SOPRA L'EQUILIBRIO
DI
UN CORPO ELASTICO ISOTROPO
LIMITATO
DA UNA O DUE SUPERFICIE SFERICHE

MEMORIA

DEL

DOTT. CARLO SOMIGLIANA

Nella presente memoria ho dato una soluzione del problema dell' equilibrio di una sfera elastica isotropa senza ricorrere a sviluppi in serie, supponendo conosciute le forze, che agiscono in tutte le parti del corpo e alla superficie noti: 1.° gli spostamenti 2.° le forze esterne.

In seguito ho fatto una semplice applicazione del metodo delle immagini pel caso di un corpo limitato da due superficie sferiche concentriche.

Mi sono giovato in gran parte del metodo di integrazione di cui si parla nel mio lavoro: Sopra l' equilibrio di un corpo elastico isotropo (*Nuovo Cimento* 1885, Fasc. Marzo-Aprile e seguenti).

(*) Il presente lavoro era già terminato quando il sig. Prof. Cerruti comunicò alla R. Accademia dei Lincei (Giugno 1886) il suo interessante lavoro: Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa. Tuttavia alcuni dei risultati, a cui sono arrivato, forse non saranno affatto inutili per lo studio del problema proposto.

I.

Dalla teoria dei parametri differenziali si ha la seguente formula:

(1) $$\Delta_2(UV) = U\,\Delta_2 V + V\,\Delta_2 U + 2\,\Delta_1 UV$$

in cui U, V sono funzioni qualsiasi, e Δ_1 indica il primo parametro differenziale, Δ_2 il secondo. Quando si fa uso di coordinate polari ρ, θ, φ è noto che si ha

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right\}$$

$$\Delta_1 UV = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}.$$

Poniamo ora nella (1) $U = \rho^2$ $U = W$, ammettendo inoltre che si abbia $\Delta_2 W = 0$; avremo poichè $\Delta_2\rho = 6$,

(2) $$\Delta_2(\rho^2 W) = 6\,W + 4\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}.$$

Si ha inoltre, avendo riguardo alla equazione $\Delta_2 W = 0$,

$$\Delta_2\frac{\partial W}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial W}{\partial\rho}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\rho^2\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)\right\}$$

ossia

$$\Delta_2\frac{\partial W}{\partial\rho} = -\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)$$

D' altra parte essendo $\Delta_2\rho = \frac{2}{\rho}$, si ha

$$\Delta_2\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho} = \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right) + \rho\,\Delta_2 W;$$

quindi, a cagione della formula precedente,

(3) $$\Delta_2\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho} = 0;$$

ed osservando la (2) si ha anche

$$\Delta_2(\Delta_2 f(\rho)\,W) = 0.$$

È facile vedere che la funzione $f(\rho) = c\rho^2 + c'$, ove c, c' sono costanti è l' unica la quale soddisfi alla equazione

(4) $$\Delta_2(\Delta_2 f(\rho)\,W) = 0$$

quando $\Delta_2 W = 0$.

Indichiamo ora con u, v, w le tre funzioni che rappresentano le componenti secondo un sistema di coordinate cartesiane (coll' origine nel polo delle coordinate ρ, θ, φ) dello spostamento di un punto (x, y, z) di un corpo elastico isotropo; e poniamo

$$(5)\qquad u=\rho^2\frac{\partial W}{\partial x}+\alpha \quad v=\rho^2\frac{\partial W}{\partial y}+\beta \quad w=\rho^2\frac{\partial W}{\partial z}+\gamma$$

ove W, α, β, γ sono funzioni che, oltre alle solite condizioni di monodromia e continuità, nello spazio S soddisfano alla equazione $\Delta_2=0$ e sono sempre finite. Se chiamiamo Θ la dilatazione cubica $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$, abbiamo

$$\Theta = 2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}+\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

A cagione delle (3) (4) poi si vede subito che

$$\Delta_2\Theta=0 \quad \text{e} \quad \Delta_2(\Delta_2 u)=0 \quad \Delta_2(\Delta_2 v)=0 \quad \Delta_2\,\Delta_2 w)=0$$

e sono così soddisfatte quelle equazioni che sono caratteristiche per le funzioni, che debbono rappresentare la dilatazione cubica e gli spostamenti delle particelle di un corpo elastico isotropo, quando le forze interne sono nulle.

Vediamo ora come, supposte note le α, β, γ, è possibile determinare la W in modo che vengano soddisfatte le equazioni indefinite dell'equilibrio, le quali, supponendo nulle le forze che agiscono nell' interno X, Y, Z, sono

$$\sigma\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\Delta_2 u=0 \qquad \sigma\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\Delta_2 v=0 \qquad \sigma\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\Delta_2 w=0$$

ove per brevità si è posto $\frac{2\lambda+\mu}{\mu}=\sigma$, essendo λ, μ le due note costanti del potenziale delle forze elastiche.

Ponendo nelle equazioni precedenti per u, v, w le espressioni date dalle (5) si ha $\left(\text{posto } \Omega=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)$

$$\sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega+2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)+6\frac{\partial W}{\partial x}+4\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial x}=0$$

$$(6)\qquad \sigma\frac{\partial}{\partial y}\left(\Omega+2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)+6\frac{\partial W}{\partial \rho}+4\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial y}=0$$

$$\sigma\frac{\partial}{\partial z}\left(\Omega+2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)+6\frac{\partial W}{\partial z}+4\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

Ora è facile vedere che qualunque sia la funzione W si ha la formula

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial \rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{x}{\rho^2}\frac{\partial W}{\partial \rho}$$

ed altre due analoghe che si deducono da questa mutando x in y ed in z. Sostituendo i valori che così si ottengono per $\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial z}$ nelle equazioni (6), moltiplicando queste per $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ rispettivamente e sommando, si ottiene

$$\sigma\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\Omega+2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)+6\frac{\partial W}{\partial \rho}+4\rho\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}=0$$

Da questa equazione integrando si ha

$$(8)\qquad \sigma\,\Omega + 2\,W + 2\,(\sigma+2)\rho\frac{\partial W}{\partial\rho} = c\,,$$

ove c è costante rispetto a ρ. Supponiamo che esista un valore ρ_0 di ρ tale che, per $\rho=\rho_0$, Ω assuma un valore Ω_0 indipendente da θ e φ e prendiamo $c=\sigma\,\Omega_0$. La equazione precedente potrà scriversi

$$\sigma(\Omega-\Omega_0)+2(\sigma+2)\,\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\,W\right)=0\,,$$

da cui integrando

$$(9)\qquad W = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\,\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\,d\rho.$$

L'espressione del secondo membro soddisfa alla equazione $\Delta_2=0$; difatti se poniamo

$$\frac{1}{\sigma+2}=\tau \qquad F=\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau-1}\,d\rho$$

abbiamo

$$\Delta_2\,W = -\frac{\sigma}{2}\,\tau\,\Delta_2\left(\rho^{-\tau}\,F\right)$$

e inoltre

$$(a)\qquad \Delta_2\left(\rho^{-\tau}F\right)=\rho^{-\tau}\Delta_2F+F\Delta_2\rho^{-\tau}-2\tau\rho^{-\tau-1}\frac{\partial F}{\partial\rho}$$

Ora si ha

$$\Delta_2\,\rho^{-\tau}=-\tau(-\tau+1)\rho^{-\tau-2}\qquad \frac{\partial F}{\partial\rho}=(\Omega-\Omega_0)\rho^{\tau-1}\,;$$

e poichè $\Delta_2(\Omega-\Omega_0)=0$, abbiamo

$$\Delta_2\,F=\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}[(\Omega-\Omega_0)\rho^{\tau+1}]-\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial(\Omega-\Omega_0)}{\partial\rho}\right)\rho^{\tau-1}\,d\rho\right\}$$

Ma integrando due volte per parti, ammesso che per $\rho=\rho_0$ si abbia

$$(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau}=0\qquad \rho^{\tau+1}\frac{\partial}{\partial\rho}(\Omega-\Omega_0)=0\,,$$

otteniamo

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial(\Omega-\Omega_0)}{\partial\rho}\right)\rho^{\tau-1}d\rho=(\tau+1)\frac{\partial(\Omega-\Omega_0)}{\partial\rho}-(\tau-1)\left\{\rho^{\tau}(\Omega-\Omega_0)-\tau F\right\}$$

e quindi

$$\Delta_2\,F=\frac{1}{\rho^2}\left\{2\,\tau\,(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau}-(\tau-1)\,F\right\}\,;$$

sostituendo queste espressioni nella (a) si ottiene

$\Delta_2(\rho^{-\tau} F)=0$, e quindi $\Delta_2 W=0$.

Dalla equazione (8), se deriviamo rispetto ad x, y, z, avendo riguardo alla (7), riotteniamo le equazioni (6); epperò le espressioni (5), in cui W ha il valore trovato (9), soddisfano effettivamente alle equazioni indefinite dell' equilibrio, quando le forze che agiscono nell'interno sono nulle.

Faremo ora sulle funzioni della forma della W qualche considerazione che ci gioverà in seguito. Intanto possiamo enunciare il seguente teorema:

« Se Ω è una funzione delle variabili ρ, θ, φ la « quale in un certo intervallo, in cui è compreso l'altro « da ρ_0 a ρ, è atta alla integrazione rispetto a ρ, sod- « disfa alla equazione $\Delta_2\Omega=0$ e per $\rho=\rho_0$ prende un « valore Ω_0 indipendente da θ e φ, e inoltre τ è una co- « stante tale che per $\rho=\rho_0$

$$(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau}=0 \qquad \rho^{\tau+1}\frac{\partial}{\partial\rho}(\Omega-\Omega_0)=0,$$

« la funzione

$$W=\rho^{-\tau}\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau-1}\,d\rho$$

« soddisfa nell' intervallo considerato alla equazione « $\Delta_2 W=0$, e all' altra

$$(10) \qquad \rho\frac{\partial W}{\partial\rho}+\tau W=\Omega-\Omega_0\,;$$

« inoltre per $\rho=\rho^0$

$$(11) \qquad \rho^{\tau} W=0 \qquad \rho^{\tau+1}\frac{\partial W}{\partial\rho}=0,$$

È chiaro ora che se τ' è una nuova costante per la quale si abbiano, quando $\rho=\rho_0$, relazioni analoghe a quelle che si avevano per τ, cioè

$$\rho^{\tau'}(\Omega-\Omega_0)=0 \qquad \rho^{\tau'+1}\frac{\partial}{\partial\rho}(\Omega-\Omega_0)=0,$$

si potrà, a cagione della (11), procedere rispetto a W come si è fatto colla Ω; e otterremo (poichè per $\rho=\rho_0$ $W=0$) una nuova funzione W' data dalla formula

$$W'=\rho^{-\tau'}\int_{\rho_0}^{\rho} W\rho^{\tau'-1}d\rho=\rho^{-\tau'}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\tau'-\tau-1}d\rho\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\rho^{\tau-1}d\rho$$

o anche mediante una integrazione per parti

$$W'=\frac{1}{\tau-\tau'}\rho^{-\tau}\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\rho^{\tau-1}d\rho+\frac{1}{\tau'-\tau}\rho^{-\tau'}\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\rho^{\tau'-1}d\rho$$

la quale soddisfa alla equazione $\Delta_2 W'=0$ ed all' altra equazione di secondo ordine lineare rispetto a ρ

$$(11)' \qquad \rho^2\frac{\partial^2 W'}{\partial\rho^2}+(\tau+\tau'+1)\rho\frac{\partial W'}{\partial\rho}+\tau\tau' W'=\Omega-\Omega_0$$

