TRUDI
TEORIA DE'
DETERMINANTI
A. P.

TEORIA

DE'

DETERMINANTI

TIPOGRAFIA DI GAETANO CARDAMONE.
Strada Latilla, n.° 6.

TEORIA

DE'

DETERMINANTI

E LORO APPLICAZIONI

DI

NICOLA TRUDI

PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI;
SOCIO ORD. DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE E DEL R. ISTITUTO D'INCORAGGIAMENTO;
E SOCIO RESIDENTE DELL'ACCADEMIA PONTANIANA.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI
B. PELLERANO
STRADA DI CHIAIA, N.° 60

1862

PREFAZIONE

Le applicazioni de'*determinanti* a solenni questioni di analisi, di geometria, e di meccanica, che da ogni parte e da più anni si andavano pubblicando da'dotti negli Atti delle Accademie, e nei giornali scientifici, facevano desiderare che la parte elementare della teorica di queste interessanti funzioni passasse nel campo della ordinaria istituzione, affin di porre la gioventù studiosa in istato di conoscere e seguire i progressi della Scienza.

Nè questa volta trattavasi di teoriche di lusso, o destinate soltanto ad astratte ricerche; ma sì pure di teoriche le quali, mentre hanno esteso il dominio della scienza, permettono di sormontare delle difficoltà di calcolo, e conseguire de' risultamenti, che spesso non è lecito di raggiugnere per le vie comuni dell'Algebra.

La teorica de' determinanti era già scritta dall' illustre Jacobi, e pubblicata fin dal 1841 nel tom. XXII del giornale di Crelle nella memoria che ha per titolo: *De formatione et proprietatibus determinantium*; ma, oltrecchè non ha mai esistita una pubblicazione a parte di questa memoria, non era quella una fonte per giovani che cominciano appena lo studio dell'Algebra.

Un libro su questo argomento fu pubblicato in Londra nel 1851 dal sig. Spottiswoode col titolo: *Elementary theorems relating to determinants*; ma certamente la parte, che riguarda le dimostrazioni, non fu scopo precipuo dell'Autore, il quale ebbe piuttosto in mira di offrire una raccolta di proprietà e di applicazioni dei determinanti.

Noi quindi concepimmo da più tempo il disegno di una operetta intorno a tale argomento, la quale ancora servir dovesse di richiamo per diverse nostre applicazioni; e lo scritto n'era in gran parte abbozzato, allorchè ci vedemmo prevenuti da una penna tanto abile e competente, quant'è quella dell'illustre Brioschi; sicchè allora credemmo di smettere ogni pensiero intorno alla pubblicazione del nostro lavoro.

Il libro del Brioschi fu per la scienza un segnalato benefizio; e la sua comparsa segna, per così dire, in Italia *l'epoca di transizione dal vecchio al nuovo stile:* di che è pruova non il favore col quale fu generalmente accolto da'dotti, ma il fervore col quale fu ricercato dalla gioventù studiosa. Nè il successo ottenuto da questa pubblicazione del Brioschi fu limitato all' Italia ; poichè con interesse eguale venne accolta in Francia ed in Germania, dove il libro videsi immediatamente tradotto nell'idioma francese e nel tedesco. E veramente le applicazioni scelte e svariate, con le quali il Brioschi ha illustrate le diverse proprietà de'determinanti, doveano (ci sia lecito il dirlo) sedurre e convincere anche coloro che, per sistema, sogliono mostrarsi avversi ad ogni novità scientifica, che si allontani per poco da'processi ordinarii.

Tuttavolta noi non dovemmo tardare a riconoscere che l'opera del Brioschi era scritta per giovani già forti nella scienza; e la teoria specialmente vi era delineata a tratti troppo larghi per essere accessibile a giovani men provetti ; e quindi , unicamente nell' interesse di costoro, divisammo un' altra volta di tornare al nostro antico lavoro. Ma, mentre lo andavamo raccozzando e concretando, il nostro collega, Professor Zannotti, mostrò vivo desiderio di pubblicarne la parte elementare nelle sue istituzioni di Algebra; e però, non avendo potuto ricusarci alle sue gentili premure, una parte di quel lavoro, informe qual'era, venne inserita nel detto libro fin dal 1859. Ma quivi non erano che delle idee gittate sulla carta , che sentimmo poi il dovere di meglio ordinare e sviluppare, per pubblicare il lavoro completo, e sotto un aspetto più conveniente.

Frattanto due altre opere sulla teorica de'determinanti videro in quel torno la luce, l'una del Dottore Riccardo Baltzer in Germania, e l'altra del benemerito Professore Giusto Bellavitis in Italia ; ma a noi parve che queste opere, dotte e pregevoli sotto ogni riguardo, non fossero ancor tali da servire, secondo i nostri desiderii, ad una istituzione assolutamente elementare.

Nel libro adunque, che ora presentiamo alla gioventù studiosa, non manca quasi alcuna delle proprietà più essenziali de'determinanti, avendo messo da nostro canto ogni studio per rendere le dimostrazioni chiare,e ad un tempo rigorose e generali; il che ci sembra in questo argomento una condizione indispensabile, essendo comprovato dal fatto che la considerazione di qualche caso particolare non induce quella convinzione ch'è l'effetto delle rigide dimostrazioni. D'altra parte abbiamo quasi sempre evitato di far dipendere queste dimostrazioni dalle forme simboliche e concise, con cui sogliònsi rappresentare i determinanti,poggiandole sulla forma esplicata,con la quale generalmente or sono figurati; ed è fuor di dubbio che allora, non solo riescono più evidenti le proprietà di queste interessanti funzioni, ma divengono più abituali e familiari quelle trasformazioni che si appropriano alle forme esplicite, e che le rendono molto più utili delle forme concise.

L'opera è divisa in due parti, la prima destinata alla teoria; l'altra alle applicazioni. Tra queste, quelle che formano il soggetto de' paragrafi II, III, IV, V, e che riguardano il *processo del massimo comune divisore*, l' *eliminazione tra due equazioni di gradi qualunque*, le *radici multiple*, ed il *teorema di* Sturm, sono il risultamento di alcune memorie da noi presentate nel corso del 1857 alla R. Accademia delle Scienze,e che non vennero pubblicate per gli ostacoli malaugurati,che si frapponevano alla stampa de' lavori accademici. Gli argomenti poi trattati ne' paragrafi VI, VII, VIII, IX, e che si rapportano ai *determinanti funzionali*, alle *sostituzioni lineari*, alle *funzioni omogenee*, ed alle *forme*, sono da tenersi come introduzione ad un'altra opera, che vedrà la luce quanto prima (*), e che riguarda quelle mirabili funzioni conosciute sotto i nomi di *invarianti*, *covarianti*, etc., le quali hanno aperto un campo sì vasto e sì fecondo alle speculazioni de'geometri.Un ultimo paragrafo è destinato ad applicazioni geometriche;

(*) In questo lavoro, che sarebbe stato superiore alle nostre forze, siamo sorretti dall'opera del nostro egregio amico e collega Professore Battaglini.

ma in riguardo a queste abbiamo creduto di non essere molto diffusi, sia perchè i giovani ne hanno già copia negli Annali di TERQUEM (*); e sia ancora perchè sarà presto pubblicato in Napoli un giornale mensuale di matematiche, nel quale saranno frequenti le applicazioni de' determinanti alla geometria, al calcolo, ed alla meccanica.

Ma per norma de'giovani vogliano avvertire che, in quanto alla prima parte, tutto ciò che veramente interessa una primordiale istituzione, può ridursi a quello che forma il soggetto de'primi sei paragrafi, e del paragrafo nono; potendo riserbarsi il resto a più inoltrata istruzione. Ed in riguardo alle applicazioni, basterà limitarsi la prima volta al primo paragrafo, nel quale è esposta la risoluzione delle equazioni di 1° grado, ed a quella parte dell'ultimo paragrafo, che si rapporta alle più semplici applicazioni geometriche.

Tra i limiti intanto, che ci siamo imposti, abbiamo diligentemente cercato tutti que'miglioramenti che offrivano i più recenti lavori de' dotti. Ed è così, per esempio, che ci siamo affrettati a far conoscere una nuova dimostrazione data dall' illustre HESSE della proprietà sorprendente, della quale è dotato il determinante di una funzione omogenea di n variabili (che or porta il nome di *Hessiano)*, di annunziare col suo identico annullamento che la proposta funzione è riducibile, mediante una trasformazione lineare ad una funzione di meno di n variabili. E tra le proprietà delle forme quadratiche si troverà dichiarata quella che il SYLVESTER ha chiamato *legge d' inerzia* e che, indipendentemente dal principio della variazione continua delle funzioni, offre il mezzo più naturale per definire il numero delle radici reali di un' equazione comprese tra due limiti assegnati.

(*) Noi non sapremmo abbastanza raccomandare quest' opera periodica ai giovani specialmente che fanno i primi passi nella scienza, poichè vi trovano utilissimi esercizii in tutto il campo delle matematiche pure, ed una fonte di nobile emulazione nelle questioni che vi si propongono a risolvere. Ed oltre a ciò le notizie dotte ed erudite e le riviste bibliografiche che presenta il bullettino, li abituano assai per tempo ad apprezzare i lavori degli uomini illustri; e li mettono in istato di seguire a gradi e senza stenti il progresso della scienza.

Noi vogliamo qui ripeterlo un'altra volta: è solo l'interesse dei giovani che ci ha indotti a scrivere e pubblicare il presente libro; e facciamo voti ardentissimi che una penna più abile possa farlo presto dimenticare, migliorando l' esposizione delle teoriche, e correggendo le nostre inesattezze. E, scrivendo per giovani, abbiamo creduto di poterci dispensare dal citare i nomi degli autori, cui son dovute le proprietà de'determinanti, o che le hanno rese più generali, o che hanno migliorate le loro dimostrazioni, o che ne hanno fatto importanti applicazioni. Ma d'altra parte al punto, in cui siamo, per l'uso ormai divenuto generale di queste funzioni, noi crediamo che spetti alla storia il compito di porre in evidenza ciò che a ciascuno è dovuto nella creazione e nel progresso di queste importanti teorie (*).

(*) Del rimanente in quanto alla origine di siffatte teorie le prime tracce possono ritrovarsi nei lavori di *Leibnitz*, di *Cramer*, di *Vandermonde*, di *Laplace*, e di *Bezout*, relativi alla risoluzione di un sistema di equazioni di 1° grado; e l'ultimo di questi geometri, più di ogni altro, a noi sembra che fosse già in possesso di molte delle proprietà generali de' determinanti, come forse avremo occasione di comprovare con un'analisi, che speriamo di pubblicare, della sua grand'opera sulla *eliminazione*, che certamente anche oggi è meritevole di una maggiore attenzione. In seguito, de' passi più larghi furon fatti in queste teorie pe' lavori di *Lagrange*, di *Gauss*, di *Cauchy*, di *Binet*, e di *Jacobi* innanzi tutto; e tra i più recenti promotori bisogna annoverare *Sylvester*, *Cayley*, *Salmon*, *Boole*, *Roberts* in Inghilterra; *Borchardt*, *Hesse*, *Joachimsthal*, *Kummer*, *Eisenstein*, *Aronhold*, *Baltzer* in Germania, *Hermite* in Francia; e tra gl' Italiani *Brioschi*, *Betti*, *Bellavitis*, *Tortolini*, *Genocchi*, *Mainardi*, *Faà di Bruno*, *Cremona*, *Padula*, *Battaglini*, *Rubino*, *Sannia*, e *Janni*.

INDICE.

TEORIA DE' DETERMINANTI.

§ I. Inversioni nelle permutazioni di più elementi. . . pag. 1
§ II. Nozioni intorno alle matrici rettangolari e quadrate. . . 5
§ III. Prime nozioni intorno ai determinanti, ed ai determinanti minori e complementali. 12
§ IV. Proprietà generali de' determinanti. 19
§ V. Decomposizione de' determinanti in somme di prodotti di minori complementali. 35
§ VI. Moltiplicazione de' determinanti. 40
§ VII. Derivate e differenziali de' determinanti 51
§ VIII. Speciali trasformazioni de' determinanti 57
§ IX. Determinanti reciproci. 67
§ X. Determinanti simmetrici, gobbi simmetrici, e gobbi. . . . 73
§ XI. Matrici e determinanti a due scale. 94

APPLICAZIONI DE' DETERMINANTI.

§ I. Risoluzione di un sistema di equazioni lineari 113
§ II. Intorno alla divisione tra due funzioni intere, ed al processo del massimo comun divisore 122
§ III. Eliminazione tra due equazioni 161
§ IV. Determinanti delle equazioni, e radici multiple. 178
§ V. Sul teorema di Sturm. 191
§ VI. Determinanti funzionali. 196
§ VII. Alcune nozioni intorno alle sostituzioni lineari. 206
§ VIII. Alcune proprietà delle funzioni omogenee 218
§ IX. Alcune trasformazioni e proprietà delle forme; ed in particolare delle binarie e delle quadratiche. 229
§ X. Alcune applicazioni alla geometria analitica 251

FINE DELL' INDICE.

AVVERTENZE.

Nella pag. 15 alla 4ª linea, in luogo di a_{n-1}, *leggi*, $a_{n,1}$. Ed alla 14ª linea, ne' due primi determinanti del secondo membro alla terza orizzontale, in luogo di y, *leggi*, y'.

Nella pag. 29, al posto del primo elemento della seconda orizzontale del determinante (4) in luogo di 1, *leggi*, 2. E nel posto del secondo elemento principale del determinante (5) in luogo di —1, *leggi*, —2.

Nella pag. 38, alla 9ª linea, agli ultimi due versi, che compiono il periodo, si sostituisca come segue « ma a patto ancora che le diverse combinazioni che cominciano con uno stesso numero siano scritte in guisa che i secondi, terzi numeri, etc. si trovino sempre disposti in ordine crescente »

Nella pag. 48, alla penultima linea invece di n° 59, *leggi*, n° 60.

Nella pag. 78, in fine del n° 98 si aggiunga « È però chiaro che per gli elementi principali si ha semplicemente $\frac{dP}{da_{rr}} = A_{rr}$.

Nella pag. 160, avanti la nota, al primo V_r si sostituisca X_r.

Nella pag. 207, alla linea 9ª, ov'è detto, elementi del determinante della sostituzione, *leggi*, elementi della r^{ma} verticale del determinante della sostituzione.

Nella pag. 216, alla 6ª linea, invece di (10) *leggi*, (13). Ed alla linea 8ª, nel posto del primo elemento del determinante, invece di A_n, *leggi*, A_{11}.

Nella pag. 221, a piè di pagina, nel posto del primo elemento del determinante a sinistra, in luogo del 0, *leggi*, $\frac{m}{m-1}u$; e nel secondo membro invece di $x_r x_s$, *leggi*, x_n^2.

Nella pag. 253, alla 1ª ed 8ª linea invece di $\gamma\,\gamma_1\,\gamma_2$, *leggi*, $k\,k_1 k_2$.

Nella pag. 264, alla linea 14ª, in luogo di $\frac{(m-1)^2}{v}$, *leggi*, $\frac{v}{(m-1)^2}$.

TEORIA ED APPLICAZIONI

DEI DETERMINANTI

PARTE PRIMA

TEORIA

§. I.

INVERSIONI NELLE PERMUTAZIONI.

1. Tra le permutazioni di più elementi letterali o numerici chiamiamo *permutazione principale* quella in cui gli elementi si succedono in ordine *diretto*, vale a dire in ordine alfabetico, se si tratta di lettere; ed in ordine crescente, se si tratta di numeri; e diremo *permutazione inversa* quella in cui gli elementi seguono un ordine precisamente opposto.

2. Due elementi di una permutazione, contigui o no, si dice che formano *inversione*, quando non seguono l'ordine diretto; perciò non vi sono inversioni nella permutazione principale; ma ogni altra ne ha un certo numero, il quale si calcola paragonando ogni elemento, a cominciare dal primo, con ciascuno de' seguenti; così nella permutazione di cinque elementi $e\,h\,d\,g\,b$ si trovano sette inversioni, due dovute ad e, tre ad h, una a d, ed una a g.

Nella permutazione inversa ogni elemento fa inversione con ciascuno dei seguenti; e perciò, se n sono gli elementi, il numero delle inversioni sarà espresso da

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n\,(n-1).$$

3. Gli elementi a cui si rapporta un sistema di permutazioni letterali o numeriche si supporranno distinti da un numero di ordine, il quale per ciascuno è quello del posto ch'esso occupa nella permutazione principale; e ciò a prescindere dal suo numero di ordine *naturale*, con che intendiamo quello del posto ch'esso occupa o nella serie alfabetica $a, b, c, d, \ldots$, o nella progressione naturale $1, 2, 3, 4, \ldots$ Ora è manifesto che il numero delle inversioni di qualunque permutazione è lo stesso di quello delle inversioni della permutazione che si ottiene cambiandovi ogni elemento, o nel suo numero di ordine naturale, o nel suo numero di ordine relativo alla permutazione principale; ed è così per esempio, che tanto è contare le inversioni nella permutazione $e\,h\,d\,g\,b$, quanto è contarle nella permutazione $(5, 8, 4, 7, 2)$ formata, mutando ogni lettera nel suo numero di ordine naturale, o nell'altra $(3, 5, 2, 4, 1)$ che si ottiene cambiando ogni lettera nel suo numero di ordine relativo alla permutazione principale $b\,d\,e\,g\,h$.

4. S'indichi con P la permutazione principale di più elementi; con A una permutazione formata da P portandovi in primo luogo, ed in ordine diretto m elementi qualunque, per esempio quelli definiti da'numeri di ordine crescenti $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_m$; e s'indichi con ε il numero delle inversioni di A: inversioni dovute unicamente ai suoi primi m elementi. Ora siccome l'elemento i^{mo} di A si conta come r_i^{mo} nella permutazione principale P, è chiaro che in A esso può fare inversione solo con gli elementi da'quali è preceduto in P, e che sono r_i-1, esclusi tra essi quelli che lo precedono in A, e che sono $i-1$. Dunque le inversioni di A, dovute soltanto al suo i^{mo} elemento, saranno $r_i-1-(i-1)$, ossia r_i-i; e perciò il primo ne da r_1-1; il secondo r_2-2; il terzo r_3-3; e così di seguito; in guisa che si avrà

$$\varepsilon=(r_1-1)+(r_2-2)+\cdots+(r_m-m)=r_1+r_2+\cdots+r_m$$
$$-\frac{1}{2}m(m+1).$$

5. Supponendo che una permutazione qualunque A sia spezzata in due parti a piacere, che indichiamo con B e con C, l'una formata con i primi m elementi, l'altra con i rimanenti, siano α, β, γ le inversioni di A, B, C rispettivamente. Dopo ciò, se dinotiamo con ε il numero delle inversioni che ogni elemento della prima

parte B fa con tutti gli elementi della seconda parte C, si avrà evidentemente

$$\alpha = \beta + \gamma + \varepsilon.$$

Ora se si dà un ordine diverso agli elementi di B e C, potranno variare i numeri β e γ, e quindi anche α; ma ε resterà immutato, e sarà determinato conoscendosi i numeri di ordine degli elementi di B, relativi alla permutazione principale di tutti gli elementi. Se $r_1, r_2, \cdots, r_m$ sono questi numeri di ordine, il valore di ε sarà quello che risulta dalla formola di poc'anzi; vale a dire si ha

$$\varepsilon = r_1 + r_2 + \cdots + r_m - \frac{1}{2} m (m+1).$$

6. Le permutazioni di più elementi saranno distribuite in due *classi;* comprendiamo nella *prima* quelle che hanno un numero *pari* di inversioni, e nella *seconda* quelle che ne hanno un numero *impari.*

7. Segue da questa convenzione che una permutazione muta di classe, se vi si scambiano due elementi contigui, perchè con ciò essa o acquista o perde *una* inversione. Quindi, se un elemento di una permutazione si trasporti dopo quello che lo segue, o a dritta, o a sinistra, si ha una permutazione di classe diversa; dopo due si torna alla classe primitiva; dopo tre si riproduce l'altra classe; e così di seguito alternativamente. E perciò:

Se un elemento di una permutazione si trasporti dopo r *elementi o a dritta o a sinistra, la nuova permutazione apparterrà alla classe della prima, o all'altra classe, secondochè* r *è pari o impari.*

8. Una permutazione in cui debbano tenersi in veduta due elementi qualunque, come k e q, può rappresentarsi con

$$\text{A}\, k\, \text{B}\, q\, \text{C}, \qquad (1)$$

dove A figura il gruppo di tutti gli elementi che precedono k; B quello degli elementi interposti tra k e q, e che ora supporremo essere al numero di r; e C finalmente il gruppo di tutti gli elementi che si trovano dopo q. Se in questa permutazione si cambia k in q, e viceversa q in k, si ha l'altra permutazione

$$\text{A}\, q\, \text{B}\, k\, \text{C}, \qquad (2)$$

la quale differisce dalla prima unicamente per lo scambio tra i due elementi k e q, tra i quali s'interpongono r elementi. Posto ciò, se nella permutazione (1) si trasporti l'elemento k innanzi q, e se nella (2) si trasporti q dopo k, nell'un caso, e nell'altro si ha sempre la stessa permutazione

$$A\,B\,k\,q\,C,$$

la quale adunque risulta dalla (1) per lo trasporto di un elemento dopo r elementi, e dalla (2) per lo trasporto di un elemento dopo $r+1$ elementi. Quindi, se la classe di quest'ultima permutazione è la stessa di quella della (1), sarà poi diversa dalla classe della (2), o reciprocamente; sicchè in ogni caso le permutazioni (1) e (2) appartengono a classi diverse, e si ha il seguente teorema:

Due permutazioni, le quali differiscono solo per lo scambio vicendevole tra due elementi appartengono a classi diverse.

9. Date due permutazioni appartenenti ad uno stesso sistema di elementi si comprende ch'è sempre lecito di supporre che l'una sia dedotta dall'altra mediante un certo numero di scambii successivamente operati tra i suoi elementi a due a due, perchè ciò riducesi a fare in guisa che per via di tali scambii gli elementi dell'una prendano finalmente la stessa disposizione che hanno nell'altra. Questo passaggio da una permutazione ad un'altra può regolarsi in varii modi, e quindi il numero degli scambii può cangiare secondo la via che si segue; ma tenendo presente che ogni scambio fa cangiar di classe, possiamo conchiudere, che:

Due permutazioni formate con i medesimi elementi appartengono ad una stessa classe, o a classe diversa, secondochè è pari o impari il numero degli scambii ch'è necessario di operare successivamente tra gli elementi a due a due per dedurre l'una dall'altra.

10. Si sa che il numero delle permutazioni di n elementi ascende ad $1\times2\times3\times\cdots\times n$; e però questo numero, salvo il caso eccezionale di $n=1$, è sempre pari. Osserviamo intanto che le permutazioni di n elementi possono dedursi da quelle di $n-1$ elementi, aggiungendo in fine di ciascuna di queste l'elemento n^{mo}, e poi supponendo che l'elemento aggiunto avvanzi di un posto per volta verso sinistra fino a prendere il primo posto. Ciò premesso siano A_1 e B_1 due permutazioni di n elementi formate con aggiungere in ultimo luogo l'elemento n^{mo} a due permutazioni di $n-1$ elementi appartenenti a classi diverse; così anche le per-

mutazioni A_1 e B_1 saranno di diversa classe; e però se dinotiamo con $A_2, A_3, \ldots, A_n$ le permutazioni che risultano da A_1, facendo avvanzare di un posto per volta verso sinistra l'ultimo elemento, finchè pervenga ad occupare il primo posto; e con $B_2, B_3, \ldots, B_n$ quelle che nella stessa maniera risultano da B_1, avverrà che le permutazioni comprese nella serie

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$$

saranno di classe diversa da quelle delle corrispondenti permutazioni dell'altra serie

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n;$$

vale a dire di tutte le $2n$ permutazioni provvenienti nel modo indicato da due permutazioni di $n-1$ elementi, che siano di classe diversa, una metà appartiene ad una classe, ed una metà all'altra classe. Ora supponendo che si tratti di formare le permutazioni di un sistema di elementi letterali $a, b, c, d, \ldots$, cominceremo da quelle di due elementi, come a, b, ed avremo le due permutazioni

$$ab, ba,$$

le quali appartengono a classi diverse. Indi con la introduzione di un terzo elemento c, seguendo il metodo prescritto, avremo le permutazioni di tre elementi

$$abc, acb, cab; bac, bca, cba,$$

le quali ancora a due a due saranno di classi diverse. Ma quindi è palese che anche quelle di quattro elementi debbono essere a due a due di diversa classe; e però è manifesto in generale, che: *Nel sistema completo delle permutazioni di qualsivoglia numero di elementi una metà appartiene ad una classe, ed una metà all'altra classe.*

§ II.

NOZIONI INTORNO ALLE MATRICI.

11. Date più serie di ugual numero di termini, se occorra di considerare anche le serie che si formerebbero con i loro termini di ugual posto, come tutt'i primi, tutt'i secondi, etc.: possono ad

un tempo aversi sott'occhio i due sistemi di serie, senza ripeterne la scrittura, disponendo le serie date in linee orizzontali, ma in guisa che i termini di ugual posto siano verticalmente allineati. Per accennare a siffatta disposizione si usa di chiudere il sistema delle serie date fra due tratti rettilinei, come nel seguente esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & p \\ q & r & s & t & u \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Questi quadri prendono il nome di *matrici;* i termini delle serie diconsi allora *elementi* della matrice; e quelli che vi sono orizzontalmente, o verticalmente allineati, si dice che formano una *linea*, la quale poi si distingue in *orizzontale*, e *verticale*. Tanto le orizzontali che le verticali si contano per numeri di ordine 1,2,3,...; quelle dall'alto in basso, queste da sinistra a dritta.

12. Siccome ogni elemento appartiene ad una orizzontale e ad una verticale, ne segue che per individuare un elemento della matrice basta assegnare il numero di ordine della sua orizzontale, e quello della sua verticale. Quindi per rappresentare di una maniera generale l'elemento che appartiene alla r^{ma} orizzontale ed alla s^{ma} verticale suole adoperarsi il simbolo (r, s), ed i due numeri r ed s diconsi ancora *indici* dell'elemento, l'uno *indice di orizzontale*, l'altro *indice di verticale*, o semplicemente *primo e secondo indice*. Così nella matrice (1) si ha per esempio

$$\begin{array}{ccccc} a=(1,1) \;, & b=(1,2) \;, & c=(1,3) \;, & d=(1,4) \;, & e=(1,5) \\ f=(2,1) \;, & g=(2,2) \;, & h=(2,3) \;, & i=(2,4) \;, & j=(2,5) \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

13. Parlando in seguito di prodotti di due o più elementi di una matrice intendiamo *espressamente* che questi elementi debbano appartenere ad orizzontali diverse e verticali diverse; di modo che, se ogni elemento che figura come fattore di un tal prodotto, è rappresentato col simbolo or ora descritto, dovranno essere tra loro diversi tanto i primi indici, quanto i secondi. Ciò premesso sup-

poniamo un prodotto di m elementi simbolicamente espresso da

$$(r_1, s_1)\,(r_2, s_2)\,(r_3, s_3)\,(r_4, s_4)\ldots(r_m, s_m); \qquad (2)$$

risulta dalle convenzioni di poc'anzi che la serie dei primi indici $r_1, r_2, \cdots, r_m$ è formata da'numeri di ordine delle orizzontali, alle quali appartengono gli m fattori; mentre la serie de'secondi indici $s_1, s_2, \ldots, s_m$ è formata da' numeri di ordine delle corrispondenti verticali. Ora queste due serie numeriche noi le diremo *permutazioni del prodotto*, l'una *permutazione di orizzontali*, l'altra *permutazione di verticali;* e le loro inversioni si diranno ancora inversioni del prodotto.

Osserviamo intanto che, se si cambia l'ordine de' fattori, cambiano pure le due permutazioni del prodotto, ma dimostreremo (ed è quanto interessa) che, qualunque sia l'ordine dei fattori, le due permutazioni sono o sempre di una stessa classe, o sempre di classe diversa. In fatti dando un altro ordine ai fattori del prodotto (2), come per esempio

$$(r_2, s_2)\,(r_3, s_3)\,(r_1, s_1)\,(r_4, s_4)\ldots(r_m, s_m), \qquad (3)$$

possiamo supporre che dalla forma (2) si passi alla (3), mediante un certo numero di scambii successivamente operati tra i primi indici a due a due (n.° 9); ma siccome altrettanti scambii si operano contemporaneamente tra i secondi indici, ne risulta che le due permutazioni sono o sempre di una stessa classe, o sempre di classe diversa; e perciò:

Se si moltiplicano tra loro più elementi di una matrice presi in orizzontali diverse, e verticali diverse, qualunque sia l'ordine dei fattori, le due permutazioni del prodotto saranno o sempre di una stessa classe, o sempre di classe diversa; o, in altri termini, *il numero totale delle inversioni delle due permutazioni è o sempre pari, o sempre dispari.*

14. Il prodotto di più elementi di una matrice si dirà *algebrico* ove si riguardi come affetto dal $+$ o dal $-$, secondochè le due corrispondenti permutazioni sono della stessa classe o di classe diversa; o con altre parole, secondochè il numero totale delle loro inversioni è pari o impari. Così nella matrice (1) il prodotto $p\,s\,b$, considerato come algebrico, comporta il $-$, perchè traducendolo nella forma simbolica (3, 5) (4, 3) (1, 2) si trovano due inversioni nella permutazione de' primi indici, e tre in quella de' secondi. Si vedrebbe similmente che al prodotto $p\,h\,q\,d$ compete il $+$, perchè tradotto in (3, 5) (2, 3) (4, 1) (1, 4) si contano quattro inversioni nei primi indici, ed altrettante nei secondi. Del resto questo segno può sempre farsi dipendere da una sola delle due permutazioni, perchè essendo arbitrario l'ordine de'fattori, l'una di esse può ridursi in ogni caso ad essere una permutazione principale; ed è poi chiaro che disponendo questi fattori, seguendo l'ordine delle orizzontali, diverrà principale la permutazione dei primi indici; e disponendoli invece seguendo l'ordine delle verticali, lo diverrebbe quella de'secondi indici.

In generale, chiamando ε il numero totale delle inversioni di un prodotto di più elementi di una matrice, il segno che gli compete, come algebrico, sarà quello che risulta dal simbolo $(-1)^{\varepsilon}$, ov'è poi lecito di aggiungere, o togliere all'esponente qualunque numero pari.

15. La determinazione del segno di cui è discorso può grandemente essere agevolata adottando opportune notazioni per gli elementi, come sono le seguenti

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & . & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & . & l_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_m & b_m & c_m & d_m & . & l_m \end{matrix}\right| \quad (4)\,, \qquad \left|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & . & a_{m,n} \end{matrix}\right| \quad (5)$$

Nella (4) si suppone che le lettere in ogni orizzontale siano quelle della serie continua alfabetica $a, b, c, d, \ldots, l$; e che gl'indici in ogni verticale formino la progressione naturale $1, 2, 3, \ldots, m$; donde segue che in questa notazione il simbolo di ogni elemento porta con sè il suo indice di orizzontale, mentre quello di verticale coincide col numero di ordine naturale della lettera corrispondente. Quindi è manifesto che per un prodotto di elementi di questa matrice la permutazione di orizzontali trovasi già bella e formata nella serie degl'indici de'suoi fattori, mentre quella di verticali si avrebbe mutando ogni lettera nel suo numero di ordine naturale; però, siccome delle permutazioni non interessano che le inversioni, risulta che possiamo dispensarci dal detto cambiamento, e contare le inversioni nella stessa permutazione di lettere (n.° 3). Così per esempio si trova immediatamente che il prodotto $d_4 b_3 c_2$ comporta il —, contandosi due inversioni nelle lettere, e tre negl'indici.

Nella matrice (5) tutti gli elementi sono figurati da una sola lettera, variata però con un doppio indice, il primo dei quali è l'indice di orizzontale dell'elemento, e l'altro l'indice di verticale. Così in questa notazione le due permutazioni di un prodotto si hanno nelle due serie de' primi e secondi indici di tutt' i fattori; ed in conseguenza è più immediata la determinazione del segno. Talvolta per maggior semplicità si sopprime la lettera che sostiene i due indici, scrivendo (r, s) invece di $a_{r,s}$; ma con ciò si ritorna al sistema già dichiarato al n.° 12.

16. In seguito, ad evitare circollocuzioni, terremo a riguardo delle matrici alcuni modi compendiati di dire, da intendersi di per loro stessi; ma che pure vogliamo dichiarare a scanso di equivoci.

I. Due, o più linee di una matrice si diranno *di ugual nome o parallele*, se sono o tutte orizzontali, o tutte verticali; e quindi sono linee *di nome diverso* una orizzontale, ed una verticale.

II. In due linee dello stesso nome o di nome diverso, chiamiamo *corrispondenti* gli elementi di ugual posto, come sono il primo col primo, il secondo col secondo, etc. etc.

III. *Aggiugnere o togliere una linea da un' altra dello stesso nome* vuol dire aggiugnere o togliere tutti gli elementi dell'una, dai corrispondenti elementi dell'altra. *Moltiplicare o dividere una linea per una data quantità* significa moltiplicare o dividere per la quantità tutti gli elementi della linea. *Cambiare il segno ad una linea* vuol dire cambiarlo a tutti gli elementi della linea; il che poi vale moltiplicarla per — 1.

IV. Diremo *uguali* o *identiche*, le linee che hanno uguali uno ad uno gli elementi corrispondenti; e le diremo *equivalenti*, quando possono diventare identiche moltiplicandole, o dividendole per opportune quantità.

V. Chiamiamo *simili* le matrici che hanno uno stesso numero di orizzontali, ed uno stesso numero di verticali; ed in queste matrici diremo linee *omologhe* ed elementi *omologhi*, quelli che vi hanno una medesima situazione.

17. Le matrici che abbiamo descritte possono, in generale, chiamarsi *rettangolari;* ma prendono il nome di *quadrate*, quando il numero delle orizzontali è uguale a quello delle verticali; e questo numero allora dicesi *grado* della matrice. Quindi una matrice quadrata di grado n contiene n^2 elementi.

Nelle matrici quadrate due linee di nome diverso designate da uno stesso numero di ordine diconsi *conjugate;* e quindi sono conjugate la prima orizzontale, e la prima verticale; la seconda orizzontale e la seconda verticale, etc. In due linee conjugate gli elementi corrispondenti, cioè di ugual posto, diconsi ancora conjugati; e perciò il primo elemento dell'una è conjugato al primo elemento dell'altra; il secondo conjugato al secondo; il terzo al terzo etc. L'elemento comune a due linee conjugate è il conjugato di sè stesso, e chiamasi *elemento principale.* È evidente che nella matrice quadrata

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

un elemento qualunque $a_{r,s}$ ha per conjugato l'elemento $a_{s,r}$; ed $a_{r,r}$ è il principale r^{mo} elemento, di talchè $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, .., $a_{n,n}$ sono i successivi principali elementi.

Si chiamano *simmetriche* le matrici quadrate nelle quali ogni linea è identica alla sua conjugata; o ch'è lo stesso, nelle quali ogni elemento è uguale al suo conjugato. Così per esempio è simmetrica la matrice di 3° grado

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$$

ma in generale è chiaro che può tenersi come simmetrica la matrice di grado n, scritta poc'anzi, quando i suoi elemeuti verifichino la condizione

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

la quale deve sussistere dando a ciascuno degl'indici r ed s tutt'i valori 1, 2, 3, . ., n.

Nella matrice quadrata si considerano ancora i due sistemi di elementi che vi si trovano allineati secondo le due diagonali;e però si dice che ciascuno forma una *diagonale.* Di esse l'una è costituita dagli elementi principali, e chiamasi *diagonale principale;* e si dirà l'altra *seconda diagonale.*

18. Occorrendo in seguito di considerare la matrice che si formerebbe con alcune orizzontali, o con alcune verticali di una data matrice, intendiamo *espressamente,* e lo avvertiamo una volta per tutte,che queste linee debbono conservare nella nuova matrice lo stesso ordine di successione che hanno nella matrice primitiva; di modo che la matrice nuova dev'essere ciò che diviene la primitiva sopprimendone tutte le altre linee che di quella non debbono far parte.

Ciò premesso, data una matrice rettangolare di m orizzontali ed n verticali, e supposto $m < n$, possiamo dedurne un sistema di matrici quadrate, combinando ad m ad m le sue verticali, salva sempre per ogni combinazione di verticali la condizione or'ora prescritta in quanto all'ordine con cui debbono succedersi nella corrispondente matrice ; e se s'indica con μ il numero di queste matrici quadrate, sarà

$$\mu = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\times2\times3\times\ldots\times m}.$$

Supposta per esempio la matrice di tre orizzontali e quattro verticali

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

combinando le verticali a tre a tre si hanno le quattro matrici di 3° grado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

in ciascuna delle quali le verticali, secondo la condizione imposta, si succedono con l'ordine istesso che hanno nella matrice originaria.

Se si fosse supposto $m > n$, vale a dire, se nella matrice primitiva il numero delle orizzontali fosse maggiore del numero delle verticali, converrebbe combinare invece le orizzontali ad n ad n per dedurne un sistema di matrici quadrate di grado n.

§. III.

PRIME NOZIONI INTORNO AI DETERMINANTI ED AI DETERMINANTI MINORI E COMPLEMENTALI.

19. Chiamasi *determinante* la somma algebrica di tutt'i prodotti che possono ottenersi moltiplicando ad n ad n gli elementi di una matrice quadrata di grado n presi in orizzontali diverse e verticali diverse, e dando ad ogni prodotto il $+$ o il $-$, secondochè le due corrispondenti permutazioni di orizzontali e di verticali sono di una stessa classe, o di classe diversa; o in altri termini, secondochè il numero totale delle loro inversioni è pari, o impari. Ordinariamente il determinante si rappresenta con la stessa sua matrice; ed allora gli elementi, le linee, il grado etc: della matrice diconsi *elementi, linee, grado,* etc. del determinante, il quale ancora dicesi *simmetrico,* se simmetrica è la sua matrice.

20. Applicando la definizione allo sviluppo del determinante di grado n

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

è chiaro che ogni termine di P è un prodotto di n elementi, dove tanto i primi, quanto i secondi indici formano una permutazione de'numeri $1,2,3,..,n$, e che prende il $+$ o il $-$ secondochè è pari, o impari il numero totale delle inversioni nelle due permutazioni. Tra i termini del determinante merita di esser distinto quello che risulta dal prodotto degli elementi principali, cioè

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n}.$$

Questo termine, che dicesi *principale*, e che prende sempre il segno $+$, perchè le due permutazioni sono identiche, può tenersi come tipo generatore di tutti gli altri, i quali possono da esso dedursi o permutando i primi indici in tutt'i modi, tenendo fermi i secondi; o invece permutando i secondi, fermi restando i primi, ed il segno di un termine qualunque dipenderà solo dalle inversioni degl'indici permutati. È poi manifesto che i termini del determinante sono $1 \times 2 \times 3 \times \cdot\cdot \times n$, metà col $+$, metà col $-$ (n.° 10).

Il determinante P suole anche indicarsi col simbolo più conciso

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \,..\, a_{n,n}$$

ov'è in veduta il solo termine principale; mentre il Σ ed il doppio segno $\pm$ accennano la somma algebrica di tutt'i termini che si deducono nel modo indicato, e con la regola già data in quanto a' segni.

21. Se nel determinante P si cambiano le orizzontali in verticali, o viceversa, e con l'ordine medesimo di successione, si ha l'altro determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & . & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & . & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & . & a_{n,3} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

il quale però non è diverso da P, perchè il suo sviluppo può ottenersi in modo affatto identico per mezzo del termine principale, ch'è lo stesso. Da ciò risulta che i determinanti non sono punto alterati con tal cangiamento.

22. Considerando ancora lo sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & . & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & . & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & . & l_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n & . & l_n \end{vmatrix}$$

si vede che ogni suo termine è un prodotto di n elementi con lettere ed indici diversi, che prende il $+$ o il $-$ secondochè è pari o impari il numero delle inversioni nelle une e negli altri (n°15). Ma anche questo sviluppo può dedursi dal termine principale $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$, permutando o solo le lettere, o solo gl'indici; ed i segni dipenderanno o solo dalle inversioni nelle lettere, o solo da quelle negl'indici. E però il determinante può dinotarsi col simbolo già dichiarato

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots l_n.$$

23. Soggiungiamo alcuni esempii di sviluppi di determinanti.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3$$

Vedremo tra poco che i determinanti possono essere sviluppati con metodi molto più semplici e rapidi; ma per ora osserveremo, e giova di tenerlo presente, che: *un determinante di 2° grado equivale al prodotto dei due elementi principali diminuito del prodotto degli altri due.*

24. Il prodotto di tutti gli elementi della seconda diagonale è anch'esso un termine del determinante. Nel determinante P questi elementi, disposti secondo le orizzontali, formano la serie $a_{1,n}$, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, .., $a_{n-1,2}$, a_{n-1}, dove i primi indici procedono in ordine diretto, ed i secondi in ordine inverso; e perciò il segno che compete al detto termine è quello che risulta dal simbolo $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ (n.° 2).

25. Se da un determinante si sopprimono delle orizzontali ed altrettante verticali, le linee che restano formano un altro determinante che dicesi *minore* in riguardo al primitivo; e due minori di uno stesso primitivo diconsi *complementali*, o *l'uno complemento dell'altro*, se ciascuno risulta dal primitivo sopprimendone le orizzontali e le verticali, le quali concorrono alla formazione dell'altro. Così per esempio in riguardo al determinante primitivo di 4° grado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

i due minori di 2° grado

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono l'uno complemento dell'altro, ed è poi chiaro in generale che la somma de'gradi di due minori complementali è uguale al grado del primitivo.

26. Bisogna osservare che un determinante minore di grado m può riguardarsi come un determinante comune ad una matrice di m orizzontali del primitivo, e ad un'altra di m verticali; ed il suo complemento è pure un determinante comune alla matrice delle rimanenti orizzontali del primitivo, ed a quella delle rimanenti verticali. Laonde, se dinotiamo con H un minore di grado m del determinante P, comune alle due matrici di orizzontali e di

verticali designate rispettivamente da' numeri di ordine

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m \quad \text{ed} \quad s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m,$$

procedenti e gli uni e gli altri in ordine diretto, sarà

$$H = \begin{vmatrix} a_{r_1, s_1} & a_{r_1, s_2} & . & a_{r_1, s_m} \\ a_{r_2, s_1} & a_{r_2, s_2} & . & a_{r_2, s_m} \\ . & . & . & . \\ a_{r_m, s_1} & a_{r_m, s_2} & . & a_{r_m, s_m} \end{vmatrix}$$

In questo determinante minore i primi indici in ogni verticale riproducono la serie $r_1, r_2, \ldots, r_m$, ed i secondi in ogni orizzontale riproducono l'altra serie $s_1, s_2, \ldots, s_m$. È poi manifesto che nel complemento di un tal minore i primi indici in ogni verticale sarebbero i numeri che restano della serie 1, 2, 3, . . , n, esclusi $r_1, r_2, \ldots, r_m$; ed i secondi indici in ogni orizzontale sarebbero i numeri che restano della stessa serie, esclusi $s_1, s_2, \ldots, s_m$.

27. Considerando lo sviluppo del minore H è chiaro, che ogni suo termine è un prodotto di m elementi dove i primi indici formano una permutazione de' numeri $r_1, r_2, \ldots, r_m$, ed i secondi una permutazione de' numeri $s_1, s_2, \ldots, s_m$; ed il completo sistema de' termini può dedursi dal termine principale

$$a_{r_1, s_1} a_{r_2, s_2} a_{r_3, s_3} \ldots a_{r_m, s_m}$$

permutando in tutti i modi o solo i primi indici, o solo i secondi. Per assegnare i segni converrebbe formare per ogni termine le due corrispondenti permutazioni di orizzontali e di verticali (n.° 19); ma possiamo ancora dispensarcene, e contare invece le inversioni nelle stesse permutazioni de' primi e secondi indici (n.° 3); da che risulta in fine che i minori del primitivo **P** si sviluppano esattamente con le stesse norme del primitivo; e possono generalmente rappresentarsi con

$$\Sigma \pm a_{r_1, s_1} a_{r_2, s_2} a_{r_3, s_3} \ldots a_{r_m, s_m}$$

28. Due determinanti minori di uno stesso primitivo diconsi *conjugati*, quando le orizzontali e le verticali, le quali concorrono alla formazione dell'uno, sono inversamente definite da'medesimi numeri di ordine delle verticali e delle orizzontali, le quali concorrono alla formazione dell'altro.

Se i numeri di ordine delle orizzontali, le quali concorrono a formare un determinante minore, sono gli stessi di quelli delle verticali, questo minore è il conjugato di sè stesso, e chiamasi *minore principale*. Dunque le orizzontali e verticali del primitivo, le quali concorrono a formare un determinante minore principale, sono a coppia conjugate (n° 17); donde segue che i suoi principali elementi son tali ancora nel primitivo; ed il suo complemento è anch'esso un determinante minore principale.

29. Chiamiamo *caratteristica* di un determinante minore la somma de'numeri di ordine di tutte le orizzontali e verticali del primitivo, le quali concorrono a formarlo; così dinotando con $\varkappa$ la caratteristica del minore H considerato nel n.° 26 sarà

$$\varkappa = r_1 + r_2 + \cdots + r_m + s_1 + s_2 + \cdots + s_m.$$

Ora se s'indica con $\varkappa'$ la caratteristica del complemento di H si ha evidentemente

$$\varkappa + \varkappa' = 2\,(1 + 2 + \cdots + n);$$

e ne risulta, che: *le caratteristiche di due minori complementali sono o pari ad un tempo, o dispari ad un tempo.*

È chiaro che la caratteristica di qualunque minore del primitivo P è sempre uguale alla somma di tutti gl'indici di ogni termine dello stesso minore; ma nel calcolarla gioverà far capo dal termine principale. La caratteristica di un elemento $a_{r,s}$ è la somma degl'indici r ed s.

30. I complementi dei determinanti minori saranno distinti in *algebrici* ed *ordinarii*. È *algebrico* il complemento se si riguarda come affetto dal + o dal —, secondochè è pari o impari la sua caratteristica, o quella dello stesso minore; ed è *ordinario* quando si prescinde da questo segno; ma in tal caso l'aggiunto di ordinario sarà quasi sempre omesso.

Quindi, se H dinoti un determinante minore qualunque, K il suo complemento ordinario, e $\varkappa$ la caratteristica sia dell'uno, sia dell'altro, il complemento algebrico di H sarà espresso da $(-1)^{\varkappa}$K; e viceversa quello di K lo sarà da $(-1)^{\varkappa}$H. Si comprende dopo ciò esser lecito di accrescere o diminuire la caratteristica di qualunque numero pari, ed anche ridurla, a seconda de' casi, a *zero* o ad *uno*.

31. Intorno ai complementi algebrici sono osservabili i seguenti casi particolari:

I. Il complemento algebrico di un elemento prende il $+$ o il $-$ secondochè è pari o impari la somma de' numeri di ordine delle due linee che passano per l'elemento.

II. I complementi algebrici de' successivi elementi di una stessa linea prendono alternativamente il $+$ ed il $-$; a cominciare dal $+$, se il numero di ordine della linea è impari; dal $-$, se pari.

III. Il complemento algebrico di un elemento principale, o di un determinante minore principale prende sempre il segno $+$.

IV. I complementi algebrici di due elementi conjugati, o di due determinanti minori conjugati, prendono sempre segni simili.

32. Passeremo ora ad esporre una proprietà de' minori complementali, che può tenersi come il fondamento della teoria dei determinanti. Sia H, come al numero 26, un determinante minore di grado m del primitivo P, e K il suo complemento, che sarà di grado $n-m$. Tenendo presente la legge, che regola lo sviluppo de' minori del primitivo P, è palese che, se si moltiplicano tra loro gli sviluppi de' complementali H e K, ogni termine del prodotto HK, astrazion fatta dal segno, è un termine di P, perchè formato di n elementi, ne' quali tanto i primi quanto i secondi indici formano permutazioni de' numeri $1, 2, 3, \ldots, n$. In conseguenza, se si dinotano con h e k due termini qualunque di H e K, affetti da' segni rispettivi, chiamando ε il numero totale delle inversioni che i primi e secondi indici di h fanno rispettivamente co' primi e secondi indici di k, l'espressione $(-1)^{\varepsilon}hk$ sarà un termine di P, col segno che gli compete; ma si ha (n.° 5)

$$\varepsilon = r_1 + r_2 + \cdots + r_m + s_1 + s_2 + \cdots + s_m - m(m+1) = \varkappa - m(m+1);$$

adunque, essendo pari il numero $m(m+1)$, questa espressione si muta in $(-1)^{\varkappa}hk$; e ne segue che per cangiare i termini del prodotto HK in termini del determinante primitivo P, basta moltiplicarli per $(-1)^{\varkappa}$. Quindi risulta che la stessa espressione $(-1)^{\varkappa}$HK è una parte del primitivo; e si ha perciò la seguente proposizione:

Il prodotto di due minori complementali, preso col $+$, *o col* $-$, *secondochè è pari o impari la caratteristica dell' uno o dell' altro, è una parte del primitivo.* Ovvero: *Il prodotto di un determinante minore pel suo complemento algebrico è una parte del primitivo.*

33. Se uno de' minori si riduce ad un elemento, il teorema equivale a dire, che: *Il prodotto di un elemento pel suo complemento, preso col* $+$ *o col* $-$, *secondochè è pari, o impari la caratteristica dell'elemento, è una parte del determinante primitivo.* Ovvero: *Il prodotto di un elemento di un determinante pel suo complemento algebrico è una parte dello stesso determinante.*

34. Il complemento di un determinante minore può anche dirsi complemento di qualunque termine dello stesso minore, poichè in effetti risulta dal primitivo sopprimendone le linee che passano pe' fattori del termine. Più generalmente può dirsi che un prodotto di m elementi del primitivo ha per complemento il minore che ne risulta sopprimendone le orizzontali e verticali che passano pe' fattori; e per caratteristica la somma de' loro numeri di ordine; ed allora per la dimostrazione del teorema precedente è manifesto, che:

Se si moltiplica il prodotto algebrico di m elementi di un determinante pel suo complemento algebrico si ha una parte del determinante primitivo.

§. IV.

PROPRIETÀ GENERALI DE' DETERMINANTI.

35. Se gli elementi di una linea di un determinante di grado n si moltiplicano pe' rispettivi complementi algebrici, si ottengono n parti del primitivo (n° 33) tra loro diverse; e poichè i termini di ciascuna sono $1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)$; così le n parti ne danno in tutto $1\times2\times3\times\cdots\times n$, quanti sono i termini del primitivo; il quale perciò è uguale alla loro somma. Quindi:

Ogni determinante equivale alla somma de'prodotti di tutti gli elementi di una linea pe' rispettivi complementi algebrici.

O, in altri termini:

Ogni determinante equivale alla somma algebrica de' prodotti di tutti gli elementi di una linea pe' rispettivi complementi, presi alternativamente col + e col —; a cominciare dal +, se il numero di ordine della linea è impari; dal — se pari.

36. Questo teorema permette di sviluppare i determinanti in un modo assai più rapido di quello che risulta dalla definizione, poichè la sua ripetuta applicazione conduce a determinanti di gradi sempre più bassi. Eccone degli esempii:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ v & x & y \\ v' & x' & y \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ u & x & y \\ u' & x' & y \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ u & v & y \\ u' & v' & y' \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ u & v & x \\ u' & v' & x' \end{vmatrix}$$

$$= ab' \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} - ac' \begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} + ad' \begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix} - ba' \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} + bc' \begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} - bd' \begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix}$$

$$+ ca' \begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} - cb' \begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} + cd' \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} - da' \begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix} + db' \begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix} - dc' \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

$$= (ab'-ba')(xy'-yx') - (ac'-ca')(vy'-yv') + (ad'-da')(vx'-xv')$$
$$+ (bc'-cb')(uy'-yu') - (bd'-db')(ux'-xu') + (cd'-dc')(uv'-vu').$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = (x'y''-y'x'') - (xy''-yx'') + xy'-yx'.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+3)+4(-2+9)+6(-1-6)=0.$$

37. Considerando il determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

converremo, in generale, di dinotare con $A_{r,s}$ il complemento algebrico dell'elemento $a_{r,s}$; ed allora il teorema precedente si tradurrà nell'una o l'altra delle formole

$$P=a_{r,1}A_{r,1}+a_{r,2}A_{r,2}+a_{r,3}A_{r,3}+\ldots+a_{r,n}A_{r,n},$$

$$P=a_{1,r}A_{1,r}+a_{2,r}A_{2,r}+a_{3,r}A_{3,r}+\ldots+a_{n,r}A_{n,r},$$

secondochè si applica ad una orizzontale o ad una verticale, e nelle quali l'indice r può prendere tutt'i valori 1, 2, 3, . . , n.

38. Se si trasforma un determinante scambiandovi tra loro due linee parallele contigue, si riconosce subito che il complemento ordinario di uno stesso elemento appartenente ad una delle due linee scambiate è lo stesso nel primitivo, e nel nuovo determinante; ma è chiaro che, se questo complemento si riguardi come algebrico, esso allora prenderà segni contrarii nei due determinanti. Posto ciò, se nel determinante P si scambiano per esempio tra loro la prima e la seconda verticale, chiamando P' il nuovo determinante avremo

$$P'=\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & . & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,2} & a_{n,1} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ora è evidente che se i determinanti P e P' si sviluppano secondo gli elementi di una delle due verticali scambiate, questi sviluppi saranno uguali, ma di segni contrarii; così sviluppando il determinante P secondo gli elementi della prima verticale si ha

$$P=a_{1,1}A_{1,1}+a_{2,1}A_{2,1}+a_{3,1}A_{3,1}+\ldots a_{n,1}A_{n,1},$$

mentre sviluppando P' secondo gli elementi della seconda verticale si avrebbe

$$P'=-a_{1,1}A_{1,1}-a_{2,1}A_{2,1}-a_{3,1}A_{3,1}-\ldots-a_{n,1}A_{n,1};$$

e ne risulta $P=-P'$. Segue da ciò che lo scambio tra due linee parallele successive non altera punto il valore assoluto di un determinante, ma gli fa prendere un segno contrario. Adunque se una linea di un determinante si trasporti parallelamente a sè stessa dopo quella che immediatamente la segue o a dritta o a sinistra, il determinante non fa che mutar di segno; ma quindi è chiaro che trasportandola invece dopo due linee, il determinante riprende il segno di prima; dopo tre tornerebbe a cambiar di segno; e così di seguito alternativamente; di modo che, in generale, il determinante ritiene o muta il segno secondochè una linea vi è trasportata dopo un numero pari o un numero impari di linee; e perciò se si dinota con P′ ciò che diviene il determinante P, quando una linea vi è trasportata parallelamente a sè stessa dopo r linee, si avrà

$$P'=(-1)^r P.$$

Dietro questa proprietà de' determinanti, ragionando precisamente come al numero 8 a riguardo delle permutazioni, si conchiude senza più il seguente teorema:

Un determinante muta solo di segno e non di valore scambiandovi tra loro due linee parallele qualunque.

39. Segue da questo teorema che un determinante non muta di valore assoluto, comunque si scambiano tra loro e le verticali e le orizzontali, ma ritiene o muta il segno, secondochè è pari o impari il numero totale degli scambii. È chiaro che in riguardo al determinante P questo numero è pari o impari a seconda del numero totale delle inversioni ne' primi indici di una verticale, e nei secondi di una orizzontale; o, ch'è lo stesso, ne' primi e secondi indici del termine principale del nuovo determinante; e perciò chiamando P′ questo determinante, ed ε il numero totale delle dette inversioni, si avrà in generale

$$P'=(-1)^{\varepsilon} P.$$

Intorno a questa formola noteremo due casi particolari:

I. Se il determinante P′ sia formato disponendo in ordine inverso o le sole orizzontali, o le sole verticali del determinante P, avremo (n° 2), $\varepsilon=\frac{1}{2}n(n-1)$; e quindi $P'=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}P$.

II. S'indichi con $\varkappa$ la caratteristica di un minore di grado m del primitivo P, e per esempio del minore comune alle matrici di orizzontali e di verticali definite rispettivamente da' numeri di ordine $r_1, r_2, .., r_m$ ed $s_1, s_2, .., s_m$; allora supponendo che P' sia formato da P, portandovi in primo luogo ed in ordine diretto quelle orizzontali e quelle verticali, si avrà evidentemente (n^i 4 e 32) $\varepsilon = \varkappa - m(m+1)$; e però essendo pari il numero $m(m+1)$, risulterà $P' = (-1)^{\varkappa} P$; ma è importante di osservare che il minore considerato in P si trova riprodotto in P' come il principale minore determinante comune alle matrici costituite con le prime m orizzontali, e con le prime m verticali.

40. Il teorema del n.° 35, o le formole del n.° 37 che gli equivalgono, rendono senza più manifesta la seguente proposizione.

Un fattor comune a tutti gli elementi di una stessa linea può mettersi in veduta come moltiplicatore del determinante, o può darsi come fattore agli elementi di un' altra linea. Quindi, se una linea si moltiplichi o divida per una quantità qualunque, il determinante sarà rispettivamente moltiplicato o diviso per questa quantità. Ed un determinante non cambia di valore, se, moltiplicando una linea per una data quantità, si divida ad un tempo un' altra linea per la stessa quantità.

Quindi si ha per esempio

$$\begin{vmatrix} a & bx & cy \\ d & ex & fy \\ g & hx & iy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ay & b & c \\ dxy & ex & fx \\ gy & h & i \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} .$$

Può osservarsi che un determinante cambia solo di segno, se si cambia il segno ad una linea qualunque (n° 16, III); ma più generalmente è chiaro che il cambiamento di segno a quante linee si vogliano non altera il valore assoluto del determinante, il quale poi ritiene o muta il segno, secondochè è pari o impari il numero delle linee alle quali si cambia il segno.

41. È conseguenza immediata del n.° 35 che un determinante è nullo, se sono nulli tutti gli elementi di una stessa linea. Risulta inoltre dal teorema del num.° 38 che anche nullo è un determinante in cui vi siano due linee parallele identiche, perchè, scam-

biandole tra loro, il determinante resta qual'era, e non può, come dovrebbe, cambiar di segno; ma or segue dall' ultima proposizione che avviene altrettanto, se le due linee sono invece equivalenti (n.° 16, IV), potendo sempre ridursi ad essere identiche. E perciò:

È nullo un determinante in cui sono nulli tutti gli elementi di una stessa linea; ed è anche nullo se due linee parallele sono o identiche, o equivalenti.

Così, per esempio, si riconosce a colpo d'occhio, e senza calcolo, che è nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

già considerato in ultimo luogo al n.° 36, bastando perciò di osservare che le due prime verticali sono equivalenti.

42. Tra casi particolari cui dà luogo il teorema del num. 35 è osservabile il seguente:

Se sono nulli gli elementi di una linea, eccetto un solo, il determinante sarà uguale al prodotto del detto elemento pel suo complemento algebrico; ovvero al prodotto dell'elemento per lo stesso determinante, nel quale però sia messa l'unità in luogo dell'elemento.

Esempii

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & f & g \\ t & u & 0 & v \\ x & y & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & f & 0 \\ t & u & 0 & v \\ x & y & 0 & z \end{vmatrix} = f \begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & u & 0 & v \\ x & y & 0 & z \end{vmatrix} = -f \begin{vmatrix} a & b & c \\ t & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \cdot$$

43. Segue da ciò che in un determinante è lecito di sopprimere, o inserire ovunque due linee di nome diverso, purchè si adempia

a due condizioni: I° che le due linee abbiano l'unità per elemento comune, e nulli tutti gli altri di una di esse, qualunque siano quelli dell'altra; II° che si dia al nuovo determinante il segno che conviene al complemento algebrico dell'elemento comune: condizione alla quale è superfluo di aver riguardo, se le due linee sono conjugate (n° 17 e 31, III). Intanto, siccome l'inserimento di coppie di linee conjugate può continuarsi a piacere, risulta che:

Un determinante di qualunque grado può sempre farsi apparire come un determinante di grado superiore assegnato, inserendovi un numero conveniente di coppie di linee conjugate.

44. Supponendo che in un determinante siano nulli tutti gli elementi da una stessa parte di una diagonale, la ripetuta applicazione del teorema del n.° 42 dimostrerà, che:

Un determinante di grado n *in cui sono nulli tutti gli elementi da uno stesso lato di una diagonale equivale al prodotto degli elementi della diagonale, preso col* $+$, *se si tratta della diagonale principale; e, se si tratta dell'altra, col segno definito dal simbolo* $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ t & e & 0 & 0 \\ u & x & h & 0 \\ v & y & z & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} = aehk.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ c & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & t \\ x & u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -x^3.$$

45. Se gli elementi di una linea di un determinante si moltiplichino ordinatamente pe' complementi algebrici de' corrispondenti elementi di un'altra linea parallela alla prima, la somma de' prodotti esprime il determinante nella ipotesi che le due linee siano identiche, e quindi è nulla. Dunque:

La somma de' prodotti degli elementi di una linea di un determinante pe' complementi algebrici de' corrispondenti elementi di un' altra linea parallela alla prima, è identicamente nulla.

Così, se gli elementi della prima orizzontale del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

si moltiplicano pe' complementi algebrici de' corrispondenti elementi della seconda, avremo

$$-a\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$=-a(bc''-cb'')+b(ac''-ca'')-c(ab''-ba'')=0;$$

e ciò come se si applicasse il teorema del n° 35 alla seconda orizzontale del determinante identicamente nullo

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

46. Dopo ciò possiamo affermare che ciascuna delle espressioni

$$a_{r,1}A_{s,1}+a_{r,2}A_{s,2}+\cdots+a_{r,n}A_{s,n} \;,$$

$$a_{1,r}A_{1,s}+a_{2,r}A_{2,s}+\cdots+a_{n,r}A_{n,s} \;,$$

equivale al determinante P, se sono uguali i valori degl' indici r ed s; ed è nulla nel caso opposto.

47. Supponiamo ora che tutti gli elementi di una stessa linea del determinante P siano espressioni polinomie di ugual numero di termini, e pongasi per fissar le idee

$$a_{r,1}=a_1+b_1 \;,\; a_{r,2}=a_2+b_2 \;,\; \ldots \;,\; a_{r,n}=a_n+b_n \;;$$

allora avremo

$$P=(a_1+b_1)A_{r,1}+(a_2+b_2)A_{r,2}+\cdots+(a_n+b_n)A_{r,n} \;;$$

o sott' altra forma

$$P=(a_1A_{r,1}+a_2A_{r,2}+\cdots+a_nA_{r,n})+(b_1A_{r,1}+b_2A_{r,2}+\cdots+b_nA_{r,n}) \,.$$

Ora è chiaro che le due parti del secondo membro esprimono rispettivamente ciò che diviene il determinante P, quando agli elementi della r^{ma} orizzontale si sostituiscano una volta le quantità $a_1, a_2, .., a_n$, ed un'altra volta le quantità $b_1, b_2, .., b_n$; il che dimostra che quel determinante può essere decomposto in due parziali determinanti. Ma in generale è evidente che, se gli elementi della linea che si considera sono polinomii ognuno di m termini, il determinante P potrebbe decomporsi in m parziali determinanti, ciascun dei quali si forma da P con solo ridurvi ogni volta la linea di elementi polinomii ad una linea di monomii, presi uno per ogni polinomio, a patto che ogni monomio non sia impiegato che una sola volta; e quindi risulta, che:

Un determinante in cui gli elementi di una linea sono polinomii di m *termini può decomporsi in* m *parziali determinanti, ognun de'quali è ciò che diviene il primitivo, riducendo ogni volta la linea complessa ad una linea di monomii, presi uno per polinomio; ma impiegando ogni monomio una volta sola.*

48. Si comprende che questo teorema è sempre applicabile ancorchè i polinomii non abbiano uno stesso numero di termini, potendosi rimpiazzar con lo *zero* ogni termine che manca. E si comprende inoltre che la decomposizione, cui da luogo, può regolarsi in varie maniere, essendo arbitraria la scelta de' monomii da' quali va formata la linea di ogni parziale determinante; ma nelle applicazioni giova disporre i termini dei polinomii della linea complessa in modo che tutti quelli che vogliono destinarsi a formar la linea di un parziale determinante vi abbiano lo stesso posto, cioè siano o tutti primi, o tutti secondi, etc. Allora la linea complessa può riguardarsi come somma di più linee semplici; ed i parziali determinanti si otterranno riducendo ogni volta la linea complessa ad una delle sue componenti.

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & b & x+y+z \\ a' & b' & x'+y'+z' \\ a'' & b'' & x''+y''+z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & x \\ a' & b' & x' \\ a'' & b'' & x'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & y \\ a' & b' & y' \\ a'' & b'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & z \\ a' & b' & z' \\ a'' & b'' & z'' \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c+x \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c+x \\ a' & b' & c'+0 \\ a'' & b'' & c''+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} .$$

Quando nel determinante vi sono più linee complesse ciascuna può dar luogo ad una somigliante decomposizione. In generale, se m sono le linee complesse, e le loro componenti siano rispettivamente in numero di $r_1, r_2, \ldots, r_m$, i parziali determinanti saranno $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_m$. Supposto che il primitivo sia di grado n, e che ogni linea sia complessa e formata di m linee semplici, saranno mn i parziali determinanti, i quali possono ottenersi combinando le linee semplici ad n ad n, a patto di prenderne una per ogni complessa, e che in ogni parziale determinante le n linee semplici siano disposte con lo stesso ordine di successione, che hanno nel determinante totale le linee complesse alle quali esse rispettivamente appartengono.

49. Invertendo il teorema di poc' anzi si ha la seguente proposizione:

Più determinanti, i quali differiscono solo per una linea di ugual nome e di ugual posto, possono riunirsi in un solo determinante, il quale ugualmente non differirà da ciascuno degli altri che nella linea dello stesso nome e dello stesso posto; e questa linea nel determinante totale sarà la somma di tutte le linee differenti dei parziali determinanti:

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & u \\ a' & u' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & v \\ a' & v' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & u+v+x \\ a' & u'+v'+x' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b & e \\ a' & b' & e' \\ a'' & b'' & e'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & cx^2+dx+e \\ a' & b' & c'x^2+d'x+e' \\ a'' & b'' & c''x^2+d''x+e'' \end{vmatrix}.$$

50. Se ad una linea di un determinante se ne aggiunga o tolga un'altra dello stesso nome, si ha un nuovo determinante con una linea complessa formata di due linee semplici; ed è chiaro che, decomponendosi in due parziali determinanti, l'uno di essi riproduce il primitivo, e l'altro è nullo, essendovi due linee identiche. Così se alla prima verticale del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

si aggiunga o tolga per esempio la seconda verticale, risulta

$$\begin{vmatrix} a & \pm b & b & c \\ a' & \pm b' & b' & c' \\ a'' & \pm b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

De' due determinanti del secondo membro il primo è il dato determinante, e l'altro è nullo, perchè la prima verticale è identica alla seconda. Se la verticale aggiunta o tolta alla prima fosse moltiplicata per una quantità arbitraria, la conchiusione non sarebbe diversa, perchè nel secondo determinante le due prime verticali sarebbero equivalenti. Laonde si ha in generale, che:

Un determinante non cangia di valore se ad una linea si aggiungano o tolgano altre linee dello stesso nome, anche moltiplicate o divise per quantità arbitrarie.

