NAVIER

MECANICA

RIASSUNTO DELLE LEZIONI

DATE

ALLA SCUOLA DI PONTI E STRADE

SU

L'APPLICAZIONE DELLA MECCANICA

ALLO STABILIMENTO DELLE COSTRUZIONI

E DELLE MACCHINE.

PRIMA PARTE,

CONTENENTE LE LEZIONI SU LA RESISTENZA DE' MATERIALI, E SU LO STABILIMENTO DELLE COSTRUZIONI DI TERRA, DI FABBRICA E DI LEGNAME,

DI M. NAVIER,

MEMBRO DELL' ISTITUTO (ACCADEMIA DELLE SCIENZE), PROFESSORE DI ANALISI E DI MECCANICA ALLA SCUOLA POLITECNICA, INGEGNERE IN CAPO DI PONTI E STRADE.

TRADOTTA SULLA SECONDA EDIZIONE,

CORREDATA DI NOTE ED AGGIUNTE, E DI UN' APPENDICE SU I PONTI SOSPESI

DA C. D'ANDREA,

Ingegnere del Corpo di Acque e Strade, Professore nella Scuola di Applicazione dello stesso Corpo, e Professore di Algebra superiore nel R. Collegio Militare.

NAPOLI,

DALLA STAMPERIA E CARTIERA DEL FIBRENO

1836.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR MARCHESE

D. GIOVANNI D'ANDREA

SEGRETARIO DI STATO DI S. M., MINISTRO DELLE FINANZE E DEGLI AFFARI ECCLESIASTICI; GRAN CROCE DEGLI ORDINI COSTANTINIANO, DI S. GIORGIO, E DI FRANCESCO I.; GRAN CORDONE DEGLI ORDINI DI CARLO III. DI SPAGNA, DI S. GIUSEPPE DI TOSCANA, E DI S. GREGORIO MAGNO; GRAN CROCE DELLA SACRA RELIGIONE GEROSOLOMITANA; DECORATO DELLA GRAN MEDAGLIA D'ORO D'ILLIBATA FEDELTA' DA S. A. I. E R. IL DUCA DI MODENA, REGIO COMMESSARIO PLENIPOTENZIARIO PER L'ESECUZIONE DEL CONCORDATO CONCHIUSO CON LA S. SEDE; SOCIO DELLE PIU' COSPICUE ACCADEMIE NAZIONALI E STRANIERE, ec. ec. ec.

Eccellenza

Un lavoro fatto per utile della Scuola di Ponti e Strade non poteva esser diretto che a V. E., sotto la cui dipendenza la medesima riceve lustro ed incremento. La protezione che accorda alle scienze, della quale molti de' miei colleghi hanno già risentito i benefici effetti, è fra tutti i pregi che adornano l'E. V., quello che la rende più degna del sublime grado di cui è rivestita. Nè ad incoraggiar le intraprese scientifiche il solo mezzo adopera di farsene sostegno, ma quanti

*

ne crede all' uopo efficaci sono del pari adottati. Ne sia prova la benignità usata verso di me nell' accettare col gradimento il più lusinghiero quest' omaggio che ho osato presentarle. Piena della più alta ammirazione per tale virtù, ho l' onore di dirmi

Di V. E.

Umil.° Devot.° Oblig.° Servo

Carlo d' Andrea.

IL TRADUTTORE.

Se rapido è stato il progresso con cui l' analisi matematica è pervenuta all' attuale grado di sublimità, difficile e lenta n' è stata l'applicazione alla spiegazione de'fenomeni naturali. Sembra a prima vista che lo studio di questi fenomeni avesse dovuto precedere e far nascere l'analisi: ma non così; chè le ricerche sopra alcune curve riputate da prima come esercitazioni geometriche, e diverse quistioni di analisi pura di cui o non si prevedeva o si stimava limitatissimo l'uso, han servito poi a dar ragione de' più grandi atti della natura.

Galileo dopo aver abbattuto il colosso delle dottrine scolastiche fu il primo a rivolger l' attenzione a' fenomeni dipendenti dalle intime proprietà della materia; e, fondatore della teoria della resistenza de'solidi, gettò luce immensa sul sentiero che seguir doveano i filosofi de' secoli venturi.

Si vide però ne'successori singolarità sorprendente; giacchè mentre Newton sottometteva all'impero della geometria il moto de' corpi celesti e le leggi dell'attrazione universale, niuno si rivolgeva ai corpi terrestri per determinar quelle dell' attrazione e repulsione molecolare. La scienza dunque della resistenza de'solidi fece pochi passi, ed alla fine del passato secolo era ancora bambina. La Meccanica razionale considerando ne' corpi la impenetrabilità e l' inerzia, o per dir meglio riguardando i corpi o perfettamente rigidi e incompressibili, o

perfettamente flessibili e inestensibili, non somministra i mezzi di determinare le dimensioni delle spranghe o de' fili che legano i diversi punti di un sistema, e in molti casi lascia indeterminate le tensioni sostenute da questi corpi, o le pressioni esercitate su' punti fissi. Ma in natura tutto è determinato e si esegue con leggi immutabili; e di fatto l' indeterminazione sparisce quando si considerano i corpi quali essi sono.

Posta questa condizione di cose, coloro che si dedicavano all' arte delle costruzioni, non potendo nelle applicazioni giovarsi delle teorie meccaniche, nè potendo trar profitto dalle poche ricerche sparse qua e là in opere, diverse per soggetto e per linguaggio, erano obbligati a determinare le dimensioni de' massi nelle costruzioni di fabbrica, o de' pezzi nelle costruzioni di legname e nelle macchine, col paragone ad altre opere esistenti; e in casi totalmente nuovi sola forza d'ingegno poteva quasi per istinto suggerirle.

Fu prima l'Italia a possedere nella Meccanica ed Idraulica del chiarissimo professor di Bologna Giuseppe Venturoli un libro elementare ove si trovano raccolte le diverse applicazioni delle teorie meccaniche ai moltiplici oggetti che costituiscono la scienza dell' ingegnere; ed è questa la prima Opera nella quale siensi ridotte ad istituzione, la statica delle volte, le conoscenze sull' attrito e sulle altre forze restistenti, le considerazioni del moto e dello stato prossimo al moto nelle macchine, le nozioni sull' urto e sulla resistenza de' fluidi, la scienza vasta e difficile de' fiumi, la teorica delle macchine idrauliche.

