, sia essa data nella forma generale, $y - ax - b = 0$, o nella forma normale, $x\cos\xi + y\cos\eta - p = 0$.

Se, moltiplicate successivamente le tre equazioni date con λ_1, λ_2 e λ_3, i prodotti costanti che ne risultano sono tali da rendere identica l'equazione $\lambda_3 R_3 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$, le tre rette si tagliano nello stesso punto.

Infatti, ponendo nell'equazione identica, $\lambda_3 R_3 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$, i valori speciali di x ed y che soddisfanno alle equazioni $R_1 = 0$ ed $R_2 = 0$ e che corrispondono quindi al loro punto d'incontro, la sua seconda parte si annulla, per cui anche la prima parte di quella equazione identica $\lambda_3 R_3$ si annulla, ed essendo λ_3 una quantità costante, ne segue $R_3 = 0$. Questi valori speciali di x ed y soddisfanno quindi a tutte e tre le equazioni, per cui le tre rette si tagliano vicendevolmente nello stesso punto.

Se fra le equazioni di tre rette, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ *ed* $R_3 = 0$ *sussiste l'equazione identica* $\lambda_3 R_3 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$, *le tre rette si tagliano nello stesso punto.*

La forma più frequente che si presenta nell'applicazione di questa equazione identica si è quella di

$$R_3 = R_1 + R_2,$$

che risulta ponendovi i valori speciali $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Questa equazione espressa in parole suona: *Se le equazioni di tre rette sono tali che una di esse sia eguale alla somma delle altre due, le tre rette si tagliano nello stesso punto.*

§ **459.** Quale applicazione dei precedenti teoremi facciamo seguire qui appresso le dimostrazioni analitiche di alcuni teoremi sopra i triangoli rettilinei.

1. *Le bisettrici degli angoli interni d'un triangolo si tagliano nello stesso punto* (§ 48, 2).

Se le equazioni dei lati d'un triangolo, espresse nella loro forma normale, sono

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

e se l'origine delle coordinate si prende all'interno del triangolo, le equazioni delle bisettrici degli angoli sono, giusta il § 457,

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 - A_3 = 0, \qquad A_3 - A_2 = 0.$$

Siccome poi la prima di queste equazioni è eguale alla somma delle altre due, ne segue, giusta il § 458, che le bisettrici si tagliano nello stesso punto.

2. *In ogni triangolo le bisettrici d'un angolo interno e dei suoi due angoli non adiacenti esterni si tagliano in un punto.*

Giusta il § 457 si ottengono, come prima, quali equazioni delle tre bisettrici,

$$A_2 - A_1 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_2 + A_3 = 0.$$

La terza equazione è eguale alla somma delle altre due, quindi le tre bisettrici si tagliano nello stesso punto.

3. *Le bisettrici dei tre angoli esterni d'un triangolo tagliano i lati opposti in tre punti che sono situati sulla stessa retta.*

Se le equazioni dei lati d'un triangolo, espresse nella loro forma normale, sono

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

e se l'origine delle coordinate è all'interno del triangolo, le equazioni delle bisettrici degli angoli esterni opposti a quei lati sono

$$A_2 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_2 = 0.$$

Le coordinate del punto d'intersezione della bisettrice $A_2 + A_3 = 0$ col lato opposto $A_1 = 0$ devono soddisfare a tutte e due queste equazioni, e perciò anche all'altra $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, od in altre parole, il punto d'intersezione è situato sulla retta che ha per equazione $A_1 + A_2 + A_3 = 0$.

Similmente ne segue, che tanto il punto d'intersezione della bisettrice $A_1 + A_3 = 0$ col lato $A_2 = 0$, quanto quello della bisettrice $A_1 + A_2 = 0$ col lato $A_3 = 0$ devono trovarsi sulla retta avente l'equazione $A_1 + A_2 + A_3 = 0$; quindi tali punti coincidono coll'altro punto d'intersezione trovato antecedentemente.

4. *Le mediane d'un triangolo si tagliano nello stesso punto* (§ 61).

Per semplicità si prenda nel triangolo ABC (fig. 210) il vertice A, quale origine delle coordinate, ed il lato AB, quale asse delle ascisse. Per la determinazione analitica dei tre vertici si avrà allora

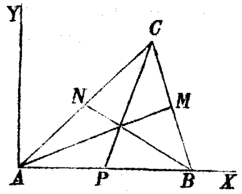
$$A = (0, 0), \qquad B = (x_2, 0), \qquad C = (x_3, y_3).$$

Se M, N e P sono i punti medî dei lati opposti ai tre vertici A, B e C del triangolo, si avrà

$$M = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad N = \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad P = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right).$$

Per le mediane AM, BN e CP si ottengono perciò, giusta il § 451, le seguenti equazioni:

Fig. 210.



$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2}} \cdot x,$$

$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3}{2} - x_2} (x - x_2),$$

$$y = \frac{y_3}{x_3 - \frac{x_2}{2}} \left(x - \frac{x_2}{2}\right),$$

che si possono porre sotto la forma:

$$(x_2 + x_3)\, y - y_3 x = 0,$$
$$(x_3 - 2x_2)\, y - y_3 x + x_2 y_3 = 0.$$
$$(2x_3 - y_2)\, y - 2y_3 x + x_2 y_3 = 0.$$

Siccome la terza equazione è eguale alla somma delle altre due, le mediane rappresentate da tali equazioni si tagliano nello stesso punto.

Problemi.

§ 460. 1. Si determini l'equazione d'una retta, *a*) che tagli sull'asse delle ordinate il segmento -2, e che coll'asse delle ascisse formi un angolo di 45°, *b*) che tagli sull'asse delle ascisse il segmento -3, e sull'asse delle ordinate il segmento -2.

2. Si costruisca la retta corrispondente all'equazione:

a) $y = 3x + 5$, *b*) $y = -2x + 3$, *c*) $y = 2x$.

3. Dati i punti

a) $(1, -1)$ e $(-2, 2)$, *b*) $(2, 7)$ e $(-1, 1)$;
c) $(-\frac{1}{2}, 3)$ e $(3, 0)$, *d*) $(0, -2)$ e $(-\frac{2}{3}, -3)$,

trovare l'equazione della retta passante per quei punti.

4. Si determini la distanza *a*) del punto $(2, 3)$ dalla retta $4y = 3x + 12$, *b*) del punto $(7, 4)$ dalla retta $15y = -8x - 30$.

5. I vertici d'un triangolo sono $(-2, 2)$, $(4, 2)$ ed $(1, 6)$; quali sono *a*) le equazioni dei lati, *b*) quali le altezze del triangolo?

6. Si trovino le coordinate del punto d'intersezione e l'angolo delle due rette

a) $y = -3x + 5$ ed $y = -2x - 4$;
b) $3y = 2x + 9$ e $4y = x + 3$.

7. Le equazioni dei lati d'un triangolo sono $y = -x - 3$, $7y = -2x - 6$ e $3y = 2x - 14$; si trovino *a*) le coordinate dei vertici, *b*) l'area del triangolo.

8. Si trovi l'equazione d'una retta che passi per il punto $(4, -1)$ e per il punto d'intersezione delle due rette $y = 2x - 4$ ed $y = -x - 5$.

9. Si stabilisca l'equazione d'una retta che, passando per il punto (x_1, y_1), sia *a*) parallela, *b*) normale alla retta $y = ax + b$

$$a)\ y - y_1 = a(x - x_1), \qquad b)\ y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

10. Si determini l'equazione d'una retta che passi per il punto $(-4, 3)$ e sia parallela alla retta $5y = 2x - 4$.

11. Si trovi l'equazione d'una retta che passando per il punto $(-2, 4)$ sia parallela alla retta che congiunge i punti $(2, -3)$ e $(3, 1)$.

12. Si trovi l'equazione d'una retta che passi per il punto $(1, 4)$ e sia normale alla retta $2y = -x + 2$.

13. Due rette $\frac{x}{3} + y = 1$ ed $\frac{x}{2} - y = 1$ si tagliano; quale è l'equazione della retta che, passando per il loro punto d'intersezione, è normale alla seconda di quelle due rette?

14. Si determini l'equazione dell'asse di simmetria d'un segmento, le cui estremità sono $(1, -2)$ e $(3, -4)$.

15. Le equazioni dei lati d'un angolo sono *a*) $3y + 4x = 2$ e $4y = 3x - 5$, *b*) $10y - 24x = 1$ e $6y - 8x = 5$; quale è l'equazione della sua bisettrice?

Si dimostrino analiticamente i seguenti teoremi:

16. Le bisettrici d'un angolo e del suo angolo adiacente sono normali fra loro (§ 457, 2).

17. Le bisettrici di due angoli interni e del terzo angolo esterno d'un triangolo tagliano i lati opposti in tre punti che sono situati sulla stessa retta.

18. Le tre altezze d'un triangolo (§ 60) si tagliano nello stesso punto.

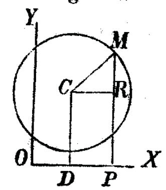
19. Gli assi di simmetria dei tre lati d'un triangolo (§ 48, 1) si tagliano in un punto.

IV. Il cerchio.

§ 461. *Equazione generale del cerchio.*

Nel *cerchio* tutti i punti sono equidistanti dal centro. Per ottenere l'equazione del cerchio, basterà tradurre in linguaggio analitico questa sua proprietà caratteristica.

Fig. 211.



Siano (fig. 211) $OP = x$, $MP = y$ le coordinate del punto M d'un cerchio di raggio $CM = r$, ed $OD = p$ e $CD = q$ le coordinate del suo centro. Si conduca $CR \parallel OX$ e sarà
$$CR^2 + MR^2 = CM^2.$$
Essendo poi $CR = x - p$, $MR = y - q$ e la distanza CM, per tutti i punti del cerchio, $= r$, ne discende, quale ***equazione generale del cerchio***,
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \ldots 1).$$

Questa equazione, contenendo ***tre costanti*** p, q ed r, mostra che tre sono le condizioni indispensabili affinchè siano completamente determinate la posizione e la grandezza d'un cerchio. Comunque si mutino queste tre costanti, l'equazione rappresenterà sempre un cerchio, se anche di varia posizione e di varia grandezza, nè il variare di queste costanti porterà alterazione alcuna sul carattere di questa linea curva.

Scolio. All'equazione 1) si può dare la forma:
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \ldots 2).$$
Questa forma, detta la *forma normale dell'equazione del cerchio*, segnasi talvolta per brevità col simbolo $C = 0$.

Dinotando $(x - p)^2 + (y - q)^2$ il quadrato della distanza del punto $M = (x, y)$ dal centro del cerchio, ne viene che $(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2$, vale a dire la differenza fra il quadrato di questa distanza ed il quadrato del raggio, dinota la potenza del punto M riferita al cerchio (§ 138). Si può quindi dire che:

La prima parte C *dell'equazione del cerchio, data nella sua forma normale* C = 0, *esprime la potenza del punto* (x, y) *riferita al cerchio.*

§ 462. Per posizioni speciali degli assi delle coordinate, l'equazione del cerchio assume delle forme ancor più semplici.

1. Se l'origine si trova sulla periferia del cerchio, e se il semiasse positivo delle ascisse passa per il suo centro, si ha $p = r$, $q = 0$, e l'equazione 1) si trasforma in
$$x^2 + y^2 = 2rx \ldots 3).$$
Questa equazione del cerchio dicesi l'*equazione al vertice.*

2. Se l'origine delle coordinate si trova nel centro del cerchio, si ha $p = 0$, $q = 0$, e l'equazione 1) si trasforma in
$$x^2 + y^2 = r^2 \ \ldots 4).$$
Questa equazione del cerchio chiamasi l'*equazione al centro.*

Le equazioni 3) e 4) contengono una sola costante, ciò che è ben naturale, poichè delle tre condizioni che sono generalmente richieste, due sono di già contenute nelle premesse sotto le quali hanno luogo quelle equazioni.