51. Questo teorema, oltre alla importanza che ha quasi ad ogni passo nelle applicazioni de' determinanti, può farsi sempre servire a rendere più agevole il calcolo de' determinanti numerici. Sia per esempio da calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Con l'aiuto del teorema precedente possiamo successivamente trasformarlo in quelli che seguono, ad elementi più semplici;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} \ (2), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \ (3), \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (4),$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (5), \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ (6).$$

Il determinante (2) è dedotto da (1) sottraendo l' ultima dalle altre verticali dopo averla rispettivamente moltiplicata per 2, per 3, per 4. Nel (2) l'ultima verticale si può rendere più semplice, sottraendone la somma di tutte le altre; ed in tal guisa si ha il determinante (3) in cui sono uguali gli elementi della prima orizzontale, circostanza ch'è utile di avere in mira nel calcolo dei determinanti numerici. Sottraendo nel (3) la prima verticale da ciascuna delle altre si ottiene il (4), nel quale è lecito di sopprimere la prima orizzontale e la prima verticale (n.° 43) e si ha così il determinante (5), ch'è di 3.° grado. Aggiungendo in questo determinante l'ultima alla prima orizzontale, e sottraendola dalla seconda moltiplicata per 2, si passa al determinante (6), nel quale si può sopprimere l'ultima orizzontale e l'ultima verticale; il che infine conduce al determinante di 2.° grado

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}$$

che si calcola immediatamente, e ne risulta che il proposto determinante equivale a -15. Si comprende del resto che siffatte trasformazioni e riduzioni possono essere regolate in diverse maniere; e basta un poco di abitudine per riconoscere le meglio convenienti.

52. Ma per rendere sempre più familiare l'ultimo teorema, soggiungiamo alcuni esempii, i quali, mentre danno luogo a notevoli trasformazioni, servono d'altra parte ad importanti applicazioni sia di geometria, sia di analisi.

I. Supposto che gli elementi di una linea di un determinante siano tutti uguali ad 1, sarà lecito di accrescere o diminuire di una medesima quantità arbitraria tutti gli elementi di ogni altra linea dello stesso nome, poichè ciò equivale ad aggiugnerle o toglierle la linea delle unità, moltiplicata per la quantità arbitraria. Ora, se il determinante è della forma

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} & 1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

la detta trasformazione potrà essere praticata tanto per orizzontali, quanto per verticali, e quindi supponendo due serie di quantità arbitrarie $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n$ e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, il dato determinante si trasforma nel seguente

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\beta_1+\gamma_1 & a_{1,2}+\beta_2+\gamma_1 & . & a_{1,n}+\beta_n+\gamma_1 & 1 \\ a_{2,1}+\beta_1+\gamma_2 & a_{2,2}+\beta_2+\gamma_2 & . & a_{2,n}+\beta_n+\gamma_2 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1}+\beta_1+\gamma_n & a_{n,2}+\beta_2+\gamma_n & . & a_{n,n}+\beta_n+\gamma_n & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

II. Consideriamo il determinante di grado n

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & . & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & . & a_n^3 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

in cui $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sono n quantità arbitrarie, e ciascuna verticale è costituita dalle successive potenze di una di esse dal grado *zero* al grado $n-1$. Ora, se si trasforma una verticale, per esempio la r^{ma}, togliendone un'altra a piacere, come la s^{ma}, cade sotto l'occhio che la medesima acquista il fattore $a_r - a_s$, il quale perciò sarà un divisore del determinante Δ; ma quindi risulta che questo determinante è divisibile per tutte le differenze a due a due delle n quantità di cui si tratta; e perciò lo sarà anche pel prodotto di tutte queste differenze. È chiaro intanto che un tal prodotto è una funzione omogenea delle dette quantità, di grado $\frac{1}{2}n\,(n-1)$; e siccome il determinante Δ è anch'esso una funzione omogenea dello stesso grado delle quantità medesime, ne segue che il determinante ed il prodotto non possono differire che per un fattor numerico, il quale può determinarsi esaminando uno stesso termine nell'una e nell'altra funzione. Per comporre con metodo ordinato il prodotto di tutte le differenze delle quantità date a due a due, senza mancarne alcuna, converremo di togliere successivamente ogni termine della serie $a_1, a_2, a_3, .., a_n$ da tutti gli altri che lo seguono; ed allora adottando, come si usa ordinariamente, il simbolo $\Pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ per indicare il prodotto di tutte le differenze a due a due di queste quantità, regolate come si è detto, avremo

$$\Pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \left.\begin{aligned} (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\times\cdots\times(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)(a_4-a_2)\times\cdots\times(a_n-a_2) \\ (a_4-a_3)\times\cdots\times(a_n-a_3) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (a_n-a_{n-1}) \end{aligned}\right\}$$

Attualmente, se si moltiplicano i soli primi termini di tutte le differenze, si ha l'espressione

$$a_2 a_3^2 a_4^3 a_5^4 \times\cdots\times a_n^{n-1}$$

come un termine del prodotto, affetto dal coefficiente $+1$, il quale evidentemente non può contrarsi con altri; ma questa espressione si ritrova come termine principale nel determinante Δ, affetto ancora dal cofficiente $+1$; dunque da ciò che si è detto risulta che il determinante ed il prodotto sono identicamente uguali; vale a dire si ha

$$\Delta = \Pi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Così avremo per esempio

$$\Pi(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

$$\Pi(a_1, a_2, a_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

etc. etc. etc.

III. Supponendo il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d^2 & c^2 \\ 1 & d^2 & 0 & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

potremo, senza alterare il suo valore, moltiplicare le quattro orizzontali per bcd; e poi dividere ordinatamente per cd, bd, bc, tanto le tre ultime orizzontali, quanto le tre ultime verticali, poichè ciò equivale a moltiplicare e dividere nel tempo stesso per $b^4c^4d^4$ il dato determinante, il quale in conseguenza per tal guisa si muta nell'altro

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Or si osservi che nella forma (1) il determinante resta immutato cambiando il segno sia a b, sia a c, sia a d; e però sarà lecito di praticare siffatti cangiamenti di segno anche nella forma (2). Intanto se nel determinante (2) alla prima orizzontale si aggiungano tutte le altre, quella orizzontale acquista il fattore $b+c+d$, il quale adunque è un divisore del determinante; ma poi risulta dalla osservazione di poc' anzi che il determinante è ancora divisibile per $-b+c+d$, per $b-c+d$, e per $b+c-d$; ed in conseguenza sarà divisibile pel prodotto

$$(b+c+d)\,(b+c-d)\,(b-c+d)\,(-b+c+d).$$

D'altra parte, siccome questo prodotto di quattro fattori lineari omogenei è, al pari del determinante, una funzione omogenea di 4.° grado delle b, c, d, ne risulta che il prodotto ed il determinante non possono differire che per un fattor numerico; ma esaminando uno stesso termine nelle due funzioni, come per esempio d^4, vedremo che nel prodotto questo termine è affetto dal coefficiente -1, e nel determinante dal coefficiente $(-1)^{\frac{1}{2}4.3}=+1$ (n° 24):

Segue da ciò che il prodotto col segno cambiato è algebricamente uguale al proposto determinante; e si ha quindi in diverse forme

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d^2 & c^2 \\ 1 & d^2 & 0 & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)(-b+c+d).$$

È noto dall'applicazione dell'algebra alla geometria che tal prodotto col segno mutato esprime sedici volte il quadrato della superficie del triangolo di lati b, c, d; e quindi, anche ciascuno dei determinanti, col segno cambiato, esprimerà sedici volte il quadrato della superficie dello stesso triangolo; ma queste relazioni tra determinanti e diverse figure di geometria saranno direttamente dedotte nelle applicazioni, senza farle dipendere da espressioni già conosciute.

IV. In un modo presso a poco consimile si dimostra facilmente la seguente eguaglianza

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

Di fatti aggiungendo alla prima orizzontale del determinante tutte le altre, si vede ch'essa acquista il fattore $a+b+c+d$, il quale perciò è un divisore dello stesso determinante. Se poi dalla somma della prima e della seconda orizzontale si tolga quella della terza e della quarta, si riconosce come un altro divisore $a+b-c-d$. Inoltre se dalla somma della prima e della terza si tolga quella della seconda e della quarta, si vedrà nascere ancora il divisore $a-b+c-d$. E finalmente dalla somma della prima e quarta, togliendo quella della seconda e terza, si trova parimenti come divisore $a-b-c+d$. Potrebbero ancora farsi altre combinazioni, ma, a parte i segni, si tornerebbe ai medesimi divisori. Quindi è manifesto che il determinante è in valore assoluto uguale al prodotto dei quattro divisori messi in veduta; ma siccome nel determinante e nel prodotto il termine a^4 è affetto dal coefficiente $+1$, si conchiude che le due funzioni sono identicamente uguali.

Se in questa eguaglianza si muta il segno ad una delle quattro grandezze a, b, c, d, per esempio ad a, avremo

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d);$$

e quindi risulta da una formola conosciuta che il determinante attuale, col segno mutato, esprime sedici volte il quadrato dell'area del quadrilatero iscrittibile in un cerchio, di lati a, b, c, d. Quando $a=0$ l'ultimo determinante si riduce a quello poco innanzi considerato.

§. V.

DECOMPOSIZIONE DE' DETERMINANTI IN SOMME DI PRODOTTI DI MINORI COMPLEMENTALI.

53. Supposta una matrice formata con m linee parallele di un determinante di grado n, se tutti i minori di grado m compresi in questa matrice si moltiplicano pe' rispettivi complementi algebrici, i prodotti saranno altrettante parti del primitivo tra loro diverse (n° 32), da ciascuna delle quali risulta un numero di termini espresso (n° 20) da

$$1\times2\times3\times\cdot\cdot\times m\times1\times2\times3\times\cdot\cdot\times(n-m);$$

e siccome i minori sono al numero di (n° 18)

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\times2\times3\times\cdot\cdot\times m},$$

ne segue che tutti i termini nascenti dalle dette parti saranno $1\times2\times3\times\cdot\cdot\times n$, quanti sono i termini del primitivo, il quale perciò è uguale alla loro somma. Quindi risulta che:

Ogni determinante equivale alla somma de' prodotti di tutti i minori compresi nella matrice formata con m *linee parallele qualunque pe' rispettivi complementi algebrici.*

Esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

54. Quantevolte nella matrice de' minori, che ora per fissar le idee supporremo formata dalle prime m orizzontali del dato determinante, vi siano alcune verticali che abbiano tutti gli elementi nulli, ed avvenga che il numero delle rimanenti sia minore di m, i detti minori saranno tutti nulli, perchè in ciascuno vi è per lo meno una verticale di elementi nulli; e perciò anche nullo è lo stesso primitivo. Se poi il numero delle rimanenti verticali sia uguale ad m, il primitivo sarà uguale all'unico prodotto del minore formato con queste m verticali pel suo complemento algebrico. Così si ha per esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 & 0 & 0 \\ a'' & b'' & 0 & 0 & 0 \\ t & u & v & x & y \\ t' & u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 & 0 \\ t & u & v & x & y \\ t' & u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

55. La proprietà dimostrata conduce all'altra che segue:

La somma de'prodotti di tutti i minori compresi in una matrice di m *linee parallele di un determinante pe' complementi algebrici dei loro omologhi compresi in un' altra matrice di* m *linee dello stesso nome, è identicamente nulla.*

Imperocchè ciò torna a supporre che nel dato determinante vi siano due o più linee identiche, e quindi è nullo. Così supposto il determinante del n.° 53, ed applicando per esempio il teorema ai minori compresi nella matrice formata con le due prime orizzontali, ed ai complementi di quelli compresi nella matrice costituita dalla seconda e quarta orizzontale, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} -\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c&d\\x&y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b&d\\v&y\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&d\\a'&d'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b&c\\v&x\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b&c\\b'&c'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&d\\u&y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b&d\\b'&d'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&c\\u&x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}c&d\\c'&d'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&b\\u&v\end{vmatrix}\end{array}\right\}=0$$

Ora il primo membro di questa identità non è altra cosa che lo sviluppo che si otterrebbe applicando il teorema del n.° 53 ai minori compresi nella matrice formata con le due prime orizzontali del determinante identicamente nullo

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \\ u & v & x & y \end{vmatrix}.$$

56. Per tradurre in formole i due teoremi, che precedono, è uopo adottare una convenzione, la quale permetta di indicare ed individuare di una maniera concisa i minori di un primitivo di

grado n, compresi in una matrice di m linee parallele; ed a tale effetto bisognerà considerare con un certo ordine le combinazioni ad m ad m de' numeri $1, 2, 3, \ldots, n$; che perciò supporremo da ora innanzi composte e distribuite come segue:

I. In ogni combinazione i numeri saranno disposti in ordine diretto (n° 1).

II. Considerando le combinazioni come termini di una serie, scriveremo in primo luogo quelle che cominciano da 1; poi quelle che cominciano da 2; e così di seguito; ma a patto ancora che tra i numeri di qualunque combinazione non debba esservene alcuno più grande di quelli che entrano nella seguente.

Per esempio co' numeri 1, 2, 3, 4, 5, combinati a tre a tre, si forma la serie

$$\left.\begin{array}{cccccc} (1,2,3) & (1,2,4) & (1,2,5) & (1,3,4) & (1,3,5) & (1,4,5) \\ & & & (2,3,4) & (2,3,5) & (2,4,5) \\ & & & & & (3,4,5) \end{array}\right\} \quad (2)$$

in cui ciascuna combinazione prende un posto determinato. Pertanto noi ricorderemo un tal sistema col nome di *sistema ordinato di combinazioni*, contandole per numeri di ordine progressivi $1, 2, 3, \ldots$; ed è poi manifesto che una combinazione è perfettamente definita, quando è dato il suo numero di ordine.

57. Data una matrice di m orizzontali ed n verticali, e supposto $m<n$, combinando le verticali ad m ad m, possiamo dedurne un sistema di determinanti di grado m (n° 18). Ma supposto il sistema *ordinato* delle combinazioni ad m ad m de' numeri $1, 2, 3, \ldots, n$, quel sistema di determinanti potrà dirsi *sistema ordinato de' determinanti della matrice*, ed allora il numero di ordine di una combinazione qualunque diverrà numero di ordine del corrispondente determinante; di modo che per individuare un determinante della matrice, basterà assegnarne il numero di ordine.

In simil guisa da un determinante di grado n può dedursi un *sistema ordinato di matrici*, combinando ad m ad m sia le orizzontali sia le verticali; ed il numero di ordine di una combinazione numerica sarà numero di ordine della corrispondente matrice; assegnato il quale, essa sarà definita ed individuata.

58. Ciò premesso, siccome ogni minore di grado m è un determinante comune ad una matrice di m orizzontali del primitivo, e ad una matrice di m verticali (n° 26), è chiaro che per individuare un determinante minore basta assegnare i numeri di ordine delle due corrispondenti matrici. In conseguenza adottando un simbolo, come h, per indicare un minore qualunque di grado m, per dinotare in particolare quello comune alla r^{ma} matrice di orizzontali ed alla s^{ma} matrice di verticali, scriveremo $h_{r,s}$; di tal che i minori compresi in queste due matrici saranno rispettivamente rappresentati da $h_{r,1}$, $h_{r,2}$, $h_{r,3}$, ..., $h_{r,v}$ ed $h_{1,s}$, $h_{2,s}$, $h_{3,s}$, ..., $h_{v,s}$, esprimendo v il numero delle combinazioni ad m ad m di n cose. Supposto per concretar le idee che h dinoti un minore di 3° grado in rapporto al primitivo di 5° grado (*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

vedremo per esempio che $h_{3,7}$ accenna il minore compreso nella 3ª matrice di orizzontali e nella 7ª di verticali, le quali, osservando alla serie (2), corrispondono alle combinazioni (1, 2, 5), (2, 3, 4). Trattasi adunque del minore che risulta dalla matrice delle orizzontali 1ª, 2ª, 5ª, e da quella delle verticali 2ª, 3ª, 4ª; e perciò si ha

$$h_{3,7} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Dopo ciò, chiamando $H_{r,s}$ il complemento algebrico del minore

(*) Per rendere più semplice la notazione degli elementi di questo determinante abbiamo soppresso la virgola tra i due indici, e praticheremo lo stesso semprecchè non possa esservi luogo ad equivoco.

$h_{r,s}$, il teorema del numero 53 si tradurrà nell'una o nell'altra delle formole

$$P=h_{r,1}H_{r,1}+h_{r,2}H_{r,2}+\ldots+h_{r,v}H_{r,v}\,,$$

$$P=h_{1,r}H_{1,r}+h_{2,r}H_{2,r}+\ldots+h_{v,r}H_{v,r}\,;$$

secondochè si applica ad una matrice di orizzontali, o ad una matrice di verticali; e quello del numero 55 si traduce in

$$0=h_{r,1}H_{s,1}+h_{r,2}H_{s,2}+\cdots+h_{r,v}H_{s,v}\,,$$

$$0=h_{1,r}H_{1,s}+h_{2,r}H_{2,s}+\cdots+h_{v,r}H_{v,s}\,;$$

ma riunendo i due teoremi può dirsi che ciascuno de' secondi membri equivale al determinante P, se gl'indici r ed s hanno valori uguali, ed è nulla nel caso opposto.

§. VI.

MOLTIPLICAZIONE DE' DETERMINANTI.

59. Se si abbiano due determinanti di gradi uguali, e tutti gli elementi di una linea dell'uno si moltiplichino pe' corrispondenti elementi di una linea dell'altro, la somma de' prodotti si dirà *prodotto delle due linee*. Posto ciò siano i due determinanti di grado n

$$P=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & . & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & c_n \\ . & . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & l_3 & . & l_n \end{vmatrix}\,,\quad Q=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & . & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & . & \gamma_n \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & . & \lambda_n \end{vmatrix}\,;$$

dimostreremo che il loro prodotto si può esprimere con un altro determinante di grado n, che si costruisce come segue « Gli elementi della prima orizzontale del prodotto si hanno moltipli-
» cando la prima orizzontale di P per tutte le orizzontali di Q;
» quelli della seconda, moltiplicando la seconda orizzontale di P
» per tutte le orizzontali di Q; e così di seguito, fino all' ultima
» orizzontale del prodotto, i cui elementi si avranno moltipli-

» cando l'ultima orizzontale di P per tutte le orizzontali di Q. Chiamando K il prodotto, si ha dunque il determinante che quì vedesi scritto di fianco. Gli elementi di K sono tutti polinomii di n termini, ciascun dei quali ha due lettere con lo stesso indice, una latina, l'altra greca: indice che ne' termini di ogni polinomio cresce in ordine naturale da 1 ad n. Quindi ogni verticale di K può riguardarsi come la somma di n linee semplici, nelle quali figurano gl' indici successivi $1, 2, 3, \ldots, n$; ma importa di notare che le n linee semplici della prima hanno per fattori gli elementi della prima orizzontale di Q; quelle della seconda hanno similmente per fattori gli elementi della seconda orizzontale di Q; e così di seguito; donde segue che in tutte le verticali di K sono equivalenti le linee semplici di ugual posto, cioè tutte le prime, tutte le seconde, etc.

$$K = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+\ldots+a_n\alpha_n & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+\ldots+a_n\beta_n & \ldots & a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\ldots+a_n\lambda_n \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3+\ldots+b_n\alpha_n & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3+\ldots+b_n\beta_n & \ldots & b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+b_3\lambda_3+\ldots+b_n\lambda_n \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3+\ldots+c_n\alpha_n & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3+\ldots+c_n\beta_n & \ldots & c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+c_3\lambda_3+\ldots+c_n\lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\ldots+l_n\alpha_n & l_1\beta_1+l_2\beta_2+l_3\beta_3+\ldots+l_n\beta_n & \ldots & l_1\lambda_1+l_2\lambda_2+l_3\lambda_3+\ldots+l_n\lambda_n \end{vmatrix}$$

Dopo ciò decomporremo il determinante K in parziali determinanti ad elementi monomii (n° 47), ciascun de' quali sarà formato da n verticali semplici, prese una per ogni verticale complessa, a patto che nel determinante parziale siano disposte con l'ordine medesimo con cui si succedono nel determinante totale le corrispondenti verticali complesse; il che importa che nelle orizzontali di ogni determinante parziale le lettere greche $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ debbano succedersi in ordine alfabetico. Si rifletta intanto che tra i detti parziali determinanti sono nulli tutti quelli in cui si trova più di una verticale con lo stesso indice; sicchè non restano che i soli determinanti i quali risultano da combinazioni di verticali in cui tutti gl'indici son diversi; e però quelli che corrispondono alle permutazioni de'numeri $1, 2, 3, \ldots, n$. Considerando per esempio il determinante che corrisponde alla permutazione principale, è chiaro ch'esso ha la forma

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\beta_2 & a_3\gamma_3 & . & a_n\lambda_n \\ b_1\alpha_1 & b_2\beta_2 & b_3\gamma_3 & . & b_n\lambda_n \\ c_1\alpha_1 & c_2\beta_2 & c_3\gamma_3 & . & c_n\lambda_n \\ . & . & . & . & . \\ l_1\alpha_1 & l_2\beta_2 & l_3\gamma_3 & . & l_n\lambda_n \end{vmatrix};$$

ma mettendo in veduta i fattori $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \ldots, \lambda_n$, cui daremo l'ordine istesso che hanno in ogni orizzontale, il determinante si muta nel prodotto

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & . & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & . & c_n \\ . & . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & l_3 & . & l_n \end{vmatrix} \times \alpha_1\beta_2\gamma_3\ldots\lambda_n.$$

Or questa espressione può tenersi come tipo generatore di quelle di tutt'i parziali determinanti, poichè se ne deducono permutando in tutt'i modi, e nella stessa maniera gl'indici interni ed esterni. Possiamo tuttavia dispensarci dal permutare gl'indici interni, perchè il valore assoluto del fattore determinante è costante, comunque si permutino le verticali, ed uguale al determinante P; il quale adunque può tenersi come fattor comune a tutte le dette espressioni, purchè all'altro fattore si dia il $+$ o il $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni negl'indici. Ma quindi risulta che il determinante K si trasforma nel prodotto del determinante P per un polinomio i cui termini si deducono dal tipo $\alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3\ldots\lambda_r$, col permutare gl'indici in tutt'i modi, rimanendo ferme le lettere; e dando ad ogni termine il segno che gli compete per la solita regola; ond'è che questo polinomio non è altra cosa che il determinante Q; ed in conseguenza si ha, come dovea dimostrarsi

$$K=PQ.$$

60. Secondo la regola dichiarata per costruire il determinante

K può dirsi che P funziona da moltiplicatore, e Q da moltiplicando; perchè gli elementi di una stessa orizzontale di K si ottengono moltiplicando una stessa orizzontale di P per tutte le orizzontali di Q; ed in questa ipotesi l'elemento s^{mo} della r^{ma} orizzontale di K è il prodotto della r^{ma} orizzontale di P per la s^{ma} orizzontale di Q. Segue da ciò che gli elementi della s^{ma} verticale di K sono i prodotti delle successive orizzontali di P per la s^{ma} orizzontale di Q; e quindi si vede che, se si scambia l'ordine de' fattori, vale a dire se si prende P per moltiplicando e Q per moltiplicatore, altro non si fa che mutare nel determinante prodotto le orizzontali in verticali. Ma è opportuno di osservare che, qualunque sia l'ordine de' fattori, il principale r^{mo} elemento del prodotto si ha sempre moltiplicando le r^{me} orizzontali de' fattori, di tal che i principali elementi del determinante prodotto risultano tutti da orizzontali omologhe de' fattori medesimi.

Abbiamo adunque un metodo di moltiplicazione de' determinanti che può dirsi *per orizzontali;* ma si comprende che uniformemente possono i determinanti moltiplicarsi *per verticali;* ed anche *per orizzontali e verticali.* Così gli elementi del determinante prodotto possono assumere forme e valori diversi; ma il valore algebrico del determinante sarà sempre lo stesso. Ecco alcuni esempii di moltiplicazione di determinanti.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by & ax'+by' \\ a'x+b'y & a'x'+b'y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+a'x' & bx+b'x' \\ ay+a'y' & by+b'y' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax+by+cz & ax'+by'+cz' & ax''+by''+cz'' \\ a'x+b'y+c'z & a'x'+b'y'+c'z' & a'x''+b'y''+c'z'' \\ a''x+b''y+c''z & a''x'+b''y'+c''z' & a''x''+b''y''+c''z'' \end{vmatrix}.$$

61. Con lo stesso metodo si possono moltiplicare i determinanti di gradi disuguali, bastando perciò di ridurre il determi-

nante di grado più basso al grado dell'altro (n.° 43). Così avremo per esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ x' & y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax+by & ax'+by' & c & d \\ a'x+b'y & a'x'+b'y' & c' & d' \\ px+qy & px'+qy' & r & s \\ p'x+q'y & p'x'+q'y' & r' & s' \end{vmatrix}$$

62. Supponendo identici i fattori P e Q si ha un metodo per elevare a quadrato un determinante. In tal caso adunque si ha $K=P^2$; e siccome gli elementi della r^{ma} orizzontale di K sono i prodotti della r^{ma} orizzontale di P per tutte le orizzontali dello stesso P; e d'altra parte in questi prodotti si hanno pure gli elementi della r^{ma} verticale di K (n.° 60), ne risulta che la r^{ma} orizzontale di K è identica alla r^{ma} verticale. Inoltre bisogna osservare che il principale r^{mo} elemento di K è il prodotto della r^{ma} orizzontale di P moltiplicata per sè stessa; e perciò (n^i 17 e 19):

Il quadrato di un determinante è un determinante simmetrico; ed ogni suo principale elemento è una somma di quadrati. Gioverà poi tener presente che il principale r^{mo} elemento è la somma dei quadrati di tutti gli elementi o della r^{ma} orizzontale del determinante radice, o della r^{ma} verticale, secondochè la elevazione a quadrato è operata per orizzontali, o per verticali. Ecco degli esempii:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} aa+bb & aa'+bb' \\ aa'+bb' & a'a'+b'b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aa+a'a' & ab+a'b' \\ ab+a'b' & bb+b'b' \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} aa+bb+cc & aa'+bb'+cc' & aa''+bb''+cc'' \\ aa'+bb'+cc' & a'a'+b'b'+c'c' & a'a''+b'b''+c'c'' \\ aa''+bb''+cc'' & a'a''+b'b''+c'c'' & a''a''+b''b''+c''c'' \end{vmatrix}$$

63. La notazione a doppio indice permette di tradurre in for-

mole il metodo per la moltiplicazione de' determinanti. Sia

$$P=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix},\quad Q=\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . \\ b_{n,1} & b_{n,2} & . & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$K=PQ=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,n} \\ . & . & . & . \\ c_{n,1} & c_{n,2} & . & c_{n,n} \end{vmatrix};$$

così per gli elementi di K avremo l'una o l'altra delle formole

$$c_{r,s}=a_{r,1}b_{s,1}+a_{r,2}b_{s,2}+\,.\,.\,+a_{r,n}b_{s,n}\,,$$

$$c_{r,s}=a_{1,r}b_{1,s}+a_{2,r}b_{2,s}+\,.\,.\,+a_{n,r}b_{n,s}\,,$$

secondochè si opera per orizzontali, o per verticali, e nelle quali gl'indici r ed s possono prendere tutt'i valori $1, 2, \ldots, n$.

Se P e Q sono identici, e quindi $K=P^2$, le formole divengono

$$c_{r,s}=a_{r,1}a_{s,1}+a_{r,2}a_{s,2}+\,.\,.\,+a_{r,n}a_{s,n}\,,$$

$$c_{r,s}=a_{1,r}a_{1,s}+a_{2,r}a_{2,s}+\,.\,.\,+a_{n,r}a_{n,s}\,;$$

e siccome i secondi membri non mutano, cambiando r in s, e viceversa, risulta in ogni caso $c_{r,s}=c_{s,r}$; il che dimostra, com'era già noto, che il quadrato di un determinante è un determinante simmetrico. Per $r=s$ le ultime formole si riducono a

$$c_{r,r}=a^2_{r,1}+a^2_{r,2}+a^2_{r,3}+\,.\,.\,+a^2_{r,n}\,,$$

$$c_{r,r}=a^2_{1,r}+a^2_{2,r}+a^2_{3,r}+\,.\,.\,+a^2_{n,r}\,;$$

e si ritorna così alla conosciuta composizione degli elementi principali del quadrato di un determinante.

64. Applicando il metodo della moltiplicazione de' determinanti a due matrici simili (n.° 16, V) si palesano importanti

risultamenti. Siano le due matrici di m orizzontali ed n verticali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & . & b_n \\ . & . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & l_3 & . & l_n \end{vmatrix} \quad (P) , \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & . & \beta_n \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & . & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (Q)$$

in cui supponiamo che le lettere $a, b, c, \ldots, l$, o le altre $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ siano al numero di m. Per fissar le idee applicheremo a queste matrici il procedimento della moltiplicazione per orizzontali; ma sarà facile di volgere le conchiusioni al caso in cui si operasse per verticali.

È chiaro innanzi tutto che in tal guisa si ottiene una matrice quadrata di grado m; e però, se dinotiamo con L il suo determinante, osserveremo ch'esso differisce dal determinante K del n.° 59 solo in ciò che, mentre K è di grado n, ed ogni sua verticale è la somma di n linee semplici, nel determinante L poi, che è di grado m, ogni verticale è la somma di n linee semplici, numero che per ipotesi è diverso da m. Ora sono da distinguere due casi; o m è maggiore di n; o m è minore di n.

Caso I; $m > n$. In questa ipotesi decomponendo il determinante L in determinanti ad elementi monomii, dovranno combinarsi le sue verticali semplici ad m ad m, col prenderne una per ogni complessa; ma essendo $m > n$, in ogni combinazione di m verticali vi sarà qualche indice ripetuto, cioè in ogni parziale determinante vi saranno verticali equivalenti; quindi ciascuno di essi è nullo; e perciò anche nullo è il determinante L. Adunque, quando $m > n$, si ha $L = 0$.

Caso II; $m < n$. Combinando ad m ad m i numeri $1, 2, 3, \ldots, n$ ogni combinazione comprende numeri tra loro diversi; ed è chiaro che ciascuna dà nella decomposizione di L un sistema di tanti parziali determinanti, quante sono le permutazioni di m cose: sistema che si trasforma nel prodotto di due determinanti di grado m, l'uno formato con le m verticali della matrice (P) definite da'numeri di ordine che entrano nella detta combinazione, e l'altro con le m verticali omologhe della matrice (Q). Intanto siccome ogni combinazione dà luogo ad una somigliante conchiusione, risulta in fine che il determinante L si trasforma nella somma de' prodotti di tutt' i determinanti della matrice (P) pe' rispettivi determinanti omologhi della matrice (Q); e perciò se i determinanti *ordinati* (n.° 57) della prima si dinotino con $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_v$, e quelli della seconda con $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_v$ (indicando v il numero delle combinazioni ad m ad m di n cose), si avrà

$$L = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + \cdots + p_vq_v.$$

Dopo ciò può dirsi che il determinante L equivale al prodotto delle matrici (P) e (Q), e sarà anche lecito di scrivere

$$L = (P) \times (Q);$$

ed intanto, riassumendo ciò che precede, possiamo enunciare la seguente proposizione:

Se si moltiplicano per orizzontali due matrici simili di m *orizzontali ed* n *verticali, il prodotto è nullo, quando è* m>n; *e quando è per l' opposto* m<n, *il prodotto sarà uguale alla somma de' prodotti di tutt' i determinanti di una delle matrici pe' rispettivi determinanti omologhi dell' altra.*

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+a'x' & ay+a'y' & az+a'z' \\ bx+b'x' & by+b'y' & bz+b'z' \\ cx+c'x' & cy+c'y' & cz+c'z' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax+by+cz & ax'+bx'+cz' \\ a'x+b'y+c'z & a'x'+b'y'+c'z' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$$

È ora evidente che le conchiusioni del teorema precedente s'invertono se la moltiplicazione delle matrici sia operata per verticali. In questo caso il prodotto è nullo se $m<n$; e se $m>n$, sarà uguale alla somma de'prodotti di tutt'i determinanti di una delle matrici pe' rispettivi determinanti omologhi dell' altra. Possono valere all'uopo gli stessi due esempii di poc'anzi ; imperciocchè eseguendo nel primo la moltiplicazione per verticali si ha per risultamento il secondo membro dell'altro esempio; mentre, viceversa, eseguendo in questo la moltiplicazione per verticali si ha per risultamento il secondo membro del primo esempio.

65. Supponendo identiche le due matrici, i prodotti dei loro determinanti omologhi divengono i quadrati dei determinanti di una di esse. Allora, se $m>n$ si avrà

$$L=(P)^2=0\,;$$

se poi $m<n$, sarà

$$L=(P)^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2+\ldots+p_v^2\,;$$

ed il teorema si modifica come segue:

Elevando a quadrato per orizzontali una matrice di m *orizzontali ed* n *verticali, il quadrato è nullo, se* m > n; *e se* m < n, *sarà uguale alla somma di quadrati di tutt'i determinanti della matrice.*

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} aa+aa' & ab+a'b' & ac+a'c' \\ ab+ab' & bb+b'b' & bc+b'c' \\ ac+ac' & bc+b'c' & cc+c'c' \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} aa+bb+cc & aa'+bb+cc' \\ aa'+bb'+cc' & a'a'+b'b'+c'c' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2$$

Quest'ultima identità ridotta in forma ordinaria porge la conosciuta relazione

$$(a^2+b^2+c^2)\,(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(ab'-ba')^2+(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2.$$

66. Da ciò che precede, e da'chiarimenti espressi nel n° 59, or si deduce immediatamente il seguente teorema:

Qualunque minore del prodotto **K** *di due determinanti* **P** *e* **Q**, *ottenuto per orizzontali, equivale al prodotto delle matrici parziali di* **P** *e* **Q**, *costituite rispettivamente dalle orizzontali definite dagli stessi numeri di ordine delle orizzontali e delle verticali di* **K**, *le quali concorrono a formare il detto minore.*

Così se **P** e **Q** siano i determinanti del n.° 63 si ha per esempio

$$\begin{vmatrix} c_{2,1} & c_{2,3} \\ c_{4,1} & c_{4,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & . & a_{4,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & . & b_{1,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & . & b_{3,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{3,1} & b_{3,3} \end{vmatrix} + \text{etc.}$$

67. Le convenzioni fatte al numero 57 permettono di tradurre in formole il teorema di poc'anzi. In fatti, se dinotiamo con $h_{r,s}$, $p_{r,s}$, $q_{r,s}$ i minori di grado m de' determinanti **K**, **P**, **Q**, che in ciascuno son comuni alla r^{ma} matrice di m orizzontali ed alla r^{ma} matrice di m verticali, si ha la formola rispondente al teorema

$$k_{r,s} = p_{r,1}\, q_{s,1} + p_{r,2}\, q_{s,2} + \ldots + p_{r,v}\, q_{s,v},$$

nella quale evidentemente è ancor lecito di cambiare ogni minore nel suo complemento ordinario.

68. Quando il minore $k_{r,s}$ del determinante **K** si riduce al 1° grado, vale a dire ad un semplice elemento $c_{r,s}$, il teorema ritorna alla regola per la costituzione degli elementi del prodotto, operato per orizzontali; poichè si riduce a dire che l'elemento $c_{r,s}$ equivale al prodotto della r^{ma} orizzontale di **P** per la s^{ma} orizzontale di **Q**. In questo caso adunque l'ultima formola non è che l'altra già nota (n° 63)

$$c_{r,s} = a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\, b_{s,n};$$

ed ora possiamo aggiungere che in questa formola è lecito di mutare ogni elemento nel suo complemento ordinario; e però se adottiamo i simboli $\gamma_{r,s}$, $\alpha_{r,s}$, $\beta_{r,s}$ per indicare i complementi ordinarii di $c_{r,s}$, $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, si avrà

$$\gamma_{r,s} = \alpha_{r,1}\, \beta_{s,1} + \alpha_{r,2}\, \beta_{s,2} + \ldots + \alpha_{r,n}\, \beta_{s,n}.$$

Ma è agevol cosa di vedere che nella precedente identità ogni elemento può ancora mutarsi nel suo complemento algebrico. In fatti, se i due membri dell'ultima formola si moltiplicano per $(-1)^{r+s}$, e quindi gli esponenti de' termini successivi del secondo membro si aumentino rispettivamente di 2, 4, 6,.., $2n$, il risultamento si potrà scrivere come segue

$$(-1)^{r+s}\gamma_{r+s}=(-1)^{r+1}\alpha_{r,1}\times(-1)^{s+1}\beta_{s,1}+(-1)^{r+2}\alpha_{r,2}\times(-1)^{s+2}\beta_{s,2}+\\ \cdots+(-1)^{r+n}\alpha_{r,n}\times(-1)^{s+n}\beta_{s,n};$$

e tenendo presente la solita notazione de'complementi algebrici, si vede che questa formola equivale a

$$C_{r,s}=A_{r,1}\,B_{s,1}+A_{r,2}\,B_{s,2}+\cdots+A_{r,n}B_{s,n}\ ;$$

donde poi si deduce che:

Il complemento algebrico di un elemento qualunque $c_{r,s}$ *del prodotto di due determinanti equivale alla somma de'prodotti de'complementi algebrici degli elementi della* r^{ma} *orizzontale del moltiplicatore pe' complementi algebrici dei corrispondenti elementi della* s^{ma} *orizzontale del moltiplicando.*

69. Se sono identici i fattori P e Q del prodotto K, il teorema del num.° 66 si modifica come segue:

Ogni minore del quadrato **K** *di un determinante* **P**, *operato per orizzontali equivale al prodotto di due matrici di orizzontali di* **P**, *definite rispettivamente da'numeri di ordine delle orizzontali e delle verticali di* **K**, *le quali concorrono a formare il detto minore. E se il minore è principale, esso allora equivale al quadrato della matrice di orizzontali di* **P**, *omologa a quella matrice di* **K**, *alla quale appartiene il detto minore.*

Così, supposto che il determinante **K** del n° 63 sia il quadrato del determinante **P**, sarà, per esempio,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix}^2+\text{etc.}$$

§. VII.

DERIVATE E DIFFERENZIALI DE'DETERMINANTI.

70. Poichè nella formola

$$P = a_{r,1}A_{r,1} + a_{r,2}A_{r,2} + \cdots + a_{r,s}A_{r,s} + \cdots + a_{r,n}A_{r,n}$$

le quantità $a_{r,1}$, $a_{r,2}$, etc: non entrano nella composizione de'coefficienti $A_{r,1}$, $A_{r,2}$, etc: è chiaro che, se gli elementi di P sono tra loro indipendenti, la *derivata* di P rispetto ad $a_{r,s}$ si riduce al suo coefficiente $A_{r,s}$; vale a dire si ha

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = A_{r,s};$$

e quindi il seguente teorema:

Se gli elementi di un determinante sono tra loro indipendenti, la sua derivata rispetto ad un elemento qualunque equivale al complemento algebrico dello stesso elemento.

71. Ma questa proprietà è compresa in altra più generale. Sia

$$a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \cdots a_{r_m,s_m} \qquad (1)$$

il prodotto di m elementi del determinante P presi in orizzontali diverse, e verticali diverse; ε il numero totale delle inversioni ne' primi e secondi indici; e s'indichi con H il suo complemento algebrico (n° 34); così l'espressione

$$(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \cdots a_{r_m,s_m}\, H \qquad (2)$$

dinoterà tutta la parte del determinante P, in cui entrano come fattori i detti elementi; e perciò la m^{ma} derivata di P, presa successivamente rispetto agli elementi medesimi si riduce semplicemente a $(-1)^{\varepsilon}$ H; cioè si ha

$$\frac{d^m P}{da_{r_1,s_1}\, da_{r_2,s_2} \cdots da_{r_m,s_m}} = (-1)^{\varepsilon} H; \qquad (3)$$

da che deriva il seguente teorema:

Se gli elementi di un determinante sono tra loro indipendenti la sua m.ª *derivata, presa successivamente rispetto ad* m *elementi di orizzontali e verticali diverse, equivale al complemento algebrico del loro prodotto, preso col segno proprio o contrario, secondochè il prodotto, riguardato come algebrico, comporta il* + *o il* —.

72. Dopo ciò è manifesto che l'espressione (2), ossia tutta la parte del determinante P, la quale ha per fattore il prodotto (1) può essere rappresentata da

$$a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \ldots a_{r_m,s_m} \frac{d^m \mathrm{P}}{da_{r_1,s_1}\, da_{r_2,s_2} \ldots da_{r_m,s_m}}.$$

73. Permutando come piaccia nel prodotto (1) o i primi indici, o i secondi, astrazion fatta dal segno, si ha sempre un termine di uno stesso minore, e che perciò ha sempre uno stesso complemento algebrico. Ora, supponendo scambiati tra loro due soli indici, per esempio r_1 ed r_2, quel prodotto si muta nell'altro

$$a_{r_2,s_1}\, a_{r_1,s_2}\, a_{r_3,s_3} \ldots a_{r_m,s_m},$$

il quale è di segno contrario ad (1); quindi si ha

$$\frac{d^m \mathrm{P}}{da_{r_2,s_1}\, da_{r_1,s_2} \ldots da_{r_m,s_m}} = -(-1)^{\varepsilon} \mathrm{H};$$

e dal paragone di questa relazione con la (3) risulta

$$\frac{d^m \mathrm{P}}{da_{r_2,s_1}\, da_{r_1,s_2} \ldots da_{r_m,s_m}} = - \frac{d^m \mathrm{P}}{da_{r_1,s_1}\, da_{r_2,s_2} \ldots da_{r_m,s_m}}.$$

Ciò dimostra che due m^{me} derivate del determinante P sono uguali, ma di segni contrarii, se i denominatori de'simboli che le rappresentano differiscono solo per lo scambio vicendevole tra due indici sia de'primi, sia de'secondi.

74. Supponiamo ora che $r_1, r_2, \ldots, r_m$ siano de'numeri cre-

scenti al pari degli altri $s_1, s_2, \ldots, s_m$; in tal caso si ha $\varepsilon = 0$, e la (3) si riduce a

$$\frac{d^m P}{da_{r_1, s_1}\, da_{r_2, s_2} \ldots da_{r_m, s_m}} = H.$$

Così nella ipotesi attuale la derivata m^{ma} di P equivale al complemento algebrico del prodotto degli elementi, che figurano nel denominatore del simbolo,che la rappresenta, o, ch'è lo stesso, al complemento algebrico del minore formato dalle orizzontalì e verticali che passano pe'fattori del prodotto; il quale è ora il termine principale dello stesso minore (n° 27). Quindi è che il complemento algebrico di un determinante minore di grado m suole indicarsi col simbolo esprimente la m^{ma} derivata del primitivo, presa successivamente rispetto ai principali elementi di questo minore; ed in tal caso il segno, che conviene al complemento, è immediatamente definito dalla somma di tutti gl'indici degli elementi che figurano nel denominatore del simbolo (n.° 29), la quale attribuisce il $+$ o il $-$, secondochè è pari, o impari. Laonde si ha per esempio

$$\text{Comp.° alg.° di} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{d^2 P}{da_{2,1}\, da_{4,3}} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} & a_{1,5} & . & a_{1,n} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} & . & a_{4,n} \\ a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} & . & a_{5,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,2} & a_{n,4} & a_{n,5} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

75. La proposizione del n° 70 conduce immediatamente al seguente teorema:

Il differenziale totale di un determinante i di cui elementi si riguardano come variabili tra loro indipendenti, equivale alla somma dei prodotti dei differenziali di tutti gli elementi pe'rispettivi complementi algebrici.

È opportuno di osservare che per ottenere con metodo ordinato questo differenziale totale si può formare un polinomio con gli sviluppi simbolici del determinante secondo gli elementi o di tutte le orizzontali, o di tutte le verticali; e quindi cambiarvi ogni elemento nel suo differenziale. Così supponendo che nel determinante P tutti gli elementi $a_{r,s}$ siano variabili tra loro indipendenti, formeremo dapprima il polinomio

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}A_{1,1}+a_{1,2}A_{1,2}+\ldots+a_{1,n}A_{1,n} \\ +\ a_{2,1}A_{2,1}+a_{2,2}A_{2,2}+\ldots+a_{2,n}A_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ a_{n,1}A_{n,1}+a_{n,2}A_{n,2}+\ldots+a_{n,n}A_{n,n} \end{array}\right\}$$

e quindi mutando ogni elemento nel suo differenziale si avrà

$$dP = \left.\begin{array}{l} A_{1,1}da_{1,1}+A_{1,2}da_{1,2}+\ldots+A_{1,n}da_{1,n} \\ +\ A_{2,1}da_{2,1}+A_{2,2}da_{2,2}+\ldots+A_{2,n}da_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ A_{n,1}da_{n,1}+A_{n,2}da_{n,2}+\ldots+A_{n,n}da_{n,n} \end{array}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} da_{1,1} & da_{1,2} & . & da_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ da_{2,1} & da_{2,2} & . & da_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & a_{n-1,n} \\ da_{n,1} & da_{n,2} & . & da_{n,n} \end{vmatrix}.$$

76. Se gli elementi di P sono funzioni di una variabile x,

dalle formole precedenti si ha subito la sua derivata espressa da

$$\frac{dP}{dx} = \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\frac{da_{1,1}}{dx} + A_{1,2}\frac{da_{1,2}}{dx} + \cdots + A_{1,n}\frac{da_{1,n}}{dx} \\ + A_{2,1}\frac{da_{2,1}}{dx} + A_{2,2}\frac{da_{2,2}}{dx} + \cdots + A_{2,n}\frac{da_{2,n}}{dx} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + A_{n,1}\frac{da_{n,1}}{dx} + A_{n,2}\frac{da_{n,2}}{dx} + \cdots + A_{n,n}\frac{da_{n,n}}{dx} \end{array}\right.$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{da_{1,1}}{dx} & \frac{da_{1,2}}{dx} & . & \frac{da_{1,n}}{dx} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ \frac{da_{2,1}}{dx} & \frac{da_{2,2}}{dx} & . & \frac{da_{2,n}}{dx} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & . & a_{n-1,n} \\ \frac{da_{n,1}}{dx} & \frac{da_{n,2}}{dx} & . & \frac{da_{n,n}}{dx} \end{vmatrix}$$

e può enunciarsi il seguente teorema:

Se gli elementi di un determinante sono funzioni di una stessa variabile la sua derivata sarà uguale alla somma de'prodotti che si ottengono moltiplicando la derivata di ciascun elemento pel suo complemento algebrico.

77. Porremo ora in veduta un caso particolare di questo teorema che si rapporta ad importanti applicazioni. Siano y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_n$ funzioni qualunque di una variabile x, e conveniamo

d'indicare le loro r^{me} derivate con $y_{1,r}$, $y_{2,r}$, $y_{3,r}$, . . , $y_{n,r}$. Posto ciò consideriamo il determinante di grado n

$$\mathrm{X} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & . & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & . & y_{n,2} \\ . & . & . & . & . \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & y_{3,n-1} & . & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

nel quale gli elementi di una orizzontale qualunque sono le prime derivate de'corrispondenti elementi della precedente. Prendendo la derivata di X avremo per l'ultima formola

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & . & y_{n,1} \\ y_{1,1} & y_{2,1} & . & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & . & y_{n,2} \\ . & . & . & . \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & . & y_{n,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & . & y_n \\ y_{1,2} & y_{2,2} & . & y_{n,n} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & . & y_{n,n} \\ . & . & . & . \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & . & y_{n,n-1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & . & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & . & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & . & y_{n,2} \\ . & . & . & . \\ y_{1,n} & y_{2,n} & . & y_{n,n} \end{vmatrix}$$

ma in questi determinanti, fuorchè nell'ultimo, vi sono sempre due orizzontali identiche, e perciò si annullano; dunque

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & . & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & . & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & . & y_{n,2} \\ . & . & . & . & . \\ y_{1,n-2} & y_{2,n-2} & y_{3,n-2} & . & y_{n,n-2} \\ y_{1,n} & y_{2,n} & y_{3,n} & . & y_{n,n} \end{vmatrix}$$

vale a dire per ottenere la derivata del determinante X basta cambiarvi gli elementi dell'ultima orizzontale nelle rispettive derivate.

§. VIII.

SPECIALI TRASFORMAZIONI DE' DETERMINANTI.

Prima trasformazione.

Decomposizione de' determinanti in altri che hanno nulli gli elementi principali.

78. Se si domanda tutta la parte di un determinante, la quale non contenga alcuni de'suoi elementi, è chiaro ch'essa è ciò che diviene lo stesso determinante annullandovi gli elementi designati. Si osservi intanto che lo sviluppo di un determinante dee contenere termini in cui non figurano elementi principali; altri in cui figurano ad uno ad uno; altri in cui figurano i loro prodotti a due a due; altri co'loro prodotti a tre a tre, etc.; e che infine vi sarà un termine formato dal prodotto di tutti gli elementi principali. È da notarsi tuttavia che non può esservi alcun termine con $n-1$ elementi principali, dinotando n il grado del determinante; perchè, essendo n i fattori di ogni termine, se vi fosse un termine con $n-1$ elementi principali, il fattore che manca non potrebbe essere che il restante elemento principale, senza di che gli n fattori non apparterrebbero ad orizzontali e verticali diverse.

Ciò premesso dinotiamo in generale con P_r l'insieme di tutti i termini del determinante P, in cui si trovano gli elementi principali ad r ad r; di modo che P_0 esprimerà tutti quelli, in cui non entrano elementi principali; P_1 quelli in cui entrano ad uno ad uno; P_2 quelli in cui entrano a due a due; e così di seguito; avremo in siffatta guisa

$$P=P_0+P_1+P_2+\cdots+P_{n-2}+P_n\,;$$

Ma poi segue dalla osservazione fatta in principio che P_0 è ciò che diviene il determinante P, annullandovi tutti gli elementi principali; inoltre che P_1 è la somma dei prodotti di tutti gli elementi principali pe'rispettivi complementi, ne'quali siano annullati gli elementi principali; similmente che P_2 è la somma de'prodotti di questi elementi a due a due, dopo aver moltiplicato ogni prodotto pel suo complemento, nel quale siano sempre annullati gli elementi principali; e così di seguito fino a P_{n-2}; mentre $P_{n-1}=0$, e P_n è semplicemente il prodotto di tutti gli elementi principali, vale a dire è il termine principale del determinante P.

Esempio:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 0 & c' \\ b'' & 0 \end{vmatrix} + b'\begin{vmatrix} 0 & c \\ a'' & 0 \end{vmatrix} + c''\begin{vmatrix} 0 & b \\ a' & 0 \end{vmatrix} + a\,b'c''.$$

Seconda trasformazione.

Sviluppo di un determinante secondo le potenze di una parte comune a tutti gli elementi principali.

79. Supposto il determinante

$$X = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+x & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+x & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n}+x \end{vmatrix}$$

è manifesto che al suo sviluppo, ordinato per le potenze decrescenti di x, può darsi la forma

$$X = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_rx^{n-r} + \cdots + S_{n-1}x + S_n$$

e la quistione si riduce a determinare i coefficienti S_1, S_2,.. S_n. In quanto all'ultimo S_n è chiaro ch'esso è ciò che diviene il determinante X ponendovi $x=0$; e per conseguenza equivale al determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Ma per determinare in generale il coefficiente S_r di x^{n-r} si osservi che il prodotto di qualunque principale minore di grado $n-r$ del determinante X pel suo complemento è una parte di X (n° 32). Intanto, se dello sviluppo di un tal minore si consideri il solo termine in x^{n-r}, è chiaro che il suo coefficiente, nello sviluppo della detta parte, è ciò che diviene il complemento ponendovi $x=0$, e sarà quindi un principale minore di grado r di P. Ora, siccome il prodotto di ogni principale minore di grado $n-r$ di X pel suo complemento dà luogo ad una somigliante conchiusione, ne segue che S_r *è la somma di tutti i principali minori di grado* r *di* P; e però S_1 sarà la somma di tutti i principali minori di primo grado del determinante P, vale a dire sarà la somma dei suoi principali elementi; S_2 sarà la somma de'suoi principali minori di 2° grado; S_3 di quelli di 3° grado; e così di seguito.

Supposto per esempio

$$X=\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a' & b'+x & c' \\ a'' & b'' & c''+x \end{vmatrix}=x^3+S_1x^2+S_2x+S_3$$

si ha

$$S_1=a+b'+c'',\ S_2=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix},\ S_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Terza trasformazione.

Sviluppo di un determinante secondo i prodotti degli elementi di due linee di nome diverso.

80. Se il prodotto algebrico di due elementi appartenenti a due linee di nome diverso del determinante P, escluso l'elemento comune, si moltiplichi pel suo complemento algebrico, si ha tutta la parte di P in cui entrano come fattori i due elementi (n° 34). Quindi se gli elementi di una delle linee si combinino in tutti i modi con quelli dell'altra, uno ad uno, eccetto sempre l'elemento comune, ed ogni prodotto binario si moltiplichi pel suo comple-

mento, l'uno e l'altro riguardato come algebrico, la somma dei prodotti darà tutta la parte del determinante P, dipendente dagli elementi delle due linee, meno quella che dipende dal loro elemento comune; e da ciò poi risulta la seguente proposizione:

Se il prodotto algebrico di ogni elemento di una linea per ogni elemento di un' altra linea di nome diverso, escluso l' elemento comune, si moltiplichi pel suo complemento algebrico, la somma dei prodotti, aggiunta a quello dell' elemento comune pel suo complemento algebrico, riproduce il dato determinante.

Per tradurre questo teorema in formola supporremo che le due linee di nome diverso siano la r^{ma} orizzontale e la s^{ma} verticale del determinante P; ed allora chiamando S la somma dei prodotti di cui è discorso, si avrà dapprima

$$P = a_{r,s} A_{r,s} + S.$$

Ciò premesso siano i e k due numeri qualunque della serie 1, 2, 3, . . , n; se ammettiamo che i sia diverso da r, e k diverso da s, sarà $a_{r,k}\, a_{i,s}$ il prodotto di due elementi appartenenti alle due linee, che si considerano, diversi dall'elemento comune $a_{r,s}$. Ora è chiaro che nello sviluppo di P i due prodotti $a_{r,k}\, a_{i,s}$ ed $a_{r,s}\, a_{i,k}$ hanno coefficienti uguali e di segni contrarii, perciocchè le due parti di P dipendenti da questi prodotti si possono rispettivamente esprimere (n.° 72) con

$$a_{r,k}\, a_{i,s} \frac{d^2P}{da_{r,k}\, da_{i,s}} \quad , \quad a_{r,s}\, a_{i,k} \frac{d^2P}{da_{r,s}\, da_{i,k}}$$

e pel numero 73 si ha

$$\frac{d^2P}{da_{r,k}\, da_{i,s}} = - \frac{d^2P}{da_{r,s}\, da_{i,k}} ;$$

ma siccome di queste due parti la seconda, che dipende dal prodotto $a_{r,s}\, a_{i,k}$, è compresa nella espressione $a_{r,s}\, A_{r,s}$, risulta che se si dinota con $\alpha_{i,k}$ il complemento algebrico dell' elemento $a_{i,k}$ considerato nel determinante $A_{r,s}$, questa parte potrà essere espressa da $a_{r,s}\, a_{i,k}\, \alpha_{i,k}$; ed in conseguenza sarà $-\, a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}$

tutta la parte di P che dipende dal prodotto $a_{r,k}\,a_{i,s}$. Così quest' ultima espressione è quella di uno dei termini della somma figurata da S; ma si comprende che da essa si possono dedurre tutti gli altri termini di tal somma, dando a ciascuno degl' indici i e k tutti i valori $1, 2, 3, .., n$, escluso tuttavia r tra i valori di i, ed s tra quelli di k; allora, rimanendo sottintesa questa esclusione, sarà lecito di scrivere

$$S = -\sum_{i,k} a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}\,,$$

e si ha la seguente formola

$$P = a_{r,s} A_{r,s} - \sum_{i,k} a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}\,; \tag{1}$$

nella quale adunque bisogna tener presente che $\alpha_{i,k}$ esprime il complemento algebrico dell' elemento $a_{i,k}$, preso non già nel determinante primitivo P, ma sibbene nel determinante $A_{r,s}$; e che di più si ha

$$i = 1,2,3,..,r-1,\ r+1,..n \quad , \quad k = 1,2,3,..,s-1,\ s+1,..,n.$$

Supposto per un esempio

$$P = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

se si applica la formola alla prima orizzontale ed alla prima verticale si ha semplicemente

$$P = -\sum_{i,k} a_{1,k}\, a_{i,1}\, \alpha_{i,k}$$

$$i = 2, 3, 4 \quad , \quad k = 2, 3, 4\,,$$

e quindi

$$P = -\left\{ \begin{array}{l} a_{12}\, a_{21}\, \alpha_{22} + a_{13}\, a_{21}\, \alpha_{23} + a_{14}\, a_{21}\, \alpha_{24} \\ + a_{12}\, a_{31}\, \alpha_{32} + a_{13}\, a_{31}\, \alpha_{33} + a_{14}\, a_{31}\, \alpha_{34} \\ + a_{12}\, a_{41}\, \alpha_{42} + a_{13}\, a_{41}\, \alpha_{43} + a_{14}\, a_{41}\, \alpha_{44} \end{array} \right.$$

dove resta solamente a sostituire ad α_{22}, α_{23}, etc. i loro valori come complementi algebrici degli elementi a_{22}, a_{23}, etc. a riguardo del determinante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

e pei quali si ha

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{23} = - \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

81. In generale è da osservarsi che la caratteristica del complemento di un elemento $a_{i,k}$ a riguardo del determinante A_{11} sarebbe $i+k-2$; ma è chiaro che il segno che compete al detto complemento, riguardato come algebrico, è quello definito dal simbolo $(-1)^{i+k}$ (nº 30).

Quarta trasformazione.

Una trasformazione del prodotto di due determinanti.

82. Questa trasformazione può formolarsi nel seguente teorema: *Il prodotto di due determinanti di grado* n *può essere espresso con una somma di prodotti di due determinanti dello stesso grado* n. *I due fattori di un prodotto qualunque sono ciò che divengono i due determinanti scambiandovi una matrice di* m *linee dell' uno con una matrice di* m *linee dell' altro; ed il completo sistema dei prodotti si otterrà operando il detto scambio tra una matrice fissa dell' uno, e tutte le matrici dell' altro, che si formano combinandovi ad* m *ad* m *sia le orizzontali sia le verticali.*

Siano i due determinanti di grado n

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . & . \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & . & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

e supponiamo che la r^{ma} matrice di m verticali di P (nº 57) si a scambiata con le successive matrici di m verticali di Q; allora se dinotiamo con $P_{r,1}$, $P_{r,2}$, $P_{r,3}$, etc: ciò che diviene il determinante P quando alla sua r^{ma} matrice si sostituiscono le successive matrici di Q; e con $Q_{1,r}$, $Q_{2,r}$, $Q_{3,r}$, etc: ciò che diviene il determinante Q quando alle sue successive matrici si sostituisce la r^{ma} matrice di P, il teorema si traduce in

$$PQ=P_{r,1}Q_{1,r}+P_{r,2}Q_{2,r}+P_{r,3}Q_{3,r}+\text{etc:} \qquad (1)$$

Considerando dapprima il caso di $m=1$, si tratterà di scambiare la r^{ma} verticale di P con ciascuna verticale di Q: anzi per meglio fissar le idee (senza restringere le conchiusioni), porremo $r=1$; il che importa lo scambio tra la prima verticale di P, e ciascuna verticale di Q; e però in tal caso avremo

$$P_{r,1}=\begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \qquad Q_{1,r}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & . & b_{1,n} \\ a_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$P_{r,2}=\begin{vmatrix} b_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ b_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \qquad Q_{2,r}=\begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,1} & b_{1,3} & . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,1} & b_{2,3} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$P_{r,3}=\begin{vmatrix} b_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ b_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \qquad Q_{3,r}=\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,1} & . & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & a_{2,1} & . & b_{2,n} \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

etc. etc. etc. etc.

Sviluppando questi determinanti secondo gli elementi delle linee scambiate si hanno i due seguenti sistemi di relazioni

$$\left.\begin{array}{l} P_{r,1}=b_{1,1}\,A_{1,1}+b_{2,1}\,A_{2,1}+b_{3,1}\,A_{3,1}+\text{etc.}\,, \\ P_{r,2}=b_{1,2}\,A_{1,1}+b_{2,2}\,A_{2,1}+b_{3,2}\,A_{3,1}+\text{etc.}\,, \\ P_{r,3}=b_{1,3}\,A_{1,1}+b_{2,3}\,A_{2,1}+b_{3,3}\,A_{3,1}+\text{etc.}\,, \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{1,r}=a_{1,1}\,B_{1,1}+a_{2,1}\,B_{2,1}+a_{3,1}\,B_{3,1}+\text{etc.} \\ Q_{2,r}=a_{1,1}\,B_{1,2}+a_{2,1}\,B_{2,2}+a_{3,1}\,B_{3,2}+\text{etc.} \\ Q_{3,r}=a_{1,1}\,B_{1,3}+a_{2,1}\,B_{2,3}+a_{3,1}\,B_{3,3}+\text{etc.} \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ciò premesso, se si moltiplicano i polinomii del sistema (2) pe' corrispondenti polinomii del sistema (3), la somma de' prodotti esprimerà il secondo membro della (1). Ora distingueremo i termini di questa somma in due classi, secondochè risultano dal moltiplicar tra loro termini che in ogni coppia di polinomii sono di ugual posto, come i primi, i secondi, etc: ; o sono di posti diversi. In quanto ai termini della prima classe, considerando in generale quelli che provvengono dal moltiplicar tra loro i termini i^{mi} de' polinomii in (2) pe' termini i^{mi} de' polinomii in (3), è chiaro che per la loro somma si ha l'espressione

$$a_{i,1}A_{i,1}(b_{i,1}B_{i,1}+b_{i,2}B_{i,2}+b_{i,3}B_{i,3}+\text{etc.})\,,$$

la quale può tenersi come tipo generatore di tutt'i termini della prima classe, poichè ne derivano dando all'indice i tutt'i valori 1,2, 3,.. n; ma siccome per ciascuno di questi valori la quantità chiusa tra parentesi equivale sempre al determinante Q, ne segue che il detto tipo può mutarsi in $a_{i,1}A_{i,1}Q$; quindi la somma di tutti i termini della prima classe risulterà espressa da

$$(a_{1,1}A_{1,1}+a_{2,1}A_{2,1}+a_{3,1}A_{3,1}+\text{etc.})\,Q\,,$$

ed equivale in conseguenza al prodotto PQ.

Rispetto ai termini della seconda classe, considerando la somma di quelli che provvengono da' termini i^{mi} de' polinomii in (2) e da'termini k^{mi} de'polinomii in (3) si ha l'espressione

$$a_{k,1}\,A_{i,1}\,(b_{i,1}\,B_{k,1}+b_{i,2}\,B_{k,2}+b_{i,3}\,B_{k,3}+\text{etc.})$$

da cui si dedurrebbero tutti i termini della seconda classe, prendendo per sistemi di valori di i e k le combinazioni binarie de'numeri 1, 2, 3, . . , n; ma quindi è palese che la loro somma è nulla (n.° 46). E da ciò risulta in fine che la somma de'prodotti de'polinomii in (2) pe'corrispondenti polinomii in (3) si riduce semplicemente a PQ, rimanendo così dimostrata la relazione (1) pel caso che abbiamo considerato.

La dimostrazione pel caso generale è assolutamente la stessa modificando convenientemente la notazione. Pertanto dinoteremo con $h_{1,r}$, $h_{2,r}$, $h_{3,r}$, etc: i determinanti *ordinati* della r^{ma} matrice di m verticali (n° 57) del determinante P, e con $H_{1,r}$, $H_{2,r}$, $H_{3,r}$, etc. i loro complementi algebrici; e similmente indicheremo con $k_{1,r}$, $k_{2,r}$, $k_{3,r}$, etc. i successivi determinanti della r^{ma} matrice di m verticali di Q, e con $K_{1,r}$, $K_{2,r}$, $K_{3,r}$, etc. i rispettivi complementi algebrici. Allora sviluppando i determinanti $P_{r,1}$, $P_{r,2}$, $P_{r,3}$, etc. e $Q_{1,r}$, $Q_{2,r}$, $Q_{3,r}$, etc. secondo i minori compresi nelle matrici scambiate, avremo i due seguenti sistemi di relazioni

$$\left.\begin{array}{l}
P_{r,1} = k_{1,1} H_{1,r} + k_{2,1} H_{2,r} + k_{3,1} H_{3,r} + \text{etc.} \\
P_{r,2} = k_{1,2} H_{1,r} + k_{2,2} H_{2,r} + k_{3,2} H_{3,r} + \text{etc.} \\
P_{r,3} = k_{1,3} H_{1,r} + k_{2,3} H_{2,r} + k_{3,3} H_{3,r} + \text{etc.} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}
Q_{1,r} = h_{1,r} K_{1,1} + h_{2,r} K_{2,1} + h_{3,r} K_{3,1} + \text{etc.} \\
Q_{2,r} = h_{1,r} K_{1,2} + h_{2,r} K_{2,2} + h_{3,r} K_{3,2} + \text{etc.} \\
Q_{3,r} = h_{1,r} K_{1,3} + h_{2,r} K_{2,3} + h_{3,r} K_{3,3} + \text{etc.} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} \quad (5)$$

ai quali si applica parola a parola tutto ciò che si è detto a riguardo de'due sistemi considerati nel caso precedente; e quindi si conchiude esattamente nello stesso modo che la somma de'prodotti de'polinomii in (4) pe'corrispondenti polinomii in (5) equivale al prodotto PQ, ch'è quanto dovea dimostrarsi.

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & b \\ x' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & y \\ a' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b \\ y' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & a \\ x' & a' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & y \\ b' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ a' & y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & b \\ x' & b' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ x' & y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & b & c \\ x' & b' & c' \\ x'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & y & z \\ a' & y' & z' \\ a'' & y'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b & c \\ y' & b' & c' \\ y'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & a & z \\ x' & a' & z' \\ x'' & a'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & b & c \\ z' & b' & c' \\ z'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & a \\ x' & y' & a' \\ x'' & y'' & a'' \end{vmatrix}.$$

83. Dal teorema precedente si deduce immediatamente l'altro che segue:

Dati due determinanti di gradi uguali **P** *e* **Q** *si formi una prima serie di determinanti* $P_{r,1}$, $P_{r,2}$, $P_{r,3}$, etc., *sostituendo sempre alla* r^{ma} *matrice di* m *linee parallele di* **P** *le matrici* ordinate,*sia di orizzontali, sia di verticali di* **Q**; *e quindi una seconda serie di determinanti* $Q_{1,s}$, $Q_{2,s}$, $Q_{3,s}$, etc., *sostituendo alle matrici* ordinate *di* **Q** *la matrice* s^{ma} *di* **P**, *diversa dalla* r^{ma}. *Posto ciò, se i determinanti della prima serie si moltiplichino pei corrispondenti determinanti della seconda, la somma de'prodotti è nulla;* vale a dire si ha

$$P_{r,1}Q_{1,s}+P_{r,2}Q_{2,s}+P_{r,3}Q_{3,s}+\text{etc.}=0.$$

In fatti questa trasformazione equivale ad applicare il teorema precedente al caso in cui le m linee della r^{ma} matrice del determinante **P** fossero cangiate nelle m linee della sua s^{ma} matrice; di modo che questo determinante avrà per lo meno due linee parallele identiche; ed in conseguenza è nullo. Così supposto per esempio i due determinanti

$$P=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad Q=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

se si cambia la prima verticale di **P** nelle successive verticali di **Q**, e quindi invece di cambiare le successive verticali di **Q** nella prima verticale di **P**, come lo esigerebbe il primo teorema, si mutino per esempio nella sua seconda verticale, si avrà

$$\begin{vmatrix} x & b & c \\ x' & b' & c' \\ x'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & y & z \\ b' & y' & z' \\ b'' & y'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b & c \\ y' & b' & c' \\ y'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & b & z \\ x' & b' & z' \\ x'' & b'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & b & c \\ z' & b' & c' \\ z'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & b \\ x' & y' & b' \\ x'' & y'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

il che torna lo stesso che applicare il primo teorema al prodotto identicamente nullo

$$\begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} .$$

§. IX.