Ma già queste scienze riceveano notabile perfezionamento, e tutto si preparava per dare alla teoria dell' equilibrio e del moto de' corpi elastici il più sorprendente sviluppo, quando nel 1826 comparve in Francia altra opera elementare dell' egregio Ingegnere di Ponti e Strade M. Navier, ove particolarmente trattandosi della resistenza de' materiali, e dello stabilimento delle costruzioni di terra, di fabbrica, di legname o di ferro, si volgeano

a profitto dell' istruzione le ulteriori ricerche di questo genere di cui egli principalmente ed altri ancora si erano da ultimo occupati. La quale Opera, riconosciutane l' importanza, fu nel 1829 stabilita per uno de' libri che servir dovesse all' istruzione degli Alunni della Scuola di Ponti e Strade di questo Regno, ed io prescelto all' onore d' insegnarla.

Imperiose circostanze esigendo che se ne intraprendesse la versione italiana, ho creduto poterla render più utile corredandola di note ed aggiunte.

Del merito dell' Opera non mi trattengo a parlare, credendola tanto diffusa fra la classe degl' ingegneri, da non aver bisogno di esporne le particolarità. D' altronde il titolo ne rivela l' importanza, il nome dell' autore già chiaro per altre opere dello stesso genere è argomento al merito di questa, e l' avvertimento posto in fronte alla seconda edizione ne fa conoscere quale incremento abbia egli dato a questa parte della meccanica applicata. È debito però mettere in vista un singolarissimo pregio che ella racchiude, il quale consiste nell' aver saputo render la difficile teoria della resistenza de' solidi applicabile ai bisogni dell' arte di costruire, riducendo le complicatissime formole cui la teoria generale avrebbe somministrate, ad espressioni di un uso facile nella pratica.

Mi resta dunque a dir poche cose intorno al mio tenue lavoro, esponendo sotto quale aspetto potrebbe esser creduto di qualche vantaggio.

E in primo luogo dirò di quest' opera che quantunque colla seconda edizione sia stata emendata di molti errori o inesattezze incorse nella prima, pure non lascia di esserne assolutamente depurata. Secondariamente, essendoci altro libro dello stesso autore in cui la teorica de' ponti sospesi è con eccellenza trattata, non contiene alcun articolo relativo a questa specie di costruzioni, sicchè a buona ragione può riputarsi mancante di una parte divenuta a nostri dì essenzialissima. In terzo luogo parecchi articoli meritavano maggiore sviluppo; ed io porto opi-

nione che valga meglio non toccare alcune teorie che trattarle leggiermente o incompiutamente. Cito ad esempio la teoria dei solidi di egual resistenza.

A queste mancanze ho supplito: 1.° colle note destinate a vie meglio sviluppare le teorie fondamentali, a far avvertire qualche inesattezza, a dimostrare qualche proposizione solamente enunciata, e a rischiarare quelle difficoltà che solo l'uso dell'insegnamento può rivelare; 2.° colle addizioni, apposte per estendere alcune teorie trattate con troppa ristrettezza; 3.° con un'appendice su' ponti sospesi, estratta dall'opera che ha per titolo *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, ed accomodata in modo da concatenarsi colle dottrine precedentemente stabilite e formar così un'opera unica. E se la correzione in un libro di questo genere deve pure valutarsi per pregio, dirò che in questo si sono corretti moltissimi errori incorsi nelle formole dell'edizione francese, e di molti non avvertiti durante la stampa si sono riportate in fine le correzioni.

Si è procurato nondimeno di secondare l'intenzione dell'autore col non estendersi al di là de' limiti fra' quali egli ha voluto mantenersi. La mira principale è stata render quest'opera più utile, e metterla a portata di esser meglio intesa. Attendendo che i lettori decidano se siasi colpito al segno, dirò che ho messo in conseguir quest'intento tutta la cura, che la sollecitudine richiesta per la pubblicazione, e le presenti mie occupazioni mi hanno permesso.

N. B. Le note che hanno per chiamata una lettera sono dell'autore; quelle che hanno il segno * sono del traduttore.

PREFAZIONE

Si debbono a Galileo i primi tentativi fatti per sottoporre al calcolo la resistenza de' corpi agli sforzi che tendono a romperli. Giacomo Bernoulli, Leibnitz, Euler, la Grange hanno trattato diverse quistioni di questo genere. Sono state fatte sulla forza dei materiali moltissime sperienze, fra le quali meritano distinzione quelle di Buffon. Coulomb ha dato i principî dell' equilibrio delle volte e de' muri esposti alla spinta delle terre.

Queste ricerche sono state finora più utili al progresso delle matematiche che al perfezionamento dell'arte delle costruzioni. La maggior parte de' costruttori determinano le dimensioni delle parti degli edifizi o delle macchine secondo gli usi stabiliti e l' esempio delle opere esistenti, di rado rendendosi conto degli sforzi che queste parti sostengono e delle resistenze che oppongono. Ciò presenta pochi inconvenienti quando le opere che si eseguono rassomigliano a quelle fatte in tutti i tempi, e non si scostano in di-

mensioni e in pesi da' limiti consueti. Ma non avviene così, quando le circostanze obbligano ad uscir da questi limiti, o quando si tratta di edifizi di un genere nuovo e su' quali la sperienza nulla ne insegna.

L' oggetto di questo Riassunto è di esporre le condizioni dello stabilimento delle costruzioni che gl' ingegneri dirigono, e di metterli a portata di verificare il grado di resistenza di ciascuna loro parte. Ci siamo occupati principalmente delle costruzioni di legname o di ferro, sulle quali si trovano poche particolarità nelle opere destinate all' istruzione, e crediamo dover quì indicare succintamente i principî secondo i quali sono state trattate le più importanti quistioni.

Noi consideriamo ne' materiali due qualità principali, la forza di elasticità, e la resistenza alla rottura. Intendesi per *forza di elasticità*, la resistenza che il corpo oppone quando si vuole allungarlo o accorciarlo di una picciolissima quantità. Il rapporto tra 'l peso che allunga o comprime un corpo prismatico la cui sezione trasversale è uguale all' unità superficiale, e la frazione che esprime la variazione della lunghezza naturale del corpo cagionata da questo peso, è la misura della forza di elasticità: è la quantità chiamata E nel n° 77. Per *resistenza alla*

rottura, s' intende lo sforzo che bisogna fare per separare le parti del corpo per mezzo della stensione; o per schiacciarle per mezzo della compressione. Il peso che opera l'uno o l'altro effetto, agendo sopra una sezione trasversale eguale all'unità di superficie è la misura di questa resistenza: è la quantità rappresentata da R nel n° 113.