§ 463. *Discussione dell' equazione* $x^2 + y^2 = r^2$.

A tale scopo **scegliamo fra le equazioni del** cerchio quella al centro, come la più semplice.

1. Da $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ segue, che ad ogni valore di x, per il quale y ha un valore reale, corrispondono due valori eguali, ma opposti di y; il cerchio quindi viene diviso dall' asse delle ascisse in due parti simmetriche.

2. Da $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$ segue del pari, che ad ogni valore di y, per il quale x ha un valore reale, corrispondono due valori eguali, ma opposti di x; l'asse delle ordinate divide perciò il cerchio in due parti simmetriche.

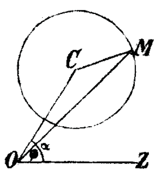
3. Per i punti d'intersezione del cerchio coll' asse delle ascisse si ha $y = 0$, e perciò $x = \pm r$. Per i punti d'intersezione del cerchio coll' asse delle ordinate si ha $x = 0$, e perciò $y = \pm r$. Il cerchio taglia quindi tanto l' asse delle ascisse quanto quello delle ordinate in due punti, i quali sono situati alle parti opposte dell' origine ed alla distanza r dalla stessa.

4. Per $x > r$, y è immaginario, e per $y > r$, x è pure immaginario; il massimo valore che si può porre per x ed y è quindi il raggio r.

§ 464. *Equazione polare del cerchio.*

Siano (fig. 212) C il centro d' un cerchio, $CM = a$ il suo raggio, O il polo del sistema polare di coordinate, $OC = \rho$ il raggio vettore del centro e $COZ = \alpha$ l'angolo formato dalla OC coll' asse polare OZ. Ora se M è un punto del cerchio, e quindi $r = OM$ il suo raggio vettore, e $\varphi = MOZ$ l'angolo che questo forma coll' asse polare, dal triangolo CMO si ha

Fig. 212.



$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2\,OM\,.\,OC\,.\cos COM,$$

ovvero $a^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\alpha - \varphi)$, da cui risulta

$$r = \rho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \rho^2 \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)^2},$$

quale *equazione polare* generale del cerchio.

Per $\rho = 0$, l'equazione prende la forma $r = a$.

Due cerchi.

§ 465. *Condizioni per l' intersezione ed il contatto di due cerchi.*

Siano O ed o i centri di due cerchi, R ed r i loro raggi, ed $Oo = c$ la loro linea dei centri. Senza punto restringere la generalità della ricerca si può prendere O quale origine, ed Oo quale asse delle ascisse; per cui le equazioni dei due cerchi sono

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ ed } (x - c)^2 + y^2 = r^2.$$

Per ottenere le coordinate dei punti comuni ad ambidue i cerchi, si determinano dalle loro equazioni i valori di x ed y; sottraendo a questo scopo la seconda equazione dalla prima, si ha

$$x^2 - (x - c)^2 = R^2 - r^2, \text{ ovvero } 2cx - c^2 = R^2 - r^2, \text{ quindi}$$

$$x = \frac{c^2 + R^2 - r^2}{2c}.$$

Sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{4c^2R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2}$$

ovvero, essendo

$$\begin{aligned} 4c^2R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2 &= (2cR + c^2 + R^2 - r^2)(2cR - c^2 - R^2 + r^2) \\ &= [(c + R)^2 - r^2]\,.\,[r^2 - (c - R)^2] \\ &= (c + R + r)(c + R - r)(r + c - R)(r - c + R), \end{aligned}$$

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(c + R + r)(c + R - r)(c - R + r)(R + r - c)}.$$

Ne segue quindi che due sono in genere i valori risultanti per y, e che questi sono reali e differenti, reali ed eguali, od immaginarî, a seconda che il prodotto sotto il segno radicale è positivo, eguale a zero, o negativo. I due cerchi perciò hanno due punti, un punto o non hanno verun punto comune fra loro. Potendosi prendere sempre $R \geqq r$, ed essendo positivi i fattori $c + R + r$ e $c + R - r$, ne viene che soltanto dagli altri due fattori $c - R + r$ ed $R + r - c$ dipende quale dei casi succitati possa risultare.

1. Se i due fattori $c - R + r$ ed $R + r - c$ hanno segni eguali, essi non possono essere che positivi, inquantochè non si potrebbe avere contemporaneamente $c < R - r$ e $c > R + r$. In questo caso, in cui $R - r < c < R + r$, y ha due valori reali e contrarî; i due cerchi si tagliano in due punti che hanno ordinate eguali e di segno contrario, e le stesse ascisse.

2. Se uno dei fattori, $R + r - c$ e $c - R + r$ è eguale a zero, o ciò che è il medesimo, se è $c = R + r$, ovvero $c = R - r$, si ha $y = 0$, ed i due cerchi non hanno che *un* solo punto comune; essi sono quindi tangenziali, e precisamente tangenziali esterni nel primo caso, e tangenziali interni nel secondo caso.

3. Se i due fattori $R + r - c$ e $c - R + r$ hanno segni contrarî, se quindi si ha contemporaneamente

$$c > R + r, \text{ e quindi anche } c > R - r,$$

$$\text{ovvero } c < R - r, \text{ e quindi anche } c < R + r,$$

y è immaginario, ed i due cerchi non hanno verun punto comune; nel primo caso l'uno dei cerchi è situato tutto all'infuori, nel secondo tutto all'interno dell'altro cerchio.

Si vede quindi che tali ricerche analitiche conducono ai teoremi già noti del § 93 risguardanti la posizione di due cerchi.

§ 466. *Equazione dell' asse radicale di due cerchi.*

Abbiansi le equazioni di due cerchi

$$(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-r_1^2=0, \text{ ed}$$
$$(x-p_2)^2+(y-q_2)^2-r_2^2=0,$$

che per brevità segneremo con

$$C_1=0 \text{ e } C_2=0.$$

Sottraendo queste equazioni si ha

$$C_1-C_2=0, \text{ ovvero}$$
$$2x(p_2-p_1)+2y(q_2-q_1)+p_1^2+q_1^2-r_1^2-(p_2^2+q_2^2-r_2^2)=0,$$

che è l' equazione d' una retta.

Per conoscere più da vicino le proprietà di questa retta, si noti che C_1 e C_2 dinotano le potenze del punto (x, y) riferite ai due cerchi dati (§ 461, scolio) L' equazione $C_1-C_2=0$, ovvero $C_1=C_2$ esprime perciò che ogni punto della retta rappresentata da quella equazione ha potenze eguali rispetto ai due cerchi, od in altre parole che questa retta è l' *asse radicale* (§ 139) dei due cerchi. Risulta quindi, che *se* $C_1=0$ *e* $C_2=0$ *sono le equazioni normali di due cerchi,* $C_1-C_2=0$ *è l' equazione del loro asse radicale.*

Teorema. *Gli assi radicali di tre cerchi si tagliano nello stesso punto.*

Dimostrazione: Se $C_1=0$, $C_2=0$ e $C_3=0$ sono le equazioni di tre cerchi, date nella loro forma normale,

$$C_1-C_2=0, \qquad C_1-C_3=0, \qquad C_3-C_2=0$$

sono le equazioni degli assi radicali di ogni due cerchi.

Siccome la prima di queste tre equazioni è eguale alla somma delle altre due, ne viene che le rette rappresentate dalle stesse, cioè i loro assi radicali, si debbano tagliare nello stesso punto (§ 458).

Il punto comune d' intersezione dei tre assi radicali di tre cerchi dicesi il *centro radicale* dei tre cerchi.

Problemi.

§ 467. 1. L' equazione d' un cerchio è

a) $x^2+y^2=6x+8y+24$, *b)* $x^2+y^2=2x$,

c) $36x^2+36y^2+36x+144y+89=0$;

si determinino le coordinate del centro ed il raggio.

2. Si costruisca un cerchio la cui equazione sia:

a) $x^2+y^2-6y=16$, *b)* $2x^2+2y^2-x=0$,

c) $4x^2+4y^2-4x+16y=19$.

3. Si costruisca il cerchio dato dalla proporzione $x:y=(y-6):(8-x)$.

4. Le equazioni di due cerchi sono $x^2+y^2-6x-10y+30=0$ ed $x^2+y^2+2x-4y=4$; si cerchi *a)* l' equazione della loro linea dei centri, *b)* la distanza dell'origine delle coordinate dalla loro linea dei centri.

5. Trovare l' equazione d' un cerchio che passando tanto per il centro esterno quanto per il centro interno di similitudine di due cerchi dati, abbia per diametro la distanza di questi due centri di similitudine (§ 142).

6. Si domanda l' equazione del luogo geometrico dei vertici di tutti i triangoli che hanno la stessa base a ed in cui *a)* la somma dei quadrati degli altri due lati è eguale ad a^2, *b)* gli altri due lati stiano nel rapporto costante $m:n$.

Si prenda la base quale asse delle ascisse ed una sua estremità quale origine delle coordinate.

7. Quale è l' equazione d' un cerchio col centro (p, q), tangenziale alla retta $y=ax+b$?

Il raggio è eguale alla distanza del centro dalla retta.

8. Abbiasi da descrivere un cerchio di raggio $r=13$ che tocchi la retta $5x+12y=124$ in un punto, la cui ascissa è $x_1=8$; quale ne sarà l' equazione?

9. Si determini l' equazione d' un cerchio che passando per il punto (6, 8), tocchi la retta $4x+3y+1=0$ in un pnnto, la cui ascissa è $x_2=-1$.

10. Le equazioni dei lati d' un triangolo sono $12x-5y+13=0$, $3x+4y+26=0$ e $15x-8y+14=0$; si determini l' equazione del cerchio iscritto a tale triangolo.

11. Si trovi l' equazione del cerchio passante per i tre punti $(4, -2)$, $(-1, 3)$ e $(-5, -1)$.

12. Trovare l' equazione d' un cerchio che passi per i due punti $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e tocchi la retta $3x-4y+6=0$.

13. Si determini l' equazione d'un cerchio che, passando per i due punti (0, 0) e (2, 0), tocchi esternamente il cerchio $(x-5)^2+(y-3)^2=16$.

La linea dei centri dei due cerchi è eguale alla somma dei loro raggi.

14. Quale è l' equazione dell' asse radicale dei due cerchi $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ ed $(x-1)^2+(y+2)^2=16$?

15. Si determini il centro radicale dei tre cerchi $(x-3)^2+y^2=5$, $(x+4)^2+(y+1)^2=9$ ed $(x-1)^2+(y-2)^2=7$.

V. L' elisse.

§ 468. Una linea del piano che abbia la proprietà che sia costante la somma delle distanze dei suoi punti da due punti dati, chiamasi *elisse.*

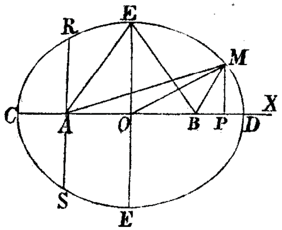
Se A e B (fig. 213) sono i due punti dati, e $2a$ la somma costante delle distanze d'ogni punto della elisse da quei due punti, M sarà un punto dell'elisse, se sussisterà l'equazione $AM + BM = 2a$.

I due punti dati A e B diconsi i *fochi* dell'elisse, ed i segmenti AM e BM condotti agli stessi da un punto M dell'elisse, chiamansi i *raggi vettori* di quel punto.

§ 469. *Determinazione dei raggi vettori dell'elisse.*

Siano (fig. 213) A e B i fochi, il punto medio O della loro distanza, l'origine delle coordinate, ed OBX l'asse delle ascisse. Se M è un punto qualsiasi dell'elisse, se quindi $AM + BM = 2a$, e se $x = OP$ ed $y = MP$ sono le coordinate di quel punto, dai due triangoli rettangoli APM e BPM si ottiene, ponendo $OA = OB = e$,

Fig. 213.



$$AM^2 = y^2 + (x+e)^2,$$
$$BM^2 = y^2 + (x-e)^2, \text{ quindi}$$
$$AM^2 - BM^2 = 4ex, \text{ ovvero}$$
$$(AM + BM).(AM - BM) = 4ex;$$

essendo poi $AM + BM = 2a$,

ne segue $AM - BM = \frac{2ex}{a}$.