DETERMINANTI RECIPROCI.

84. Se in un determinante si cambia ogni elemento nel suo complemento algebrico si ha un determinante che dicesi *reciproco* del primitivo; e però chiamando **R** il reciproco di **P** sarà

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} , \quad R = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & . & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & . & A_{2,n} \\ . & . & . & . \\ A_{n,1} & A_{n,2} & . & A_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Quindi, se una linea di **P** si moltiplichi per una linea di egual nome in **R**, il prodotto è uguale a **P**, se le due linee sono omologhe; ed è nullo nel caso opposto (n° 46); e perciò, moltiplicando **P** per **R**, ogni elemento principale del determinante prodotto sarà uguale a **P**, e tutti gli altri saranno nulli. Avremo adunque $PR = P^n$, ossia $R = P^{n-1}$; e ne risulta che:

Il reciproco di un primitivo di grado n *equivale alla potenza di grado n—1 del primitivo. E se il primitivo è nullo, anche nullo è il suo reciproco.*

85. Ecco una proprietà de'determinanti reciproci di molto interesse nelle applicazioni.

Nel reciproco ogni minore di grado m *equivale al complemento algebrico del suo omologo nel primitivo, moltiplicato per la potenza* $(m-1)^{ma}$ *dello stesso primitivo.*

Siano P_m ed R_m due minori omologhi di grado m del determinante P e del suo reciproco R, e sia P'_m il complemento ordinario di P_m; ma supponendo in primo luogo che P_m ed R_m siano i principali minori nelle prime m orizzontali, e nelle prime m verticali de'primitivi, avremo

$$P'_m = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & . & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & . & a_{m+2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad R_m = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & . & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & . & A_{2,m} \\ . & . & . & . \\ A_{m,1} & A_{m,2} & . & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

Or si osservi che R_m equivale al determinante di grado n

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & . & A_{1,m} & A_{1,m+1} & A_{1,m+2} & . & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & . & A_{2,m} & A_{2,m+1} & A_{2,m+2} & . & A_{2,n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{m,1} & A_{m,2} & . & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & . & A_{m,n} \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}$$

il quale è ciò che diviene R, annullandovi gli elementi delle ultime $n-m$ orizzontali, eccetto i principali, ai quali è sostituita l'unità. Quindi il prodotto di P per quest'ultimo determinante sarà uguale a PR_m; ed effettuando la moltiplicazione per orizzontali, con prendere P come moltiplicatore, verrà

$$PR_m = \begin{vmatrix} P & 0 & 0 & . & 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & . & a_{1,n} \\ 0 & P & 0 & . & 0 & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & . & a_{2,n} \\ 0 & 0 & P & . & 0 & a_{3,m+1} & a_{3,m+2} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & P & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & . & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & . & a_{m+1,n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ma questa relazione si trasforma evidentemente in

$$PR_m = P'_m P^m ; \tag{1}$$

e ne risulta in fine

$$R_m = P'_m P^{m-1},$$

il che è conforme al teorema pel caso considerato, perciocchè essendo P_m un minore principale, il suo complemento ordinario P'_m non è diverso dal complemento algebrico.

È ora agevole la dimostrazione del caso generale. In fatti, se si trasforma il determinante P, portandovi in primo luogo, ed in ordine diretto, le m orizzontali e le m verticali che concorrono a formare il minore P_m, chiamando $\varkappa$ la caratteristica di questo minore, e Π il nuovo determinante, si avrà (n° 39. II),

$$\Pi = (-1)^{\varkappa} P ; \tag{2}$$

ma intanto il minore P_m ed il suo complemento P'_m si riproducono in Π come principali minori complementari, l'uno nelle prime m orizzontali e nelle prime m verticali, l'altro nelle rimanenti. Dopo ciò, se si trasforma il reciproco R della stessa maniera, il minore R_m si riprodurrà ancora nel trasformato come il principale minore nelle prime m orizzontali e verticali; quindi si ha conformemente alla (1)

$$\Pi\, R_m = P'_m\, P^m;$$

e poscia in virtù della (2) si avrà, come dovea dimostrarsi,

$$R_m = (-1)^{\varkappa} P'_m\, P^{m-1}. \tag{3}$$

Esempii. Supponendo $m=2$ si ha

$$\begin{vmatrix} A_{r,s} & A_{r,s'} \\ A_{r',s} & A_{r',s'} \end{vmatrix} = A_{r,s} A_{r',s'} - A_{r,s'} A_{r',s} = \frac{d^2P}{da_{r,s}\, da_{r',s'}} P$$

o con altra notazione

$$\frac{dP}{da_{r,s}} \frac{dP}{da_{r',s'}} - \frac{dP}{da_{r,s'}} \frac{dP}{da_{r',s}} = \frac{d^2P}{da_{r,s}\, da_{r',s'}} P.$$

Per $m=3$ si avrebbe

$$\begin{vmatrix} A_{r,s} & A_{r,s'} & A_{r,s''} \\ A_{r',s} & A_{r',s'} & A_{r',s''} \\ A_{r'',s} & A_{r'',s'} & A_{r'',s''} \end{vmatrix} = \frac{d^3 P}{da_{r,s}\, da_{r',s'}\, da_{r'',s''}} P^2;$$

e così di seguito.

E per considerare ancora qualche caso più concreto, supponiamo che P sia un determinante di 5° grado; così avremo per esempio

$$\begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} \\ A_{52} & A_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix} P \; ; \; \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{43} & a_{45} \\ a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} P^2.$$

In queste formole il segno del secondo membro è immediatamente definito dalla caratteristica di uno dei determinanti minori che sono nei due membri, e per conseguenza dalla somma degl'indici de'principali elementi dell'uno o dell'altro minore; oppure dalla somma degl'indici degli elementi che figurano nel denominatore del simbolo di derivazione: somma che attribuisce il $+$ o il $-$, secondochè è pari, o impari. Questa regola è diversa, e molto più semplice della ordinaria, la quale consiste nel paragonare le due permutazioni dei primi e secondi indici nella serie completa de' principali elementi dei due determinanti nel primo e secondo membro, e che attribuisce il $+$ o il $-$, secondochè le due permutazioni sono della stessa classe, o di classe diversa (*).

86. È opportuno di notarsi che, nella ipotesi di $m=1$, il teorema equivale a dire che: *ogni elemento del reciproco è il complemento algebrico del suo omologo nel primitivo;* il che riproduce la definizione del reciproco.

87. Siccome a riguardo di un primitivo di grado n il complemento di un determinante minore di grado m è un altro minore

(*) Vedi Baltzer, §. 7, 2, Beispiele

di grado $n-m$, è chiaro che il teorema può anche enunciarsi come segue:

Nel reciproco di un determinante di grado n *il complemento algebrico di qualunque minore di grado* m *equivale all'omologo di questo minore nel primitivo, moltiplicato per la potenza* $(n-m-1)^{ma}$ *dello stesso primitivo.*

Nel caso particolare di $m=1$ questa proposizione equivale a dire che:

Il complemento algebrico di un elemento del reciproco equivale all'omologo di tale elemento nel primitivo, moltiplicato per la potenza $(n-2)^{ma}$ *dello stesso primitivo.*

Vale a dire si ha in questa ipotesi

$$\frac{dR}{dA_{r,s}} = a_{r,s}\, P^{n-2}. \tag{4}$$

88. Nella teoria de'determinanti reciproci è un caso meritevole di attenzione quello in cui il primitivo è uguale all'*unità*, perchè allora tra il primitivo ed il reciproco si stabilisce una perfetta reciprocanza. In fatti se $P=1$, si ha pure (n° 84) $R=1$. Inoltre in questo caso la (3) si riduce a

$$R_m = (-1)^{\varkappa} P'_m ;$$

ma, dinotato con R'_m il complemento ordinario di R_m, si avrà inversamente (n° 87)

$$P_m = (-1)^{\varkappa} R'_m ;$$

cioè, qualunque minore del primitivo equivale al complemento algebrico del suo omologo nel determinante reciproco. In fine, mentre si ha per ipotesi $A_{r,s} = \frac{dP}{da_{r,s}}$, reciprocamente si ha per la (4), $a_{r,s} = \frac{dR}{da_{r,s}}$; vale a dire, mentre R è il reciproco di P, viceversa è P il reciproco di R.

89. Un altro caso osservabile è, quando il primitivo è nullo. Allora non solo è nullo il suo reciproco (n° 84), ma lo è pure ogni

minore di grado maggior di *uno*, perchè esprimibile con un prodotto che ha per fattore il primitivo (n° 85). Applicando per esempio questa proprietà a'minori di 2° grado compresi nella matrice costituita dalle orizzontali r^{ma} ed s^{ma} del reciproco, avremo la serie di identità

$$\begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,2} \\ A_{s,1} & A_{s,2} \end{vmatrix}=0 \;,\; \begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,3} \\ A_{s,1} & A_{s,3} \end{vmatrix}=0 \;,\; \begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,4} \\ A_{s,1} & A_{s,4} \end{vmatrix}=0 \;,\; \text{etc.}$$

dalla quale risulta la serie di rapporti uguali

$$\frac{A_{r,1}}{A_{s,1}}=\frac{A_{r,2}}{A_{s,2}}=\frac{A_{r,3}}{A_{s,3}}=\frac{A_{r,4}}{A_{s,4}}=\text{etc. etc.}$$

e quindi la proporzione

$$A_{r,1} : A_{r,2} : A_{r,3} : \ldots : A_{r,n} = A_{s,1} : A_{s,2} : A_{s,3} : \ldots : A_{s,n} \;,$$

la quale dimostra che:

Se un determinante è nullo, gli elementi di qualunque linea del suo reciproco sono proporzionali agli elementi di ogni altra linea dello stesso nome. Ovvero:

Se un determinante è nullo i complementi algebrici degli elementi di una linea qualunque sono proporzionali ai complementi algebrici di ogni altra linea dello stesso nome.

90. Siano P e Q due determinanti di grado n; P' e Q' i loro reciproci; e pongasi

$$K=PQ \quad , \quad K'=P'Q' \;;$$

ed essendo (n° 84)

$$P'=P^{n-1} \quad , \quad Q'=Q^{n-1} \,,$$

risulterà

$$K'=K^{n-1}.$$

Ciò dimostra che K', prodotto de'due reciproci P' e Q', esprime il valore del reciproco del determinante K, prodotto de'due primitivi P e Q; ma non è lecito di conchiuderne che K' è precisamente il reciproco di K nel senso che ogni elemento di K' sia il complemento algebrico del suo omologo in K. Ora importa di dimostrare che questa circostanza si verifica in effetti qualora la moltiplicazione di P per Q, e quella di P′ per Q′ siano operate della stessa maniera. Supponiamo

$$P = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n} \quad , \quad P' = \Sigma \pm A_{1,1} A_{2,2} \dots A_{n,n} \,,$$
$$Q = \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \dots b_{n,n} \quad , \quad Q' = \Sigma \pm B_{1,1} B_{2,2} \dots B_{n,n} \,,$$
$$K = \Sigma \pm c_{1,1}\, c_{2,2} \dots c_{n,n} \quad , \quad K' = \Sigma \pm \gamma_{1,1}\, \gamma_{2,2} \dots \gamma_{n,n};$$

e ritenuto che le due moltiplicazioni siano entrambe operate per orizzontali avremo (n° 63)

$$c_{r,s} = a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + \dots + a_{r,n}\, b_{s,n} \,,$$
$$\gamma_{r,s} = A_{r,1} B_{s,1} + A_{r,2} B_{s,2} + \dots + A_{r,n} B_{s,n} \,,$$

Ora la seconda relazione fa vedere che $\gamma_{r,s}$ è il complemento algebrico di $c_{r,s}$ (n° 68); e ne risulta che ogni elemento di K′ è il complemento algebrico dell' elemento omologo in K; così per la consueta notazione sarà $\gamma_{r,s} = C_{r,s}$, e di seguito

$$K' = \Sigma \pm C_{1,1}\, C_{2,2} \dots C_{n,n}.$$

Dopo ciò possiamo conchiudere, che:

Se si moltiplicano della stessa maniera tanto due determinanti, quanto i loro reciproci, il determinante prodotto de'primi ha per reciproco il determinante prodotto degli altri.

§. X.

DETERMINANTI SIMMETRICI, GOBBI SIMMETRICI, E GOBBI.

91. Oltre ai determinanti simmetrici, ne' quali ogni elemento è uguale al conjugato, sono da distinguere i *gobbi simmetrici*, ed i *gobbi*. Un determinante dicesi *gobbo simmetrico*, se *ogni* elemento è uguale e di segno contrario al conjugato; il che importa che gli elementi principali debbano esser nulli. E chiamasi *gobbo*, se ogni elemento non principale è uguale, e di segno contrario al conjugato.

Adunque, mentre nel determinante simmetrico due linee conjugate qualunque sono tra loro uguali, nel gobbo simmetrico poi sono uguali, ma di segni contrarii ; e tali son pure nel gobbo, fatta però astrazione dall'elemento comune. Intanto a qualunque di queste tre specie appartenga un determinante P, potremo sempre supporre

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

ben vero, se P è simmetrico i suoi elementi dovranno verificare la condizione $a_{r,s} = a_{s,r}$; se gobbo simmetrico dovrà essere $a_{r,s} = -a_{s,r}$, donde risulta $a_{r,r} = 0$; e finalmente, se P è gobbo, dovrà esser pure $a_{r,s} = - a_{s,r}$, a patto però che gl'indici r ed s siano disuguali.

92. Noi passeremo ora ad esporre alcune delle principali proprietà delle dette tre specie di determinanti, che sono di grande interesse nelle applicazioni, premettendo qui una osservazione comune a tutti, cioè che: *i loro principali minori determinanti sono rispettivamente della stessa natura de' primitivi; vale a dire simmetrici ne' primi, gobbi simmetrici nei secondi, e gobbi negli ultimi.*

Determinanti simmetrici.

93. Se in un determinante simmetrico si considerano due minori conjugati (n° 28) subito si riconosce che le successive orizzontali dell'uno sono ordinatamente identiche alle successive verticali dell'altro; e quindi:

I minori conjugati di un determinante simmetrico sono tra loro uguali; ed uguali son pure i loro complementi, anche riguardati come algebrici.

94. Segue in particolare da questa proposizione che nel determinante simmetrico i complementi algebrici di due elementi conjugati sono tra loro uguali. Così in questi determinanti, mentre si ha per ipotesi $a_{r,s} = a_{s,r}$, risulta ancora $A_{r,s} = A_{s,r}$; e da ciò poi segue, che:

Il reciproco di un determinante simmetrico è pur esso un determinante simmetrico.

95. La formola (1) del n.° 80 può farsi utilmente servire allo sviluppo de'determinanti simmetrici, applicandola specialmente a due linee conjugate. Messo per tanto $r=s$ quella formola diviene

$$P=a_{r,r}\, A_{r,r}-\sum_{i,k} a_{r,k}\, a_{i,r}\, \alpha_{i,k}$$

dove bisogna rammentare che $\alpha_{i,k}$ dinota il complemento algebrico dell'elemento $a_{i,k}$ preso nel determinante $A_{r,r}$; e di più che gl'indici i e k debbono prendere tutt'i valori 1, 2, 3, . . , n, ad eccezione di r. Ora, se P è simmetrico, si ha $a_{i,r}=a_{r,i}$; e quindi potremo scrivere invece

$$P=a_{r,r}\, A_{r,r}-\sum_{i,k} a_{r,i}\, a_{r,k}\, \alpha_{i,k}. \tag{1}$$

Intanto i termini della somma accennata dal Σ sono da distinguersi in due classi; l'una che comprende i termini nascenti da valori uguali di i e k, l'altra da valori disuguali. In quanto ai primi il loro aggregato può essere espresso da $\sum_i a_{r,i}^2\, \alpha_{i,i}$, l'indice i dovendo prendere tutt'i valori 1, 2, 3, . . , n, escluso r. Rispetto ai secondi è evidente ch'essi a due a due sono uguali, perchè essendo $A_{r,r}$ un determinante simmetrico (n° 92) si ha $\alpha_{i,k}=\alpha_{k,i}$ (n° 94); quindi l'aggregato de' termini della seconda classe può essere espresso da $2\sum_{i,k} a_{r,i}\, a_{r,k}\, \alpha_{i,k}$; ed in conseguenza si ha la formola

$$P=a_{r,r}\, A_{r,r}-\sum_i a_{r,i}^2\, \alpha_{i,i}-2\sum_{i,k} a_{r,i}\, a_{r,k}\, \alpha_{i,k} \tag{2}$$

nella quale adunque la prima somma si estende a tutt'i valori di i compresi nella serie 1, 2, 3, . . $r-1$, $r+1$, . . , n; mentre nella seconda i sistemi di valori di i e k sono tutte le combinazioni binarie de'numeri medesimi.

Supponendo per esempio

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ed inoltre $r=1$, si ha dapprima

$$P = a_{11} A_{11} - (a_{12}^2 \alpha_{22} + a_{13}^2 \alpha_{33}) - 2a_{12} a_{13} \alpha_{23};$$

ma essendo

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

e quindi $\alpha_{22}=a_{33}$, $\alpha_{33}=a_{22}$, $\alpha_{23}=-a_{32}=-a_{23}$, risulta in fine

$$P = a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{12} a_{13} a_{23} - (a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{13}^2 + a_{33} a_{12}^2).$$

96. Considerando per un altro esempio il determinante simmetrico

$$U = \begin{vmatrix} u & u_1 & u_2 & u_3 & . & u_n \\ u_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & a_{1,n} \\ u_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & a_{2,n} \\ u_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & . & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ u_n & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

il quale si riduce al determinante P, sopprimendone la prima orizzontale e la prima verticale, è chiaro che per questo caso le formole (1) e (2) divengono rispettivamente

$$U = uP - \sum_{i,k} u_i u_k A_{i,k} \tag{3}$$

$$U = uP - \sum_{i} u_i^2 A_{i,i} - 2\sum_{i,k} u_i u_k A_{i,k}, \tag{4}$$

dove $A_{i,k}$ esprime al solito il complemento algebrico dell'elemento $a_{i,k}$ preso nel determinante P; e le somme dovendo estendersi a tutt'i valori $1, 2, \ldots, n$ degl'indici i e k; ben vero per ciò che riguarda l'ultimo termine della (4) i sistemi di valori di i e k sono le sole combinazioni binarie de'medesimi numeri.

Quando nel proposto determinante U è nullo l'elemento figurato da u, vale a dire quando si ha $u=o$, le due ultime formole si riducono ad

$$U = -\sum_{i,k} u_i u_k A_{i,k}; \tag{5}$$

$$U = -\sum_{i} u_i^2 A_{i,i} - 2\sum_{i,k} u_i u_k A_{i,k}. \tag{6}$$

Applicando per esempio la (6) al determinante

$$U=\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

osserveremo che nella prima somma l'indice i prende i valori 1, 2, 3; mentre le combinazioni binarie di questi numeri sono i sistemi di valori di i e k nella seconda somma; e perciò si ha

$$U=-(A_{11}u_1^2+A_{22}u_2^2+A_{33}u_3^2+2A_{12}u_1u_2+2A_{13}u_1u_3+2A_{23}u_2u_3)$$

dove più non resta che sostituire in luogo di A_{11}, A_{12}, etc. i loro valori come complementi algebrici degli elementi a_{11}, a_{12}, etc. a riguardo del determinante P di 3° grado.

97. Come casi particolari degli esempii precedenti notiamo i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}=2abc.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{a} & \sqrt{b} & \sqrt{c} \\ \sqrt{a} & 0 & \sqrt{c} & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{c} & 0 & \sqrt{a} \\ \sqrt{c} & \sqrt{b} & \sqrt{a} & 0 \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc.$$

98. Cercando la derivata del determinante simmetrico P, ri-

spetto ad un elemento qualunque $a_{r,s}$, si ha dapprima (n°. 76)

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = A_{r,s} + A_{s,r}\frac{da_{s,r}}{da_{r,s}};$$

ma essendo $a_{s,r} = a_{r,s}$ la derivata che figura nell'ultimo termine equivale ad 1; ed è inoltre $A_{s,r} = A_{r,s}$ (n° 94); dunque risulta

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = 2A_{r,s}.$$

Vale a dire:

La derivata di un determinante simmetrico rispetto ad un elemento qualunque equivale al doppio del complemento algebrico dello stesso elemento.

Determinanti gobbi simmetrici.

99. Per le condizioni di due minori conjugati di un determinante gobbo simmetrico è palese che le successive orizzontali dell'uno sono uguali, ma di segni contrarii, alle successive verticali dell'altro; e però quelle diverrebbero uguali a queste, mutando i segni a tutte le linee di uno stesso nome dell'uno de' due minori; ma ciò non altera un determinante, se di grado pari, e fa solo mutarlo di segno, se di grado dispari; dunque:

In un determinante gobbo simmetrico i minori conjugati sono uguali, se di grado pari; ed uguali, ma di segni contrarii, se di grado dispari.

100. Da questa proposizione risulta in particolare, che:

I complementi di due elementi conjugati di un determinante gobbo simmetrico sono uguali, se il primitivo è di grado dispari; e sono uguali e di segni contrarii, se il primitivo è di grado pari.

101. Supposto che P sia gobbo simmetrico s' indichi con Π ciò ch'esso diviene mutando i segni a tutte le linee di uno stesso nome; così le orizzontali di Π saranno identiche alle verticali di P; e sarà perciò $\Pi = P$; ma, se il determinante P è di grado dispari, è pure $\Pi = -P$; dunque in tal caso si ha $P = 0$; e quindi risultano le seguenti proposizioni.

I. *Ogni determinante gobbo simmetrico di grado dispari è nullo.*

II. *In qualunque determinante gobbo simmetrico i principali minori di grado dispari sono nulli* (n° 92). *E nulli son pure i loro complementi, se il primitivo è di grado pari.*

III. *Ne' gobbi simmetrici di grado pari è nullo il complemento di ogni elemento principale.*

102. Segue da ciò che, se gli elementi del determinante P soddisfano alle condizioni $a_{r,s} = -a_{s,r}$, $a_{r,r} = 0$, quando P è di grado pari sarà pure $A_{r,s} = -A_{s,r}$, $A_{r,r} = 0$; ma se P è di grado dispari, si avrà solo $A_{r,s} = A_{s,r}$. Così:

Il reciproco di un determinante gobbo simmetrico di grado pari è similmente gobbo simmetrico. Se poi il primitivo è di grado dispari, il suo reciproco è semplicemente simmetrico, ma nullo al pari del primitivo.

103. Ed essendo nullo e simmetrico il reciproco di un determinante gobbo simmetrico di grado dispari, anche nullo e simmetrico sarà ogni principale minore dello stesso reciproco di grado maggior di uno (n[i] 89, 92). Quindi considerando in generale un principale minore di 2.° grado, si avrà la relazione

$$\begin{vmatrix} A_{r,r} & A_{r,s} \\ A_{s,r} & A_{s,s} \end{vmatrix} = 0$$

dove $A_{r,s} = A_{s,r}$; e dalla quale perciò risulta

$$A^2_{r,s} = A_{r,r}\, A_{s,s}:$$

e conseguentemente

$$A_{r,s} = \sqrt{A_{r,r}\, A_{s,s}}\,.$$

Questa formola per tanto dà origine alla proporzione continua

$$A_{r,1} : A_{r,2} : A_{r,3} : \ldots : A_{r,n} = \sqrt{A_{1,1}} : \sqrt{A_{2,2}} : \sqrt{A_{3,3}} : \ldots : \sqrt{A_{n,n}}$$

da cui rilevasi, che;

I successivi elementi di una linea qualunque del reciproco di un determinante gobbo simmetrico di grado dispari sono proporzionali alle radici quadrate de' suoi successivi elementi principali. E di più *che il segno di una qualunque di queste radici, il quale può prendersi ad arbitrio, determina i segni di tutte le altre.*

104. I determinanti gobbi simmetrici di grado pari son poi dotati della proprietà notevole di essere quadrati perfetti: proprietà immediata per quelli di 2° grado, poichè si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = +a^2;$$

e che in generale si dimostra assai facilmente come segue.

Supposto che P sia un determinante gobbo simmetrico di grado pari, s'indichi con R il suo reciproco, che sarà pure gobbo simmetrico (n.° 102); e siano P_2 ed R_2 due principali minori omologhi di 2° grado di P ed R; i quali saranno della stessa natura di questi primitivi; allora se dinotiamo con P'_2 il complemento di P_2, avremo (n° 85)

$$R_2 = P'_2\, P.$$

Intanto, essendo P un determinante gobbo simmetrico di grado pari, P'_2, ch'è complemento di un suo principale minore di 2° grado, sarà pur esso un principale minore di grado pari; e propriamente di grado 2°, 4°, 6° etc. secondochè il primitivo P è rispettivamente di grado 4°, 6°, 8°, etc. Ciò premesso osserviamo che il determinante R_2, il quale figura nel primo membro della precedente relazione, è un quadrato, perchè gobbo simmetrico di 2° grado; quindi risulta che anche un quadrato è il prodotto P'_2P; e però sarà quadrato il fattore P, quando lo sia il fattore P'_2; ma questo fattore è di fatto un quadrato, se P è di 4° grado, poichè allora esso è gobbo simmetrico di 2° grado; dunque in tal caso è un quadrato il determinante P. Resta così dimostrato che i determinanti gobbi simmetrici di 4° grado sono quadrati perfetti; ma da ciò poi segue immediatamente che lo sono anche quelli di 6° grado; perchè, se P è di 6° grado, il fattore P'_2 è un quadrato, perchè gobbo simmetrico di 4° grado; e perciò sarà quadrato anche P. Ma quindi è manifesto che son quadrati i determinanti gobbi simmetrici di 8° grado, 10° grado, etc.; ed in generale di ogni altro grado pari superiore; ed in conseguenza possiamo conchiudere, che:

Ogni determinante gobbo simmetrico di grado pari è il quadrato di una funzione intera e razionale de' suoi elementi.

Esempii:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} =a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy+2acxz-2bcyz \\ =(ax-by+cz)^2. \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & -y & z \\ -x & 0 & c & b \\ y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} =a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz \\ =(ax+by+cz)^2. \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} =a_{12}^2\,a_{34}^2+a_{13}^2\,a_{24}^2+a_{14}^2\,a_{23}^2-2a_{12}\,a_{34}\,a_{13}\,a_{24} \\ +2a_{12}\,a_{34}\,a_{14}\,a_{23}-2a_{13}\,a_{24}\,a_{14}\,a_{23} \\ =(a_{12}\,a_{34}-a_{13}\,a_{24}+a_{14}\,a_{23})^2. \end{matrix}$$

È da avvertire che in quest'ultima notazione generale ogni termine o dello sviluppo del quadrato, o della radice, che sia affetto dal —, può ridursi ad avere il +, bastando perciò di scambiar tra loro i due indici di un fattor qualunque del termine. Quindi è, per esempio, che allo sviluppo del precedente determinante di 4° grado può darsi la forma

$$(a_{12}\,a_{34}+a_{13}\,a_{42}+a_{14}\,a_{23})^2.$$

105. Quantunque la dimostrazione da noi data del teorema precedente sia semplicissima e chiara, pure troviamo opportuno di esporne un'altra dovuta al ch. Baltzer, modificata leggiermente. Dobbiamo a quest'uopo rammentar la formola (n° 80)

$$\mathrm{P}=a_{i,i}\,\mathrm{A}_{i,i}-\sum_{r,s} a_{r,i}\,a_{i,s}\,\alpha_{r,s}$$

dove gl'indici r ed s prendono tutt'i valori $1, 2, 3, \ldots, n$, eccetto i, e dove $\alpha_{r,s}$ esprime il complemento algebrico dell'elemento $a_{r,s}$, preso non già nel primitivo P, ma nel determinante $A_{i,i}$; talchè in effetti $\alpha_{r,s}$ è un determinante minore di grado $n-2$ del primitivo P, nascente dal sopprimere le orizzontali i^{ma} ed r^{ma}, e le verticali i^{ma} ed s^{ma}. Ora essendo P gobbo simmetrico di grado pari, si ha $A_{i,i}=0$ (n° 101); ed è inoltre $a_{r,i}=-a_{i,r}$; dunque nella ipotesi attuale la formola di poc'anzi si riduce a

$$P=\sum_{r,s} a_{i,r}\, a_{i,s}\, \alpha_{r,s}\,;$$

e poichè si ha pure (n° 102)

$$\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}=\sqrt{\alpha_{r,r}\,\alpha_{s,s}}\;;$$

così possiamo scrivere invece

$$P=\sum_{r,s} a_{i,r}\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{r,r}\,\alpha_{s,s}}\,.$$

Questa formola intanto può cangiarsi nell'altra

$$P=\left(\sum_r a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\right)\left(\sum_s a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}}\right);$$

ma siccome ciascuno degl'indici r ed s prende i medesimi valori $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, ed il segno di una radice determina quelli di tutte le altre (n° 103), così i due fattori del secondo membro sono identici, e ne risulta

$$P=\left(\sum_r a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\right)^2;$$

da che poi segue

$$\sqrt{P}=\sum_r a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\;;$$

vale a dire

$$\begin{aligned}\sqrt{P}=a_{i,1}\sqrt{\alpha_{1,1}}+a_{i,2}\sqrt{\alpha_{2,2}}+\ldots+a_{i,i-1}\sqrt{\alpha_{i-1,i-1}}\\ +\,a_{i,i+1}\sqrt{\alpha_{i+1,i+1}}+\ldots+a_{i,n}\sqrt{\alpha_{n,n}}\,.\end{aligned}$$

In tal modo $\sqrt{P}$ trovasi decomposto in una somma di $n-1$ termini della forma $a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}$, dove $\alpha_{r,r}$ dinota un determinante gobbo simmetrico di grado pari $n-2$. Supponendo ora ripetuta la medesima decomposizione a riguardo delle $n-1$ radici $\sqrt{\alpha_{1,1}}$, $\sqrt{\alpha_{2,2}}$, etc. l'espressione precedente di $\sqrt{P}$ sarà trasformata in una somma di $(n-1)(n-3)$ termini, ciascun de' quali avrà per fattore la radice di un determinante gobbo simmetrico di grado pari $n-4$. E così continuando è chiaro che si giungerà finalmente a trasformare $\sqrt{P}$ in un polinomio di termini aventi per fattori semplicemente radici di determinanti gobbi simmetrici di 2° grado, le quali perciò equivalgono ad elementi del determinante P; da che risulta in fine che la radice di questo determinante è, come volea dimostrarsi, una funzione intera e razionale de'suoi elementi. E ne risulta inoltre che il numero de'termini di questa funzione ascende ad

$$(n-1)(n-3)(n-5)\times\cdot\cdot\times3\times1=1\times3\times5\times\cdot\cdot\times(n-1);$$

e di più che ogni termine è un prodotto di $\frac{n}{2}$ elementi del determinante P, con indici necessariamente tra loro disuguali; e che perciò formano per ciascuno de' termini una permutazione de'numeri $1, 2, 3, \ldots, n$.

106. La radice del determinante P, vale a dire, quella funzione intera e razionale de'suoi elementi, che lo riproduce elevata a quadrato, è dotata di talune proprietà che danno a tal funzione molto interesse per importanti applicazioni; ma la sua proprietà caratteristica consiste nel cangiar di segno, senza mutar di valore, quando vi si scambiano tra loro due indici qualunque.

In fatti s'indichi con H la detta radice, e sia H_1 ciò ch'essa diviene per lo scambio tra due indici r ed s; sarà così H_1^2 il valore del determinante in cui mutasi P scambiandovi gl'indici r ed s; ma questo scambio nel determinante P equivale a scambiar tra loro la r^{ma} e la s^{ma} orizzontale, e la r^{ma} ed s^{ma} verticale; il che non altera il suo valore; dunque risulta $H_1^2=H^2$. Segue da ciò che le funzioni H_1 ed H non possono differire in altro che nel segno; e per decidere se hanno un segno comune, o segni diversi basterà esaminare i segni che uno stesso termine prende nell'una e nell'altra funzione.

Sia $a_{r,s}\,h$ l'insieme di tutti i termini di H, i quali hanno per fattore l'elemento $a_{r,s}$; così gl'indici di tutti gli elementi, che entrano a comporre la quantità h, saranno differenti da r ed s (n° 105 in fine): e perciò questa quantità resta immutata per lo scambio tra gl'indici r ed s. Segue da ciò che operando questo scambio tra gl'indici di H, perchè divenga H_1, la sua parte $a_{r,s}\,h$ si muterà in $a_{s,r}h$; ma le due quantità $a_{r,s}h$ ed $a_{s,r}h$ sono uguali e di segni contrarii, dunque anche H ed H_1 saranno uguali e di segni contrarii.

È ora evidente che la funzione H diverrebbe nulla rendendovi uguali due indici; e quindi risulta il seguente teorema:

La radice del determinante P, *gobbo simmetrico di grado pari, muta di segno e non di valore, se vi si scambiano tra loro due indici qualunque. E si annulla se due indici vi si rendono uguali.*

107. Scrivendo ad arbitrio un prodotto di $\frac{n}{2}$ elementi del determinante P, se gl'indici sono tutti disuguali, questo prodotto è sempre un termine della radice del determinante. In fatti sia il prodotto di $\frac{n}{2}$ elementi

$$a_{t,u}\,a_{v,x}\ldots a_{y,z},$$

in cui gl'indici t, u, v, x, . . , y, z formino una permutazione dei numeri 1, 2, 3, . . , n, il che equivale a supporli disuguali. Moltiplicando questo prodotto per ciò ch'esso diviene mutandovi ogni elemento nel suo conjugato, si ha il prodotto di n elementi

$$a_{t,u}\,a_{u,t}\times a_{v,x}\,a_{x,v}\times\cdots\times a_{y,z}\,a_{z,y},$$

il quale, a parte il segno, è un termine di P. Per definire questo segno osserveremo che la permutazione de'secondi indici può riguardarsi come derivata dalla permutazione de'primi indici in virtù di $\frac{n}{2}$ scambii operati tra essi a due a due; e perciò il segno di cui trattasi sarà quello che risulta dal simbolo $(-1)^{\frac{n}{2}}$; ma il prodotto di poc'anzi equivale identicamente a

$$(-1)^{\frac{n}{2}}a_{t,u}^2\,a_{v,x}^2\ldots a_{y,z}^2;$$

dunque l' espressione

$$(-1)^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}a^2_{t,v}\,a^2_{v,x}\ldots a^2_{y,z}$$

sarà un termine del determinante **P** col segno che gli compete. Ora questa espressione, essenzialmente positiva, ed equivalente ad

$$(a_{t,u}\,a_{v,x}\ldots a_{y,z})^2,$$

è precisamente il quadrato del prodotto considerato in principio $a_{t,u}\,a_{v,x}\,.\,,\,a_{y,z}$; e perciò un tal prodotto è necessariamente un termine della radice di **P**.

108. Quest'ultima proprietà permette di formare immediatamente ed in molte maniere un termine della radice del determinante **P**; con che tuttavia non si ha che questo termine solo; ma vedremo or ora che da questo termine arbitrariamente formato può dedursi in modo semplicissimo l'espressione completa della radice; ed allora lo stesso termine va distinto col nome di *termine principale della radice*, la quale per compendio si rappresenta col simbolo

$$(a_{t,u}\,a_{v,x}\,,\ldots,\,a_{y,z}),$$

chiudendo cioè tra parentesi il termine principale, o più semplicemente con

$$(t,u,v,x,\ldots,y,z),$$

mettendo in veduta soltanto la permutazione degl'indici come figura nel termine principale.

È poi conseguenza della proprietà esposta al numero 106 che, se in questo simbolo si scambiano tra loro due indici, il nuovo simbolo rappresenta la stessa radice, ma col segno opposto; ed è così per esempio che si ha

$$(t,u,v,x,..,y,z)=-(u,t,v,x,..,y,z)=(u,t,x,v,..,y,z)=\text{etc. etc.}$$

In generale le espressioni della radice corrispondenti a due simboli con due diverse permutazioni, mentre sono sempre uguali in valore assoluto, saranno poi di segni simili o contrarii, secondochè le due permutazioni sono della stessa o di diversa classe; o in altri termini secondochè il numero totale delle loro inversioni è pari, o impari.

Bisogna osservare che, se il prodotto

$$a_{t,u}\, a_{v,x} \dots a_{y,z},$$

anzichè esser formato di $\frac{n}{2}$ elementi, ne comprenda un numero minore, ma pari, si vedrebbe esattamente come al numero 107 che in tal caso esso è un termine della radice del principale minore determinante di P, formato nelle orizzontali definite dai numeri di ordine $t, u, v, x, \dots, y, z$; e quindi uniformemente la radice di questo minore sarebbe rappresentata da

$$(t, u, v, x, \dots, y, z).$$

109. Andremo ora ad esporre il metodo per costruire la radice del determinante P, e che possiamo rappresentar col simbolo

$$(1, 2, 3, 4, \dots, n),$$

ov'è messa in veduta la permutazione diretta. Col soccorso di questo simbolo cominceremo dallo sviluppare la radice in un polinomio di $n-1$ termini ugualmente simbolici; ed ecco in qual modo. In primo luogo caveremo fuori del simbolo i primi due numeri 1 e 2 per darli come primo e secondo indice ad a; e formeremo così il primo termine del detto polinomio simbolico

$$a_{1,2}\,(3, 4, 5, \dots, n),$$

nel quale il secondo fattore esprime la radice di un determinante gobbo simmetrico di grado $n-2$, e propriamente del principale minore, che si forma da P, sopprimendone le due prime orizzontali e le due prime verticali. Da questo termine poi dedurremo tutti gli altri termini dello sviluppo con la legge seguente, « Ri-
» manendo fisso il primo de'due indici esterni, muteremo succes-
» sivamente il secondo in ciascuno de'numeri interni; a patto pe-
» rò che, mentre è il primo di questi numeri interni quello che
» ogni volta prender deve il posto del secondo indice esterno, il
» numero, che si toglie da questo posto, vada ritornato al di den-

» tro del simbolo, per esservi sempre situato in ultimo luogo »
Risulta in siffatta guisa lo sviluppo, che trattasi di dimostrare,

$$(1,2,3,\ldots,n)=a_{1,2}(3,4,5,\ldots,n)+a_{1,3}(4,5,\ldots,n,2)$$
$$+a_{1,4}(5,6,\ldots,n,2,3)+\cdots+a_{1,n}(2,3,4,\ldots,n-1). \quad (1)$$

Osserviamo che lo sviluppo di $\sqrt{P}$, già dato al n° 105, per $i=1$ diviene

$$\sqrt{P}=a_{1,2}\sqrt{\alpha_{2,2}}+a_{1,3}\sqrt{\alpha_{3,3}}+a_{1,4}\sqrt{\alpha_{4,4}}+\cdots+a_{1,n}\sqrt{\alpha_{n,n}} \quad (2)$$

ed è manifesto che i termini di questo sviluppo non differiscono in valore assoluto da quelli del precedente simbolico sviluppo, poichè si ha, fatta astrazion da'segni,

$$\sqrt{\alpha_{2,2}}=(3,4,5,\ldots,n)\ ,\ \sqrt{\alpha_{3,3}}=(4,5,6,\ldots,n.2),\ldots,$$
$$\sqrt{\alpha_{n,n}}=(2,3,4,\ldots,n-1).$$

Quindi, siccome lo sviluppo (2) esprime un valore di $\sqrt{P}$ nella ipotesi che i coefficienti di $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, etc. rendano soddisfatta la relazione (n° 105)

$$\sqrt{\alpha_{r,r}\,\alpha_{s,s}}=\alpha_{r,s}, \quad (3)$$

per dimostrare la (1) basterà dimostrare che i coefficienti simbolici del secondo membro verificano la (3). In somma ponendo, in generale, senza ambiguità di segni

$$\sqrt{\alpha_{r,r}}=(r+1,r+2,\ldots,n,2,3,\ldots,r-1)=R,$$
$$\sqrt{\alpha_{s,s}}=(s+1,s+2,\ldots,n,2,3,\ldots,s-1)=S;$$

avremo a provare che si ha identicamente

$$RS=\alpha_{r,s};$$

anzi poichè il prodotto RS ed il determinante $\alpha_{r,s}$ sono, per ipotesi, uguali in valore assoluto, basterà provare che uno stesso termine prende nelle due funzioni uno stesso segno.

A tal'effetto cominceremo per rendere dirette le permutazioni di R ed S; ed osservando che nell'una vi sono $(n-r)$ $(r-2)$ inversioni, perchè ciascuno de' primi $n-r$ elementi fa inversione con ciascuno de' rimanenti $r-2$, e nell'altra $(n-s)(s-2)$; ed osservando che questi due numeri possono ridursi ad r ed s, avremo

$$R=(-1)^r\,(2,3,..,r-1,r+1,..,n) \tag{4}$$

$$S=(-1)^s\,(2,3,..,s-1,s+1,..,n) \tag{5}$$

Dopo ciò nelle permutazioni (4) e (5) porteremo in ultimo luogo s nella prima ed r nell'altra; ed allora, supposto per fissar le idee $r<s$, troveremo

$$R=(-1)^{r-s}\quad(2,3,..,r-1,r+1,..,s-1,s+1,..,n,s) \tag{6}$$

$$S=(-1)^{s-r-1}\,(2,3,..,r-1,r+1,..,s-1,s+1,..,n,r) \tag{7}$$

Di fatti nella (6) ciascun de'numeri da $s+1$ fino ad n fa inversione con l'ultimo s; e però vi sono $n-s$ inversioni; quindi essendo questo numero riducibile a $-s$, si vede come dalla (4) derivi la (6). Così pure nella (7) ogni numero da $r+1$ fino ad n fa inversione con l'ultimo r; ma siccome nella serie di quei numeri manca s, essendo per ipotesi $r<s$, si hanno attualmente $n-r-1$ inversioni; e per la riduzione di questo numero a $-(r+1)$ resta dimostrato il passaggio dalla (5) alla (7).

Moltiplicando i termini principali (n° 108) di (6) e (7) si ha l'espressione

$$-a_{2,3}\,a_{4,5}\ldots a_{n-2,\,n-1}\,a_{n,s}\times a_{2,3}\,a_{4,5}\ldots a_{n-2,\,n-1}\,a_{n,r}$$

quale un termine del prodotto RS, col segno che gli compete. Ciascuna delle due parti separate dal segno $\times$ comprende $\frac{n}{2}-1$ elementi; ma bisogna osservare che gli elementi della prima parte, eccetto l'ultimo $a_{n,s}$, non sono diversi da quelli della seconda, eccetto l'ultimo $a_{n,r}$; e perciò, se gli elementi della seconda parte si mutano ne'loro conjugati $-a_{3,2}, -a_{5,4}, \ldots, -a_{r,n}$, l'espressione del detto termine appartenente ad RS prenderà la forma

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\,a_{2,3}\,a_{3,2}\times a_{4,5}\,a_{5,4}\times\cdots\times a_{n-2,n-1}\,a_{n-1,n-2}\times a_{n,s}\,a_{r,n} \tag{8}$$

Questa espressione è un prodotto di $n-2$ elementi, nei quali la serie dei primi indici è una permutazione dei numeri naturali $2, 3, 4, .. n$, escluso s, e quella de'secondi una permutazione de'medesimi numeri, escluso r; e però un tal prodotto, fatta astrazione dal segno che lo precede, è ancora un termine del determinante di grado $n-2$, $\alpha_{r,s}$; ma, se dinotiamo con ε il numero totale delle inversioni nei primi e secondi indici, è poi chiaro che il segno che gli conviene in questo determinante è quello definito dal simbolo $(-1)^{\varepsilon+r+s}$, tenendo presente che $\alpha_{r,s}$ è il complemento algebrico dell'elemento $a_{r,s}$, preso nel determinante $A_{1,1}$, e che perciò (n° 81) è affetto dal segno $(-1)^{r+s}$. Essendo ora necessario di definire il valore di ε, esprimente il numero totale delle inversioni nelle due permutazioni de'primi e secondi indici de'fattori del prodotto (8), che sono

$$2, 3, 4, 5, \ldots, n-2, n-1, n, r,$$

$$3, 2, 5, 4, \ldots, n-1, n-2, s, n,$$

vediamo che la prima coincide con la (7), ed ha quindi $n-r-1$ inversioni; mentre l'altra è ciò che diviene la (6) scambiando tra loro il primo e secondo elemento, il terzo ed il quarto, e così di seguito; così oltre alle inversioni che vi fanno col penultimo elemento s i numeri più grandi, che lo precedono, vale a dire $s+1, s+2, .., n-1$, e che sono $n-s-1$, v'ha pure le inversioni che il primo fa col secondo, il terzo col quarto, e così continuando fino all'antipenultimo $n-2$, e che perciò sono $\frac{n}{2}-2$. Risulta in conseguenza

$$\varepsilon = (n-r-1) + (n-s-1) + \frac{n}{2} - 2;$$

ma siccome per la soppressione de'numeri pari è lecito di assumere $\varepsilon = \frac{n}{2} - r - s$, si ha infine

$$\varepsilon + r + s = \frac{n}{2};$$

e da ciò segue che l'espressione (8) è per valore e per segno un termine comune al prodotto RS, ed al determinante $\alpha_{r,s}$. Queste funzioni adunque sono tra loro identicamente uguali; e con ciò resta dimostrata la formola (1).

Ripetendo un analogo procedimento a riguardo de'coefficienti del secondo membro di questa formola, l'espressione della radice del determinante P si troverà sviluppata in una somma di prodotti di due elementi moltiplicati per le radici di determinanti gobbi simmetrici di grado $n-4$; e così continuando si perverrà infine alla radice di P, espressa unicamente per mezzo de'suoi elementi.

Esempii:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{4,1} & \cdot & \cdot & a_{4,4} \end{vmatrix} = \left(1,2,3,4\right)^2 = \left(a_{12}\,(3,4) + a_{13}\,(4,2) + a_{14}\,(2,3)\right)^2$$
$$= \left(a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}\right)^2$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{16} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{61} & \cdot & \cdot & a_{66} \end{vmatrix} = \left(1,2,3,4,5,6\right)^2$$
$$= \left\{\begin{matrix} a_{12}\,(3,4,5,6) + a_{13}\,(4,5,6,2) + a_{14}\,(5,6,2,3) \\ + a_{15}\,(6,2,3,4) + a_{16}\,(2,3,4,5) \end{matrix}\right\}^2$$

$$= \left\{\begin{matrix} a_{12}\left(a_{34}\,(5,6) + a_{35}\,(6,4) + a_{36}\,(4,5)\right) \\ + a_{13}\left(a_{45}\,(6,2) + a_{46}\,(2,5) + a_{42}\,(5,6)\right) \\ + a_{14}\left(a_{56}\,(2,3) + a_{52}\,(3,6) + a_{53}\,(6,2)\right) \\ + a_{15}\left(a_{62}\,(3,4) + a_{63}\,(4,2) + a_{64}\,(2,3)\right) \\ + a_{16}\left(a_{23}\,(4,5) + a_{24}\,(5.3) + a_{25}\,(3,4)\right) \end{matrix}\right\}^2$$

$$= \left\{\begin{matrix} a_{12}\left(a_{34}a_{56} + a_{35}a_{64} + a_{36}a_{45}\right) + a_{13}\left(a_{45}a_{62} + a_{46}a_{25} + a_{42}a_{56}\right) \\ + a_{14}\left(a_{56}a_{23} + a_{52}a_{36} + a_{53}a_{62}\right) + a_{15}\left(a_{62}a_{34} + a_{63}a_{42} + a_{64}a_{23}\right) \\ + a_{16}\left(a_{23}a_{45} + a_{24}a_{53} + a_{25}a_{34}\right) \end{matrix}\right\}^2$$

110. Nella ipotesi che il determinante P sia gobbo simmetrico, cercandone la derivata rispetto ad un elemento qualunque

$a_{r,s}$ si ha dapprima, esattamente come al n.° 98,

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = A_{r,s} + A_{s,r}\frac{da_{s,r}}{da_{r,s}}$$

ma essendo $a_{s,r} = - a_{r,s}$ la derivata che figura nell'ultimo termine equivale a -1; dunque

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = A_{r,s} - A_{s,r}.$$

Ora, se P è di grado dispari, la sua derivata è nulla (n.° 100, 1) al pari dello stesso P; e quindi si ha in tal caso $A_{r,s} = A_{s,r}$; risultamento già noto (n° 100). Se poi il determinante P è di grado pari si ha $-A_{s,r} = A_{r,s}$; e conseguentemente

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = 2A_{r,s}.$$

Perciò:

La derivata di un determinante gobbo simmetrico rispetto ad un elemento qualunque è nulla, se il determinante è di grado dispari; e, se di grado pari, è doppia del complemento algebrico dello stesso elemento,

111. Derivando l'equazione identica

$$P = (\sqrt{P})^2$$

rispetto ad un elemento $a_{r,s}$ si ha

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = 2\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,s}},$$

ma se P è gobbo simmetrico di grado pari il primo membro equivale a $2A_{r,s}$; così risulta in questa ipotesi

$$A_{r,s} = \sqrt{P}\,\frac{dP}{da_{r,s}}.$$

Intanto essendo per le proprietà generali dei determinanti

$$P = a_{r,1}A_{r,1} + a_{r,2}A_{r,2} + \cdots + a_{r,n}A_{r,n}$$

$$0 = a_{r,1}A_{s,1} + a_{r,2}A_{s,2} + \cdots + a_{r,n}A_{s,n}$$

in virtù della relazione precedente queste formole si riducono a

$$\sqrt{P}=a_{r,1}\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,1}}+a_{r,2}\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,2}}+\cdot\cdot+a_{r,n}\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,n}};$$

$$0=a_{r,1}\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,1}}+a_{r,2}\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,2}}+\cdot\cdot+a_{r,n}\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,n}};$$

e si ha il seguente teorema:

In ogni determinante gobbo simmetrico di grado pari la somma de'prodotti degli elementi di qualunque linea per le derivate della radice del determinante rispetto agli elementi medesimi, equivale alla stessa radice. Ed è poi nulla la somma de'prodotti degli elementi di qualunque linea per le derivate della radice del determinante rispetto ai corrispondenti elementi di un'altra linea dello stesso nome.

112. Per le applicazioni delle ultime formole supponendo

$$\sqrt{P}=(r,1,2,..,r-1,r+1,..,n)=a_{r,1}(2,3,..,r-1,r+1,..,n)+\cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot+a_{r,s}(s+1,s+2,..,n,1,2,..,s-1)+\cdot\cdot$$

risulta

$$\frac{dP}{da_{r,s}}=(s+1,\ s+2,\ldots,n,1,2,\ldots,s-1),$$

e questa espressione, in cui mancano r ed s, può farsi servire a calcolare i coefficienti delle dette formole.

Determinanti gobbi.

113. Se un determinante gobbo si decomponga in determinanti in cui siano nulli gli elementi principali, com'è prescritto al n° 72, i determinanti che risultano da siffatta decomposizione saranno tutti gobbi simmetrici (n° 92). Intanto, lasciando da banda il caso generale, ch'è il men frequente nelle applicazioni, osserveremo che il caso meritevole di maggiore attenzione si ha quando gli elementi principali del determinante gobbo sono tra loro tutti uguali. Dinotando adunque P un determinante di tal natura, supporremo $a_{1,1}=a_{2,2}=\cdot\cdot=a_{n,n}=x$; ed allora, se s'indica con P_0 ciò che diviene il determinante P, quando vi si fa $x=0$, e con $\Sigma P_{0,r}$

la somma di tutt'i principali minori di grado r di P_0, conformemente alla trasformazione esposta al n° 72 si avrebbe

$$P=x^n+x^{n-1}\Sigma P_{0,1}+x^{n-2}\Sigma P_{0,2}+\cdots+x^2\Sigma P_{0,n-2}+x\Sigma P_{0,n-1}+P_0\ ;$$

ma siccome tutt'i determinanti che figurano nel secondo membro sono gobbi simmetrici; ed ogni determinante gobbo simmetrico i grado dispari è nullo, così sarà $\Sigma P_{0,1}=0$, $\Sigma P_{0,3}=0$, $\Sigma P_{0,5}=0$, etc.; e quindi risulta, se n è pari,

$$P=x^n+x^{n-2}\Sigma P_{0,2}+x^{n-4}\Sigma P_{0,4}+\cdots+x^2\Sigma P_{0,n-2}+P_0\ ;$$

e se n è dispari,

$$P=x^n+x^{n-2}\Sigma P_{0,2}+x^{n-4}\Sigma P_{0,4}+\cdots+x^3\Sigma P_{0,n-3}+x\Sigma P_{0,n-1}\ ;$$

e nell'uno e nell'altro caso i determinanti che entrano nei secondi membri saranno quadrati perfetti, perchè gobbi simmetrici di grado pari; ma in riguardo alla prima di queste due formole merita di esser notato che tutt'i termini del secondo membro sono composti di quadrati, e sempre positivi, qualunque sia il segno di x; e da ciò segue, che:

Un determinante gobbo di grado pari, in cui siano uguali tra loro gli elementi principali, può essere sviluppato in una somma di quadrati, ed è quindi una quantità essenzialmente positiva.

Esempio:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix}=x^4+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)x^2+(af-be+cd)^2$$

Quando gli elementi principali di P sono tutti uguali ad 1, le formole precedenti si riducono a

per n pari , $P=1+\Sigma P_{0,2}+\Sigma P_{0,4}+\cdots+\Sigma P_{0,n-2}+P_0$;

per n dispari , $P=1+\Sigma P_{0,2}+\Sigma P_{0,4}+\cdots+\Sigma P_{0,n-3}+\Sigma P_{0,n-1}$.

Attualmente i termini de' secondi membri sono formati di somme di quadrati; e si ha perciò l'altro teorema:

Un determinante gobbo di qualunque grado, che abbia tutti gli elementi principali uguali ad 1, può svilupparsi in una somma di quadrati, ed è quindi una quantità positiva.

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2 .$$

§. XI.

MATRICI E DETERMINANTI A DUE SCALE.

114. Quando alcuni de' primi o ultimi elementi di una linea di una matrice sono nulli per ipotesi, chiameremo elemento *iniziale* ed elemento *finale* della linea il primo od ultimo di quelli che hanno valore effettivo.

Ciò premesso, se in una matrice vi siano r successive orizzontali così disposte che i loro elementi iniziali cadano in successive verticali, diremo ch'esse formano un *sistema a scala,* la quale sarà *diretta,* se il numero degli elementi nulli, che precedono gli elementi iniziali, cresce da una orizzontale all'altra; ed *inversa* nel caso opposto. Se di più gli elementi effettivi di ciascuna orizzontale sieno i termini di una stessa serie, diremo ch'esse formano *una scala di grado r, diretta* o *inversa;* e la serie si chiamerà *serie generatrice* della scala. Così in ciascuna delle matrici

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & . & . \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_r & . & . \end{vmatrix}$$

si ha una scala di grado r relativa alla serie a_0, a_1, a_2, etc., diretta nella prima matrice, ed inversa nella seconda.

Se i termini della serie generatrice sono, come in questi esempii, figurati da una lettera variata con indici crescenti in ordine naturale, per indicare o la serie, o una scala di grado r, useremo il simbolo (a_0), cioè chiuderemo tra parentesi il primo termine della serie; e, se occorra di tenere in vista il grado della scala, scriveremo $(a_0)_r$.

È importante ad osservarsi che nella notazione degli esempii medesimi gl'indici in ogni verticale procedono anch'essi in ordine naturale, decrescente da sopra in sotto nella scala diretta, crescente nella inversa.

Una scala è *completa* se l'elemento iniziale della prima o ultima orizzontale appartenga alla prima verticale della matrice. In altro caso la scala è *incompleta;* ma, a meno che non si avverta il contrario, intenderemo sempre che si tratti di scale complete.

È chiaro che nella scala di grado r l'elemento iniziale dell'ultima orizzontale, se la scala è diretta, e della prima, se è inversa, appartiene alla r^{ma} verticale della matrice, ed è preceduto da $r-1$ elementi nulli. Quindi in una matrice che contenga solo una scala di grado r, formata con una serie generatrice di k termini, le verticali saranno al numero di $k+r-1$.

115. Più specialmente avremo qui a considerare matrici a due scale costruite come segue. Siano le due serie

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_\varepsilon, & a_{\varepsilon+1}, & a_{\varepsilon+2}, & \ldots, & a_m \\ & & & & b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{array}$$

dove, supposto che m non sia minore di n, si è messo

$$\varepsilon = m - n;$$

così, mentre ε esprime la differenza tra i numeri de' termini delle due serie, nella prima da a_ε ad a_m si contano tanti termini, quanti sono quelli della seconda. Posto ciò formeremo una matrice a due scale (a_0) e (b_0), l'una superiore e diretta, di grado qualunque r, l'altra inferiore ed inversa di grado s, ma a patto che gli elementi dell'ultima orizzontale della scala superiore, a contare da a_ε fino all'ultimo a_m, siano verticalmente allineati con tutti gli elementi della prima orizzontale della scala inferiore, à contare dall'iniziale b_0 fino all'ultimo b_n, di guisa che b_0 cadrà immediatamente al di sotto di a_ε. Per questa condizione il grado s della scala inferiore non è più arbitrario; ed è evidente che questa scala è formata da tante orizzontali, quanti sono gli elementi dell'ultima linea della scala superiore, dall'iniziale a_0 fino ad a_ε, più il numero degli elementi nulli, che precedono l' iniziale; e siccome i primi sono $\varepsilon+1$, e gli altri $r-1$, sarà

$$s=(\varepsilon+1)+(r-1)=r+\varepsilon=r+m-n \qquad (1)$$

ed intanto per la descritta matrice avremo il seguente tipo

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_0 & a_1 & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & . & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & a_s & . & a_{r+s-1} & . \; . \\
0 & a_0 & . & a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & . & a_{s-4} & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & . & a_{r+s-2} & . \; . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \; . \\
0 & 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & a_{\varepsilon+2} & . & a_{s+1} & . \; . \\
0 & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & . & a_s & . \; . \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & b_1 & . & b_r & . \; . \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_{r+1} & . \; . \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & b_0 & a_1 & b_2 & b_3 & . & b_{r+2} & . \; . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \; . \\
0 & b_0 & . & b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & . & b_{s-4} & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & . & b_{r+s-2} & . \; . \\
b_0 & b_1 & . & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & . & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & . & b_{r+s-1} & . \; .
\end{array}\right|$$

Intorno a questa matrice faremo le seguenti osservazioni.

I. Finchè sia $\varepsilon > 0$, o, ch'è lo stesso, $m > n$, il grado della scala superiore sarà minore del grado della inferiore; e gli sarà uguale se $\varepsilon = o$, cioè se $m = n$.

II. Quando la matrice è estesa in sulla dritta fin dove lo comportano le due serie generatrici, gli elementi finali delle orizzontali di ciascuna scala saranno anch'essi disposti a scala, formando una linea obliqua parallela a quella degl'iniziali; ma in particolare è da notarsi che l'ultimo elemento a_m dell'ultima orizzontale della scala superiore, e l'ultimo b_n della prima orizzontale della inferiore staranno entrambi nell'ultima verticale della matrice.

III. Il numero totale delle verticali di questa matrice è uguale a quello delle verticali della matrice, che si formerebbe o solo con la scala superiore, o solo con la inferiore; e sarà quindi espresso o da $m+r$, o da $n+s$; e di fatti dalla relazione (1) risulta $m+r=n+s$.

116. Nella matrice a due scale chiamiamo *associate* due orizzontali equidistanti dalle estreme; laonde sarà la prima associata all'ultima, la seconda alla penultima; e così di seguito. Dunque, se le due scale sono di gradi uguali, ad ogni orizzontale dell'una corrisponde un'associata nell'altra;ma se i gradi differiscono di ε, per ciascuna delle prime ε orizzontali della scala inferiore non vi sarà la corrispondente associata nell' altra scala. È chiaro che in due orizzontali associate della matrice a due scale (a_0) e (b_0) gli elementi iniziali a_0 e b_0 si trovano in una stessa verticale, al pari di due altri elementi qualunque affetti dai medesimi indici.

117. Considerando la serie delle matrici a due scale (a_0) e (b_0) nelle quali i gradi delle scale superiori siano i numeri naturali 1,2,3,etc., vedremo da (1),che i gradi delle inferiori sono espressi da $1+\varepsilon$, $2+\varepsilon$, $3+\varepsilon$, etc. Ora noi distingueremo queste matrici per ordini, e l'ordine di una matrice sarà il grado della scala superiore; quindi, se questo grado è 1, la matrice è del 1.° ordine; se 2, del 2.° ordine, etc.

118. Data qualunque matrice di p orizzontali e q verticali, e supposto $q>p$,combinando le prime $p-1$ verticali con ciascuna delle altre, ne risulta una serie di $q-p+1$ determinanti, che chiamiamo *sistema dei successivi determinanti* della matrice, distinguendo con l'epiteto di *principale* il primo di essi, il quale è formato dalle prime p verticali, e da cui ciascuno degli altri differisce soltanto nell'ultima verticale. Così per esempio la matrice di tre orizzontali e cinque verticali

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' \end{vmatrix}$$

dà luogo al sistema de' tre successivi determinanti

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & e \\ a' & b' & e' \\ a'' & b'' & e'' \end{vmatrix}$$

il primo de' quali è il determinante *principale*; mentre il secondo ed il terzo sono ciò che diviene il principale cambiandovi successivamente l'ultima sua verticale nella quarta e nella quinta verticale della data matrice.

Si comprende che, se $p > q$, la matrice non può dar luogo a determinanti; e, se $p = q$, la matrice è quadrata, e darà luogo ad un solo determinante.

119. Sia N_r il numero de'successivi determinanti della matrice a due scale (a_0) e (b_0) di gradi r ed s; ed essendo in questo caso $p = r + s$, $q = n + s$ (n° 115, III.), sarà

$$N_r = n - r + 1 .$$

Segue da questa formola che i successivi determinanti delle matrici degli ordini 1°, 2°, 3°, . . , $(n-1)^{mo}$, n^{mo} sono viceversa in numero di n, $n - 1$, $n - 2$. . . , 2, 1; così la matrice in cui la scala superiore è di grado n, è quella dell'ordine il più elevato, e la sua scala inferiore sarà di grado m. Nella matrice dell'ordine $n + 1$ il numero delle orizzontali supera di *uno* quello delle verticali; e quindi non vi è più luogo a determinanti.

Nel sistema de' successivi determinanti di una matrice a due scale (a_0) e (b_0) il principale si distingue dagli altri in ciò che in quello gl'indici procedono in ogni orizzontale nell'ordine naturale fino all'ultimo; mentre negli altri la continuità degl'indici è interrotta dalla penultima all'ultima verticale. È chiaro intanto che, se gl'indici di tutti gli elementi dell'ultima verticale del principale determinante si aumentano di 1, si ha il secondo determinante del sistema; se di 2, si ha il terzo; etc.; ed in generale aumentandoli di p unità, si avrà il $(p + 1)^{mo}$ determinante della matrice.

È utile di notare che nell'ultima verticale del principale determinante il primo ed ultimo elemento hanno per indice il numero $r + s - 1$; ond'è che il tipo della sua matrice si ha in quella del n° 115, limitata alla verticale che si è messa in veduta in ultimo luogo. E gioverà pure di tener presente che i due elementi di quest' ultima verticale appartenenti rispettivamente all' ultima orizzontale della scala superiore ed alla prima della inferiore, vale a dire i due elementi a_s e b_r, sono quelli i di cui indici esprimono inversamente il grado della scala inferiore, ed il grado della superiore.

120. Per indicare in modo conciso la matrice a due scale (a_0) e (b_0) di gradi r ed s si offre spontanea la notazione

$$\begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}$$

che faremo ancora servire a rappresentare qualunque de' suoi successivi determinanti, applicandole esternamente un indice uguale al numero di ordine del determinante che si considera, diminuito però di *uno;* di modo che il principale determinante avrà l' indice 0, il secondo l'indice 1, il terzo il 2, etc.; e perciò gli $n-r+1$ determinanti della matrice saranno ordinatamente dinotati da

$$\begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_0 , \quad \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_1 , \quad \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_2 , \ldots , \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_{n-r}$$

Ma spesso indicheremo la matrice con una semplice lettera, cui talvolta daremo per indice il suo numero di ordine, vale a dire il grado della scala superiore; ed allora per indicare uno qualunque de'successivi determinanti aggiungeremo al detto simbolo, come secondo indice, il numero di ordine del determinante, sempre diminuito di *uno*. Così se la matrice s'indica con M_r, i suoi successivi determinanti saranno rappresentati da $\mathrm{M}_{r,0}$, $\mathrm{M}_{r,1}$, $\mathrm{M}_{r,2}$, etc.

In generale se M ed N dinotino due distinte matrici, che abbiano uno stesso numero di successivi determinanti, ed avvenga che quelli della prima siano, uno ad uno, ordinatamente uguali a quelli dell'altra, scriveremo

$$\mathrm{M} = \mathrm{N}:$$

uguaglianza complessiva, che si risolve in tante uguaglianze, quanti sono i successivi determinanti di una delle matrici.

121. Intorno ai successivi determinanti di qualunque matrice notiamo ciò che segue:

I. Se ad una orizzontale se ne aggiungano, o tolgano delle altre, i determinanti della matrice non mutano di valore; e se una o più orizzontali si moltiplichino per quantità arbitrarie, i successivi determinanti saranno tutti moltiplicati pel prodotto delle stesse quantità.

II. Se le prime r orizzontali formano un sistema a scala diretta, e siano nulli tutti gli altri elementi delle prime r verticali, i successivi determinanti saranno divisibili pel prodotto degli elementi iniziali delle prime r orizzontali; ed i quozienti saranno i successivi determinanti della matrice che si forma dalla data sopprimendone le prime r orizzontali, e le prime r verticali (n°42).

III. Viceversa, se ad una matrice si aggiungano r prime orizzontali, ed r prime verticali, a patto che quelle formino un sistema a scala diretta, ed in queste siano nulli tutti gli altri elementi, i successivi determinanti della nuova matrice saranno uguali a quelli della prima, moltiplicati pel prodotto degli elementi iniziali delle r orizzontali che si sono aggiunte.

122. Stabilite queste nozioni esporremo una speciale trasformazione di cui sono suscettibili le matrici a due scale, o meglio i loro successivi determinanti. Intanto in ciò che segue useremo il simbolo $(a_r b_s)$ per esprimere la differenza de' due monomii $a_r b_s$, $b_r a_s$, i quali si mutano l'uno nell'altro cambiando a in b, e viceversa; talchè sarà

$$(a_r b_s) = a_r b_s - b_r a_s.$$

Risulta da questa convenzione:

I. Che l'espressione $(a_r b_s)$ è nulla, se $r = s$.

II. Che le due espressioni $(a_r b_s)$ ed $(a_s b_r)$ sono tra loro uguali e di segni contrarii.

III. E che, supposto $r < s$, è nulla un'espressione della forma

$$(a_r b_s) + (a_{r+1} b_{s-1}) + \cdots + (a_{s-1} b_{r+1}) + (a_s b_r),$$

dove l'indice di a cresce in ordine naturale da r ad s, mentre quello di b decresce da s ad r. In fatti i termini equidistanti dagli estremi sono uguali a due a due, e perciò si distruggono.