La forza di elasticità e la resistenza alla rottura dovendo esser determinate dalla sperienza per le diverse sostanze, ci siamo sforzati di riunire tutt' i risultamenti di questo genere che sembravano esser di qualche utilità.

La conoscenza della forza di elasticità dà i mezzi di calcolare la quantità di cui un pezzo può comprimersi, allungarsi, o piegare sotto una data carica. La conoscenza della resistenza alla rottura permette di determinare il limite de' pesi che un pezzo può sostenere. Ma tutto questo non basta per lo stabilimento delle costruzioni, giacchè si tratta di conoscere non il peso che rompe un pezzo, ma quello di cui si può caricarlo senza che l' alterazione che questo pezzo riceve, aumenti col tempo. La ricerca di quest' ultimo limite che è della più grande importanza, può essere rare volte l'oggetto di sperienze dirette; ma possiamo con vantaggio servirci degli esempi che le costruzioni esistenti ne forniscono.

Osserviamo, che le parti de' pezzi, cedendo agli sforzi cui sono esposte, si accorciano o si allungano, e prendiamo la proporzione di questa variazione di lunghezza per la misura del loro grado di alterazione. Conoscendo dunque qual è nelle costruzioni di un solidità comprovata dall' esperienza, la quantità di allungamento o accorciamento delle fibre che provano le più grandi variazioni di lunghezza, riguarderemo queste variazioni come limiti che si possono toccare, ma non oltrepassare senza pericolo. A queste variazioni di lunghezza corrispondono degli sforzi che sarebbero capaci di produrle, agendo direttamente per tensione o per compressione. Questi sforzi sono riguardati come i più grandi che le fibre possono sostenere; e il pezzo, per lo stabilimento di una nuova costruzione, è stimato prossimo a rompersi quando essi hanno luogo. Per la qual cosa attribuendo alla quantità R un valore molto minore R′ (v. il n° 181), le formole relative al caso della rottura possono servire a calcolare le dimensioni da darsi a' pezzi nelle costruzioni.

Per dare un esempio di queste valutazioni, si dirà che la forza di elasticità del ferro di fucina è $E = 20\,000\,000\,000$ chil.; cioè che questo peso, agendo sopra una barra di un metro quadrato di sezione, l' allungherebbe o accorcierebbe

di una quantità eguale alla sua lunghezza primitiva, supponendo le variazioni di lunghezza proporzionali a' pesi che le producono. La resistenza della stessa sostanza alla rottura è R = 40 000 000 chil., perchè questo peso romperebbe una barra simile tirandola secondo la sua lunghezza. In fine, si ammette che il ferro sarebbe alterato se le fibre fossero allungate o accorciate di più di 0,0005 della loro lunghezza naturale; e come questa variazione di lunghezza serebbe prodotta da un peso di 10 000 000 chil., agendo sulla stessa barra, si attribuisce quest' ultimo valore alla costante R', e in una costruzione si riguarderebbe come troppo caricata una barra di ferro da fucina, se le fibre le più stirate o le più compresse sostenessero uno sforzo maggiore di 10 000 000 chil. sopra un metro quadrato (v. i n^{i} 182 e 183).

Ammesse queste nozioni, tutto si riduce a ricercare in ogni costruzione, l' effetto degli sforzi a' quali è esposta per allungare o accorciare le parti de' pezzi, sia da un' azione diretta secondo la lunghezza, sia da un' azione obbliqua o trasversale che obbliga il pezzo a piegare, e per conseguenza allunga le fibre poste alla faccia convessa e accorcia quelle poste alla faccia concava. I risultamenti dati finora sull' equilibrio de' solidi elastici non si applicavano che a un piccolissimo

numero di casi. Ma per mezzo delle nuove quistioni risolute, si può oggi, nelle costruzioni di legname e di ferro che gl' ingegneri dirigono, determinare il grado di resistenza de' pezzi principali colla stessa facilità ed esattezza come per le catene in un ponte sospeso.

Il principale elemento de' calcoli è la valutazione de' limiti degli sforzi che si possono far sostenere alle parti de' diversi materiali. Questa valutazione, stabilita dietro l' esperienza delle costruzioni esistenti, non può presentare un' esattezza rigorosa. Potranno dunque esservi delle differenze ne' numeri che saranno adottati da diverse persone. Il tempo e la riunione di un gran numero di osservazioni possono soli fissar le idee su questo soggetto.

In altre opere erano state esposte le regole relative all' equilibrio de' muri di rivestimento delle terre o delle volte; ma era necessario di aver riguardo, come qui si è fatto, alla possibilità delle disgiunzioni ne' muri o ne' piediritti, che si consideravano ordinariamente come corpi di un sol pezzo.

Gl' ingegneri, preparando i progetti de' lavori che dirigono, seguono ordinariamente un cammino analogo a quello che nelle scienze si chiama metodo di falsa posizione. Cioè, che dopo aver concepito e descritto col disegno la dispo-

sizione di un' opera, esaminano se hanno soddisfatto a tutte le condizioni necessarie, e rettificano il loro progetto fino a che vi siano pervenuti. Fra queste condizioni, una delle più essenziali è l' economia; la solidità e la durata non sono meno importanti. Per mezzo delle regole esposte in questi Riassunti, si potranno in ogni caso conoscere i limiti che non si potrebbero oltrepassare senza esporre l' opera a mancar di solidità. Non bisognerebbe d' altronde conchiudere, che si deve sempre, a riguardo dell' economia, situarci troppo vicino a questi limiti. Le differenze che si trovano nelle qualità de' materiali e molti altri motivi vi si oppongono; l'arte sta principalmente nel giudicare fino a qual punto è permesso di approssimarvisi.

AVVERTIMENTO

SULLA SECONDA EDIZIONE.

La prima edizione di questo Riassunto, comparsa nel 1826, essendo da lungo tempo esaurita, si è dovuto ristamparla, e si è fatto ogni sforzo per renderla meno imperfetta.