Coll'addizione e sottrazione di queste due equazioni si ha

$$AM = a + \frac{ex}{a}, \text{ e } BM = a - \frac{ex}{a}.$$

§ 470. *Equazione dell'elisse.*

Dal triangolo rettangolo APM (fig. 213) si ha $MP^2 = AM^2 - AP^2$, ovvero

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x+e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$
$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2}\cdot x^2, \text{ quindi}$$
$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Siccome in tutti i casi $AM + BM > AB$, quindi $2a > 2e$, ovvero $a > e$, la differenza $a^2 - e^2$ dovrà essere sempre positiva.

Ponendo $a^2 - e^2 = b^2$ si ottiene

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

quale equazione esprimente la relazione esistente fra le coordinate d'un punto qualsiasi dell'elisse, od in altre parole l'*equazione dell'elisse* stessa. Questa equazione può prendere del pari la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§ 471. *Discussione dell'equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.*

1. Risolvendo l'equazione, prima rapporto ad y, e poi rapporto ad x, si ottiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ed } x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

dai quali valori si scorge, che tanto ad ogni valore di x, per il quale y è reale, corrispondono due valori di y eguali e contrarî, quanto ad ogni valore di y, per il quale x è reale, corrispondono due valori eguali e contrarî di x. L'elisse è quindi simmetrica rispetto ad ambidue gli assi delle coordinate, ed è perciò che l'origine O delle coordinate si chiama il *centro*, e $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ l'*equazione al centro* dell'elisse.

2. Per $y = 0$, si ha $x = \pm a$, e per $x = 0$, $y = \pm b$. L'elisse taglia quindi l'asse delle ascisse alle distanze $+a$ e $-a$, e l'asse delle ordinate alle distanze $+b$ e $-b$ dall'origine.

3. Il più grande valore che può avere x è a, il più gran valore che può avere y è b; per $x > a$, y diventa immaginario, mentre tale è x per $y > b$. Se si guidano perciò delle parallele all'asse delle ordinate ed a quello delle ascisse, e precisamente le prime alle distanze $+a$ e $-a$, le seconde alle distanze $+b$ e $-b$, il rettangolo formato dalle stesse racchiude perfettamente l'elisse, per cui ne segue che l'elisse è una curva tutta chiusa.

4. Se con d si segna la distanza OM d'un punto qualsiasi M dell'elisse dal suo centro O, si ha

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cdot x^2}.$$

Per $x = \pm a$, si ottiene il massimo valore di $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$; per $x = 0$, si ha il minimo valore di $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Dunque, fra tutte le corde guidate per il centro, CD è la massima, EF la minima. Ed è perciò che $CD = 2a$ chiamasi l'*asse maggiore*, $EF = 2b$ l'*asse minore* dell'elisse; i punti C e D si chiamano i *vertici*.

Da quanto fu detto risulta che *la somma dei raggi vettori di qualsiasi punto dell'elisse è eguale all'asse maggiore.*

5. Da $a^2 - e^2 = b^2$ si ricava

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

quale espressione dell'*eccentricità lineare* dell'elisse, a differenza del rapporto $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ che dicesi l'*eccentricità numerica.*

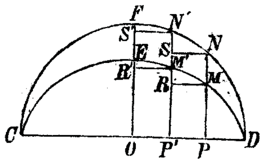
6. Quanto più piccola è l'eccentricità, tanto meno a differisce da b, e tanto più l'elisse s'avvicina al cerchio; per $e = 0$, si ha $a = b$,

e l'equazione dell'elisse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ si tramuta in quella del cerchio $x^2+y^2=a^2$. Il cerchio si può quindi considerare come una elisse la cui eccentricità sia eguale a zero.

7. Per $x=e=\sqrt{a^2-b^2}$, si ottiene $y=\pm\frac{b^2}{a}$. La corda RS condotta per un foco perpendicolarmente all'asse maggiore dicesi il *parametro dell'elisse*. Se questo si segna con $2p$, $p=\frac{b^2}{a}$, vale a dire, *il semiparametro è la terza proporzionale continua dopo il semiasse maggiore ed il semiasse minore.*

§ 472. *Se sull'asse maggiore d'una elisse, quale diametro, si descrive un cerchio, le ordinate dell'elisse e del cerchio corrispondenti alla stessa ascissa stanno come il semiasse minore sta al semiasse maggiore.*

Fig. 214.



Si ponga (fig. 214) $OP=x$, $MP=y$ ed $NP=\eta$, e sarà

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ \eta^2=a^2-x^2, \text{ e perciò}$$

$$y^2:\eta^2=b^2:a^2, \text{ ed } y:\eta=b:a$$

§ 473. *L'area d'una elisse è eguale al prodotto dei due semiassi moltiplicato per il numero di Ludolf.*

Se per un numero qualsiasi di punti $M, M'\ldots$ dell'elisse (fig. 214) si conducono le rispettive ordinate, queste, prolungate, incontreranno nei punti $N, N'\ldots$ il cerchio descritto sull'asse maggiore CD; se ora si guidano parallelamente all'asse maggiore i segmenti $MR, M'R'\ldots$, $NS, N'S'\ldots$, ogni due rettangoli fra loro corrispondenti, come $MPP'R$ ed $NPP'S$, e del pari le somme di tutti questi rettangoli stanno come $b:a$. Se si prendono i punti $M, M'\ldots$ infinitamente vicini fra loro, anche i limiti a cui tendono senza fine quelle somme, cioè l'area dell'elisse e quella del cerchio stanno come $b:a$. Ma l'area del cerchio è $a^2\pi$, per cui se s è l'area dell'elisse, sarà $s:a^2\pi=b:a$, da cui $s=ab\pi$.

§ 474. *Equazione al vertice dell'elisse.*

Se (fig. 213) invece del centro O si prende il vertice C, quale origine delle coordinate, e si conserva l'asse maggiore CD, quale asse delle ascisse, le coordinate per questo nuovo sistema sono le stesse di quelle del sistema precedente, mentre le nuove ascisse sono maggiori delle antecedenti del semiasse maggiore a. Per avere quindi l'equazione dell'elisse per questo nuovo sistema, cioè la sua *equazione al vertice*, basterà porre nell'equazione al centro, $x-a$ in luogo di x.

Sarà allora

$$b^2(x-a)^2+a^2y^2=a^2b^2, \text{ ovvero } y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2),$$

quindi, ponendo $\frac{b^2}{a}=p$, $y^2=\frac{p}{a}(2ax-x^2)$, ovvero

$$y^2=2px-\frac{px^2}{a}.$$

§ 475. *Equazione polare dell'elisse.*

Se (fig. 213) si prende uno dei fochi B d'una elisse, quale polo, e la retta BD passante per il vertice D più vicino a questo foco, quale asse polare, un punto M qualsiasi dell'elisse ha il raggio vettore $r=BM$, e l'angolo $\varphi=MBD$.

Sarà quindi $r=a+\frac{ex}{a}$ (§ 469), ed $x=e+r\cos\varphi$, e perciò

$$r=\frac{a^2-e^2}{a+e\cos\varphi}, \text{ ovvero } r=\frac{b^2}{a\left(1+\frac{e}{a}\cos\varphi\right)}.$$

Ma $\frac{b^2}{a}=p$ ed $\frac{e}{a}=\varepsilon$ (§ 471), quindi l'equazione polare dell'elisse sarà

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

ove $\varepsilon<1$.

Problemi.

§ 476. 1. Determinare un numero qualsiasi di punti d'una elisse, se della stessa sono dati l'asse maggiore ed i due fochi.

Si prenda fra i fochi un numero qualsiasi di punti dell'asse maggiore, ognuno dei quali dividerà l'asse maggiore in due segmenti, e fatto centro prima in uno e poi nell'altro foco si descrivano degli archi di cerchi con raggi eguali ai due segmenti; i punti d'intersezione di questi archi danno punti dell'elisse.

2. Determinare un numero qualsiasi di punti d'una elisse, se della stessa sono dati i due assi.

3. Si trovi l'equazione d'una elisse che passi per il punto (2, 1) e che abbia l'asse maggiore $=8$.

4. Per qual punto dell'elisse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ le ascisse sono eguali alle ordinate? Come si costruisce tale punto?

5. Quale è l'equazione al vertice d'una elisse, in cui l'asse minore è $2b$ ed il parametro $2p$?

6. Le coordinate del centro d'una elisse sono m ed n, i suoi assi $2a$ e $2b$; quale è l'equazione dell'elisse, se i suoi assi corrono parallelamente agli assi delle coordinate?

7. L'equazione d'una elisse è $9x^2+16y^2+36x-96y+36=0$; si determinino: $a)$ le coordinate del centro, $b)$ gli assi.

8. L'elisse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ è equivalente alla superficie d'un tronco di cono retto le cui basi hanno i raggi a e b; quale è l'altezza del tronco?

9. L'asse minore d'una elisse è $2b$; quale deve essere l'asse maggiore, affinchè l'elisse abbia la stessa area del mantello d'un cono equilatero che ha per altezza il semiasse maggiore della elisse?

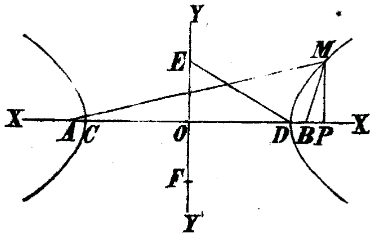
VI. L'iperbole.

§ 477. Una linea del piano che abbia la proprietà che sia costante la differenza delle distanze dei suoi punti da due punti dati, chiamasi *iperbole.*

Se A e B (fig. 215) sono i punti dati, e $2a$ la differenza costante delle distanze d'ogni punto della iperbole da quei due punti, M è un punto dell'iperbole, se $AM-BM=2a$.

I due punti dati A e B, diconsi i *fochi* dell'iperbole, i segmenti AM e BM, i *raggi vettori* del punto M.

Fig. 215.



§ 478. *Determinazione dei raggi vettori dell'iperbole.*

Si prenda (fig. 215) il punto medio O della distanza AB dei due fochi, quale origine delle coordinate, ed OBX, quale asse delle ascisse; ponendo $OA=OB=e$, si avrà per un punto M dell'iperbole, nella stessa guisa indicata per l'elisse al § 469,

$$AM=\frac{ex}{a}+a, \text{ e } BM=\frac{ex}{a}-a.$$

§ 479. *Equazione dell'iperbole.*

Dal triangolo APM (fig. 215) si ricava, come per l'elisse (§ 470)

$$(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2).$$

La differenza a^2-e^2, positiva per l'elisse, è negativa invece per l'iperbole; infatti, essendo $AM-BM<AB$, quindi $2a<2e$, ovvero $a<e$, ne consegue $a^2<e^2$. Ponendo perciò $a^2-e^2=-b^2$, si ottiene per la chiesta *equazione dell'iperbole*

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2, \text{ ovvero } b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

alla quale si può dare la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

L'equazione dell'iperbole differisce da quella dell'elisse nel segno di b^2 che è negativo per la prima, positivo per la seconda.

§ 480. *Discussione dell'equazione* $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

1. Risolta l'equazione rapporto ad y ed x, si ottiene

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \text{ ed } x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

Fino a che $x<a$, y risulta immaginario; quindi a tali ascisse non corrisponde verun punto dell'iperbole. Per ogni ascissa $x>a$, si hanno due valori eguali ed opposti di y, come due ascisse eguali ed opposte si hanno del pari per ogni valore di y. L'iperbole consta quindi di due rami staccati che sono situati simmetricamente d'ambe le parti dell'asse delle ordinate; ognuno di questi rami viene alla sua volta diviso dall'asse delle ascisse in due parti simmetriche. L'origine O delle coordinate nomasi perciò il *centro*, e l'equazione $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, l'*equazione al centro dell'iperbole.*

2. Potendo x ed y raggiungere qualsiasi valore per quanto grande, ne viene che i rami dell'iperbole si estendono all'infinito.