Il procedimento come si vede può essere continuato e si ottiene così il seguente teorema:

« Se Ω è una funzione di ρ, θ, φ la quale in un « certo intervallo, in cui è compreso l' altra da ρ_0 a ρ, « è atta alla integrazione rispetto a ρ, soddisfa alla equa- « zione $\Delta_2 \Omega = 0$ e per $\rho = \rho_0$ prende un valore Ω_1 indi- « pendente da θ e φ; inoltre $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ sono n co- « stanti tali che per $\rho = \rho_0$ si abbia

$$\rho^{\tau_i}(\Omega-\Omega_0) = 0 \qquad \rho^{\tau_i+1}\frac{\partial}{\partial\rho}(\Omega-\Omega_0) = 0$$

« la funzione

$$W_n = \rho^{-\tau_n}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\tau_n-\tau_{n-1}-1}\,d\rho\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\tau_{n-1}-\tau_{n_2}-1}\,d\rho \ldots$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\tau_2-\tau_1-1}\,d\rho\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega_0)\,\rho^{\tau_1-1}\,d\rho$$

« soddisfa nello spazio considerato alla equazione $\Delta_2 W_n = 0$, « e ad un'altra equazione differenziale lineare di ordine « n rispetto a ρ, che può scriversi

$$A_0\rho^n\frac{\partial^n W_n}{\partial\rho^n}+A_1\rho^{n-1}\frac{\partial^{n-1} W_n}{\partial\rho^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\rho\frac{\partial W_n}{\partial\rho}+A_n W = \Omega-\Omega_0,$$

« in cui le $A_0, A_1, \ldots A_n$ sono funzioni simmetriche « delle costanti $\tau_1, \tau_3, \ldots \tau_n$. La funzione W_n inoltre « può considerarsi come la somma di n funzioni della « forma di W_1, poichè ponendo

$$T_{\tau_i} = \rho^{-\tau_i}\int_{\rho_0}^{\rho}(\Omega-\Omega)\rho^{\tau_i-1}\,d\rho$$

« mediante integrazioni successive per parti si ha (*)

$$W_n = \frac{T_{\tau_1}}{(\tau_2-\tau_1)(\tau_3-\tau_1)(\tau_4-\tau_1)}\frac{T_{\tau_2}}{(\tau_3-\tau_2)(\tau_4-\tau_2)(\tau_1-\tau_2)}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{T_n}{(\tau_1-\tau_n)(\tau_2-\tau_n)\ldots(\tau_{n-1}-\tau_n)}$$

Dimostrerò ora alcune formule che sono assai utili per formare le derivate rispetto ad x, z, y delle funzioni W. Dalle (10), derivando rapporto ad x, abbiamo

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \tau\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{x}{\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial\rho}$$

e per la (7)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = (\tau+1)\frac{\partial W}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial W}{\partial\rho}$$

(*) Questa formula si verifica facilmente per $n=2$, $n=3$; poi si vede che se è vera per n è vera anche per $n+1$, avendo riguardo alla identità

$$\sum_{m=n}^{m=n}\frac{1}{(\tau_1-\tau_m)(\tau_2-\tau_m)\ldots(\tau_m-\tau_{m-1})(\tau_{m+1}-\tau_m)\ldots(\tau_n-\tau_m)} = 0$$

e integrando fra ρ_0 e ρ rispetto a ρ dopo aver moltiplicato per ρ^{τ}

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \rho^{\tau} \, d\rho \quad = \left[\frac{\partial W}{\partial x} \rho^{\tau+1} \right]_{\rho_0}^{\rho}$$

Ora poichè per $\rho = \rho_0$ si ha $\rho^{\tau+1} \frac{\partial W}{\partial \rho} = 0$, qualunque siano i valori di θ e φ, si vede che si dovrà avere anche $\rho^{\tau+1} \frac{\partial W}{\partial x} = 0$ per $\rho = \rho_0$.

Abbiamo così le formule

$$(12) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \rho^{-\tau-1} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \rho^{\tau} \, d\rho \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \rho^{-\tau-1} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \rho^{\tau} \, d\rho \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \rho^{-\tau-1} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \rho^{\tau} \, d\rho \,; \end{aligned}$$

cioè: per derivare rapporto ad x, y, z una funzione W basta derivare la funzione sotto il segno d' integrazione e mutare τ in $\tau+1$.

II.

Per le componenti u, v, w dello spostamento di una particella $(x' \, y' \, z')$ di un corpo elastico isotropo S, limitato da una superficie s, ho dimostrato (*) delle formule, le quali, nel caso particolare che il corpo sia una sfera col centro nella origine delle coordinate, si riducono alle seguenti :

$$(13) \quad \begin{cases} 4\pi\mu = (2\lambda+\mu) \dfrac{\partial}{\partial x'} \displaystyle\int_{\rho} \Theta \frac{dS}{r} + \delta \int_{\rho} X \frac{dS}{r} + \int_{s} L \frac{ds}{r} - \\ -\mu \displaystyle\int_{s} \left\{ u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} + v \left(\frac{x}{\rho} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} - \frac{y}{\rho} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + w \left(\frac{x}{\rho} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{z}{\rho} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) \right\} ds \\ 4\pi\mu \, v = \ldots\ldots \\ 4\pi\mu \, w = \ldots\ldots \end{cases}$$

in cui δ indica la densità,

$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, Θ la dilatazione cubica nel punto (x, y, z), X, Y, Z le forze che agiscono nell' interno, L, M, N le superficiali.

Dalle formole precedenti poi si deduce

(*) *Nuovo Cimento* Fascic. Marzo-Aprile 1885.

$$-8\pi(\lambda+\mu)\Theta = \partial\int_\rho \left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS$$

$$+\int_s\left(Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+W\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)ds$$

$$2+\mu\int_s\left(u\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)ds,$$

formula dovuta al prof. Betti.

Cominciamo a considerare il caso, in cui si conoscono i valori superficiali di u, v, w e le forze X, Y, Z. Secondo il metodo di integrazione che ci siamo proposti di seguire, basterà determinare gli spostamenti che avvengono nella sfera quando $X = Y = Z = 0$, ed alla superficie

$$\begin{array}{llll} 1^0 & u=\frac{1}{r} & v=0 & w=0\,; \\ 2^0 & u=0 & v=\frac{1}{r} & w=0\,; \\ 3^0 & u=0 & v=0 & w=\frac{1}{r}\,. \end{array}$$

A cagione poi della simmetria del corpo rispetto ai tre assi basterà determinare il primo di questi tre sistemi di spostamenti (che indicheremo rispettivamente con $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$, $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$, $\xi_3\,\eta_3\,\zeta_3$, poichè) gli altri si potranno dedurre da questo con sostituzioni circolari.

Le formule (5) del n. I. danno subito il modo di determinare ξ_1, η_1, ζ_1; difatti è noto che la funzione

$$\varphi=\frac{R}{\rho'}\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{\rho'^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{\rho'}\rho\cos\gamma}} \quad \text{ove } \cos\gamma=\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho\,\rho'}$$

è monodroma, finita e continua colle sue derivate nello spazio S, soddisfa alla equazione $\Delta_2=0$, ed alla superficie prende i valori di $\frac{1}{r}$ quindi nelle (5) potremo porre

$$\alpha=\varphi \qquad \beta=0 \qquad \gamma=0.$$

Possiamo inoltre prendere $\rho_0=0$, e allora si ha

$$\Omega=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{R(x\rho'^2-R^2x')}{(R^4+\rho^2\rho'^2-2R^2\rho\rho'\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\;\Omega_0=\frac{x'}{R^3}\,;$$

quindi le condizioni

$$\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}(\Omega-\Omega_0)=0 \qquad \rho^{\frac{1}{\sigma+2}+1}\frac{\partial(\Omega-\Omega_0)}{\partial\rho}=0$$

per $\rho=0$ sono soddisfatte, essendo σ un numero sempre positivo.

Perciò avremo

$$W_1=-\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{x'}{R^3}\right)\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\partial\rho$$

Osservando poi che gli spostamenti

$$u = \frac{\partial W_1}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial W_1}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

soddisfano alle equazioni indefinite dell' equilibrio, quando X , Y , Z = 0 , poichè $\Delta_2 W_1 = 0$, si vede subito che si avrà:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= (\rho^2 - R^2)\frac{\partial W_1}{\partial x} + \varphi \\ \eta_1 &= (\rho^2 - R^2)\frac{\partial W_1}{\partial y} \\ \zeta_1 &= (\rho^2 - R^2)\frac{\partial W_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Le espressioni di $\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2$, $\xi_3\, \eta_3\, \zeta_3$ saranno analoghe a queste; in esse al posto di W_1 avremo due funzioni W_2 , W_3 date da

$$W_2 = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y'}{R^3}\right)\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-1}d\rho$$

$$W_3 = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{z'}{R^3}\right)\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-1}d\rho$$

Queste tre funzioni W_1 , W_2 , W_3 sono le derivate rispetto ad x , y , z rispettivamente di una stessa funzione V; difatti se poniamo

$$V = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^\rho \left(\varphi - \frac{1}{R} - \frac{xx'+yy'+zz'}{R^3}\right)\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-2}d\rho$$

a cagione delle (12) si vede subito che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = W_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = W_2 \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = W_3 ,$$

e la V rientra nel tipo di funzioni cui appartengono W_1 , W_2 , W_3 e quindi si ha anche $\Delta_2 V = 0$.

Poniamo per brevità

$$\varphi - \frac{1}{R} - \frac{xx'+yy'+zz'}{R^3} = \varphi - \varphi_0 - \rho\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) = H ;$$

si vede facilmente che H espressa per ρ, θ, φ e ρ', θ', φ' è funzione del prodotto $\rho\rho'$ e di cos γ. Quindi se nell'integrale della espressione di V facciamo la sostituzione di variabili

$$\rho\rho' = h \qquad d\rho = \frac{dh}{\rho'}$$

abbiamo

$$V = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} h^{-\frac{1}{\sigma+2}+1}\int_0^h H\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-2}dh$$

epperò anche V è funzione del prodotto $\rho\rho'$ e di cos γ; ne viene che sarà simmetrica rispetto a ρ e ρ', e quindi avremo per essa le due espressioni

$$V = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}+1}\int_0^{\rho} H\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-2}d\rho$$

$$V = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho'^{-\frac{1}{\sigma+2}+1}\int_0^{\rho'} H\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-2}$$

Nei secondi membri di queste uguaglianze l'esponente $\frac{1}{\sigma+2}-2$ è certamente frazionario poichè σ è sempre positiva e >1; quindi nel differenziale da integrarsi avremo dei radicali di funzioni, in cui gli esponenti delle variabili dipendono dal valore numerico di σ. Circa questo valore si può osservare che se indichiamo con E il modulo di elasticità e con μ' il coefficiente di Poisson, si ha

$$\frac{E}{2(1+\mu')} = \frac{\mu}{\delta} \qquad \frac{E}{2(1+\mu')(1-2\mu')} = \frac{2\lambda+\mu}{\delta}$$

da cui

$$\sigma = \frac{2\lambda+\mu}{\mu} = \frac{1}{1-2\mu'}$$

Ora il coefficiente μ' varia per i diversi corpi (*) ed è sempre compreso fra 0 e $\frac{1}{2}$; si vede quindi che σ può variare

(*) V. p. e. Vülner-Lehrbuch der Experimental Physik Bd. I. §. 51.

fra 1 e ∞ (questi estremi naturalmente esclusi) Prendendo per μ' il valore $\frac{1}{4}$ dato da Poisson ed altri, o l'altro $\frac{1}{3}$ dato da Wertheim si trova

$$\sigma = 2 \qquad \text{oppure } \sigma = 3$$

In questi due casi l'integrale della V si riduce ad un integrale iperellittico.