Noi abbiamo rapportato i risultamenti delle sperienze sulla resistenza de' materiali pubblicate dopo il 1826, e molti risultamenti inediti comunicatemi da M. Minard, ingegnere in capo di Ponti e Strade.

Si sono rettificate le inesattezze o errori che erano stati riconosciuti, molti de' quali ci sono stati indicati da M. Coriolis, e si è resa compiuta la soluzione di alcune quistioni.

Si è evitato tuttavia di aumentar di molto l' estensione dell' opera (ciò che sarebbe stato facile senza uscir dal soggetto). È sembrato conveniente limitarsi alle quistioni le più importanti, e la cui soluzione poteva servir d' esempio ne' nuovi casi che verrebbero a presentarsi. Come ci è d' altra parte uno scritto nel quale è minutamente esposta la teoria meccanica de' ponti

a catene di ferro, sarebbe stato superfluo l' occuparsene in questo libro.

Abbiamo indicati gli autori de' risultamenti i più notevoli dati in questi ultimi tempi. Coloro che vorranno conoscer minutamente l' istoria de' lavori di cui questa parte della meccanica è stata il soggetto, potranno ricorrere a diverse opere, fra le quali citeremo principalmente il *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, di M. Girard, membro dell' Istituto; la raccolta degli articoli di Robison, pubblicati dopo la sua morte sotto il titolo *A system of mechanical philosophy*; l' opera inglese di M. Barlow intitolata, *An essay on the strength and stress of timber*; il *Traité de la poussée des terres* di M. Mayniel; le Memorie sulla spinta delle terre e sulle volte date da' Sig.^{i} Français e Audoy nel n° 4 del *Mémorial du génie*. Si potrà giudicare, consultando queste opere, del punto al quale queste ricerche erano state portate, e degli sforzi fatti per estenderle e perfezionarle.

Si riconoscerà principalmente che le condizioni dell' equilibrio di un masso di terra che formano il soggetto dell' articolo I della II sezione non erano state date, e che lo stesso è de' risultamenti presentati nell' articolo III della stessa sezione, e delle nozioni relative all' uso delle ca-

tene o delle cinture di ferro destinate a consolidare le costruzioni di fabbrica.

Quanto alle quistioni relative alla resistenza de' corpi solidi e allo stabilimento delle costruzioni di legname, non si erano trattati che i casi più semplici dell'equilibrio di un pezzo dritto, cioè le quistioni elementari esposte nella prima sezione di quest' opera e il primo de' casi di equilibrio di un pezzo caricato verticalmente che formano il soggetto dell' articolo II della IV sezione. Tutte le altre quistioni relative all' equilibrio di un pezzo dritto o curvo, caricato orizzontalmente, verticalmente o in una direzione obliqua, sono state considerate e risolute la prima volta dall' autore. Dicasi lo stesso delle quistioni relative alla flessione e alla rottura de' piani. Le applicazioni che sono state fatte di queste diverse soluzioni allo stabilimento delle principali costruzioni di legname, sembrano meritare l' attenzione degl' ingegneri.

INDICE DELLE MATERIE.

SEZIONE PRIMA.

Pag.

Della resistenza de' corpi solidi 1

ARTICOLO I. Della resistenza de' corpi ad uno sforzo che tende a produrre lo schiacciamento 3
Resistenza allo schiacciamento della pietra e del mattone. *id.*
del gesso 9
della malta ..... *id.*
del legname 10
del ferro da fucina 11
del ferro fuso 12
di diversi metalli 13

ARTICOLO II. Della resistenza de' corpi ad uno sforzo diretto nel senso della lunghezza e che tende a produrre l'allungamento e la rottura 14
Resistenza allo stendimento, della pietra e del mattone .. 15
del gesso ..... *id.*
delle malte 16
del legname 18
del ferro da fucina 21
della lamiera 33
del filo di ferro 34
del ferro fuso 37
del filo di rame 39
di diversi metalli 40

*

Pag.

del vetro..... 43
del cordame..... *id.*

Articolo III. Della resistenza di un corpo prismatico alla flessione prodotta da uno sforzo diretto perpendicolarmente alla sua lunghezza..... 46

Nota — Sul modo di ricavare le equazioni di equilibrio di un solido incastrato in una estremità e caricato nell' altra..... 49

Nota — Osservazioni sullo stesso argomento..... 50

Nota — Osservazioni intorno al sito dell' asse di equilibrio..... 52

Nota — Ricerca del momento di elasticità nel caso che la resistenza alla stensione non sia eguale alla resistenza alla compressione.. 54

Resistenza alla flessione della pietra..... 62
del legname..... *id.*
del ferro di fucina..... 68
dell' acciajo..... 72
del ferro fuso..... 74

Articolo IV. Della resistenza di un solido prismatico alla rottura prodotta da uno sforzo diretto perpendicolarmente alla sua lunghezza..... 77

Nota — Osservazioni sulla resistenza alla rottura de' tubi..... 81

Nota — Determinazione del momento di rottura nel caso che le resistenze alla compressione e allo stendimento non fossero eguali. 82

Nota — Osservazione sul punto di rottura..... 83

Nota — Equazione che dà la relazione tra le dimensioni di un solido appoggiato alle sue estremità e il peso di cui si può caricarlo nel punto di mezzo..... 86

Resistenza alla rottura, della pietra e del mattone..... 88
della malta..... 89
del legname..... 90
del ferro fuso..... 99

Nozioni sulle teorie della resistenza alla rottura proposte da Galileo, e da Mariotte e Leibnizio..... 104

Osservazione sulla teoria della resistenza alla rottura 105

Nota — Osservazioni intorno alla posizione dell' asse di equilibrio ne' diversi istanti della flessione..... 106

Nota — Si dimostra che le resistenze delle basi di figure simili conservano sempre lo stesso rapporto qualunque sia la situazione dell' asse di equilibrio..... 107

Pag.