3. Per $y=0$, si ha $x=\pm a$; l'iperbole taglia quindi l'asse delle ascisse in due punti D e C che distano fra loro di $2a$. Il segmento $CD=2a$ chiamasi l'*asse primario* o *trasverso*, C e D i *vertici* dell'iperbole.

La differenza dei raggi vettori d'ogni punto della iperbole è quindi eguale all'asse primario.

4. Per $x=0$, si ricava $y=\pm b\sqrt{-1}$; l'iperbole perciò non taglia l'asse delle ordinate in punti reali. Stante però l'importante relazione che ha la lunghezza b coll'iperbole, se si portano sull'asse delle ordinate i segmenti $OE=OF=\pm b$, si dà, in modo analogo come per l'elisse, il nome di asse, e precisamente di *asse secondario* o *coniugato*, al segmento $EF=2b$.

5. Da $a^2-e^2=-b^2$, ovvero da $e^2=a^2+b^2$, si ha

$$OA=OB=e=\sqrt{a^2+b^2}.$$

La grandezza e dicesi l'*eccentricità lineare*, ed

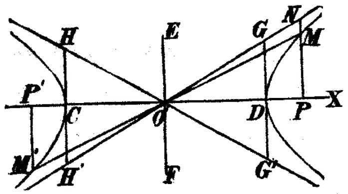
$$\frac{e}{a}=\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \text{ l'} \textit{eccentricità numerica.}$$

6. Per $x=e=\sqrt{a^2+b^2}$, si ottiene $y=\pm\frac{b^2}{a}$. Anche nella iperbole, la corda che passa per il foco ed è normale all'asse primario, dicesi il *parametro*. Dinotando questo con $2p$, è $p=\frac{b^2}{a}$, vale a dire: *il semiparametro è la terza proporzionale continua dopo il semiasse primario ed il semiasse secondario.*

7. Se $a=b$, l'iperbole dicesi *equilatera*; la sua equazione è allora $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$.

8. Combinando l'equazione dell'iperbole con l'equazione $y = a'x$ d'una retta $M'M$ passante per O (fig. 216), i punti d'intersezione di queste due linee sono dati da

Fig. 216.



$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}} \text{ ed } y = \frac{\pm aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2a'^2}},$$

in cui il segno superiore corrisponde ad M, l'inferiore ad M'. Da questi valori emerge che l'intersezione non sarà possibile se non quando $b^2 > a^2a'^2$, ovvero $a' < \frac{b}{a}$; per $a' > \frac{b}{a}$, i valori di x ed y sono immaginarî.

9. Di speciale importanza sono le due rette per le quali è $a' = \pm \frac{b}{a}$, quindi $b^2 = a^2a'^2$. Per costruire queste rette si eriga in D una normale alla OX, si porti su questa normale $DG = DG' = b$, e si guidino le rette GOH' e $G'OH$; sarà allora

$$\text{tang } GOD = \frac{b}{a} \text{ e tang } HOD = -\frac{b}{a}.$$

Si consideri ora una di queste rette, p. e. la $H'G$, e posto $OP = x$, $MP = y$ ed $NP = y'$, si ha $y' = \frac{b}{a}x$, quindi $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, ed essendo M un punto dell'iperbole, del pari $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; quindi $y'^2 - y^2 = b^2$, ovvero

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y}.$$

Coll'aumentare di x crescono del pari y ed y', mentre col crescere di $y' + y$, essendo b^2 una costante, decresce la differenza $y' - y = MN$; questa quindi si fa infinitamente piccola col crescere all'infinito di x, ovvero, con altre parole, l'iperbole si avvicina sempre più alla retta $H'G$ senza però mai raggiungerla. Lo stesso dicasi della retta HG'.

Una retta che si avvicina sempre più ad una linea curva senza mai raggiungerla, chiamasi l'*assintoto* di quella linea curva. L'iperbole ha quindi due assintoti le cui equazioni sono:

$$y = +\frac{b}{a} \cdot x \text{ ed } y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

§ 481. *Equazione al vertice dell'iperbole.*

Come per l'elisse (§ 474), si ottiene

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§ 482. *Equazione polare dell'iperbole.*

Se si prende (fig. 215) il foco B, quale polo, e BD, quale asse polare, per un punto M qualsiasi dell'iperbole si avrà $r = BM$ e $\varphi = MBD$.

Da $r = \frac{ex}{a} - a$ (§ 478) ed $x = e - r\cos\varphi$ risulta, in modo analogo come per l'elisse (§ 475) e se $\varepsilon > 1$,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

quale equazione polare della iperbole.

Questa equazione vale per il ramo dell'iperbole in cui è situato il foco B, scelto quale polo; per l'altro ramo dell'iperbole si ha, da $r = -\frac{ex}{a} + a$ e $-x = r\cos\varphi - e$, l'equazione polare

$$r = \frac{-p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Problemi.

§ 483. 1. Determinare un numero qualsiasi di punti d'una iperbole, della quale sono dati l'asse primario ed i due fochi.

Si prendano sul prolungamento dell'asse trasverso, al di là di uno dei due fochi, un numero arbitrario di punti, e fatto centro prima in un foco, poi nell'altro, si descrivano degli archi di circonferenza con raggi eguali alle distanze di quei punti da ognuno dei vertici; i punti d'intersezione di quegli archi danno punti dell'iperbole.

2. Quale è l'equazione d'una iperbole di cui sono dati un punto (x', y') e l'asse primario $2a$?

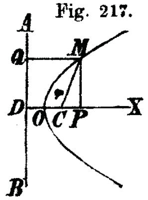
3. Qual punto dell'iperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ha l'ascissa eguale all'ordinata? (Quando è possibile la soluzione?)

4. La normale abbassata dal foco d'una iperbole sull'assintoto è eguale al semiasse secondario.

VII. La parabola.

§ 484. Una linea del piano che abbia la proprietà che ogni suo punto disti egualmente da un punto dato e da una retta data, dicesi *parabola*.

Fig. 217.



Siano C (fig. 217) il punto dato, AB la retta data ed $MQ \perp AB$; M sarà un punto della parabola, se $MC = MQ$.

Il punto C dato, dicesi il *foco*, la retta AB data, la *direttrice*, e CM, il *raggio vettore* del punto M.

§ 485. *Determinazione dei raggi vettori d'una parabola.*

Si conduca (fig. 217) $CD \perp AB$ e si prenda il punto medio O della normale CD, quale origine delle coordinate, ed OCX, quale asse delle ascisse. Se M è un punto qualsiasi della parabola, se quindi $CM = MQ$, se $MQ \perp AB$, e se $x = OP$ ed $y = MP$ sono le coordinate di M, ne discende, ponendo $OC = OD = \frac{p}{2}$,

$$CM = MQ = DP = OP + OD, \text{ ovvero}$$
$$CM = x + \frac{p}{2}.$$

§ 486. *Equazione della parabola.*

Dal triangolo rettangolo MPC (fig. 217) si ricava

$$MP^2 = CM^2 - CP^2, \text{ ovvero } y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \text{ da cui}$$
$$y^2 = 2px,$$

quale *equazione* della *parabola.*

§ 487. *Discussione della equazione* $y^2 = 2px$.

1. Dalla stessa si ricava $y = \pm \sqrt{2px}$. Ad ogni valore positivo di x convengono due ordinate eguali, ma opposte; la parabola quindi si estende ad ambe le parti dell'asse delle ascisse OX in due rami congruenti che vanno all'infinito, potendo x ed y raggiungere un valore qualsiasi per quanto grande. La retta OX si chiama l'*asse* della parabola.

2. Per $x = 0$, si ha $y = 0$; quindi l'origine delle coordinate è esso pure un punto della parabola. Tale punto viene detto il *vertice*, e l'equazione $y^2 = 2px$, l'*equazione al vertice* della parabola.

3. Se x è negativo, y è immaginario; ad ascisse negative non corrispondono perciò punti della parabola.

4. Ponendo $x = \frac{p}{x} = OC$, si ha $y = CE = CF = \pm p$, quindi $EF = 2p$. La grandezza $2p$ perciò rappresenta la corda EF che passando per il foco è normale all'asse. Tale corda è il *parametro* della parabola.

5. Da $y^2 = 2px$ segue $2p : y = y : x$, vale a dire *l'ordinata d'ogni punto della parabola è media proporzionale fra il parametro e l'ascissa del punto.*

6. Se x' ed x'' sono le ascisse, y' ed y'' le ordinate corrispondenti a due punti d'una parabola il cui parametro è $2p$, si avrà

$$y'^2 = 2px' \text{ ed } y''^2 = 2px'', \text{ ovvero}$$
$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

vale a dire *nella parabola i quadrati delle ordinate stanno come le ascisse corrispondenti.*

Scolî. 1. Se nell'equazione al vertice d'una elisse o d'una iperbole, $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$, si fa aumentare a all'infinito, rimanendo p invariato (locchè scegliendo convenientemente b è sempre possibile, stante l'equazione $\frac{b^2}{a} = p$), si ottiene, per $a = \infty$, il quoziente $\frac{px^2}{a} = 0$, e l'equazione dell'elisse, rispettivamente quella della iperbole, si trasforma in quella della parabola $y^2 = 2px$. La parabola quindi si può considerare come un'elisse od iperbole il cui asse maggiore o primario è infinitamente grande.

2. Tutte le linee curve considerate sino ad ora si possono esprimere per mezzo della equazione comune al vertice,

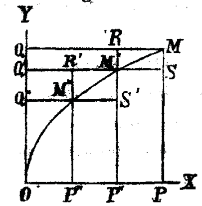
$$y^2 = 2px + qx^2,$$

ove p indica il raggio del cerchio, rispettivamente il semiparametro delle altre linee curve, ed in cui si ha $q = -1$, per il cerchio; $= -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}$, quindi negativo e minore 1, per l'elisse; $= \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$, quindi positivo, per l'iperbole, ed eguale a 0 per la parabola.

§ 488. *L'area d'un segmento parabolico compreso fra due coordinate corrispondenti è eguale a $^2/_3$ del prodotto di queste coordinate.*

Sia OM (fig. 218) un arco parabolico. Dai punti $M, M', M'' \ldots$

Fig. 218.



si guidino delle perpendicolari tanto all'asse delle ascisse OX quanto a quello delle ordinate OY, e ne risulterà, ponendo $OP = x$, $MP = y$, $OP' = x'$, $M'P' = y' \ldots$

$$\text{rettangolo } PR = (x - x')\,y = \frac{(y^2 - y'^2)\,y}{2p}, \text{ e}$$
$$\text{rettangolo } QS = x\,(y - y'); \text{ quindi}$$
$$\frac{PR}{QS} = \frac{(y + y')\,y}{2px}.$$

Quanto più vicini fra loro si prendono i punti della parabola, tanto più si avvicinano le loro coordinate, e tanto più s'avvicina il rapporto dei rettangoli PR e QS al limite $\frac{(y + y')\,y}{2px} = \frac{2y^2}{2px} = 2$.