Ciò premesso per rendere evidentissima la trasformazione, di cui trattasi, distingueremo due casi, secondochè i gradi delle due scale sono uguali, o disuguali.

Caso 1°.

Trasformazione delle matrici a due scale di gradi uguali.

123. Supposto che le serie generatrici delle due scale siano

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ a_n\ , \qquad (a_0)$$

$$b_0\ ,\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ b_n\ , \qquad (b_0)$$

per la matrice dell'ordine r^{mo}, che dinotiamo con D_r , avremo il seguente tipo

$$\left|\begin{array}{cccccc|ccccccccc}
a_0 & . & a_{r-p} & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & . & a_{r+q-1} & . & a_{r+s-p} & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & a_0 & . & a_{p-2} & a_{p-1} & a_p & a_{p+1} & . & a_{q+q-1} & . & a_s & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{q+1} & . & a_{s-p+2} & . & a_n & 0 \\
0 & . & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_q & . & a_{s-p+1} & . & a_{n-1} & a_n \\
 & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & . & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_q & . & b_{s-p+1} & . & b_{n-1} & b_n \\
0 & . & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & . & b_{q+1} & . & b_{s-p+2} & . & b_n & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & b_0 & . & b_{p-2} & b_{p-1} & b_p & b_{p+1} & . & b_{p+q+1} & . & b_s & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
b_0 & . & b_{p-2} & . & b_{r-2} & b_{r-r} & b_r & b_{r+1} & . & b_{r+q+1} & . & b_{r+s-p} & . & 0 & 0
\end{array}\right| \qquad (\mathrm{D}_r)$$

In questo tipo, oltre alle prime ed ultime orizzontali di ciascuna scala, si è pur messa in veduta la p^{ma} orizzontale della scala inferiore, e l'associata nella superiore (n°116); e, per le ragioni che or ora vedremo, le prime r verticali sono state separate dalle rimanenti con un tratto rettilineo. Ora noi sommetteremo questa matrice alla seguente trasformazione:

» Rimanendo inalterata la scala superiore, moltiplicheremo » tutte le orizzontali della inferiore per a_0; indi a ciascuna ag- » giungeremo tutte le altre che la precedono in questa scala or- » dinatamente moltiplicate per a_1, a_2, a_3, etc:, e dalla somma » toglieremo le loro associate nella scala superiore, ordinatamen- » te moltiplicate per b_0, b_1, b_2, etc.

S'indichi con D′ la nuova matrice; e siccome la medesima è, al pari della primitiva D_r, costituita con $2r$ orizzontali ed $n+r$ verticali (n° 115,III), sopprimendone le prime r orizzontali e le prime r verticali, otterremo un'altra matrice di r orizzontali ed n verticali, che dinoteremo con Δ_r, e che sarà distinta col nome di *ridotta* della matrice a due scale D_r; ed intanto andremo a dimostrare che: *I successivi determinanti di* D_r *sono ordinatamente uguali ai successivi determinanti della ridotta* Δ_r.

In fatti segue dalla legge di trasformazione che i successivi determinanti di D′ sono uguali a quelli di D_r, moltiplicati per a_0^r (n° 121, I.); e però si ha l'uguaglianza complessiva (n° 120)

$$D' = a_0^r D_r . \qquad (1)$$

Inoltre è chiaro che gli elementi nulli, i quali precedono gli elementi iniziali in tutte le orizzontali della scala inferiore di D_r, si riproducono ancora come nulli in D′. In fine, se dinotiamo con un simbolo c l'elemento di D′, trasformato di un elemento qualunque b_s della p^{ma} orizzontale della scala inferiore di D_r, si avrà

$$c = a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \cdots + a_{p-1} b_{s-p+1} - (b_0 a_s + b_1 a_{s-1} + \cdots + b_{p-1} a_{s-p+1})$$

o più brevemente (n° 122)

$$c = (a_0 b_s) + (a_1 b_{s-1}) + \cdots + (a_{p-1} b_{s-p+1}) . \qquad (2)$$

In questa formola l'indice di a cresce da *zero* a $p-1$, e quello di b decresce da s ad $s-p+1$; ma bisogna osservare che, se l'elemento b_s, che per ipotesi appartiene alla p^{ma} orizzontale della scala inferiore di D_r, si trovi ancora di appartenere ad una delle prime r verticali, allora l'indice di b decrescerà necessariamente fino a *zero*, perchè ciascuna di queste verticali contiene l'elemento iniziale b_0; e però in tal caso si ha (n° **122**, **III**)

$$c=(a_0 b_s)+(a_1 b_{s-1})+\cdots+(a_{s-1} b_1)+(a_s b_0)=0$$

Segue da ciò che nella matrice $\mathbf{D}'$ sono nulli tutti gli elementi delle prime r verticali appartenenti alle ultime r orizzontali; e quindi i suoi successivi determinanti, divisi per a_0^r, saranno uguali a quelli dell'altra matrice che si forma da essa sopprimendone le prime r orizzontali e le prime r verticali (n° **121**, **II**); vale a dire saranno uguali a quelli della ridotta Δ_r; ed in conseguenza si ha l'eguaglianza complessiva

$$\mathbf{D}'=a_0^r\,\Delta_r\,,$$

donde in virtù della (1) si ha l'altra

$$\mathbf{D}_r=\Delta_r\,;$$

e ciò dimostra, come si è annunciato, che i successivi determinanti della matrice a due scale $\mathbf{D}_r$ equivalgono a quelli della ridotta Δ_r.

124. I determinanti della matrice primitiva trovansi in siffatta guisa trasformati in determinanti di grado metà; e ciò è bene importante pel calcolo numerico; ma ora aggiungiamo che la stessa ridotta Δ_r può essere costruita con un metodo molto più rapido e semplice di quello che risulta dalla legge di trasformazione. Supponendo che questa ridotta sia

$$\left|\begin{array}{ccccccc} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdot & c_{1,q} & \cdot & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdot & c_{2,q} & \cdot & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p,1} & c_{p,2} & c_{p,3} & \cdot & c_{p,q} & \cdot & c_{p,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r,1} & c_{r,2} & c_{r,3} & \cdot & c_{r,q} & \cdot & c_{r,n} \end{array}\right| \qquad (\Delta_r)$$

osserveremo che il suo elemento $c_{p,q}$ è il trasformato di quell'elemento della matrice $\mathbf{D}_r$, che appartiene alla p^{ma} orizzontale della scala inferiore, ed alla $(r+q)^{ma}$ verticale, e quindi dell'elemento b_{p+q-1}. Così, per avere l'espressione di $c_{p,q}$, basterà mutare nella (2) l'indice s in $p+q-1$; ed in tal modo si ha la formola

$$c_{p,q}=(a_0 b_{p+q-1})+(a_1 b_{p+q-2})+(a_2 b_{p+q-3})+\cdots+(a_{p-1}\,b_q),$$

la quale porge tutti gli elementi di Δ_r, dando a p e q tutti i valori 1, 2, 3, . . , n. In questa espressione di $c_{p,q}$ è costante per ogni termine la somma degl'indici di a e b, ed uguale a $p+q-1$, cioè *uguale alla somma de'due indici di* c *diminuita di uno;* inoltre l'indice di a vi cresce da *zero* a $p-1$, mentre quello di b decresce da $p+q-1$ fino a q. Laonde essa costa in generale di p termini; ma questo numero è minore nei seguenti casi:

I. Se $p+q-1>n$ la formola perde tutti i primi termini in cui l'indice di b è maggiore di n, e comincerà dal termine con b_n.

II. Se $p>q$ la formola perde tutti gli ultimi termini, a cominciare da $(a_q\,b_{p-1})$, poichè si ha (n° 122, III)

$$(a_q b_{p-1})+(a_{q+1}\,b_{p-2})+\cdots+(a_{p-2}\,b_{q+1})+(a_{p-1}\,b_q)=0$$

In questa ipotesi adunque la formola può finire col termine $(a_{q-1}\,b_p)$; e da ciò poi segue che in ogni caso è lecito di arrestarla al termine in cui l'indice di b è il più grande degl'indici di $c_{p,q}$; con che si evitano riduzioni.

Dall'ultima osservazione deriva intanto il fatto degno di nota, che l'espressione di $c_{p,q}$ non cambia di valore mutandovi p in q, e viceversa; talchè si ha sempre

$$c_{p,q}=c_{q,p}\,.$$

Così gli elementi della matrice ridotta Δ_r sono subordinati al principio di simmetria; e ne risulta in particolare che il suo principale determinante $\Delta_{r,0}$ è un determinante simmetrico.

125. Ponendo mente alla natura della matrice primitiva D_r, si riconosce immediatamente che, se dalla ridotta Δ_r si sopprimesse l'ultima orizzontale, si avrebbe la matrice Δ_{r-1}, ridotta di D_{r-1}, cioè della matrice a due scale dell'ordine $r-1$; sopprimendone invece le due ultime orizzontali, si otterrebbe la matrice Δ_{r-2}, ridotta di D_{r-2}; e così di seguito. Da ciò poi segue che, per avere il completo sistema delle ridotte delle matrici a due scale di tutti gli ordini dal 1.° all'ordine n^{mo}, basta costruire la ridotta della matrice a due scale dell' ordine n^{mo}, ch'è il più elevato; vale a dire la matrice Δ_n, ridotta della matrice quadrata D_n, e però quadrata anch'essa; che allora le ridotte Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc. delle matrici a due scale D_1, D_2, D_3, etc: si avranno rispettivamente nelle matrici formate o con la prima orizzontale di Δ_n, o con le due prime, o con le tre prime, etc.

126. Intanto, essendo Δ_n una matrice quadrata, essa per l'osservazione fatta nella fine del n° 124 è una matrice simmetrica, e quindi la sua costruzione può ridursi a quella del seguente sistema triangolare a scala

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
c_{1,1} & c_{1,2} & \cdot & c_{1,p-1} & c_{1,p} & c_{1,p+1} & \cdot & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\
 & c_{2,2} & \cdot & c_{2,p-1} & c_{2,p} & c_{2,p+1} & \cdot & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & c_{p-1,p-1} & c_{p-1,p} & c_{p-1,p+1} & \cdot & c_{p-1,n-1} & c_{p-1,n} \\
 & & & & c_{p,p} & c_{p,p+1} & \cdot & c_{p,n-1} & c_{p,n} \\
 & & & & & c_{p+1,p+1} & \cdot & c_{p+1,n-1} & c_{p+1,n} \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\
 & & & & & & & & c_{n,n}
\end{array}\right| ,$$

il quale è tutta quella parte della matrice quadrata, la quale si arresta alla principale diagonale. Ora la stessa costruzione di questo sistema può essere grandemente agevolata nel modo che andiamo a dichiarare.

È da notarsi che de' due indici che figurano nel simbolo di qualunque elemento del detto sistema il primo non è mai maggiore del secondo. Ora supposto $q > p$ si ha (n° 124, II.)

$$c_{p,q} = (a_0 b_{p+q-1}) + (a_1 b_{p+q-2}) + \,.\,.\, + (a_{p-2} b_{q+1}) + (a_{p-1} b_q);$$

ma siccome il secondo membro, senza tener conto dell' ultimo termine esprime l'elemento $c_{p-1,\,q+1}$, così essendo in tal guisa

$$c_{p-1,q+1}=(a_0 b_{p+q-1})+(a_1 b_{p+q-2})+\cdots+(a_{p-2} b_{q+1}),$$

risulta

$$c_{p,q}=c_{p-1\,,\,q+1}+(a_{p-1} b_q).$$

Questa formola, ponendovi successivamente $q=p$, $p+1$, $p+2,\ldots, n$, porge le espressioni di tutti gli elementi della p^{ma} orizzontale del sistema triangolare, pe' quali adunque si ha

$$\begin{array}{lllll}
c_{p,p} & = c_{p-1,p+1} & + & (a_{p-1} b_p &) \\
c_{p,p+1} & = c_{p-1,p+2} & + & (a_{p-1} b_{p+1}) & \\
c_{p,p+2} & = c_{p-1,p+3} & + & (a_{p-1} b_{p+2}) & \\
\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
c_{p,n-1} & = c_{p-1,n} & + & (a_{p-1} b_{n-1}) & \\
c_{p,n} & = \quad 0 & + & (a_{p-1} b_n &).
\end{array}$$

Si osservi attualmente che la serie de' primi termini dei secondi membri non è altra cosa che la serie de' successivi elementi della $(p-1)^{ma}$ orizzontale del sistema triangolare, a cominciare però dal terzo; e di più che la serie degli ultimi termini è quella de' successivi determinanti della matrice bilineare

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{p-1} & a_p & a_{p+1} & . & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & b_1 & b_2 & . & b_{p-1} & b_p & b_{p+1} & . & b_{n-1} & b_n
\end{array}\right|$$

formata con le serie generatrici delle due scale (a_0) e (b_0), a contare però dalla p^{ma} verticale; e da ciò risulta che: *I successivi elementi della* p^{ma} *orizzontale del sistema triangolare sono uguali a quelli della* (p — 1)^{ma} *orizzontale, a cominciar dal terzo, rispettivamente accresciuti dei successivi determinanti della matrice bilineare che si forma con le serie generatrici delle due scale, a contare dalla sua* p^{ma} *verticale.*

Quindi è manifesto che le orizzontali del sistema triangolare si deducono di una maniera facilissima l'una dall'altra, osservando a tale uopo che gli elementi della prima orizzontale di questo sistema sono soltanto i successivi determinanti della matrice bilineare, a contare dalla prima verticale; ed intanto la costruzione della ridotta generale Δ_n, resa indipendente da formole, va effettuata con un procedimento semplice e rapidissimo.

Supponendo per un esempio che le serie generatrici delle due scale siano quelle con le quali è costituita la matrice bilineare

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ t & u & v & x \end{vmatrix}$$

formeremo dapprima il corrispondente sistema triangolare

$$\left.\begin{matrix} au-bt & av-ct & ax-dt \\ & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ +bv-cu \end{matrix}\right\} & bx-du \\ & & cx-dv \end{matrix}\right| ,$$

e quindi la matrice quadrata e simmetrica di 3° grado

$$\begin{vmatrix} au-bt & av-ct & ax-dt \\ av-ct & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ +bv-cu \end{matrix}\right\} & bx-du \\ ax-dt & bx-du & cx-dv \end{vmatrix} .$$

Questa matrice adunque è la ridotta dalla matrice a due scale del 3° ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & t & u & v & x \\ 0 & t & u & v & x & 0 \\ t & u & v & x & 0 & 0 \end{vmatrix} ;$$

ed il determinante della prima è uguale a quello della seconda. Sopprimendo poi dalla ridotta generale l'ultima orizzontale si ha l'altra matrice

$$\begin{vmatrix} au-bt & av-ct & ax-dt \\ av-ct & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ +bv-cu \end{matrix}\right\} & bx-du \end{vmatrix} ,$$

come ridotta della matrice a due scale del secondo ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & t & u & v & x \\ t & u & v & x & 0 \end{vmatrix} ;$$

ed i due successivi determinanti di quella saranno ordinatamente uguali a'due successivi determinanti di questa. In fine, sopprimendo dalla ridotta generale le due ultime orizzontali, si ha la matrice di una sola orizzontale

$$\begin{vmatrix} au-bt & av-ct & ax-dt \end{vmatrix} ,$$

come ridotta della matrice a due scale del primo ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ t & u & v & x \end{vmatrix} ,$$

la quale non è che la stessa matrice bilineare. Ora è chiaro che i successivi determinanti della prima non sono altra cosa, che i suoi successivi elementi; e questi equivalgono in fatti ai successivi determinanti dell'altra.

Caso 2.°

Trasformazione delle matrici a due scale di gradi disuguali

127. Questo secondo caso può subito ridursi al primo. Dinotata tuttavia con D_r una matrice a due scale di gradi r ed $r+\varepsilon$, relative alle serie generatrici

$$a_0 \; , \; a_1 , \ldots , \; a_{\varepsilon-1} \; , \; a_\varepsilon \; , \; a_{\varepsilon+1} \; , \; \ldots \; , \; a_m \qquad (a_0)$$

$$b_\varepsilon \; , \; b_{\varepsilon+1} \; , \; \ldots \; , \; b_m \qquad (b_\varepsilon)$$

cominceremo per rendere uguali i gradi delle due scale, aggiungendo ε orizzontali alla scala superiore; e però indicando con $D'_{r+\varepsilon}$ la nuova matrice, avremo (n° 121,III) l'uguaglianza complessiva

$$D'_{r+\varepsilon} = a_0^\varepsilon \, D_r \; . \qquad (1)$$

Bisogna però osservare che attualmente la scala inferiore (b_ε) della nuova matrice è incompleta (n°114);ma se la serie (b_ε) si riguardi caso particolare della serie

$$b_0\,,\ b_1\,,\ldots,\ b_{\varepsilon-1}\,,\ b_\varepsilon\,,\ b_{\varepsilon+1}\,,\ldots,\ b_m \qquad (b_0)$$

la quale riducesi a quella supponendo $b_0=b_1=\cdots=b_{\varepsilon-1}=0$, allora la novella matrice $D'_{r+\varepsilon}$ potrà essere considerata come una matrice a due scale di gradi uguali e complete relative alle due serie (a_0) e (b_0), e quindi sommettersi alla trasformazione del n.° 123, salvo ad annullarsi a calcolo finito le $b_0\,,\ b_1\,,\ldots,\ b_{\varepsilon-1}$. Chiamando adunque $\Delta_{r+\varepsilon}$ la ridotta di $r+\varepsilon$ orizzontali, che si ottiene in questa ipotesi, si avrà l'uguaglianza complessiva

$$D'_{r+\varepsilon}=\Delta_{r+\varepsilon}\,,$$

dalla quale in virtù della (1) risulta l'altra uguaglianza della stessa natura

$$D_r=\frac{1}{a_0^\varepsilon}\,\Delta_{r+\varepsilon} \qquad (2)$$

e quindi deriva che nel caso presente: *I successivi determinanti della matrice* D_r *sono ordinatamente uguali a quelli della ridotta* $\Delta_{r+\varepsilon}$, *divisi per* a_0^ε.

Fatta per tanto astrazione da questo divisore, è manifesto che non evvi alcun' altro divario tra il *primo* ed *il secondo caso*; e qui pure nella matrice $\Delta_{n+\varepsilon}$, o Δ_m, ridotta di quella a due scale D_n dell' ordine il più elevato, si ha una *ridotta generale, quadrata e simmetrica,* la quale si costruisce esattamente con lo stesso procedimento del n° 126 applicato alla matrice bilineare

$$\left|\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdot\ \cdot & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & \cdot\ \cdot & a_m \\ 0 & 0 & \cdot\ \cdot & 0 & b_\varepsilon & b_{\varepsilon+1} & \cdot\ \cdot & b_m \end{matrix}\right|\,;$$

intorno a che giova di riflettere che il procedimento, di cui si tratta, è affatto indipendente da' valori particolari dei termini delle serie generatrici delle due scale.

È chiaro inoltre che, sopprimendo dalla ridotta generale l'ultima orizzontale, si ha la matrice $\Delta_{n+\varepsilon-1}$ ridotta di D_{n-1}; sopprimendone le due ultime si avrebbe la matrice $\Delta_{n+\varepsilon-2}$, ridotta di D_{n-2}, etc.; ma quindi è palese che, nel caso presente, le ridotte delle matrici a due scale D_1, D_2, etc. sono le matrici $\Delta_{\varepsilon+1}$, $\Delta_{\varepsilon+2}$, etc., costituite rispettivamente o con le prime $\varepsilon+1$ orizzontali della ridotta generale, o con le prime $\varepsilon+2$, etc.

128. Segue dalla (2) che i successivi determinanti della ridotta $\Delta_{r+\varepsilon}$ sono esattamente divisibili per a_0^ε. Ora è agevol cosa a riconoscere che, volendo effettuare questa divisione, basta cambiare nella ridotta il sistema delle prime ε orizzontali in una scala inversa (b_ε) di grado ε. E di fatti, se la trasformazione del n.° 123, anzichè estenderla a tutte le $r+\varepsilon$ orizzontali della scala inferiore della matrice $D'_{r+\varepsilon}$, si limita alle sole ultime r orizzontali, rimanendo immutate le prime ε orizzontali di questa scala, e quindi si dinoti con $\Delta'_{r+\varepsilon}$ la ridotta che si ottiene sopprimendo dalla trasformata le prime ε orizzontali, e le prime ε verticali, è chiaro che allora, invece della (2), si perviene all'uguaglianza complessiva

$$D_r = \Delta'_{r+\varepsilon},$$

esprimente che i successivi determinanti della matrice a due scale D_r sono precisamente uguali ai successivi determinanti della nuova ridotta $\Delta'_{r+\varepsilon}$; la quale d'altronde è ciò che diviene la prima ridotta $\Delta_{r+\varepsilon}$ mutandovi solo le sue prime ε orizzontali in una scala inversa (b_ε). Adunque con questa semplicissima modifica i successivi determinanti della matrice $\Delta_{r+\varepsilon}$ restano sgombrati del fattore a_0^ε, il che non solo è importante pel calcolo numerico, ma costituisce un fatto di molto interesse per le applicazioni.

129. Per concretare con un esempio tutto ciò che si rapporta al secondo caso cercheremo le ridotte delle matrici a due scale relative alle due serie

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$

$$t,\ u,\ v,$$

per le quali si ha $m=5$, $n=2$, $\varepsilon=3$. Formata adunque la matrice bilineare

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & t & u & v \end{vmatrix},$$

e quindi, col metodo del n° 126, il sistema triangolare

$$\begin{array}{ccccc|}
0 & 0 & at & au & av \\
 & at & au+bt & av+bu & bv \\
 & & av+bu+ct & bv+cu & cv \\
 & & & cv+du-et & dv-ft \\
 & & & & ev-fu
\end{array},$$

col principio di simmetria otterremo la ridotta generale e quadrata

$$\left|\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & at & au & av \\
0 & at & au+bt & av+bu & bv \\
at & au+bt & av+bu+ct & bv+cu & cv \\
au & av+bu & bv+cu & cv+du-et & dv-ft \\
av & bv & cv & dv-ft & ev-fu
\end{array}\right|, \qquad (6)$$

ed il determinante di questa matrice, diviso per a^3, sarà uguale a quello della matrice quadrata a due scale dell'ordine il più elevato relative alle date serie generatrici, vale a dire al determinante della matrice di 2° ordine

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & d & e & f & 0 \\
0 & a & b & c & d & e & f \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & u & v \\
0 & 0 & 0 & t & u & v & 0 \\
0 & 0 & t & u & v & 0 & 0 \\
0 & t & u & v & 0 & 0 & 0 \\
t & u & v & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|. \qquad (7)$$

Sopprimendo ora dalla (6) l'ultima orizzontale si ottiene la matrice

$$\left|\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & at & au & av \\
0 & at & au+bt & av+bu & bv \\
at & au+bt & bv+cu & bv+cu & cv \\
au & av+bu & av+bu+ct & cv+du+et & dv-ft
\end{array}\right| \qquad (8)$$

come ridotta della matrice a due scale del prim' ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & t & u & v \\ 0 & 0 & t & u & v & 0 \\ 0 & t & u & v & 0 & 0 \\ t & u & v & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

ed i due successivi determinanti della (8), divisi sempre per a^3, saranno uguali ai due corrispondenti determinanti della (9).

Volendo poi sopprimere da' determinanti delle ridotte il divisore a^3 basterà cangiare nella (6) le tre prime orizzontali in una scala inversa di 3° grado, relativa alla seconda delle serie date; ed in tal guisa si ha la ridotta quadrata molto più semplice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & t & u & v \\ 0 & t & u & v & 0 \\ t & u & v & 0 & 0 \\ au & av+bu & bv+cu & cv+du-et & dv-ft \\ av & bv & cv & dv-ft & ev-fu \end{vmatrix},$$

il di cui determinante equivale a quello della (7); e sopprimendone l'ultima orizzontale si avrà la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & t & u & v \\ 0 & t & u & v & 0 \\ t & u & v & 0 & 0 \\ au & av+bu & bv+cu & cv+du-et & dv-ft \end{vmatrix},$$

i due successivi determinanti della quale equivalgono rispettivamente a' due successivi determinanti della (9).

PARTE SECONDA

APPLICAZIONI DEI DETERMINANTI

§. I.

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI.

1. Supponendo che tra n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si abbia il sistema di n equazioni lineari

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n = u_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n = u_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \cdots + a_{n,n}\, x_n = u_n \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

se si forma un determinante con i coefficienti delle incognite in tutte le equazioni, si ha quello che chiamasi *determinante delle equazioni,* ovvero *del sistema lineare.* E se gli elementi di una stessa verticale, che sono coefficienti di una stessa incognita in tutte le equazioni, si mutano ne' rispettivi termini noti, si ha un altro determinante, che chiamiamo *determinante della incognita corrispondente.* Laonde dinotato con Δ il determinante del sistema (1), e con N_r quello della incognita x_r, si avrà

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot\,\cdot & a_{1,r-1} & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\,\cdot & a_{2,r-1} & a_{2,r} & a_{2,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\,\cdot & a_{n,r-1} & a_{n,r} & a_{n,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

$$N_r = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot\,\cdot & a_{1,r-1} & u_1 & a_{1,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\,\cdot & a_{2,r-1} & u_2 & a_{2,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\,\cdot & a_{n,r-1} & u_n & a_{n,r+1} & \cdot\,\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

2. La nozione di questi determinanti conduce immediatamente

alla risoluzione delle equazioni. In fatti, se si trasforma la r^{ma} verticale di Δ, moltiplicandola primamente per x_r, ed indi aggiungendole tutte le altre moltiplicate per le rispettive incognite, cioè la prima per x_1, la seconda per x_2, etc: il nuovo determinante sarà equivalente al prodotto Δx_r; ma d'altra parte, siccome gli elementi della r^{ma} verticale son divenuti uguali ai primi membri delle (1), è manifesto che il nuovo determinante non è altra cosa che il determinante N_r; e quindi risulta

$$\Delta x_r = N_r . \tag{4}$$

Questa equazione, in cui si trova la sola incognita x_r, dimostra che: *Il valore di una incognita qualunque è espresso da una frazione che ha per numeratore il suo determinante, e per denominatore il determinante delle equazioni.* Così quest'ultimo determinante è denominatore comune alle espressioni di tutte le incognite, per le quali adunque si ha

$$\Delta x_1 = N_1 \;,\; \Delta x_2 = N_2 \;,\; \Delta x_3 = N_3 \;,\; \ldots \;,\; \Delta x_n = N_n . \tag{5}$$

Supponendo per esempio due equazioni

$$ax + by = c \;,$$

$$a'x + b'y = c' \;,$$

si ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} .$$

E per tre equazioni

$$ax + by + cz = d \;,$$

$$a'x + b'y + c'z = d' \;,$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \;,$$

posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} ,$$

si avrà

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}.$$

3. Bisogna avvertire che i termini noti delle date equazioni, messi nel determinante della incognita, comportano i proprii segni, se si trovano nei secondi membri, come nelle (1); ma trovandosi ne'primi, i loro segni dovranno mutarsi, o si muterà il segno allo stesso determinante. Così avendosi le equazioni

$$ax + by + c = 0\ ,$$

$$a'x + b'y + c' = 0\ ,$$

si otterrà

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

4. La risoluzione delle equazioni può ancora farsi dipendere da altre proprietà dei determinanti. Se le equazioni (1) si moltiplicano ordinatamente pe'complementi algebrici degli elementi della r^{ma} verticale di Δ, vale a dire per $A_{1,r}$, $A_{2,r}$, . . , $A_{n,r}$, addizionando i prodotti si vedrà subito che nel primo membro sono nulli i coefficienti di tutte le incognite, eccetto il coefficiente di x_r (par. 1ª, nº 46), il quale equivale a Δ. Risulta in tal guisa

$$\Delta x_r = u_1 A_{1,r} + u_2 A_{2,r} + \cdots + u_n A_{n,r}\ ,$$

ed è chiaro che questa formola coincide con la (4), perchè si ha

$$N_r = u_1 A_{1,r} + u_2 A_{2,r} + \cdots + u_n A_{n,r}\ .$$

5. Poichè il determinante Δ è denominatore comune alle espressioni di tutte le incognite, se avvenga che questo determinante sia nullo, senza che lo sia alcuno de'numeratori, i valori delle incognite saranno tutti infiniti; vale a dire non esiste per esse in tal caso alcun sistema di valori finiti capace di soddisfare alle equazioni, le quali perciò sono incompatibili.

Ora è importante di osservare che, se è nullo il denominatore Δ, e lo sia nel tempo istesso uno de'numeratori, tutti gli altri numeratori debbono, in generale, esser nulli. Così, supposto che sia nullo il numeratore N_r, dimostreremo che è nullo qualunque altro numeratore N_s. Di fatti per ipotesi si ha da un lato

$$N_r = u_1 A_{1,r} + u_2 A_{2,r} + \cdots + u_n A_{n,r} = 0 ; \qquad (6)$$

ma d'altra parte, essendo ancora per ipotesi $\Delta = 0$, le quantità $A_{1,r}, A_{2,r}, \ldots, A_{n,r}$ sono proporzionali alle quantità $A_{1,s}, A_{2,s}, \ldots, A_{n,s}$ (part. 1ª, nº 89); dunque nell'ultima formola sarà lecito di mutare quelle in queste; e quindi risulta, come voleva dimostrarsi,

$$N_s = u_1 A_{1,s} + u_2 A_{2,s} + \cdots + u_n A_{n,s} = 0 .$$

Segue da ciò che, quando è nullo il determinante delle equazioni, e lo è pure il determinante di una incognita, allora i valori di tutte le incognite prendono in generale la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ed indeterminate esse son di fatti, perciocchè le equazioni non sono tra loro indipendenti; ma una di esse è conseguenza delle altre. Per esempio, volendo dimostrare che nel caso attuale la prima delle equazioni (1) può dedursi dalle altre, moltiplicheremo ordinatamente queste equazioni, esclusa la prima, pei complementi algebrici degli elementi di una verticale qualunque di Δ, come la r^{ma}, escluso ancora quello del primo elemento; ed allora addizionando i prodotti avremo l'eguaglianza

$$\begin{aligned}
&(a_{2,1} A_{2,r} + a_{3,1} A_{3,r} + \cdots + a_{n,1} A_{n,r}) x_1 \\
&+ (a_{2,2} A_{2,r} + a_{3,2} A_{3,r} + \cdots + a_{n,2} A_{n,r}) x_2 \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ (a_{2,n} A_{2,r} + a_{3,n} A_{3,r} + \cdots + a_{n,n} A_{n,r}) x_n \\
&= (u_2 \; A_{2,r} + u_3 \; A_{3,r} + \cdots + u_n \; A_{n,r} \; .
\end{aligned}$$

Ora è chiaro che nel primo membro i coefficienti delle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ equivalgono rispettivamente a $-a_{1,1}A_{1,r}$, $-a_{1,2}A_{1,r}, \ldots, -a_{1,n}A_{1,r}$, (par. 1ª, nº 46); ed il secondo membro in virtù della (6) equivale a $-u_1 A_{1,r}$, dunque risulta

$$(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n)\,A_{1,r} = u_1 A_{1,r}\,.$$

Questa equazione, se $A_{1,r}$ è diverso da *zero*, porge la prima delle (1), la quale in tal guisa vedesi dedotta dalle altre; e perciò, se sono nulli ad un tempo il determinante delle equazioni, e quello di una incognita, il sistema delle proposte equazioni è, *in generale,* indeterminato.

6. Se tra n incognite si abbia un sistema di $n+1$ equazioni, questo sistema è più che determinato; ed affinchè le equazioni possano coesistere è necessario che i valori delle n incognite, ricavati da n qualunque delle equazioni, verifichino la rimanente; o in altri termini, bisogna che eliminandosi dalle equazioni tutte le incognite, la *risultante* sia una identità. Ora questa risultante identica, o *equazione di condizione* per la coesistenza di tutte le equazioni si ottiene immediatamente eguagliando a *zero* il determinante di grado $n+1$, formato con i coefficienti delle incognite in tutte le equazioni e con i loro termini noti, cui può darsi, come piaccia, o il segno proprio a tutti, o a tutti il segno contrario. Così, supponendo che le n equazioni (1) debbano coesistere con l'altra

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = v\,, \tag{7}$$

la risultante sarà l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} & u_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} & u_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} & u_n \\ b_1 & b_2 & . & b_n & v \end{vmatrix} = 0\,. \tag{8}$$

In fatti questo determinante non muta di valore, se dall'ultima verticale si tolgano tutte le altre moltiplicate per le rispettive incognite; ma intanto gli elementi di quella verticale, cangiandosi nelle differenze tra i primi ed i secondi membri di tutte le equazioni, saranno tutti nulli, se le equazioni si suppongano coesistenti, e però sarà nullo lo stesso determinante.

Reciprocamente se l'equazione (8) è soddisfatta, le equazioni (1) e la (7) formeranno un sistema di equazioni coesistenti, ed allora ciascuna di esse sarà una conseguenza delle altre. Così, per esempio, volendo dimostrare che la (7) coesiste con le (1), e può dedursi da esse, basterà sommettere alla medesima trasformazione di poc'anzi l'ultima verticale del determinante; chè in tal guisa la (8) diviene

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} & 0 \\ b_1 & b_2 & . & b_n & v-(b_1x_1+b_2x_2+\cdot\cdot+b_nx_n) \end{vmatrix} = 0 \;,$$

e poi si trasforma nella seguente

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} \Big(v-(b_1x_1+b_2x_2+\cdot\cdot\cdot+b_nx_n) \Big) = 0 \;,$$

Ora de'due fattori il primo è il determinante delle equazioni (1), che non è nullo, quando si supponga che le equazioni siano soddisfatte da valori finiti delle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$; e quindi è nullo invece il secondo fattore; il quale adunque riproduce l'equazione (7) come una conseguenza delle (1), e però come coesistente con quelle, poichè verificata dagli stessi valori delle incognite.

7. Nella risoluzione di un sistema di n equazioni lineari con n incognite merita attenzione il caso in cui tutte le equazioni mancano di termini noti; e tale è il caso delle equazioni (1) ove si abbia $u_1=0,\ u_2=0, \ldots, u_n=0$.

In siffatta ipotesi il sistema di queste equazioni si riduce ad

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1+a_{1,2}\,x_2+\ldots+a_{1,n}\,x_n=0 \\ a_{2,1}\,x_1+a_{2,2}\,x_2+\ldots+a_{2,n}\,x_n=0 \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ a_{n,1}\,x_1+a_{n,2}\,x_2+\ldots+a_{n,n}\,x_n=0 \end{array}\right\} , \qquad (9)$$

ed è chiaro che i determinanti delle incognite sono tutti nulli, poichè ciascuno ha una verticale di elementi nulli; e però se Δ, determinante delle equazioni, è diverso da *zero*, i valori delle incognite saranno tutti nulli; e questi valori rendono evidentemente soddisfatte le equazioni.

Nulla di più vi è a dire, finchè il determinante Δ è diverso da *zero;* ma se questo determinante è nullo, le espressioni di tutte le incognite prenderanno la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; e realmente esse sono indeterminate, imperciocchè, se ad una qualunque di esse si dia un valore arbitrario, le equazioni (9) si cangiano in n equazioni con $n-1$ incognite, le quali dovranno ammettere valori determinati (n° 6), essendo per ipotesi soddisfatta la relazione

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{10}$$

la quale nel caso attuale è la *risultante* delle dette equazioni, ossia l'equazione di condizione per la loro coesistenza. Così i valori delle $n-1$ incognite, e quello dato ad arbitrio alla rimanente, formeranno un sistema di valori per tutte le n incognite, capaci di verificare le n equazioni; da che poi segue che le incognite, e quindi le equazioni istesse sono indeterminate, e ciascuna sarà una conseguenza delle altre.

Ma se si considerano i rapporti di $n-1$ incognite alla rimanente, per esempio di tutte le prime all'ultima x_n, troviamo che questi rapporti sono necessariamente determinati. Infatti le equazioni (9) divise per x_n, e messo per compendio

$$\frac{x_1}{x_n} = v_1\,,\ \frac{x_2}{x_n} = v_2\,,\ldots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n} = v_{n-1}\,,$$

divengono

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}\,v_1 + a_{1,2}\,v_2 + \ldots + a_{1,n-1}\,v_{n-1} + a_{1,n} = 0\,; \\ a_{2,1}\,v_1 + a_{2,2}\,v_2 + \ldots + a_{2,n-1}\,v_{n-1} + a_{2,n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\,v_1 + a_{n,2}\,v_2 + \ldots + a_{n,n-1}\,v_{n-1} + a_{n,n} = 0 \end{array}\right\} \tag{11}$$

e si hanno in tal guisa n equazioni tra $n-1$ incognite $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$; ma essendo per ipotesi soddisfatta la risultante di queste equazioni, che non è diversa dalla (10), ne segue, come voleva dimostrarsi, che sono determinati i valori delle incognite, le quali attualmente rappresentano i rapporti $\frac{x_1}{x_n}$, $\frac{x_2}{x_n}$, etc.

Ora è importante di osservare che nel caso presente le incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono proporzionali ai complementi algebrici dei loro rispettivi coefficienti in qualunque delle equazioni (11), vale a dire ai complementi algebrici degli elementi di qualunque orizzontale del determinante Δ. Ed in fatti, essendo $\Delta = 0$, è sempre nulla la somma dei prodotti degli elementi di qualunque orizzontale sia per i loro complementi algebrici, sia per quelli degli elementi di ogni altra orizzontale; e però applicando questa proprietà alla r^{ma} orizzontale, si hanno le n relazioni

$$\begin{array}{l} a_{1,1} A_{r,1} + a_{1,2} A_{r,2} + \ldots + a_{1,n} A_{r,n} = 0 \\ a_{2,1} A_{r,1} + a_{2,2} A_{r,2} + \ldots + a_{2,n} A_{r,n} = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n,1} A_{r,1} + a_{n,2} A_{r,2} + \ldots + a_{n,n} A_{r,n} = 0 \, . \end{array}$$

Intanto siccome questo sistema non è diverso dal sistema (9), è manifesto che i rapporti

$$\frac{x_1}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

non sono diversi da' rapporti

$$\frac{A_{r,1}}{A_{r,n}}, \quad \frac{A_{r,2}}{A_{r,n}}, \ldots, \quad \frac{A_{r,n-1}}{A_{r,n}},$$

e si ha quindi la proporzione

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n = A_{r,1} : A_{r,2} : A_{r,3} : \ldots : A_{r,n},$$

la quale dimostra per lo appunto che le incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di qualunque orizzontale del determinante del dato sistema di equazioni.

8. Occorrendo di sostituire in una funzione lineare di n variabili i loro valori determinati da n equazioni lineari, il risultamento si può esprimere per mezzo di determinanti. Supponiamo che i valori di x, y, z, i quali verificano le equazioni

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\,,$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0\,,$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0\,,$$

debbano sostituirsi nella funzione $Ax+By+Cz+D$. Dinotata questa funzione con U avremo un'equazione che deve coesistere con le date, e quindi l'equazione di condizione

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ A & B & C & D-U \end{vmatrix} = 0\,,$$

che si trasforma evidentemente (par. 1ª, nº 48) in

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 \\ A & B & C & U \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ A & B & C & D \end{vmatrix}\,;$$

laonde chiamando Δ il determinante delle equazioni, si avrà

$$U = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ A & B & C & D \end{vmatrix} \frac{1}{\Delta}\,.$$

In generale è chiaro che il risultamento della sostituzione è espresso da una funzione che ha per denominatore il determinante delle equazioni, e per numeratore il determinante che rappresenta la risultante delle stesse equazioni e della data funzione, come fosse anch'essa un'equazione.

§. II.

INTORNO ALLA DIVISIONE TRA DUE FUNZIONI INTERE, ED AL PROCESSO DEL MASSIMO COMUN DIVISORE.

Divisione

1. Date le due funzioni intere e generali di gradi m ed n

$$A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m \quad , \quad B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n ,$$

e ritenuto che m non sia minore di n, se si divida A per B finchè si abbia un quoziente intero in x, questo quoziente ed il resto saranno rispettivamente di gradi $m-n$ ed $n-1$; laonde designandoli con Q ed R, e messo per compendio $m-n=\varepsilon$, potrà supporsi

$$Q=q_0x^\varepsilon+q_1x^{\varepsilon-1}+\ldots+q_\varepsilon \quad , \quad R=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-1} ;$$

e la quistione si riduce a determinare i coefficienti q e c. Ora essendo identicamente $A=QB+R$, vale a dire

$$\begin{aligned} & a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m \\ = & (q_0x^\varepsilon+q_1x^{\varepsilon-1}+\ldots+q_\varepsilon)(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n) \\ & +c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\ldots+c_{n-1} , \end{aligned}$$

sviluppando il prodotto, ch'è di grado $n+\varepsilon=m$, ed eguagliando i coefficienti delle potenze simili di x nei due membri, si hanno i due sistemi di equazioni lineari

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_0 & =q_0b_0 \\ a_1 & =q_0b_1+q_1b_0 \\ a_2 & =q_0b_2+q_1b_1+q_2b_0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_\varepsilon & =q_0b_\varepsilon+q_1b_{\varepsilon-1}+q_2b_{\varepsilon-2}+\ldots+q_\varepsilon b_0 \end{array} \right.$$

$$
(2)\begin{cases}
a_{\varepsilon+1} = q_0 b_{\varepsilon+1} + q_1 b_\varepsilon + q_2 b_{\varepsilon-1} + \ldots + q_\varepsilon b_1 + c_0 \\
a_{\varepsilon+2} = q_0 b_{\varepsilon+2} + q_1 b_{\varepsilon+1} + q_2 b_\varepsilon + \ldots + q_\varepsilon b_2 + c_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{\varepsilon+s+1} = q_0 b_{\varepsilon+s+1} + q_1 b_{\varepsilon+s} + q_2 b_{\varepsilon+s-1} + \ldots + q_\varepsilon b_{s+1} + c_s \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Le (1) indipendenti dai coefficienti del residuo c_0, c_1, etc. valgono a determinare i coefficienti del quoziente q_0, q_1, etc. ; e quindi le (2) varranno a definire i coefficienti del residuo; ma questo cenno merita più distinto sviluppo.

Residuo

2. Per avere in generale l'espressione di un coefficiente qualunque del residuo, come di c_s, osserveremo che, dovendo le equazioni (1) coesistere con ciascuna delle (2), e però anche con quella che contiene c_s, dovrà essere soddisfatta la condizione (§ I, n° 6)

$$
\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \\
b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & a_1 \\
b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & a_2 \\
. & . & . & . & . & . \\
b_\varepsilon & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-2} & . & b_0 & a_\varepsilon \\
b_{\varepsilon+s+1} & b_{\varepsilon+s} & b_{\varepsilon+s-1} & . & b_{s+1} & a_{\varepsilon+s+1} - c_s
\end{vmatrix} = 0 \qquad (3)
$$

la quale subito si trasforma in

$$
\begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\
b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & 0 \\
b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . \\
b_\varepsilon & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-2} & . & b_0 & 0 \\
b_{\varepsilon+s+1} & b_{\varepsilon+s} & b_{\varepsilon+s-1} & . & b_{s+1} & c_s
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
b_0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \\
b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & a_1 \\
b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & a_2 \\
. & . & . & . & . & . \\
b_\varepsilon & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-2} & . & b_0 & a_\varepsilon \\
b_{\varepsilon+s+1} & b_{\varepsilon+s} & b_{\varepsilon+s-1} & . & b_{s+1} & a_{\varepsilon+s+1}
\end{vmatrix}
$$

Di questi determinanti, di grado $\varepsilon+2$, il primo equivale a $b_0^{\varepsilon+1} c_s$. In quanto all'altro, scrivendo le verticali in ordine inverso, e poi mutando le orizzontali in verticali, non cangia il suo valore assoluto, ed il segno sarà definito (par. 1ª, nº 39, I) da

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)}=(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)+1}=-(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)};$$

laonde ponendo (*) $i=(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)}$, risulterà

$$c_s=\frac{-1}{ib_0^{\varepsilon+1}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+s+1} \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & b_{s+1} \\ 0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & b_{s+2} \\ 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & b_{s+3} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-3} & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon+s} \\ b_0 & b_1 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & b_{\varepsilon+s+1} \end{vmatrix}.$$

Questa formola, facendovi successivamente $s=0,1,2,\ldots,n-1$, porge tutti i coefficienti del residuo; ma come i determinanti, cui dà luogo il secondo membro, sono i successivi determinanti della matrice a due scale, di gradi 1 ed $\varepsilon+1$, formate con le serie dei coefficienti delle funzioni **A** e **B**; se si dinota questa matrice con D_1, e quindi con $D_{1,0}$, $D_{1,1}$, $D_{1,2},\ldots, D_{1,n-1}$ i suoi successivi determinanti (par. 1ª, nº 120) (**), ponendo

$$\rho=(D_{1,0}\,x^{n-1}+D_{1,1}\,x^{n-2}+D_{1,2}\,x^{n-3}+\cdots+D_{1,n-1},$$

otterremo pel residuo l'espressione

$$R=-\frac{1}{i\,b_0^{\varepsilon+1}}\,\rho.$$

Così la costruzione del residuo **R** vedesi ridotta a quella del polinomio ρ, il quale si forma all'istante, poichè i suoi coefficienti

(*) Si tenga presente che in tutto ciò che segue il simbolo i avrà costantemente lo stesso significato.

(**) Per le convenzioni stabilite nel luogo qui citato la formola precedente può mutarsi in

$$c_s=-\frac{1}{i\,b_0^{\varepsilon+1}}\begin{vmatrix}(a_0)\\(b_0)_{\varepsilon+1}\end{vmatrix}_s$$

sono i successivi determinanti della matrice di 1° ordine, a due scale (a_0), (b_0); ed è osservabile ch'esso è intero non solo rispetto ad x, ma anche rispetto ai coefficienti delle funzioni A e B.

3. L'espressione del polinomio ρ si compendia subito in un solo determinante, perciocchè i coefficienti sono determinanti, i quali non differiscono che nell'ultima verticale; e quindi si ha

$$\rho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & (a_{\varepsilon+1}x^{n-1} + a_{\varepsilon+2}\,x^{n-2} + . + a_m \quad) \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & (b_1\,x^{n-1} + b_2\,x^{n-2} + . + b_n \quad) \\ 0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & (b_2\,x^{n-1} + b_3\,x^{n-2} + . + b_n\,x \,) \\ 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & (b_3\,x^{n-1} + b_4\,x^{n-2} + . + b_n\,x^2 \,) \\ . & . & . & . & . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-3} & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & (b_\varepsilon\,x^{n-1} + b_{\varepsilon+1}\,x^{n-2} + . + b_n x^{\varepsilon-1}) \\ b_0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & (b_{\varepsilon+1}x^{n-1} + b_{\varepsilon+2}\,x^{n-2} + . + b_n\,x^\varepsilon \,) \end{vmatrix}$$

Del resto è chiaro che questo determinante si forma dalla matrice totale D_1 riunendo in una le sue ultime n verticali, ordinatamente moltiplicate per x^{n-1}, x^{n-2}, . . , x, x^0.

4. Ma l'ultimo determinante prende una forma notevole se all'ultima verticale si aggiungano tutte le precedenti moltiplicate, a cominciar dalla prima, per le successive potenze x^m, x^{m-1}, . . , x^{n+1}, x^n, poichè allora si ha evidentemente

$$\rho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & \mathrm{A} \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & \mathrm{B} \\ 0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & \mathrm{B}x \\ 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & \mathrm{B}x^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-3} & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & \mathrm{B}x^{\varepsilon-1} \\ b_0 & b_1 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & \mathrm{B}x^\varepsilon \end{vmatrix}.$$

5. Per concretare con qualche esempio le precedenti trasformazioni supporremo in primo luogo che siano uguali i gradi delle funzioni A, B. In tal caso si ha $m = n$, $\varepsilon = 0$, $i = +1$, e quindi

$$\mathrm{R} = -\frac{1}{b_0}\rho.$$

Inoltre i coefficienti del polinomio ρ sono i successivi determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & .. & b_n \end{vmatrix};$$

e si ha in conseguenza

$$\rho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} x^{n-2} + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} x^{n-3} + \cdots + \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ b_0 & b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n) \\ b_0 & (b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x + b_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \mathbf{A} \\ b_0 & \mathbf{B} \end{vmatrix}.$$

Supponendo in secondo luogo che i gradi di **A** e **B** differiscano di *uno*, avremo $m = n + 1$, $\varepsilon = 1$, $i = +1$, e però

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{b_0^2}\rho.$$

Attualmente i coefficienti del polinomio ρ sono i successivi determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_n & a_{n+1} \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & .. & b_{n-1} & b_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & .. & b_n & 0 \end{vmatrix};$$

e quindi risulta

$$\rho = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} x^{n-1} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} x^{n-2} + .. + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_n \\ 0 & b_0 & b_{n-1} \\ b_0 & b_1 & b_n \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_{n+1} \\ 0 & b_0 & b_n \\ b_0 & b_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & (a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + .. + a_n x + a_{n+1}) \\ 0 & b_0 & (b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + .. + b_{n-1} x + b_n) \\ b_0 & b_1 & (b_2 x^{n-1} + b_3 x^{n-2} + .. + b_n x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \mathbf{A} \\ 0 & b_0 & \mathbf{B} \\ b_0 & b_1 & \mathbf{B}x \end{vmatrix}.$$

Quoziente

6. Un coefficiente qualunque q_k del quoziente Q è dato dalle prime k equazioni del sistema (1); e si ha così la formola generale

$$q_k = \frac{1}{b_0^{k-1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{k-1} & b_{k-2} & b_{k-3} & . & b_0 & a_{k-1} \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & . & b_1 & a_k \end{vmatrix} = \frac{(-1)^k}{b_0^{k+1}} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & 0 & . & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{k-1} & b_{k-1} & b_{k-2} & b_{k-3} & . & b_0 \\ a_k & b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & . & b_1 \end{vmatrix},$$

la quale, ponendovi successivamente $k=0, 1, 2, 3$, etc. porge

$$q_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad q_1 = -\frac{1}{b_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{b_0^3} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & b_2 & b_1 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

7. Ma il quoziente Q si può esprimere con un solo determinante. In fatti dovendo le $\varepsilon+1$ equazioni (1) coesistere con l'altra

$$Q = q_0 x^\varepsilon + q_1 x^{\varepsilon-1} + q_2 x^{\varepsilon-2} + \cdots + q_\varepsilon,$$

sussisterà l'equazione di condizione

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_\varepsilon & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-2} & . & b_1 & b_0 & a_\varepsilon \\ x^\varepsilon & x^{\varepsilon-1} & x^{\varepsilon-2} & . & x & 1 & Q \end{vmatrix} = 0,$$

la quale risoluta rispetto a Q, nel modo tenuto per la (3), porge

$$Q = \frac{-1}{b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & . & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_\varepsilon & b_{\varepsilon-1} & b_{\varepsilon-2} & . & b_0 & a_\varepsilon \\ x^\varepsilon & x^{\varepsilon-1} & x^{\varepsilon-2} & . & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{i b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} a_0 & . & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & b_0 & 1 \\ 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & x \\ 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & x^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_0 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & x^\varepsilon \end{vmatrix};$$

e se dinotiamo con q l'ultimo determinante, il quale è intero non solo rispetto ad x, ma anche rispetto ai coefficienti di A e B, si avrà più semplicemente

$$Q = \frac{1}{i b_0^{\varepsilon+1}} q.$$

Applicando queste formole ai medesimi esempii del numero precedente, si ha:

Pel 1° esempio , $Q = \frac{1}{b_0} q$, $q = \begin{vmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & 1 \end{vmatrix} = a_0$

Pel 2° esempio , $Q = \frac{1}{b_0^2} q$, $q = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 1 \\ b_0 & b_1 & x \end{vmatrix}$.

8. Intorno alla divisione aggiungiamo le due seguenti osservazioni:

I. Spesso la divisione della funzione A per B vuol regolarsi in guisa da ottenersi un quoziente ed un resto intero non solo rispetto ad x, ma anche rispetto ai coefficienti di A e B. Ora è chiaro che perciò basta moltiplicare il dividendo pel principale coefficiente del divisore (*), elevato ad una potenza uguale al numero de'termini del quoziente, e quindi per $b_0^{\varepsilon+1}$; ma è manifesto che il quoziente ed il resto, che si otterrebbero in questo caso, sarebbero appunto i due polinomii che abbiamo indicato con q e con ρ.

II. Talvolta la divisione vuol condursi innanzi anche con potenze negative di x al quoziente; ma si comprende che la legge di composizione de'successivi coefficienti è sempre quella che risulta dalle formole del n° 6; ed è così per esempio che si ha:

$$\frac{a_0 x + a_1}{b_0 x^2 + b_1 x + b_2} = \frac{a_0}{b_0} x^{-1} - \frac{1}{b_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^{-2} + \frac{1}{b_0^3} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 \\ 0 & b_2 & b_1 \end{vmatrix} x^{-3} - \text{etc:}$$

(*) Si usa di chiamare *principale coefficiente* di una funzione intera e razionale di una variabile quello che appartiene alla più alta potenza della stessa variabile.

Relazioni tra i coefficienti del dividendo, del divisore, e del resto.

9. I coefficienti de'polinomii A, B, R, che sono *dividendo* di grado m, *divisore* di grado n, e *resto* di grado $n-1$, dànno origine ai tre sistemi di quantità

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_m \qquad (a_0)$$

$$b_0\ ,\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots\ ,\ b_n \qquad (b_0)$$

$$c_0\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_{n-1} \qquad (c_0)$$

tra le quali sussiste una importante relazione,che esporremo nel seguente teorema:

I successivi determinanti della matrice a due scale (b_0) *e* (c_0), *di un'ordine qualunque* r, *sono proporzionali a quelli della matrice a due scale* (a_0) *e* (b_0) *dell'ordine* $r+1$.

Se nella matrice a due scale (b_0) e (c_0) dell'ordine r si aggiungano $\varepsilon+1$ orizzontali alla scala superiore (b_0), con ciò non si fa che moltiplicare i suoi successivi determinanti per $b_0^{\varepsilon+1}$; e quindi essendo $r+1$ il grado della scala (c_0), usando una notazione convenuta (par. 1ª, nº 120), avremo l'uguaglianza complessiva

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} (b_0)_{r+\varepsilon+1} \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} .$$

Bisogna intanto osservare che la matrice del secondo membro è incompleta nella scala inferiore per $\varepsilon+1$ orizzontali (par. 1ª, nº 114); ma se il simbolo c_k si muti in $\gamma_{k+\varepsilon+1}$, e ciò per aumentarne l'indice di $\varepsilon+1$ unità, allora la serie $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1}$, mutandosi in $\gamma_{\varepsilon+1}\ ,\ \gamma_{\varepsilon+2},\ \ldots,\ \gamma_{\varepsilon+n}$, potrà riguardarsi come un caso particolare della serie

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_\varepsilon,\ \gamma_{\varepsilon+1}\ \gamma_{\varepsilon+2},\ \ldots,\ \gamma_{\varepsilon+n}, \qquad (\gamma_0)$$

che riducesi a quella supponendo $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots \gamma_\varepsilon = 0$. In questa ipotesi adunque l'eguaglianza precedente può scriversi

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} (b_0)_{r+\varepsilon+1} \\ (\gamma_0)_{r+1} \end{vmatrix} ;$$

ma attualmente la matrice a sinistra è una matrice completa. Invertendovi l'ordine delle due scale, perchè sia superiore quella di grado più piccolo (par. 1ª, nº 115), non si altera punto il valore assoluto dei successivi determinanti; e siccome ciò si ottiene disponendo le orizzontali in ordine inverso, così si trova agevolmente che il segno conveniente a ciascuno, è quello definito da

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)+r+1} = (-1)^{r+1}\,i\,,$$

poichè (nº 2, nota 1ª) si ha $i=(-1)^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)}$; e quindi risulta

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^{r+1}\,i\,b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} (\gamma_0)_{r+1} \\ (b_0)_{r+\varepsilon+1} \end{vmatrix} . \qquad (4)$$

Ciò premesso faremo subire alla scala superiore (γ_0) dell'ultima matrice la seguente trasformazione, che punto non altera i valori de'suoi successivi determinanti « Ad ogni orizzontale di quella » scala aggiungeremo la sua associata (part. 1ª, nº 116) nella scala » inferiore (b_0) con altre ε orizzontali, che immediatamente la pre- » cedono in questa scala, ordinatamente moltiplicate, a comin- » ciare dall'associata, pe'successivi coefficienti del quoziente, vale » a dire per q_0, q_1, q_2, . . , q_ε ». È chiaro innanzi tutto che in tal guisa gli elementi nulli, che precedono l'elemento iniziale γ_0 di qualunque orizzontale della scala superiore, si riproducono ancora come nulli in seguito della trasformazione; ed inoltre che la serie degli altri elementi $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varepsilon, \gamma_{\varepsilon+1}, \gamma_{\varepsilon+2}$, etc. si cangia nella serie delle espressioni

$$\begin{array}{llllll}
\gamma_0 & + q_0 b_0 , & & & & \\
\gamma_1 & + q_0 b_1 & + q_1 b_0 , & & & \\
\gamma_2 & + q_0 b_2 & + q_1 b_1 & + q_2 b_0 , & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\gamma_\varepsilon & + q_0 b_\varepsilon & + q_1 b_{\varepsilon-1} & + q_2 b_{\varepsilon-2} & + \cdots & + q_\varepsilon b_0 , \\
\gamma_{\varepsilon+1} & + q_0 b_{\varepsilon+1} & + q_1 b_\varepsilon & + q_2 b_{\varepsilon-1} & + \cdots & + q_\varepsilon b_1 , \\
\gamma_{\varepsilon+2} & + q_0 b_{\varepsilon+2} & + q_1 b_{\varepsilon+1} & + q_2 b_\varepsilon & + \cdots & + q_\varepsilon b_2 , \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Ora essendo $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_\varepsilon = 0$, e $\gamma_{\varepsilon-1} = c_0$, $\gamma_{\varepsilon+2} = c_1$, etc., osservando ai sistemi di equazioni (1) e (2), si vede che queste espressioni equivalgono ordinariamente ai termini della serie a_0, a_1, a_2, etc.; e ne risulta che la scala (γ_0) si trasforma nella scala (a_0). Così l'eguaglianza (4) diviene

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^{r+1} i b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} (a_0)_{r+1} \\ (b_0)_{r+\varepsilon+1} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

e sotto questa forma essa non è che la traduzione del teorema enunciato; perciocchè indica che i successivi determinanti della matrice a due scale (b_0) e (c_0), dell'ordine r, sono uguali a quelli della matrice a due scale (a_0) e (b_0), dell'ordine $r+1$, fatta però astrazione dal divisor comune

$$(-1)^{r+1} i b_0^{\varepsilon+1};$$

donde poi segue che i primi determinanti sono proporzionali ai secondi.

10. Immaginando che sia cambiato il segno al resto della divisione di **A** per **B**, dovrà cambiarsi il segno a ciascuno de'coefficienti c_0, c_1, ..., c_{n-1}. In questa ipotesi adunque la scala inferiore (c_0) della matrice nel primo membro della (5) dovrà mutarsi in $(-c_0)$; ma poscia cambiando il segno a ciascuna delle sue $r+1$ orizzontali, quel primo membro diverrà

$$(-1)^{r+1} \begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix};$$

e però nel caso che consideriamo l'uguaglianza (5) si riduce a

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{i b_0^{\varepsilon+1}} \begin{vmatrix} (a_0)_{r+1} \\ (b_0)_{r+\varepsilon+1} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

11. Nel caso particolare di $\varepsilon=1$, cioè, quando i gradi delle funzioni **A** e **B** differiscono di uno, si ha $i=+1$; quindi, se il resto ha il suo proprio segno, si ha più semplicemente,

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^{r+1} b_0^2} \begin{vmatrix} (a_0)_{r+1} \\ (b_0)_{r+2} \end{vmatrix}; \qquad (7)$$

e, se il resto della divisione abbia il segno mutato, si avrà

$$\begin{vmatrix} (b_0)_r \\ (c_0)_{r+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0^2} \begin{vmatrix} (a_0)_{r+1} \\ (b_0)_{r+2} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Espressioni dei residui risultanti dal processo del massimo comun divisore tra due funzioni di gradi qualunque.

12. Istituendo la ricerca del massimo comun divisore tra le funzioni A e B, che supponiamo a coefficienti indeterminati, e quindi prime tra loro, si perverrà ad un resto indipendente da x; e siccome la funzione B è di grado n, i resti successivi saranno di gradi $n-1$, $n-2$, .., 2, 1, 0. Intanto converremo di mutare il segno ad ogni resto pria che faccia da divisore, e chiameremo R_1, R_2, .., R_n questi n resti co'segni cambiati.

Ciò premesso essendo il residuo R_r, vale a dire il residuo r^{mo}, di grado $n-r$, supporremo in generale

$$R_r = b_0^{(r)} x^{n-r} + b_1^{(r)} x^{n-r-1} + \cdots + b_s^{(r)} x^{n-r-s} + \cdots + b_{n-r}^{(r)};$$

e conseguentemente per $r=1, 2, 3, \ldots, n$ si avrà

$$R_1 \;= b_0' x^{n-1} + b_1' x^{n-2} + \cdots + b'_{n-2} x + b'_{n-1},$$

$$R_2 \;= b_0'' x^{n-2} + b_1'' x^{n-3} + \cdots + b''_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_{n-1} = b_0^{(n-1)} x + b_1^{(n-1)},$$

$$R_n \;= b_0^{(n)}.$$

Or noi possiamo subito esprimere i coefficienti di questi residui in funzione di quelli dei polinomii A e B, osservando che i coefficienti di questi polinomii e de'residui dànno origine al sistema di serie (a_0), (b_0), (b_0'), (b_0'') (b_0'''), . . , $(b_0^{(n)})$, al primo terno delle quali si applica la formola (6), e ad ogni altro terno la formola (8). Così supponendo, per esempio, che si tratti di calcolare i coefficienti del quarto residuo R_4, figurati da b_0^{IV}, b_1^{IV}, b_2^{IV}, . . , b_s^{IV}, etc. avremo in primo luogo (n° 2, nota seconda)

$$b_s^{IV} = \frac{1}{b_0'''^2} \begin{vmatrix} (b_0'')_1 \\ (b_0''')_2 \end{vmatrix}_s;$$

ma, siccome i determinanti della matrice in veduta sono uguali a quelli della matrice a due scale $(b_0')_2$, $(b_0'')_3$ divisi per $b_0''^2$; poi questi uguali a quelli dell'altra a due scale $(b_0)_3$ e $(b_0')_4$, divisi per $b_0'^2$; e poi gli ultimi uguali a quelli della matrice a due scale $(a_0)_4$, $(b_0)_{4+\varepsilon}$, divisi per $i b_0^{\varepsilon+1}$, risulterà

$$b_s^{\text{IV}} = \frac{1}{i b_0^{\varepsilon+1} (b_0' \, b_0'' \, b_0''')^2} \left| \begin{matrix} (a_0)_4 \\ (b_0)_{4+\varepsilon} \end{matrix} \right|_s^{\cdot}.$$

Ciò basta intanto per conchiudere senza più che si ha in generale

$$b_s^{(r)} = \frac{1}{i b_0^{\varepsilon+1} (b_0' \, b_0'' \, b_0''' \, .. \, b_0^{(r-1)})^2} \left| \begin{matrix} (a_0)_r \\ (b_0)_{r+\varepsilon} \end{matrix} \right|_s^{\cdot} ; \; (*)$$

e quindi possiamo enunciare il seguente teorema:

I coefficienti del residuo r^{mo} sono uguali ai successivi determinanti della matrice a due scale $(a_0)_r$ e $(b_0)_{r+\varepsilon}$, divisi pel prodotto de' quadrati de' principali coefficienti di tutt'i precedenti residui e della potenza $(\varepsilon + 1)^{ma}$ del principale coefficiente di **B**, *presa col* $+$, *o col* $-$, *secondochè il numero $\frac{1}{2}\,\varepsilon(\varepsilon - 1)$ è pari, o impari.*

(*) Potendo essere utile di conoscere il segno che prende il secondo membro di questa formola quando il processo del massimo comun divisore è condotto senza il cambiamento di segno ai resti, esamineremo per questa ipotesi lo stesso caso considerato nel testo, ed avremo in primo luogo (n° 2, nota 2ª).

$$b_s^{\text{IV}} = \frac{(-1)^1}{b_0'''^2} \left| \begin{matrix} (b_0'')_1 \\ (b_0''')_2 \end{matrix} \right|_s^{\cdot}.$$

Ora il determinante del secondo membro equivale al corrispondente determinante della matrice a due scale $(b_0')_2$, $(b_0'')_3$ moltiplicato per $\frac{(-1)^2}{b_0''^2}$; poi questo uguale a quello della matrice a due scale $(b_0)_3$, $(b_0')_4$, moltiplicato per $\frac{(-1)^3}{b_0'^2}$; e l'ultimo finalmente uguale a quello della matrice a due scale $(a_0)_4$, $(b_0)_{4+\varepsilon}$, moltiplicato per $\frac{(-1)^4}{i\, b_0^{\varepsilon+1}}$; così risulta

$$b_s^{\text{IV}} = \frac{(-1)^1 (-1)^2 (-1)^3 (-1)^4}{i\, b_0^{\varepsilon+1} (b_0' \, b_0'' \, b_0''')^2} \left| \begin{matrix} (a_0) \\ (b_0)_{4+\varepsilon} \end{matrix} \right|_s^{\cdot}.$$

13. Quando $\varepsilon = 1$, si ha $i = +1$, ed il teorema si modifica come segue:

Se i gradi dei polinomii A *e* B *differiscono di* uno, *i coefficienti del residuo r^{mo} sono uguali ai successivi determinanti della matrice a due scale $(a_0)_r$ e $(b)_{r+1}$, divisi pel prodotto de' quadrati dei principali coefficienti di tutt'i precedenti residui e del polinomio* B.