Della rottura di un solido prismatico di una piccola lunghezza..... 108

Nota — Sullo stesso argomento..... 112

Nota — Osservazione sull' espressione cui è proporzionale il peso che può rompere un solido..... 115

Articolo V. Della resistenza di un corpo prismatico alla torsione..... 116

Nota — Sull' allontanamento per effetto della torsione di due molecole poste sulla stessa retta parallela all' asse del solido in due sezioni consecutive..... *id.*

Nota — Osservazione sulla formola che dà l' espressione della resistenza alla torsione..... 118

Resistenze alla torsione del ferro di fucina..... 121

di diverse sostanze..... 123

Articolo VI. Della resistenza di un corpo prismatico alla rottura cagionata dalla torsione..... 125

Resistenza del ferro fuso alla rottura cagionata dalla torsione..... 128

Articolo VII. De' più grandi sforzi a' quali possono esser esposti con sicurezza i materiali impiegati nelle costruzioni..... 131

Della pietra esposta allo schiacciamento..... 132

Del legname esposto allo schiacciamento e alla stensione. 134

Del legname esposto alla flessione trasversale..... 135

Del ferro di fucina esposto allo stendimento..... 136

Del ferro di fucina esposto alla flessione trasversale..... 137

Del ferro fuso esposto allo schiacciamento e alla stensione. 138

Del ferro fuso esposto alla flessione trasversale..... 139

Addizione — Ricerca del momento di flessione per diverse sezioni..... *id.*

SEZIONE SECONDA.

Pag.

Dell' equilibrio e della resistenza de' massi formati di materie aderenti. — Dello stabilimento de' muri di rivestimento delle terre 141

ARTICOLO I. Dell'equilibrio di un masso tagliato lateralmente. *id.*
ARTICOLO II. Dell'equilibrio di un masso terminato da due faccie laterali, la superficie superiore del quale è caricata di un peso 145
ARTICOLO III. Dell'equilibrio di un masso esposto a uno sforzo esercitato contro una faccia laterale 148
Caso in cui la rottura del masso si opera per scorrimento. *id.*
NOTA — Esame di un altro caso dell'esposta teoria 155
Caso in cui la rottura del masso si opera per rovesciamento 157
NOTA — Si fa osservare il caso più sfavorevole della linea di rottura ..... *id.*
Delle pressioni esercitate sulle parti del masso e che tendono a cagionare lo schiacciamento 160
Della figura di un masso di egual resistenza alla rottura per rovesciamento 161
Sperienza sulla resistenza de' massi di fabbrica alla rottura per rovesciamento 163
ARTICOLO IV. Dello stabilimento de' muri di rivestimento che resistono alla spinta delle terre e delle acque ..... *id.*
Pressione esercitata dalle terre contro una parete piana... 164
Pressione esercitata contro una parete piana, quando la superficie superiore delle terre è sopraccaricata 169
Equilibrio di un muro che sostiene la spinta delle terre.. 170
Equilibrio di un muro sostenente la spinta delle terre supponendolo per intiero rovesciato sul lato esteriore della base 174
Equilibrio di un masso che sostiene la spinta delle terre, supponendolo poter scorrere sulla sua fondazione 176

Pag.

ARTICOLO V. Dello stabilimento delle fondazioni, quando i muri son sostenuti da terreni compressibili 178
ARTICOLO VI. Qualità diversa delle terre. Valutazione della gravità specifica, dell' attrito e della coesione..... 180
Delle terre smosse e ridotte in minute parti non coerenti.. 181
Delle terre nello stato naturale..... 189
Degli effetti dell' acqua che penetra nelle terre 190
De' casi in cui la natura del terreno varia nell' altezza del rivestimento..... 191
Dell' attrito e della coesione nelle fabbriche..... *id.*

SEZIONE TERZA.

Dell' equilibrio e dello stabilimento delle volte..... 195

ARTICOLO I. Condizioni generali dell'equilibrio di un' unione di cunei..... 196
NOTA — Osservazioni sulle condizioni relative al moto di rotazione..... 199
NOTA — Si dimostra che la risultante delle forze dev'esser perpendicolare al letto su cui è appoggiata una porzione di volta... 201
NOTA — Si dimostra che la risultante medesima deve passare tra i punti estremi della sezione — Si ricercano le condizioni dell' equilibrio nel caso in cui si tien conto dell' attrito..... *id.*
Applicazione a una piattabanda..... 203
NOTA — Sul modo di determinare le relazioni fra le dimensioni della volta e l' angolo de' pulvinari..... 205
NOTA — Osservazioni pel caso in cui la grossezza della piattabanda è piccolissima rispetto alla sua tratta..... 208
Condizioni dell' equilibrio di un sistema di cunei, supponendo tutti i tagli perpendicolari alla curva d' intradosso. 209
NOTA — Osservazioni sulle condizioni di equilibrio..... 211
NOTA — Si stabiliscono le equazioni di equilibrio tenendo conto dell' attrito..... *id.*
Caso in cui le forze applicate ai cunei son da per tutto normali alla curva d' intradosso..... 212
NOTA — Si dimostra che quando si considera l' attrito, non ha più luogo la medesima relazione fra le forze normali e le pressioni. 214

Pag.

Caso in cui le forze applicate alla volta si riducono al peso de' cunei 215

Nota — Si stabilisce la stessa teoria tenendo conto dell' attrito.. 216

Articolo II. Principali sperienze ed osservazioni relative all' equilibrio delle volte..... 218

Articolo III. Dello stabilimento delle volte..... 225

Dell' equilibrio delle volte a botte..... 226

Delle pressioni esercitate contro i piani de' letti nelle volte cilindriche..... 235

Dell' uso delle catene di ferro per consolidare le volte a botte..... 242

Dell' equilibrio delle cupole..... 246

Dell' uso delle cinture di ferro per consolidare le cupole. 249

Dell' equilibrio delle volte a schifo e delle volte a crociera..... 250

Articolo IV. De' calcoli relativi allo stabilimento delle volte. 252

SEZIONE QUARTA.

Dell' equilibrio e dello stabilimento delle costruzioni di legname..... 255

Articolo I. Della resistenza di un pezzo prismatico posato orizzontalmente , caricato e sostenuto di diverse maniere. 256

Nota — Sulla ricerca della sezione di rottura..... 258

Equilibrio di un pezzo posato sopra due appoggi, e caricato in un punto qualunque dell' intervallo degli appoggi..... 259

Nota — Sulla ricerca delle condizioni di equilibrio relative alla rottura , quando si tien conto della curvatura del solido..... 261

Equilibrio di un pezzo posato sopra due appoggi e caricato sopra una porzione della sua lunghezza..... 262

Nota — Sulla determinazione del punto di rottura..... 265

Nota — Si dimostra che non sempre il punto di rottura si trova nella verticale che passa pel centro di gravità de' pesi che agiscono sul solido..... 266

Pag.