Indichiamo con Λ_1, M_1, N_1 le forze superficiali che produrrebbero nella sfera gli spostamenti (14); la dilatazione cubica θ_1 di questi è

$$\theta_1 = \frac{2}{\sigma+2}\frac{\partial(\varphi - V)}{\partial x} + \frac{\sigma}{\sigma+2}\frac{x'}{R^3};$$

e avremo

$$\frac{1}{\mu}\Lambda_1 = \sigma\theta_1\frac{x}{R} + 2R\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$$

$$\frac{1}{\mu}M_1 = \sigma\theta_1\frac{y}{R} + 2R\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\left(\frac{x}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{y}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}N_1 = \sigma\theta_1\frac{z}{R} + 2R\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\left(\frac{x}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{z}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

ed altre espressioni analoghe per le forze Λ_2, M_2, N_2, Λ_3, M_3, N_3, corrispondenti agli spostamenti ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_3, η_3, ζ_3,

Le espressioni finali per le u, v, w risultano composte di due parti: l'una rappresenta gli spostamenti prodotti nella sfera dagli spostamenti superficiali dati quando le forze X, Y, Z sono nulle; la seconda gli spostamenti prodotti dalle forze X, Y, Z quando la superficie della sfera è fissa.

Cominciamo a considerare la prima parte, che indicheremo con u_1, v_1, w_1. Pel teorema del Prof. Betti si ha:

$$\int_s \frac{L}{r}\, d s = \int_s (u\, \Lambda_1 + v\, M_1 + w\, N_1)\, d s$$

ed altre due formule simili per gli integrali $\int_s \frac{M}{r} d S$, $\int_s \frac{N}{r} d s$. Da queste uguaglianze se ne deduce una quarta che serve a trovare il valore della Θ e quindi mediante le (12) si hanno le espressioni finali delle u_1, v_1, w_1. Si può però arrivare allo stesso risultato più brevemente.

Nella espressione di Λ_1 comparisce il termine $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$; e quindi in quella di u_1 si avrà quest'altro

$$-\frac{1}{4\pi}\int_s u \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d s,$$

il quale, per la formula di Green, rappresenta una fun-

zione monodroma, finita e continua colle sue derivate che nello spazio interno della sfere soddisfa alla equazione $\Delta_2 = 0$, e che alla superficie prende i valori di u. Sorge quindi naturale l'idea di servirsi delle (5) e di porre

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\int_s u \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d s$$

$$\beta = -\frac{1}{4\pi}\int_s v \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d s$$

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}\int_s w \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r} - \rho\right) d s,$$

poi cercare se sono soddisfatte quelle altre condizioni necessarie perchè si possa determinare la funzione W che risolve completamente il problema.

Derivando la φ rapporto al raggio R della sfera, abbiamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = -\frac{R^4 - \rho^2 \rho'^2}{\Delta^3}$$

posto $\Delta = \sqrt{R^4 + \rho^2 \rho'^2 - 2 R^2 \rho \rho' \cos\gamma}$; e inoltre

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = -\frac{\rho - \rho' \cos\gamma}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{R(\rho \rho'^2 - R^2 \rho' \cos\gamma)}{\Delta^3};$$

quindi sulla superficie s

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{r}-\varphi\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial R}$$

e potremo scrivere

$$(15) \qquad \alpha = -\frac{1}{4\pi}\int_S u\frac{\partial \varphi}{\partial R}\, ds$$

$$\beta = -\frac{1}{4\pi}\int_S v\frac{\partial \varphi}{\partial R}\, ds$$

$$\gamma = -\frac{1}{4\pi}\int_S w\frac{\partial \varphi}{\partial R}\, ds$$

da cui

$$\Psi = \frac{\partial \alpha}{\partial x'}+\frac{\partial \beta}{\partial y'}+\frac{\partial \gamma}{\partial z'} = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left(u\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial x'}+v\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial y'}+w\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) ds$$

Per $\rho'=0$ abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{3x}{R^4}\,,\quad \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -\frac{3y}{R^4}\,,\quad \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial z'} = -\frac{3z}{R^4}$$

ed il valore Ψ_0 di Ψ per $\rho=0$ sarà

$$\Psi_0 = \frac{3}{4\pi R^4}\int_S (x\,u + y\,v + z\,w)\, ds$$

ed è quindi indipendente da θ' e φ'; inoltre per $\rho'=0$

sono soddisfatte le condizioni

$$\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}}(\Psi-\Psi_0)=0 \qquad \rho'^{\frac{1}{\sigma+2}+1}\frac{\partial}{\partial \rho'}(\Psi-\Psi_0)=0\,,$$

e perciò prendendo

$$(16) \qquad u_1 = (\rho'^2 - R^2)\frac{\partial W}{\partial x} + \alpha$$

$$v_1 = (\rho'^2 - R^2)\frac{\partial W}{\partial y} + \beta$$

$$w_1 = (\rho'^3 - R^2)\frac{\partial W}{\partial z} + \gamma$$

ove α, β, γ hanno i valori (15) e

$$W = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^{\rho'}(\Psi-\Psi_0)\,\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\, d\rho'\,,$$

saranno soddisfatte tutte le condizioni del problema. Le (16) rappresentano dunque la deformazione che avviene nella sfera S per effetto di una deformazione superficiale data, quando $X=0$ $Y=0$ $Z=0$; ai secondi membri poi si devono aggiungere, come è noto, quelle funzioni lineari che servono a fissare la posizione del corpo nello spazio.

Dalle (16) per la dilatazione cubica Θ_1 si deduce

$$\Theta_1 = \Psi + 2\,\rho'\frac{\partial W}{\partial \rho'}$$

o anche, a cagione della equazione a cui soddisfa W,

$$\Theta_1 = -\frac{2}{\sigma+2}(\mathrm{W}-\Psi) + \frac{\sigma}{\sigma+2}\Psi_0$$

Ora facilmente si vede che, essendo per $\rho' = 0$

$$\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}}\Psi = 0\,,$$

si può scrivere

$$\Psi = \rho'^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^{\rho'}\left(\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \frac{1}{\sigma+2}\Psi\right)\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\,d\rho'\;;$$

e quindi

$$\mathrm{W}-\Psi = -\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^{\rho'}\left(\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \frac{1}{2}\Psi\right)\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\,d\rho' + \frac{\sigma}{2}\Psi_0$$

e finalmente

$$\Theta_1 = \frac{2}{\sigma+2}\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^{\rho'}\left(\rho'\frac{\partial\Psi}{\partial\rho'} + \frac{1}{2}\Psi\right)\rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1}\,d\rho'$$

Consideriamo ora la seconda parte u_2, v_2, w_2 degli spostamenti u, v, w; in questo caso, applicando successivamente il teorema del Prof. Betti ai gruppi di spostamenti ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_3, η_3, ζ_3 accoppiati con u_2, v_2, w_2, si ottiene

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\int_s \frac{\mathrm{L}}{r}\,d\mathrm{S} &= -\delta\int_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\,\varphi\,d\mathrm{S} - \delta\int_{\mathrm{S}}(\rho^2-\mathrm{R}^2)\\
&\qquad\left\{\mathrm{X}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x\partial^2}\right\}d\mathrm{S}\\
\int_s \frac{\mathrm{M}}{r}\,d\mathrm{S} &= -\delta\int_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}\,\varphi\,d\mathrm{S} - \delta\int_{\mathrm{S}}(\rho^2-\mathrm{R}^2)\\
&\qquad\left\{\mathrm{Y}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x\partial y} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y^2} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y\partial z}\right\}d\mathrm{S}\\
\int_s \frac{\mathrm{N}}{r}\,d\mathrm{S} &= -\delta\int_{\mathrm{S}}\mathrm{Z}\,\varphi\,d\mathrm{S} - \delta\int_{\mathrm{S}}(\rho^2-\mathrm{R}^2)\\
&\qquad\left\{\mathrm{X}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x\partial z} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y\partial z} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial z^2}\right\}d\mathrm{S}
\end{aligned}\right.$$

da cui

$$-\int_s\left(\mathrm{L}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathrm{M}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\mathrm{S} =$$

$$-\delta\int_s\left(\mathrm{X}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathrm{L}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\mathrm{S}$$

$$-\delta\int_s(\rho^2-\mathrm{R}^2)\left\{\mathrm{X}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}d\mathrm{S}$$

ove

$$\Phi = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial z'} \; ;$$

e quindi per la (13)'

$$8\pi(\lambda+\mu)\Theta_2 = \partial \int_S \left\{ X \frac{\partial(\frac{1}{r}+\varphi)}{\partial x} + Y \frac{\partial(\frac{1}{r}+\varphi)}{\partial y} + Z \frac{\partial(\frac{1}{r}+\varphi)}{\partial z} \right\} d\,S$$

$$+ \partial \int_S (\varphi^2 - R^2) \left\{ X \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} d\,S$$

Possiamo ora scrivere le espressioni delle u_2, v_2, w_2; poniamo

$$O = \partial \int_\rho X \left(\tfrac{1}{r} - \varphi \right) d\,S$$

$$P = \partial \int_\rho Y \left(\tfrac{1}{r} - \varphi \right) d\,S$$

$$Q = \partial \int_\rho Z \left(\tfrac{1}{r} - \varphi \right) d\,S$$

e indichiamo con A , B , C i secondi integrali dei membri a destra delle uguaglianze (17) . Sostituendo nelle (13) otteniamo

$$4\pi\mu u_2 = (2\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x'} \int_S \frac{\Theta}{r} d\,S + O - A$$

$$4\pi\mu v_2 = (2\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial y'} \int_S \frac{\Theta}{r} d\,S + P - B$$

$$4\pi\mu w_2 = (2\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial z'} \int_S \frac{\Theta}{r} d\,S + Q - C$$

Osserviamo ora che sulla superficie s si ha $O=0$, e dovendo essere anche $u_2=0$, la funzione

$$F = (2\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x'} \int_S \frac{\Theta}{r} d\,S - A$$

si annullerà sulla superficie s; inoltre si ha

$$\Delta_2 F = - 4\pi (2\lambda+\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x'} \; ;$$

e poichè F nello spazio S è monodroma finita e continua colle sue derivate, rappresentandola colla formula di Green, abbiamo

$$F = (2\lambda+\mu) \int_\rho \frac{\partial \Theta}{\partial x} \left(\tfrac{1}{r} - \varphi \right) d\,S \,.$$

Facendo gli stessi ragionamenti per le espressioni analoghe alla F, che compariscono in v_2, w_2 e sostituendo nelle ultime formule, otteniamo

$$u_2 = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{\delta}{\mu} X + \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d\,S$$

$$v_2 = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{\delta}{\mu} Y + \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d\,S$$

$$w_2 = \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\frac{\delta}{\mu} Z + \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{r} - \varphi\right) d\,S$$

Per fare una applicazione semplicissima di queste formule consideriamo il caso di una sfera soggetta all' azione della gravità, mentre la sua superficie è tenuta fissa.