In questa ipotesi adunque il divisor comune dei determinanti è una quantità essenzialmente positiva, e la formola si riduce a

$$b_s^{(r)} = \frac{1}{(b_0 b_0' b_0'' b_0''' \dots b_0^{(r-1)})^2} \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_{r+1} \end{vmatrix}_s.$$

14. Ponendo per compendio

$$\alpha_r = i b_0^{\varepsilon+1} (b_0' b_0'' b_0''' \dots b_0^{(r-1)})^2 \quad , \quad D_{r,s} = \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_{r+\varepsilon} \end{vmatrix}_s,$$

la formola generale si muta in

$$b_s^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r} D_{r,s};$$

quindi pe' successivi coefficienti del residuo R_r abbiamo

$$b_0^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r} D_{r,0}, \quad b_1^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r} D_{r,1}, \quad b_2^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r} D_{r,2}, \dots, \quad b_{n-r}^{(r)} = \frac{1}{\alpha_r} D_{r,n-r}.$$

e conseguentemente lo stesso residuo risulta espresso da

$$R_r = \frac{1}{\alpha_r} (D_{r,0} x^{n-r} + D_{r,1} x^{n-r-1} + D_{r,2} x^{n-r-2} + \dots + D_{r,n-r});$$

Ora è chiaro che pel residuo r^{mo} il numeratore del primo fattore sarebbe

$$(-1)^1 (-2)^2 (-1)^3 \dots (-1)^r = (-1)^{1+2+3\dots+r} = (-1)^{\frac{1}{2} r (r+1)};$$

e quindi segue che, se nel procedimento del massimo comun divisore si opera alla maniera ordinaria, vale a dire senza cambiare il segno ai resti, si avrà in generale

$$b_s^{(r)} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2} r (r+1)}}{i b_0^{\varepsilon+1} (b_0' b_0'' \dots b_0^{(r-1)})^2} \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_{r+\varepsilon} \end{vmatrix}_s.$$

Che, se facciasi

$$\rho_r = D_{r,0}\,x^{n-r} + D_{r,1}\,x^{n-r-1} + D_{r,2}\,x^{n-r-2} + \ldots + D_{r,n-r},$$

si avrà più concisamente

$$R_r = \frac{1}{\alpha_r}\rho_r.$$

Dei due fattori che entrano in questa espressione il primo, che non dipende da x, riassume tutti quei fattori ch'è lecito di sopprimere nel calcolo de'residui, mentre il secondo ρ_r, ch'è una funzione di x, è ciò che importa nella teoria del massimo comun divisore. Or noi distingueremo il fattore ρ_r col nome di *residuo semplificato* corrispondente al *residuo completo* R_r; e la sua espressione, già compiutamente definita, può concretarsi nel seguente teorema:

Applicando il processo del massimo comun divisore a due funzioni di qualunque grado A *e* B, *i coefficienti del semplificato* r^{mo} *residuo saranno ordinatamente uguali ai successivi determinanti della matrice a due scale dell'ordine* r^{mo}, *formate con le serie dei coefficienti di* A *e* B.

E qui giova osservare che ciascuno de' detti coefficienti è una funzione omogenea de' coefficienti di A e B, di grado $2r+\varepsilon$; ma in particolare essa è ancora omogenea e di grado r rispetto ai coefficienti di B; e parimenti omogenea e di grado $r+\varepsilon$ rispetto ai coefficienti di A.

15. È manifesto che i risultamenti e le formole stabilite in questo articolo coincidono, nella ipotesi di $r=1$, con quelle esposti al numero 2; ed ora aggiungiamo che le trasformazioni operate nei numeri 3 e 4 si estendono identicamente a qualunque semplificato residuo. Così, conformemente al numero 3, l'espressione di ρ_r può compendiarsi in un solo determinante, riunendo in una le ultime $n-r+1$ verticali della matrice dell'ordine r^{mo}, ordinatamente moltiplicate per le successive potenze x^{n-r}, x^{n-r-1}, . . . , x, 1. E se all'ultima verticale di questo determinante si aggiungano, come al numero 4, tutte le precedenti, ordinatamente moltiplicate, a cominciar dalla prima, per le successive $r+s-1$ potenze x^{m+r-1}, x^{m+r-2}, . . ., x^{n-r+1},

avremo pel semplificato residuo l'espressione notevole:

$$\rho_r = \left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_0 & a_1 & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & . & a_{s-2} & a_{s-1} & a_s & . & a_{r+s-2} & \mathbf{A}x^{r-1} \\
0 & a_0 & . & a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & . & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & . & a_{r+s-3} & \mathbf{A}x^{r-2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_s & a_{\varepsilon+1} & a_{\varepsilon+2} & . & a_s & \mathbf{A}x \\
0 & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & . & a_{s-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & . & a_{s-1} & \mathbf{A} \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & . & b_{r-1} & \mathbf{B} \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_r & \mathbf{B}x \\
0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & . & b_1 & b_2 & b_3 & . & b_{r+1} & \mathbf{B}x^2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & b_0 & . & b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & . & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & . & b_{r+s-3} & \mathbf{B}x^{s-2} \\
b_0 & b_1 & . & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & . & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & . & b_{r+s-2} & \mathbf{B}x^{s-1}
\end{array}\right|$$

in cui il determinante a dritta differisce solo nell'ultima verticale dal principale determinante della matrice a due scale (a_0) e (b_0) dell'ordine r, e ne risulta cambiandovi semplicemente i primi r elementi dell'ultima verticale ne' prodotti della funzione $\mathbf{A}$ per le successive potenze x^{r-1}, x^{r-2},.., $x, 1$, e gli ultimi s elementi ne' prodotti della funzione $\mathbf{B}$ per le successive potenze $1, x, x^2, .., x^{s-1}$.

16. Per concretare con un esempio le precedenti conchiusioni supporremo

$$\mathbf{A} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\,,$$

$$\mathbf{B} = px^3 + qx^2 + rx + s\,.$$

In questo caso si hanno tre semplificati residui ρ_1, ρ_2, ρ_3, di gradi 2°, 1°, 0; e però, formate le corrispondenti matrici di 1°, 2°, 3° ordine, avremo

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ o & p & q \\ p & q & r \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & b & d \\ o & p & r \\ p & q & s \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b & e \\ o & p & s \\ p & q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & cx^2 + dx + e \\ o & p & qx^2 + rx + s \\ p & q & rx^2 + sx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \mathbf{A} \\ o & p & \mathbf{B} \\ p & q & \mathbf{B}x \end{vmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & p & q & r & s \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & e \\ 0 & 0 & p & q & s \\ 0 & p & q & r & 0 \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d & ex \\ 0 & a & b & c & dx+e \\ 0 & 0 & p & q & rx+s \\ 0 & p & q & r & sx \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & s \\ 0 & 0 & p & q & r & s & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & Ax^2 \\ 0 & a & b & c & d & e & Ax \\ 0 & 0 & a & b & c & d & A \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & B \\ 0 & 0 & p & q & r & s & Bx \\ 0 & p & q & r & s & 0 & Bx^2 \\ p & q & r & s & 0 & 0 & Bx^3 \end{vmatrix}$$

17. In quanto al calcolo numerico de'semplificati residui non sapremmo assegnare un metodo più semplice e più spedito di quello che abbiamo sviluppato nel § XI della prima parte, dal n° 123 al n° 129; e però se dinotiamo con $\Delta_{r+\varepsilon,0}$, $\Delta_{r+\varepsilon,1}$, $\Delta_{r+\varepsilon,2}$, etc. i trasformati de'successivi determinanti della matrice a due scale D_r, siccome allora si ha in generale (part. 1ª, n° 127)

$$D_{r,s} = \frac{1}{a_0^\varepsilon} \Delta_{r+\varepsilon,\,s}$$

otterremo

$$\rho_r = \frac{1}{a_0^\varepsilon} \left(\Delta_{r+\varepsilon,0} x^{n-r} + \Delta_{r+\varepsilon,1} x^{n-r-1} + \dots + \Delta_{r+\varepsilon,n-r}\right).$$

Intanto supponendo già costruita la ridotta generale e quadrata $\Delta_{n+\varepsilon}$, o ch'è lo stesso Δ_m, potremo subito esprimere il residuo ρ_r per mezzo di un solo determinante, formando prima una matrice con le prime $r+\varepsilon$ orizzontali della ridotta generale, e poi riunendo in una le sue ultime $n-r+1$ verticali ordinatamente moltiplicate per le successive potenze x^{n-r}, x^{n-r-1}, ..., x^2, x, 1; chè in tal guisa si ha un determinante di grado $r+\varepsilon$, il quale diviso per a_0^ε, sarà equivalente a ρ_r. Che se piaccia di sopprimere questo divisore non evvi a far altro che cambiare le prime ε orizzontali della ridotta in una scala inversa di grado ε, formata con i coefficienti della funzione B.

Applicando questo processo all'esempio di poc'anzi, cominceremo dal formare la matrice bilineare

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & p & q & r & s \end{vmatrix},$$

e di seguito il sistema triangolare

$$\begin{vmatrix} ap & aq & ar & as \\ & ar+bq-cp & as+br-dp & bs-ep \\ & & bs-ep+cr-dq & cs-eq \\ & & & ds-er \end{vmatrix},$$

che rappresentiamo per compendio con

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & c_{33} & c_{34} \\ & & & c_{44} \end{vmatrix}.$$

Quindi, essendo attualmente $\varepsilon=1$, avremo

$$a\rho_1=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}x^2+\begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{21} & c_{24} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}x^2+c_{13}x+c_{14} \\ c_{21} & c_{22}x^2+c_{23}x+c_{24} \end{vmatrix};$$

$$a\rho_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{34} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}x+c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23}x+c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}x+c_{34} \end{vmatrix};$$

$$a\rho_3=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix}.$$

18. L'espressione del completo residuo R_r si ha nel prodotto del corrispondente semplificato residuo ρ_r, moltiplicato per $\frac{1}{\alpha_r}$; però essendo (n° 14)

$$\alpha_r=i\,b_0^{\varepsilon+1}\left(b_0{'}\,b_0{''}\,b_0{'''}\,\ldots\,b_0^{(r-2)}\,b_0^{(r-1)}\right)^2,$$

è ancora necessario di esprimere questa quantità per mezzo dei coefficienti di A e B; ma a tale effetto renderemo più concisa la notazione dei principali coefficienti dei semplificati residui ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc., o che è lo stesso dei principali determinanti delle matrici dei diversi ordini, finora rappresentati con $D_{1,0}$, $D_{2,0}$, $D_{3,0}$, etc. In ciò che segue sopprimeremo da questi simboli il secondo indice, e scriveremo semplicemente D_1, D_2, D_3, etc.

Ciò premesso l'espressione della quantità α_r, escludendone l'ultimo fattore $(b_0^{(r-1)})^2$, si muta in quella di α_{r-1}. Inoltre essendo

(n° 14) $b_s^{(r-1)} = \frac{1}{\alpha_{r-1}} D_{r-1,s}$, per $s=0$ avremo

$$b_0^{(r-1)} = \frac{1}{\alpha_{r-1}} D_{r-1} ;$$

quindi si ottiene

$$\alpha_r = \alpha_{r-1} \frac{1}{\alpha_{r-1}^2} D_{r-1}^2 ;$$

e ne risulta

$$\alpha_{r-1}\alpha_r = D_{r-1}^2 .$$

Questa formola compie immediatamente la trasformazione di cui trattasi. Infatti essa porge la serie di relazioni

$$\alpha_1 \alpha_2 = D_1^2 \ , \quad \alpha_2 \alpha_3 = D_2^2 \ , \quad \alpha_3 \alpha_4 = D_3^2 \ , \quad \alpha_4 \alpha_5 = D_4^2 \ , \quad \text{etc.}$$

dalle quali si ricava per successive sostituzioni

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1} D_1^2 \ , \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{D_1^2 D_3^2}{D_2^2} \ , \ldots , \ \alpha_{2\mu} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{D_1^2 D_3^2 D_5^2 \cdots D_{2\mu-1}^2}{D_2 D_4 \cdots D_{2\mu-2}} \ ,$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 \frac{D_2^2}{D_1^2} \ , \quad \alpha_5 = \alpha_1 \frac{D_2^2 D_4^2}{D_1^2 D_3^2} \ , \ldots , \ \alpha_{2\mu+1} = \alpha_1 \frac{D_2^2 D_4^2 D_6^2 \cdots D_{2\mu}^2}{D_1^2 D_3^2 D_5^2 \cdots D_{2\mu-1}^2} \ .$$

Essendo adunque conosciuta l'espressione di α_1, poichè si ha

$$\alpha_1 = i b_0^{\varepsilon+1} \ ,$$

nulla più manca per la costruzione de' completi residui in funzione de' coefficienti de' polinomii primitivi A e B.

Relazioni tra i semplificati residui

19. Siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ i quozienti che si ottengono applicando il processo del massimo comun divisore alle funzioni A, B, senza sopprimere, nè introdurre alcun fattore; ed $R_1, R_2, \ldots, R_n$ i corrispondenti residui con i segni cambiati; avremo in siffatta guisa la serie di relazioni

$$
\begin{array}{llll}
A = Q_1 B - R_1 & , & R_1 = Q_3 R_2 - R_3 & , \\
B = Q_2 R_1 - R_2 & , & R_2 = Q_4 R_3 - R_4 & , \\
 & & \ldots\ldots\ldots & \\
 & & R_{n-2} = Q_n R_{n-1} - R_n & ,
\end{array}
$$

le quali, essendo in generale $R_r = \frac{\rho_r}{\alpha_r}$, si trasformano in

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 A = \alpha_1 Q_1 B - \rho_1 & , & \alpha_2\alpha_3\rho_1 = \alpha_1\alpha_3 Q_3 \rho_2 - \alpha_1 \alpha_2 \rho_3 , \\
\alpha_1\alpha_2 B = \alpha_2 Q_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 & , & \alpha_3\alpha_4\rho_2 = \alpha_2\alpha_4 Q_4 \rho_3 - \alpha_2 \alpha_3 \rho_4 , \\
 & & \ldots\ldots\ldots \\
 & & \alpha_{n-1}\alpha_n \rho_{n-2} = \alpha_{n-2}\alpha_n Q_n \rho_{n-1} - \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\rho_n ;
\end{array}
$$

e queste, se pongasi per compendio

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\alpha_1 Q_1 = q_1 & , & \alpha_1\alpha_3 Q_3 = q_3 , \\
\alpha_2 Q_2 = q_2 & , & \alpha_2\alpha_4 Q_4 = q_4 , \\
 & & \ldots\ldots \\
 & & \alpha_{r-2}\alpha_r Q_r = q_r ,
\end{array}
\right\} \quad (9)
$$

tenendo presente che si ha in generale $\alpha_{r-1}\alpha_r = D^2_{r-1}$, diverranno

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\alpha_1 A = q_1 B - \rho_1 & , & D^2_2 \rho_1 = q_3 \rho_2 - D^2_1 \rho_3 \\
D^2_1 B = q_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 & , & D^2_3 \rho_2 = q_4 \rho_3 - D^2_2 \rho_4 \\
 & & \ldots\ldots\ldots \\
 & & D^2_{n-1} \rho_{n-2} = q_n \rho_{n-1} - D^2_{n-2} \rho_n
\end{array}
\right\} \quad (10)
$$

Intorno a queste relazioni osserviamo che le $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sono, come risulta dalle (9), funzioni intere di x, la prima di grado ε, tale essendo il grado di Q_1, e tutte le altre di 1° grado; ma aggiungiamo che desse sono altresì intere rispetto ai coefficienti di

A e B; perchè intere son pure tutte le altre quantità che sono in vista nelle relazioni (10). Del rimanente è chiaro che tali relazioni sono quelle che si avrebbero quando tutte le divisioni fossero regolate in guisa da evitar frazioni (n° 8), perciocchè il primo dividendo A si è moltiplicato per $\alpha_1 = i b_0^{\varepsilon+1}$, cioè per la potenza $(\varepsilon+1)^{ma}$ del principale coefficiente del primo divisore, ed ogni altro dividendo è moltiplicato pel quadrato del principale coefficiente del corrispondente divisore. Faremo inoltre osservare che il resto di ciascuna divisione, a cominciare dalla seconda, è un prodotto di due fattori, l'un de'quali è il semplificato residuo, e l'altro è lo stesso fattore introdotto nella precedente divisione ad oggetto di evitar frazioni. Quindi risulta che, se il procedimento del massimo comun divisore tra due funzioni intere sia regolato in guisa da evitar frazioni, ogni resto, a cominciar del secondo, sarà divisibile pel fattore introdotto nella precedente divisione; e però, sopprimendo dal resto un tal fattore, pria che faccia da divisore, tutti i resti così ottenuti corrisponderanno precisamente ai nostri semplificati residui.

20. Segue da ciò che precede, che, in generale, tre consecutivi semplificati residui ρ_{r-2}, ρ_{r-1}, ρ_r sono legati dalla relazione

$$D_{r-1}^2\, \rho_{r-2} = q_r\, \rho_{r-1} - D_{r-2}^2\, \rho_r ,$$

nella quale i valori regolari di r sono tutti gl'interi da 3 ad n, perchè l'indice di ρ non può essere nè minore di 1, nè maggiore di n. Per $r = n+1$ si avrebbe

$$D_n^2\, \rho_{n-1} = q_{n+1}\, \rho_n - D_{n-1}^2\, \rho_{n+1} .$$

Questa relazione corrisponderebbe alla divisione del penultimo per l'ultimo dei semplificati residui; e siccome l'uno è di 1°, e l'altro è di grado *zero*, il residuo di tal divisione è nullo, e quindi si avrà $D_{n-1}^2\, \rho_{n+1} = 0$; ma D_{n-1} è, vista la sua significazione, una quantità diversa da *zero*; dunque si avrà necessariamente

$$\rho_{n+1} = 0 , \quad (*)$$

(*) Segue da ciò che, nella ipotesi di $r = n+1$, deve ancora annullarsi il determinante, che esprime il valore di ρ_{n+1}, secondo la formola del n° 15; ma e l'eguaglianza precedente si ridurrà a $D_n^2 \rho_{n-1} = q_{n+1} \rho_n$; ma è ancora $D_n = \rho_n$; perciocchè ρ_n essendo l'ultimo dei semplificati residui, è indipendente da x, e la sua espressione equivale all'unico determinante della matrice quadrata a due scale (a_0) e (b_0), dell'ordine il più elevato n; dunque risulta

$$D_n \rho_{n-1} = q_{n+1}.$$

Condizioni perchè due funzioni ammettano un divisore di grado assegnato. Determinazione di questo divisore.

21. Fin qui si è supposto che le funzioni A e B fossero prime tra loro, ed in questa ipotesi l'ultimo de'semplificati residui è necessariamente diverso da *zero*; ma ora è manifesto che, se quelle funzioni ammettano un divisor comune di grado k in x, questo divisore non può differire che per un fattor numerico dal semplificato residuo di grado k, figurato da ρ_{n-k}; ed in tal caso saranno identicamente nulli tutti gli altri residui da ρ_{n-k+1} fino a ρ_n, vale a dire da quello di grado $k-1$ fino a quello di grado *zero*.

Reciprocamente, se sono identicamente nulli tutti gli ultimi residui da quello di grado $k-1$ fino a quello di grado *zero*, le funzioni A e B ammetteranno necessariamente un divisor comune di grado k in x, il quale non può differire che per un fattor numerico dal semplificato residuo ρ_{n-k}. Parrebbe da ciò che per

questo fatto merita un chiarimento. E dapprima bisogna osservare che, siccome quel determinante è ciò che diviene il principale determinante della matrice a due scale (a_0) e (b_0) dell'ordine r, trasformandovi gli elementi dell'ultima verticale, come si disse in quel luogo, così, tenendo presente che nella ipotesi attuale il numero delle orizzontali della matrice supera di *uno* quello delle verticali (par. 1ª, nº 119), affinchè sia possibile la costituzione del determinante, bisogna aggiungervi un'ultima verticale di elementi nulli; e perciò anche nullo è il suo valore. Ma quindi esso non cesserà di esser nullo applicando all'ultima verticale la trasformazione dichiarata nel nº 15, vale a dire aggiungendole tutte le altre, ordinatamente moltiplicate, a cominciar dalla prima, per le successive potenze x^{m+n}, x^{m+n-1}, ..., x, 1, com'esser deve nel caso di $r=n+1$.

l'esistenza del comun divisore di grado k dovesse verificarsi il sistema di condizioni

$$\begin{array}{llll} D_n = 0\,, & & & \\ D_{n-1} = 0\,, & D_{n-1,1} = 0\,, & & \\ D_{n-2} = 0\,, & D_{n-2,1} = 0\,, & D_{n-2,2} = 0\,, & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ D_{n-k+1} = 0\,, & D_{n-k+1,1} = 0\,, & D_{n-k+1,2} = 0\,, \ldots, & D_{n-k+1,k-1} = 0\,, \end{array}$$

che sono in numero di $\frac{1}{2}\,k(k+1)$. Ma è facile a riconoscere che queste condizioni non sono tra loro tutte distinte, e le condizioni veramente indipendenti si riducono alle seguenti k equazioni

$$D_n = 0\;,\; D_{n-1} = 0\;,\; D_{n-2} = 0\;, \ldots,\; D_{n-k+1} = 0\;.$$

In fatti, supposto dapprima che si abbia soltanto $D_n = 0$, ciò equivale a supporre che sia nullo l'ultimo residuo ρ_n, il quale è indipendente da x; ed in tal caso le funzioni A e B ammettono necessariamente un divisor comune di 1° grado, il quale non può differire che per un fattor numerico dal penultimo semplificato residuo ρ_{n-1}, ossia da

$$D_{n-1}x + D_{n-1,1}\,.$$

Ora è manifesto che in questa funzione non potrebbe supporsi nullo il principale coefficiente D_{n-1}, senza che sia nullo anche l'altro $D_{n-1,1}$; poichè altrimenti le funzioni A e B non più ammetterebbero il divisor comune di 1° grado; il che è impossibile quando sia, come si è supposto, $D_n = 0$. Così questa condizione, e l'altra $D_{n-1} = 0$ importano che siano identicamente nulli i due ultimi semplificati residui ρ_n e ρ_{n-1}; e da ciò poi risulta che, se non è nullo il residuo precedente ρ_{n-2}, le funzioni A e B dovranno necessariamente ammettere un divisor comune di 2.° grado, il quale non può differire che per un fattor numerico dal detto residuo, vale a dire da

$$D_{n-2}x^2+D_{n-2,1}x+D_{n-2,2}\,.$$

Similmente si dimostra che in questa funzione non potrebbe supporsi nullo il principale coefficiente D_{n-2}, senza che lo siano gli altri due $D_{n-2,1}$ e $D_{n-2,2}$, perchè altrimenti le funzioni A e B non più ammetterebbero un divisore di 2° grado; ma ora, senza più,è manifesto che, se sono nulli i principali coefficienti di un numero qualunque degli ultimi semplificati residui, questi residui sono tutti identicamente nulli; e può quindi enunciarsi il seguente teorema:

Affinchè le funzioni A e B possano ammettere un divisor comune di grado k è necessario e sufficiente che siano nulli i principali coefficienti di tutti gli ultimi k semplificati residui, vale a dire da quello di grado k—1 fino a quello di grado zero; *e, quando ciò sia, il divisor comune non può differire che per un fattor numerico dal semplificato residuo di grado k.*

In altri termini:

Affinchè le funzioni A e B possano ammettere un divisor comune di grado k è necessario e sufficiente che siano nulli i principali determinanti di tutte le ultime k matrici a due scale, formate con i coefficienti delle date funzioni; vale a dire da quella dell'ordine n — *k* + 1 *fino a quella dell'ordine* n, *ch'è il più elevato; e, quando ciò sia, i coefficienti del divisor comune saranno proporzionali ai successivi determinanti della matrice a due scale dell'ordine* n—*k.* (*)

(*) Pare che finora non esista alcun altro teorema generale che soddisfi a questo importante oggetto, ed il solo al quale può aversi ricorso, si è il noto teorema di Lagrange relativo alle condizioni che debbono verificarsi, affinchè due equazioni ammettano un dato numero di radici comuni. Ma si sa d'altra parte che il teorema di Lagrange può soddisfare alla quistione sotto questo punto di veduta, e può non soddisfare a quella del divisor comune di grado assegnato; imperciocchè una radice multipla di una equazione può non essere multipla dell'altra; ed allora le condizioni che risultano dal teorema di Lagrange possono verificarsi senza che le equazioni ammettano il divisor comune di grado assegnato. (Ved. Serret, *Cours d'Algèbre Supérieure*, 2ª edizione pag. 66).

Nuove espressioni dei semplificati residui.

22. Il determinante col quale abbiamo (n° 15) rappresentato il semplificato residuo ρ_r è suscettibile di una trasformazione che mena ad interessanti risultamenti. Quel determinante infatti può essere spezzato in due, i quali sono ciò che esso rispettivamente diviene annullandovi solo nell'ultima verticale una volta gli ultimi s elementi, ed un'altra volta i primi r elementi. Ora noi dinoteremo questi due parziali determinanti con V_r ed X_r, però dopo aver soppresso il fattore A dall'ultima verticale del primo, ed il fattore B dall'ultima verticale del secondo; vale a dire porremo

$$\mathrm{V}_r=\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_0 & a_1 & \cdot & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & \cdot & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & a_s & \cdot & a_{r+s-2} & x^{r-1} \\
0 & a_0 & \cdot & a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & \cdot & a_{s-4} & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & \cdot & a_{r+s-3} & x^{r-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & a_{\varepsilon+2} & \cdot & a_s & x \\
0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & \cdot & a_{s-1} & 1 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_{r-1} & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & b_r & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & b_{r+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & b_0 & \cdot & b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & \cdot & b_{s-4} & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & \cdot & b_{r+s-3} & 0 \\
b_0 & b_1 & \cdot & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & \cdot & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & \cdot & b_{r+s-2} & 0
\end{array}\right|,$$

$$\mathrm{X}_r=\left|\begin{array}{cccccccccccccc}
a_0 & a_1 & \cdot & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & \cdot & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & a_s & \cdot & a_{r+s-2} & 0 \\
0 & a_0 & \cdot & a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & \cdot & a_{s-4} & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & \cdot & a_{r+s-3} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & a_{\varepsilon+2} & \cdot & a_s & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & \cdot & a_{s-1} & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_{r-1} & 1 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot & b_r & x \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & b_{r+1} & x^2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & b_0 & \cdot & b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & \cdot & b_{s-4} & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & \cdot & b_{r+s-3} & x^{s-2} \\
b_0 & b_1 & \cdot & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & \cdot & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & \cdot & b_{r+s-2} & x^{s-1}
\end{array}\right|;$$

dove bisogna tener presente che $\varepsilon=m-n$, ed $s=r+m-n$;

ed intanto l'espressione del semplificato residuo diviene

$$\rho_r = AV_r + BX_r . \qquad (11)$$

In questa formola i simboli V_r ed X_r esprimono adunque determinanti, i quali differiscono solo nell'ultima verticale da D_r, principale determinante della matrice a due scale dell'ordine r, relative a' coefficienti delle funzioni A e B. Nell' ultima verticale di V_r i primi r elementi sono le successive r potenze x^{r-1}, $x^{r-2}, .., x$, 1, e nulli rimanenti; mentre, nell'ultima verticale di X_r sono nulli i primi r elementi, e gli altri sono le successive s potenze 1, x, $x^2, .., x^{s-1}$. Così, essendo V_r una funzione di x di grado $r-1$, ed X_r una funzione di x di grado $s-1=\varepsilon+r-1=m-n+r-1$, ciascuno de'due prodotti AV_r, BX_r sarà di grado $m+r-1$; ma la loro somma deve necessariamente ridursi al grado $n-r$, tale essendo il grado di ρ_r.

23. Ponendo mente alla natura de'determinanti V_r ed X_r si riconosce agevolmente che i loro termini affetti dalle più alte potenze x^{r-1}, ed x^{s-1} hanno entrambi per coefficiente il principale determinante della matrice a due scale dell'ordine $r-1$, vale a dire D_{r-1}, il quale però nel primo è moltiplicato per $-b_0$, e nell' altro per a_0; di modo che i detti termini sono rispettivamente

$$-b_0 D_{r-1} x^{r-1} \quad \text{ed} \quad a_0 D_{r-1} x^{s-1} .$$

24. Nella formola (11) i valori regolari dell'indice r sono tutti gli interi 1, 2, .., n. Nel caso di $r=1$ si ha

$$\rho_1 = AV_1 + BX_1 ;$$

ma dal paragone di questa relazione con la prima delle (10) si deduce

$$V_1 = -\alpha_1 = -i b_0^{\varepsilon+1} \quad , \quad X_1 = q_1 ;$$

così la funzione V_1 è una quantità costante, ed X_1 equivale al quoziente *intero* della divisione di A per B, regolata com'è detto a' numeri 8 e 19: quoziente figurato da q_1; ma ciò del resto risulta direttamente dalle stesse espressioni di V_1 ed X_1, essendo

$$V_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & . & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & 0 \\ b_0 & b_1 & . & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & 0 \end{vmatrix}, \quad X_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & b_0 & 1 \\ 0 & 0 & . & b_0 & b_1 & x \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & b_0 & . & b_{\varepsilon-2} & b_{\varepsilon-1} & x^{\varepsilon-1} \\ b_0 & b_1 & . & b_{\varepsilon-1} & b_\varepsilon & x^\varepsilon \end{vmatrix}.$$

25. Per $r=n+1$ la formola (11) darebbe

$$\rho_{n+1}=AV_{n+1}+BX_{n+1} ;$$

ma è $\rho_{n+1}=0$ (n° 20, e nota), così risulta in questo caso

$$0=AV_{n+1}+BX_{n+1} . \tag{12}$$

Osserviamo attualmente che i gradi delle funzioni V_{n+1} ed X_{n+1} sono rispettivamente uguali a quelli delle funzioni B ed A, poichè la prima è di grado n, e l'altra è di grado m (n° 22). Ora noi supporremo in primo luogo che le funzioni A e B siano prime tra loro; e siccome i valori di x, che annullano la funzione A, debbono ridurre a *zero* il prodotto BX_{n+1}, così, non potendo essi annullare il fattore B, dovranno invece annullare l'altro fattore V_{n+1}. Segue da ciò che le funzioni A ed X_{n+1}, che sono di gradi uguali, e si riducono a *zero* pe' medesimi valori di x, non possono differire che per un fattor costante: fattore che può ancora agevolmente determinarsi. In fatti i termini di queste due funzioni, i quali contengono la più alta potenza x^m, hanno rispettivamente per coefficienti a_0 ed $a_0 D_n$ (n° 23); e ne conseguita

$$X_{n+1}=D_n A . \tag{13}$$

Nella stessa maniera si dimostra che anche le funzioni B e V_{n+1} non possono differire che per un fattore indipendente da x, e quindi

$$V_{n+1}=-D_n B . \tag{14}$$

26. Continuando a conservare la ipotesi che le funzioni A e B siano prime tra loro, andremo a porre in veduta alcune interes-

santi relazioni tra le funzioni V ed X. Si è già veduto (n° 20) che tre consecutivi semplificati residui sono legati dalla relazione

$$D^2_{r-1}\,\rho_{r-2}-q_r\,\rho_{r-1}+D^2_{r-2}\,\rho_r=0\,;$$

e però sostituendovi i valori di ρ_{r-2}, ρ_{r-1}, ρ_r, che si traggono dalla (11), si ottiene

$$\left.\begin{aligned}&(D^2_{r-1}V_{r-2}-q_rV_{r-1}+D^2_{r-2}V_r)\,A\\&+(D^2_{r-1}X_{r-2}-q_rX_{r-1}+D^2_{r-2}X_r)\,B=0:\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

formola in cui i valori regolari di r sono tutti gl'interi da 3 ad n, e sarà anche lecito di porvi $r=n+1$. Per $r=2$ si avrebbe

$$(D^2_1V_0-q_2V_1+D^2_0V_2)A+(D^2_1X_0-q_2X_1+D^2_0X_2)B=0\,;$$

ma qui i simboli D_0, V_0, X_0 esigono interpetrazione. A tal'effetto sostituiremo direttamente nella seconda delle (10) i valori di ρ_1 e ρ_2, tratti dalla (11); e si ha in tal guisa

$$(-q_2V_1+\alpha_1V_2)A+(D^2_1-q_2X_1+\alpha_1X_2)B=0\,.$$

Paragonando questa relazione con la precedente si conchiude

$$D^2_0=\alpha_1=ib_0^{\varepsilon+1}\quad,\quad V_0=0\quad,\quad X_0=1\,.$$

Ciò posto è chiaro che nella (15) il moltiplicatore di A è una funzione di x di grado $r-1$, e quello di B di grado $m-n+r-1$; così, finchè r non superi n, il grado di A sarà maggiore del grado del moltiplicatore di B; e quello di B maggiore del grado del moltiplicatore di A. Intanto, siccome i valori di x, che annullano A, debbono ridurre a *zero* il moltiplicatore di B, ne segue che questo moltiplicatore è identicamente nullo finchè r sia minore, o tutto al più uguale ad n; e perciò sotto questa limitazione è identica l'equazione

$$D^2_{r-1}\,X_{r-2}-q_rX_{r-1}+D^2_{r-2}\,X_r=0\,.$$

Per $r=n+1$ il moltiplicatore di A è di grado n, cioè dello stesso grado di B; e viceversa il moltiplicatore di B è di grado m, ch' è il grado di A. In questo caso potremmo solo affermare che l' equazione

$$D_n^2 X_{n-1} - q_{n+1} X_n + D_{n-1}^2 X_{n+1} = 0$$

è verificata da' medesimi valori di x, che annullano A; ma siccome questi valori riducono a *zero* il termine $D_{n-1}^2 X_{n+1}$, essi ridurranno a *zero* anche la rimanente parte; e da ciò risulta che l' ultima equazione è parimenti una identità. Dimostreremo in un modo consimile che il moltiplicatore di B è anch' esso identicamente nullo per tutt' i valori di r da $r=2$ fino ad $r=n+1$; e quindi abbiamo le due relazioni generali

$$D_{r-1}^2 V_{r-2} - q_r V_{r-1} + D_{r-2}^2 V_r = 0\,, \tag{16}$$

$$D_{r-1}^2 X_{r-2} - q_r X_{r-1} + D_{r-2}^2 X_r = 0\,, \tag{17}$$

la prima delle quali stabilisce un nesso fra tre consecutive funzioni qualunque della serie $V_0, V_1, \ldots, V_n, V_{n+1}$, e l' altra fra tre funzioni della serie $X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$.

27. Se si elimina q_r tra le (16) e (17) si ha la relazione

$$D_{r-2}^2 (V_{r-1} X_r - X_{r-1} V_r) = D_{r-1}^2 (V_{r-2} X_{r-1} - X_{r-2} X_{r-1})\,,$$

la quale, facendovi successivamente $r=2, 3, \ldots, r$, porge una serie di identità, che moltiplicate tra loro, membro a membro, dànno per prodotto

$$D_0^2 (V_{r-1} X_r - X_{r-1} V_r) = D_{r-1}^2 (V_0 X_1 - X_0 V_1)\,;$$

ma siccome (n^i 24 e 26) $V_0=0$, $V_1=-D_0^2$, $X_0=1$, così risulta semplicemente

$$V_{r-1} X_r - X_{r-1} V_r = D_{r-1}^2\,, \tag{18}$$

o sott' altra forma

$$\begin{vmatrix} V_{r-1} & X_{r-1} \\ V_r & X_r \end{vmatrix} = D_{r-1}^2\,.$$

In fine, se si risolvano rispetto ad A e B le due equazioni

$$\begin{aligned}\rho_{r-1} &= AV_{r-1} + BX_{r-1}\,,\\ \rho_r &= AV_r \;\; + BX_r \;\;,\end{aligned}$$

e si tenga presente che il loro denominator comune equivale a D^2_{r-1}, otterremo

$$A = \frac{1}{D^2_{r-1}}(\rho_{r-1}X_r - \rho_r X_{r-1}) \quad , \quad B = \frac{1}{D^2_{r-1}}(\rho_r V_{r-1} - \rho_{r-1} V_r)\,.$$

28. Le formole qui stabilite si applicano con vantaggio ad importanti quistioni, e segnatamente allo sviluppo di una funzione fratta razionale in frazione continua. Osserveremo intanto in questo punto che, fino a che le funzioni A e B sono prime tra loro, ed i principali coefficienti de'semplificati residui diversi da *zero*, due funzioni successive qualunque, tanto nella serie V_{n+1}, V_n, . . , V_2, V_1, quanto nell'altra X_{n+1}, X_n, . . , X_2, X_1, X_0, sono necessariamente prime tra loro, vale a dire non possono essere annullate da uno stesso valore di x. Di fatti se V_r e V_{r-1} potessero esser nulle ad un tempo, allora in virtù della (16) sarebbe pur nulla la funzione seguente V_{r-2}; ma quindi, mutando in questa formola r in $r-1$, si troverebbe anche nulla l'altra funzione V_{r-3}; e così continuando, si perverrebbe a conchiuder nulla l'ultima funzione V_1; il che è assurdo, perchè quest'ultima funzione è una costante. Similmente, per essere $X_0 = 1$, si conchiuderà per mezzo della (17) che la stessa proprietà compete eziandio all'altra serie. Del resto questa proprietà può dedursi anche più immediatamente dalla (18), la quale a colpo d' occhio dimostra impossibile l'esistenza di un fattore in x nel primo membro; imperciocchè questo fattore dovrebbe essere un divisore del secondo membro; il che è impossibile, essendo D^2_{r-1} una quantità indipendente da x.

29. Passeremo ora ad esaminare quali modifiche subiscano i risultamenti, che precedono, quando le funzioni A e B non sono più prime tra di loro. Noi dunque supporremo ch'esse ammettano un massimo divisor comune di grado $n-r$, che dinotiamo con C, ma che non può differire che per un fattor costante dal semplifi-

cato residuo dello stesso grado, vale a dire da ρ_r, di modo che dovranno a tale uopo verificarsi le $n-r$ condizioni (n° 21)

$$D_{r+1}=0 \ , \ D_{r+2}=0 \ , \ D_{r+3}=0 \ , \ldots , \ D_n=0 \ .$$

Ed ammetteremo inoltre che D_1, D_2, . . , D_r siano tutti diversi da *zero*. Ciò premesso, se indichiamo con A e B i quozienti, che si ottengono dal dividere per C le funzioni A e B, avremo

$$A=CA' \quad , \quad B=CB' ;$$

ma è, secondo l'ipotesi, $\rho_{r+1}=0$, e quindi a cagione della (11)

$$AV_{r+1}+BX_{r+1}=0 :$$

adunque, per la sostituzione de' valori precedenti di A e B, soppresso il fattore C, del quale non abbiamo a tener conto, risulterà

$$A'V_{r+1}+B'X_{r+1}=0 . \qquad (19)$$

Osserviamo attualmente che le funzioni A' e B' sono l'una di grado $m-n+r$, l'altra di grado r; e poichè le funzioni V_{r+1} ed X_{r+1} sono rispettivamente di gradi r ed $m-n+r$ (n° 22), ne segue che i gradi delle funzioni A' ed X_{r+1} sono tra loro uguali, al pari di quelli delle altre due B' e V_{r+1}. Ora, siccome le funzioni A' e B' sono prime tra loro, si vede che la relazione (19) si trova esattamente nelle medesime condizioni della (12), e ne deriva che le funzioni A' ed X_{r+1} non possono differire tra di loro che per un fattor numerico, al pari delle altre due B' e V_{r+1}.

Così noi siamo condotti alla conseguenza singolare e meritevole di attenzione che « il determinante X_{r+1}, fatta astrazione » da un fattor numerico, esprime il quoziente della divisione » della funzione A pel massimo comun divisore tra A e B; e che » similmente l'altro determinante V_{r+1} esprime anch'esso il quo- » ziente della divisione della funzione B per lo stesso massimo » comun divisore ».

30. Siccome le funzioni V_{r+2} ed X_{r+2} hanno per principali coefficienti $-b_0D_{r+1}$ ed a_0D_{r+1}, e che $D_{r+1}=0$, parebbe a prima giunta che queste funzioni dovessero ridursi ai gradi di

V_{r+1} ed X_{r+1}; ma poscia in virtù delle relazioni generali (16) e (17) è agevol cosa a riconoscere che queste funzioni e tutte le altre di grado superiore V_{r+3}, V_{r+4}, etc., X_{r+3}, X_{r+4}, etc. debbono essere identicamente nulle. In quanto poi alle due serie di funzioni di gradi inferiori $V_1, V_2, \ldots, V_r$ ed $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_r$ è chiaro che debbono sussistere tutte le relazioni stabilite nelle formole precedenti; e due funzioni successive qualunque, sia dell'una, sia dell'altra serie, non potranno avere un fattor comune funzione di x.

Trasformazione de' semplificati residui nella ipotesi che la funzione B sia la derivata di A.

31. Quando la funzione B è la derivata di A le quantità D_r, V_r, X_r, e quindi i semplificati residui, si possono facilmente esprimere per mezzo delle somme delle potenze simili delle radici dell'equazione $A=0$. Supposto in questo caso

$$A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\,,$$

$$B=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\,,$$

se dinotiamo con s_μ la somma delle μ^{me} potenze delle radici dell'equazione $A=0$, è noto, o facilmente si dimostra, che un coefficiente qualunque b_k della funzione B, che ora riguardiamo come derivata di A, è espresso da

$$b_k=a_ks_0+a_{k-1}s_1+a_{k-2}s_2+\cdots+a_0s_k: \tag{20}$$

espressione che si annulla tostochè k supera $n-1$; di modo che si ha la serie di relazioni

$$\begin{array}{ll}
b_0=a_0s_0 & ,\ a_ns_0+a_{n-1}s_1+\cdots+a_0s_n=0 \\
b_1=a_1s_0+a_0s_1 & ,\ a_ns_1+a_{n-1}s_2+\cdots+a_0s_{n+1}=0 \\
b_2=a_2s_0+a_1s_1+a_0s_2 & ,\ a_ns_2+a_{n-1}s_3+\cdots+a_0s_{n+2}=0 \\
\ldots\ldots\ldots & ,\ a_ns_3+a_{n-1}s_4+\cdots+b_0s_{n+3}=0 \\
b_{n-1}=a_{n-1}s_0+a_{n-2}s_1+\cdots+a_0s_{n-1} & ,\ \text{etc.}\qquad \text{etc.}\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

serie che può continuarsi a piacere. Ma d'altra parte bisogna tener presente che, essendo **B** la derivata di **A**, si ha pure

$$b_0 = n a_0 \quad , \quad b_1 = (n-1) a_1 \quad , \quad b_2 = (n-2) a_2 \quad , \quad \text{etc.}$$

Ciò premesso considereremo dapprima il determinante

$$D_r = \begin{vmatrix}
a_0 & . & a_{r-p} & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & a_{r+1} & . & a_{r+q} & . & a_{2r} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & a_0 & . & a_{p-2} & a_{p-1} & a_p & a_{p+1} & . & a_{p+q} & . & a_{r+p} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{q+2} & . & a_{r+2} \\
0 & . & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{q+1} & . & a_{r+1} \\
0 & . & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & b_1 & . & b_q & . & b_r \\
0 & . & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_{q+1} & . & b_{r+1} \\
0 & . & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & . & b_{q+2} & . & b_{r+2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & b_0 & . & b_{p-2} & b_{p-1} & b_p & b_{p+1} & . & b_{p+q} & . & b_{r+p} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
b_0 & . & b_{r-p} & . & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & b_{r+1} & . & b_{r+q} & . & b_{2r}
\end{vmatrix} ,$$

nel quale, oltre alle prime, ed ultime orizzontali di ciascuna scala, abbiamo pur messo in veduta la $(p+1)^{ma}$ orizzontale della scala inferiore, e la sua associata nella scala superiore; e lo sommetteremo alla seguente trasformazione, che punto non altera il suo valore:

» Rimanendo immutata la scala superiore, da ogni orizzontale
» della inferiore toglieremo la sua associata nella superiore, mol-
» tiplicata per s_0, con tutte le altre che la seguono in questa sca-
» la, ordinatamente moltiplicate per s_1, s_2, s_3, etc. »

Sia b_μ un elemento qualunque della $(p+1)^{ma}$ orizzontale della scala inferiore di D_r, e s'indichi con β quello che gli corrisponde nel trasformato; così per la legge di trasformazione avremo

$$\beta = b_\mu - (a_\mu s_0 + a_{\mu-1} s_1 + \cdot\cdot + a_{\mu-p+1} s_{p-1}) \, . \qquad (21)$$

In questa formola l'indice di a, in generale, si estende decrescendo da μ fino a $\mu-p+1$; ma è chiaro che quest'indice si estenderà fino a *zero*, se l'elemento b_μ appartenga ad una delle prime r verticali di D_r, perchè in ciascuna si trova l'elemento iniziale a_o. Per siffatti elementi adunque il secondo membro dell'ultima formola è sempre nullo, perchè il polinomio chiuso tra parentesi, in virtù della (20), equivale a b_μ; e ne risulta che per ciascuno di essi si ha $\beta=0$. Così, mentre le prime r orizzontali del trasformato formano una scala di grado r, sono poi nulli tutti gli altri elementi delle prime r verticali; e perciò sarà lecito di sopprimerne le prime r orizzontali, e le prime r verticali, a patto che il nuovo determinante ottenuto in tal guisa, e ch'è di grado $r+1$, sia moltiplicato per a_o^r. In conseguenza, chiamando D' questo nuovo determinante, avremo

$$D_r = a_o^r D' ; \tag{22}$$

e supporremo intanto

$$D' = \begin{vmatrix} \beta_{o,o} & \beta_{o,1} & \beta_{o,2} & . & \beta_{o,q} & . & \beta_{o,r} \\ \beta_{1,o} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & . & \beta_{1,q} & . & \beta_{1,r} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \beta_{p,o} & \beta_{p,1} & \beta_{p,2} & . & \beta_{p,q} & . & \beta_{p,r} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \beta_{r,o} & \beta_{r,1} & \beta_{r,2} & . & \beta_{r,q} & . & \beta_{r,r} \end{vmatrix} .$$

Siccome l'elemento $\beta_{p,q}$ di questo determinante provviene dall'elemento b_{p+q} della $(p+1)^{ma}$ orizzontale della scala inferiore di D_r, è chiaro che per avere l'espressione di $\beta_{p,q}$ basta cangiare nella (21) l'indice μ in $p+q$; e con ciò si avrebbe

$$\beta_{p,q} = b_{p+q} - (a_{p+q}s_o + a_{p+q-1}s_1 + \cdot\cdot + a_{q+1}s_{p-1}) ;$$

ma essendo per la (20)

$$b_{p+q} = (a_{p+q}s_o + a_{p+q-1}s_1 + \cdot\cdot + a_{q+1}s_{p-1}) + a_q s_p + \cdot\cdot + a_o s_{p+q} ,$$

risulta più semplicemente

$$\beta_{p,q} = a_q s_p + a_{q-1}s_{p+1} + \cdot\cdot + a_o s_{p+q} .$$

Questa formola porge le espressioni di tutti gli elementi di D'. Facendovi successivamente $p=0, 1, 2, \ldots, r$, si ha la serie degli elementi della $(q+1)^{ma}$ verticale, espressi nel modo che segue:

$$\begin{aligned}\beta_{0,q}&=a_q s_0+a_{q-1}s_1 &&+\ldots+a_0 s_q\ ,\\ \beta_{1,q}&=a_q s_1+a_{q-1}s_2 &&+\ldots+a_0 s_{q+1}\ ,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{r,q}&=a_q s_r+a_{q-1}s_{r+1} &&+\ldots+a_0 s_{q+r}\ .\end{aligned}$$

Ponendo in queste formole $q=0$, si ottengono gli elementi della prima verticale di D', espressi tutti da monomii; ponendovi $q=1$, si hanno quelli della seconda verticale, espressi da binomii; e così continuando fino a porvi $q=r$, si avranno quelli dell'ultima verticale, ciascuno espresso da un polinomio di $r+1$ termini; talchè sarà

$$D'=\begin{vmatrix} a_0s_0 & a_1s_0+a_0s_1 & a_2s_0+a_1s_1+a_0s_2 & \ldots & a_rs_0+\ldots+a_0s_r \\ a_0s_1 & a_1s_1+a_0s_2 & a_2s_1+a_1s_2+a_0s_3 & \ldots & a_rs_1+\ldots+a_0s_{r+1} \\ a_0s_2 & a_1s_2+a_0s_3 & a_2s_2+a_1s_3+a_0s_4 & \ldots & a_rs_2+\ldots+a_0s_{r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0s_r & a_1s_r+a_0s_{r+1} & a_2s_r+a_1s_{r+1}+a_0s_{r+2} & \ldots & a_rs_r+\ldots+a_0s_{2r} \end{vmatrix}.$$

È chiaro attualmente che, se questo determinante si decomponga in determinanti ad elementi monomii, i parziali determinanti debbono tutti annullarsi, eccetto quello che si forma col prendere l'ultima verticale semplice in ciascuna verticale complessa (parte 1ª, nº 48); e siccome tutte le verticali di quest'unico determinante hanno il fattore a_0, chiamando H_r il determinante di grado $r+1$, che si ottiene dopo aver soppresso da ciascuna verticale il detto fattore, vale a dire ponendo

$$H_r=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_r \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_{r+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{r+2} \\ . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & s_{r+2} & . & s_{2r} \end{vmatrix},$$

si avrà $D'=a_0^{r+1}H_r$; e quindi in virtù della (22) risulterà

$$D_r=a_0^{2r+1}H_r\,. \tag{23}$$

32. Siccome la funzione B è di grado $n-1$, sarà ρ_{n-1} l'ultimo

de'semplificati residui, quello cioè che è indipendente da x; e perciò i valori regolari dell'indice r nell' ultima formola saranno tutti gl'interi da 1 ad $n-1$; pe' quali adunque si ha la serie di relazioni

$$D_1 = a_0^3 H_1 \ , \quad D_2 = a_0^5 H_2 \ , \quad D_3 = a_0^7 H_3 \, , \ldots , \ D_{n-1} = a_0^{2n-1} H_{n-1} \, ,$$

dove

$$H_1 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} , \quad H_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} , \ldots , H_{n-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n-1} & . & s_{2n-2} \end{vmatrix} .$$

Per $r=0$ si avrebbe $D_0 = a_0 H_0$; ma è $H_0 = s_0$; perciò sarà $D_0 = a_0 s_0$. Ed in fatti, essendo attualmente $\varepsilon = 1$, si ha (n° 26) $D_0^2 = b_0^2$, e $D_0 = b_0$; donde segue, com'esser dovea (n° 31), $b_0 = a_0 s_0$. Del rimanente, essendo la funzione B la derivata di A, si ha nel caso presente $b_0 = n a_0$; quindi $n a_0 = a_0 s_0$; e ne segue $s_0 = n$.

Per $r=n$ si ha

$$D_n = a_0^{2n+1} H_n \, ;$$

ma è $D_n = 0$, perchè $\rho_n = 0$ (n° 20, e nota), quindi sarà pure $H_n = 0$; come in fatti risulta dal sistema di relazioni

$$\left.\begin{array}{llll}
a_n s_0 & + a_{n-1} s_1 & + \cdots + a_0 s_n & = 0 \, , \\
a_n s_1 & + a_{n-1} s_2 & + \cdots + a_0 s_{n+1} & = 0 \, , \\
. \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \\
a_n s_n & + a_{n-1} s_{n+1} & + \cdots + a_0 s_{2n} & = 0 \, , \\
a_n s_{n+1} & + a_{n-1} s_{n+2} & + \cdots + a_0 s_{2n+1} & = 0 \, , \\
. \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \\
a_n s_{n+p} & + a_{n-1} s_{n+p+1} & + \cdots + a_0 s_{2n+p} & = 0 \, ; \\
. \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . & . \ .
\end{array}\right\} \quad (24)$$

le quali debbono sempre coesistere ed in qualsivoglia numero; e ne deriva ch'è sempre nullo il determinante di $n+1$ delle precedenti relazioni, qualunque esse siano; e perciò è nullo H_n, il quale non è che il determinante delle prime $n+1$ di tali relazioni.

33. Dopo ciò possiamo affermare che ogni determinante di grado superiore ad $n+1$, che abbia la forma del determinante H_r, è identicamente nullo. Ed in vero essendo

$$H_{n+1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_n & s_{n+1} \\ s_1 & s_2 & . & s_{n+1} & s_{n+2} \\ . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{2n} & s_{2n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} & . & s_{2n+1} & s_{2n+2} \end{vmatrix},$$

se si sviluppa questo determinante nella somma de' prodotti degli elementi dell'ultima verticale pe' rispettivi complementi algebrici, e si osservi che ciascuno de' complementi è il determinante di $n+1$ equazioni del sistema (24), si riconosce che i complementi sono tutti nulli; e quindi è nullo lo stesso determinante. Da ciò poi segue senza più che dev' esser nullo ogni altro determinante di grado superiore, in guisa che si avrà in generale $H_{n-1+p}=0$, per tutt'i valori interi e positivi di p, a cominciare da $p=1$.

34. Applicando a ciascuno degli altri due determinanti X_r e V_r le medesime trasformazioni per le quali siam passati dal determinante D_r ad H_r, è evidente che in quanto al primo di essi X_r debba risultare

$$X_r=\begin{vmatrix} a_0 & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & . & a_{2r-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{r+1} & 0 \\ 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & . & a_r & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & b_0 & . & b_{r-1} & 1 \\ 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & . & b_r & x \\ 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & . & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & . & b_{2r-1} & x^r \end{vmatrix}=a_0^{2r}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_r & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & s_{r+2} & . & s_{2r-1} & x^r \end{vmatrix};$$

ed in quanto all' altro determinante V_r, se si ponga in generale

$$u_\mu = s_0 x^\mu + s_1 x^{\mu-1} + \cdots + s_{\mu-1} x + s_\mu ,$$

è chiaro che gli elementi dell' ultima verticale del trasformato saranno 0, $-u_0$, $-u_1$, . . , $-u_{r-1}$; e si avrà in conseguenza

$$V_r = \begin{vmatrix} a_0 & \cdot & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & \cdot & a_{2r-1} & x^{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{r+1} & x \\ 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & a_r & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & b_0 & \cdot & b_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & b_0 & b_1 & \cdot & b_r & 0 \\ 0 & \cdot & b & b_1 & b_2 & \cdot & b_{r+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & \cdot & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & \cdot & b_{2r-1} & 0 \end{vmatrix} = -a_0^{2r} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdot & s_{r-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdot & s_r & u_0 \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdot & s_{r+1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_r & s_{r+1} & s_{r+2} & \cdot & s_{2r-1} & u_{r-1} \end{vmatrix} .$$

35. Ponendo per compendio

$$Z_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdot & s_r & x \\ s_2 & s_3 & \cdot & s_{r+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_r & s_{r+1} & \cdot & s_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} , \quad U_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_{r-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & \cdot & s_r & u_0 \\ s_2 & s_3 & \cdot & s_{r+1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_r & s_{r+1} & \cdot & s_{2r-1} & u_{r-1} \end{vmatrix} ,$$

le formole precedenti diverranno

$$X_r = a_0^{2r} Z_r \quad , \quad V_r = -a_0^{2r} U_r ; \tag{25}$$

ed i valori dell'indice r saranno ancora tutti gl'interi da 1 ad $n-1$; ma sarà anche lecito di porvi $r=n$ (n.° 25). Per $r=0$ si avrebbe $X_0 = Z_0$, e $V_0 = -U_0$; e così è in fatti, poichè si ha $1 = X_0 = Z_0$, e $0 = V_0 = U_0$. Per $r=n+1$ sarebbe

$$Z_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_n & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdot & s_{n+1} & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & \cdot & s_{2n} & x^n \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdot & s_{2n+1} & x^{n+1} \end{vmatrix} , \quad U_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & s_n & 0 \\ s_1 & s_2 & \cdot & s_{n+1} & u_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & s_{n+1} & \cdot & s_{2n} & u_{n-1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdot & s_{2n+1} & u_n \end{vmatrix} ;$$

ma ciascuno di questi determinanti è identicamente nullo; il che subito si riconosce considerando, come al n.° 33, i loro sviluppi in somme di prodotti degli elementi delle ultime verticali pe'rispettivi complementi algebrici: complementi che già sappiamo di esser nulli. Quindi risulta che le funzioni Z_{n+1} ed U_{n+1}, le quali appariscono rispetto ad x di gradi $n+1$ ed n, sono identicamente nulle; e con esse lo son pure in conseguenza tutte le altre di grado superiore Z_{n+2}, Z_{n+3}, etc. ed U_{n+2}, U_{n+3}, etc.

36. Per le formole stabilite in questo articolo tutte le relazioni sviluppate dal n.° 22 al n.° 26 possono trasformarsi in termini delle potenze simili delle radici dell'equazione $A=0$; ed in particolare mediante le relazioni (13) e (14) potranno esprimersi per mezzo di queste potenze la stessa funzione A, e la sua derivata B, per le quali risulta evidentemente

$$H_{n-1}A = a_0 Z_n \quad , \quad H_{n-1}B = a_0 U_n ;$$

vale a dire

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix} A = a_0 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_n & x \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix} B = a_0 \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} & 0 \\ s_1 & s_2 & . & s_n & u_0 \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} & u_1 \\ . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{2n-1} & u_{n-1} \end{vmatrix} .$$

37. Daremo termine a questo articolo con una osservazione di molto interesse, comune alle tre funzioni D_r, V_r, X_r ed allo stesso semplificato residuo ρ_r, la quale consiste in ciò che *ciascuna di queste funzioni è divisibile per* a_0. E di fatti, siccome la prima verticale de' determinanti che le rappresentano, contiene due soli elementi diversi da *zero*, cioè il primo a_0, e l'ultimo b_0, essendo attualmente $b_0 = na_0$ (n° 31), già si vede che questa ver-

ticale è divisibile per a_0; e per sopprimere un tal fattore basta scrivere rispettivamente 1 ed n in luogo del primo e dell' ultimo elemento della prima verticale.

È chiaro intanto che, in seguito della soppressione di questo fattore, il determinante D_r diviene una funzione omogenea di grado $2r$ rispetto ai due sistemi di coefficienti a_0, a_1, a_2, etc., e b_0, b_1, b_2, etc.; ma sostituendo agli ultimi i loro valori na_0, $(n-1)a_1$, etc., risulta che il determinante diviene in fatti una funzione omogenea di grado $2r$ rispetto ai soli coefficienti dell'equazione $A=0$. Così, in particolare, il determinante D_{n-1} sarà, dopo la detta soppressione, una funzione omogenea di grado $2n-2$ dei coefficienti a_0, a_1, a_2, . . , a_n. (*)

38. In conseguenza di queste dichiarazioni, quando nelle applicazioni avremo a considerare le funzioni D_r, V_r, X_r, ρ_r, in rapporto alla funzione A ed alla sua derivata, supporremo costantemente che da ciascuna sia stato soppresso il fattore a_0, con modificare semplicemente nel modo detto poc'anzi la prima verticale del corrispondente determinante. E, ciò bene inteso, per non alterare la nostra solita notazione, continueremo a dinotare queste funzioni con i medesimi simboli D_r, V_r, X_r, ρ_r; di tal che, nella ipotesi di cui si tratta, le formole (23) e (25) diverranno rispettivamente

$$D_r = a_0^{2r}\, H_r \;, \quad V_r = a_0^{2r-1}\, Z_r \;, \quad V_r = -\, a_0^{2r-1}\, U_r \,.$$

(*) La proposizione enunciata in ultimo luogo sembra dovuta all'illustre Jacobi, e dessa è quasi il fondamento della sua bella memoria sul numero delle tangenti doppie che può ammettere una curva di grado n. (Questa memoria pubblicata in tedesco nel tomo XL del Giornale di Mat. di Crelle, trovasi ancora inserita nel tomo II. degli Annali di Mat. del Tortolini, tradotta in italiano dal ch. Prof. Rubini). Può intanto osservarsi che la proposizione, di cui si tratta, e che si estende a tutti i semplificati residui, risulta immediatamente dalla estrema evidenza alla quale abbiamo ridotto la legge tanto semplice, che presiede alla loro composizione, ed a quella de' loro coefficienti, e che fa acquistare a queste funzioni una positiva importanza; di che saranno una prova alcune delle seguenti applicazioni.

§. III.

ELIMINAZIONE TRA DUE EQUAZIONI.

1. Supponendo che debbano coesistere le due equazioni

$$A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m=0\ ,$$
$$B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n=0\ ,$$

ciò importa che esse abbiano per lo meno una radice comune; e quindi i coefficienti dovranno soddisfare ad una certa condizione, la quale è il risultamento della eliminazione di x tra le equazioni medesime, e che chiamasi *risultante;* ma queste nozioni saranno meglio chiarite dal seguente evidentissimo principio:

Se due o più funzioni intere $A(x)$, $B(x)$, *etc. sono annullate da uno stesso valore di x, ogni altra funzione intera che possa dedurne col combinarle in qualunque modo, anche dopo averle moltiplicate per arbitrarie intere funzioni, dovrà necessariamente essere annullata dal medesimo valore di x.*

Siano infatti $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc. arbitrarie funzioni intere di x; e consideriamo per esempio la combinazione

$$A(x)\,\varphi(x)\pm B(x)\,\psi(x)\pm \text{etc.}$$

Allora, se dinotiamo con $F(x)$ il risultamento che si ottiene in seguito delle possibili riduzioni, avremo l'equazione identica

$$A(x)\,\varphi(x)\pm B(x)\,\psi(x)\pm \text{etc.}=F(x)\ ;$$

e però, se α sia un valore di x capace di annullare le date funzioni, risulterà

$$A(\alpha)\,\varphi(\alpha)\pm B(\alpha)\,\psi(\alpha)\pm \text{etc.}=F(\alpha)\ ;$$

ma il primo membro è nullo a causa di $A(\alpha)=0$, $B(\alpha)=0$, etc.; perciò sarà pure $F(\alpha)=0$. Così qualunque radice comune alle equazioni $A=0$, $B=0$ è ancora necessariamente una radice dell'equazione $F=0$.

2. Date due funzioni intere $A(x)$, $B(x)$ vedremo che generalmente è possibile di dedurne novelle intere funzioni di qualsivo-

glia grado determinato, non escluso il grado *zero*. In quest'ultimo caso la nuova funzione sarà indipendente da x, e però funzione dei soli coefficienti di **A** e **B**, la quale, in virtù del principio poc'anzi dichiarato, sarà nulla, se le equazioni $A=0, B=0$ ammettano una o più radici comuni; e, se si tratta di equazioni generali, quella funzione uguagliata a *zero* esprimerà la condizione per l'esistenza di una radice comune; vale a dire sarà la risultante delle date equazioni. Se poi la nuova funzione dedotta dalle primitive sia di 1° grado, ammessa l'esistenza di *una sola* radice comune, il che importa lo svanimento della risultante, l'espressione della radice si avrà nel valore di x tratto dalla detta funzione uguagliata a *zero*.

3. Ma tuttavia convien riflettere che la proposizione inversa non è generalmente vera; vale a dire potrebbe svanire la risultante, senza che esista la radice comune; il che dipende dal fatto che, potendo ottenersi una risultante con metodi e procedimenti diversi, nulla v'ha che obblighi a supporre esattamente identici i risultamenti che si otterrebbero in siffatta guisa. Può dunque bene accadere che nella risultante trovata con un certo metodo s'incontri qualche fattore, che un altro metodo non introduce; allora l'annullamento di quel fattore trarrebbe certamente con sè l'annullamento della prima delle due risultanti, ma non però quello dell'altra; e quindi la non esistenza di una radice comune. Segue da ciò che non possiamo indifferentemente tenere come risultante di due equazioni una funzione qualunque de'loro coefficienti dedotta dal combinarle in qualsivoglia modo; ma è mestieri che la medesima soddisfi a delle condizioni, che or ora verranno dichiarate, le quali assicurino esser dessa la *vera* risultante, cioè non ingombra da fattori estranei, e quale perciò fu detta da Eulero *aequatio finalis genuina*.

4. In ciò che segue noi continueremo a supporre che il grado della funzione **A** non sia minore di quello di **B**; vale a dire che m non sia minore di n. Ciò premesso osserviamo che tra i molti metodi che si possono immaginare per dedurre dalle funzioni **A**, **B** una novella funzione intera di grado assegnato e minore di n, si presenta naturalmente quello del massimo comun divisore, il quale con processo uniforme porge una serie di funzioni di gradi decrescenti da $n-1$ fino a 0: funzioni che sono per lo appunto

i successivi residui. Così, in particolare, l'ultimo residuo di grado 0 è già una risultante delle equazioni $A=0$, $B=0$; ma essa è ben lungi dall'essere la vera risultante, poichè la natura istessa del metodo ordinario introduce *necessariamente* nelle successive divisioni de'fattori estranei (veggasi la dimostrazione nelle note alla fine), che crescono di numero da una divisione all'altra fino all'ultima; e che perciò rendono inutile la risultante che si ottiene in siffatta guisa. Ora questi fattori estranei sono quelli precisamente, che abbiamo messo in veduta nel §. precedente (n° 14); e quindi nella presente ricerca noi potremo ai completi sostituire i residui semplificati $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, l'ultimo de'quali indipendente da x, equivale a D_n, vale a dire al determinante della matrice quadrata a due scale dell'ordine n, relative alle serie de'coefficienti di A e B: determinante il quale è di grado $m+n$. Adunque secondo queste indicazioni sarà

$$D_n=0$$

la risultante delle equazioni $A=0$, $B=0$; ma resta ancora a provare che sia questa una vera risultante.

Osserviamo a tal'effetto che D_n è una funzione omogenea dei coefficienti di A e B, di grado $m+n$; ma in particolare omogenea e di grado m rispetto a'coefficienti di B, ed omogenea e di grado n rispetto ai coefficienti di A. Posto ciò supponiamo che in un caso particolare l'equazione $B=0$ sia ridotta a due soli termini contigui qualunque, per modo che in ogni caso con la soppressione del fattore in x, comune ai due termini, potrà ridursi ad un'equazione di 1° grado, come per esempio

$$b_r x = b_{r+1}, \qquad (1)$$

da cui poscia ricaveremo

$$x = \frac{b_{r+1}}{b_r}.$$

Sostituendo ora questo valore di x nell'equazione $A=0$, e poi liberando da'fratti, si ottiene l'equazione

$$a_0 b_{r+1}^m + a_1 b_{r+1}^{m-1} b_r + a_2 b_{r+1}^{m-2} b_r^2 + \ldots + a_m b_r^m = 0,$$

necessariamente omogenea e di grado m rispetto ai due coefficienti b_r e b_{r+1}. Ora questa equazione non è che la risultante dell'equazione $A=0$, e dell'equazione (1), la quale dev'esser contenuta come un caso particolare nella risultante delle equazioni $A=0$, $B=0$, e deve potersene dedurre annullandovi tutt'i coefficienti di B, eccetto i due considerati b_r e b_{r+1}. Segue da ciò che nella risultante generale i coefficienti di B non possono ritrovarvisi ad un grado minore di m; e si dimostra nella stessa maniera che quelli di A non vi si possono trovare ad un grado minore di n. Dunque questa risultante generale è necessariamente l'equazione $D_n=0$, nella quale non può esistere alcun estraneo fattore; dappoichè con la soppressione di un tal fattore la funzione D_n non più conterrebbe al grado m i coefficienti di B, o al grado n i coefficienti di A; il che è impossibile.

5. In siffatto modo abbiamo nella maniera la più semplice ed immediata la risultante delle equazioni $A=0$ e $B=0$, rappresentata da un determinante di grado $m+n$; che del resto può subito trasformarsi in un determinante di grado m (par. 1ª, nⁱ 123 e 127). Però qui bisogna tener presente che, se questo determinante è simmetrico, allora la risultante sarà divisibile per a_0^ε, dove $\varepsilon=m-n$; ma questo fattore può sopprimersi all'istante, mutando solo le prime ε orizzontali in una scala inversa di grado ε, formata con la serie de' coefficienti della funzione B; e con tal modifica si rende anche più semplice lo sviluppo ulteriore del determinante.

Cercando per un esempio la risultante delle due equazioni

$$A=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ ,$$
$$B=px^3+qx^2+rx+s=0\ ,$$

possiamo immediatamente e senza calcolo di sorta averla nella forma

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & e & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & s \\ 0 & 0 & p & q & r & s & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\ ,$$

ovvero nell' altra più compatta

$$\begin{vmatrix} ap & aq & ar & as \\ aq & ar+bq-cp & as+br-dp & bs-ep \\ ar & as+br-dp & bs-ep+cr-dq & cs-eq \\ as & bs-ep & cs-eq & ds-er \end{vmatrix}=0\,.$$

Essendo attualmente $\varepsilon=1$, questa risultante dev'essere divisibile per a; e di fatti il fattore a apparisce, com'esser dovea, nella prima orizzontale del determinante, od anche nella prima verticale, dappoichè il determinante è simmetrico; e basterà quindi di sopprimerlo nell'una o nell'altra linea.