Equilibrio di un pezzo caricato di un peso, di cui una delle estremità è incastrata e l'altra è posata sopra un appoggio. 267

Equilibrio di un pezzo incastrato nelle due estremità e caricato di un peso..... 272

Nota — Si trovano le equazioni delle curve delle diverse parti del pezzo..... 273

Nota — Osservazioni sulle curve del pezzo quando il peso è posto nel punto di mezzo..... 274

Nota — Osservazioni sul massimo valore del differenziale di secondo ordine..... 275

Equilibrio di un pezzo sostenuto da tre o da un maggior numero di appoggi..... 276

Osservazioni sull' uso che deve farsi de' risultamenti precedenti nelle applicazioni..... 279

Addizione — Sui solidi incastrati nelle due estremità..... 280

Articolo II. Dell' equilibrio di un pezzo prismatico posto verticalmente e caricato sull' estremità superiore..... 286

Equilibrio di un pezzo caricato verticalmente, allorchè l' estremità inferiore è incastrata e la superiore è libera. 289

Equilibrio di un pezzo caricato verticalmente, allorchè l'estremità inferiore è incastrata e la superiore mantenuta in una stessa verticale..... 291

Sperienza sulla resistenza de' pezzi di legname caricati verticalmente..... 292

Sperienza sulla resistenza de' pezzi di ferro di fucina caricati verticalmente..... 295

Sperienze sulla resistenza de' pezzi di ferro fuso premuti nel senso della lunghezza..... 298

Osservazioni sull' uso che deve farsi de' risultamenti precedenti nelle applicazioni..... *id.*

Articolo III. Della resistenza di un pezzo prismatico caricato verticalmente, quando la direzione del peso è distante dall' asse del pezzo..... 302

Nota — Sulle diverse curve che può prender il pezzo..... 303

Articolo IV. Della resistenza di un pezzo prismatico caricato obliquamente..... 308

Pag.

Nota — Sulle diverse curve che può prender il pezzo..... 310
Equilibrio di un pezzo inclinato caricato tra le estremità. 317
Articolo V. Della resistenza di un pezzo prismatico piegato, posto orizzontalmente tra due appoggi e caricato nel mezzo..... 319
Nota — Sul modo di trovare le diverse curve che può prendere il pezzo..... 321
Addizione — Equilibrio di un pezzo posto verticalmente e caricato da un peso nell' estremità superiore, tenendosi conto del peso del solido..... 323
Articolo VI. Della resistenza de' pezzi prismatici di cui l'asse è curvo..... 326
De' pezzi la cui figura è quella della curva di equilibrio. *id.*
Nota — Data la curva del pezzo, trovar la legge delle forze affinchè il pezzo riesca equilibrato..... 334
Della flessione de' pezzi curvi..... 335
Applicazione al caso in cui la figura del pezzo curvo è una porzione di parabola..... 339
Applicazione al caso in cui la figura del pezzo curvo è un arco di cerchio..... 342
Della flessione di un pezzo curvo di cui tutti i punti sostengono de' pesi..... 345
Applicazione al caso in cui la carica è uniformemente distribuita, e la figura del pezzo curvo è una porzione di parabola..... 346
Nota — Dilucidazione sulla ricerca del punto cui corrisponde la massima pressione..... 349
Applicazione al caso in cui la carica è uniformemente distribuita e la figura del pezzo curvo è un arco di cerchio..... *id.*
Uso de' risultamenti precedenti nelle applicazioni..... 353
Dell' effetto delle pressioni o delle tensioni esercitate nel senso della lunghezza de' pezzi ricurvi, per accorciarli o allungarli, e de' cangiamenti di figura che ne risultano. 358
Sperienze sulla resistenza de' pezzi curvi..... 362
Articolo VII. De' pezzi di diverse figure impiegati nelle co-

Pag.

struzioni: De' pezzi formati di molte parti connesse fra loro..... 364
Della figura della sezione trasversale..... 365
Della figura della sezione longitudinale..... 370
Addizione — Sopra i solidi di egual resistenza..... 376
De' pezzi formati di molte parti connesse fra loro..... 386
Sperienza sulla resistenza de' pezzi formati di molte parti connesse fra loro..... 391
Delle armature destinate a prolungare i pezzi o a legare tra loro i pezzi posti l'uno nel prolungamento dell'altro. 393
Articolo VIII. Degli apparati di legname i più semplici destinati a sostenere o ad innalzare de' pesi..... 395
Nota — Osservazioni sul problema in cui si cercano le pressioni esercitate da un peso sopra tre pezzi posti in un medesimo piano. 406
Nota — Altre osservazioni sullo stesso problema. Soluzione dello stesso problema per un numero qualunque di pezzi..... 408
Nota — Osservazioni pel caso di un solido incastrato in un estremità, e caricato di forze eguali ed opposte, applicate in due punti diversi..... 414
Dell' equilibrio delle grue..... 426
Articolo IX. Delle porte di chiusa..... 431
Dell' azione della gravità sull' ossatura delle porte di chiusa. *id.*
Del caso in cui la porta è sostenuta da una girella..... 435
Dell' azione dell' acqua sulle traverse delle porte di chiusa. 438
Dell' azione simultanea del peso del legname e dell' acqua sulle traverse delle porte di chiusa..... 441
Delle porte ricurve..... 442
Articolo X. De' ponti di legname..... 445
De' ponti sorretti da travi e da saettoni..... *id.*
Dell' azione che i ponti formati di travi e saettoni esercitano sulle pile o sulle spalle..... 458
De' ponti sostenuti da archi..... 459
Nota — Intorno al punto di massima flessione..... 466
Del legame delle centine ne' ponti di legname..... 469
Articolo XI. Delle centine o armature di legname da servire per la costruzione delle volte..... 471

Pag.

Degli sforzi esercitati sulle centine per effetto del peso de' cunei..... *id.*
Dello stabilimento delle centine..... 475
Articolo XII. De' solai..... 478
Della flessione e della rottura de' piani elastici..... 484
Regole pratiche per lo stabilimento de' solai..... 488
Articolo XIII. Della resistenza delle pareti de' vasi alla pressione de' fluidi..... 490
Dell' equilibrio di una linea sollecitata da forze perpendicolari alla sua direzione..... 491
Dell' equilibrio di una superficie sollecitata da forze ad essa normali..... 495
Del caso in cui una superficie sollecitata da forze normali è ugualmente tesa in tutti i sensi..... 499
Applicazione a vasi di diverse figure..... 502
Sperienza sulla resistenza de' vasi contenenti un fluido che esercita una pressione sulle pareti..... 511

APPENDICE.