Avremo, prendendo l' asse delle x diretto positivamente secondo la direzione della gravità, $X = g$, $Y = 0$, $Z = 0$ e dalla (18)

$$8\pi(\lambda+\mu)\,\Theta = \delta\, g \frac{\partial}{\partial x'}\int_S \left(\frac{1}{r} - \varphi\right) dS + \delta\, g \int_S (\rho^2 - R^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\,S$$

Ora dalla teoria delle funzioni potenziali si ha

$$\int_S \frac{dS}{r} = -\frac{2}{3}\pi\rho'^2 + 2\pi R^2\,, \quad \int_S \varphi\, d\,S = \frac{4}{3}\pi R^3$$

poichè la prima espressione è la funzione potenziale di una sfera omogenea di densità 1 nel punto interno ρ', θ', φ'; la seconda il valore della funzione potenziale stessa nel punto esterno $\frac{R^2}{\rho'}$, θ', φ', moltiplicata per $\frac{R}{\rho'}$.

Inoltre si ha

$$\int_S (\rho^2 - R^2)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, d\,S = -2\int_S x\,\Phi\, d\,S\,;$$

e inoltre

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z'} = \frac{R}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{\varphi}{R}\right) \text{(*)}$$

Si vede quindi che Φ è simmetrica rispetto a ρ e ρ'; perciò si può scrivere

---

(*) È facile verificare le seguenti identità

$$\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -x R \frac{\partial \varphi}{\partial R}$$

$$\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -y R \frac{\partial \varphi}{\partial R}$$

$$\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = -z R \frac{\partial \varphi}{\partial R}\,;$$

da queste, osservando che $2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \varphi = -R \frac{\partial \varphi}{\partial R}$, si deduce

$$\frac{\rho^2}{R^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\varphi}{R}\right)$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z'} = \frac{R}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{\varphi}{R}\right)$$

$$\Phi = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \rho'^{-\frac{1}{\sigma+2}} \int_0^{\rho'} \left(\frac{R}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{\varphi}{R}\right) - \frac{3}{R^3} \right) \rho^{\frac{1}{\sigma+2}} d\rho'$$

Invece di considerare l'integrale esteso a tutto S della funzione $x\,\Phi$, consideriamo l'integrale esteso ad una sfera S_1 concentrica e di raggio $R_1 < R$ che poi faremo tendere ad R. Avremo

$$\int_{S_1} x \Phi d S_1 = -\frac{\sigma}{\sigma+2} \rho^{-\frac{1}{\sigma+2}} \int_0^{\rho'} \left\{ \frac{R}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \frac{1}{R} \int_{S_1} x \varphi d S_1 \right\}_{\rho'} \rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1} d\rho'$$

osservando che

$$\int_{\rho_1} x\, d\, S_1 = 0$$

Ora si ha dalla teoria delle funzioni potenziali per $\rho' > R_1$

$$\int_{S_1} \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma}} d\, S_1 = -\frac{4}{15} \pi \frac{R_1^5}{\rho'^2} \cos\theta',$$

supposto l'asse delle x coincidente coll'asse polare; quindi

$$\int_S x\, \varphi\, d\, S_1 = -\frac{4}{15} \pi \frac{R_1^5}{R^3} \rho' \cos\theta'$$

e finalmente

$$\int_{S_1} x \Phi d S_1 = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \rho'^{-\frac{1}{\sigma+2}} \int_0^{\rho'} \left\{ \frac{8}{3} \frac{R_1^5}{R^5} \pi \rho' \text{co } \theta' \right\}_{\rho'} \rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1} d\rho'$$

Facendo $R_1 = R$ ed integrando

$$\int_S x\, \Phi\, d\, S = \frac{4}{3} \pi \frac{\sigma}{\sigma+3} x'$$

Perciò

$$\Theta = -\frac{\partial g}{2(\lambda+2\mu)} x';$$

sostituendo questa espressione nelle (19) e osservando la (20) si ha

$$u_2 = \frac{\partial g}{4(\lambda+2\mu)} (R^2 - \rho'^2)$$
$$v_2 = 0$$
$$w_2 = 0$$

Da queste formule si deduce che per effetto della deformazione tutti i punti si abbassano mantenendosi sulla verticale; quelli che si trovano sopra una sfera concentrica a quella della superficie prima della deformazione, si trovano ancora sopra una sfera di raggio uguale dopo la deformazione, cioè i vari strati sferici concentrici si abbassano come se fossero rigidi. Uno strato piano orizzontale si deforma in una paraboloide di rotazione.

Le tensioni P, Q, R che si esercitano sopra un elemento di una sfera concentrica alla superficiale sono

$$P = \delta g \frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \frac{x'^2}{\rho} + \mu \frac{\delta g}{2(\lambda+2\mu)}$$

$$Q = \delta g \frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \frac{x'y'}{\rho}$$

$$R = \delta g \frac{2\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \frac{x'z'}{\rho}$$

Per la componente normale T_ρ della tensione superficiale si ha di qui

$$T_\rho = \delta g \frac{2\lambda+3\mu}{2(\lambda+4\mu)} x'$$

cioè: la tensione normale è positiva al disotto del piano orizzontale che passa pel centro, negativa al disopra e proporzionale alla distanza da questo piano.

III.

Se invece di considerare lo spazio interno alla sfera S come occupato dal corpo, consideriamo lo spazio esterno, possiamo dalle formule trovate dedurre facilmente la soluzione del problema anche per questo caso.

La funzione φ conserva anche in questo caso la stessa espressione

$$\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^4+\rho^2\rho'^2-2R^2\rho\rho'\cos\gamma}}$$

ove ora $\rho' > R$ e $\rho > R$, e per $\rho = \infty$ prende il valore zero. Quindi si può prendere

$$(20)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= (\rho^2-R^2)\frac{\partial W_1}{\partial x} + \varphi \\ \eta_1 &= (\rho^2-R^2)\frac{\partial W_1}{\partial y} \\ \zeta_1 &= (\rho^2-R^2)\frac{\partial W_1}{\partial z} \end{aligned}$$

con

$$W_1 = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \rho^{-\frac{1}{\sigma+2}} \int_\rho^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rho^{\frac{1}{\sigma+2}-1} d\rho ,$$

poichè per $\rho = \infty$ si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, e sono soddisfatte quelle altre condizioni che prima erano soddisfatte per $\rho = 0$. Analogamente avremo

$$(21)\qquad V = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \rho^{-\frac{1}{\sigma+2}+1} \int_\rho^\infty \varphi\rho^{\frac{1}{\sigma+2}-2} d\rho$$

Nelle formule (16) poi prenderemo

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\int_s u \frac{\partial \varphi}{\partial R} ds$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi}\int_s v \frac{\partial \varphi}{\partial R} ds$$

$$\gamma = \frac{1}{4\pi}\int_s w \frac{\partial \varphi}{\partial R} ds$$

poichè ora la normale è diretta in senso contrario, e quindi

$$\Psi = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(u\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial x'} + v\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} + w\frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right) ds$$

e, poichè $\Psi = 0$ per $\rho = \infty$,

$$W = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}}\int_\rho^\infty \Psi \rho'^{\frac{1}{\sigma+2}-1} d\rho$$

Le formule (17) valgono anche in questo caso, purchè si intenda che V abbia il valore (21), e così pure le (18), (19) colla stessa supposizione.

IV.

Consideriamo ora il caso in cui alla superficie si conoscono le forze L, M, N e supponiamo, per ora, $X=0$ $Y=0$ $Z=0$; considereremo gli spostamenti u, v, w come composti di tre parti dovute ciascuna ad una delle componenti L, M, N mentre le altre due sono nulle. A cagione della simmetria, determinata la prima di queste parti, si avranno le altre con sostituzioni circolari.

Cominciamo a supporre $M=0$, $N=0$ e poniamo

$$\Lambda = -\frac{R}{4\pi\mu}\int_{s'} L \frac{\partial H}{\partial R} ds' ;$$

i valori superficiali di Λ saranno quelli di $\frac{1}{\mu}$ R L, all'infuori di una funzione lineare delle coordinate x, y, z; e in tutta la sfera avremo $\Delta_2 \Delta = 0$.

Consideriamo ora gli spostamenti

$$u' = x\frac{\partial V_1}{\partial x} + U,\; v' = x\frac{\partial V_1}{\partial y},\; w' = x\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

ove V_1 e U sono funzioni che soddisfano l'equazione $\Delta_2 = 0$.

Avremo

$$\Theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

e inoltre, indicando con $F'(\rho)$, $G'(\rho)$, $H'(\rho)$ le componenti della forza che manterrebbe in equilibrio un elemento superficiale dì una sfera di raggio ρ concentrica alla superficiale, cioè ponendo

$$F'(\rho) = 2\lambda\theta\,\frac{x}{\rho} + \mu\frac{\partial u}{\partial\rho} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{\rho} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{y}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{z}{\rho}\right)$$

. . . .

si ha

$$F'(\rho) = 2\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{x}{\rho} +$$
$$+ \mu\left\{2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\right\}\frac{x}{\rho} + \mu\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial V_1}{\partial\rho}\right)$$

$$G'(\rho) = 2\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{y}{\rho} +$$
$$+ \mu\left\{2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right\}\frac{y}{\rho}$$

$$H'(\rho) = 2\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{z}{\rho} +$$
$$+ \mu\left\{2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\right\}\frac{z}{\rho}$$

Poniamo ora

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial V_1}{\partial\rho}\right) = \Lambda \tag{23}$$

$$2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

da queste ultime tre, con un procedimento già usato altre volte, si deduce

$$2\rho^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial V_1}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial U}{\partial\rho} = 0$$

e quindi a cagione della (23)

$$2\rho^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\rho^2} = -\Lambda \tag{24}$$

Abbiamo così per determinare U, V_1 le due equazieni (23) (24) le quali, per quanto abbiamo visto al n. I. sono tali che possono essere soddisfatte con funzioni che soddisfano anche alle equazione $\Delta_2 = 0$. Osservando che per $\rho = 0$ si ha $\Lambda = 0$, e

$$\rho^{-1}\Lambda = 0 \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial\rho} = 0$$

potremo prendere

$$(25) \qquad V_1 = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{1}{2}\int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho},$$

da cui

$$\rho \frac{\partial V_1}{\partial \rho} = -\frac{1}{2}\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho^2}$$

e quindi

$$(26) \qquad U = \frac{1}{2}\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{1}{2}\int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho}$$

Queste espressioni di U , V sono della forma delle funzioni W_2 che abbiamo considerato al n. I.