Allo stesso limite 2 si avvicina allora del pari il rapporto fra ogni due altri rettangoli susseguenti $P'R'$ e $Q'S'$ ecc., fra loro corrispondenti, e perciò anche il rapporto fra la somma dei rettangoli $PR + P'R' + \ldots$ e la somma dei rettangoli $QS + Q'S' + \ldots$ Ma il limite di quest'ultimo rapporto è nello stesso tempo il rapporto esistente fra l'area OMP e l'area OMQ; dunque il rapporto $\frac{OMP}{OMQ} = 2$, ovvero

$2\,OMQ = OMP$, e perciò $3\,OMQ = OMP + OMQ = xy$, laonde

$$OMQ = \tfrac{1}{3}\,xy \text{ ed } OMP = \tfrac{2}{3}\,xy.$$

§ 489. *Equazione polare della parabola.*

Sia (fig. 217) il foco C il polo, e CO l'asse polare; per il punto M della parabola si avrà il raggio vettore $r = CM$, e $\varphi = MCO$.

Giusta il § 485, $r = x + \frac{p}{2}$, ed essendo $x = \frac{p}{2} - r\cos\varphi$, sarà $r = p - r\cos\varphi$, e perciò

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

l'equazione polare della parabola.

Scolio. Tutte le curve sino ad ora trattate si possono rappresentare per mezzo della comune equazione polare

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

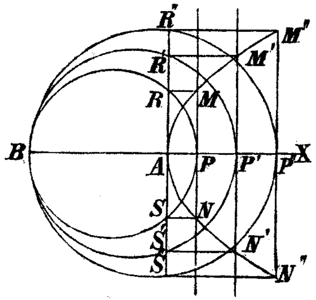
ove p indica il raggio del cerchio, rispettivamente il semiparametro delle altre linee curve, ed in cui $\varepsilon = 0$ per il cerchio, < 1 per l'elisse, > 1 per l'iperbole, $= 1$ per la parabola.

Problemi.

§ 490. 1. Dati il foco e la direttrice d'una parabola, determinare un numero qualsiasi di punti della parabola.

Si determinino innanzi tutto il vertice e l'asse; su questo si prendano quanti punti si vogliano, e per gli stessi si guidino delle normali all'asse; se ora, fatto centro nel foco con un raggio eguale alla distanza di questi punti dalla direttrice, si descrivano degli archi di circonferenza, i punti d'intersezione di questi archi colle rispettive perpendicolari danno punti della parabola.

Fig. 219.



2. Dato il parametro, determinare quanti punti della parabola si vogliano.

La soluzione si fonda sul § 487, 5.

Siano AB (fig. 219) il parametro, A il vertice ed AX l'asse della parabola. Si prendano ad arbitrio delle ascisse AP, AP'... e si descrivano su BP, BP'..., quali diametri, delle circonferenze che tagliano nei punti R ed S, R' ed S'... la normale eretta ad AB nel punto A. Se ora si guidano per questi punti delle parallele all'asse, le perpendicolari all'asse erette nei punti P, P'... vengono tagliate da quelle parallele nei punti M ed N, M' ed N'... che sono punti della parabola.

3. L'equazione d'una parabola è $y^2 = 2x$; quale è l'area del segmento parabolico limitato dal parametro?

4. Il parametro d'una parabola, il cui asse corre parallelamente all'asse delle ascisse è $2p$, le coordinate del vertice sono m ed n; quale è l'equazione della parabola?

5. Sia $x^2 - 4y - 6x = 3$ l'equazione d'una parabola; si determinino: *a*) le coordinate del vertice, *b*) il parametro.

6. Ad un corpo, la cui altezza sopra l'orizzonte è a, viene impresso da una data forza un moto uniforme di velocità c (in un secondo) in direzione orizzontale, e della forza di gravità un moto in direzione verticale coll'accelerazione g; *a*) quale linea percorre questo corpo? *b*) dopo quanto tempo, *c*) ed a che distanza orizzontale dal punto di partenza giunge questo corpo sul piano orizzontale? (Non si tiene conto della resistenza dell'aria).

VIII. Tangenti e normali delle linee curve.

§ 491. *La retta e le linee curve.*

Combinando le equazioni di due linee, i valori di x ed y, che ne risultano, sono le coordinate del punto comune a tutte e due le linee.

Se una delle due linee è retta, e l'altra è un cerchio, una elisse, una iperbole od una parabola, si ottengono per x ed y due coppie di valori fra loro corrispondenti. Se questi valori sono reali e differenti, le due linee hanno due punti comuni, e la retta *taglia* la linea curva in due punti. Se i due valori si confondono in uno, le due linee non hanno che *un* sol punto comune, e la retta *tocca* la linea curva in quel punto. Se finalmente i valori di x ed y sono immaginarî, le due linee non hanno verun punto comune.

Si danno eccezioni per casi speciali dell'iperbole e della parabola.

1. Combinando l'equazione dell'iperbole, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, con quella d'una retta parallela ad uno degli assintoti, $y = \frac{b}{a}x + c$, ovvero $y = -\frac{b}{a}x + c$, si ottiene

$$x = -\frac{a(b^2 + c^2)}{2bc}, \quad y = \frac{c^2 - b^2}{2c}, \text{ rispettivamente}$$
$$x = \frac{a(b^2 + c^2)}{2bc}, \quad y = \frac{c^2 - b^2}{2c}.$$

Qualsiasi retta condotta parallelamente ad un assintoto d'una iperbole taglia questa in un unico punto.

2. Combinando l'equazione della parabola, $y^2 = 2px$, con quella d'una retta parallela all'asse, $y = c$, si ha

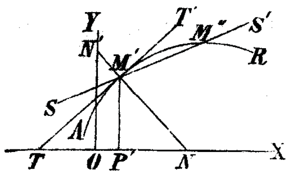
$$x = \frac{c^2}{2p}, \quad y = c.$$

Qualsiasi retta guidata parallelamente all'asse d'una parabola taglia questa in un unico punto.

§ 492. *Concetto generale della tangente.*

Sia AR (fig 220) una linea curva qualsiasi, ed M' il suo punto di contatto colla retta TT'. Si immagini guidata per il punto di contatto M' e per un altro prossimo M'' la secante SS', e questa ruoti

Fig. 220.



attorno al punto M' in modo, che il punto M'' s'avvicini sempre più al punto M'; la secante SS'' si avvicina sempre più alla tangente TT', finchè alla fine coincide con essa, se il punto M'' viene a cadere sul punto di contatto M'.

La *tangente* d'una curva si può considerare come una *secante* che ruoti attorno ad uno dei suoi punti d'intersezione sino a pervenire in posizione tale che i due punti d'intersezione si confondano in uno.

Una retta $M'N$ perpendicolare ad una tangente nel suo punto di contatto M' è una *normale* della curva.

Le seguenti quattro quantità sono di speciale importanza nella teoria dei contatti d'una curva con una linea retta.

1. La *tangente* $M'T$, cioè la lunghezza della linea tangenziale compresa fra il punto di contatto e quello d'intersezione coll'asse delle ascisse;

2. La *sottotangente* $P'T$, vale a dire la proiezione della tangente sull'asse delle ascisse;

3. La *normale* $M'N$, cioè la lunghezza della linea normale compresa fra il punto di contatto e l'asse delle ascisse;

4. La *sottonormale* $P'N$, vale a dire la proiezione della normale sull'asse delle ascisse.

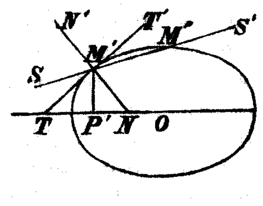
Di queste quattro quantità di contatto, la tangente e la normale sono evidentemente positive. La sottotangente e la sottonormale invece sono positive o negative, a seconda che esse, a partire dall'ordinata, si trovano nella direzione positiva o negativa delle ascisse; esse vengono determinate in ogni caso dalla differenza $x - x'$, nella quale x dinota l'ascissa del punto d'intersezione della tangente, rispettivamente della normale, coll'asse delle ascisse, ed x' l'ascissa del punto di contatto.

1. L'elisse ed il cerchio.

§ 493. *Equazioni della tangente e della normale.*

Se x', y' ed x'', y'' sono le coordinate di due punti M' ed M'' (fig. 221) fra loro vicini d'una elisse che abbia per equazione

Fig. 221.



$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

è l'equazione della secante SS' passante per i punti M' ed M'', e

$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$ e $b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$

sono le equazioni determinanti dalla cui sottrazione si ha

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

ovvero $$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

e perciò $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}.$$

Sostituendo questo valore nell'antecedente equazione della secante SS', quella assume la forma:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x').$$

1. Se il punto M' coincide con M'', la secante SS' perviene nella posizione della tangente TT', per cui, ponendo nell'ultima equazione $x'' = x'$ ed $y'' = y'$, si ottiene per la tangente TT' l'equazione

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')\ldots 1),$$

alla quale si può dare eziandio la forma:

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2.$$

L'equazione della tangente, espressa in questa forma, si può dedurre immediatamente da quella della elisse, $b^2xx + a^2yy = a^2b^2$, sostituendo ai quadrati xx ed yy i prodotti xx' ed yy'.

2. Dacchè la normale NN' passante per il punto M' non è che una retta perpendicolare alla tangente, avente l'equazione 1), la sua equazione sarà (§ 456, 2)

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')\ldots 2).$$

Scolio. Per $b = a$, l'elisse si trasforma in un cerchio, per il quale quindi

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'), \text{ ovvero } xx' + yy' = a^2$$

è l'equazione della tangente, ed

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x'), \text{ ovvero } y = \frac{y'}{x'}x$$

è l'equazione della normale.

Da questa equazione si deduce che ogni normale del cerchio passa per il centro dello stesso.

§ 494. *Lunghezza delle quattro quantità di contatto.*

1. Ponendo nell'equazione della tangente $y=0$, si ricava $x=\frac{a^2}{x'}$, quale ascissa del punto T (fig. 221); per cui sarà

$$\text{sottotangente } P'T = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Questa espressione dimostra che la sottotangente è indipendente dall'asse minore $2b$, per cui tutte le elissi descritte con lo stesso asse maggiore, hanno, per ascisse eguali, la stessa sottotangente.

2. Per la tangente $M'T$ si ha:

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

quindi $$\text{tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}.$$

3. Ponendo nell'equazione della normale $y=0$, si ricava per il punto N l'ascissa $x=\frac{a^2-b^2}{a^2}\,.\,x'$, da cui segue

$$\text{sottonormale } P'N = x - x' = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

4. Per la determinazione della normale $M'N$ si ha:

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4},$$ e perciò

$$\text{normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

Scolio. Per $b=a$, cioè per il *cerchio* sarà

a) la sottotangente $=\frac{a^2 - x'^2}{x'}$.

Un cerchio descritto attorno l'asse maggiore d'una elisse ha quindi con questa, per punti aventi una ascissa comune, la stessa sottotangente; il che è del resto necessaria conseguenza della osservazione fatta al numero 1., secondo la quale il cerchio è da considerarsi quale limite delle elissi descritte attorno lo stesso asse maggiore.

Di più sarà

b) la tangente $=\frac{ry'}{x'}$;

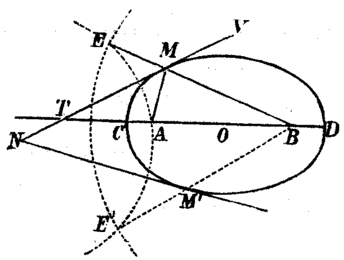
c) la sottonormale $=-x'$;

d) la normale $=r$.

§ 495. *Ogni tangente dell'elisse forma angoli eguali coi raggi vettori del punto di contatto.*

Siano (fig. 222) AM e BM i raggi vettori del punto $M=(x', y')$ d'una elisse il cui centro è O.

Fig. 222.



L'equazione della tangente guidata per il punto M dell'elisse è $b^2 x x' + a^2 y y' = a^2 b^2$. Se nella stessa si pone $y=0$, si ottiene, quale ascissa del punto d'intersezione della tangente coll'asse maggiore, $x=\frac{a^2}{x'}$.

Se ora AME è un angolo esterno del triangolo ABM, MT la bisettrice di questo angolo, e T il suo punto d'intersezione coll'asse maggiore, si avrà, giusta il § 120, 2,

$$AT : BT = AM : BM,$$

ovvero, con riflesso al § 469,

$$(OT - e) : (OT + e) = \left(a - \frac{ex'}{a}\right) : \left(a + \frac{ex'}{a}\right),$$

da cui $OT = \frac{a^2}{x'}$.