6. Passando a considerare il caso di più radici comuni alle date equazioni, osserveremo che pel principio del num. 1° queste radici debbono tutte, senza eccezione, trovarsi in qualunque equazione dedotta dalle primitive; mentre se potesse mancarvene alcuna, come β, si cadrebbe nell'assurdo

$$0=\mathbf{A}(\beta)\,\varphi(\beta)\pm\mathbf{B}(\beta)\,\psi(\beta)\pm\text{etc.}=\mathbf{F}(\beta)\gtrless 0.$$

Quindi supponendo che le radici comuni siano al numero di k, la funzione $\mathrm{F}(x)$ non potrà essere di grado inferjore a k; e qualora il suo grado sia precisamente uguale a questo numero, l'equazione $\mathrm{F}(x)=o$ comprenderà per lo appunto tutte le k radici comuni, ed esse soltanto. In questa ipotesi adunque ogni funzione di grado inferiore a k, a cominciare da quella di grado $k-1$, dev'essere identicamente nulla; e quindi non è più possibile di avere nè una risultante, nè l'espressione di una sola radice comune, nè alcuna equazione di grado più piccolo di k.

7. Queste cose debbono adunque accadere quando le date equazioni abbiano in effetti più radici comuni, ma se si tratta di equazioni generali, possono allora domandarsi le condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti affinchè esse ammettano un numero definito di radici comuni. Ora dopo i principii stabiliti possiamo facilmente risolvere questa interessante quistione. Supponiamo infatti che le radici comuni debbano essere al numero di k, ed immaginando che dalle date funzioni $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sia dedotta una serie

di $k+1$ funzioni di gradi k, $k-1$, . . , 1, 0, che ora dinotiamo con F_k, F_{k-1}, . . , F_1, F_0, siano d_k, d_{k-1}, . . d_1, d_0 i loro rispettivi principali coefficienti. Posto ciò, segue dalle cose poc'anzi dette che le k radici comuni saranno tutte comprese nell'equazione $F_k=0$; e di più che le funzioni F_{k-1}, F_{k-2}, . . , F_1, F_0 debbono esser tutte identicamente nulle; ma perchè ciò possa aver luogo è necessario e sufficiente che siano nulli i loro principali coefficienti; il che si dimostra precisamente come al n° 21 del §. precedente; e quindi risulta che l'esistenza delle k radici comuni è subordinata alle k condizioni $d_{k-1}=0$, $d_{k-2}=0$, .. , $d_1=0$, $d_0=0$, le quali in tal caso costituiscono un sistema di k risultanti. Se non che è mestieri di esser sicuro che siano queste delle vere risultanti, vale a dire non ingombre di fattori estranei; ed a ciò soddisfa pure assai bene il sistema de' semplificati residui ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc. Adunque, essendo ρ_{n-k}, ρ_{n-k+1}, .. , ρ_n funzioni di gradi k, $k-1$.., 1, 0, possiamo enunciare il seguente teorema:

Affinchè le equazioni $A=0$ e $B=0$ possano ammettere k *radici comuni è necessario e basta che siano nulli i principali coefficienti di tutti gli ultimi* k *semplificati residui corrispondenti alle funzioni A e B; vale a dire da quello di grado* k—1 *fino a quello di grado zero; ed allora l'equazione, che comprende esclusivamente queste* k *radici, è quella che si ottiene uguagliando a zero il semplificato residuo di grado* k.

Così le condizioni di cui si tratta saranno espresse da

$$D_n=0 \ , \ D_{n-1}=0 \ , \ D_{n-2}=0 \ , \ . \ . \ , \ D_{n-k+1}=0 \ ;$$

e, quando in effetti esse sono verificate, ogni radice dell'equazione

$$\rho_{n-k}=D_{n-k,0}\,x^k+D_{n-k,1}x^{k-1}+\ .\ .\ +D_{n-k,k-1}\,x+D_{n-k,k}=0$$

sarà una radice comune alle due equazioni date $A=0$, $B=0$. D'altra parte è evidente che le condizioni qui stabilite non possono essere affette da fattori estranei, perciocchè qualunque fattore estraneo, capace di annullare tutte le funzioni D_n, D_{n-1}, . . , D_{n-k+1}, sarebbe un fattore estraneo alla prima D_n, che già sappiamo di non poterne ammettere.

8. Nelle applicazioni del teorema che precede è utile di tener presente che l'annullamento de' principali coefficienti de' sempli-

ficati residui, da quello di grado k fino a quello di grado *zero*, importa anche l'annullamento di tutti gli altri coefficienti di queste funzioni; il che rende manifeste altre relazioni, le quali, quantunque non diano luogo a novelle condizioni, valgono non per tanto a rendere più semplici le k condizioni necessarie per l'esistenza delle k radici.

Considerando per un esempio le due equazioni

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$
$$x^2+b_1x+b_2=0$$

perchè possano ammettere una radice comune bisogna che sia verificata la condizione

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_1b_1-a_2+b_2 & a_1b_2-a_3 \\ b_2 & a_1b_2-a_3 & a_2b_2-b_1a_3 \end{vmatrix}=0 , \qquad (1)$$

il primo membro della quale è il determinante simmetrico, con cui possiamo rappresentare l' ultimo de' semplificati residui, indipendente da x. Volendo che le equazioni proposte ammettano due radici comuni, alla condizione che precede bisognerà aggiunger l'altra

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & a_1b_1-a_2+b_2 \end{vmatrix}=0 , \qquad (2)$$

che si forma uguagliando a *zero* il principale determinante della matrice costituita con le due prime orizzontali del determinante in (1), poichè è desso il principale coefficiente del residuo di 1° grado. Intanto, dovendo ancora esser nullo il secondo determinante di questa matrice, vale a dire dovendo essere

$$\begin{vmatrix} 1 & b_2 \\ b_1 & a_1b_2-a_3 \end{vmatrix}=0 , \qquad (3)$$

se si sviluppa il determinante (1) nella somma de'prodotti degli elementi dell'ultima orizzontale pe'rispettivi complementi algebrici, è palese che di questa somma non resta che il termine moltiplicato per b_2, primo elemento dell'ultima orizzontale; e quindi la condizione (1) si riduce a

$$b_2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1b_1-a_2+b_2 & a_1b_2-a_3 \end{vmatrix}=0\ ;$$

e siccome non è nullo il primo fattore b_2, poichè ciò farebbe acquistare una radice nulla alla seconda delle equazioni date, che non è il caso nostro, dovrà invece esser nullo il secondo fattore, il quale può ridursi in virtù della (2), con sostituirvi b_1^2 invece di $a_1b_1-a_2+b_2$; e si vedrà così che questa condizione non è diversa dalla (3). In conseguenza le (2) e (3) sono le condizioni sufficienti perchè le equazioni proposte ammettano due radici comuni; o, ciò che attualmente è lo stesso, affinchè la prima sia esattamente divisibile per la seconda (*).

9. Tra moltissimi altri metodi immaginati per ottenere la risultante di due equazioni dobbiamo qui limitarci ad esporre brevemente quello conosciuto comunemente sotto il nome di metodo abbreviato di Bezout, che può ridursi a quanto segue. Siano le due equazioni di gradi uguali

$$A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+..+a_n=0\quad,\quad B=b_0x^n+b_1x^{n-1}+..+b_n=0\,.$$

Riunendo in ciascuna i primi p termini possiamo scrivere

$$A=(a_0x^{p-1}+a_1x^{p-2}+..+a_{p-1})x^{n-p+1}+a_px^{n-p}+..+a_n=0\,,$$
$$B=(b_0x^{p-1}+b_1x^{p-2}+..+b_{p-1})x^{n-p+1}+b_px^{n-p}+..+b_n=0\,,$$

e cade sott'occhio che, se si moltiplica la prima equazione pel coefficiente della potenza x^{n-p+1} nella seconda, e questa, viceversa, pel coefficiente della stessa potenza nella prima, e quindi si sottragga il primo prodotto dal secondo, la differenza sarà di gra-

(*) V. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 2.ª edizione, pag. 66, ove lo stesso esempio è trattato col teorema di Lagrange.

do $n-1$; e però dinotando questa differenza con Y_p, si avrà

$$\begin{aligned}Y_p&=B(a_0x^{p-1}+\ldots+a_{p-1})-A(b_0x^{p-1}+\ldots+b_{p-1})\\&=\left.\begin{aligned}&(a_0x^{p-1}+\ldots+a_{p-1})(b_px^{n-p}+b_{p+1}x^{n-p-1}+\ldots+b_n)\\-&(b_0x^{p-1}+\ldots+b_{p-1})(a_px^{n-p}+a_{p+1}x^{n-p-1}+\ldots+a_n)\end{aligned}\right\}=0; \qquad (4)\end{aligned}$$

ma, immaginando eseguiti gli sviluppi, questa equazione di grado $n-1$ ordinata secondo le potenze decrescenti di x prenderà la forma

$$Y_p=c_{p,1}x^{n-1}+c_{p,2}x^{n-2}+\ldots+c_{p,q}x^{n-q}+\ldots+c_{p,n}=0\ , \qquad (5)$$

dove si ha in generale

$$\begin{aligned}c_{p,q}=\ &a_0b_{p+q-1}+a_1b_{p+q-2}+\ldots+a_{p-2}b_{q-1}+a_{p-1}b_q\\&-(b_0a_{p+q-1}+b_1a_{p+q-2}+\ldots+b_{p-2}a_{q-1}+b_{p-1}a_q)\ ,\end{aligned}$$

o più brevemente, secondo una notazione concisa altra volta convenuta (part. 1ª, nº 122),

$$c_{p,q}=(a_0b_{p+q-1})+(a_1b_{p+q-2})+\ldots+(a_{p-2}b_{q-1})+(a_{p-1}b_q)\ . \qquad (6)$$

Ciò premesso dando a p i successivi valori $1, 2, 3, \ldots, n$, si ottiene dalla (6) il sistema delle seguenti n equazioni, tutte di grado $n-1$,

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=c_{1,1}x^{n-1}+c_{1,2}x^{n-2}+\ldots+c_{1,n}x^0=0\\Y_2&=c_{2,1}x^{n-1}+c_{2,2}x^{n-2}+\ldots+c_{2,n}x^0=0\\Y_3&=c_{3,1}x^{n-1}+c_{3,2}x^{n-2}+\ldots+c_{3,n}x^0=0\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\Y_n&=c_{n,1}x^{n-1}+c_{n,2}x^{n-2}+\ldots+c_{n,n}x^0=0\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

le quali debbono coesistere con le equazioni date, se queste hanno una radice comune; ed in tal caso i coefficienti delle (7) dovranno soddisfare ad una equazione di condizione, che può subito ottenersi eliminando da esse le n potenze $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, x^0$, considerate come altrettante incognite a 1º grado. Chiamando adunque K_n il determinante delle equazioni (7), la condizione di cui trattasi sarà espressa (§. I, n° 7) da $K_n=0$, dove si ha

$$K_n=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,n} \\ . & . & . & . \\ c_{n,1} & c_{n,2} & . & c_{n,n} \end{vmatrix};$$

e questa condizione in conseguenza sarà una risultante delle equazioni $A=0$, $B=0$. A ciò può ridursi in sostanza il così detto metodo abbreviato di Bezout per ottenere la risultante di due equazioni di gradi uguali; e poichè le quantità $c_{p,q}$ sono, come vedesi dalla (6), funzioni lineari tanto delle a_0, a_1, a_2, etc., quanto delle b_0, b_1, b_2, etc., è chiaro che K_n è una funzione di grado n, tanto rispetto alle prime quantità, quanto rispetto alle altre; e perciò la risultante $K_n=0$ non può essere affetta da fattori estranei (n° 4).

Ma, a prescindere da queste considerazioni, faremo osservare che la formola (6) coincide esattamente con quella sviluppata nel n.° 124 della 1ª parte per trasformare i successivi determinanti delle matrici a due scale di gradi uguali, formate con le serie di coefficienti delle funzioni A e B; e da ciò segue che K_n è un determinante simmetrico equivalente a D_n, determinante della matrice quadrata a due scale ciascuna di grado n, relative alle dette serie di coefficienti.

In siffatta guisa noi siamo condotti nella più semplice maniera a riconoscere che la risultante ottenuta col metodo abbreviato di Bezout, nella ipotesi che i gradi delle equazioni siano uguali, coincide nel fondo con quella cui mena il metodo del massimo comune divisore, modificato con la nozione de'semplificati residui.

10. Del rimanente nella stessa ipotesi il metodo di Bezout può somministrare immediatamente anche la serie completa de'semplificati residui. In fatti è già evidente che la funzione Y_1, ossia il primo membro della prima equazione del sistema (7), è per lo appunto l'espressione del primo de' semplificati residui, vale a dire di ρ_1. Inoltre è manifesto che l'espressione del residuo semplificato ρ_2 si ottiene eliminando tra le due prime equazioni del detto sistema la più alta potenza x^{n-1}, a patto però che que-

sta eliminazione si esegua formando un determinante di 2.° grado con i coefficienti di tale potenza e con le rimanenti parti delle due equazioni; in guisa che si avrà

$$\rho_2 = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2}\,x^{n-2} + c_{1,3}\,x^{n-3} + \ldots + c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2}\,x^{n-2} + c_{2,3}\,x^{n-3} + \ldots + c_{2,n} \end{vmatrix}.$$

Similmente si ottiene il semplificato residuo ρ_3, eliminando con lo stesso metodo tra le tre prime equazioni le due più alte potenze x^{n-1} ed x^{n-2}, per modo che sarà

$$\rho_3 = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3}\,x^{n-3} + \ldots + c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3}\,x^{n-3} + \ldots + c_{1,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3}\,x^{n-3} + \ldots + c_{3,n} \end{vmatrix}.$$

E così continuando si avranno gli altri semplificati residui; ma in generale è chiaro che l'espressione di un residuo qualunque ρ_r è il determinante di grado r, che si forma con le prime r orizzontali della matrice del determinante $\mathbf{K}_n$, riunendovi in una le ultime $n-r+1$ verticali, ordinatamente moltiplicate per le successive potenze x^{n-r}, x^{n-r-1}, . . . , x^2, x, 1; e quindi avremo

$$\rho_r = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,r-1} & c_{1,r}x^{n-r} + \ldots + c_{1,n-1}x + c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,r-1} & c_{2,r}x^{n-r} + \ldots + c_{2,n-1}x + c_{2,n} \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{r,1} & c_{r,2} & . & c_{r,r-1} & c_{r,r}x^{n-r} + \ldots + c_{r,n-1}x + c_{r,n} \end{vmatrix}.$$

Ma se si trasforma l'ultima verticale, aggiungendole tutte le altre, ordinatamente moltiplicate, a cominciar dalla prima, per le successive potenze x^{n-1}, x^{n-2}, . . , x^{n-r+1}, osservando alle (7) è palese che gli elementi della verticale trasformata divengono $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$, . . , $\mathbf{Y}_r$. Inoltre siccome in virtù della (4) si ha

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{B}a_0 - \mathbf{A}b_0\,,$$

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{B}(a_0x + a_1) - \mathbf{A}(b_0x + b_1)\,,$$

$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{B}(a_0x^2 + a_1x + a_2) - \mathbf{A}(b_0x^2 + b_1x + b_2)\,,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{B}(a_0x^{r-1} + a_1x^{r-2} + \ldots + a_{r-1}) - \mathbf{A}(b_0x^{r-1} + b_1x^{r-2} + \ldots + b_{r-1})\,,$$

si comprende che il nuovo determinante può spezzarsi in due parti, l'una moltiplicata per A, l'altra per B; e quindi se i moltiplicatori di A e di B si dinotano rispettivamente con V'_r ed X'_r, vale a dire se pongasi

$$X'_r=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,r-1} & a_0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,r-1} & a_0x+a_1 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & . & c_{3,r-1} & a_0x^2+a_1x+a_2 \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{r,1} & c_{r,2} & . & c_{r,r-1} & a_0x^{r-1}+a_1x^{r-2}+\cdot\cdot+a_{r-1} \end{vmatrix},$$

$$V'_r=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,r-1} & b_0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,r-1} & b_0x+b_1 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & . & c_{3,r-1} & b_0x^2+b_1x+b_2 \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{r,1} & c_{r,2} & . & c_{r,r-1} & b_0x^{r-1}+b_1x^{r-2}+\,.\,.+b_{r-1} \end{vmatrix},$$

pel semplificato residuo ρ_r avremo evidentemente l'espressione

$$\rho_r=BX'_r-AV'_r\,.$$

Ma è poi manifesto che i due determinanti X'_r e V'_r non sòno altra cosa, che quelli in cui si mutano i due determinanti già dinotati con X_r e V_r (§. prec. n° 22), quando si applica a questi ultimi la trasformazione sviluppata nella 1ª parte dal n° 123 al n° 126, in guisa che, nella ipotesi della uguaglianza de' gradi delle funzioni A e B, si ha

$$X'_r=X_r \quad , \quad V'_r=V_r\,.$$

11. La risultante di due equazioni di gradi disuguali m ed n (sempre ritenuto m maggiore di n, e, come al solito, $m-n=\varepsilon$) può ancora farsi dipendere dal metodo di Bezout, con riguardare l'equazione di grado n come caso particolare di un'equazione di grado m; il che può farsi in due modi, o supponendo nulli i coefficienti delle ε più alte potenze x^m, x^{m-1}, . . , x^{n+1}, o invece supponendo nulli quelli delle ε più basse potenze $x^{\varepsilon-1}$, $x^{\varepsilon-2}$,.. , x, x^0. Esamineremo brevemente questi due modi, entrambi considerati dai geometri.

Secondo la prima maniera si tratta di applicare il metodo alle due equazioni

$$A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdot\cdot+a_{\varepsilon-1}x^{n+1}+a_\varepsilon x^n+\cdot\cdot+a_m=0\ ,$$
$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdot\cdot+b_{\varepsilon-1}x^{n+1}+b_\varepsilon x^n+\cdot\cdot+b_m=0\ ,$$

dove però, a calcolo finito, bisogna porre

$$b_0=0\ ,\ b_1=0\ ,\ b_2=0\ ,\ \ldots\ b_{\varepsilon-1}=0\ ;$$

con che la seconda equazione va ridotta a

$$B=b_\varepsilon x^n+b_{\varepsilon+1}x^{n-1}+\cdot\cdot+b_m=0\ .$$

Ora, conformemente al primo caso, nella ipotesi attuale perverremo alla risultante $K_m=0$, essendo

$$K_m=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,m} \\ . & . & . & . \\ c_{m,1} & c_{m,2} & . & c_{m,m} \end{vmatrix}\ ;$$

ma, siccome gli elementi del determinante K_m sono sempre definiti dalla formola (6), ne segue ch'esso è identico col determinante simmetrico nascente dal trasformare, col metodo sviluppato nel n° 127 della 1ª parte, il determinante a due scale di gradi disuguali D_n , il quale esprime l'ultimo de'semplificati residui corrispondenti alle funzioni A e B , di gradi m ed n; ma allora il determinante K_m sarà divisibile per a_0^ε ; e però dovendo essere

$$D_n=\frac{1}{a_0^\varepsilon}K_m\ ,$$

la vera risultante sarà

$$\frac{1}{a_0^\varepsilon}K_m=0\ .$$

Del rimanente per sopprimere dal determinante K_m il fattore a_0^ε, basterà mutarvi le prime ε orizzontali in una scala inversa di grado ε, formata con i coefficienti di B (par. 1ª, n° 128); ed allora, se si dinota con K'_m ciò che diviene il determinante K_m, in seguito della detta modifica si avrà

$$\frac{1}{a_0^\varepsilon} K_m = K'_m \;,$$

e quindi sarà $K'_m = 0$ la risultante delle date equazioni.

12. Il metodo del Bezout può, nel caso che si considera, fornire ugualmente le espressioni di tutti i semplificati residui ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc. Ma ora, seguendo il procedimento tenuto nell'altro caso (nº 9), per ottenere l'espressione del primo semplificato residuo ρ_1, ch'è una funzione di grado $n-1$, bisognerà impiegare tutte le prime $\varepsilon+1$ equazioni del sistema

$$Y_1=0 \;,\; Y_2=0 \;,\ldots,\; Y_{\varepsilon-1}=0 \;,\; Y_\varepsilon=0 \;,\; Y_{\varepsilon+1}=0 \;,\ldots,\; Y_m=0 \;,$$

dalle quali col metodo allora indicato possono eliminarsi tutte le potenze superiori ad $n-1$. Ed a tale uopo è necessario di osservare che le prime $\varepsilon-1$ funzioni Y_1, Y_2, .., $Y_{\varepsilon-1}$ non sono già, al pari delle altre, di grado $m-1$, ma sono rispettivamente di gradi n, $n+1$, $n+2$, .., $m-2$, poichè nel caso attuale essendo $b_0=0$, $b_1=0$, .., $b_{\varepsilon-1}=0$, si ha (*)

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Ba_0 \;,\\
Y_2 &= B(a_0x+a_1) \;,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
Y_{\varepsilon-1} &= B(a_0x^{\varepsilon-2}+a_1x^{\varepsilon-3}+\cdots+a_{\varepsilon-2}) \;,\\
Y_\varepsilon &= B(a_0x^{\varepsilon-1}+a_1x^{\varepsilon-2}+\cdots+a_{\varepsilon-1}) \;,\\
Y_{\varepsilon+1} &= B(a_0x^{\varepsilon}\;+a_1x^{\varepsilon-1}+\cdots+a_\varepsilon\;)-Ab_\varepsilon \;.\\
&\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Similmente impiegando le prime $\varepsilon+2$ equazioni otterremo ρ_2;

(*) Da ciò risulta che nel caso presente la funzione Y_1 è mancante delle più alte $\varepsilon-1$ potenze; che la seconda Y_2 manca delle $\varepsilon-2$ più alte potenze; che la terza Y_3 manca delle $\varepsilon-3$ più alte potenze, e così di seguito fino alla funzione $Y_{\varepsilon-1}$, che mancherà solo della più alta potenza x^{m-1}. Ora tutto ciò equivale a dire che per la prima si ha $c_{1,1}=c_{1,2}=\ldots=c_{1,\varepsilon-1}=0$; che similmente si ha per la seconda $c_{1,1}=c_{2,2}=\ldots=c_{2,\varepsilon-2}=0$; e così di seguito fino alla funzione $Y_{\varepsilon-1}$ per la quale si ha solo $c_{\varepsilon-1,1}=0$.

ed in generale avremo l'espressione di ρ_r impiegando tutte le prime $\varepsilon+r$ equazioni. Ma d'altra parte è chiaro che questa espressione può subito aversi nel determinante di grado $\varepsilon+r$ formato con le prime $\varepsilon+r$ orizzontali del determinante K_m, riunendovi in una le ultime $n-r+1$ verticali, ordinatamente moltiplicate per le successive potenze x^{n-r}, x^{n-r-1},.., x, x^0. E se all'ultima verticale del determinante, che si ottiene in tal guisa, si aggiungano tutte le altre, ordinatamente moltiplicate, a cominciar dalla prima, per le successive potenze x^{m-1}, x^{m-2}, . . , x^{n-r+1}, risulterà

$$\rho_r = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & . & c_{1,\varepsilon+r-1} & Y_1 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & . & c_{2,\varepsilon+r-1} & Y_2 \\ . & . & . & . & . \\ c_{\varepsilon-1,1} & c_{\varepsilon-1,2} & . & c_{\varepsilon-1,\varepsilon+r-1} & Y_{\varepsilon-1} \\ c_{\varepsilon,1} & c_{\varepsilon,2} & . & c_{\varepsilon,\varepsilon+r-1} & Y_\varepsilon \\ c_{\varepsilon+1,1} & c_{\varepsilon+1,2} & . & c_{\varepsilon+1,\varepsilon+r-1} & Y_{\varepsilon+1} \\ . & . & . & . & . \\ c_{\varepsilon+r,1} & c_{\varepsilon+r,2} & . & c_{\varepsilon+r,\varepsilon+r-1} & Y_{\varepsilon+r} \end{vmatrix} . \qquad (8)$$

13. Inoltre, tenendo presenti le espressioni delle funzioni Y_1, Y_2, .., $Y_{\varepsilon+r}$, è manifesto che l'ultimo determinante può decomporsi in due parti, l'una moltiplicata per B, l'altra per A; e quindi si ha, come nell'altro caso,

$$\rho_r = BX'_r - AV'_r ,$$

dove X'_r è ciò che diviene il determinante in (8) mutandovi solo gli elementi dell'ultima verticale nelle espressioni

$$a_0 \ , \ a_0x+a_1 \ , \ .. \ , \ a_0x^{r+\varepsilon-1}+a_1x^{r+\varepsilon-2}+\cdots+a_{r+\varepsilon-1} .$$

E similmente V'_r è ciò che diviene lo stesso determinante in (8) annullandovi nell'ultima verticale i primi ε elementi, e cangiando gli altri nelle espressioni

$$b_\varepsilon \ , \ b_\varepsilon x+b_{\varepsilon+1} \ , \ .. \ , \ b_\varepsilon x^{r-1}+b_{\varepsilon+1}x^{r-2}+\cdots+b_{r+\varepsilon-1} .$$

Del rimanente è chiaro che X'_r e V'_r sono i trasformati de' determinanti già dinotati con X_r e V_r (§. II. n° 22), mediante il metodo sviluppato nel n° 127 della 1ª parte; ma quindi essi sono divisibili per a_0^ε; e per sopprimerne un tal fattore si comincerà dal mutare in ciascuno le prime ε orizzontali in una scala inversa di grado ε, formata con i coefficienti b_ε, $b_{\varepsilon+1}$, . . , b_m; ma poscia per riguardo al primo X_r' dovranno annullarsi nell'ultima verticale i primi ε elementi; ed in quanto al secondo è chiaro che bisogna mutare gli stessi ε elementi nelle successive potenze 1, x, x^2, . . , $x^{\varepsilon-1}$. In conseguenza chiamando X_r'' e V_r'' ciò che rispettivamente divengono X_r' e V_r' dopo la detta modifica, avremo

$$X_r = \frac{1}{a} X_r' = X_r'' ,$$

$$V_r = \frac{1}{a_0} V_r' = V_r'' .$$

14. Risulta da tutto ciò che le k condizioni necessarie per l'esistenza di k radici comuni alle equazioni $A=0$, $B=0$ equivalgono alle seguenti

$$K_m' = 0 \ , \ K_{m-1}' = 0 \ , \ . \ . \ , \ K_{m-k+1}' = 0 \ .$$

le quali nel caso presente costituiscono il sistema delle risultanti delle equazioni $A=0$, $B=0$; ed intanto l'equazione che comprende le k radici comuni sarà

$$\rho_{n-k} = K_{m-k}' x^k + K_{m-k,1}' x^{k-1} + \cdot\cdot + K_{m-k,k}' = 0 \cdot$$

Inoltre le rimanenti $m-k$ radici dell' equazioni $A=0$ saranno le radici dell'equazione di grado $m-k$

$$X_{n-k+1} = \frac{1}{a_0^\varepsilon} X'_{n-k+1} = X_{n-k+1}'' = 0 ;$$

e le rimanenti $n-k$ radici dell' altra equazione $B=0$, saranno quelle dell'equazione di grado $n-k$

$$V_{n-k+1} = \frac{1}{a_0^\varepsilon} V'_{n-k+1} = V_{n-k+1}'' = 0 \ .$$

15. L'altra maniera di far dipendere la risultante delle equa-

zioni A=0 e B=0, di gradi m ed n, dal metodo di Bezout, consiste, come già si è detto, nel riguardare l' equazione di grado n come un' equazione di grado m, ma nella quale fossero nulli i coefficienti delle ε più basse potenze $x^{\varepsilon-1}$, $x^{\varepsilon-2}$, ..., x, x^0; di modo che nel fatto questa equazione è ciò che diviene la B=0 moltiplicandola per x^{m-n}, ossia per x^ε. Così nel caso attuale trattasi di applicare il metodo indicato alle due equazioni di gradi uguali

$$A=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdot\cdot+a_nx^\varepsilon+a_{n+1}x^{\varepsilon-1}+\cdot\cdot+a_m=0 \;,$$

$$x^\varepsilon B=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdot\cdot+b_nx^\varepsilon=0 \;,$$

la seconda delle quali può ritenersi come completa, ma a patto di porsi, a calcolo finito,

$$b_{n+1}=0 \;,\; b_{n+2}=0 \;,\; \ldots \;,\; b_m=0 \;.$$

Ora, senza entrare in altre considerazioni, osserveremo che la risultante delle due soprascritte equazioni può aversi uguagliando a *zero* il determinante della matrice quadrata a due scale, ciascuna di grado m, formate con le due serie di coefficienti

$$a_0 \;,\; a_1 \;,\; \ldots \;,\; a_n \;,\; a_{n+1} \;,\; \ldots \;,\; a_m \;,$$

$$b_0 \;,\; b_1 \;,\; \ldots \;,\; b_n \;,\; b_{n+1} \;,\; \ldots \;,\; b_m \;;$$

ma siccome in ciascuna orizzontale della scala inferiore bisogna annullare gli ε elementi b_{n+1}, b_{n+2}, ..., b_m, ponendo mente alla forma del detto determinante, si fa manifesto che sia lecito di sopprimervi tutte le ultime ε orizzontali della scala (a_0) (par. 1ª, nº 42), a patto tuttavia che il determinante che si ottiene in tal guisa sia moltiplicato per a_m^ε. Ma d'altra parte è evidente che questo determinante non è altra cosa che il determinante della matrice quadrata a due scale di gradi n ed m, costruita con le norme dichiarate nel nº 115 della prima parte; e che perciò è l'ultimo de' semplificati residui corrispondenti alle funzioni A e B. Adunque, se si cerca col metodo di Bezout la risultante delle due equazioni A=0, x^εB=0, questa risultante sarà divisibile per a_0^ε; e sopprimendone un tal fattore si avrà la vera risultante delle equazioni A=0, B=0.

16. Si può modificare questo metodo in guisa da giungere direttamente alla vera risultante. Se l' equazione $A=0$ si moltiplica successivamente per le potenze x^{n-1}, x^{n-2}, .., x^2, x, 1, e l'equazione $B=0$ si moltiplichi per le m potenze successive $1, x, x^2, .., x^{m-2}, x^{m-1}$, si ottiene un sistema di $m+n$ equazioni, delle quali le prime n sono di grado decrescente da $m+n-1$ fino ad m; e le altre m equazioni sono di grado crescente da n ad $m+n-1$. Ora le dette equazioni contenendo le $m+n$ potenze

$$x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \ldots, x^2, x, x^0,$$

potremo eliminarle riguardandole come altrettante incognite a primo grado, ed il risultamento di tale eliminazione, il quale non è che il determinante delle equazioni medesime, sarà una risultante delle equazioni $A=0$, $B=0$. Ora è chiaro che questa risultante riproduce il determinante della matrice a due scale di gradi n ed m formate con le serie de' coefficienti di **A** e **B**, e quindi l'ultimo de' semplificati residui (*).

§. IV.

DETERMINANTI DELLE EQUAZIONI, E RADICI MULTIPLE.

1. Dinotata come al solito con **A** una funzione di x di grado n, e con **B** la sua derivata, supporremo

$$A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$B=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1};$$

e sarà quindi

$$b_0=na_0, \; b_1=(n-1)a_1, \; b_2=(n-2)a_2, \ldots, b_{n-1}=a_{n-1}.$$

Ciò premesso, se si considera in ordine inverso la serie de' prin-

(*) Questo metodo elegantissimo per ottenere la risultante di due equazioni è dovuto all'illustre Sylvester, che lo ha detto metodo *dialitico* di eliminazione. V. il Philosophical Magazine. June 1841.

cipali coefficienti de'semplificati residui, corrispondenti alle funzioni A e B, otterremo il sistema delle $n-1$ quantità

$$D_{n-1}\,,\; D_{n-2}\,,\ldots,\; D_{n-r}\,,\; D_{n-r-1}\,,\ldots,\; D_2\,,\; D_1\,,$$

le quali sono funzioni omogenee delle costanti $a_0\,, a_1\,,\ldots, a_n$, ciascuna di un grado doppio dell' indice corrispondente (§. II. n^i 37 e 38). Ora noi distingueremo questo sistema col nome di *sistema de' successivi determinanti della funzione* A, *o dell'equazione* $A=0$; e però sarà D_{n-1} il primo determinante della funzione; D_{n-2} il secondo; D_{n-3} il terzo; e così di seguito (*).

2. Risulta da questa convenzione che il primo determinante della funzione, non è altra cosa che l'ultimo de' semplificati residui corrispondenti alla stessa funzione ed alla sua derivata, il quale è di grado *zero* in riguardo ad x; mentre poi il secondo determinante, il terzo, il quarto, etc., sono rispettivamente i principali coefficienti de' residui di 1° grado, 2° grado, 3° grado, etc.; di tal che, in generale, il k^{mo} determinante D_{n-k} sarà il principale coefficiente del residuo di grado $k-1$.

3. È già noto che se il primo determinante della funzione A è diverso da *zero*, questa funzione e la sua derivata saranno prime tra loro; ma nel caso opposto queste funzioni debbono ammettere un divisore comune in x, il quale sarà di grdo $n-r$ (§. II, n° 21) se, insieme al primo, siano nulli nel tempo istesso tutti i primi $n-r$ determinanti

$$D_{n-1}\,,\; D_{n-2}\,,\ldots,\; D_{r+1}\,,\; D_r\,.$$

Ed in questa ipotesi il quoziente della divisione di A pel detto comun divisore sarà la funzione di grado r, che sotto forma di determinante abbiamo indicata col simbolo X_r (§. II, n.^{i} 29 e 34).

Ora tutto ciò in altri termini equivale a dire che le radici della equazione $A=0$ saranno tra loro disuguali, se non è nullo il suo

(*) Il primo di questi determinanti, fatta astrazione da un fattore dipendente solo dal principale coefficiente, equivale, come si vedrà poco innanzi, a quello che fu chiamato dall' illustre Gauss *determinante dell' equazione*; e che poscia ha formato il soggetto di profonde ricerche de'più grandi analisti; ma pare, e ciò che segue ne sarà una pruova, che non sia meno interessante la considerazione degli altri determinanti, che abbiamo messo in veduta.

primo determinante D_{n-1}; ma in altro caso l'equazione avrà per lo meno due radici uguali; e fin qui si tratta di una proposizione conosciuta. Ma ora possiamo aggiungere che, se è nullo il primo determinante, senza esserlo il secondo D_{n-2}, l'equazione avrà due sole radici uguali, vale a dire una radice doppia; e però $n-1$ radici distinte, che saranno tutte le radici dell'equazione $X_{n-1}=0$. Se poi siano nulli i due primi determinanti, senza esserlo il terzo D_{n-3}, l'equazione potrà ammettere o una radice tripla, o due radici doppie; ed in conseguenza $n-2$ radici distinte, che saranno le radici dell'equazione $X_{n-2}=0$. Se fossero nulli i tre primi determinanti, senza esserlo il quarto D_{n-4}, l'equazione potrà avere o una radice quadrupla, o una radice tripla ed una doppia, ovvero tre radici doppie; ed in ogni caso $n-3$ radici distinte. Ma ora, senza più, è manifesto che, se sono nulli i primi $n-r$ determinanti, l'equazione potrà ammettere diverse radici multiple, ma le radici distinte saranno al numero di r, contando, come già s'intende, una sola volta ogni radice multipla; e quindi possiamo enunciare il seguente teorema:

L'equazione A=0, *di grado* n, *ammetterà soltanto* r *radici distinte quante volte siano nulli i suoi primi* n—r *determinanti. E tali radici saranno tutte comprese nell'equazione di grado* r (*)

$$X_r=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & . & a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & . & a_{2r-1} & 0\\
0 & a_0 & . & a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & . & a_{2r-2} & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & 0 & . & a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{r+1} & 0\\
0 & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & . & a_r & 0\\
0 & 0 & . & 0 & 0 & b_0 & . & b_{r-1} & 1\\
0 & 0 & . & 0 & b_0 & b_1 & . & b_r & x\\
0 & 0 & . & b_0 & b_1 & b_2 & . & b_{r+1} & x^2\\
. & . & . & . & . & . & . & . & .\\
0 & b_0 & . & b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & . & b_{2r-2} & x^{r-1}\\
n & b_1 & . & b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & . & b_{2r-1} & x^r
\end{vmatrix}=0\,.$$

(*) Non esiste, per quanto è a nostra notizia, verun altro teorema che possa dare all'istante, come quello che qui si enuncia, l'equazione che comprende le sole radici distinte di un'equazione, che ammette radici multiple.

4. Segue da questo teorema che, se sono nulli tutti i determinanti dell' equazione, la medesima avrà uguali tutte le radici, vale a dire avrà una sola radice multipla di grado n, che sarà radice dell' equazione

$$X_1 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 1 \\ n & b_1 & x \end{vmatrix} = 0 ,$$

la quale, sostituendo a b_0 e b_1 i loro valori na_0, $(n-1)\,a_1$, e poi sottraendo dall' ultima la prima verticale moltiplicata per n, si riduce ad

$$\begin{vmatrix} n\,a_0 & 1 \\ -a_1 & x \end{vmatrix} = na_0 x + a_1 = 0 .$$

Così nel caso che si considera la funzione A non può differire che per un fattor numerico dalla potenza n^{ma} del binomio na_0x+a_1.

5. Invece delle funzioni D_r ed X_r, che sono espresse immedia-

Ma oltre a ciò osserveremo che i principii, ond'esso deriva, possono condurre a risolvere delle quistioni di una difficoltà anche maggiore, come sarebbe per esempio, se si trattasse delle condizioni, cui debbono soddisfare i coefficienti di un' equazione di grado assegnato, affinchè la medesima possa ammettere una o più radici di un dato grado di moltiplicità: quistione questa importantissima specialmente in fatto di singolarità delle curve. Così, se si domandano le condizioni affinchè un'equazione possa ammettere una radice tripla, si vedrà che in primo luogo bisogna che si abbia $D_{n-1}=0$ e $D_{n-2}=0$; e che di più in questo caso debbono essere uguali le due radici dell'equazione di 2° grado

$$D_{n-3}x^2 + D_{n-3,1}x + D_{n-3,2} = 0 ,$$

il di cui primo membro è l' antipenultimo de' semplificati residui; e ciò esige com' è chiaro che sia soddisfatta la terza condizione

$$D^2_{n-3,1} = 4\,D_{n-3}\,D_{n-3,2} .$$

Se la proposta equazione dovesse ammettere due radici doppie, oltre alle due condizioni $D_{n-1}=0$, $D_{n-2}=0$, si esigerebbe evidentemente che fosse un quadrato perfetto la quantità $D^2_{n-3,1}-4D_{n-3}D_{n-3,2}$. Ma queste quistioni meritano uno sviluppo più esteso, che ci riserbiamo di dar loro in altra occasione.

tamente in termini delle costanti della funzione A, possiamo nelle applicazioni del precedente teorema far uso delle corrispondenti funzioni H_r e Z_r, che sono espresse per mezzo delle potenze simili delle radici dell'equazione $A=0$ (§. II, n^i 31 e 35). Quindi siccome si ha in generale (§. II, n° 38)

$$D_r = a_o^{2r} \quad H_r \ ,$$
$$X_r = a_o^{2r-1} Z_r \ ,$$

risulta che la detta equazione di grado n ammetterà soltanto r radici distinte quando siano soddisfatte le $n-r$ condizioni

$$H_{n-1}=0 \ , \ H_{n-2}=0 \ , \ldots , \ H_r=0 \ ,$$

equivalenti ordinatamente alle seguenti

$$\begin{vmatrix} s_o & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix} =0, \begin{vmatrix} s_o & s_1 & . & s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & . & s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & . & s_n \\ . & . & . & . \\ s_{n-2} & s_{n-1} & . & s_{2n-4} \end{vmatrix} =0,\ldots, \begin{vmatrix} s_o & s_1 & . & s_r \\ s_1 & s_2 & . & s_{r+1} \\ s_2 & s_3 & . & s_{r+2} \\ . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & . & s_{2r} \end{vmatrix} =0 \, ;$$

ed in tal caso le r radici distinte saranno tutte le radici dell'equazione

$$Z_r = \begin{vmatrix} s_o & s_1 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_r & x \\ s_2 & s_3 & . & s_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} = 0 \ .$$

6. Siano $\alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ldots , \ \alpha_n$ le n radici dell'equazione $A=0$, e pongasi

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & . & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & . & \alpha_n^3 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \ .$$

Egli è noto che questo determinante equivale al prodotto delle differenze a due a due di tutte le radici, prese secondo un'ordine già dichiarato (par. 1ª, nº 52, es. 2º); e però usando una notazione convenuta, sarà

$$P = \Pi\,(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ldots,\ \alpha_n)\,.$$

Intanto, se si elevi a quadrato il determinante P, operando per orizzontali, e si tenga presente che

$$\alpha_1^r + \alpha_2^r + \alpha_3^r + \cdots + \alpha_n^r = s_r\,,$$

si riconoscerà subito che il quadrato di P è identico al determinante figurato per lo innanzi con H_{n-1}; vale a dire si ha

$$P^2 = H_{n-1}\,;$$

e quindi risulta

$$P^2 = \Pi^2(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ldots,\ \alpha_n) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & . & s_{2n-2} \end{vmatrix}\,.$$

Questa relazione dimostra che il derminante H_{n-1} esprime il valore assoluto dell'ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze delle radici dell'equazione A=0; e però questo termine sarà espresso da

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,H_{n-1}\ ;$$

e siccome $D_{n-1} = a_0^{2n-2} H_{n-1}$, è manifesto che il detto ultimo termine può ancora essere rappresentato da

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{D_{n-1}}{a_0^{2n-2}}\,.$$

Ciascuna delle espressioni qui recate equivale adunque al prodotto di tutte le differenze, sì positive che negative, delle radici dell'equazione A=0; ed è questo prodotto che suol chiamarsi *determinante dell'equazione* (nota al nº 3). Vedesi pertanto che il determinante dell'equazione $A=0$ non differisce dal nostro *primo determinante* D_{n-1} che per un fattore funzione del solo principale coefficiente dell'equazione.

7. Dinotando r un numero qualunque minore di n, è evidente che il determinante di grado r

$$H_{r-1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_1 & . & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & s_2 & . & s_r \\ s_2 & s_3 & s_3 & . & s_{r+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-2} \end{vmatrix},$$

è il principale minore determinante di H_{n-1}, formato nelle prime r orizzontali; e quindi può essere riguardato come il quadrato della matrice costituita dalle prime r orizzontali del determinante P (par. 1[a], n.° 69), vale a dire come il quadrato della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & . & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & \alpha_r & . & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & . & \alpha_r^2 & . & \alpha_n^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \alpha_3^{r-1} & . & \alpha_r^{r-} & . & \alpha_n^{r-1} \end{vmatrix}.$$

Ma il determinante che si ottiene elevando a quadrato questa matrice equivale alla somma de' quadrati di tutti i suoi determinanti, cioè di quelli che si ottengono combinando le sue verticali ad r ad r, così potremo scrivere concisamente

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_r \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{r+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-2} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & \alpha_r \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & . & \alpha_r^2 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \alpha_3^{r-1} & . & \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix}^2,$$

avendo messo in veduta sotto la caratteristica della somma il quadrato del determinante principale della matrice, ossia di quello che risulta dalla combinazione delle sue prime r verticali, e la somma dovendo estendersi a tutte le altre combinazioni.

Inoltre, siccome ogni combinazione di r verticali della matrice in discorso comprende una combinazione di r radici, e ciascuno de' corrispondenti determinanti può essere trasformato, a somiglianza di P, nel prodotto di tutte le differenze di queste r radici a due a due, così avremo ancora

$$\frac{D_{r-1}}{a_0^{2r-2}}=H_{r-1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_r \\ . & . & . & . \\ s_{r-1} & s_r & . & s_{2r-2} \end{vmatrix}=\sum \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) ;$$

e quindi ponendo $r=1,2,3,4$, etc. si avrà la serie di relazioni

$$D_0=H_0=s_0$$

$$\frac{D_1}{a_0^2}=H_1=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}=\sum \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2) ,$$

$$\frac{D_2}{a_0^4}=H_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}=\sum \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) ,$$

$$\frac{D_3}{a_0^6}=H_3=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix}=\sum \Pi^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) ,$$

etc. etc. etc. etc.

8. Supponendo che l'equazione $A=0$, di grado n, abbia radici multiple, ed r radici distinte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, siano $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ i loro gradi rispettivi di moltiplicità, taluno de' quali potrà essere uguale ad 1, in guisa che sarà

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r=n . \qquad (1)$$

In questa ipotesi le n verticali della matrice di r orizzontali considerata nel n° precedente potranno essere distribuite in r gruppi, ciascuno costituito di verticali identiche; vale a dire in un gruppo di μ_1 verticali, in cui figura la sola radice α_1; in un gruppo di μ_2 verticali con la radice α_2; e così di seguito. In questo caso adunque de' determinanti della detta matrice debbono annullarsi tutti quelli, in cui si trovano almeno due verticali identiche; e rimarranno solo i determinanti, che si ottengono da combinazioni di r verticali, prese una per ogni gruppo; donde poi segue ch' essi sono uguali tra loro in valore assoluto, ed il loro numero sarà uguale al prodotto de'gradi di moltiplicità di tutte le radici. Dopo ciò è manifesto che, nella ipotesi attuale, il determinante H_{r-1}, principale minore di grado r del primitivo H_{n-1}, formato nelle sue prime r orizzontali, equivale al determinante delle successive potenze delle r radici semplici moltiplicato pel prodotto de' loro gradi di moltiplicità; laonde se s' indichi con μ questo prodotto, vale a dire se pongasi

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \cdot\cdot \times \mu_3 = \mu\,, \tag{2}$$

si avrà

$$H_{r-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_r \\ s_2 & s_3 & . & s_{r+1} \\ . & . & . & . \\ s_{r-1} & s_r & . & s_{2r-2} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & \alpha_r \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & . & \alpha_r^2 \\ . & . & . & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & . & \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix}^2 \tag{3}$$

$$= \mu\ \Pi^2(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_r)\,.$$

Intanto, siccome le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sono, per ipotesi, le r radici distinte della equazione $A=0$, le quali d'altra parte sono tutte le radici della equazione di grado r (n.° 5)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_r & x \\ s_2 & s_3 & . & s_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

se dinotiamo con σ_p la somma delle potenze p^{me} delle radici di questa equazione, vale a dire se pongasi per compendio

$$\sigma_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_r^p ,$$

avremo eziandio

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_r \\ . & . & . & . \\ s_{r-1} & s_r & . & s_{2r-2} \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_2 & . & \sigma_{r-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & . & \sigma_r \\ . & . & . & . \\ \sigma_{r-1} & \sigma_r & . & \sigma_{2r-2} \end{vmatrix} (^*) . \qquad (5)$$

(*) Cade quasi sott'occhio che un'equazione di grado r, le di cui radici siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, può mettersi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & \alpha_r & x \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & . & \alpha_r^2 & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & . & \alpha_r^{r-1} & x^{r-1} \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & . & \alpha_r^r & x^r \end{vmatrix} = 0 ,$$

perchè questa equazione è verificata sempre che si supponga x uguale ad una delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Segue da ciò che il primo membro di questa equazione, ed il primo membro della (4) nel testo non possono differire che per un fattore indipendente da x. Ma siccome nella (4) il coefficiente della più alta potenza x^r è H_{r-1}, ossia $\mu\, \Pi^2 (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, e nella equazione attuale il coefficiente della stessa potenza è $\Pi (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, ne risulta che il primo membro di quest'ultima equazione, moltiplicato per $\mu \Pi (\alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, diviene identico col primo membro della (4); ed in tal guisa noi siamo condotti alla relazione osservabile

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_r & x \\ s_2 & s_3 & . & s_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-1} & x^r \end{vmatrix} = \mu \Pi (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & \alpha_r & x \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & . & \alpha_r^2 & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & . & \alpha_r^r & x^r \end{vmatrix}$$

la quale, paragonando i coefficienti delle potenze simili di x ne' due membri, porge una serie di relazioni, tra cui vanno comprese la (3) e la (5): relazioni

9. Del rimanente queste conchiusioni si possono estendere a qualunque minore di grado r del primitivo H_{n-1}, purchè le linee che concorrono a formarlo, tanto orizzontali, quanto verticali, siano successive. Allora infatti esso può riguardarsi come il prodotto di due distinte matrici del determinante P, costituite entrambe da due diversi sistemi di r successive orizzontali (par. 1^a, n° 66), per esempio l'uno contato dalla i^{ma}, l'altro dalla k^{ma} orizzontale; e sarà propriamente uguale alla somma de' prodotti di tutti i determinanti dell'una pe' rispettivi determinanti omologhi dell'altra. Ora in primo luogo è chiaro che a ciascuna di queste matrici è applicabile tutto ciò che si è detto nel caso precedente, fino al punto di conchiudere che i determinanti di ognuna di esse, i quali non si annullano, sono tra loro rispettivamente uguali, e μ di numero. È evidente inoltre che i determinanti della prima hanno per fattori le potenze α_1^{i-1}, α_2^{i-1}, . . , α_r^{i-1}, e quelli dell'altra le potenze α_1^{k-1}, α_2^{k-1}, . . , α_r^{k-1}; ma quindi è chiaro che, se questi fattori si sopprimano, i primi determinanti diverranno uguali ai secondi, e però tutti uguali al determinante delle successive potenze delle radici semplici α_1, α_2, . . , α_r. Ne risulta che, nel caso attuale, il detto minore di grado r del primitivo H_{n-1} equivale al quadrato del determinante delle successive potenze delle radici semplici, moltiplicato per la potenza $(i+k-2)^{ma}$ del prodotto delle stesse radici, e pel prodotto de' loro gradi di moltiplicità; ed in conseguenza è espresso da

$$\mu\,(\alpha_1\,\alpha_2\,,\,.\,.\,,\,\alpha_r)^{i+k-2}\,\Pi^2\,(\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,.\,.\,,\,\alpha_r)\,.$$

10. Se nel determinante P si considera una matrice qualunque

che noi avremo occasione di applicare ad importanti quistioni, e segnatamente alla integrazione delle equazioni.

Faremo intanto osservare che l'ultima formola sussiste anche quando $r=n$; vale a dire, quando sono disuguali le radici dell'equazione primitiva $A=0$, e quindi $\mu=1$; e le relazioni, che essa porge in tal caso, col paragonare i coefficienti delle diverse potenze di x, costituiscono un teorema già dato dal ch. prof. Mainardi (Annali di matematiche di Tortolini, tom. I. pag. 76).

costituita da un numero di orizzontali maggiore di r, che siano, o no successive, è evidente che i suoi determinanti debbono tutti annullarsi, perchè in ciascuno vi saranno in ogni caso almeno due verticali identiche. Segue da ciò che, quando l'equazione $A=0$ ha radici multiple, ed r sole radici distinte, ogni minore del primitivo H_{n-1}, che sia di grado superiore ad r, è necessariamente nullo.

11. Per applicare ad un esempio le precedenti conchiusioni, supponiamo

$$A=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4=0\ ,$$

e quindi

$$B=5x^4+4x^3-15x^2-2x+8\ .$$

Calcolando le somme delle potenze simili delle radici della data equazione $A=0$ troviamo

$$s_0=5\ ,\ s_1=-1\ ,\ s_2=11\ ,\ s_3=-13\ ,\ s_4=35\ ,$$
$$s_5=-61\ ,\ s_6=131\ ,\ s_7=-253\ ,\ s_8=515$$

e sarà perciò

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 \\ s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 11 & -13 & 35 \\ -1 & 11 & -13 & 35 & -61 \\ 11 & -13 & 35 & -61 & 131 \\ -13 & 35 & -61 & 131 & -253 \\ 35 & -61 & 131 & -253 & 515 \end{vmatrix}\ .$$

Ora basta osservare che in questo determinante la terza verticale equivale al doppio della prima diminuita della seconda per conchiudere che esso è nullo insieme ai principali minori di 4° e 3° grado, costituiti rispettivamente nelle prime quattro e nelle prime tre orizzontali; vale a dire sono nulli nel tempo istesso anche i due determinanti

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 11 & -13 \\ -1 & 11 & -13 & 35 \\ 11 & -13 & 35 & -61 \\ -13 & 35 & -61 & 131 \end{vmatrix}\ ,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 11 \\ -1 & 11 & -13 \\ 11 & -13 & 35 \end{vmatrix} .$$

Da ciò risulta che l'equazione proposta ha $n-3=5-3=2$ radici distinte, le quali adunque saranno radici dell' equazione

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 1 \\ s_1 & s_2 & x \\ s_2 & s_3 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 11 & x \\ 11 & -13 & x^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

che si riduce ad

$$x^2+x-2=0 ;$$

e perciò le due radici distinte saranno 1 e -2. Per quest'ultima equazione abbiamo

$$\sigma_0=2 , \ \sigma_1=-1 , \ \sigma_2=5 ;$$

e però, dinotando μ il prodotto de' gradi di moltiplicità delle due radici rispetto all'equazione primitiva, siccome dev' essere (n° 8)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & {}_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix} ,$$

si avrà

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} .$$

Ricavandosi da questa equazione $54=9\mu$, e quindi $\mu=6$, si avrà $\mu_1\mu_2=6$; ma dev' essere inoltre, in virtù della (1), $\mu_1+\mu_2=5$, dunque i valori di μ_1 e μ_2 non possono essere diversi da 2 e 3 ; e ne segue che delle due radici distinte della data equazione una è doppia, e l' altra è tripla ; e di fatti si ha

$$A=(x+2)^2(x-1)^3.$$

§. IV.

SUL TEOREMA DI STURM.

1. Ritenuto per A e per B lo stesso significato attribuito a questi simboli nel §. precedente, ed ammettendo dapprima che l'equazione $A=0$ non abbia radici multiple, supporremo istituite tra le funzioni A e B il processo del massimo comun divisore (§. II, n° 12), e dinoteremo al solito con $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ i residui completi co'segni cambiati, e con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ i corrispondenti semplificati residui. Inoltre, richiamando il significato dei simboli D_r, X_r, V_r (§. II, n' 31 e 34), è qui d' uopo ricordare le relazioni (*id.* n' 26 e 27).

$$D^2_{r-1}X_{r-2}-q_rX_{r-1}+D^2_{r-2}X_r=0\ , \tag{1}$$

$$X_rV_{r-1}-X_{r-1}V_r=D^2_{r-1}\ , \tag{2}$$

e tener presente che le equazioni $A=0$, $X_n=0$ hanno le medesime radici, al pari delle altre $B=0$, $V_n=0$, (*id*, n° 25); osservando ancora che nel caso attuale si ha

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \ \ D_{n-1}A\ , \\ V_n &= -D_{n-1}B\ , \end{aligned}\right\} . \tag{3}$$

Ciò premesso è noto che, per definire il numero delle radici reali dell'equazione $A=0$, comprese tra due limiti qualunque, conformemente al teorema di Sturm bisogna impiegare la serie di funzioni

$$A\ ,\ \ B\ ,\ \ R_1\ ,\ \ R_2, \ldots, R_{n-1}\ ; \tag{4}$$

ma siccome si ha in generale

$$R_r=\frac{1}{\alpha_r}\,\rho_r\ ,$$

ed il moltiplicatore di ρ_r è una quantità essenzialmente positiva (*id.* n° 13), è chiarissimo, per la natura del detto teorema, che ai completi è lecito di sostituire i semplificati residui, e quindi invece della (4) potremo impiegare la serie molto più semplice

$$A\,,\;B\,,\;\rho_1\,,\;\rho_2\,,\ldots,\;\rho_{n-1}\,. \qquad (5)$$

2. Ora noi andremo a far vedere che si può soddisfare all'oggetto medesimo con quest'altra semplicissima serie

$$X_0\,,\;X_1\,,\;X_2\,,\;X_3\,,\ldots,\;X_{n-1}\,,\;X_n\,, \qquad (6)$$

che si traduce in

$$1\,,\;\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 1 \\ b_0 & b_1 & x \end{vmatrix}\,,\;\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & 1 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & x \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2 \end{vmatrix}\,,\;\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & x^2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & x^3 \end{vmatrix}\,,\;\text{etc.}$$

ed a tal'effetto basterà provare che le funzioni, dalle quali è formata, sono dotate delle stesse proprietà che caratterizzano le funzioni di Sturm, e che si riducono alle tre seguenti:

I. Due funzioni consecutive della (6) non possono essere annullate da uno stesso valore di x (§. II, n° 28).

II. Se un valore di x annulla una qualunque di queste funzioni, esclusa l'ultima X_n, le due, tra le quali è situata, prendono segni contrarii per lo stesso valore di x; e ciò risulta immediatamente della relazione (1).

III. Dimostreremo in fine che, se α sia una radice reale dell'equazione $X_n=0$, le due funzioni X_n ed X_{n-1} debbono prendere segni contrarii per un valore di x alquanto più piccolo di α, e segni simili per un valore di x alquanto più grande di α. In fatti siano h ed h' due numeri qualunque, l'uno più piccolo, l'altro più grande di α, ma tali che tra ciascuno di essi ed α non cada alcuna radice delle tre equazioni $X_n=0$, $X_{n-1}=0$, $V_n=0$; così tra' detti numeri ed α non cadrà neppure alcuna radice delle equazioni $A=0$, $B=0$; e ne deriva in primo luogo che le funzioni A e B debbono prendere segni contrarii per $x=h$, e segni simili per $x=h'$; ma quindi segue dalle (3) che le funzioni X_n e V_n prendono, viceversa, segni simili per $x=h$, e segni contrarii per $x=h'$.

Si osservi intanto che la (2), cangiandovi r in n diviene

$$X_n V_{n-1} - X_{n-1} V_n = D^2_{n-1},$$

e siccome questa relazione ponendovi $x=\alpha$ deve ridursi a

$$-X_{n-1} V_n = D^2_{n-1},$$

dappoichè in siffatta ipotesi si ha $X_n=0$; così risulta che per $x=\alpha$ sono contrarii i segni di V_n ed X_{n-1}. Ma i segni che prendono queste due funzioni per $x=\alpha$ sono rispettivamente simili a quelli ch' esse prendono per $x=h$, perchè tra α ed h non esistono valori di x capaci di ridurle a *zero*; dunque per $x=h$ i loro segni saranno ugualmente contrarii. Segue da ciò che i segni delle funzioni X_n ed X_{n-1} sono, come voleva dimostrarsi, contrarii per $x=h$. E si conchiuderebbe esattamente nella stessa maniera che questi segni debbono, viceversa, esser simili per $x=h'$.

Dopo ciò è manifesto che per definire il numero delle radici reali dell'equazione $A=0$, comprese tra due limiti qualunque, possiamo avvalerci della serie (6), che sembra la più semplice di quante se ne conoscano finora per l' oggetto medesimo, essendo essa formata immediatamente con i coefficienti della data equazione.

In quanto al calcolo numerico le funzioni che formano la serie (6) si possono subito trasformare in determinanti di grado molto più basso mercè l' espressione generale di X_r, o meglio di X'_r, data al n° 10 del §. III; e quindi alla detta serie può sostituirsi la seguente

$$1\,,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & a_0 \\ c_{21} & a_0x+a_1 \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & a_0 \\ c_{21} & c_{22} & a_0x+a_1 \\ c_{31} & c_{32} & a_0x^2+a_1x+a_2 \end{vmatrix}\,,\ \text{etc.} \qquad (7)$$

3. Inoltre essendo in generale (§. II, n° 35) $X_r = a_0^{2r} Z_r$, dove

$$Z_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & . & s_r & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & . & s_{r+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & s_{r+2} & . & s_{2r-2} & x^r \end{vmatrix},$$

è manifesto che, invece della (6), è anche lecito di adoperar la serie

$$Z_0 \, , \; Z_1 \, , \; Z_2 \, , \; Z_3 \, , \; \ldots \, , \; Z_n \, ,$$

vale a dire

$$1 \, , \; \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & x \end{vmatrix} , \; \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 1 \\ s_1 & s_2 & x \\ s_2 & s_3 & x^2 \end{vmatrix} , \; \ldots , \; \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_n & x \\ s_2 & s_3 & . & s_{n+1} & x^2 \\ . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{2n-2} & x^n \end{vmatrix} ; \qquad (8)$$

e siamo così condotti ad una serie già conosciuta per la definizione del numero delle radici reali di un' equazione, comprese tra due limiti assegnati (*).

4. Se si tratta di definire il numero totale delle radici reali dell'equazione $A=0$, tutte le serie precedenti si possono ridurre a quelle che risultano da' principali coefficienti delle funzioni, che le compongono. In riguardo alla (5), siccome le due prime funzioni A e B hanno per principali coefficienti a_0 ed na_0, è chia-

(*) Questa serie sembra dovuta al ch. Joachimsthal. V. Crelle t. XLVI. Egli è evidente che le due serie (6) ed (8) sono la traduzione l'una dell'altra, quella espressa immediatamente per mezzo de'coefficienti dell'equazione $A=0$; questa per mezzo delle somme delle potenze simili delle sue radici. Secondo noi la serie (8) è una trasformazione della (6), alla quale siamo direttamente pervenuti; ma aggiungiamo che fino a questo punto rimaneva tuttavia incognita la trasformazione della (8) in termini de'coefficienti dell'equazione primitiva, quantunque molti tentativi veggansi fatti a tale oggetto.

ro che il primo diviene inutile, e che all' altro può essere sostituita l' unità; sicchè il numero totale delle radici dell' equazione può definirsi mediante la serie

$$1\ ,\ D_1\ ,\ D_2\ ,\ D_n\ ,\ \ldots\ ,\ D_{n-1}\ ,$$

che può essere trasformata in

$$1\ ,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}\ ,\ \ldots\ ,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn} \end{vmatrix}\ ,$$

dove agli elementi c_{11}, c_{12}, ... c_{1n} possono rispettivamente sostituirsi b_0, b_1, .., b_{n-1}; o meglio na_0, $(n-1)\,a_1$, .., a_{n-1}.

Egli è poi evidente che questa serie medesima si otterrebbe dalla (7), sopprimendone il primo termine 1, e mutando invece in 1 il suo secondo termine a_0c_{11}, poichè a c_{11} è lecito di sostituire na_0.

In fine risulta dalla (8) che il numero totale delle radici è ancora definito dalla serie

$$1\ ,\ H_0\ ,\ H_1\ ,\ H_2\ ,\ H_3\ ,\ \ldots\ ,\ H_{n-1}$$

in cui può sopprimersi il primo termine, e che si traduce in

$$s_0\ ,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}\ ,\ \ldots\ ,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix}\ .$$

5. Fin qui si è supposto che le n radici dell' equazione $A=0$ fossero tra loro disuguali; ma se questa equazione ammetta radici multiple, ed r sole radici distinte, è facile a riconoscere che il numero delle radici reali comprese tra due limiti qualunque è ancora definito dalla serie (6), la quale in tal caso si arresta da sè stessa alla funzione X_r, poichè le altre di grado superiore X_{r+1}, X_{r+2}, etc. sono identicamente nulle (§. II, n° 35). A tale

effetto basta osservare che sussistendo nella attuale ipotesi le due relazioni (§. II, n[i] 29 e 30)

$$A\,V_r + B\,X_r = 0\ ,$$
$$X_r V_{r-1} - X_{r-1} V_r = D^2_{r-1}\ ,$$

quanto si è detto nel primo caso (n° 2) a riguardo delle quattro funzioni X_n , X_{n-1} e V_n , V_{n-1} ora si applica parola a parola, senza veruna eccezione alle quattro funzioni X_r , X_{r-1} e V_r , V_{r-1}, E perciò , nel caso che si considera, il numero delle radici reali dell'equazione, comprese tra due limiti qualunque sarà, definito dalla serie di funzioni

$$X_0\ ,\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ X_r\ ,$$

le quali sono espresse immediatamente in termini de'coefficienti dell'equazione data ; ovvero dall' altra serie di funzioni

$$Z_0\ ,\ Z_1\ ,\ Z_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ Z_r\ ,$$

le quali sono espresse mediante le somme delle potenze simili delle radici dell'equazione medesima.

§. VI.

DETERMINANTI FUNZIONALI.

1. Supposto che u_1 , u_2 , . . , u_n siano n funzioni di n variabili x_1 , x_2 , . . , x_n , il determinante delle loro derivate prime

$$u_x = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_1} & \frac{du_3}{dx_1} & . & \frac{du_n}{dx_1} \\ \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_2} & \frac{du_3}{dx_2} & . & \frac{du_n}{dx_2} \\ . & . & . & & . \\ \frac{du_1}{dx_n} & \frac{du_2}{dx_n} & \frac{du_3}{dx_n} & . & \frac{du_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

chiamasi *determinante del sistema delle date funzioni*, o semplicemente *determinante funzionale ;* e spesso ancora *Jacobiano* dal nome dell' illustre Jacobi, al quale è dovuta la teorica di questi determinanti. Se le date funzioni sono lineari il loro determinante coincide con quello già definito nel n° 1 del § I.

Talvolta per rendere più semplice la scrittura del determinante delle funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$, la derivata di u_r rispetto ad una variabile x_s s'indica con $u_{r,s}$; ed allora si ha

$$u_x = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & . & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & . & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Quando le funzioni non sono tra loro indipendenti, ma legate da una equazione

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 ,$$

il determinante u_x è nullo identicamente. In fatti in questa ipotesi tra le n derivate parziali di φ sussistono le n equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{du_1}\frac{du_1}{dx_1} + \frac{d\varphi}{du_2}\frac{du_2}{dx_1} + \ldots + \frac{d\varphi}{du_n}\frac{du_n}{dx_1} &= 0 , \\ \frac{d\varphi}{du_1}\frac{du_1}{dx_2} + \frac{d\varphi}{du_2}\frac{du_2}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{du_n}\frac{du_n}{dx_2} &= 0 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{d\varphi}{du_1}\frac{du_1}{dx_n} + \frac{d\varphi}{du_2}\frac{du_2}{dx_n} + \ldots + \frac{d\varphi}{du_n}\frac{du_n}{dx_n} &= 0 ; \end{aligned}$$

e quindi è nullo il loro determinante, che non è diverso da u_x. Anche vera è la proposizione inversa; vale a dire se è nullo il determinante u_x, le funzioni, cui si rapporta, non sono tra loro indipendenti; ma per dimostrare questa importante proposizione dobbiamo permettere una trasformazione del detto determinante, la quale d'altra parte costituisce essa stessa una proprietà non meno importante de' determinanti funzionali.