Le quadrature che compaiono nelle formule precedenti si possono eseguire; difatti se si pone

$$\alpha = \rho \int_0^\rho H \frac{d\rho}{\rho^2} \qquad \beta = \int_0^\rho H \frac{d\rho}{\rho}$$

si trova

$$\alpha = -\frac{\rho\rho'}{R^3}\cos\gamma \log\left\{R^2 - \rho\rho'\cos\gamma + \Delta\right\} -$$
$$- \frac{\Delta}{R^3} + \frac{1}{R} + \frac{\rho\rho'}{R^3}\cos\gamma \log 2R^2$$

$$\beta = -\frac{1}{R}\log\left\{R^2 - \rho\rho'\cos\gamma + \Delta\right\} -$$
$$- \frac{\rho\rho'}{R^3}\cos\gamma + \frac{1}{R}\log 2R^2$$

e quindi

$$u = -\frac{R}{8\pi\mu}\int_{s'}\left(\frac{\partial\beta}{\partial R} - \frac{\partial\alpha}{\partial R}\right) ds'$$

$$v = -\frac{R}{8\pi\mu}\int_{s'}\left(\frac{\partial\beta}{\partial R} + \frac{\partial\alpha}{\partial R}\right) ds'$$

Poniamo ora

$$u'' = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial x} + x\frac{\partial V_2}{\partial x}$$

$$v'' = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial y} + y\frac{\partial V_2}{\partial y}$$

$$w'' = \rho^2 \frac{\partial W}{\partial z} + z\frac{\partial V_2}{\partial z}$$

supponendo $\Delta_2 W = 0$, $\Delta_2 V_2 = 0$; e facciamo in modo che gli spostamenti $u' + u''$, $v' + v''$, $v' + w'$ soddisfino alle

equazioni indefinite dell'equilibrio per $X = Y = Z = 0$.
Avremo

$$\Theta'' = 2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho} + 3\frac{\partial V_2}{\partial x} + \rho\frac{\partial V_2}{\partial x}$$

e inoltre

$$\Delta_2(u'+u'') = 2\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + 6\frac{\partial W}{\partial x} + 4\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$$

$$\Delta_2(v'+v'') = 2\frac{\partial V_2}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial W}{\partial y} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y}$$

$$\Delta_2(w'+w'') = 2\frac{\partial V_2}{\partial x \partial z} + 6\frac{\partial W}{\partial z} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial z} + 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z};$$

quindi col precedimento solito si vede, che, affinchè siano soddisfatte le equazioni dell'equilibrio, basterà che W soddisfi, oltre che alla equazione $\Delta_2 W = 0$, coll'altra

$$(27) \qquad \sigma(\Theta'+\Theta'') + 2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\right) + 2W + 4\rho\frac{\partial W}{\partial \rho} = 0$$

Per le forze $F''(\rho)$, $G''(\rho)$, $H''(\rho)$ abbiamo

$$F''(\rho) = P_1 + Q\frac{x}{\rho}$$

$$G''(\rho) = P_2 + Q\frac{y}{\rho}$$

$$H''(\rho) = P_3 + Q\frac{z}{\rho}$$

ove

$$P_1 = \mu\left(2\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial x} + \rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + 2\rho\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$P_2 = \mu\left(2\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial y} + \rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} + 2\rho\frac{\partial W}{\partial y}\right)$$

$$P_3 = \mu\left(2\rho^2\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial W}{\partial y} + \rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial z} + 2\rho\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

e

$$Q = 2\lambda\Theta'' + \mu\left(2\frac{\partial V_2}{\partial x} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial V_2}{\partial x} + 2\rho\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)$$

Noi determineremo V_2 in modo che si abbia

$$(28) \qquad Q + 2\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = 0,$$

e avremo allora

$$(29) \qquad \begin{aligned} F'(\rho) + F''(\rho) &= P_1 + \frac{\mu}{\rho}\Lambda \\ G'(\rho) + G''(\rho) &= P_2 \\ H'(\rho) + H''(\rho) &= P_3 \end{aligned}$$

Dunque per determinare W e V_2 abbiamo le equazioni (27) e (28) che si possono scrivere, sostituendo a Θ', Θ'', Q i loro valori,

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
&\sigma\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}+3\frac{\partial V_2}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}+2\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right\}\\
&\qquad+2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)+2\,W+4\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}=0\\
&(\sigma-1)\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}+3\frac{\partial V_2}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_3}{\partial x}+2\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right\}\\
&\qquad+2\frac{\partial V_2}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}+2\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}=0\,,
\end{aligned}
$$

a cui, sottraendo la seconda dalla prima, si possono sostituire queste altre

$$
\begin{aligned}
&3\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}+2\,W+4\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}=0\\
&\sigma\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}+3\frac{\partial V_2}{\partial x}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}+2\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}\right\}\\
&\qquad+2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)+2\,W+4\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}=0
\end{aligned}
$$

Da queste, eliminando $\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}$, si ricava

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
2\sigma W=(\sigma-2)\frac{\partial U}{\partial x}-(\sigma+2)\frac{\partial V_1}{\partial x}&+\\
+(3\,\sigma-2)\frac{\partial V_2}{\partial x}+2\,\sigma\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}&\,.
\end{aligned}
$$

Di qui derivando si ha

$$
\begin{aligned}
2\,\sigma\,\rho\frac{\partial W}{\partial\rho}=(\sigma-2)\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial x}-(\sigma+2)\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}&+\\
+(5\,\sigma-2)\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}+2\,\sigma\,\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{\partial V_2}{\partial x}&
\end{aligned}
$$

Sommando membro a membro questa ultima equazione moltiplicata per 2 colla (30), e sostituendo nella prima delle (31) si ha finalmente per determinare V_2 la equazione

$$
(32)\quad
\begin{aligned}
2\,\sigma\,\rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+2\,(3\,\sigma-1)\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_2}{\partial x}&+\\
+(3\,\sigma-1)\frac{\partial V_2}{\partial x}=\Pi\,,&
\end{aligned}
$$

ove si è indicato con Π la espressione nota

$$
-\left[(\sigma-1)\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)+(\sigma-2)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial x}-(\sigma+2)\,\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]
$$

La (32) rispetto alla funzione incognita $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ è della forma delle equazioni considerate nel n. I; e quindi, poichè Π soddisfa alla equazione $\Delta_2=0$, e per $\rho=0$ si ha $\Pi=0$, potrà essere soddisfatta con una funzione, il cui secondo parametro differenziale sia pure zero. Confrontando la (32) colla (11)' del n. I, determineremo τ, τ' ponendo

$$
\tau+\tau'+1=\frac{3\sigma-1}{\sigma}\qquad \tau\,\tau'=\frac{3\sigma-1}{2\,\sigma}
$$

τ , τ' sono allora le radici della equazione

$$z^2 - \frac{2\sigma-1}{\sigma} z + \frac{3\sigma-1}{2\sigma} = 0 ,$$

da cui si ha

$$\tau = -\frac{2\sigma-1}{2\sigma} + \frac{i}{2\sigma}\sqrt{2\sigma^2+2\sigma-1}$$

$$\tau' = -\frac{2\sigma-1}{2\sigma} - \frac{i}{2\sigma}\sqrt{2\sigma^2+2\sigma-1}$$

ove $i = \sqrt{-1}$. È ora facile vedere che, poichè Π per $\rho=0$ diventa infinitesimo del 1.° ordine, si ha per $\rho=0$

$$\rho^{\tau}\,\Pi = 0 \qquad \rho^{\tau+1}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} = 0$$

$$\rho^{\tau'}\,\Pi = 0 \qquad \rho^{\tau'+1}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} = 0 ,$$

quindi per i teoremi citati potremo prendere

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{1}{2\sigma(\tau-\tau')}\rho^{-\tau}\int_0^{\rho}\Pi\,\rho^{\tau-1}\,d\rho + {}$$

$$+ \frac{1}{2\sigma(\tau'-\tau)}\rho^{-\tau'}\int_0^{\rho}\Pi\,\rho^{\tau'-1}\,d\rho$$

Questa espressione comparisce complicata di immaginari,

ma è assai facile vedere che rappresenta una quantità reale, poichè τ e τ' sono immaginari coniugati.

Indicheremo per brevità con $\frac{1}{2\sigma}T_{\tau,\tau'}(\Pi)$ la espressione del secondo membro dell'ultima equazione, e avremo

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{1}{2\sigma}T_{\tau,\tau'}(\Pi)$$

Osservando le formule (12) e le espressioni (25) (26) di U , V_1 si ha

$$U + V_1 = \int_0^{\rho}\Lambda\frac{\partial\rho}{\rho} , \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\,d\rho$$

e inoltre

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho}\int_0^{\rho}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\,d\rho + \frac{\partial\Lambda}{\partial x}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho}\int_0^{\rho}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\,d\rho$$

e quindi

$$-\Pi = (\sigma-2)\frac{\partial\Lambda}{\partial x} + (\sigma+1)\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\,d\rho$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left((\sigma-2)\,\Lambda + (\sigma+1)\int_0^{\rho}\Lambda\frac{\partial\rho}{\rho}\right);$$

e quindi avremo

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{1}{2\sigma} T_{\tau,\tau'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[(\sigma-1)\Lambda + (\sigma+1)\int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho}\right]\right\}$$

e per le (12) potremo porre

$$V_2 = -\frac{1}{2\sigma} T_{\tau-1\,,\,\tau'-1} \left\{ (\sigma-2)\Lambda + (\sigma+1)\int_0^\rho \Lambda \frac{d\rho}{\rho} \right\}$$

Sostituendo questa espressione di V_2 nelle (11) avremo anche il valore di W.

Riassumendo possiamo quindi dire che gli spostamenti $u'+u''$, $v'+v''$, $w'+w''$ soddisfano alle equazioni dell' equilibrio quando $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ e sono prodotti nella sfera dalle forze superficiali $P_1 + \frac{\mu}{R}\Lambda$, P_2 , P_3 , (29) ; resta quindi a determinarsi il sistema u''' , v''' , w''' di spostamenti provocati dalle forze superficiali $-P_1$, $-P_2$, $-P_3$.

Per questo osserviamo che la formula (7) può scriversi

$$\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$

da cui si deduce, mutando V in $\frac{\partial V}{\partial x}$,

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-2V + \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-2V + \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(-2V + \rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)$$

e quindi osservando che si ha $W = \frac{\partial F}{\partial x}$, quando si ponga

$$F = (\sigma-2)\frac{\partial U}{\partial x} - (\sigma+2)V_1 + (\sigma-2)V_2 + 2\sigma\rho\frac{\partial V_2}{\partial\rho},$$

abbiamo

$$P_1 = \mu\rho\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-2F + 2\rho\frac{\partial F}{\partial\rho} + V_2\right)$$

$$P_2 = \mu\rho\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-2F + 2\rho\frac{\partial F}{\partial\rho} + V_2\right)$$

$$P_3 = \mu\rho\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(-2F + 2\rho\frac{\partial F}{\partial\rho} + V_2\right)$$

Se ora poniamo

$$u''' = R^2\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \qquad v''' = R^2\frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial y} \qquad w''' = R^2\frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial z}$$

ove $\Delta_2 K = 0$, avremo, osservando le formule precedenti,

$$F''' (\rho) = 2\,\mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 (R^2 K)}{\partial\, x^2} \right) = \frac{2\,\mu R^2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-2\,K + \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right)$$

$$G''' (\rho) = 2\,\mu \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(-2\,K + \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right)$$

$$H''' (\rho) = 2\,\mu \frac{R^2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(-2\,K + \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right)$$

e quindi in superficie

$$F''' (R) = 2\,\mu\, R \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-2\,K + \rho \frac{\partial K}{\partial\, \rho} \right) \text{, ec.}$$

Perciò u''' , v''' , w''' soddisferanno alle condizioni volute, se K soddisfa alla equazione

$$-2\,K + 2\,\rho \frac{\partial K}{\partial \rho} = -\left(-2\,F + 2\,\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} + V_2 \right)$$