Il punto nel quale la tangente condotta per il punto M taglia l'asse maggiore, è dunque identico col punto T, vale a dire la tangente nel punto M è la bisettrice MT dell'angolo AME. Essendo perciò $EMT = BMV$, e per supposizione $AMT = EMT$, ne discende del pari, $AMT = BMV$.

Questa proposizione ci spiega i seguenti fenomeni risguardanti le leggi della riflessione. In uno specchio elittico i raggi luminosi, caloriferi od acustici che partono da un foco, vengono riflessi in modo da unirsi nell'altro foco. Se in un vaso di forma elittica contenente un liquido si produce un moto ondulatorio in uno dei fochi, le ondulazioni riflesse convergono tutte nell'altro foco.

2. L'iperbole.

§ 496. *Tangenti e normali dell'iperbole.*

Le equazioni della tangente e della normale, così pure le lunghezze della tangente, della sottotangente, della normale e della sottonormale si possono sviluppare in modo analogo a quello adoperato per l'elisse (§§ 493 e 494); tali valori però, si possono dedurre direttamente del pari dai risultati antecedenti, qualora negli stessi si ponga $-b^2$ al luogo di b^2.

§ 497. *Ogni tangente dell'iperbole forma angoli eguali coi raggi vettori del punto di contatto.*

La dimostrazione si fa in modo analogo a quello indicato al § 495, basandosi sul § 120, 1.

Questa proposizione ci spiega il fenomeno ottico che osserviamo negli specchi iperbolici concavi, nei quali i raggi che partono da un foco vengono riflessi in modo da sembrare che provengano dall'altro foco.

3. La parabola.

§ 498. *Equazioni della tangente e della normale.*

Se si indicano con x', y' ed x'', y'' le coordinate di due punti fra loro vicini d'una parabola avente l'equazione $y^2 = 2px$, l'equazione della secante che passa per questi due punti sarà

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

essendo $y'^2 = 2px'$ ed $y''^2 = 2px''$.

Da queste ultime equazioni si ricava

$y''^2 - y'^2 = 2p(x'' - x')$, ovvero $(y'' - y')(y'' + y') = 2p(x'' - x')$, ed

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'}.$$

Per mezzo della sostituzione si ottiene, quale equazione della secante,

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x').$$

1. Facendo ora coincidere il punto (x'', y'') col punto (x', y'), si avrà dall'ultima equazione, quale equazione della tangente,

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots 1),$$

ovvero,

$$yy' = 2p \cdot \frac{x + x'}{2}.$$

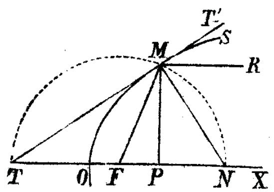
2. La normale spettante a questa tangente sarà, in forza del numero 1),

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots 2).$$

§ 499. *Lunghezza delle quattro quantità di contatto.*

1. Ponendo nell'equazione della tangente $y = 0$, si ottiene per il punto T (fig. 223) $px = -y'^2 + px' = -px'$; quindi $x = -x'$, e perciò sottotangente $PT = x - x' = -2x'$.

Fig. 223.



Nella parabola la sottotangente d'un punto (per quanto risguarda il suo valore assoluto) *è eguale alla doppia ascissa dello stesso punto.*

2. Per la tangente MT si ha

$MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2$, quindi

tangente $MT = \sqrt{2x'(p + 2x')}$.

3. Ponendo nell'equazione della normale $y = 0$, si ottiene per il punto N l'ascissa $x = x' + p$, e perciò

sottonormale $PN = x - x' = p$.

Nella parabola la sottonormale è costantemente eguale al semiparametro.

4. Per la normale MN si ha

$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2$, laonde

normale $MN = \sqrt{p(p + 2x')}$.

Scolio. ***Il punto di contatto ed i punti d'intersezione della tangente e della normale coll'asse sono equidistanti dal foco della parabola.***

Infatti, da $FP = x' - \frac{p}{2}$, segue $MF = TF = NF = x' + \frac{p}{2}$.

§ 500. ***La tangente d'una parabola forma angoli eguali, tanto col raggio vettore del punto di contatto, quanto colla retta condotta per questo punto parallelamente all'asse.***

Giusta lo scolio del § 449, il triangolo FMT (fig. 223) è isoscele, quindi l'angolo $FMT = FTM$; ma l'angolo $RMT' = FTM$, perciò $FMT = RMT'$.

Su questa proposizione si basa l'applicazione degli specchi parabolici. In questi i raggi luminosi calorifici ed acustici paralleli all'asse si riflettono convergendo tutti nel foco; viceversa poi i raggi che si dipartono dal foco vengono riflessi parallelamente all'asse.

Problemi.

§ 501. ***Il cerchio.***

1. Quanti punti comuni col cerchio $x^2 + y^2 = 100$ ha la retta *a)* $y = x + 2$, *b)* $4x + 3y = 50$, *c)* $3y = x + 40$?

2. Il cerchio $4x^2 + 4y^2 = 25$ viene tagliato dalla retta $2y = 14x - 25$; si determinino: *a)* le coordinate dei due punti d'intersezione, *b)* la lunghezza della corda che unisce questi punti, *c)* l'angolo al centro corrispondente a questa corda.

3. Quale è l'equazione della tangente guidato dal punto (x', y') al cerchio $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$?

4. Per i punti $(-4, 3)$ e $(-3, 4)$ d'un cerchio $x^2 + y^2 = 25$ si guidano allo stesso due tangenti; quali ne saranno le equazioni, e quale sarà l'angolo racchiuso dalle stesse?

5. Da un punto (m, n) fuori del cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ si sono guidate allo stesso delle tangenti; si determinino: *a)* le coordinate del punto di contatto, *b)* l'equazione della corda di contatto.

6. La retta $2x + y = 10$ taglia il cerchio $x^2 + y^2 = 25$ in due punti; in qual punto si tagliano le tangenti condotte al cerchio per quei due punti?

7. Si trovi l'equazione della polare del punto (m, n) riferita al cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ (§ 143).

$mx + ny = r^2$.

8. Se la retta $y = ax + b$ si considera quale polare del cerchio $x^2 + y^2 = r^2$, quali saranno le coordinate del rispettivo polo?

$-\frac{ar^2}{b}, \frac{r^2}{b}$.

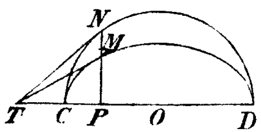
§ 502. *L'elisse.*

1. L'equazione d'una elisse è $9x^2 + 16y^2 = 144$, quella d'una retta
$a)\ y = 3x + 5, \qquad b)\ y = x + 5, \qquad c)\ y = 2x - 9;$
quanti punti comuni coll'elisse avrà ciascuna di queste rette?

2. Per un punto M d'una elisse condurre a questa una tangente.

Soluzione 1. Prolungato (fig. 222) il raggio vettore BM oltre M, basterà (secondo il § 495) dimezzare l'angolo AME, per ottenere la posizione della tangente MN chiesta. A tale scopo, fatto $ME = MA$, si descrivono collo stesso raggio all'intorno di E e di A degli archi di circonferenza che si tagliano in N; la retta MN guidata per i punti M ed N è la tangente voluta.

Fig. 224.



Soluzione 2. Basandosi sullo scolio del § 494, si descrive (fig. 224) una circonferenza sull'asse maggiore CD, si prolunga l'ordinata MP sino in N, da questo punto si guida al cerchio la tangente NT ed unito T con M, TM è la tangente chiesta.

3. Da un punto N (fig. 222) fuori d'una elisse condurre alla stessa una tangente.

Avuto riflesso alla 1. soluzione del 2. problema si vede che in questo caso trattasi unicamente di trovare un punto E che disti da N quanto uno dei fochi A, e la cui distanza dall'altro foco B sia eguale all'asse maggiore. Questo punto è l'intersezione degli archi di circonferenze descritte attorno i punti N e B coi raggi NA e CD. Guidata quindi la retta EB, questa taglierà l'elisse nel punto M che sarà il punto di contatto della chiesta tangente NM.

Siccome poi quei due archi si tagliano in un secondo punto E', ne viene che la retta $E'B$ dà un secondo punto di contatto M', per cui NM ed NM' sono le tangenti possibili all'elisse dal punto N dato.

4. Quale è l'equazione della tangente all'elisse $x^2 + 25y^2 = 25$, nel punto $(-3, \frac{4}{5})$?

5. Per il punto $(4, \frac{6}{5})$ si conducano alla elisse $4x^2 + 25y^2 = 100$ una tangente ed una normale; quale ne sarà: $a)$ la sottotangente, $b)$ la tangente, $c)$ la sottonormale e $d)$ la normale?

6. In che rapporto stanno i segmenti in cui l'ascissa di un punto d'una elisse viene divisa dalla normale dello stesso punto?

7. Per i punti $(8, 3)$ e $(6, -4)$ si conducano delle tangenti all'elisse $x^2 + 4y^2 - 100$; si determinino: $a)$ le coordinate del loro punto d'intersezione, $b)$ l'angolo formato dalle stesse.

8. Si determini la lunghezza della perpendicolare guidata dal centro d'una elisse alla tangente passante per il punto (x', y').

9. Il prodotto della normale d'un punto d'una elisse per la perpendicolare guidata dal centro alla tangente di quello stesso punto, è costante ed eguale al quadrato del semiasse minore.

10. Trovare la lunghezza della perpendicolare abbassata da un foco d'una elisse alla tangente guidata per il punto dell'elisse (x', y').

11. Il prodotto delle perpendicolari guidate dai fochi d'una elisse ad una tangente della stessa è costante ed eguale al quadrato del semiasse minore.

12. Si determino le coordinate del piede della perpendicolare guidata da un foco d'una elisse alla tangente condotta alla stessa per il punto (x', y').

13. La distanza che ha dal centro dell'elisse il piede della perpendicolare guidata da un foco della elisse ad una sua tangente, è eguale al semiasse maggiore.

§ 503. *Iperbole.*

1. L'equazione d'una iperbole è $4x^2 - 9y^2 = 36$; si domanda quanti punti ha comuni con essa la retta
$a)\ y = \frac{4x}{3} + 2, \qquad b)\ y = 2x - 8, \qquad c)\ 6y = 5x - 9.$

2. Per un punto d'una iperbole condurre a questa una tangente.

La soluzione è analoga alla soluzione 1. data nel problema 2. del § 502.

3. Per un punto esterno d'una iperbole guidare a questa una tangente.

Si risolve in modo analogo a quello indicato nel problema 3. del § 502.

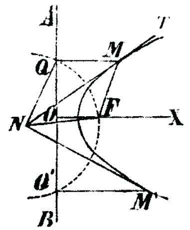
4. La porzione della tangente compresa fra gli assintoti d'una iperbole viene dimezzata dal punto di contatto.

§ 504. *Parabola.*

1. L'equazione d'una parabola è $y^2 = 5x$; quanti punti ha comuni colla medesima la retta
$a)\ 4y = 5x + 4, \qquad b)\ y = 2x - 1, \qquad c)\ y = 3x + 2?$

2. Per un punto M d'una parabola condurre a questa una tangente.

Fig. 225.



Soluzione 1. Dimezzando, secondo il § 500, l'angolo FMQ (fig. 225). A tale scopo si descrivono con raggi eguali degli archi di circonferenza attorno i punti F ed Q e per il punto N di loro intersezione si conduce la retta NM.

Soluzione 2. Con riflesso al § 499, 1. Fatto (fig. 223) $OT = OP$ si conduce TM.

Soluzione 3. In base allo scoglio del § 499. Descritto (fig. 223) attorno il foco F un arco di circonferenza con raggio eguale al raggio vettore FM, quello taglierà il prolungamento dell'asse nel punto T, e TM sarà la chiesta tangente.