De' ponti sospesi..... 514

Dell' equilibrio delle catene..... 516
Dell' azione de' pesi posti sul palco di un ponte per cambiare la figura delle catene e aumentarne la tensione..... 518
Dell' equilibrio de' sostegni su' quali sono appoggiate le catene..... 524
Nota — Osservazioni sul moto del pilastro nel caso che la risultante delle tensioni cada fuori la base..... 533
De' mezzi per fissare nel suolo le estremità delle catene di ritenuta..... 534
Dell' allungamento delle catene prodotto dall' estensibilità della materia, e dell' abbassamento del palco che ne risulta..... 535
Degli effetti delle variazioni di temperatura..... 540
Nota — Riflessioni sul modo di far sostenere le catene da' pilastri. 543

Pag.

Della materia più propria per la formazione delle catene de' ponti sospesi..... 548

Nota — Osservazioni su questo soggetto relative al nostro Paese.. 550

Delle oscillazioni verticali de' ponti sospesi..... 551

Delle vibrazioni longitudinali dovute all' elasticità della materia..... 562

Dell' equilibrio de' ponti sospesi avendo riguardo alla differenza di carica proveniente dal peso delle catene e delle aste di sospensione..... 577

Limite della corda degli archi..... 582

Nota alla pag. 465..... 584

N. B. Gli errori distinti col segno * sono quelli dell'originale francese, avvertiti dopo la stampa.

		Errori	*Correzioni*
Pag.	*v.*		
47	15	presa *si legga*	presi
55	16	sulle	nelle
60	10	ϵ	E
84	5	$\rho = P($	$\rho = Pa($
*114	10	ω	ρ
145	3 *da sotto*	p	P
146	5	$(P + \Pi ah -$	$f(P + \Pi ah -$
*152	5	tang.$\alpha = \frac{1}{2}\sigma$	tang.α = tang.$\frac{1}{2}\sigma$
*id.	22	*alla formola si aggiunga* $+ \frac{\gamma a}{\cos.\alpha}$	
204	*ultimo*	AO	MO
214	4 *da sotto*	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{ds}$
id.	3 *da sotto*	$\frac{dx}{dy}$	$\frac{dx}{ds}$
id.	*ultimo*	$T = \rho F(1 + f^2)$	$T = \frac{\rho F}{1 + f^2}$
*239	17	m	n
* *id.*	19	n	m
269	8	N....N′	M....M′
275	18	$\frac{1}{2}a$	a
441	4	$1 -$	$- 1$
*317	1	$\frac{12\,\Pi\cos.\alpha}{Eab^3}$	$\frac{12\,\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}$
*329	7	451	431
*333	10	461	441
*349	8	$4pb$	pb
id.	6 *da sotto*	$\frac{b}{8a}$	$\frac{b}{8a^3}$
id.	3 *da sotto*	$\frac{pbx^2}{a}$	$\frac{pbx^2}{a^2}$
368	9	*il denominatore dev' esser* $6(b+c)$	
id.	22	*la stessa correzione*	

Pag.	*v.*			
378	21		$X\int_0^x q'u'v'dx$	$X\int_0^{\bar{x}} q'u'v'dx'$
371	10		$\frac{bc^2x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}$	$E\frac{bc^2x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}$
393	10	*da sotto*	peso	pezzo
id.	5	*da sotto*	pezzo	peso
*396	4	*da sotto*	CD	BD
407	2	*da sotto*	cos.ω	cos.ω'
id.	1	*da sotto*	cos.ω	sen.ω''
*410	17		B'C'	B'C
*411	3	*da sotto*	A	C
420	4	*da sotto*	$\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}$	$a\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}$
id.	*ultimo*		*si tolga* a' *dal denominatore*	
*442	9		$\frac{3p_1l^2}{4Ebc^2.\cos.^2\varphi}$	$\frac{3pl^2}{4Ebc^2.\cos.^2\varphi}$
460	14	*si legga*	riguardarlo come non sollecitato	
*450	8		$\frac{p}{Qq\cos.qa}$	$\frac{p}{Qq^2\cos.qa}$
**id.*	10		$-\frac{Pa}{Q}+\frac{p}{Qq}($	$-\frac{Pa}{Q}+\frac{p}{Qq^2}($
**id.*	13		$\frac{p}{Qq\cos.qa}$	$\frac{p}{Qq^2\cos.qa}$
*456	4	*da sotto*	$-\frac{P-pa}{Q}$	$-\frac{P-pa}{Qq}$
**id.*	*ultimo*		$\frac{P-pa}{qQ}$	$\frac{P-pa}{Qs}$
*457	3		$\frac{v'(P-pa)}{qQ}$	$\frac{v'(P-pa)}{Qs}$
*465	13		0,382 a	0,343 a
522	12	*il secondo termine della serie dev' essere*	$-\frac{1}{5.8}\frac{(pa+\Pi)^5-\Pi^5}{(pa+2\Pi)^4}\cdot\left(\frac{2b'}{a}\right)$	
523	3	*nel terzo termine della serie si metta* δ^3 *in vece di* δ^4		
532	22	*il secondo termine sotto il radicale deve avere il segno* +		

RIASSUNTO DELLE LEZIONI

DATE

ALLA SCUOLA DI PONTI E STRADE

SU

L' APPLICAZIONE DELLA MECCANICA

ALLO STABILIMENTO DELLE COSTRUZIONI
E DELLE MACCHINE.

PARTE PRIMA.

SEZIONE PRIMA

DELLA RESISTENZA DE' CORPI SOLIDI.

1. Un corpo solido oppone della resistenza ad uno sforzo che tende a piegarlo o a romperlo. Nella ricerca delle leggi cui questa proprietà è sottoposta, possiamo proporci due oggetti principali: 1°. data la figura di un corpo e gli sforzi che deve sostenere, riconoscere se questo corpo deve piegare e di quanto, ovvero se deve rompere; 2°. determinare la figura di un corpo in modo che sotto il minimo volume presenti la massima resistenza possibile ad un dato sforzo.