3. Tra le date funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_n$ se ne prenda una a piacere, come u_1, in cui non manchi la variabile x_1; così x_1 sarà una

determinata funzione di u_1, x_2, x_3, ..., x_n, che possiamo immaginare eliminata dalle altre funzioni u_2, u_3, ..., u_n. Indi tra queste, che più non contengono x_1, prenderemo una funzione, come u_2, in cui non manchi la variabile x_2; ed allora x_2 sarà una funzione determinata di u_1, u_2, x_3, ..., x_n, che supporremo eliminata dalle funzioni u_3, u_4, .., u_n, le quali in tal guisa non conterranno nè x_1, nè x_2. Ma, continuando questo sistema di trasformazione, è manifesto che le u_1, u_2, u_3, ..., u_n possono essere considerate: la prima u_1 come una funzione delle variabili x_1, x_2, .., x_n, in cui non manca x_1; la seconda u_2 come funzione di u_1 e delle variabili x_2, x_3, ..., x_n, tra cui non manca x_2; indi la terza u_3 come funzione di u_1, u_2 e delle variabili x_3, x_4,.., x_n, tra cui non manca x_3; e così di seguito; di tal che in generale si può supporre

$$u_r = f_r(u_1, u_2, .., u_{r-1}, x_r, x_{r+1}, ..., x_n);$$

e da ultimo

$$u_n = f_n(u_1, u_2, .., u_{n-1}, x_n).$$

Intanto ritenuto il simbolo $\frac{du_r}{dx_s}$ per dinotare la derivata di u_r rispetto ad x_s, nella ipotesi genuina e primitiva che u_r sia funzione delle variabili x_1, x_2, .., x_n, per esprimere la stessa derivata mediante le u_1, u_2, .., u_r, quando in seguito della trasformazione hanno il significato or ora descritto, circonderemo di parentisi i simboli analoghi al precedente, che occorre di impiegare in tal caso; e quindi coerentemente a questa convenzione avremo

$$\frac{du_r}{dx_s} =$$

$$\left(\frac{du_r}{du_1}\right)\left(\frac{du_1}{dx_s}\right)+\left(\frac{du_r}{du_2}\right)\left(\frac{du_2}{dx_s}\right)+\cdot\cdot+\left(\frac{du_r}{du_{r-1}}\right)\left(\frac{du_{r-1}}{dx_s}\right)+\left(\frac{du_r}{dx_s}\right);$$

e se pongasi per concisione di scrittura

$$\left(\frac{du_p}{dx_q}\right) = a_{p,q}\ ,\quad \left(\frac{du_p}{du_q}\right) = b_{p,q}\ ,$$

sarà invece

$$\frac{du_r}{dx_s} = b_{r1}a_{1s} + b_{r2}a_{2s} + \cdots + b_{r,r-1}a_{r-1,s} + a_{r,s} \ .$$

Trasformando con questa formola gli elementi del determinante u_x, si ha con legge manifesta

$$u_x = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{21}a_{11} & b_{31}a_{11} & \cdot\cdot \\ a_{12} & b_{21}a_{12} + a_{22} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & \cdot \\ a_{13} & b_{21}a_{13} + a_{23} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + a_{33} & \cdot\cdot \\ a_{14} & b_{21}a_{14} + a_{24} & b_{31}a_{14} + b_{32}a_{24} + a_{34} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\cdot \\ a_{1n} & b_{21}a_{1n} + a_{2n} & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + a_{3n} & \cdot\cdot \end{vmatrix};$$

ma questo determinante equivale evidentemente al prodotto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 & . & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & . & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & . & 0 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & . & a_{nn} \end{vmatrix};$$

adunque, siccome ciascuno de' due fattori si riduce al prodotto degli elementi principali, si ha infine

$$u_x = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn},$$

ossia

$$u_x = \left(\frac{du_1}{dx_1}\right)\left(\frac{du_2}{dx_2}\right)\left(\frac{du_3}{dx_3}\right)\cdots\left(\frac{du_n}{dx_n}\right),$$

e quindi risulta che: *Il determinante del sistema di* n *funzioni può sempre essere riguardato come il prodotto di altrettante funzioni*, le quali si otterrebbero, prima trasformando le funzioni date secondo la legge dichiarata, e poscia derivando ciascuna trasformata rispetto alla variabile che *per ipotesi* non deve mancarvi.

4. Ciò premesso supponendo che u_x sia identicamente nullo, bisogna che sia tale qualcuno de' fattori del prodotto nel quale si

trasforma. Ma i primi $n-1$ fattori sono, in generale, diversi da *zero* perchè, per ipotesi u_1 contiene x_1, u_2 contiene x_2, etc., dunque dev'essere identicamente nullo l'ultimo fattore $\left(\frac{du_n}{dx_n}\right)$; il che importa che nell'ultima funzione u_n non debba trovarsi la variabile x_n. Così, quando u_x è nullo, una delle funzioni $u_1, u_2, .., u_n$ si troverà espressa soltanto per mezzo delle altre funzioni, senza che vi prenda parte alcuna variabile; e ciò in altri termini equivale a dire che le date funzioni non sono tra loro indipendenti.

Del rimanente potrebbe ancora accadere che, in seguito della trasformazione, le due ultime funzioni u_{n-1} ed u_n non contenessero l'una e l'altra nè la variabile x_n, nè x_{n-1}; allora dev'essere identicamente nullo anche il fattore $\left(\frac{du_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)$; e ne risulta che in tal caso ciascuna delle ultime due funzioni u_{n-1} ed u_n si può esprimere per mezzo delle rimanenti funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$, indipendentemente dalle variabili x_{n-1} ed x_n. Ma più generalmente è chiaro che, se in seguito della trasformazione si trovi che r qualunque delle n funzioni siano dipendenti soltanto da altre funzioni, senza che vi figuri alcuna variabile, allora saranno identicamente nulli r de'fattori in cui si trasforma il determinante u_x, e tra le date funzioni dovranno sussistere r distinte relazioni.

Viceversa, se le date funzioni non sono tra loro indipendenti, e si supponga per esempio, che u_n si possa esprimere per mezzo delle $u_1, u_2, .. u_{n-1}$, indipendentemente da x_n, in tal caso il fattore $\left(\frac{du_n}{dx_n}\right)$ sarà identicamente nullo, e con esso lo sarà pure il determinante funzionale u_x, come erasi già dimostrato nel numero 2. Quindi, riassumendo, possiamo conchiudere che:

Se un determinante funzionale è identicamente nullo, le funzioni, cui si rapporta, non saranno tra loro indipendenti; E, viceversa, se le funzioni non sono tra loro indipendenti, quel determinante è identicamente nullo.

Dopo ciò è chiaro di per sè stesso che, se le funzioni sono tra loro indipendenti, il loro determinante non può esser nullo; e viceversa, se non è nullo questo determinante, le funzioni saranno tra loro indipendenti.

5. Supponendo che le $u_1, u_2, .., u_n$ siano espresse per mezzo di m quantità $y_1, y_2, .., y_m$, funzioni delle indipendenti $x_1, x_2, .., x_n$, per definire il valore del determinante funzionale u_x osserveremo che in questa ipotesi, derivando la funzione u_r rispetto ad una variabile x_s, dev'essere

$$\frac{du_r}{dx_s}=\frac{du_r}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_s}+\frac{du_r}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_s}+..+\frac{du_r}{dy_m}\frac{dy_m}{dx_s}\ ;$$

e si vede che u_x può riguardarsi come il prodotto che si avrebbe moltiplicando per orizzontali le due matrici simili (par. 1ª nº 64)

$$\left|\begin{matrix} \frac{du_1}{dy_1} & \frac{du_1}{dy_2} & \frac{du_1}{dy_3} & . & \frac{du_1}{dy_m} \\ \frac{du_2}{dy_1} & \frac{du_2}{dy_2} & \frac{du_2}{dy_3} & . & \frac{du_2}{dy_m} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{du_n}{dy_1} & \frac{du_n}{dy_2} & \frac{du_n}{dy_3} & . & \frac{du_n}{dy_m} \end{matrix}\right| \ , \qquad \left|\begin{matrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_1} & \frac{dy_3}{dx_1} & . & \frac{dy_m}{dx_1} \\ \frac{dy_1}{dx_2} & \frac{dy_2}{dx_2} & \frac{dy_3}{dx_2} & . & \frac{dy_m}{dx_2} \\ . & . & . & . & . \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \frac{dy_2}{dx_n} & \frac{dy_3}{dx_n} & . & \frac{dy_m}{dx_n} \end{matrix}\right| \ ,$$

ciascuna delle quali è costituita di n orizzontali ed m verticali; e ne risulta quanto segue:

I. Se $m<n$ si ha

$$u_x=0\ ,$$

vale a dire è identicamente nullo il determinante di n funzioni di n variabili, espresse per mezzo di altre funzioni delle stesse variabili, in numero minore di n.

II. Se $m=n$ le due matrici sono quadrate; ed in tal caso il determinante u_x equivale al prodotto de'loro determinanti, il primo de'quali può dinotarsi con u_y, poichè è il determinante delle u_1, u_2, etc. riguardate come funzioni delle y_1, y_2, etc., e l'altro può essere indicato con y_x, poichè è il determinante delle y_1, y_2, etc., che sono funzioni delle x_1, x_2, etc. Così quando $m=n$ si ha

$$u_x=u_y\,y_x\ .$$

III. Se $m>n$ il determinante sarà equivalente alla somma de'prodotti di tutti i determinanti della prima matrice pe'rispettivi determinanti omologhi dell'altra; il che può esprimersi scrivendo

$$u_x = \sum u_y\, y_x ,$$

dove u_y ed y_x sono i principali determinanti delle due matrici.

6. Se le n funzioni $u_1, u_2, .., u_n$, e le n variabili $x_1, x_2, .., x_n$ siano legate da n equazioni

$$\varphi_1 = 0 \;,\; \varphi_2 = 0 \;,\; \varphi_3 = 0 \;,\ldots,\; \varphi_n = 0 \;;$$

pel principio delle funzioni implicite avremo in generale

$$\frac{d\varphi_r}{du_1}\frac{du_1}{dx_s} + \frac{d\varphi_r}{du_2}\frac{du_2}{dx_s} + \cdots + \frac{d\varphi_r}{du_n}\frac{du_n}{dx_s} = -\frac{d\varphi_r}{dx_s} .$$

Intanto siano φ_u e φ_x i determinanti delle $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n$ secondochè queste si riguardano come funzioni delle u_1, u_2, etc., o delle x_1, x_2, etc.; sarà così

$$\varphi_u = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{du_1} & \frac{d\varphi_1}{du_2} & . & \frac{d\varphi_1}{du_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{d\varphi_n}{du_1} & \frac{d\varphi_n}{du_2} & . & \frac{d\varphi_n}{du_n} \end{vmatrix} , \quad \varphi_x = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_2}{dx_1} & . & \frac{d\varphi_n}{dx_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n} & \frac{d\varphi_2}{dx_n} & . & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} ,$$

e quindi, osservando alla formola precedente, si vedrà che il valore del determinante funzionale u_x è dato dalla relazione

$$\varphi_u u_x = (-1)^n \varphi_x .$$

7. In virtù delle equazioni poc'anzi considerate le $x_1, x_2, .., x_n$ possono inversamente riguardarsi come funzioni delle indipendenti $u_1, u_2, .., u_n$; ed in tal caso si ha

$$\varphi_x x_u = (-1)^n \varphi_u ;$$

e se si moltiplica questa formola per la precedente risulta

$$u_x x_u = 1 .$$

Così, in generale: *Essendo date più funzioni tra loro indipendenti di altrettante variabili, queste reciprocamente sono funzioni tra loro* *indipendenti di quelle; ed i determinanti de'due sistemi di funzioni sono tra loro inversi.*

Volendo dimostrare direttamente questo teorema osserveremo che, essendo per ipotesi

$$u_1=f_1(x_1, x_2, .., x_n), u_2=f_2(x_1, x_2, .., x_n), .., u_n=f_n(x_1, x_2, .., x_n),$$

se immaginiamo ricavati da queste equazioni i valori delle x_1, $x_2, .., x_n$, e poscia sostituiti nelle equazioni medesime, queste equazioni diverranno altrettante identità, dovendo rispettivamente ridursi ad $u_1=u_1$, $u_2=u_2$, etc. Segue da ciò che, se si prenda la derivata di u_r rispetto ad u_s questa derivata sarà uguale ad 1 o a zero, secondo che s è uguale ad r, o diverso da r, e quindi si hanno le due formole

$$\frac{du_r}{dx_1}\frac{dx_1}{du_r}+\frac{du_r}{dx_2}\frac{dx_2}{du_r}+..+\frac{du_r}{dx_n}\frac{dx_n}{du_r}=1,$$

$$\frac{du_r}{dx_1}\frac{dx_1}{du_s}+\frac{du_r}{dx_2}\frac{dx_2}{du_s}+..+\frac{du_r}{dx_n}\frac{dx_n}{du_s}=0,$$

le quali per semplicità possono mutarsi in

$$u_{r1}x_{1r}+u_{r2}x_{2r}+..+u_{rn}x_{nr}=1, \qquad (1)$$

$$u_{r1}x_{1s}+u_{r2}x_{2s}+..+u_{rn}x_{ns}=0. \qquad (2)$$

Queste formole dimostrano che, se si moltiplicano per orizzontali i due determinanti

$$u_x=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & . & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & . & u_{nn} \end{vmatrix}, \quad x_u=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & . & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & . & x_{n2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & . & x_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & . & x_{nn} \end{vmatrix},$$

nel determinante prodotto ogni elemento principale sarà uguale ad 1, e tutti gli altri saranno nulli; e quindi lo stesso prodotto è, come voleva dimostrarsi, uguale ad 1.

8. Le due ultime formole conducono ad alcune relazioni di molto interesse nelle applicazioni de'determinanti funzionali. Considerando ne'determinanti u_x ed x_u i complementi algebrici degli elementi u_{rs} ed x_{rs}, li dinoteremo secondo le nostre solite convenzioni con U_{rs} ed X_{rs}. Indi, siccome pel numero precedente l'espressione

$$u_{r1}\, x_{1s} + u_{r2}\, x_{2s} + \ldots + u_{rn}\, x_{ns}$$

è uguale a zero o ad 1 secondo che gl'indici r ed s sono uguali o disuguali, ponendovi successivamente $r=1, 2, .., s, .., n$, avremo la serie di n equazioni identiche

$$\begin{array}{l}
u_{11}\, x_{1s} + u_{12}\, x_{2s} + \ldots + u_{1n}\, x_{ns} = 0\ , \\
u_{21}\, x_{1s} + u_{22}\, x_{2s} + \ldots + u_{2n}\, x_{ns} = 0\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{s1}\, x_{1s} + u_{s2}\, x_{2s} + \ldots + u_{sn}\, x_{ns} = 1\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{n1}\, x_{1s} + u_{n2}\, x_{2s} + \ldots + u_{nn}\, x_{ns} = 0\ ,
\end{array}$$

le quali addizionate membro a membro, dopo averle ordinatamente moltiplicate per u_{1r}, u_{2r},.., u_{sr} ,.., u_{nr}, porgono la seguente relazione

$$u_x x_{rs} = U_{sr}\ . \tag{6}$$

Nel modo stesso considerando il determinante x_u si dimostrerebbe

$$x_u u_{rs} = X_{sr}\ ; \tag{7}$$

ma è chiaro che questa relazione può subito ottenersi dalla prima, scambiandosi u con x, e conseguentemente U con X.

9. Noi non abbiamo inteso di esporre tutte le proprietà che si conoscono de'determinanti funzionali; ma abbiamo cercato di porre in rilievo quelle che debbono riguardarsi come fondamentali. Non vogliamo tuttavia omettere una importante osservazione, la quale del resto sorge spontanea da quanto precede, ed è che « Il » determinante funzionale è per rapporto al sistema di funzioni,

» cui si riferisce, quello che la derivata è in rapporto alla fun-
» zione primitiva. » E basta ciò solo a far presentire l'alta importanza de'determinanti funzionali. Quando il sistema si riduce ad una sola funzione, il determinante del sistema si riduce per lo appunto alla derivata di questa funzione.

10. Dobbiamo da ultimo far menzione di un caso particolare, che si presenta in questa teorica, e che merita la maggiore attenzione. Se le $u_1, u_2, .., u_n$, anzichè essere funzioni qualunque delle variabili $x_1, x_2, .., x_n$, siano le derivate prime di una stessa funzione u di queste variabili, di modo che nel simbolo u_r bisogna intendere la derivata di u rispetto ad x_r, allora il simbolo u_{rs}, che indica, secondo le convenzioni, la derivata prima di u_r rispetto ad x_s, nella ipotesi attuale esprimerà una derivata secondo di u, vale a dire sarà

$$u_{rs} = \frac{d^2u}{dx_r\, dx_s};$$

e quindi si ha evidentemente

$$u_{rs} = u_{sr}.$$

Adunque nel caso, che consideriamo, il determinante delle funzioni $u_1, u_2, ..., u_n$ è un determinante simmetrico, il quale è formato con le derivate seconde della funzione u. Ora questo determinante, considerato per la prima volta dall'illustre Hesse, per brevità di linguaggio fu detto dal medesimo *determinante della funzione* u; ma, chiamato in seguito da Sylvester col nome di *Hessiano* della funzione, è sotto questa denominazione che attualmente si trova indicato da' Geometri, e spesso dinotato col simbolo Hu. Così l'*Hessiano* di una funzione u di n variabili non è altra cosa che il *Jacobiano* relativo alle n derivate prime della funzione; ma quindi, oltre a possedere tutte le proprietà che convengono in generale ai determinanti funzionali, si comprende che l'Hessiano dev'essere dotato di altre proprietà dipendenti dalla natura particolare delle funzioni cui si rapporta nella qualità di Jacobiano. E le più notevoli di queste proprietà saranno infatti sviluppate ne' seguenti paragrafi.

§. VII.

ALCUNE NOZIONI INTORNO ALLE SOSTITUZIONI LINEARI.

1. Se una funzione di n variabili $x_1, x_2, .., x_n$ sia trasformata in una funzione di altre n variabili $y_1, y_2, .., y_n$, legate alle prime per mezzo delle n equazioni lineari

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + .. + b_{1n} y_n , \\ x_2 = b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + .. + b_{2n} y_n , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + .. + b_{nn} y_n , \end{array}\right\} \quad (1)$$

questo sistema che può rappresentarsi semplicemente con

$$x_r = b_{r1} y_1 + b_{r2} y_2 + .. + b_{rn} y_n ,$$

a patto che si diano ad r tutti i valori $1, 2, 3, .., n$, chiamasi in generale una *sostituzione lineare*; ed il suo determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & b_{nn} \end{vmatrix} ,$$

che non dev'essere nullo se le $x_1, x_2, .., x_n$ sono supposte tra loro indipendenti (§. 1, n° 5), prende il nome di *determinante della sostituzione*, e talvolta anche quello di *modulo della sostituzione*.

La sostituzione lineare dicesi *unimodulare*, quando il suo determinante è uguale all'unità.

Se nella trasformazione sia prescritta la condizione che la somma dei quadrati delle variabili primitive debba essere uguale alla somma de'quadrati delle nuove variabili, allora la sostituzione suol dirsi una *sostituzione ortogonale*. Così, se

$$x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2 , \qquad (2)$$

la sostituzione (1) sarà una sostituzione ortogonale.

2. Supposto che la funzione lineare

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

sia trasformata mediante la sostituzione (1) in

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n ,$$

è evidente che pel coefficiente di y_r si ha

$$c_r = a_1 b_{1r} + a_2 b_{2r} + \ldots + a_n b_{nr} ;$$

vale a dire « il coefficiente di y_r nella trasformata è la somma
» dei prodotti de'successivi coefficienti della data funzione or-
» dinatamente moltiplicati pe' successivi elementi del determi-
» nante della sostituzione.

Dopo ciò, se il sistema di n funzioni lineari

$$u_r = a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rn} x_n$$
$$(r=1, 2, 3, \ldots, n)$$

sia trasformato nel sistema delle n funzioni

$$u_r = c_{r1} y_1 + c_{r2} y_2 + \ldots + c_{rn} y_n ,$$
$$(r=1, 2, 3, \ldots, n)$$

se dinotiamo con **A** il determinante del dato sistema, e con **C** quello del sistema trasformato, vale a dire se pongasi

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} , \quad \mathrm{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn} \end{vmatrix} ,$$

segue dal principio dichiarato che gli elementi della r^{ma} orizzontale di **C** sono i prodotti (par. 1ª nº 60) della r^{ma} orizzontale di **A** per le successive verticali di **B**, e ne risulta

$$\mathrm{C} = \mathrm{AB} .$$

Adunque: *Quando un sistema di più funzioni lineari di altrettante* *variabili è trasformato mediante una sostituzione lineare, il determinante del sistema trasformato è uguale al prodotto del determinante del dato sistema pel determinante della sostituzione.*

Se la sostituzione è unimodulare, il determinante del sistema trasformato sarà uguale a quello del sistema primitivo.

3. Supponiamo ora che mediante la sostituzione (1) sia trasformata una funzione qualunque u delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e dinotiamo con Hu_x l'Hessiano della funzione primitiva u, e con Hu_y l'Hessiano della stessa funzione dopo la trasformazione. Ciò posto essendo

$$\frac{d^2u}{dy_r dy_s} = \frac{d^2u}{dy_r dx_1}\frac{dx_1}{dy_s} + \frac{d^2u}{dy_r dx_2}\frac{dx_2}{dy_s} + \ldots + \frac{d^2u}{dy_r dx_n}\frac{dx_n}{dy_s},$$

in virtù della sostituzione si avrà invece

$$\frac{d^2u}{dy_r dy_s} = \frac{d^2u}{dy_r dx_1} b_{1s} + \frac{d^2u}{dy_r dx_2} b_{2s} + \ldots + \frac{d^2u}{dy_r dx_n} b_{ns},$$

e quindi risulta evidentemente

$$Hu_y = \begin{vmatrix} \frac{d^2u}{dy_1 dx_1} & \frac{d^2u}{dy_1 dx_2} & . & \frac{d^2u}{dy_1 dx_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{d^2u}{dy_n dx_1} & \frac{d^2u}{dy_n dx_2} & . & \frac{d^2u}{dy_n dx_n} \end{vmatrix} B\,;$$

e se si dinota con D il determinante del secondo membro si avrà

$$Hu_y = DB\,. \tag{3}$$

Inoltre essendo

$$\frac{du}{dy_r} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_r} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_r} + \ldots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{dy_r},$$

ossia

$$\frac{du}{dy_r} = \frac{du}{dx_1} b_{1r} + \frac{du}{dx_2} b_{2r} + \ldots + \frac{du}{dx_n} b_{nr},$$

si avrà

$$\frac{d^2u}{dy_r dx_s} = \frac{d^2u}{dx_1 dx_s} b_{1r} + \frac{d^2u}{dx_2 dx_s} b_{2r} + \ldots + \frac{d^2u}{dx_n dx_s} b_{nr}.$$

In conseguenza di quest'ultima formola si ha

$$D = Hu_x B \,,$$

e se si moltiplica questa relazione per la (3) si otterrà

$$Hu_y = Hu_x B^2 \,;$$

da che risulta la seguente proprietà de'determinanti Hessiani:

Se una funzione di più variabili sia trasformata mediante una sostituzione lineare, l'Hessiano della trasformata sarà uguale all'Hessiano della primitiva, moltiplicato pel quadrato del determinante della sostituzione.

4. Tra i coefficienti di una sostituzione ortogonale si verificano alcune relazioni di molto interesse, fra le quali notiamo le seguenti:

I. La sostituzione (1) è, come si è detto, ortogonale, se tra le primitive e le nuove variabili sussista la relazione (2), la quale adunque dev'essere identicamente verificata, quando in luogo di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si pongano le stesse espressioni che si hanno nella sostituzione. Quindi risulta che nello sviluppo del secondo membro il coefficiente del quadrato y_r^2 dev'essere uguale ad 1, e nullo quello del prodotto $y_r\, y_s$; e da ciò poi segue che per tutti i valori di r ed s da 1 fino ad n si avrà

$$\left.\begin{array}{l} b_{1,r}^2 + b_{2,r}^2 + b_{3,r}^2 + \cdots + b_{n,r}^2 = 1 \,, \\ b_{1,r}\, b_{1,s} + b_{2,r}\, b_{2,s} + \cdots + b_{n,r}\, b_{n,s} = 0 \,. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Reciprocamente è chiaro che la sostituzione è ortogonale quante volte siano verificate queste relazioni per tutt'i valori di r ed s da 1 ad n; e quindi è palese che il numero delle condizioni, cui debbono soddisfare gli n^2 coefficienti della sostituzione (1), affinchè possa essere ortogonale, ascende ad

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

Traducendo le formole precedenti si ha, che:

Nel determinante di una sostituzione ortogonale la somma de'quadrati di tutti gli elementi di qualunque verticale è uguale all'unità;

ed è nulla la somma de' prodotti de' corrispondenti elementi di due qualunque verticali.

O, più brevemente (par. 1ª, n.º 59):

Nel determinante di una sostituzione ortogonale il quadrato di qualunque verticale è uguale all'unità; ed è nullo il prodotto di due qualunque verticali.

II. Risulta immediatamente da questo teorema che, se si eleva a quadrato il determinante di una sostituzione ortogonale, ogni elemento principale del quadrato sarà uguale ad **1**, e tutti gli altri saranno nulli. Dunque:

Il quadrato del determinante di una sostituzione ortogonale è uguale all'unità; e perciò il valore di questo determinante è, in generale, $+1$, o -1.

III. Se il complemento algebrico di un elemento qualunque b_{rs} del determinante **B** s'indichi, com'è nostro costume con B_{rs}, si hanno le due relazioni per verticali (par. 1.ª, n.º 46)

$$b_{1s}\,B_{1s} + b_{2s}\,B_{2s} + \ldots + b_{ns}\,B_{ns} = B\ ,$$

$$b_{1r}\,B_{1s} + b_{2r}\,B_{2s} + \ldots + b_{nr}\,B_{ns} = 0\ .$$

Paragonando la seconda di queste relazioni con la seconda delle (4) si vede che gli elementi $b_{1s}, b_{2s}, \ldots, b_{ns}$ sono proporzionali ai loro complementi algebrici $B_{1s}, B_{2s} \ldots, B_{ns}$, e quindi supponendo in generale

$$B_{rs} = k\,b_{rs}\ , \tag{5}$$

si avrà

$$B_{1s} = k\,b_{1s}\ ,\quad B_{2s} = k\,b_{2s}\,, \ldots,\ B_{ns} = k\,b_{ns}\ .$$

Per questi valori la prima delle relazioni superiori diviene

$$(\,b_{1s}^2 + b_{2s}^2 + \ldots + b_{ns}^2)\,k = B\ ;$$

ma la quantità chiusa tra parentesi equivale ad **1**; perciò risulta $k = B$, e conseguentemente la (5) si muta in

$$B_{rs} = B\,b_{rs}\ . \tag{6}$$

Questa relazione dimostra, che:

Il prodotto del determinante di una sostituzione ortogonale per qualunque de'suoi elementi equivale al complemento algebrico dello stesso elemento.

IV. Considerando ora nel determinante B le relazioni per orizzontali

$$b_{s1}\,B_{s1}+b_{s2}\,B_{s2}+\,.\,.+b_{sn}\,B_{sn}=B\ ,$$

$$b_{r1}\,B_{s1}+b_{r2}\,B_{s2}+\,.\,.+b_{rn}\,B_{sn}=0\ ,$$

in virtù dell'ultimo teorema potremo eliminarne i complementi algebrici; e però sopprimendone in seguito il fattore B, si ottengono le due relazioni

$$b^2_{r1}+b^2_{r2}+b^2_{r3}+\,.\,.+b^2_{rn}=1\ ,$$

$$b_{r1}\,b_{s1}+b_{r2}\,b_{s2}+\,.\,.+b_{rn}\,b_{sn}=0\ ,$$

le quali dimostrano che la proprietà poc'anzi sviluppata per verticali (I) a riguardo del determinante B sussiste ancora per orizzontali; e quindi il teorema allora enunciato dev'essere così completato:

Nel determinante di una sostituzione ortogonale il quadrato di una linea qualunque è uguale all'unità; ed è nullo il prodotto di due linee qualunque parallele.

Dopo ciò è manifesto che, se il determinante di una sostituzione ortogonale si elevi a quadrato, sia che si operi per orizzontali, sia che si operi per verticali, avverrà sempre che ogni elemento principale del quadrato risulta uguale ad 1, e nulli tutti gli altri.

V. Se si dinotano con b_m e B_m due determinanti minori omologhi di grado m del primitivo B e del suo reciproco (par. 1ª, nº 84) si ha

$$B_m=B^{m-1}\times\text{compl. alg. di } b_m\ .$$

Ora, se ad ogni elemento B_{pq} compreso nel minore B_m si sostituisca l'espressione corrispondente $B\,b_{pq}$ (III), siccome quel minore è di grado m, è chiaro che si otterrà

$$B_m=B^m\ b_m\ ;$$

e quindi la formola precedente porgerà la seguente relazione

$$\mathrm{B}\, b_m = \text{compl. alg. di } b_m \,;$$

la quale si traduce nel teorema:

Il prodotto del determinante di una sostituzione ortogonale per qualunque suo minore equivale al complemento algebrico dello stesso minore.

Se il minore che si considera è principale, allora si ha semplicemente

$$\mathrm{B}\, b_m = \text{compl. di } b_m \,.$$

VI. Siano P_1, P_2, P_3, etc. i determinanti minori di B, i quali si ottengono dal combinare ad m ad m le verticali (ovvero orizzontali) di una sua matrice formata con m orizzontali qualunque (ovvero verticali); e siano Q_1, Q_2, Q_3, etc. i rispettivi complementi algebrici. In siffatta guisa per l'ultima proprietà avremo la serie di relazioni

$$\mathrm{B P}_1 = \mathrm{Q}_1 \;,\; \mathrm{B P}_2 = \mathrm{Q}_2 \;,\; \mathrm{B P}_3 = \mathrm{Q}_3 \;,\; \text{etc.}\;;$$

e se queste si moltiplicano ordinatamente per P_1, P_2, P_3, etc., e quindi si faccia la somma de'prodotti, osservando che la somma de'secondi membri equivale a B (par. 1ª, nº 53), otterremo

$$\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_2^2 + \mathrm{P}_3^2 + \text{etc.} = 1 \;;$$

vale a dire:

Nel determinante di una sostituzione ortogonale la somma dei quadrati di tutti i minori appartenenti ad una matrice formata con qualsivoglia numero di linee parallele è sempre uguale all'unità.

VII. Se nel determinante B di una sostituzione ortogonale si dia il segno contrario a ciascuno elemento di una stessa linea, muterà con siffatto cangiamento il segno del determinante, ma la sostituzione, che ne risulta, non cessa di essere ortogonale, perchè rimangono inalterate le equazioni (4) che caratterizzano siffatte sostituzioni. Così, mutando il segno ad una linea qualunque del determinante di una sostituzione ortogonale, o più generalmente ad un numero impari di linee, si ha sempre una sostituzione ortogonale, ma il suo determinante sarà di segno contrario a quello del determinante della prima sostituzione; di modo che, se questa prima sostituzione è di determinante $+1$, l'altra sarà di determinante -1; e reciprocamente.

VIII. Quando la data funzione è stata trasformata mediante la sostituzione (1), se nella trasformata si sostituissero ad y_1, $y_2,\ldots, y_n$ i valori che si otterrebbero dalla risoluzione delle stesse equazioni (1), si ritornerebbe evidentemente alla funzione primitiva. Ora, siccome si ha in generale

$$By_r = B_{1r}\, x_1 + B_{2r}\, x_2 + \ldots + B_{nr} x_n \;,$$

supponendo che la sostituzione sia ortogonale, avremo in virtù della (6),

$$B_{1r} = Bb_{1r} \;,\; B_{2r} = Bb_{2r} \;,\ldots,\; B_{nr} = Bb_{nr} \;,$$

e quindi la formola precedente si ridurrà ad

$$y_r = b_{1r}\, x_1 + b_{2r}\, x_2 + \ldots + b_{nr}\, x_n \;. \tag{7}$$

Così, nella ipotesi di una sostituzione ortogonale, per ritornare dalla trasformata alla primitiva basta prendere la nuova sostituzione in guisa che nella espressione di y_r i coefficienti di x_1, $x_2,\ldots, x_n$ siano ordinatamente uguali agli elementi della r^{ma} verticale del determinante B; di modo che le successive orizzontali del determinante della nuova sostituzione saranno rispettivamente identiche alle successive verticali del determinante della sostituzione primitiva.

Reciprocamente è chiaro, che la sostituzione (1) è necessariamente ortogonale, se l'espressione che ne risulta per y_r coincida col secondo membro della (7); vale a dire, se i coefficienti di x_1, $x_2,\ldots, x_n$ siano gli elementi della r^{ma} verticale del determinante B. Infatti, sostituendo nel detto secondo membro ad x_1, $x_2,\ldots,$ x_n i loro valori, pel coefficiente di y_s si ha l'espressione

$$b_{1r}\, b_{1s} + b_{2r}\, b_{2s} + \ldots + b_{nr}\, b_{ns} \;;$$

ma siccome il risultamento deve ridursi ad y_r, ne segue che questa espressione è uguale ad 1, se $s=r$, ed è nulla in ogni altro caso; vale a dire si ottengono in siffatta guisa le equazioni (4), le quali caratterizzano per lo appunto una sostituzione ortogonale.

5. Affinchè la sostituzione (1) possa essere ortogonale i suoi n^2 coefficienti dovranno, come già si è detto (n° prec. I), soddisfare ad $\frac{n(n+1)}{2}$ condizioni; e da ciò risulta che del numero totale de'coefficienti, $\frac{n(n-1)}{2}$ sono arbitrarii, e gli altri $\frac{n(n+1)}{2}$ si potranno determinare in funzione de' primi; od ancora potranno tutti gli n^2 coefficienti essere determinati in funzione di $\frac{n(n-1)}{2}$ quantità arbitrarie. Questa interessante ricerca, già trattata da Eulero per le sostituzioni *ternarie* e *quaternarie* (vale a dire relative a tre e quattro variabili), e niente agevole, se si mira ad esprimere i coefficienti della sostituzione per mezzo di funzioni razionali delle date quantità indeterminate, ha finalmente ricevuto dall' illustre Cayley la bellissima e generale risoluzione, che brevemente passeremo ad esporre.

Consideriamo il determinante ad elementi indeterminati, e di grado n,

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix};$$

se supponiamo che questo determinante sia gobbo (par. 1ª, n° 91), e che gli elementi principali siano tutti uguali ad 1, il che importa che debbano essere verificate le condizioni

$$a_{rs}+a_{sr}=0 \quad , \quad a_{rr}=1 , \tag{8}$$

allora gli n^2 elementi di A si riducono evidentemente a sole $\frac{n(n-1)}{2}$ quantità arbitrarie; ed è quindi in funzione di queste quantità che ora andremo a determinare i coefficienti della sostituzione (1), a condizione che la medesima risulti ortogonale. Si tratta adunque di trovare i valori degli elementi del determinante B per modo che soddisfino alle condizioni (4), esprimendoli in funzione degli elementi del determinante A, che supponiamo sottomessi alle condizioni (8).

Ponendo in generale

$$x_r = a_{r1}\, t_1 + a_{r2}\, t_2 + \ldots + a_{rn}\, t_n \,, \tag{9}$$

$$y_r = a_{1r}\, t_1 + a_{2r}\, t_2 + \ldots + a_{nr}\, t_n \,, \tag{10}$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

per la risoluzione di questi due sistemi lineari, usando la consueta notazione pe'complementi algebrici, abbiamo evidentemente

$$\mathrm{A} t_r = \mathrm{A}_{1r}\, y_1 + \mathrm{A}_{2r}\, y_2 + \ldots + \mathrm{A}_{nr}\, y_n \,, \tag{11}$$

$$\mathrm{A} t_r = \mathrm{A}_{r1}\, y_1 + \mathrm{A}_{r2}\, y_2 + \ldots + \mathrm{A}_{rn}\, y_n \,. \tag{12}$$

Addizionando ora le equazioni (9) e (10) si ha per le (8),

$$t_r = \frac{x_r + y_r}{2} \,;$$

ed in virtù di questo valore di t_r dalla (11) e (12) si otterrà

$$y_r = \frac{2\mathrm{A}_{1r}}{\mathrm{B}}\, x_1 + \frac{2\mathrm{A}_{2r}}{\mathrm{B}}\, x_2 + \ldots + \frac{2\mathrm{A}_{rr} - \mathrm{B}}{\mathrm{B}}\, x_r + \ldots + \frac{2\mathrm{A}_{nr}}{\mathrm{B}}\, x_n \,,$$

$$x_r = \frac{2\mathrm{A}_{r1}}{\mathrm{B}}\, y_1 + \frac{2\mathrm{A}_{r2}}{\mathrm{B}}\, y_2 + \ldots + \frac{2\mathrm{A}_{rr} - \mathrm{B}}{\mathrm{B}}\, y_r + \ldots + \frac{2\mathrm{A}_{rn}}{\mathrm{B}}\, y_n \,;$$

ma se pongasi per compendio

$$\left.\frac{2\mathrm{A}_{rs}}{\mathrm{B}} = b_{rs} \quad , \quad \frac{2\mathrm{A}_{rr} - \mathrm{B}}{\mathrm{B}} = b_{rr} \quad \right\} , \tag{13}$$

le due ultime formole diverranno

$$y_r = b_{1r}\, x_1 + b_{2r}\, x_2 + \ldots + b_{nr}\, x_n \,. \tag{14}$$

$$x_r = b_{r1}\, y_1 + b_{r2}\, y_2 + \ldots + b_{rn}\, y_n \,; \tag{15}$$

e quindi si riconosce (n° prec. VIII) che la sostituzione (15) è necessariamente una sostituzione ortogonale. I coefficienti di questa sostituzione essendo definiti dalle (13), si vede ch'essi restano determinati per mezzo degli elementi del determinante A, i quali riduconsi, come già si è avvertito, ad $\frac{n(n-1)}{2}$ quantità arbitrarie.

Osserveremo attualmente che il determinante B della sostituzione ortogonale definita dalle formole (10) ha per valore l'unità positiva. Infatti abbiamo per queste formole

$$B=\left(\frac{2}{A}\right)^n \begin{vmatrix} A_n-\frac{A}{2} & A_{12} & A_{13} & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\frac{A}{2} & A_{23} & . & {}_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\frac{A}{2} & . & A_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & . & A_{nn}-\frac{A}{2} \end{vmatrix};$$

ma, chiamando D il determinante a dritta, si avrà più semplicemente

$$B=\left(\frac{2}{A}\right)^n D\,. \qquad (16)$$

Intanto, se si moltiplicano per orizzontali i determinanti D ed A, si trova che il prodotto della r^{ma} orizzontale dell'uno per la s^{ma} orizzontale dell'altro si riduce a $-\frac{A}{2}a_{sr}$, ovvero a $+\frac{A}{2}a_{rs}$; e pel prodotto delle loro r^{me} orizzontali si trova $A-\frac{A}{2}a_{rr}$; ma, essendo per ipotesi $a_{rr}=1$, potremo ridurre questo prodotto ad $\frac{A}{2}a_{rr}$. Segue da ciò che la r^{ma} orizzontale del determinante, ch'è il prodotto de' due determinanti D ed A, è costituita dagli elementi

$$\frac{A}{2}a_{r1}\,,\ \frac{A}{2}a_{r2}\,,\ \frac{A}{2}a_{r3}\,,\ldots,\ \frac{A}{2}a_{rn}\,,$$

e quindi un tal prodotto sarà equivalente a quello di $\left(\frac{A}{2}\right)^n$ pel determinante A; di modo che ne deriva $D=\left(\frac{A}{2}\right)^n$. Per questa espressione di D la (16) si riduce a $B=+1$; e così resta dimostrato che la sostituzione ortogonale definita dalle formole (13) è di determinante 1.

Cangiando il segno ad una linea qualunque di questo determinante, o ad un numero impari di linee, si otterrebbe una sostituzione ortogonale di determinante -1 (n° 4, VII).

Se si tratta, per esempio, di una sostituzione binaria, supponendo

$$A=\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}=1+a^2 ,$$

si trova

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{-2a}{1+a^2} & \frac{1-a^2}{1+a^2} \end{vmatrix};$$

vale a dire le espressioni degli elementi del determinante a sinistra, che rappresenta il determinante di una sostituzione binaria ortogonale, sono rispettivamente uguali a quelle de'corrispondenti elementi del determinante a dritta. E così pure per una sostituzione ternaria, supponendo

$$A=\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix}=1+a^2+b^2+c^2 ,$$

si avrebbe

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1-a^2-b^2+c^2}{A} & 2\,\frac{a-bc}{A} & 2\,\frac{b+ac}{A} \\ -2\,\frac{a+bc}{A} & \frac{1-a^2+b^2-c^2}{A} & 2\,\frac{c-ab}{A} \\ 2\,\frac{-b+ac}{A} & -2\,\frac{c+ab}{A} & \frac{1+a^2-b^2-c^2}{A} \end{vmatrix}.$$

Queste sostituzioni sono di determinante $+1$; ma nel modo già dichiarato se ne potrebbero dedurre quelle di determinante -1.

§. VIII.

ALCUNE PROPRIETA' DELLE FUNZIONI OMOGENEE.

1. Intorno alle funzioni omogenee di più variabili dobbiamo rammentare due proprietà generalmente conosciute, e che sono il fondamento di tutte le altre.

» I. Le derivate parziali di un'ordine qualunque delle fun- » zioni omogenee sono anch'esse omogenee funzioni; e, se m sia » il grado della primitiva, sarà $m-1$ il grado di ogni derivata » prima; $m-2$ quello di ogni derivata seconda; e così di se- » guito ».

» II. Il prodotto della funzione pel suo grado equivale alla » somma de'prodotti di ciascuna variabile per la prima derivata » della funzione rispetto a questa variabile ».

Questa seconda proprietà è quella che costituisce il famoso teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.

2. Dinotando u una funzione omogenea delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la sua derivata rispetto ad x_r sarà, come già si è detto, figurata da u_r; indi u_{rs} esprimerà la derivata di u_r rispetto ad x_s; similmente u_{rst} esprimerebbe quella di u_{rs} rispetto ad x_t; e così di seguito. Quindi risulta che le quantità rappresentate da'simboli u_{rs}, u_{rst}, etc. sono sempre le stesse qualunque sia l'ordine degl'indici.

Posto ciò, se m è il grado della funzione u, pel teorema di Eulero, avremo in primo luogo

$$mu = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n . \tag{1}$$

Indi, se si applica di nuovo il teorema di Eulero a ciascuna delle $u_1, u_2, \ldots, u_n$, che sono funzioni omogenee di grado $m-1$, si ottengono le identità

$$\left.\begin{array}{l} (m-1)\, u_1 = u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \ldots + u_{1n} x_n , \\ (m-1)\, u_2 = u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + \ldots + u_{2n} x_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (m-1)\, u_n = u_{n1} x_1 + u_{n2} x_2 + \ldots + u_{nn} x_n , \end{array}\right\} \tag{2}$$

le quali costituiscono un sistema di n equazioni lineari rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. È chiaro intanto che il determinante di questo sistema è l'Hessiano della funzione u, e da ora innanzi lo dinoteremo col simbolo v, di modo che sarà

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & . & u_{nn} \end{vmatrix} .$$

3. Il sistema delle $n+1$ equazioni lineari costituito dalla (1) e dalle (2) porge subito una relazione osservabile tra la funzione primitiva u, e le sue prime e seconde derivate; relazione che si ha nella risultante di quelle equazioni; quindi, siccome il primo membro di (1) si può scrivere $(m-1)\dfrac{mu}{m-1}$, se si faccia per compendio

$$\frac{mu}{m-1} = u_0 ,$$

e si ponga

$$R = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & . & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} & . & u_{nn} \end{vmatrix} ,$$

sarà $R=0$ la relazione alla quale abbiamo accennato. Intanto, se dinotiamo con R_0 ciò che diviene il determinante R, quando vi si annulla il primo elemento, vale a dire, se pongasi

$$R_0 = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & . & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & . & u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & . & u_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} & . & u_{nn} \end{vmatrix} ,$$

è chiaro che la relazione di cui si tratta prenderà la forma

$$u_0 v + R_0 = 0 .$$

Se dinotiamo con U_{rs} il complemento algebrico dell' elemento u_{rs} a riguardo del determinante v, avremo (par. 1ª, nº 96)

$$R_0 = -\sum_{ik} u_i u_k U_{ik} ,$$

formola in cui ciascuno degl' indici i e k prende tutti i valori $1, 2, .., n$; ed allora la precedente relazione, restituendo ad u_0 il suo valore, diverrà

$$\frac{m}{m-1} uv = \sum_{ik} u_i u_k U_{ik} .$$

4. Essendo il determinante R simmetrico e nullo, il suo reciproco, che chiameremo R′, sarà anch'esso simmetrico e nullo (par. 1ª, nⁱ 84 e 93). In conseguenza, se i complementi algebrici degli elementi di R, che sono figurati da u_r ed u_{rs}, si dinotano rispettivamente con V_r e V_{rs}, osservando che $V_0 = v$, avremo

$$R' = \begin{vmatrix} v & V_1 & V_2 & . & V_n \\ V_1 & V_{11} & V_{12} & . & V_{1n} \\ V_2 & V_{21} & V_{22} & . & V_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ V_n & V_{n1} & V_{n2} & . & V_{nn} \end{vmatrix} = 0 ;$$

e però, mentre nel determinante R′ si ha in generale $V_{rs} = V_{sr}$, si avrà pure (id, n.º 103).

$$V_{rs}^2 = V_{rr} V_{ss} , \tag{3}$$

e quindi i successivi elementi di una linea qualunque saranno proporzionali alle radici quadrate de'successivi elementi principali.

Ciò premesso osserviamo che le $n+1$ equazioni (1) e (2), ponendo per simmetria

$$-(m-1) = x_0 ,$$

divengono

$$\begin{array}{l} u_0\, x_0 + u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + \ldots + u_n\, x_n = 0\,, \\ u_1\, x_0 + u_{11}\, x_1 + u_{12}\, x_2 + \ldots + u_{1n}\, x_n = 0\,, \\ u_2\, x_0 + u_{21}\, x_1 + u_{22}\, x_2 + \ldots + u_{2n}\, x_n = 0\,, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ u_n\, x_0 + u_{n1}\, x_1 + u_{n2}\, x_2 + \ldots + u_{nn}\, x_n = 0\,, \end{array}$$

e ne risulta che le quantità x_0, x_1, x_2,.., x_n sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di qualunque orizzontale del determinante R (§. I, n°7); o, ch'è lo stesso, sono proporzionali agli elementi di qualunque linea del determinante R'. In conseguenza le dette quantità saranno ancora proporzionali alle radici quadrate de'principali elementi di questo determinante; e quindi si ha la proporzione

$$\begin{array}{rl} x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n & = \sqrt{v} : \sqrt{V_{11}} : \sqrt{V_{22}} : \ldots : \sqrt{V_{nn}}\,, \\ & = V_n : V_{r1} : V_{r2} : \ldots : V_{rn}\,, \\ & = v : V_1 : V_2 : \ldots : V_n\,. \end{array}$$

Risulta da questa proporzione che, se è nullo il complemento di un elemento qualunque del determinante R, sarà nullo nel tempo istesso il complemento di ogni altro elemento; e siccome tra essi è compreso il determinante v, ch'è l'Hessiano della funzione primitiva u, così ne segue in particolare che, se è nullo l'Hessiano di questa funzione, sarà nullo il complemento di ogni altro elemento del determinante R; e viceversa.

5. Dalla stessa proporzione si ricavano agevolmente le seguenti osservabili relazioni:

$$V_r = \frac{x_r}{x_0}\, v \quad , \quad V_{rs} = \frac{x_r\, x_s}{x_0^2}\, v\,,$$

la seconda delle quali, considerata nella ipotesi particolare di $r = s = n$, ch'è il caso di frequenti applicazioni, si riduce a

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & . & u_{n-1} \\ u_1 & u_{11} & . & u_{1,n-1} \\ u_2 & u_{21} & . & u_{2,n-1} \\ . & . & . & . \\ u_{n-1} & u_{n-1,1} & . & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \frac{x_r\, x_s}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & . & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & . & u_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & . & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Siccome il determinante v è un determinante simmetrico, e ciascuno de' suoi elementi u_{rs} è (n° 1) una funzione omogenea di grado $m-2$, ne segue che il suo reciproco è anch'esso un determinante simmetrico; ed ogni suo elemento U_{rs} sarà una funzione omogenea di grado $(n-1)(m-2)$.

Supponendo che il determinante v sia identicamente nullo, il suo reciproco lo è del pari; ed in tal caso gli elementi di qualunque linea di questo reciproco saranno proporzionali agli elementi di ogni altra linea; da che deriva immediatamente il seguente teorema:

Se l'Hessiano di una funzione omogenea di più variabili si annulla identicamente; e se inoltre è nullo identicamente il complemento di un elemento qualunque, allora il complemento di ogni altro elemento sarà pure identicamente nullo; o in breve, *tutti gli elementi del reciproco saranno identicamente nulli.*

7. Ma l'annullamento identico dell'Hessiano di una funzione omogenea conduce ad una proprietà più riposta e di grande importanza, la quale consiste in ciò che allora le derivate prime della funzione sono legate tra di loro da una relazione omogenea lineare; e noi crediamo di far cosa utile e grata ai lettori riproducendo una nuova dimostrazione che l'illustre Autore ne ha dato nel 1859, (*) permettendoci qualche leggiera modifica che vale a renderla alquanto più concisa.

E dapprima si osservi che, essendo $v=0$, per valori uguali o disuguali di r ed s, da 1 fino ad n, si ha sempre

$$U_{s1}u_{r1}+U_{s2}u_{r2}+\ldots+U_{sn}u_{rn}=0 \quad . \tag{4}$$

Supponiamo che per un qualche valore di s le n quantità U_{s1}, $U_{s2}, \ldots, U_{sn}$ possano avere un fattor comune di grado μ in rapporto alle variabili (fattore che sarebbe 1, ove non esistesse); e che per

(*) Questa proposizione e quelle che formano il soggetto del seguente numero 8 sono tutte dovute ad Hesse, dal quale furono pubblicate fin dal 1851 (Crelle, T. XLII, pag. 119). Tuttavia la dimostrazione di quella, di cui trattasi attualmente, e dalla quale dipendono le altre, non era gran fatto soddisfacente; ed è però che l'Autore vi ritorna di nuovo nel 1859 (Crelle, T. LVI, pag. 263) per dimostrarla di una maniera più rigorosa.

la soppressione di un tal fattore l'equazione precedente sia ridotta a

$$c_1 u_{r1} + c_2 u_{r2} + \ldots + c_n u_{rn} = 0 \,, \tag{5}$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dinotano funzioni omogenee tutte di grado $(n-1)(m-2)-\mu$, le quali non ammettono alcun altro fattor comune ; e che sarebbero tutte costanti, ove il fosse una tra esse.

Inoltre, ammettendo che non sia nullo il complemento di alcuno elemento del determinante v, ch'è il caso cui si rapporta il teorema precedente, le quantità $c_1, c_2, \ldots, c_n$ saranno tutte necessariamente diverse da zero.

Posto ciò, se le n equazioni, che risultano dalla (5) con dare ad r i successivi valori $1, 2, \ldots, n$, si moltiplicano ordinatamente per $x_1, x_2, \ldots, x_r$, è chiaro che la somma de'prodotti, in virtù del teorema di Eulero, si riduce a

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n = 0 \,. \tag{6}$$

E se questa equazione identica si derivi rispetto ad x_r, dinotata con c_{ik} la derivata di c_i rispetto ad x_k, in virtù della (5) e della relazione $u_{rs} = u_{sr}$, risulterà

$$c_{1r} u_1 + c_{2r} u_2 + \cdots + c_{nr} u_n = 0 \,. \tag{7}$$

Sussistendo questa equazione per tutti i valori di r da 1 ad n, avremo identicamente

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdot & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdot & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = 0 \,;$$

e quindi, per tutti i valori di p e q da 1 ad n, sarà

$$C_{q1} c_{p1} + C_{q2} c_{p2} + \cdots + C_{qn} c_{pn} = 0 \,. \tag{8}$$

Derivando ora l'equazione identica (5) rispetto ad x_p, se si ponga per compendio

$$c_1 u_{r1p} + c_2 u_{r2p} + \cdots + c_n u_{rnp} = -t_{rp} \,, \tag{9}$$

(dove è da osservare che $t_{rp}=t_{pr}$ (n° 2)) , otterremo

$$c_{1p}\,u_{r1}+c_{2p}\,u_{r2}+\ldots+c_{np}\,u_{rn}=t_{rp}\;; \tag{10}$$

e se in questa formola si diano a p i successivi valori 1, 2,.., n, e quindi le equazioni che ne risultano si moltiplichino rispettivamente per C_{q1}, C_{q2},.., C_{qn}, è chiaro che, in virtù della (8), si annulla identicamente la somma de' primi membri , e ne risulta

$$C_{q1}\,t_{r1}+C_{q2}\,t_{r2}+\ldots+C_{qn}\,t_{rn}=0\;.$$

Osserviamo attualmente che questa equazione, al pari della (8), sussiste per tutti i valori di q da 1 ad n. Segue da ciò che le quantità t_{r1}, t_{r2},.., t_{rn} sono proporzionali alle c_{p1}, c_{p2}, . . , c_{pn} ; e però è lecito di supporre

$$t_{r1}=kc_{p1}\;,\;\; t_{r2}=kc_{p2}\,,\ldots,\; t_{rn}=kc_{pn}\;, \tag{11}$$

dove il fattore k è necessariamente diverso da zero se tutte non siano nulle le quantità t_{r1}, t_{r2},.., t_{rn}. Ed ammesso per ora che non abbia luogo che questo caso, se le (10) si moltiplichino rispettivamente per x_1, x_2,.., x_n, e quindi si faccia la somma dei prodotti, tenendo presente che c_p dinota una funzione omogenea di grado $(n-1)\,(m-2)-\mu$, in virtù del teorema di Eulero risulterà

$$\Big((n-1)(m-2)-\mu\Big)\,k.c_p=t_{r1}\,x_1+t_{r2}\,x_2+\ldots+t_{rn}\,x_n\,.$$

Sostituendo ora a t_{r1}, t_{r2},.., t_{rn} i valori, che si hanno dalla (9), si vedrà ch' è nullo il polinomio a dritta , il quale in virtù dello stesso teorema di Eulero si riduce al primo membro della (5) moltiplicato per $-(m-2)$; e quindi sarà anche nullo il prodotto $\Big((n-1)\,(m-2)-\mu\Big)\,k.\;c_p$; ma per ipotesi ciascuno dei due fattori k e c_p è diverso da zero ; dunque dev' esser nullo il primo de' tre fattori; il che vuol dire, che le quantità c_1, c_2,.., c_n sono funzioni di grado zero ; e perciò costanti.

Se poi siano nulle tutte le quantità $t_{r1}, t_{r2}, \ldots, t_{rn}$, in virtù della (10) dovrà sussistere l'equazione

$$c_{1p}\, u_{r1} + c_{2p}\, u_{r2} + \ldots + c_{np}\, u_{rn} = 0$$

per tutt'i valori di r da 1 ad n; e quindi, sussistendo la (5) pei medesimi valori di r, ne deriva che le $c_{1p}, c_{2p}, \ldots, c_{np}$ sono proporzionali alle $c_1, c_2, \ldots, c_n$; e perciò sarà lecito di supporre

$$c_{1p} = hc_1 \quad , \quad c_{2p} = hc_2, \ldots, \; c_{np} = hc_n \,, \qquad (12)$$

ossia

$$\frac{dc_1}{dx_p} = hc_1 \;, \quad \frac{dc_2}{dx_p} = hc_2, \ldots, \frac{dc_n}{dx_p} = hc_n, \qquad (13)$$

dinotando h una funzione delle variabili, che resta a determinare. Integrando le ultime equazioni, se si faccia per compendio

$$\int hdx_p = z \,,$$

avremo

$$c_1 = e^z\, C_1 \;, \; c_2 = e^z\, C_2 \;, \ldots, \; c_n = e^z\, C_n \,,$$

dove le costanti della integrazione $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono, in generale, funzioni indipendenti da x_p. Queste relazioni proverebbero che le funzioni $c_1, c_2, \ldots, c_n$ hanno il fattor comune e^z; ma essendo invece prime tra loro, dev'essere $h=0$. E da ciò deriva, osservando alle (13), che sono nulle le derivate delle funzioni $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rispetto alla variabile x_p; ma quindi sono nulle le derivate rispetto a qualunque variabile, e perciò queste funzioni sono costanti. Esistendo adunque tra siffatte costanti e le $u_1, u_2, \ldots, u_n$ la relazione (6), si ottiene la proposizione che trattavasi di dimostrare, cioè:

Se l' Hessiano di una funzione omogenea di più variabili si annulla identicamente, le derivate prime di questa funzione saranno legate per mezzo di una determinata relazione lineare.

8. Quando tra le derivate prime della funzione u esiste una

qualunque relazione, l'Hessiano v di questa funzione deve identicamente annullarsi (§. VI, n° 4), poichè è desso il Jacobiano del sistema delle dette prime derivate ; e però, in particolare, dovrà verificarsi questo identico annullamento dell'Hessiano anche quando le derivate siano legate da una relazione lineare della forma

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0 \,,$$

dove c_1, $c_2, \dots, c_n$ sono quantità costanti. Supponiamo intanto che la funzione u sia trasformata mediante la sostituzione lineare

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{1n} y_n \,, \\ x_2 &= c_2 y_1 + b_{22} y_2 + \dots + b_{2n} y_n \,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_n y_1 + b_{n2} y_2 + \dots + b_{nn} y_n \,, \end{aligned}$$

in cui i coefficienti di una delle nuove variabili, come y_1, sono le costanti della data relazione. Ora subito si riconosce che la trasformata è indipendente da y_1. In fatti essendo

$$\frac{du}{dy_1} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{du}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_1} + \dots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{dy_1} \,,$$

siccome si ha in generale $\frac{du}{dx_r} = u_r$, ed è inoltre, in virtù della sostituzione, $\frac{dx_r}{dy_1} = c_r$, così l'ultima formola si muta in

$$\frac{du}{dy_1} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \,;$$

ma il secondo membro è nullo per ipotesi, dunque lo sarà anche il primo; e ne segue, come si è detto, che la trasformata di u è indipendente dalla variabile y_1. Dopo ciò, essendo stato dimostrato nel numero precedente che, se l' Hessiano di u si annulla identicamente, le derivate prime sono legate da una determinata relazione lineare, risulta evidente il seguente teorema :

Se una funzione omogenea di n *variabili possa, mediante una sostituzione lineare, essere trasformata in una funzione di* n—1 *variabili, il suo Hessiano sarà identicamente nullo.*

Reciprocamente: *Una funzione di* n *variabili, di cui l'Hessiano si annulla identicamente, può, mediante una determinata sostituzione lineare, essere trasformata in una funzione di* n—1 *variabili.*

9. Ecco altre relazioni che menano ad osservabili conseguenze. Risolvendo le equazioni (2) rispetto ad x_r abbiamo

$$vx_r=(m-1)\,(U_{1r}u_1+U_{2r}u_2+\cdot\cdot+U_{nr}u_n)\;; \tag{14}$$

e se questa identità si derivi una volta rispetto ad x_r ed una volta rispetto ad x_s, tenendo presente che

$$U_{1r}u_{1r}+U_{2r}u_{2r}+\,..\,+U_{nr}u_{nr}=v\;,$$

$$U_{1r}u_{1s}+U_{2r}u_{2s}+\,..\,+U_{nr}u_{ns}=0\;,$$

si otterranno le due relazioni

$$v_rx_r=(m-1)\left(\frac{dU_{1r}}{dx_r}u_1+\cdot\cdot\cdot+\frac{dU_{nr}}{dx_r}u_n\right)+(m-2)\,v\;, \tag{15}$$

$$v_sx_r=(m-1)\left(\frac{dU_{1r}}{dx_s}u_1+\cdot\cdot+\frac{dU_{nr}}{dx_s}u_n\right). \tag{16}$$

E derivando l'ultima di queste identità rispetto ad x_t, troveremo

$$\left.\begin{aligned} v_{st}\,x_r=&(m-1)\left(\frac{d^2U_{1r}}{dx_sdx_t}u_1+\,..\,+\frac{d^2U_{nr}}{dx_sdx_t}u_n\right)\\ &-(m-1)\left(U_{1r}\,u_{1ts}+\,..\,+U_{nr}\,u_{nts}\right), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

poichè si ha

$$\frac{dU_{1r}}{dx_s}u_{1t}+\cdot\cdot+\frac{dU_{nr}}{dx_s}u_{nt}=-(U_{1r}u_{1ts}+U_{2r}u_{2ts}+\,..\,+U_{nr}u_{nts})\;,$$

come segue dalla identità

$$U_{1r}\,u_{1t}+U_{2r}\,u_{2t}+\,..\,+U_{nr}\,u_{nt}=0\;,$$

derivata rispetto ad x_s. Osservando ora alla relazione (1) cadrà sott'occhio che, se si abbia $u_1=u_2=\cdot\cdot=u_n=0$, sarà pure

$u=0$; ma inoltre vedesi dalla (14) che si ha nel tempo stesso $v=0$; e quindi le (15) e (16) dimostrano che ne risulta $v_1=v_2=\cdots=v_n=0$. In conseguenza:

Data una funzione omogenea di più variabili, qualunque sistema di valori di queste variabili capace di annullare tutte le derivate prime della funzione, annullerà ad un tempo la stessa funzione, ed il suo Hessiano con tutte le derivate prime dell' Hessiano. E conseguentemente annullerà pure l'Hessiano dell'Hessiano.

10. Supponendo che $u_1, u_2, \ldots, u_n$, anzichè essere le prime derivate di una stessa funzione u, siano funzioni omogenee qualunque di gradi $m_1, m_2, \ldots, m_n$, e che v indichi il loro Jacobiano, in tal caso pel teorema di Eulero si avrà il sistema lineare

$$m_r u_r = u_{r1} x_1 + u_{r2} x_2 + \ldots + u_{rn} x_n\,,$$

$$(r=1\,,2\,,\ldots,n)\,,$$

che, risoluto rispetto ad x_r, dà l'equazione identica

$$v x_r = m_1 U_{1r} u_1 + m_2 U_{2r} u_2 + \ldots + m_n U_{nr} u_n\,, \tag{18}$$

la quale, se le funzioni sono dello stesso grado m, si riduce a

$$v x_r = m\,(U_{1r} u_1 + U_{2r} u_2 + \ldots + U_{nr} u_n)\,. \tag{19}$$

Se questa ultima identità si derivi una volta rispetto ad x_r ed una volta rispetto ad x_s, è chiaro che i risultamenti sono, *in quanto a forma*, ciò che divengono rispettivamente (15) e (16) mutandovi $m-1$ in m; e quindi tenendo ancora presenti le equazioni (18) e (19), ne dedurremo il seguente teorema:

Se più funzioni omogenee di altrettante variabili sono annullate da un comune sistema di valori di queste variabili, un tal sistema annullerà pure il loro Jacobiano. E se di più le funzioni sono di uno stesso grado, quel sistema annullerà benanche la derivata del Jacobiano rispetto a qualunque delle variabili.

§. IX.

ALCUNE TRASFORMAZIONI E PROPRIETÀ DELLE FORME; ED IN PARTICOLARE DELLE BINARIE E DELLE QUADRATICHE.

1. Le funzioni omogenee razionali ed intere di qualsivoglia numero di variabili per brevità di linguaggio sogliono chiamarsi attualmente col nome di *forme* (*) ; le quali poi diconsi *binarie*, *ternarie*, *quaternarie*, etc. secondochè contengono o due variabili, o tre, o quattro, etc.; ed in quanto al grado una forma è *lineare*, se del 1° grado; *quadratica*, se del 2°; *cubica*, se del 3°; *biquadratica*, se del 4°; *quintica*, se del 5°, etc. Così delle tre funzioni

$$ax^2 + bxy + cx^2 \, ,$$

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \, ,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + dyz \, ,$$

la prima e la terza sono due forme quadratiche, l'una binaria, l'altra ternaria; e la seconda è una forma cubica binaria.

2. In generale è chiaro che i termini di una forma completa di grado m, relativa ad n variabili $x_1, x_2, .., x_n$, fatta astrazione da' coefficienti, sono tutti i termini che risultano dallo sviluppo del polinomio $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m$; laonde per aver la forma basterebbe effettuare lo sviluppo, senza tener conto de'coefficienti numerici polinomiali, dando invece ad ogni termine un coefficiente indeterminato. Ma tuttavolta si trova sovente opportuno di ritenere anche i coefficienti numerici; e questo sistema suole specialmente adottarsi per le forme binarie di qualunque grado, e per le forme quadratiche. Laonde, dinotata con u una forma

(*) Nome introdotto da Gauss per indicare funzioni omogenee, non solo razionali ed intere, ma che di più avessero numeri interi per coefficienti. Tuttavolta il significato di questa parola è ora alquanto più esteso, essendo convenuto di aversi riguardo all'ultima condizione solo nelle ricerche aritmetiche relative alle forme.

binaria di grado m, relativa alle variabili x, y, si avrebbe

$$u=a_0x^m+ma_1x^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}y^2+..+ma_{m-1}xy^{m-1}+a_my^m;$$

e, se pongasi per compendio

$$\frac{m(m-1)(m-2)\,..\,(m-r+1)}{1\times2\times3\times\cdot\cdot\times r}=(m)_r\,,$$

notazione da cui deriva $(m)_0=1$, potrà scriversi più concisamente

$$u=a_0\,x^m+(m)_1\,a_1\,x^{m-1}y+(m)_2\,a_2\,x^{m-2}\,y^2+\,..+a_m\,y^m, \quad (1)$$

od ancora

$$u=\sum_r (m)_r\,a_r\,x^{m-r}\,y^r\;;$$

con che s' intende la somma di tutti i termini, che si ottengono dal tipo $(m)_r a_r x^{m-r} y^r$, dando ad r tutti i valori 0, 1, 2,.., m.

3. Se u dinoti una forma quadratica ad n variabili x_1, x_2,.., x_n, e sia a_{rs} il coefficiente di $x_r x_s$, si avrà

$$u=\sum_{rs} a_{rs}\,x_r\,x_s\,,$$

a condizione che ciascuno degl'indici r ed s prenda tutti i valori 1, 2,.., n, ed inoltre che sia $a_{rs}=a_{sr}$: allora i termini che contengono i quadrati delle variabili saranno quelli che risultano da valori uguali degl'indici r ed s; mentre per ogni sistema di valori disuguali di questi indici, si ottengono due termini $a_{rs}x_r x_s$, $a_{sr}\,x_s\,x_r$, i quali si contraggono in un sol termine $2a_{rs}\,x_r\,x_s$. Del resto è chiaro, che possiamo anche scrivere

$$u=\sum_r a_{rr}\,x_r^2+2\sum_{rs} a_{rs}\,x_r\,x_s\,, \quad (2)$$

ma in questa espressione, mentre la prima somma va estesa a tutti i valori di r da 1 ad n, nella seconda i sistemi di valori di r ed s saranno le sole combinazioni binarie de' numeri 1 , 2,.., n.

4. Una forma binaria di grado dispari può, in generale, essere trasformata in una somma di potenze dello stesso grado di determinate funzioni lineari delle due variabili; vale a dire, supposto $m=2n-1$, la forma (1) può essere cangiata in

$$A_1(x+\alpha_1 y)^{2n-1}+A_2(x+\alpha_2 y)^{2n-1}+\cdots+A_n(x+\alpha_n y)^{2n-1}, \quad (3)$$

dove $A_1, A_2,.., A_n$ ed $\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_n$ sono costanti pienamente determinate. In fatti il numero di queste costanti è precisamente uguale al numero de'coefficienti della forma data, $a_0, a_1, a_2,..,$ a_{2n-1}; e quindi, paragonando le due forme, si comprende che quelle possono, in generale, essere determinate per mezzo di queste. La novella forma è conosciuta attualmente col nome di *forma canonica* della forma binaria di grado dispari, nome introdotto dall'illustre Sylvester, al quale è dovuta la idea e la teoria di queste importanti trasformazioni.

Eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di x nella forma primitiva e nella forma canonica, si ottengono subito le seguenti $2n$ equazioni

$$\left.\begin{array}{llllll}
a_0 & =A_1 & +A_2 & +\ldots+A_n & , \\
a_1 & =A_1\alpha_1 & +A_2\alpha_2 & +\ldots+A_n\alpha_n & , \\
a_2 & =A_1\alpha_1^2 & +A_2\alpha_2^2 & +\ldots+A_n\alpha_n^2 & , \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{2n-1} & =A_1\alpha_1^{2n-1} & +A_2\alpha_2^{2n-1} & +\ldots+A_n\alpha_n^{2n-1} & ,
\end{array}\right\} \quad (4)$$

per mezzo delle quali si determinano facilmente i valori delle $2n$ incognite costanti. In fatto, se in questo sistema si considerano $n+1$ qualunque siano successive equazioni, per esempio quelle che hanno per primi membri $a_r, a_{r+1}, a_{r+2},.., a_{r+n}$, potremo eliminarne le $A_1, A_2,.., A_n$ (§. I, n° 6); e però sopprimendo dalla risultante il fattore $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^r$, otterremo l'equazione

$$\begin{vmatrix}
a_r & 1 & 1 & . & 1 \\
a_{r+1} & \alpha_1 & \alpha_2 & . & \alpha_n \\
a_{r+2} & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & . & \alpha_n^2 \\
. & . & . & . & . \\
a_{r+n} & \alpha_1^n & \alpha_2^n & . & \alpha_n^n
\end{vmatrix}=0, \quad (5)$$

la quale sussiste per $r=0, 1, 2,.., n-1$; e che, chiamando

$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ i complementi algebrici degli elementi della prima verticale del determinante, si trasforma in

$$P_0 a_r + P_1 a_{r+1} + \ldots + P_{n-1} a_{r+n-1} + P_n a_{r+n} = 0 . \quad (6)$$

Posto ciò, se dinotiamo con $f(z)$ ciò che diviene lo stesso determinante mutandovi gli elementi della prima verticale nelle successive potenze $1, z, z^2, \ldots, z^n$, avremo ancora

$$f(z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n ;$$

e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ saranno le n radici (pag. 187, nota) dell'equazione $f(z) = 0$. Inoltre supponendo

$$\varphi(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \ldots (z - \alpha_n)$$
$$= k_n + k_{n-1} z + k_{n-2} z_2 + \ldots + k_1 z^{n-1} + z^n ,$$

siccome $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono ancora radici dell' equazione

$$\varphi(z) = k_n + k_{n-1} z + k_{n-2} z^2 + \ldots + k_1 z^{n-1} + z^n = 0 , \quad (7)$$

risulta che le funzioni $f(z)$ e $\varphi(z)$ non possono differire che per un fattore indipendente da z, e perciò si avranno le relazioni

$$P_0 = P_n k_n , \quad P_1 = P_n k_{n-1} , \quad P_2 = P_n k_{n-2} , \ldots, \quad P_{n-1} = P_n k_1 ,$$

per le quali la (6) si muta in

$$k_n a_r + k_{n-1} a_{r+1} + \ldots + k_1 a_{r+n-1} + a_{r+n} = 0 .$$

Questa formola, dando ad r i valori successivi $1, 2, \ldots, n$, porge il sistema di identità

$$\begin{array}{l}
k_n a_0 + k_{n-1} a_1 + \ldots + k_1 a_{n-1} + a_n = 0 , \\
k_n a_1 + k_{n-1} a_2 + \ldots + k_1 a_n + a_{n+1} = 0 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_n a_{n-1} + k_{n-1} a_n + \ldots + k_1 a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0 ,
\end{array}$$

ed in fine, eliminando tra queste n equazioni e la (7) le quantità le k_n, k_{n-1},.., k_1 si ottiene l'equazione di grado n

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & . & z^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & . & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & . & a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0 ,$$

le cui radici sono i valori delle costanti α_1, α_2,.., α_n. Determinati questi valori, quelli delle altre costanti A_1, A_2,.., A_n potranno ottenersi dalle prime n equazioni del sistema (4).

Se l'ultima equazione avesse radici uguali la trasformazione sarebbe impossibile, come subito si rileva dalla (5); poichè in tal caso il suo primo membro è identicamente nullo. E da ciò deriva che la trasformazione in discorso esige per condizione essenziale che siano disuguali le radici dell'equazione in z.

È evidente che per la forma canonica, di cui ci siamo occupati, potrebbe ancora adottarsi il tipo

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)^{2n-1} + (\alpha_2 x + \beta_2 y)^{2n-1} + \cdots + (\alpha_n x + \beta_n y)^{2n-1} ,$$

perchè il numero delle costanti è sempre uguale a quello de'coefficienti della forma data.

5. Proponendosi la medesima trasformazione per una forma binaria di grado pari, che ha un numero impari di coefficienti, questo numero non può essere uguale a quello dei coefficienti indeterminati, che si richiederebbero per la forma canonica, il quale è sempre pari; e da ciò facilmente si conchiude che, in generale, le forme binarie di grado pari possono in modi infiniti essere ridotte a forme canoniche. Del rimanente il sig. Cayley ha da ultimo meglio fissato la nozione delle forme canoniche delle forme binarie di grado pari (Crelle, 1857 tom. LIV, pag. 48), nozioni che si vanno estendendo alle forme ternarie, quaternarie, etc; ma qui non possiamo che arrestarci a questo cenno, trattandosi di ricerche che si collegano a teoriche di altra natura.

6. È importante ad osservare che le funzioni non omogenee di due o più variabili, e specialmente le algebriche razionali ed intere, possono sempre cangiarsi in omogenee, introducendo ne'di-

versi termini le convenienti potenze di una nuova variabile; il che permette di applicar loro le proprietà delle funzioni omogenee, salvo a ridurre i risultamenti con porre, a calcoli finiti, la nuova variabile uguale ad 1. Così invece della funzione

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m ,$$

o dell' altra

$$f(x) = a_0 x^m + (m)_1 a_1 x^{m-1} + (m)_2 a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m ,$$

si può considerare la forma (1), la quale diviene identica ad $f(x)$ per $y=1$; di modo che, se quella forma si dinoti con $\varphi(x, y)$, si ha $\varphi(x, 1) = f(x)$.

7. Data una funzione omogenea di più variabili, se si uguagliano a zero tutte le sue derivate parziali del 1° ordine, e dalle equazioni così formate si eliminino le variabili, la funzione dei coefficienti, che si ottiene in tale guisa, è ciò che Sylvester ha chiamato *discriminante* della funzione omogenea. Il discriminante adunque della forma binaria $\varphi(x, y)$, poc' anzi considerata, sarà il primo membro della risultante delle due equazioni

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = 0 \quad . \tag{8}$$

Ciò premesso, essendo pel teorema di Eulero

$$m\varphi(x, y) = \frac{d\varphi(x, y)}{dx} x + \frac{d\varphi(x, y)}{dy} y ,$$

se in questa formola si ponga $y=1$, siccome in tal caso il fattore variabile del 1° membro equivale ad $f(x)$, ed il coefficiente di x nel 2° si riduce ad $f'(x)$, chiamando $\psi(x)$ ciò che diviene il coefficiente di y per $y=1$, ne dedurremo

$$\psi(x) = m f(x) - f'(x).$$

Ora è chiaro che, tanto è eliminare le due variabili x ed y dalle due equazioni (8), quanto è eliminare la sola x tra le due equazioni $f'(x)=0$, e $\psi(x)=0$; ma d'altra parte bisogna osservare che tanto è eliminare la x tra queste due equazioni, quanto è eliminarla tra le due $f(x)=0$ ed $f'(x)=0$; e da ciò risulta che il discriminante della forma binaria $\varphi(x,y)$ non può differire che per un fattore numerico dal determinante dell'equazione $f(x)=0$ (pag. 179, n° 2), o dall'ultimo termine dell'equazione ai quadrati delle differenze delle sue radici (pag. 183).

8. Supponendo ora che u dinoti una forma quadratica ad n variabili $x_1, x_2, .., x_n$, se si prenda la sua derivata rispetto ad x_r, si avrà in virtù della (2),

$$\frac{du}{dx_r}=u_r=2\sum_s a_{rs}\,x_s\,,$$

l'indice s dovendo prendere tutti i valori 1, 2,.., n; talchè sarà

$$\frac{1}{2}u_r=a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+..+a_{rn}x_n\,, \qquad (9)$$

Questa formola, facendovi $r=1, 2,.., n$, porge il sistema lineare

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2}u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+..+a_{1n}x_n\,,\\
\frac{1}{2}u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+..+a_{2n}x_n\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{1}{2}u_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+..+a_{nn}x_n\,,
\end{array}\right\} \qquad (10)$$

ed è chiaro che il suo determinante è il discriminante della forma u; di modo che chiamando A questo discriminante si avrà

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Derivando ora l'equazione identica (9) rispetto ad x_s risulta

$$\frac{1}{2}u_{rs}=a_{rs}\,; \qquad (11)$$

quindi, chiamando v l'Hessiano di u, si ha evidentemente $v=2^n A$;

e ne segue (§. VII, n° 3) che: *se una forma quadratica sia trasformata mediante una sostituzione lineare, il discriminante della trasformata sarà uguale al discriminante della primitiva moltiplicato pel quadrato del determinante della sostituzione.*

9. Siccome la forma u è una funzione omogenea di 2° grado, pel teorema di Eulero sarà

$$2u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n \,, \tag{12}$$

e quindi, in virtù delle (10), la u si può esprimere come segue

$$\left.\begin{aligned} u = &(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n}) x_1 \\ &+ (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n}) x_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ (a_{n1} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n}) x_n \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

10. Ma la forma u può ancora rappresentarsi con un determinante di grado $n+1$. Sia A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} a riguardo del determinante A, ed A′ il reciproco di A; sarà

$$A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & A_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ciò premesso è facile di vedere che si ha identicamente

$$u = -\frac{1}{A^{n-2}} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & . & x_n \\ x_1 & A_{11} & A_{12} & . & A_{1n} \\ x_2 & A_{21} & A_{22} & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & A_{n1} & A_{n2} & . & A_{nn} \end{vmatrix} .$$

In fatti sia α_{rs} il complemento algebrico dell'elemento A_{rs} a riguardo del determinante A′; sarà (pag. 71) $\alpha_{rs} = A^{n-2} a_{rs}$; e quindi la formola precedente si traduce (pag. 76) in

$$u = \frac{1}{A^{n-2}} \sum_{rs} \alpha_{rs} x_r x_s = \sum_{rs} a_{rs} x_r x_s$$

11. Se nel determinante, che figura nell'ultima espressione della

forma u, si cambiano gli elementi A_{rs} negli elementi primitivi a_{rs}, e le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in altre variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$, si ha un'altra forma quadratica

$$V = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 & . & y_n \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ y_n & a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{rs} A_{rs}\, y_r\, y_s ,$$

la quale dicesi *forma aggiunta*, e talvolta *forma reciproca* della forma u.

Supposto che le nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ siano legate alle variabili primitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per mezzo delle relazioni

$$y_1 = \frac{1}{2} u_1 \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2} u_2 , \ldots , \; y_n = \frac{1}{2} u_n ,$$

in tal caso la forma aggiunta si può immediatamente esprimere per mezzo della primitiva. In fatti, se dalla prima verticale del determinante superiore si tolgono tutte le altre, ordinatamente moltiplicate, a cominciare dalla seconda, per $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tenendo presenti le (10) e la (12), si vedrà che si annullano tutti gli elementi di quella verticale, eccetto il primo, che si muta in $-u$; e quindi si ha evidentemente

$$V = -Au.$$

12. Immaginando che la forma quadratica u sia trasformata per mezzo della sostituzione lineare

$$x_r = b_{r1}\, y_1 + b_{r2}\, y_2 + \ldots + b_{rn}\, y_n , \qquad (14)$$

sia

$$u = \sum_{rs} c_{rs}\, y_r\, y_s \quad , \quad (c_{rs} = c_{sr}) :$$

Intanto la composizione de' coefficienti c_{rs} si può mettere più facilmente in evidenza operando la trasformazione sulla (13); e però, cominciando dal trasformare il sistema delle funzioni lineari chiuse tra parentisi, supporremo

$$\begin{aligned} u = & \ (k_{11} y_1 + .. + k_{1n} y_n)(b_{11} y_1 + .. + b_{1n} y_n) \\ & + (k_{21} y_1 + .. + k_{2n} y_n)(b_{21} y_1 + .. + b_{2n} y_n) \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + (k_{n1} y_1 + .. + k_{nn} y_n)(b_{n1} y_1 + .. + b_{nn} y_n) , \end{aligned}$$

dove si ha in generale

$$k_{pq} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + .. + a_{pn} b_{nq} . \tag{15}$$

Posto ciò, cercando nello sviluppo di u il coefficiente di $y_r y_s$, coefficiente già dinotato con $2c_{rs}$, troviamo

$$2c_{rs} = \begin{cases} \ \ k_{1r} b_{1s} + k_{2r} b_{2s} + .. + k_{nr} b_{ns} \\ + k_{1s} b_{1r} + k_{2s} b_{2r} + .. + k_{ns} b_{nr} . \end{cases}$$

Ora, se nella (15) si muti q in r, e, dando a p i valori successivi $1, 2, .., n$, le quantità $k_{1r}, k_{2r}, .., k_{nr}$ si moltiplichino ordinatamente per $b_{1s}, b_{2s}, .., b_{ns}$, addizionando i prodotti, e tenendo presente che $a_{rs} = a_{sr}$, risulterà

$$\begin{aligned} & k_{1r} b_{1s} + k_{2r} b_{2s} + .. + k_{nr} b_{ns} \\ & = k_{1s} b_{1r} + k_{2s} b_{2r} + .. + k_{ns} b_{nr} , \end{aligned}$$

e quindi pe' coefficienti della trasformata si ha la formola

$$c_{rs} = k_{1r} b_{1s} + k_{2r} b_{2s} + .. + k_{nr} b_{ns} ,$$

che conserva lo stesso valore quando vi si muta r in s, e nella quale i valori di $k_{1r}, k_{2r}, .., k_{nr}$ sono determinati dalla (15).

13. Se i coefficienti della sostituzione fossero assoggettati a verificare la relazione

$$c_{rs} = k_{1r} b_{1s} + k_{2r} b_{2s} + .. + k_{nr} b_{ns} = 0$$

per tutti i sistemi di valori disuguali di r ed s, risultanti dalle combinazioni binarie de' numeri $1, 2, \ldots, n$, in tal caso i rettangoli delle variabili, vale a dire i loro prodotti a due a due, sparirebbero tutti dalla trasformata, la quale più non conterrebbe che i loro quadrati; ed allora ponendo

$$\alpha_r = c_{rr} = k_{1r} b_{1r} + k_{2r} b_{2r} + \ldots + k_{nr} b_{nr},$$

la trasformata si ridurrebbe a $\sum_r \alpha_r y_r^2$, ossia ad

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2.$$

I coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ possono essere, a seconda de' casi, quantità positive o negative; ma per brevità suol dirsi che la forma primitiva è ridotta ad una somma di quadrati.

Può intanto osservarsi che la particolare trasformata, che qui abbiamo considerato, è propriamente la forma canonica della forma quadratica, dovendo tenersi presente che le nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono, in virtù della sostituzione, funzioni omogenee lineari delle variabili primitive.

È del resto evidente che una forma quadratica può in modi infiniti ridursi alla sua forma canonica, perchè il numero delle condizioni cui debbono soddisfare gli n^2 coefficienti della sostituzione per la scomparsa de' rettangoli delle variabili, i quali sono $\frac{n(n-1)}{2}$, è minore del numero de' coefficienti.

14. È a notarsi in particolare che la detta trasformazione può essere operata mediante una *determinata* sostituzione ortogonale; perchè in questo caso i coefficienti della sostituzione debbono soddisfare non solo alle condizioni per la scomparsa de' rettangoli, che sono $\frac{n(n-1)}{2}$, ma anche a quelle che caratterizzano la sostituzione ortogonale (§. VII, n° 4, I), e che sono $\frac{n(n+1)}{2}$. Laonde, siccome la somma di questi due numeri equivale ad n^2, ne segue che nella ipotesi attuale i coefficienti della sostituzione sono completamente determinati; ma resta ora a definire le espressioni di questi coefficienti e di quelli della trasformata.

A tal' effetto supporremo che la forma u sia trasformata mediante la sostituzione (14) riguardata come ortogonale; ed allora tornando dalla nuova alla forma primitiva (§. VII, n° 4, VIII) col mezzo della sostituzione

$$y_r = b_{1r}\, x_1 + b_{2r}\, x_2 + \ldots + b_{nr}\, x_n\,,$$

avremo identicamente

$$\sum_{rs} a_{rs}\, x_r\, x_s = \sum_r \alpha_r\, (b_{1r}\, x_1 + b_{2r}\, x_2 + \ldots + b_{nr}\, x_n)^2\;;$$

da che risulta

$$a_{rs} = \alpha_1\, b_{r1}\, b_{s1} + \alpha_2\, b_{r2}\, b_{s2} + \ldots + \alpha_n\, b_{rn}\, b_{sn}\,.$$

Se ora in questa relazione si diano ad s i valori successivi $1, 2, \ldots, n$, e le identità, che si ottengono, si moltiplichino ordinatamente per $b_{1s}, b_{2s}, \ldots, b_{ns}$, si vedrà subito che la somma dei prodotti si riduce (§. VII, n° 4, IV) ad

$$a_{r1}\, b_{1s} + a_{r2}\, b_{2s} + \ldots + a_{rn}\, b_{ns} = \alpha_s\, b_{rs}\,. \qquad (16)$$

Questa formola, facendovi $r = 1, 2, \ldots, n$, porge un sistema di n relazioni, da cui si possono eliminare le quantità $b_{1s}, b_{2s}, \ldots, b_{ns}$ (§. I, n° 7); ed in tal guisa si ha l' equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha_s & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha_s & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}-\alpha_s \end{vmatrix} = 0, \qquad (17)$$

che determina il valore di α_s; ma quindi è chiaro che, se pongasi

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11}-z & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-z & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}-z \end{vmatrix}\,,$$

le n radici dell' equazione $f(z) = 0$ saranno i valori de' coefficienti della trasformata, vale a dire delle quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Inoltre, siccome il primo membro della (17) è il determinante del sistema lineare (16), dal quale sono state eliminate le b_{1s}, b_{2s},.., b_{ns}, ne segue che queste quantità sono proporzionali alle radici quadrate de' complementi de' principali elementi (pag. 79, e 120); e perciò chiamando M_{rs} il complemento dell'elemento principale $a_{rr}-\alpha_s$, si avrà la proporzione

$$b_{1s} : b_{2s} : \ldots : b_{ns} = \sqrt{M_{1s}} : \sqrt{M_{2s}} : \ldots : \sqrt{M_{ns}} ;$$

e quindi, essendo per la natura della sostituzione ortogonale

$$b_{1,r}^2 + b_{2,r}^2 + b_{3,r}^2 + \cdots + b_{n,r}^2 = 1 ,$$

se si ponga $M_{1s} + M_{2s} + \ldots + M_{ns} = P_s$, i coefficienti della sostituzione saranno determinati dalla formola $b_{rs}\sqrt{P_s} = \sqrt{M_{rs}}$.

15. Le radici dell'equazione $f(z)=0$ sono tutte reali, e tra le varie dimostrazioni sembra semplicissima la seguente dovuta a Sylvester. Osserviamo dapprima che, per trasformare l'equazione $f(z)=0$ in un'altra $\varphi(t)=0$, le cui radici siano i quadrati di quelle della prima, converrà porre $t=z^2$, e la trasformata si otterrà eliminando z tra le equazioni $f(z)=0$, $t=z^2$; ma questa eliminazione può subito farsi moltiplicando la funzione $f(z)$ per la funzione $f(-z)$, perchè il prodotto non può contenere potenze impari di z; e quindi basterà mutarvi z in t per ottenere la trasformata che si cerca. Ciò posto essendo

$$f(-z) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}+z \end{vmatrix} ,$$

se si dinota con C il quadrato del determinante A, e si supponga

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn} \end{vmatrix} ,$$

si riconosce agevolmente che il prodotto $f(z) \times f(-z)$ è ciò, che diviene il determinante C, sottraendo z^2 da ciascuno de' suoi elementi principali; e quindi mutando z^2 in t si ha l'equazione

$$\varphi(t)=\begin{vmatrix} c_{11}-t & c_{12} & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-t & . & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn}-t \end{vmatrix}=0,$$

le cui radici sono i quadrati di quelle dell'equazione $f(z)=0$. Intanto, chiamando S_r la somma di tutti i principali minori di grado r di C, l'equazione $\varphi(t)=0$ si sviluppa (pag. 58) in

$$(-t)^n+S_1(-t)^{n-1}+S_2(-t)^{n-2}+S_3(-t)^{n-3}+\cdot\cdot+S_n=0;$$

ma siccome S_r è una quantità essenzialmente positiva (pag. 50, n° 69), risulta che questa equazione ha i segni alternati, e quindi non può avere radici negative.

Segue immediatamente da ciò che l' equazione $f(z)=0$ non può avere una radice della forma $z=q\sqrt{-1}$, poichè l' equazione $\varphi(t)=0$ dovrebbe averne una della forma $t=-q^2$; il che è assurdo. Se poi l'equazione $f(z)=0$ avesse una radice della forma $z=p+q\sqrt{-1}$, ponendo $z=p+z'$, la trasformata in z',

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-p)-z' & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-p)-z' & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & (a_{nn}-p)-z' \end{vmatrix}=0,$$

ammetterebbe una radice z' della forma $q\sqrt{-1}$, il che è impossibile, E quindi risulta, come voleva dimostrarsi, che l'equazione $f(z)=0$ non può avere che radici reali.

16. La riduzione della forma quadratica u alla forma canonica

$$\alpha_1 y_1^2+\alpha_2 y_2^2+\alpha_3 y_3^2+\ldots+\alpha_n y_n^2 \tag{18}$$

può ancora essere effettuata a condizione, che le nuove variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ siano funzioni omogenee e lineari delle variabili primitive x_1, x_2,.., x_n, della seguente forma particolare:

$$\left.\begin{array}{r}x_1+a'_2\,x_2+a'_3\,x_3+\cdots+a'_{n-1}x_{n-1}+a'_n\,x_n=y_1\quad,\\ x_2+a''_3\,x_3+\cdots+a''_{n-1}x_{n-1}+a''_n\,x_n=y_2\quad,\\ x_3+\cdots+a'''_{n-1}x_{n-1}+a'''_n\,x_n=y_3\quad,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}+a_n^{(n-1)}x_n=y_{n-1}\,,\\ x_n=y_n\quad.\end{array}\right\}(19).$$

E la possibilità della trasformazione risulta immediatamente da ciò che il numero de' coefficienti della forma primitiva è uguale al numero delle costanti, che entrano nella (18) e nel sistema lineare (19), le quali sono in tutto $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ora quello,che più di tutto interessa nella presente trasformazione, si è la determinazione delle n costanti α_1, α_2,.., α_n; ed a ciò si perviene di una maniera semplicissima. Egli è chiaro che la forma primitiva può riguardarsi come quella in cui si trasforma la (18), mediante la sostituzione lineare (19); ed allora,essendo A il discriminante della primitiva, se dinotiamo con B quello della (18), e con D il determinante della sostituzione, sarà (n° 8) $A=BD^2$; ma è $B=\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$, $D=1$, così risulta $A=\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n$. Resta così determinato il prodotto delle costanti α_1, α_2,.., α_n; ma lo stesso principio può subito condurre al valore di ciascuna.

Si osservi che la (18) pe' valori (19) è identicamente uguale alla forma primitiva, della quale or giova tener presente l'espressione (13); e la identità tra le due espressioni non cessa di sussistere annullando nell'una e nell'altra le stesse variabili, qualunque esse sieno; e però, annullandovi le x_{r+1}, x_{r+2},.., x_n, sarà

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1r})\,x_1\\ +(a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2r})\,x_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ +(a_{r1}\,x_1+a_{r2}\,x_2+\ldots+a_{rr})\,x_r\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{r}\alpha_1(x_1+a'_2x_2+\cdots+a'_rx_r)^2\\ +\alpha_2(x_2+\cdots+a''_rx_r)^2\\ \cdots\cdots\\ +\alpha_rx_r^2\,,\end{array}\right.$$

Intanto, siccome il primo membro di questa identità è la forma quadratica ad r variabili $x_1, x_2, .., x_r$, cui si riduce la primitiva con porvi uguali a zero tutte le altre variabili, se pongasi

$$A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{rr} \end{vmatrix},$$

avremo $\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_r = A_r$, e sarà di seguito $\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_{r-1} = A_{r-1}$. Da ciò la formola $\alpha_r = \frac{A_r}{A_{r-1}}$, la quale, dando ad r i valori successivi $1, 2, .., n$, porge i valori di tutte le costanti; e così risulta

$$u = \frac{A_1}{A_0} y_1^2 + \frac{A_2}{A_1} y_2^2 + \frac{A_3}{A_2} y_3^2 + .. + \frac{A_n}{A_{n-1}} y_n^2 . \qquad (20)$$

dove $A_0 = 1$, come segue dalla identità di poc'anzi; ed inoltre

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc.};$$

17. Per ciò che riguarda i coefficienti del sistema (19) ci limitiamo ad aggiungere che, se si dinota con v_r ciò, che diviene il determinante A_r, quando agli elementi dell'ultima verticale si sostituiscono le metà delle derivate di u, prese ordinatamente rispetto ad $x_1, x_2, .., x_r$, vale a dire, se pongasi

$$v_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{2,r-1} & \frac{1}{2} u_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2,r-1} & \frac{1}{2} u_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{r,r-1} & \frac{1}{2} u_r \end{vmatrix},$$

si avrà in generale $A_r y_r = v_r$ (*); ma bisogna osservare che, quantunque v_r apparisca come funzione di tutte le variabili $x_1, x_2, .., x_n$, pure essa lo è delle sole $x_r, x_{r+1}, .., x_n$. In fatti,

(*) Ci dispensiamo per brevità dal dimostrare questa relazione, che facilmente deriva dalle cose precedenti; ma può al bisogno riscontrarsi una memoria di Jacobi nel tom. LIII di Crelle, pag. 265.

sottraendo dall'ultima verticale tutte le altre moltiplicate, a cominciar dalla prima, per $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, in virtù delle (10) si avrà

$$v_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1,r-1} & a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2,r-1} & a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n \\ . & . & . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{r,r-1} & a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n \end{vmatrix} .$$

In conseguenza l'espressione di v_r è della forma

$$v_r = h_{rr}x_r + h_{r,r+1}x_{r+1} + h_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + h_{rn}x_n ;$$

dove $h_{rr}, h_{r,r+1}, \ldots, h_{rn}$ sono i successivi determinanti delle matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1r} & a_{1,r+1} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2r} & a_{2,r+1} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{rr} & a_{r,r+1} & . & a_{rn} \end{vmatrix} ;$$

di talchè si ha in generale

$$h_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1,r-1} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2,r-1} & a_{2s} \\ . & . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & . & a_{r,r-1} & a_{rs} \end{vmatrix} , \quad (s = r, r+1, \ldots, n) ,$$

ed $h_{rr} = A_r$. Avremo adunque $h_{rr}y_r = v_r$, e dando ad r i valori successivi $1, 2, \ldots, n$, otterremo il sistema lineare

$$\left.\begin{array}{l} h_{11}y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n , \\ h_{21}y_2 = \qquad\quad h_{22}x_2 + \cdots + h_{2n}x_n , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ h_{nn}y_n = \qquad\qquad\qquad\quad h_{nn}x_n , \end{array}\right\} \quad (21)$$

equivalente al (19), ma con coefficienti pienamente determinati.

La forma (18), essendo $A_{rr}y_r = v_r$, $A_0 = 1$, può cangiarsi in

$$u = \frac{v_1^2}{A_1} + \frac{v_2^2}{A_1A_2} + \frac{v_3^2}{A_2A_3} + \cdots + \frac{v_n^2}{A_{n-1}A_n} ; \quad (22)$$

ed i valori di $v_1, v_2, \ldots, v_n$ saranno i secondi membri delle (21).

18. Intorno alla riduzione di una forma quadratica a forma canonica è necessario di osservare che la supposizione, che la forma data sia una funzione di n variabili *indipendenti*, esige che il suo Hessiano o discriminante (n° 8) sia diverso da zero; senza di che questa forma sarebbe in realtà una funzione di meno di n variabili (pag. 227); il che è contro l'ipotesi. E di fatti le trasformazioni precedenti sarebbero impossibili ove fusse $A=0$.

19. Ma le innumerevoli forme canoniche di una stessa forma quadratica sono dotate della proprietà rilevantissima, che forma il soggetto del seguente teorema:

Data una forma quadratica a coefficienti reali, se mediante una sostituzione lineare ed a coefficienti reali si trasforma in un' altra, che contenga solo i quadrati delle nuove variabili, sarà costante nella trasformata il numero de' quadrati affetti da coefficienti positivi, e quindi anche quello de' quadrati affetti da coefficienti negativi.

Per dimostrare questa proprietà, denominata dal Sylvester *legge d' inerzia* delle forme quadratiche, supponiamo che la forma u sia ridotta alle due forme

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2 \quad , \quad \beta_1 v_1^2 + \beta_2 v_2^2 + \ldots + \beta_n v_n^2 \; ,$$

mediante due diverse sostituzioni lineari e reali; ed osserviamo in primo luogo che, in virtù di queste sostituzioni tanto le y_1, $y_2, \ldots, y_n$, quanto le $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono funzioni omogenee lineari delle variabili primitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$; e sì le une che le altre sono tra di loro indipendenti. Laonde, se si considera un numero di queste funzioni che sia minore di n, è sempre lecito di supporre che tali funzioni siano annullate da un conveniente sistema di valori delle variabili, senza che alcun' altra funzione rimanga da questo sistema annullata.

Ciò premesso supponiamo, per fissar le idee, che nella prima delle due trasformate vi siano i termini negativi; ed ammettiamo che nella seconda ve ne sia un numero maggiore $i+k$. Allora, dovendo le due forme essere identicamente eguali, se mediante un sistema conveniente di valori delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, immaginiamo che si facciano ad un tempo sparir dalla prima tutti i termini negativi, e dalla seconda tutti i positivi, il che è sempre possibile, perchè il numero totale di questi termini è minore di n, saremmo condotti ad un'eguaglianza tra una quantità positiva ed una quantità negativa, vale a dire ad un assurdo. Dunque la identità delle due forme può sussistere solo se abbiano uno stesso numero di termini positivi, ed uno stesso numero di termini negativi, come si è proposto a dimostrare.

20. Risulta da questo teorema che, qualunque sia la sostituzione lineare e reale, che riduca la forma u alla forma (18), la ridotta avrà tanti termini positivi e tanti negativi, quanti sono rispettivamente i termini positivi e negativi della forma (20) o della (22); e perciò, quante sono rispettivamente le permanenze e le variazioni di segni nella serie $1, A_1, A_2, \cdots, A_n$, i cui termini, eccetto l'unità, sono i successivi principali minori determinanti del discriminante della forma primitiva.

21. La determinazione del numero delle radici reali di un'equazione algebrica di grado n, comprese tra due limiti qualunque, è una delle più belle applicazioni della legge d'inerzia delle forme quadratiche; ed il metodo generale per siffatta ricerca si è quello di considerare una conveniente forma ad n variabili, che sia pure una funzione simmetrica di tutte le radici; e quindi esaminare qual sia ne'segni de'termini di una sua forma canonica l'influenza caratteristica delle radici reali e delle immaginarie.

Sia $f(z)=0$ un'equazione di grado n, e siano $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le sue radici. Se si tratta di determinare il numero totale delle radici reali basterà considerare la forma quadratica

$$\sum_i \left(x_1 + z_i x_2 + z_i^2 x_3 + \cdots + z_i^{n-1} x_n \right)^2 , \qquad (23)$$

l'indice i dovendo prendere tutti i valori $1, 2, \ldots, n$; e che, se si ponga per compendio

$$Z_i = x_1 + z_i x_2 + z_i^2 x_3 + \cdots + z_i^{n-1} x_n , \qquad (24)$$

si sviluppa nella forma

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \cdots + Z_n^2 ,$$

dove ad ogni radice reale corrisponde un quadrato *positivo* di una funzione omogenea e lineare delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Non può dirsi altrettanto di una radice immaginaria; ma se si considerano due radici immaginarie conjugate come z_1 e z_2, le espressioni di Z_1 e Z_2 saranno della forma $v+y\sqrt{-1}$ e $v-y\sqrt{-1}$, dove v e y dinotano funzioni omogenee lineari e reali delle n variabili, e sarà quindi $Z_1^2+Z_2^2=2v^2-2y^2$. Così ogni coppia di radici immaginarie conjugate dà luogo a due quadrati, *uno positivo l'altro negativo*, di funzioni omogenee lineari e reali delle variabili x_1, x_2,.., x_n; e da ciò risulta che l'equazione $f(z)=0$ avrà tante coppie di radici immaginarie, quanti sono i quadrati negativi in qualsivoglia forma canonica della forma (23); e però quante sono le variazioni di segni nella serie costituita dall'unità e dai successivi principali minori determinanti del discriminante della forma istessa (n° prec.).

D'altra parte, se dinotiamo con s_i la somma delle potenze i^{me} delle radici dell'equazione data $f(z)=0$, si vedrà subito dalla (23) che i termini x_i^2 ed $x_i x_k$ hanno rispettivamente per coefficienti s_{2i-2} e $2s_{i+k-2}$; quindi la forma può scriversi (pag. 236, n° 9)

$$\begin{array}{l}
(s_0 \quad x_1+s_1x_2+\ldots+s_{n-1}\ x_n)\,x_1 \\
+(s_1 \quad x_1+s_2x_2+\ldots+s_n \quad x_n)\,x_2 \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
+(s_{n-1}x_1+s_nx_2+\ldots+s_{2n-2}x_n)\,x_n\,,
\end{array}$$

ed il suo discriminante sarà perciò il determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Essendo adunque s_0 una quantità positiva ne segue che il numero delle coppie delle radici immaginarie della data equazione $f(z)=0$ è uguale al numero delle variazioni di segni nella serie de' principali minori determinanti

$$s_0\,,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}\,,\ldots,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & . & s_n \\ . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & . & s_{2n-2} \end{vmatrix}\,.$$

com'era già noto per altra via (pag. 195).

22. Per definire il numero delle radici reali comprese tra due limiti assegnati possiamo considerare la forma più generale

$$\sum (z-z_i)\left(x_1+z_i x_2+z_i^2 x_3+\cdots+z_i^{n-1}x_n\right)^2 , \quad (25)$$

la quale in virtù della (24) si sviluppa in

$$(z-z_1)\,Z_1^2+(z-z_2)\,Z_2^2+\cdots+(z-z_n)\,Z_n^2 ,$$

e dove ad ogni radice reale z_r corrisponde un termine reale $(z-z_r)\,Z_r^2$, vale a dire un quadrato di una funzione omogenea e lineare delle n variabili $x_1, x_2,.., x_n$, il quale è *positivo* o *negativo*, secondochè si attribuisce a z un valore maggiore o minore della radice z_r. Considerando poi due radici immaginarie conjugate, come z_1 e z_2, potremo supporre

$$z-z_1=p+q\sqrt{-1} \quad , \quad Z_1=v+y\sqrt{-1} ,$$
$$z-z_2=p-q\sqrt{-1} \quad , \quad Z_2=v-y\sqrt{-1} ,$$

e sarà di seguito

$$(z-z_1)\,Z_1^2+(z-z_2)\,Z_2^2=$$
$$2p(v^2-y^2)-4qvy=\frac{2}{p}\left((pv-qy)^2-(p^2+q^2)\,y^2\right)=V^2-Y^2,$$

dove v, y, V, Y dinotano funzioni omogenee lineari e reali delle variabili; e perciò, qualunque sia z, ad ogni coppia di radici immaginarie corrisponderanno due quadrati, *uno positivo, l'altro negativo*. Adunque, se si supponga attribuito a z un valore qualunque α, e si supponga inoltre che la data equazione abbia r coppie di radici immaginarie, i radici reali minori di α, e k maggiori, ogni forma canonica della (25) dovrà contenere:

1.° r quadrati positivi ed r quadrati negativi, provvenienti dalle r coppie di radici immaginarie;

2.° i quadrati positivi, nascenti dalle radici reali minori di α;

3.° k quadrati negativi, nascenti dalle radici reali maggiori di α.

E però la detta forma canonica conterrà in tutto $r+i$ quadrati positivi, ed $r+k$ quadrati negativi.

Si osservi intanto che nello sviluppo della forma (25) rispetto ad $x_1, x_2,.., x_n$, il quadrato x_i^2 ed il prodotto $x_i x_k$ hanno rispettivamente per coefficienti $s_{2i-2}z - s_{2i-1}$ e $2(s_{i+k-2}\, z - s_{i+k-1})$, e ne segue, che il suo discriminante è il determinante

$$\begin{vmatrix} s_0\, z - s_1 & s_1\, z - s_2 & . & s_{n-1}\, z - s_n \\ s_1\, z - s_2 & s_2\, z - s_3 & . & s_n\, z - s_{n+1} \\ . & . & . & . \\ s_{n-1}\, z - s_n & s_n\, z - s_{+1} & . & s_{2n-2}\, z - s_{2n-1} \end{vmatrix} .$$

D'altra parte è manifesto che in questo determinante il principale minore di grado r, costituito nelle prime r orizzontali, si trasforma nel determinante di grado $r+1$,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{r-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_r & z \\ . & . & . & . & . \\ s_r & s_{r+1} & . & s_{2r-1} & z^n \end{vmatrix} ;$$

e da ciò risulta (n° 20) che ogni forma canonica della (25) avrà tanti quadrati positivi e negativi quante sono rispettivamente le permanenze e le variazioni di segni nella serie

$$1\,,\quad \begin{vmatrix} s_0 & 1 \\ s_1 & z \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & 1 \\ s_2 & s_3 & z \\ s_1 & s_2 & z^2 \end{vmatrix}\,, \ldots ,\quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & . & s_n & z \\ . & . & . & . & . \\ s_n & s_{n+1} & . & s_{2n-2} & z^n \end{vmatrix} . \qquad (26)$$

Riassumendo, siamo condotti al teorema seguente:

Data l'equazione di grado n, f(z)=0, *ed un valore reale* α *di* z, *il numero delle radici reali minori di* α, *e quello delle radici maggiori di* α, *l'uno e l'altro aumentato del numero delle coppie di radici immaginarie, sono rispettivamente uguali al numero delle permanenze ed al numero delle variazioni di segni nella serie* (26) (*).

Quindi se nella serie (26) si sostituiscano successivamente a z due numeri disuguali α e β, la differenza tra i numeri delle corrispondenti variazioni sarà uguale al numero delle radici reali dell'equazione $f(z)=0$, comprese tra α e β.

(*) V. una memoria del Brioschi pubblicata nel tom. XV. *des nouvelles annales de math.* pag. 275. *Sur les series qui donnent le nombre de racines réelles etc.*

§ X.

ALCUNE APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA ANALITICA.

1. *Equazione della retta che passa per due punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2). Supponendo che l'equazione della retta sia

$$ax + by + c = 0 ,$$

dovranno essere soddisfatte le due condizioni

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad , \quad ax_2 + by_2 + c = 0 ,$$

e quindi, eliminando da queste tre equazioni le costanti a, b, c, l'equazione della retta che passa pe'due punti dati sarà

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa stessa equazione esprime adunque la: *condizione perchè tre punti* (x, y) (x_1, y_1), (x_2, y_2), *siano situati in linea retta.*

2. *Lunghezza della perpendicolare condotta da un punto* (x, y), *alla congiungente di due punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2). L'equazione della congiungente de' due punti, che è quella del n° 1, chiamando **X**, **Y**, **Z** i complementi algebrici degli elementi della prima orizzontale del determinante, prende la forma

$$\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z} = 0 ;$$

ed allora, dinotata con p la perpendicolare condottale dal punto (x, y) si avrà, com'è noto,

$$p = \frac{\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\mathrm{XY}\cos xy}} \operatorname{sen} xy .$$

Ora essendo $\mathrm{X} = y_1 - y_2$, $\mathrm{Y} = -(x_1 - x_2)$, è manifesto che il denominatore del fratto equivale alla distanza de'due punti (x_1, y_1), (x_2, y_2), che indicheremo con d; e, siccome il numeratore equivale al determinante superiore, così risulta in valore assoluto

$$p=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\frac{\operatorname{sen} xy}{d}\,.$$

3. *Superficie del triangolo determinato da tre punti* (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Sia T la superficie del triangolo, d la lunghezza di un lato, e p la perpendicolare condottagli dal vertice opposto; sarà $2\,T=pd$; e quindi per la formola precedente sarà, in valore assoluto,

$$2\,T=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\operatorname{sen} xy\,.$$

4. *Superficie del triangolo determinato da tre rette*,

$$ax+by+c=0\,, \tag{a}$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0\,, \tag{a_1}$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0\,. \tag{a_2}$$

Siano (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) i vertici del triangolo rispettivamente opposti ai lati (a), (a_1), (a_2); e si osservi che, se nella equazione del lato (a) s'intendano per x ed y le coordinate del vertice opposto, la quantità $ax+by+c$ sarà necessariamente diversa da zero; e per la stessa ragione saranno ancora diverse da zero le altre due quantità $a_1x_1+b_1x_1+c_1$, $a_2x_2+b_2x_2+c_2$. In conseguenza, se queste tre quantità si dinotano rispettivamente con k, k_1, k_2, si avranno i tre sistemi di equazione

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=k \\ a_1x+b_1y+c_1&=0 \\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} ax_1+by_1+c&=0 \\ a_1x_1+b_1y_1+c_1&=k_1 \\ a_2x_1+b_2y_1+c_2&=0 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} ax_2+by_2+c&=0 \\ a_1x_2+b_1y_2+c_1&=0 \\ a_2x_2+b_2y_2+c_2&=k_2 \end{aligned}\right\};$$

ed il determinante di 3° grado formato co'primi membri sarà uguale al determinante di 3° grado formato co'secondi; ma quest'ultimo determinante equivale a $\gamma\,\gamma_1\,\gamma_2$, ed il primo si trasforma nel prodotto de'due determinanti

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} ,$$

adunque, chiamando Δ il primo, e T la superficie del triangolo, avremo

$$2\,\Delta\,\mathrm{T} = \gamma\,\gamma_1\,\gamma_2 \operatorname{sen} xy .$$

Eliminando ora da ciascuno de'precedenti tre sistemi di equazioni le coordinate de'vertici, si ottengono le tre relazioni

$$\begin{vmatrix} a & b & c-k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1-k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 , \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-k_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

le quali, chiamando C, C_1, C_2 i complementi algebrici degli elementi dell'ultima verticale di Δ, porgono rispettivamente

$$k\mathrm{C} = \Delta \quad , \quad k_1\mathrm{C}_1 = \Delta \quad , \quad k_2\mathrm{C}_2 = \Delta ;$$

ed in virtù di questi valori si ha in fine, in valore assoluto,

$$2\,\mathrm{T} = \frac{\Delta^2}{\mathrm{C}\,\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2} \operatorname{sen} xy .$$

5. *Condizione perchè tre rette s'incontrino in un punto.* Considerando le stesse tre rette del numero precedente è chiaro che la condizione, di cui si tratta, è la risultante delle loro equazioni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

dappoichè le dette equazioni debbono essere verificate da'medesimi valori per x ed y. L'ultima espressione di T riproduce la medesima conchiusione; ma essa fa pur vedere che l'incontro effettivo delle rette esige che non sia nulla alcuna delle quantità

$$C=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad C_1=-\begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad C_2=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix};$$

e di fatti, se una di queste quantità è nulla, due delle tre rette sarebbero parallele.

6. *Equazione del piano che passa per tre punti* P_1, P_2, P_3.

Indicando, in generale, con x_r, y_r, z_r le coordinate del punto P_r, l'equazione di cui trattasi sarà

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

essendo verificata dalle coordinate di ciascuno de' tre punti.

La stessa equazione esprimerebbe la: *condizione perchè siano situati in un piano i quattro punti* P, P_1, P_2, P_3.

7. *Condizione perchè quattro piani* Π, Π_1, Π_2, Π_3 *s'incontrino in un punto.*

Supponendo, in generale, che l'equazione del piano Π_r sia

$$a_r x + b_r y + c_r z + d_r = 0,$$

la condizione, che si cerca sarà

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

8. *Volume del tetraedro determinato da quattro punti.*

I. *Coordinate ortogonali.* Sia T la superficie della faccia triangolare determinata da' tre punti P_1, P_2, P_3; p la perpendicolare menatale dal vertice opposto P; e V il volume del tetraedro; sarà $3V=pT$. Supposto intanto che il piano del triangolo T abbia per equazione,

$$ax + by + cz + 1 = 0,$$

essendo dinotate con x, y, z le coordinate del punto P, sarà

$$p=\frac{ax+by+cz\,1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,,$$

ed i valori di a, b, c saranno determinati dalle equazioni

$$ax_1+by_1+cz_1+1=0,\; ax_2+by_2+cz_2+1=0,\; ax_3+by_3+cz_3+1=0,$$

le quali, chiamando Q il loro determinante, porgono

$$Qa=-\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad Qb=\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad Qc=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

ma, siccome questi tre determinanti esprimono, in valore assoluto, i doppii delle projezioni del triangolo T su' piani coordinati, avremo per un noto teorema

$$Q^2(a^2+b^2+c^2)=4T^2\,;$$

e sarà di seguito,

$$Q\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2T\,.$$

Il risultamento della sostituzione de' valori di a, b, c nel numeratore della espressione di p può aversi indipendentemente dalla risoluzione delle equazioni (pag. 121); e si ha per tal modo

$$Q(ax+by+cz+1)=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dividendo questa espressione per la precedente si ottiene il valore di p in funzione delle coordinate de' quattro vertici; e però, essendo $3V=pT$, risulta in fine

$$6V=\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

II. *Coordinate oblique.* Rapportiamo lo stesso tetraedro a tre nuovi assi OX, OY, OZ, comunque condotti per l'origine O delle coordinate primitive x, y, z, e pongasi

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\text{ang.}\,XY\\ \mu=\text{ang.}\,XZ\\ \nu=\text{ang.}\,YZ\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha=\cos xX\\ \beta=\cos xY\\ \gamma=\cos xZ\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha_1=\cos yX\\ \beta_1=\cos yY\\ \gamma_1=\cos yZ\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha_2=\cos zX\\ \beta_2=\cos zY\\ \gamma_2=\cos zZ\end{array}\right\}.$$

Avremo in siffatta guisa il sistema di relazioni

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=\cos\lambda\\ \alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2=\cos\mu\\ \beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2=\cos\nu\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha+\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2=1\\ \beta\beta+\beta_1\beta_1+\beta_2\beta_2=1\\ \gamma\gamma+\gamma_1\gamma_1+\gamma_2\gamma_2=1\end{array}\right\}, \quad (2)$$

e le coordinate primitive x, y, z saranno espresse in funzione delle nuove coordinate X, Y, Z per mezzo delle formole

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma Z\,,\quad y=\alpha_1 X+\beta_1 Y+\gamma_1 Z\,,\quad z=\alpha_2 X+\beta_2 Y+\gamma_2 Z\,,$$

le quali cangiano l'equazione (1) in

$$6V=\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1\\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & 0\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Chiamando M il secondo fattore, ed elevandolo a quadrato per verticali, in virtù delle (2) risulta

$$M^2=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}1 & \cos\lambda & \cos\mu\\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu\\ \cos\mu & \cos\nu & 1\end{vmatrix}$$

$$=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\,;$$

e sarà quindi in valore assoluto

$$6V=\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1\\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1\end{vmatrix}M\,.$$

È chiaro che la quantità dinotata con **M**, in valore assoluto, equivale all'unità quando gli assi sono ortogonali; dappoichè in tal caso, essendo $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=0$, $\cos\nu=0$, si ha

$$M^2=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\,,$$

e sarà in conseguenza $M=\pm 1$.

9. *Volume del tetraedro determinato da quattro piani.*

Questa ricerca può essere condotta con un metodo esattamente identico a quello tenuto pel caso analogo del triangolo nel n° 4. Siano P, P_1, P_2, P_3 i vertici rispettivamente opposti alle facce Π, Π_1, Π_2, Π_3, e ritenute le precedenti notazioni per le coordinate del punto P_r e del piano Π_r, s'indichi con k_r il valore della quantità $a_r x_r + b_r y_r + c_r z_r + d_r$, la quale è diversa da zero, perchè il punto (x_r, y_r, z_r) è per ipotesi fuori del piano Π_r. Dopo ciò, siccome in ciascuno de'quattro vertici s'incontrano tre facce del tetraedro, avremo i seguenti quattro sistemi di relazioni

$$\begin{array}{ll}
ax+by+cz+d=k\,, & ax_1+by_1+cz_1+d=0, \text{ etc. etc.}\\
a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\,, & a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1=k_1, \text{ etc. etc.}\\
a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\,, & a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2=0, \text{ etc. etc.}\\
a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\,, & a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1+d_3=0, \text{ etc. etc.}
\end{array}$$

Ora, chiamando Δ il determinante di ciascuno de'quattro sistemi, e V il volume del tetraedro, abbiamo

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}\,,\qquad \frac{6V}{M}=\begin{vmatrix}x&y&z&1\\x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\end{vmatrix};$$

e siccome il prodotto di questi due determinanti equivale al determinante di 4° grado formato co'primi membri de'quattro sistemi, così, osservando che il determinante formato co' loro secondi membri equivale al prodotto $k\,k_1 k_2 k_3$, ne conchiuderemo

$$\frac{6V\Delta}{M}=k\,k_1\,k_2\,k_3\;.$$

Inoltre, eliminando da' quattro sistemi di equazioni le coordinate de' vertici del tetraedro, per la solita notazione de' complementi algebrici del determinante Δ, avremo

$$Dk=\Delta\quad,\quad D_1 k_1=\Delta\quad,\quad D_2 k_2=\Delta\quad,\quad D_3 k_3=\Delta\;;$$

e quindi, in virtù dell'ultima relazione, risulta in fine

$$6V=\frac{\Delta^3}{D\,D_1\,D_2\,D_3}\,M\;.$$

10. *Superficie del triangolo in funzione delle lunghezze de' lati.*

Chiamando T la superficie del triangolo P P_1 P_2 possiamo supporre in valore assoluto

$$2T=\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\end{vmatrix}\;;$$

e quindi potremo scrivere in due diverse forme (pag. 24, n.° 43)

$$2T=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&x&y\\0&1&x_1&y_1\\0&1&x_2&y_2\end{vmatrix}\quad,\quad 2T=-\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&0&x&y\\1&0&x_1&y_1\\1&0&x_2&y_2\end{vmatrix}\;.$$

Moltiplicando tra loro questi due determinanti avremo

$$4T^2=-\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&xx+yy&xx_1+yy_1&xx_2+yy_2\\1&xx_1+yy_1&x_1x_1+y_1y_1&x_1x_2+y_1y_2\\1&xx_2+yy_2&x_1x_2+y_1y_2&x_2x_2+y_2y_2\end{vmatrix}\;;$$

ed attualmente, se si cambiano i segni alle ultime tre orizzontali e quindi alla prima verticale, ed inoltre se si moltiplicano le ultime tre orizzontali per 2, e quindi la prima verticale si divida per 2, con ciò avremo solo moltiplicato per 4 il determinante; ed in conseguenza sarà

$$4^2T^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2(xx+yy) & -2(xx_1+yy_1) & -2(xx_2+yy_2) \\ 1 & -2(xx_1+yy_1) & -2(x_1x_1+y_1y_1) & -2(x_1x_2+y_1y_2) \\ 1 & -2(xx_2+yy_2) & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_2x_2+y_2y_2) \end{vmatrix}.$$

Ora questo determinante non cambia di valore, se alle tre ultime orizzontali si aggiunga la prima successivamente moltiplicata pe' binomii x^2+y^2, $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, e similmente alle tre ultime verticali si aggiunga la prima moltiplicata pe'medesimi binomii. Per siffatta trasformazione si annullano tutti gli elementi principali del determinante, e si avrà

$$4^2T^2 =$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \\ 1 & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\ 1 & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ponendo adunque $PP_1 = a$, $PP_2 = b$, $P_1P_2 = c$, risulta in fine

$$4^2T^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix};$$

di accordo con quanto già fu annunciato a pag. 34 intorno ad un determinante di questa forma.

11. *Volume del tetraedro in funzione delle costole.*

Si perviene alla espressione di questo volume con un metodo analogo a quello del n° precedente. Dinotato con V il volume del tetraedro P $P_1P_2P_3$, si può supporre in valore assoluto

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

quindi scrivere questa espressione di 6V nelle due diverse forme

$$6V=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad 6V=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

e poscia moltiplicar tra loro i due determinanti; da che risulta

$$6^2V^2=$$
$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1, & xx+yy+zz, & xx_1+yy_1+zz_1, & xx_2+yy_2+zz_2, & xx_3+yy_3+zz_3 \\ 1, & xx_1+yy_1+zz_1, & x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \\ 1, & xx_2+yy_2+zz_2, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_2x_2+y_2y_2+z_2z_2, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 \\ 1, & xx_3+yy_3+zz_3, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_3x_3+y_3y_3+z_3z_3 \end{vmatrix}.$$

Ora, come nel caso precedente, cambieremo i segni alle ultime quattro orizzontali, e poscia alla prima verticale; ed inoltre moltiplicheremo le ultime quattro orizzontali per 2, e divideremo la prima verticale per 2; e con ciò non faremo che moltiplicare il determinante per -2^3. In seguito alle ultime quattro orizzontali aggiungeremo la prima successivamente moltiplicata pe'trinomii $x^2+y^2+z^2$, $x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2$, $x_3^2+y_3^2+z_3^2$; e similmente alle ultime quattro verticali aggiungeremo la prima successivamente moltiplicata pe'medesimi trinomii, con che non si altera il valore del determinante. Ma frattanto si saranno annullati tutti gli elementi principali; ed essendo rimasti immutati gli elementi della prima orizzontale e della prima verticale, gli altri saranno divenuti uguali ai quadrati delle costole del tetraedro; e però, dinotate le loro lunghezze con a, b, c, d, e, f, si avrà in fine

$$2^3 6^2 V^2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & d^2 & e^2 \\ 1 & b^2 & d^2 & 0 & f^2 \\ 1 & c^2 & e^2 & f^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. *Equazione generale delle linee di 2.° ordine sotto forma di determinante.*

Considerando l'equazione generale di 2° grado nella forma omogenea

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + hz^2 = 0\ ,$$

se dinotiamo con Δ il discriminante della funzione omogenea φ, avremo (pag. 235, n° 8)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & h \end{vmatrix}\ ;$$

e quindi, indicando come al solito i complementi algebrici degli elementi del determinante Δ, vale a dire con le stesse lettere ma in carattere majuscolo, si avrà (pag. 236, n° 10)

$$\varphi = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & A & B & D \\ y & B & C & E \\ z & D & E & H \end{vmatrix}\ .$$

Dopo ciò è chiaro che l'equazione della conica $\varphi = 0$ non è diversa dall'equazione

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & A & B & D \\ y & B & C & E \\ z & D & E & H \end{vmatrix} = 0\ .$$

Ed inoltre, se si dinotano con φ_1, φ_2, φ_3 le derivate parziali di φ rispetto ad x, y, z, sarà evidente che a questa equazione può anche darsi la seguente forma (pag. 236, n° 11)

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & a & b & d \\ \varphi_2 & b & c & e \\ \varphi_3 & d & e & h \end{vmatrix} = 0\ .$$

13. *Condizione pel contatto tra la conica* $\varphi=0$ *e la retta rappresentata dall' equazione*

$$lX+mY+nZ=0.$$

Si sa che la tangente della conica nel punto (x, y, z) ha per equazione

$$\varphi_1 X+\varphi_2 Y+\varphi_3 Z=0 ;$$

quindi, se la retta debba toccar la conica nello stesso punto, le equazioni delle due linee saranno identificabili, e si avrà $\varphi_1=l$, $\varphi_2=m$, $\varphi_3=n$. Sostituendo questi valori nell' ultima equazione della conica, la condizione pel contatto sarà espressa da

$$\begin{vmatrix} 0 & l & m & n \\ l & a & b & d \\ m & b & c & e \\ n & d & e & h \end{vmatrix}=0 .$$

14. *Equazione della polare reciproca della conica* $\varphi(x, y, z)=0$ *in rapporto alla conica direttrice de' poli* $F(x, y, z)=0$.

È noto che in riguardo alla conica $F=0$, la polare di un punto qualunque (x, y, z) esistente nel suo piano, ha per equazione

$$F_1 X+F_2 Y+F_3 Z=0 .$$

Ora supponendo che il punto appartenga alla polare reciproca della conica $\varphi=0$, la polare di questo punto sarà tangente della conica istessa; ed in conseguenza dovrà sussistere la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & a & b & d \\ F_2 & b & c & e \\ F_3 & d & e & h \end{vmatrix}=0 ,$$

la quale adunque sarà l'equazione della polare reciproca di $\varphi=0$.

15. *Formole per la curvatura delle linee piane.*

Considerando l'equazione di una linea piana $F(x, y)=0$, se dinotiamo con F_1 ed F_2 le derivate parziali di F rispetto ad x ed y, con F_{11} ed F_{12} quelle di F_1, e con $F_{21}=F_{12}$ ed F_{22} quelle di F_2, riguardata la y come funzione di x, le sue derivate del 1° e 2° ordine, che indicheremo con y' ed y'', saranno determinate dalle equazioni

$$F_1+F_2y'=0 \quad , \quad F_{11}+2F_{12}y'+F_{22}y'^2+F_2y''=0 \, .$$

Eliminando y' tra queste due equazioni si ottiene

$$F_2^3y''=-(F_1^2F_{12}-2F_1F_2F_{12}+F_2^2F_{11})\, ;$$

ma, chiamando Δ il secondo membro, si ha evidentemente

$$\Delta=-(F_1^2F_{12}-2F_1F_2F_{12}+F_2^2F_{11})=\begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} ,$$

e quindi i valori di y' ed y'' saranno determinati dalle formole

$$y'=-\frac{F_1}{F_2} \quad , \quad y''=\frac{\Delta}{F_2^3} \, .$$

Ciò premesso siano α, β, e ρ le coordinate del centro ed il raggio del cerchio osculatore della curva nel punto (x, y); è noto che questi elementi sono determinati dalle formole

$$x-\alpha=y'\,\frac{1+y'^2}{y''} \quad , \quad y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''} \quad , \quad \rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \, ;$$

ma i precedenti valori di y' ed y'' le cangiano nelle altre più simmetriche

$$x-\alpha=-F_1\frac{F_1^2+F_2^2}{\Delta} \quad , \quad y-\beta=-F_2\frac{F_1^2+F_2^2}{\Delta}$$

$$\rho=\frac{(F_1^2+F_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \, .$$

Ora queste formole possono rendersi più semplici mediante la considerazione delle funzioni omogenee (*). A tal'effetto renderemo omogenea l'equazione $F(x, y)=0$ con la introduzione di una terza variabile z (pag. 233, n° 6); e supposto che si abbia l'equazione $u(x, y, z)=0$, sarà u una funzione che diviene identica ad F per $z=1$. Intanto ritenuto per le derivate parziali di u lo stesso sistema di notazione adottato per la funzione F, se m è il grado di u, sarà identicamente (pag. 221, n.° 5)

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{z^2}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix},$$

dove il determinante del 2° membro è l'Hessiano di u, che al solito dinoteremo con v. Ponendo $z=1$, il primo membro di questa relazione diviene identico a Δ; e quindi si avrà

$$\Delta = \frac{(m-1)^2}{v},$$

bene inteso che dopo le derivazioni debba porsi $z=1$; e le formole di poc'anzi si muteranno perciò nelle altre

$$\frac{x-\alpha}{(m-1)^2} = -\frac{u_1}{v}(u_1^2+u_2^2)^3 \quad , \quad \frac{y-\beta}{(m-1)^2} = -\frac{u_2}{v}(u_1^2+u_2^2),$$

$$\frac{\rho}{(m-1)^2} = \frac{(u_1^2+u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{v}.$$

Se si osserva che le funzioni Δ e v sono rispettivamente di gradi $3m-4$ e $3m-6$, si vedrà che le ultime formole sono più semplici delle precedenti.

(*) Le osservabili trasformazioni, che quì vengono sviluppate, sono dovute all' illustre Hesse. V. due memorie di questo Geometra nel Giornale di Crelle, l'una nel t. XXVIII, pag. 103, l'altra nel t. XXXVIII, pag. 242.

16. *Formole per la curvatura delle superficie.*

Supposto che una superficie sia rappresentata dall'equazione $F(x, y, z)=0$, porremo per compendio, come si usa ordinariamente,

$$\frac{dz}{dx}=p \quad , \quad \frac{dz}{dy}=q \quad , \quad \frac{d^2z}{dx^2}=r \quad , \quad \frac{d^2z}{dx\,dy}=s \quad , \quad \frac{d^2z}{dy^2}=t\,;$$

ed allora chiamando ρ_1 e ρ_2 i raggi principali di curvatura nel punto (x, y, z) si avrà, com'è noto,

$$\rho_1\rho_2=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}\,;$$

ma esprimeremo questo valore di $\rho_1\rho_2$ per mezzo delle derivate parziali di F, sostituendo a p, q, r, s, t i loro valori determinati dalle cinque equazioni derivate del 1° e del 2° ordine,

$$F_1+F_3p=0 \qquad , \qquad F_2+F_3q=0\,,$$

$$F_{11}+2F_{13}p+F_{33}p^2+F_3r=0\,,$$

$$F_{12}+F_{23}p+F_{13}q+F_{33}pq+F_3s=0\,,$$

$$F_{22}+2F_{23}q+F_{33}q^2+F_3t=0\,.$$

Ricavando dalle due prime equazioni i valori di p e q, e sostituendoli nelle rimanenti si ottengono le tre formole

$$F_3^3r=-(F_{11}F_3^2-2F_{13}F_1F_3+F_{33}F_1^2)\,,$$

$$F_3^3s=-(F_{12}F_3^2-F_{23}F_1F_3-F_{13}F_2F_3+F_{33}F_1F_2)\,,$$

$$F_3^3t=-(F_{22}F_3^2-2F_{23}F_2F_3+F_{33}F_2^2)\,;$$

ma ponendo

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}\,,$$

si vedrà che i secondi membri di quelle tre formole equivalgono rispettivamente a' complementi algebrici di tre elementi del determinante Δ, cioè di F_{22}, F_{12}, F_{11}. In conseguenza, se a riguardo di questo determinante conveniamo d'indicare con φ_{rs} il complemento algebrico dell'elemento F_{rs}, si avrà

$$F_3^3 r = \varphi_{22} \quad , \quad F_3^3 s = \varphi_{12} \quad , \quad F_3^3 t = \varphi_{11} \; ;$$

e sarà di seguito

$$\rho_1 \rho_2 = F_3^2 \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2}{\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2} .$$

Si osservi attualmente che il denominatore di questa formola è un determinante minore principale di 2° grado del reciproco di Δ, ed è perciò uguale al complemento del suo omologo nel primitivo, moltiplicato per lo stesso primitivo (pag. 67, n° 85); vale a dire si ha

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & F_3 \\ F_3 & F_{33} \end{vmatrix} \Delta = -F_3^2 \Delta \; ;$$

e quindi il prodotto de' raggi di curvatura risulta espresso da

$$\rho_1 \rho_2 = - \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2}{\Delta} .$$

Ma, come nel caso precedente, anche questa espressione può trasformarsi in altra più semplice mediante la considerazione delle funzioni omogenee. Sia

$$u\,(x, y, z, t) = 0$$

l'equazione, in cui si cangia l'equazione $F(x, y, z) = 0$, resa omogenea con la introduzione di un'altra variabile t, che riguarderemo come *quarta* nella serie delle variabili x, y, z, t, ad oggetto di applicare il solito sistema di notazione alle derivate parziali della funzione u. Allora, supposto che questa funzione sia di grado m, avremo identicamente (pag. 221, n° 5)

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{t^2}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} \; ;$$

dove il fattore determinante del 2° membro è l'Hessiano di u. Ponendo in questa relazione $t=1$, il primo membro diviene identico a Δ; e quindi si avrà

$$\Delta=\frac{v}{(m-1)^2};$$

a patto che nell'Hessiano v si ponga ugualmente $t=1$; ed in conseguenza l'espressione del prodotto de'raggi principali di curvatura verrà tradotta in

$$\rho_1\rho_2=-(m-1)^2\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^2}{v}.$$

Se si osserva che le due funzioni Δ e v sono rispettivamente di gradi $4m-6$ e $4(m-2)$, si riconoscerà che la nuova formola è più semplice della prima.

17. I punti di una linea piana ne'quali il raggio di curvatura è infinito sono, in generale, punti d'inflessione. Così a riguardo della linea $F=0$, ovvero $u=0$, sono punti d'inflessione quelli pei quali le coordinate hanno tali valori da render nullo il denominatore della formola che esprime il valore di ρ, e per conseguenza o Δ, o v. Ne risulta che i punti d'inflessione della linea, che si considera, sono quelli ne'quali essa è incontrata dalla linea rappresentata dall'una o dall'altra equazione

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}=0\quad,\quad v=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Siccome la funzione F è di grado m e Δ è di grado $3m-4$, parrebbe che la linea $F=0$ potesse avere un numero di punti d'inflessione espresso da $m(3m-4)$; ma nel fatto questo numero è minore, dappoichè paragonando invece le funzioni u e v, che sono rispettivamente di gradi m e $3(m-2)$, risulta che il numero dei punti d'inflessione della linea $u=0$, la quale non è diversa da $F=0$, non è maggiore di $3m(m-2)$; e si ha così il bel teorema dovuto a Plücker, che:

Una linea di grado m *ha in generale* 3m(m—2) *punti d'inflessione.*

Merita di essere distinto il caso in cui la funzione v fosse identicamente nulla. Allora sarebbe nulla la curvatura in ogni punto della linea; e siccome questa proprietà non appartiene che alla retta, dovrebbe conchiudersi che la linea, di cui trattasi, è in sostanza un sistema di rette. Ma, così è in fatti; dappoichè la funzione v è l'Hessiano di u, e l'annullamento identico di v annunzia che la funzione omogenea u di tre variabili può, mediante una trasformazione lineare, ridursi ad una funzione omogenea di due variabili (pag. 225, n° 8); ed allora l' equazione $u=0$, anzichè una linea curva, esprime in realtà un sistema di rette, che passano per uno stesso punto; e si ha così il teorema dovuto ad Hesse, che:

Se è nullo l'Hessiano di una funzione omogenea u *di grado* m *a tre variabili, l'equazione* u=0 *esprimerà un fascio di* m *rette.*

Analoghe conchiusioni si hanno per le superficie dal considerare la seconda delle espressioni date nel numero precedente pel prodotto de' due raggi principali di curvatura, e si ottengono in tal guisa i due seguenti teoremi:

Se u *dinota una funzione omogenea di grado* m *a quattro variabili, e sia* v *l'Hessiano di* u, *la linea d'inflessione della superficie* u=0 *risulterà dalla sua intersezione con la superficie* v=0, *ch'è di grado* 4m(m—2).

E quando l'Hessiano v *è identicamente nullo, l'equazione* u=0 *esprimerà una superficie conica.*

FINE