Questa equazione è della solita forma , ed è soddisfatta da

$$K = \frac{1}{4} T_{\tau-1\,,\,\tau'-1} (\Lambda)$$

Difatti la equazione precedente si può scrivere

$$-4\,K + 2\,\rho \frac{\partial K}{\partial\, \rho} = 4\,F - 2\,\rho \frac{\partial F}{\partial\, \rho} - 2\,F - V_2\,,$$

quindi se poniamo

(33) $$K = -F + f\,,$$

la f dovrà soddisfare alla equazione

(34) $$-4\,f + 2\,\rho \frac{\partial f}{\partial\, \rho} = -(2\,F + V_2)$$

Ora osserviamo che si ha l' identità

(a) $$\frac{1}{2\sigma} T_{\tau-1\,,\,\tau'-1} \Big\{ 2\,\sigma\,\rho^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\, \rho^2} + 2\,(\sigma-1)\,\rho \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} + (\sigma+1)\,\Delta \Big\} = \Delta\,,$$

che vale qualunque sia la funzione Δ, purchè per $\rho = 0$ si abbia

$$\rho^{\tau} \Delta = 0 \qquad \rho^{\tau'} \Delta = 0$$

$$\rho^{\tau+1} \frac{\partial \Delta}{\partial\, \rho} = 0 \qquad \rho^{\tau'+1} \frac{\partial \Delta}{\partial\, \rho} = 0\,;$$

Inoltre data una funzione della solita forma $V = \frac{1}{2\sigma} T_{\tau-1\,,\,\tau'-1} (\Omega)$, la sua derivata soddisfa alla equazione

$$2\,\sigma\,\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + 2\,(\sigma-1)\,\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial\, V}{\partial\, \rho} \right) + (\sigma+1)\,\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial \Omega}{\partial\, \rho}\,,$$

per cui si vede che si può porre

$$(b) \qquad \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{2\sigma} \mathrm{T}_{\tau-1\,,\,\tau'-1} \left(\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right)$$

Applicando queste due formole (*a*) (*b*) si trova che la espressione di F si può scrivere

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4\sigma} \mathrm{T}_{\tau'-1\,,\,\tau-1} \Big\{ -\sigma \Lambda - (\sigma+1) \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho} + (3\sigma - 1)\, \rho \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho^2} \Big\}$$

e quindi si ha

$$2\,\mathrm{F} + \mathrm{V}_2 = \frac{1}{2\sigma} \mathrm{T}_{\tau-1\,,\,\tau-1} \Big\{ -2(\sigma-1)\Lambda + 2(\sigma+1) \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho} + (3\sigma-1)\,\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho^2} \Big\}$$

Se ora poniamo

$$f = \frac{1}{4\sigma} \mathrm{T}_{\tau-1\,,\,\tau'-1} \Big\{ -(\sigma+1) \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho} + (3\sigma-1)\,\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho^2} \Big\}$$

si vede immediatamente che la (34) è soddisfatta; quindi

sostituendo il valore di F da f si ha

$$-\mathrm{F} + f = \mathrm{K} = \frac{1}{4} \mathrm{T}_{\tau-1\,,\,\tau'-1} (\Lambda)$$

Per la (35) avremo

$$\mathrm{W} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}$$

quindi gli spostamenti $u'+u''+u'''=u_1$, $v'+v''+v'''=v_1$, $w'+w''+w'''=w_1$ si possono scrivere

$$u_1 = (\mathrm{R}^2 - \rho^2) \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + \mathrm{U}$$

$$v_1 = (\mathrm{R}^2 - \rho^2) \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial y} + \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}$$

$$w_1 = (\mathrm{R}^2 - \rho^2) \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x \partial z} + \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + z \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}$$

ove K, f, V_2, V_1, U hanno i valori trovati.

Si può anche osservare che per le formule precedenti

$$\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 = \frac{1}{2\sigma} \mathrm{T}_{\tau-1\,,\,\tau'-1} \Big\{ -\sigma \Lambda + \tfrac{1}{2}(\sigma+1) \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho} - \tfrac{1}{2}(5\sigma-1)\,\rho \int_0^\rho \Lambda \frac{\partial \rho}{\rho^2} \Big\}$$

e quindi si ha

$$V_1 + V_2 = -2\rho\frac{\partial f}{\partial \rho} + f,$$

per cui gli spostamenti precedenti si possono anche scrivere

$$u_1 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(f - 2\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + U$$

$$v_1 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} + \rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}\left(f - 2\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + x\frac{\partial V_1}{\partial y} - y\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

$$w_1 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial z} + \rho^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + z\frac{\partial}{\partial x}\left(f - 2\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + x\frac{\partial V_1}{\partial z} - z\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

in cui entrano soltanto le quattro funzioni

$$K, \; f, \; U, \; V_1.$$

Mediante sostituzioni circolari e mutando A nelle analoghe espressioni

$$-\frac{R}{4\pi\mu}\int_{s'} M\frac{\partial K}{\partial R}\,ds', \qquad -\frac{R}{4\pi\mu}\int_{s'} N\frac{\partial K}{\partial R}\,ds',$$

si ottengono gli spostamenti analoghi ai precedenti quando si considera soltanto la forza superficiale M, o soltanto la N; sommando si hanno gli spostamenti prodotti nella sfera dalle forze L, M, N all' infuori di funzioni lineari delle coordinate; ma queste si possono eliminare

aggiungendo agli spostamenti trovati delle funzioni lineari delle coordinate, e determinandone convenientemente le costanti.

Volendo ora considerare anche il caso in cui le forze X, Y, Z sono diverse da zero, conviene determinare gli spostamenti ausiliari che servono ad eliminare i valori superficiali delle u, v, w dalle (13), e che, come è noto, bastano a risolvere in generale il problema dell' equilibrio. Questi spostamenti si possono determinare con procedimenti analoghi a quelli seguiti fin ora. Per brevità mi limiterò a dare le espressioni che risultano per essi.

Considerando u, v, w come funzioni di x', y', z', gli spostamenti ξ_1, η_1, ζ_1 che servono a calcolare u sono

$$\xi_1 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{1}{2\sigma}T'_{\tau-1,\,\tau'-1}[G(A)] + U_1$$

$$(34) \quad \eta_1 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial W_1}{\partial y} + \frac{1}{2\sigma}T'_{\tau-1,\,\tau'-1}[G(B)] + x\frac{\partial V_1}{\partial y} - y\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

$$\zeta_2 = (R^2-\rho^2)\frac{\partial W_1}{\partial z} + \frac{1}{2\sigma}T'_{\tau-1,\,\tau'-1}[G(C)] + x\frac{\partial V_1}{\partial z} - z\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

in cui

$$W_1 = T'_{\tau-1,\,\tau-1}\left\{\frac{R^2}{4}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}$$

$$U_1 = -\frac{1}{2}\rho'\int_0^{\rho'} R\frac{\partial H}{\partial \rho^2}\frac{d\rho'}{\rho'} + \frac{1}{2}\int_0^{\rho'} H\frac{d\rho'}{\rho'}$$

$$V_1 = -\frac{3}{2}\rho'\int_0^{\rho'} H\frac{d\rho'}{\rho'^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\rho} H\frac{d\rho'}{\rho'};$$

inoltre $T'_{\tau,\tau'}$ ha lo stesso significato rispetto alla variabile ρ', che $T_{\tau,\tau'}$ rispetto a ρ, e si è posto, indicando con Δ una funzione qualunque,

$$G(\Delta) = -(\sigma-2)\Delta + \frac{\sigma+1}{2}\int_0^{\rho'} \Delta \frac{d\rho'}{\rho} -$$
$$\frac{3}{2}(3\sigma-1)\rho' \int_0^{\rho'} \Delta \frac{d\rho'}{\rho'};$$

infine

$$A = \rho^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{x}{R}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(R^2 H)}{\partial R}$$
$$B = \rho^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{y}{R}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(R^2 H)}{\partial R}$$
$$C = \rho^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{z}{R}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(R^2 H)}{\partial R}$$

Le forze superficiali che produrrebbero nella sfera ξ_1, η_1, ζ_1 non sono precisamente le

$$L_1 = -\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho}$$
$$M_1 = -\mu \left(\frac{x}{R}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{y}{R}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right)$$
$$N_1 = -\mu \left(\frac{x}{R}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{z}{R}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right)$$

ma ne differiscono per delle funzioni lineari rispetto alle coordinate x, y, z, x', y', z', poichè sono

$$L_1 - \frac{\mu}{R^2} - \frac{2\mu}{R^4}(xx' + yy' + zz'),$$
$$M_1 + \mu \frac{y'x - x'y}{R^4},$$
$$N_1 + \mu \frac{z'x - x'z}{R^4};$$

quindi applicando il teorema del Prof. Betti agli spostamenti $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$, $u\ v\ w$ si ha

$$(35)\quad \int_s (L_1 u + M_1 v + W_1 w) ds = -\delta \int_S (X\xi_1 + Y\eta_1 + Z\zeta_1)\, ds +$$
$$\int_s (L\xi_1 + M\eta_1 + N\zeta_1) ds + \mu \int_s \frac{u}{R^2} ds +$$
$$\mu \int_s \{2(xx' + yy' + zz')u - (y'x - x'y)v - (z'y - y'z)w\} \frac{ds}{R^4}$$

e analoghe uguaglianze per gli altri due integrali.

Ora se noi poniamo

$$\int_\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS = l \qquad \int_\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS = a$$
$$\int_\varphi \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dS = m \qquad \int_\varphi \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) dS = b$$
$$\int_\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS = n \qquad \int_\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS = c$$

si ha

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial y} d\mathrm{S} = - \int_s y\, u \frac{ds}{\mathrm{R}} = \frac{n+c}{2}$$

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial z} d\mathrm{S} = - \int_s z\, u \frac{ds}{\mathrm{R}} = \frac{m-b}{2}$$

e la funzione lineare delle x', y', z' che si ha nel secondo membro della uguaglianza (35) si può scrivere, all' infuori di un fattore $\frac{\mu}{\mathrm{B}^4}$,

$$(\mathrm{A} + c_1) x' - \tfrac{1}{2} (z'm + x'n) + \alpha + \tfrac{3}{2} (z'b - y'c) \,,$$

quando si ponga

$$\alpha = \int_s u\, \mathrm{R}^2\, ds \quad c_1 = - \int_s x u \frac{\partial s}{\mathrm{R}} = \int_S \frac{\partial u}{\partial x} d\mathrm{S}$$

$$\beta = \int_s v\, \mathrm{R}^2\, ds \quad c_2 = - \int_s y v \frac{\partial s}{\mathrm{R}} = \int_S \frac{\partial v}{\partial y} d\mathrm{S}$$

$$\gamma = \int_s w\, \mathrm{R}^2\, ds \quad c_3 = - \int_s z w \frac{\partial s}{\mathrm{R}} = \int_S \frac{\partial w}{\partial z} d\mathrm{S}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = \mathrm{A}$$

Analogamente nelle altre due uguaglianze della forma della (35) si avranno le due funzioni lineari

$$(\mathrm{A} + c_2)\, y' - \tfrac{1}{2} (x'n + z'l) + \beta + \tfrac{3}{2} (x'c - z'a)$$
$$(\mathrm{A} + c_3)\, z' - \tfrac{1}{2} (y'l + x'm) + \gamma + \tfrac{3}{2} (y'a - x'b)$$

Ora in queste funzioni la parte che dipende dalle costanti α, β, γ, a, b, c è della forma delle funzioni lineari arbitrarie, che si debbono sempre intendere aggiunte agli integrali, e che vengono determinate dalla posizione del corpo nello spazio; le altre costanti c_1, c_2, c_3, l, m, n si possono determinare estendendo al caso, in cui le forze X, Y, Z sono diverse da zero, alcune formule date dal Prof. Betti per calcolarle, quando $\mathrm{X}=\mathrm{Y}=\mathrm{Z}=0$ (*).