3. Da un punto N (fig. 225) esterno d'una parabola condurre alla medesima una tangente.

Riferendosi alla 1. soluzione del problema 2., si vede che sarà da determinare un punto Q tale, che la retta QM condotta per quel punto parallelamente all'asse, passi per il punto di contatto M. Ma il punto Q, dovendo allora trovarsi nella direttrice, dovrà avere da N la stessa distanza come il punto F, per cui per condurre da N una tangente alla parabola, si descriverà attorno il punto N col raggio NF una circonferenza che tagli la direttrice in Q, e si condurranno dapprima $QM \parallel OX$ e poi la chiesta tangente NM.

Siccome quella circonferenza taglia la direttrice in un altro punto Q', così ne segue che, condotta $Q'M' \parallel OX$, M' sarà un secondo punto di contatto, ed NM' una seconda tangente della parabola.

4. L'equazione d'una parabola è $y^2 = 16x$; si cerchi l'equazione di quella tangente della parabola che è parallela alla retta $y = x - 3$.

5. Ad una parabola avente l'equazione $y^2 = 4x$ si sono condotte le tangenti per due dei suoi punti le cui ordinate sono 2 e -4; si determini: *a*) il punto d'intersezione delle due tangenti, *b*) l'angolo da esse rinchiuso, *c*) l'area del triangolo limitato dalle due tangenti e dalla corda di contatto.

6. La perpendicolare guidata dal foco d'una parabola ad una sua tangente è media proporzionale fra il relativo raggio vettore e la quarta parte del parametro.

IX. Discussione generale delle linee di secondo grado.

§ 505. Il grado d'una equazione riferita ad un dato sistema di coordinate parallele non si altera, trasformando l'equazione in altra riferita ad altro sistema parallelo. Infatti, se l'equazione primitiva fra x ed y è di m^o grado, la trasformata non può essere di grado superiore, perchè le sostituzioni indicate al § 440, non possono dare termine alcuno in cui la somma degli esponenti potenziarî di x ed y sia maggiore di m. Ma questa trasformata non può nemmeno essere di grado inferiore ad m, perchè, se lo fosse, ricondotta con trasformazione inversa all'equazione primitiva, dovrebbe, per riprodurla, aumentare di grado, il che, per quanto si è notato, non è possibile.

Siccome il grado dell'equazione d'una linea non dipende punto dalla posizione del sistema delle coordinate, ma bensì dalla natura della linea stessa, così si suole dividere le linee a seconda del grado delle rispettive loro equazioni. La linea retta è una linea di *primo grado*, e precisamente l'unica di questo grado; il cerchio, l'elisse, l'iperbole e la parabola sono linee di *secondo grado*. Sottoporremo ora queste ultime a generale disamina.

§ 506. *Discussione della equazione generale di secondo grado,*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots 1),$$

fra le coordinate x, y *d'un punto del piano,* in cui A, B, C...F dinotano coefficienti reali.

Per meglio conoscere il significato geometrico di questa equazione, che, senza menomare la generalità della discussione, si può riferire ad un sistema di coordinate ortogonali, è opportuno di darle, a mezzo d'una data trasformazione delle coordinate, una forma più semplice, scegliendo l'origine e la direzione degli assi del nuovo sistema in modo che alcuni termini della equazione trasformata svaniscano.

Trasformando innanzi tutto le coordinate in modo che l'origine rimanga inalterata ed il nuovo asse delle ascisse formi coll'anteriore l'angolo α, si dovrà porre (§ 440) per x, rispettivamente per y,

$$x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha \text{ ed } x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha,$$

ottenendo in tal modo la nuova equazione

$$Mx^2 + Oxy + Ny^2 + Qx + Ry + F = 0 \ldots 2),$$

in cui sarà:

$$M = A\cos\alpha^2 + B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\operatorname{sen}\alpha^2,$$
$$O = -2(A - C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(\cos\alpha^2 - \operatorname{sen}\alpha^2),$$
$$N = A\operatorname{sen}\alpha^2 - B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + C\cos\alpha^2,$$
$$Q = D\cos\alpha + E\operatorname{sen}\alpha,\quad R = -D\operatorname{sen}\alpha + E\cos\alpha,$$

mentre F avrà serbato il primitivo suo valore.

Per eliminare xy da questa equazione trasformata, farà d'uopo di assegnare all'angolo ancora indeterminato α un tale valore, che si abbia $O = -2(A - C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(\cos\alpha^2 - \operatorname{sen}\alpha^2) = 0$, ovvero, il che è il medesimo, che $-(A - C)\operatorname{sen} 2\alpha + B\cos 2\alpha$ sia $= 0$, e ciò ponendo

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A - C} \ldots 3).$$

Siccome la tangente d'un angolo può assumere qualsiasi valore reale da $-\infty$ a $+\infty$, ne consegue che ad α si potrà sempre assegnare un valore che soddisfaccia all'equazione 3). Ciò facendo, cade dall'equazione 2) il termine Oxy, e si ottiene l'equazione più semplice

$$Mx^2 + Ny^2 + Qx + Ry + F = 0 \ldots 4).$$

Per la determinazione di M ed N si ha dalle precedenti espressioni

$$M + N = A + C$$
$$M - N = (A - C)\cos 2\alpha + B\operatorname{sen} 2\alpha.$$

Essendo poi $\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\alpha^2}} = \frac{B}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$,

$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} 2\alpha^2}} = \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$, ne segue

$M - N = \pm\sqrt{(A - C)^2 + B^2}$, e perciò anche

$$M = \frac{(A + C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2},\quad N = \frac{(A + C) \mp \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2} \ldots 5)$$

ed

$$MN = \frac{4AC - B^2}{4} = -\frac{B^2 - 4AC}{4} \ldots 6).$$

Le ulteriori trasformazioni dipendono dalla natura dei coefficienti M ed N, ovvero, riferendosi all'equazione 6), dalla natura della espressione B^2-4AC. In tale riguardo tre sono i casi principali che si possono avverare:

I. Sia l'espressione B^2-4AC *negativa*.

Se mantenuta la direzione degli assi, si trasforma l'equazione 4) in modo da riferirla ad una nuova origine (m, n), ponendo invece di x ed y i valori $x+m$ ed $y+n$, l'equazione che ne risulta è $Mx^2+Ny^2+(2Mm+Q)x+(2Nn+R)y+(Mm^2+Nn^2+Qm+Rn+F)=0$.

Per eliminare i coefficienti x ed y, si dovranno scegliere le grandezze ancora indeterminate m ed n in modo, che ne risulti $2Mm+Q=0$ e $2Nn+R=0$. Sarà allora

$$m=-\frac{Q}{2M} \quad \text{ed} \quad n=-\frac{R}{2N},$$

per cui se con S si segna l'espressione $-(Mm^2+Nn^2+Qm+Rn+F)$, l'equazione trasformata avrà la forma

$$Mx^2+Ny^2=S\ldots 7).$$

In questo caso tale trasformazione sarà sempre possibile, poichè per la fatta supposizione di $B^2-4AC<0$ e giusta l'equazione 6) i due valori di M ed N sono sempre differenti da zero.

Siccome il primo termine M dell'equazione 7) può essere preso sempre positivo, ne segue che tale dovrà essere del pari N, perchè

$$MN=\frac{4AC-B^2}{4}.$$

Resta ancora da sottoporre a disamina l'espressione segnata con S.

1. Se S è positivo, l'equazione $Mx^2+Ny^2=S$ dà

$$\text{per } y=0\ldots x=\pm\sqrt{\frac{S}{M}}, \text{ e}$$

$$\text{per } x=0\ldots y=\pm\sqrt{\frac{S}{N}}.$$

Ponendo perciò $\sqrt{\frac{S}{M}}=a$ e $\sqrt{\frac{S}{N}}=b$, l'equazione si trasforma in

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ldots 8),$$

che non è altro che l'equazione d'una *elisse* coi semiassi a e b (§ 470).

Se in questo caso $M=N$, anche $a=b$, e l'equazione che ne risulta $x^2+y^2=a^2$ è l'equazione del *cerchio*. Per il cerchio quindi dovrà essere, giusta le equazioni segnate al numero 5), $\sqrt{(A-C)^2+B^2}=0$, cioè $A=C$ e $B=0$.

2. Per $S=0$, si ottiene $Mx^2+Ny^2=0$, e siccome a questa equazione non soddisfanno che i valori di $x=0$ ed $y=0$, ne viene che essa spetta all'origine delle nuove coordinate.

3. Se S è negativo, all'equazione $Mx^2+Ny^2=S$, la cui prima parte non contiene che termini positivi, non possono corrispondere valori reali di x e di y; quella equazione non ha perciò verun significato geometrico, se S è negativo.

Se quindi B^2-4AC è negativo, l'equazione 1) è quella d'una elisse, che per casi speciali può offrire quali varianti un cerchio, ovvero un punto.

II. Sia B^2-4AC *positivo*.

Dovendo anche in questo caso essere M ed N differenti da 0, ne viene che anche qui si potrà eseguire la trasformazione delle coordinate indicata in I, e portare l'equazione 1) alla forma

$$Mx^2+Ny^2=S.$$

Essendo, pero, $MN=-\frac{B^2-4AC}{4}$ negativo, ne segue che M ed N devono avere segni contrari, per cui supposto M positivo, N dovrà essere negativo, e potrà essere indicato con $-N'$.

1. Se S è positivo, l'equazione $Mx^2-N'y^2=S$, dà

$$\text{per } y=0\ldots x=\pm\sqrt{\frac{S}{M}}, \text{ e}$$

$$\text{per } x=0\ldots y=\pm\sqrt{-\frac{S}{N'}}.$$

Ponendo $\sqrt{\frac{S}{M}}=a$ e $\sqrt{-\frac{S}{N'}}=b\sqrt{-1}$, si ottiene l'equazione

$$bx^2-a^2y^2=a^2b^2\ldots 9),$$

il cui luogo geometrico è un'*iperbole* col semiasse primario a e col semiasse secondario b (§ 479).

2. Se $S=0$, l'equazione $Mx^2-N'y^2=0$ dà

$$y=\pm x\sqrt{\frac{M}{N'}},$$

che non è altro che l'equazione d'una variante dell'iperbole, e precisamente di un sistema di due rette che si tagliano nell'origine.

3. Se S finalmente è negativo, quindi eguale a $-S'$, si ottiene

$$N'y^2-Mx^2=S'.$$

Potendosi poi portare questa equazione, collo scambiare degli assi, alla prima forma, ne consegue che essa non rappresenta che una iperbole nella quale l'asse delle ascisse coincide coll'anteriore asse secondario.

III. Sia $B^2 - 4AC$ *eguale a zero.*

In questo caso, si avrà, giusta l'equazione 6), $M = 0$, ovvero $N = 0$; tutti e due i coefficienti M ed N non possono essere negativi, perchè ciò contraddirebbe a quanto fu detto al § 505. Se si avesse p. e. $M = 0$, la trasformazione indicata in I non sarebbe possibile, perchè $m = -\frac{Q}{2M}$ non ha un valore determinato e finito; la prima equazione trasformata 4) invece prenderebbe la forma più semplice

$$Ny^2 + Qx + Ry + F = 0 \ldots 10).$$

Per dare a questa equazione una forma ancora più semplice si prende una nuova origine (r, s), e si pongono al luogo di x ed y i valori $x + r$, rispettivamente $y + s$, ottenendo

$$Ny^2 + Qx + (2Ns + R)y + (Ns^2 + Qr + Rs + F) = 0.$$

Fatto ciò, si scelgono r ed s in modo che tanto il coefficiente di y quanto il termine non contenente x ed y siano eliminati, in modo quindi che s'abbia $2Ns + R = 0$, ed $Ns^2 + Qr + Rs + F = 0$, ciò che avviene per i valori di

$$s = -\frac{R}{2N} \quad \text{ed} \quad r = \frac{R^2 - 4NF}{4NQ}.$$

Tale trasformazione non è possibile se non per Q differente da zero; quindi la necessità di distinguere due casi.

1. Se Q è differente da zero. In tal caso l'equazione 10) si può portare alla forma più semplice $Ny^2 + Qx = 0$, da cui si ricava, ponendo $-\frac{Q}{N} = P$,

$$y^2 = Px \ldots 11).$$

Il luogo geometrico di quest'equazione è una *parabola* (§ 486), che si estende nella direzione positiva o negativa delle ascisse, a seconda che il parametro P è positivo o negativo.

2. Se $Q = 0$, la trasformazione prima accennata non è eseguibile; in tal caso però l'equazione 10) passa nell'altra della forma

$$Ny^2 + Ry + F = 0 \ldots 12),$$

dalla quale si ricava $y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4NF}}{2N}$, che altro non è che l'equazione di un sistema di due rette parallele all'asse delle ascisse.

Agli stessi risultati si perviene eziandio, supponendo $N = 0$; in tal caso l'asse delle ascisse devesi scambiare con quello delle ordinate.

Da tutte queste ricerche risulta che l'equazione 1), fatta eccezione per l'ultimo caso citato, può essere portata sempre per mezzo d'una ripetuta trasformazione ad una delle equazioni

$$Mx^2 + Ny^2 = S \quad \text{ed} \quad y^2 = Px,$$

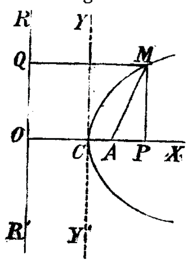
e che la stessa rappresenta una elisse, una iperbole od una parabola in uno alle loro varianti, a seconda che $B^2 - 4AC$ è negativo, positivo od eguale a zero.

Il carattere della linea rappresentata dipende quindi unicamente dalla natura della espressione $B^2 - 4AC$, che perciò appunto viene chiamata il *binomio caratteristico* della equazione 1).

§ 507. *Trovare il luogo geometrico di tutti i punti le cui distanze da un punto dato e da una retta data stiano in un rapporto costante* c.

Si prenda (fig. 226) la retta data RR' (la *direttrice*), quale asse delle ordinate d'un sistema di coordinate ortogonali, il cui asse delle ascisse OX contenga il punto dato A (il *foco*).

Fig. 226.



Se $OP = MQ = x$ ed $MP = y$ sono le coordinate d'un punto M qualsiasi del luogo geometrico richiesto, ponendo $OA = d$, si avrà

$AM : MQ = c$, ovvero, $AM = cx$, e così pure

$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$, perciò

$cx = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$, laonde

$$(1 - c^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0 \ldots 1).$$

Il luogo geometrico chiesto è perciò una linea di secondo grado, e precisamente, come risulta dal § 506, una *elisse*, una *iperbole* od una *parabola*, a seconda che il binomio caratteristico $B^2 - 4AC = 4(c^2 - 1)$ è negativo, positivo od eguale a zero; *a seconda quindi che il numero esprimente il rapporto* c *è minore, maggiore od eguale ad* 1.

Per dimostrare il significato della equazione 1) indipendentemente dalle ricerche fatte al § 506, si dà a quella equazione una forma più semplice, spostando l'origine sull'asse delle ascisse del tratto m, ovvero, il che è il medesimo, ponendo $x + m$ al luogo di x, ove m è ancora indeterminato. Ne risulta allora

$$(1-c^2)x^2 + y^2 + 2[m(1-c^2) - d]x - [m^2(1-c^2) - 2dm + d^2] = 0 \ldots 2).$$

Si scelga poi m in modo che s'abbia $m^2(1-c^2) - 2dm + d^2 = 0$, e ciò ponendo $m = \frac{d}{1 \pm c}$. Siccome per $c = 1$, l'uno dei valori $m = \frac{d}{1-c}$ non può servire allo scopo, farà d'uopo di prendere l'altro valore di $m = \frac{d}{1+c}$ per il quale risulta dall'equazione 2):

$$(1 - c^2)x^2 + y^2 - 2cdx = 0,$$

ovvero, ponendo $cd = p$,

$$(1 - c^2)x^2 + y^2 - 2px = 0 \ldots 3).$$

1. Se $c<1$ e se si pone $1-c^2=\frac{p}{a}$, discende dall'equazione 3)

$$y^2=2px-\frac{px^2}{a}\dots 4),$$

che è l'equazione al vertice della *elisse*.

Dalla precedente sostituzione si ha:

$$c^2=1-\frac{p}{a}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2,\text{ quindi } c=\varepsilon,$$

vale a dire, il rapporto costante c altro non è che l'eccentricità numerica ε.

Di più sarà $d=\frac{p}{\varepsilon}=\frac{b^2}{a\varepsilon}$ ed $m=\frac{d}{1+\varepsilon}$.

La direttrice RR' si riferisce al foco A; nella stessa relazione trovasi, rapporto al secondo foco B, una seconda direttrice SS', parallela alla prima ed avente dal foco coniugato B e dalla parte opposta la stessa distanza $d=\frac{b^2}{a\varepsilon}$.

Per $c=0$, $\frac{p}{a}=1$, e l'equazione 4) si trasforma in $y^2=2px-x^2$, che non è altro che l'equazione al vertice del *cerchio*.

2. Se $c>1$, e se si pone $1-c^2=-\frac{p}{a}$, l'equazione 3) dà:

$$y^2=2px+\frac{px^2}{a}\dots 5),$$

cioè l'equazione al vertice dell'*iperbole*.

Come nella elisse anche in questo caso si ha

$$c=\varepsilon,\qquad d=\frac{b^2}{a\varepsilon},\qquad m=\frac{d}{1+\varepsilon}.$$

L'iperbole ha del pari due fochi e due direttrici.

3. Per $c=1$, si ha dall'equazione 3)

$$y^2=2px\dots 6),$$

cioè l'equazione al vertice della *parabola*.

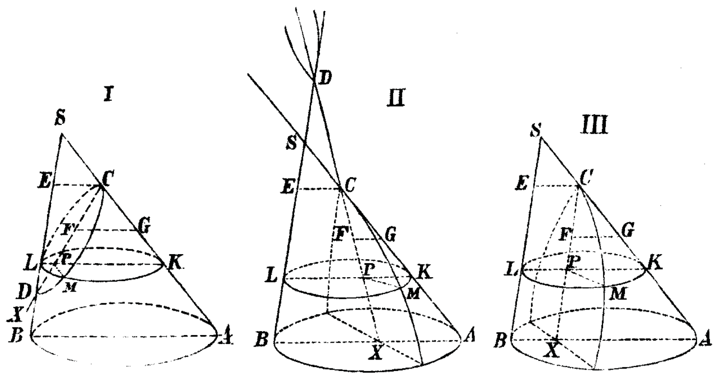
In tale caso si ha $m=\frac{d}{2}$, cioè la nuova origine, che è il vertice della parabola, cade nel punto medio della distanza del foco dalla direttrice.

§ 508. *Le linee di secondo grado ottenute dalla intersezione di un cono per mezzo d'un piano.*

Sia SAB (fig. 227) una sezione fatta per l'asse d'un cono e normale alla base dello stesso. Se per un punto qualsiasi C d'un lato SA di questo cono si fa passare un piano normale alla sezione SAB che tagli questa lungo la retta CX e la superficie conica lungo la linea CM, tre sono i casi principali che si possono presentare: *a*) la

retta CX taglia anche l'altro lato SB nel punto D (I), *b*) la retta CX non taglia il lato SB stesso, ma il suo prolungamento oltre il vertice S nel punto D (II), *c*) la retta CX è parallela al secondo lato SB (III).

Fig. 227.



Per determinare in tutti e tre questi casi la linea d'intersezione CM della superficie conica col piano condotto per il punto C, si fa passare per un punto qualsiasi M di quel piano un secondo piano MKL parallelo alla base del cono. Essendo MKL normale ad SAB, ne viene che la retta d'intersezione MP dei due piani MCX ed MKL deve essere normale al piano SAB (§ 220), e perciò anche a CX ed a KL. Ma MKL è un cerchio, dunque

$$MP^2=KP.LP\ (\S\ 135).$$

Condotta $CE \parallel AB$, fatto $CF=CE$ e condotta $FG \parallel BA$, si ha per il I e II caso,

$$KP:FG=CP:CF \text{ ed } LP:CE=PD:CD, \text{ quindi}$$

$$KP=\frac{FG.CP}{CF} \text{ ed } LP=\frac{CE.PD}{CD}, \text{ e perciò}$$

$$MP^2=\frac{FG.CP.PD}{CD}.$$

Prendendo la CX quale asse delle ascisse, e ponendo $CP=x$, $MP=y$, $CD=2a$ ed $FG=2p$, si ottiene nel I caso, essendo $PD=2a-x$,

$$y^2=\frac{2p.x.(2a-x)}{2a},\text{ ovvero } y^2=2px-\frac{px^2}{a}\dots 1),$$ e

nel II caso, essendo $PD=2a+x$,

$$y^2=\frac{2p.x.(2a+x)}{2a},\text{ ovvero } y^2=2px+\frac{px^2}{a}\dots 2).$$

Nel primo caso la sezione del piano colla superficie conica è una *elisse*, nel secondo caso una *iperbole*.

Se nel primo caso il piano secante è parallelo alla base, i segmenti CD, EF ed FG si confondono in uno, e si ha $2a = 2p$, per cui l'equazione $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ si trasforma nell'altra $y^2 = 2px - x^2$ appartenente ad un *cerchio*.

Nel III caso finalmente si ha per KP, come sopra, il valore $KP = \frac{FG.CP}{CF}$, ed $LP = EC = CF$, quindi $MP^2 = FG . CR$, ovvero

$$y^2 = 2px \ldots 3).$$

Nel terzo caso la sezione è quindi una *parabola*.

L'elisse, l'iperbole e la parabola diconsi comunemente *sezioni coniche*, perchè, appunto come fu dimostrato, risultano dall'intersecare un cono per mezzo d'un piano.

Problemi.

§ 509. Si trovi per mezzo d'una adatta trasformazione delle coordinate il significato geometrico delle seguenti equazioni:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$
2. $9x^2 + 16y^2 - 6x + 16y + 1 = 0.$
3. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$
4. $8x^2 - y^2 + 48x = 0.$
5. $2x^2 + 4xy - y^2 = 0.$
6. $xy + x + y = 1.$
7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 132x - 72y + 144 = 0.$
8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x\sqrt{2} - 8y\sqrt{2} = 0.$
9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 90x + 5y + 25 = 0.$
10. $3x^2 + 26xy\sqrt{3} - 23y^2 + 48x\sqrt{3} - 48y = 0.$

11. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri dei cerchi che passano per un punto dato e sono tangenziali ad una retta data.

Nella soluzione di questo problema e dei seguenti si considerino nella equazione $(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2$ dei cerchi chiesti, le coordinate del centro p e q quali variabili, si deduca dalle condizioni del problema una equazione fra p e q, e si cerchi il significato geometrico di tale equazione.

12. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri dei cerchi che passano per un punto dato e che toccano un cerchio dato, se il punto dato è *a*) il centro del cerchio dato, *b*) un altro punto qualsiasi all'interno del cerchio, *c*) un altro punto qualsiasi all'esterno del cerchio.

13. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri dei cerchi che toccano una retta data ed un cerchio dato, se la retta *a*) passa per il centro del cerchio dato, *b*) se essa trovasi al di fuori del cerchio.

14. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri dei cerchi che toccano due cerchi dati, o tutti e due esternamente, o tutti e due internamente, *a*) se i due cerchi si tagliano, *b*) se l'uno, senza essere concentrico coll'altro, trovasi all'interno dell'altro.