Queste formule, che si possono stabilire per un corpo qualunque soggetto a forze qualunque interne e superficiali, nel caso della isotropia sono le seguenti:

$$l = \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_s (\mathrm{M}z + \mathrm{N}y)\, ds + \delta \int_S (\mathrm{Y}z + \mathrm{Z}y)\, d\mathrm{S} \right\} \; ; \text{ ec.}$$

$$c_1 = \frac{1}{2(3\lambda+\mu)\mu} \left\{ \int_s [(2\lambda+\mu)\, \mathrm{L}\, x - \lambda\, \mathrm{M}\, y - \lambda\, \mathrm{N}\, z]\, ds + \right.$$
$$\left. + \delta \int_S [(2\lambda+\mu)\, \mathrm{X}\, x - \lambda\, \mathrm{Y}\, y - \lambda\, \mathrm{Z}\, z]\, d\mathrm{S} \right\} \; ; \text{ ec.}$$

da cui si deduce

(*) Teoria della Elasticità, §. 6

$$c_1+c_2+c_3=\int_S \Theta\, d\mathrm{S}=\frac{1}{2(3\lambda+\mu)}\left\{\int_s (\mathrm{L}x+\mathrm{M}y+\mathrm{N}z)\, ds+\right.$$

$$\left.+\,\delta\int_S (\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+\mathrm{Z}z)\, d\mathrm{S}\right\}\ (^*).$$

Dietro queste considerazioni le (35) e le altre due analoghe bastano a risolvere completamente il problema dell' equilibrio.

Quando si abbia $\mathrm{L}=0, \mathrm{M}=0, \mathrm{N}=0$, si avrà dunque

$$4\pi\mu u=(2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'}\int_S \Theta\,\frac{\partial \mathrm{S}}{r}+\delta\int_S \mathrm{X}\,\frac{\partial \mathrm{S}}{r}-$$

$$-\,\delta\int_S (\mathrm{X}\xi_1+\mathrm{Y}\eta_1+\mathrm{Z}\zeta)\, d\mathrm{S}+\mu(\mathrm{A}+c_1)\frac{x'}{\mathrm{R}^4}-\frac{\mu}{2\mathrm{R}^4}(z'm+y'n)$$

. . . .

Applichiamo ora queste formule al caso di una sfera che ruota con velocità uniforme ϑ attorno ad un proprio diametro. Prendendo questo per asse delle z, abbiamo

$$\mathrm{X}=\vartheta^2 x \qquad \mathrm{Y}=\vartheta^2 y \qquad \mathrm{Z}=0\,.$$

(*) Queste formule risolvono in generale un problema che in casi particolari per la sfera e l'ellissoide fu studiato dal Prof. Betti (l. c. §. 7) e dal Prof. Arzelà (Deformazione di un' ellissoide ec. Giornale di Mat. v. XII).

Le quadrature, che compariscono nelle formule stabilite, in questo caso si eseguiscono facilmente avendo riguardo ad alcune formule della teoria delle funzioni potenziali.

Se si indicano con V_i e V_e i valori interni ed esterni ad una sfera S della funzione potenziale $\int_S \frac{x}{r}\, d\mathrm{S}$, si ha

$$\mathrm{V}_i=-\frac{2}{5}\pi\rho^2 x+\frac{2}{3}\pi \mathrm{R}^2 x$$

$$\mathrm{V}_e=\quad\frac{4}{15}\pi \mathrm{R}^5 x$$

Quindi abbiamo subito

$$\int_S \frac{\mathrm{X}}{r}\, d\mathrm{S}=-\frac{2}{5}\pi\vartheta^2\rho'^2 x'+\frac{2}{3}\pi\vartheta^2 \mathrm{R}^2 x'$$

$$\int_S \frac{\mathrm{Y}}{r}\, d\mathrm{S}=-\frac{2}{5}\pi\vartheta^2\rho'^2 y'+\frac{2}{3}\pi\vartheta^2 x'$$

Osservando i valori di ξ_1, η_1 si vede che nell'espressione di $\int_S (\xi_1 \mathrm{X}+\eta_1 \mathrm{Y})\, d\mathrm{S}$ avremo l' integrale

$$\vartheta^2\int_S (\mathrm{R}^2-\rho^2)\left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}x+\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial y}\right) d\mathrm{S}$$

la quale può essere calcolata con un metodo analogo a quello usato alla fine del n. II, osservando le espressioni della funzione potenziale $\int_\varphi \frac{z^2}{r} d\,S$, per la quale si ha

$$V_i = -\frac{2\pi}{7}\left\{ \rho'^2 z'^3 + \frac{7\,R^2}{15}(\rho'^2 - 3z'^2) - \frac{1}{10}\rho'^4 - \frac{7}{6}R^4 \right\}$$

$$V_e = \frac{4\,\pi\,R^7}{35}\left\{ \frac{z'^2}{\rho'^5} - \frac{1}{3\,\rho'^3} \right\} + \frac{4\pi}{15}\frac{R^5}{\rho'}$$

come si può verificare coi soliti metodi; e osservando inoltre che

$$T_{\tau-1\,,\,\tau'-1}(\rho^3) = -\frac{2\,\sigma}{19\,\sigma-5}\rho^3$$

Si trova così per l' integrale considerato, e per gli altri due analoghi che compaiono in v e w.

$$\int_S (R^2-\rho^2)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}x + \frac{\partial W_1}{\partial y}y\right)dS = -\frac{32}{35}\frac{\pi\,\sigma}{19\sigma-5}(5\,z'^2 - \rho'^2)\,x'$$

$$\int_S (R^2-\rho^2)\left(\frac{\partial W_2}{\partial x}x + \frac{\partial W_2}{\partial x}\right)dS = -\frac{32}{35}\frac{\pi\,\sigma}{19\sigma-5}(5\,z'^2 - \rho'^2)\,x'$$

$$\int_S (R^2-\rho^2)\left(\frac{\partial W_3}{\partial x}x + \frac{\partial W_3}{\partial y}\right)dS = -\frac{32}{35}\frac{\pi\,\sigma}{19\sigma-5}(5\,z'^3 - \rho'^2)\,x'$$

gli altri termini che si hanno in ξ_1, η_1, . . . non ag-

giungono nuove espressioni agli integrali

$\int (\xi_1\,X + \eta_1\,Y)\,d\,S$, ec. Sostituendo questi valori nelle (35), derivando rapporto ad x', y'', z' e sommando si trova

$$4\,\pi\,(\sigma+1)\,\mu\,\Theta = \alpha\,\rho'^2 + \beta\,z'^2 + \gamma$$

dove si ha

$$\alpha = -\frac{8\,\pi\,(3\,\sigma-1)}{19\,\sigma-5}\,\delta\,\vartheta^2$$

$$\beta = -\frac{4\,\pi\,(\sigma+1)}{19\,\sigma-5}\,\delta\,\vartheta^2$$

$$\gamma = \frac{4}{3}\,\pi\,R^2\,\delta\,\vartheta^2 + \frac{4\,A\,\mu}{R^3}$$

Servendosi delle formule precedenti si trova quindi

$$(36)\quad 4\pi(\sigma+1)\mu\int_S \Theta\frac{dS}{r} = -2\beta\,\pi\left\{\frac{\rho'^2\,z'^2}{7} + \frac{R^2}{15}(\rho'^2 - 3\,z'^2)\right\} + \frac{\pi}{5}\left(\frac{\beta}{7} - \frac{\alpha}{5}\right)\rho'^4 - \frac{2}{3}\pi\,R^2\,\gamma\,\rho'^2 + C$$

in cui C è una costante.

Le c_1, c_2, c_3, A si calcolano facilmente colle formule stabilite, e si trova

$$c_1 = c_2 = \frac{2\pi}{15\,\mu}\,\frac{\sigma+1}{3\,\sigma-1}\,\vartheta^2 R^5 \qquad c_3 = -\,\frac{4\pi}{15\,\mu}\,\frac{\sigma-1}{3\sigma-1}\,\vartheta^2 R^5$$

$$A = \frac{8\,\pi}{15\,\mu}\,\frac{\vartheta^2 R^5}{3\sigma-1}$$

Se si formano le derivate rapporto ad x', y', z' della (16) e quindi si sostituiscono tutti questi valori nelle (35) si trova che gli integrali cercati sono

$$
\begin{aligned}
u &= a\,\rho'^2\,x' + b\,z'^2 + l\,x' \\
v &= a\,\rho'^2\,y' + b\,z'^2\,y' + l\,y' \qquad (37) \\
w &= (a+h)\,\rho'^2\,z' + b\,z'^3\,m\,z'
\end{aligned}
$$

in cui le costanti a, b, h, l, m hanno i valori seguenti

$$a = -\,\frac{5\,\sigma^2 + 16\,\sigma - 5}{5\,(\sigma+1)\,(19\,\sigma-5)}\,\frac{\delta\,\vartheta^2}{2\mu} \qquad b = -\,\frac{\sigma}{(19\sigma-5)}\,\frac{\delta\vartheta^2}{2\mu}$$

$$h = \frac{5\,\sigma-1}{19\,\sigma-5}\,\frac{\delta\,\vartheta^2}{2}$$

$$l = -\,\frac{5\,\sigma+1}{3\,\sigma-1}\,a\,R^2 + \frac{\sigma-1}{19\sigma-5}\,\frac{\delta\,\vartheta^2\,R^2}{2}$$

$$m = -\,\frac{5\,\sigma+1}{3\,\sigma-1}\,a\,R^2 + \frac{7\,\sigma-1}{19\,\sigma-5}\,\frac{\delta\,\vartheta^2\,R^2}{2}$$

Non è ora difficile verificare che gli spostamenti (37), in cui le costanti hanno questi valori, soddisfano effettivamente a tutte le condizioni del problema.

V.

Supponiamo ora di avere un corpo limitato da due superficie sferiche s e s' che non si tagliano, nè si toccano; indichiamo con u_0, v_0, w_0 gli spostamenti che risolverebbero il preblema dell' equilibrio quando il corpo fosse limitato soltanto da s. Questi sopra s' non soddisferanno in generale alle condizioni volute; indichiamo allora con u_1', v_1', w_1' gli spostamenti che sopra s' prendono valori contrari (o sono prodotti da forze contrarie) a quelli di u_0, v_0, w_0 e soddisfano alle equazioni indefinite dell' equilibrio nel corpo limitato unicamente da s', e aggiungiamoli ai precedenti. Lo stesso faremo partendo dagli spostamenti u'_0, v'_0, w'_0 che soddisfano alle condizioni superficiali sopra s' e alle equazioni indefinite nello spazio limitato unicamente da s'. Otterremo così delle serie

$$u = \sum_0^\infty (u_n + u'_n) \qquad v = \sum_0^\infty (v_n + v'_n) \qquad w = \sum_0^\infty (w_n + w'_n)$$

che, quando siano convergenti, soddisfano a tutte le condizioni del problema.

Supponiamo che s e s' siano concentriche e che si conoscano i valori superficiali degli spostamenti. Premetto alcune proprietà utili per questo caso.

Si abbia una funzione di quelle che abbiamo considerato

$$W = \rho^{-\tau} \int_0^{\rho} \Omega(\rho)\, \rho^{\tau-1}\, d\rho$$

in cui al solito Ω è funzione di ρ, θ, φ che soddisfa l'equazione $\Delta_1\, \Omega = 0$, e supponiam $\Omega = 0$ per $\rho = 0$. Facciamo la seguente trasformazione

$$(\alpha) \qquad \rho = \frac{R^2}{\rho_1} \qquad d\rho = -\frac{R^2}{\rho_1^2} d\rho_1 .$$

Avremo

$$W_1(\rho_1) = \rho_1^{\tau} \int_{\rho_1}^{\infty} \Omega\left(\frac{R^2}{\rho_1}\right) \rho_1^{-\tau-1}\, d\rho_1$$

Per valori di ρ legati dalla (α) W e W_1, hanno lo stesso valore, quindi si ha

$$W(R) = W_1(R),$$

cioè W e W_1 sulla sfera R hanno gli stessi valori. Ora la funzione

$$M(\rho_1) = \frac{R}{\rho_1} \rho_1^{\tau} \int_{\rho_1}^{\infty} \Omega\left(\frac{R^2}{\rho_1}\right) \rho_1^{\tau-1}\, d\rho_1$$

per la stessa ragione prenderà sulla sfera A gli stessi valori di W; inoltre, scrivendo ρ al posto di ρ_1, si ha

$$M(\rho) = \rho^{\tau-1} \int_{\rho}^{\infty} \frac{R}{\rho}\, \Omega\left(\frac{R^2}{\rho}\right) \rho^{-\tau}\, d\rho$$

Di qui si vede che nello spazio compreso fra le sfere $\rho = R$, e $\rho = \infty$ la $M(\rho)$ soddisfa alla equazione $\Delta_2 M = 0$, poichè, per una nota proprietà della trasformazione per raggi vettori reciproci, in questo spazio

$$\Delta_2 \left\{ \frac{R}{\rho} \Omega\left(\frac{R^2}{\rho}\right) \right\} = 0$$

e inoltre per $\rho = \infty$ sono soddisfatte, rispetto alla funzione M, le stesse condizioni che si avevano per $\rho = 0$ rispetto alla W, e quindi la M è della forma delle funzioni W più volte considerate. Abbiamo così il teorema:

« Data una funzione

$$W = \rho^{-\tau} \int_0^{\rho} \Omega(\rho)\, d\rho$$

« la quale nello spazio interno alla sfera di raggio R è
« monodroma finita e continua colle sue derivate prime
« e soddisfa alla equazione $\Delta_2 W = 0$, la funzione che
« nello spazio esterno alla sfera gode delle stesse pro-
« prietà, si annulla all'infinito, e sulla sfera prende gli
« stessi valori di W è

$$M(\rho) = \rho^{\tau-1} \int_\rho^\infty \frac{R}{\rho}\, \Omega\left(\frac{R^2}{\rho}\right) \rho^{-\tau}\, d\rho$$

Supponendo ora di prendere l' origine nel centro comune alle due sfere poniamo

$$\psi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma}} = \frac{1}{r}$$

supponendo $R' \leq \rho' \leq R$, se R e R' sono i raggi delle due sfere. Se φ è la funzione che nello spazio compreso fra le due sfere è monodroma finita e continua colle sue derivate, soddisfa all' equazione $\Delta_1 \varphi$, e sulla superficie prende i valori di $\frac{1}{r}$, possiamo porre

$$\varphi = \sum_0^\infty \varphi_s(\rho) + \sum_0^\infty \varphi'_s(\rho)$$

con

$$\varphi_{2s} = \frac{R}{\rho} \eta^{-s} \psi\left(\frac{R^2}{\rho} \eta^{-2s}\right) \quad \varphi_{2s+1}(\rho) = -\eta^{s+1} \psi(\rho\eta^{2(s+1)})$$

$$\varphi'_{2s} = \frac{R'}{\rho} \eta^{s} \psi\left(\frac{R'^2}{\rho} \eta^{2s}\right) \quad \varphi'_{2s+1}(\rho) = -\eta^{-(s+1)} \psi(\rho\eta^{-2(s+1)})$$

ove $\eta = \frac{R'}{R}$. È facile vedere le relazioni che le φ_s, φ'_s hanno colle distanze inverse del punto (ρ, θ, φ) dalle

due serie di punti immagini di $(\rho', \theta', \varphi')$ rispetto alle due sfere.

Prendiamo ora

$$(\beta) \quad (u_s, v_s, w_s) = (R^2 - \rho^2) \frac{\partial W_s}{\partial(x, y, z)} + [\alpha_s(\rho), \beta_s(\rho), \gamma_s(\rho)]$$

con una notazione, il cui significato è chiaro; e supponiamo che αs, βs, γs dentro lo spazio limitato dalla sfera R e nel punto $\rho = 0$ soddisfino alle condizioni necessarie perchè si possa determinare W_3 in modo da soddisfare alle equazioni dell'equilibrio per $X = Y = Z = 0$. Analogamente prendiamo

$$(\beta') \quad (u'_s, v'_s, w'_s) = (R' - \rho^2) \frac{\partial W'_s}{\partial(x, y, z)} + [\alpha'_s(\rho), \beta'_s(\rho), \gamma'_s(\rho)]$$

supponendo ora che nello spazio esterno alla sfera R' e nel punto $\rho = \infty$, si abbiano le stesse condizioni per α'_s, β'_s, γ'_s.

Inoltre poniamo

$$(u_0, v_0, w_0) = (R^2 - \rho^2) \frac{\partial W_0}{\partial(x, y, z)} + [H_0, 0, 0]$$

$$(u'_0, v'_0, w'_0) = (R'^2 - \rho^2) \frac{\partial W'_0}{\partial(x, y, z)} + [H'_0, 0, 0]$$

ove H_0 e H'_0 hanno rispetto a φ_0 e φ'_0 lo stesso significato che precedentemente aveva H rispetto a φ; e quindi

$$\frac{\partial W_0}{\partial(x,y,z)} = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}\int_0^\rho \frac{\partial^2 H^0}{\partial(x,y,z)\,\partial x}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\,d\rho$$

$$\frac{\partial W'_0}{\partial(x,y,z)} = \frac{-\sigma}{2(\sigma+z)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}\int_\rho^\infty \frac{\partial^2 H'_0}{\partial(x,y.z)\,\partial x}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\,d\rho$$

Poscia determineremo le rimanenti u_s, v_s, w_s, u'_s, v'_s, w'_s in modo che soddisfino alle seguenti condizioni alla superficie

$$[u_{s+1}'(R),\ v_{s+1}(R),\ w_{s+1}(R)] + [u'_s(R),\ v'_s(R),\ w'_s(R)] = 0$$

$$[u'_{s+1}(R'),\ v'_{s+1}(R'),\ w_{s+1}(R')] + [u_s(R'),\ v_s(R'),\ w_s(R')] = 0$$

Sostituendo in queste equazioni alle u_s, v_s, . . . i loro valori (β) (β') si ottiene

$$(\gamma)\quad \begin{cases} [\alpha_{s+1}(R),\ \beta_{s+1}(R),\ \gamma_{s+1}(R)] + (R'^2 - R^2)\dfrac{\partial W_s'}{\partial(x,y,z)} + \\ \qquad [\alpha'_s(R),\ \beta'_s(R),\ \gamma'_e(R)] = 0 \\ [\alpha'_{s+1}(R'),\ \beta'_{s+1}(R'),\ \gamma'_{s+1}(R') + (R^2-R'^2)\dfrac{\partial W_3}{\partial(x,y'z)} + \\ \qquad [\alpha_s(R'),\ \beta_s(R'),\ \gamma_s(R')] = 0 \end{cases}$$

in cui al posto delle derivate di W, W' si devono intendere posti i valori superficiali (per $\rho = R$, $\rho = R'$ rispettivamente) delle espressioni

$$\frac{\partial W_s}{\partial(x,y,z)} = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}\int_0^\rho \frac{\partial\,\Omega_s}{\partial(x,y,z)}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\,d\rho$$

$$\Omega_s = \frac{\partial\alpha_s}{\partial x} + \frac{\partial\beta_s}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W_s'}{\partial(x,y,z)} = \frac{-\sigma}{2(\sigma+2)}\int_\rho^\infty \frac{\partial\,\Omega'_s}{\partial(x,y,z)}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\,d\rho$$

$$\Omega_s' = \frac{\partial\alpha'_s}{\partial x} + \frac{\partial\beta'_s}{\partial x} + \frac{\partial\gamma'_s}{\partial x}$$

Ora per quanto abbiamo visto, onde soddisfare alle condizioni (γ) ed alle altre che si hanno per le α, β,... basterà prendere

$$[\alpha_{s+1}(\rho),\ \beta_{s+1}(\rho),\ \gamma_{s+1}(\rho)] = -\left[\frac{R}{\rho}\alpha'_s\left(\frac{R^2}{\rho}\right),\ \frac{R}{\rho}\beta'_s\left(\frac{R^2}{\rho}\right),\ \frac{R}{\rho}\gamma'_s\left(\frac{R^2}{\rho}\right)\right]$$

$$-\frac{\sigma(R^2-R'^2)}{2(\sigma+2)}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\int_0^\rho\left[\frac{R}{\rho}f'_s\left(\frac{R^2}{\rho}\right),\ \frac{R}{\rho}g'_s\left(\frac{R^2}{\rho}\right),\ \frac{R}{\rho}h'_s\left(\frac{R}{\rho}\right)\right]\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}d\rho$$

$$[\alpha_{s+1}(\rho),\ \beta_{s+1}(\rho),\ \gamma_{s+1}(\rho) = -\left[\frac{R'}{\rho}\alpha_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right),\frac{R'}{\rho}\beta_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right),\frac{R'}{\rho}\gamma_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right)\right]$$

$$-\frac{\sigma(R^2-R'^2)}{2(\sigma+2)}\rho^{\frac{1}{\sigma+2}}\int_\rho^\infty\left[\frac{R'}{\rho}f_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right),\frac{R'}{\rho}g_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right),\frac{R'}{\rho}h_s\left(\frac{R'^2}{\rho}\right)\right]\rho^{-\frac{1}{\sigma+2}-1}d\rho$$

ove abbiamo posto

$$\frac{\partial\, \Omega_s}{\partial(x\,,\,y\,,\,z)} = [\,f_s(\rho)\,,\,g_s(\rho)\,,\,h_s(\rho)]$$

$$\frac{\partial\, \Omega'_s}{\partial(x\,,\,y\,,\,z)} = [f'_s(\rho)\,,\,g'_s(\rho)\,,\,h'_s(\rho)]$$

supponendo le funzioni dei primi membri trasformate in coordinate polari.

Le formule precedenti determinano le α_s, β_s, $\ldots\, \gamma'_s$ e quindi gli spostamenti ausiliari, che risolvono il problema nel caso considerato.