I corpi appariscono composti di parti o molecole man-

tenute a qualche distanza le une dalle altre da forze opposte che si fanno scambievolmente equilibrio. L' una di queste forze è un' attrazione propria alle molecole de' corpi; l' altra è una forza di repulsione dovuta al principio del calore. Il giuoco di queste forze d'attrazione e repulsione rende ragione de'principali fenomeni che hanno luogo allorchè s' imprende a cangiar la figura d' un corpo; ed è evidente che nella considerazione di queste forze bisogna cercare la soluzione diretta de' problemi relativi alla resistenza de' solidi.

Le ricerche generali fondate su queste nozioni sono troppo complicate per poterle presentare in un corso elementare. Ci limiteremo perciò a dedurre de' resultamenti semplici ed applicabili da ipotesi la di cui giustezza sia stata verificata per mezzo di numerosi confronti cogli effetti naturali.

2. Consideriamo, per fissare le idee, un corpo prismatico. Questo corpo può esser sottomesso a diversi sforzi, fra i quali principalmente si distinguono:

1°. Uno sforzo secondo la lunghezza del solido, diretto a comprimerlo. Il solido può cedere, schiacciandosi, o pure piegando e rompendosi, se la lunghezza è sufficientemente grande per rapporto alle dimensioni della sezione trasversale.

2°. Uno sforzo nel senso della lunghezza del solido, diretto a stirarlo. Il corpo può cedere allungandosi, o rompendosi per effetto della separazione delle parti in una delle sezioni trasversali.

3°. Uno sforzo diretto perpendicolarmente alla lunghezza del solido. Il corpo cede piegando, in guisa che le parti vicine alla faccia convessa sono distese, e quelle vicine alla faccia concava sono compresse. Ha luogo la

rottura, se lo stiramento e la compressione sono tanto grandi per determinare la separazione o lo schiacciamento delle parti.

4°. Uno sforzo che tende a torcere il corpo.

ARTICOLO PRIMO.

Della resistenza de' corpi ad uno sforzo che tende a produrre lo schiacciamento.

5. Le nozioni che si possono presentare su questa materia consistono principalmente nella esposizione de' resultamenti delle sperienze fatte sopra diversi corpi. I resultamenti seguenti convengono soltanto ai corpi che non possono cedere piegando, per esser la lunghezza troppo picciola rispetto alle dimensioni della sezione trasversale.

Resistenza della pietra e del mattone allo schiacciamento.

4. Dagli sperimenti fatti sulla resistenza delle pietre allo schiacciamento si sono ricavate le seguenti norme generali. Le qualità fisiche delle pietre, come la durezza, la gravità specifica, il colore non possono far giudicare esattamente della resistenza. Non si può conoscerla che per mezzo di speciali sperienze. Ma nelle pietre della stessa natura, le parti le più dense sono ancora le più resistenti. Nelle pietre bisogna distinguere due qualità principali relativamente al modo come cedono alla pressione. Le pietre dure di una grana fina e di un aggregazione omogenea e compatta, prima di ridursi in polvere si dividono con strepito in lamine o aghi verticali. Le pietre

tenere si dividono prima in piramidi che hanno per basi le facce del solido e il vertice al centro: le due piramidi verticali scostano le altre agendo a guisa di cunei; esse si dividono tutte in piccoli prismi verticali, e finiscono col cadere egualmente in polvere. Alcune pietre che nelle sperienze offrono una maggior resistenza delle altre, possono in una costruzione fendersi più facilmente, se non sono premute egualmente su tutta l'estensione della commessura.

La forza necessaria a schiacciare un pezzo di pietra è, per delle figure simili, proporzionale all' arca della sezione trasversale; diminuisce quando il contorno della sezione aumenta rispetto all'area; ed è la massima quando la sezione trasversale è un quadrato o un cerchio (*a*).

Quanto all' influenza del rapporto dell' altezza all'area della sezione trasversale, la forza necessaria a produrre lo schiacciamento è la massima quando la pietra ha la forma di un cubo. Questa forza diminuisce a misura che la pietra è più piatta o più alta; e diminuisce ancor più, se la pietra è divisa in molte parti nel senso dell' altezza (*b*).

Il sito che il pezzo sottomesso allo sperimento occupa nell'interno della pietra, influisce sensibilmente sui resultamenti. La resistenza delle parti prossime alle facce superiore ed inferiore è minore di quella delle parti interne (*c*).

È stato fatto un gran numero di sperienze sulla resistenza delle pietre allo schiacciamento. Le prime sono di M. Gauthey; egli impiegava una macchina composta

---

(*a*) *Art de bâtir par M. Rondelet*, tomo I, pag. 94 e seg.
(*b*) *Idem*. pag. 91.
(*c*) *Idem*. pag. 83, e seg.

di una leva. M. Rondelet ha fatto uso di una macchina simile; e ne propone una in cui la pressione è prodotta da una vite, e che sembra preferibile.

5. Resultamenti medî delle sperienze di M. Gauthey (*a*). Queste sperienze sono state fatte sopra piccoli parallelepipedi, le di cui dimensioni hanno variato da 4 a 48 linee, ed erano generalmente di 10 a 20 linee. I resultamenti sono ricondotti per mezzo del calcolo ad una superficie di un piede quadrato.

INDICAZIONE DELLE PIETRE.	PESO del piede cubo.	Valore minimo	Valore medio	Valore massimo
		del peso che produce lo schiacciam.°		
	libbre.	libbre.	libbre.	libbre.
Porfido	201	4299112	5329152	5619456
Marmo di Fiandra	184	1824768	2239488	2159200
Marmo di Genova	189	691472	770688	1002240
Pietra calcarea dura di Givry	165	456192	663552	870911
Id. calcarea tenera di Givry	145	186624	248832	311040
Id. calcarea bianca di Tonnerre	120	181440	229912	279836
Mattone duro	109	290304	321403	373248
Grès tenero	174	5390	8424	189586

Si troverà la resistenza allo schiacciamento espressa in chilogrammi per una superficie di un centimetro quadrato, moltiplicando i numeri delle tre ultime colonne per 0,000464.

6. Principali resultamenti delle sperienze di M. Rondelet (*b*). Queste sperienze sono state fatte sopra piccoli cubi di $0^m,05$ di lato, in modo che l'area della base è 25 centimetri quadrati.

(*a*) Memoria sulla carica che possono portar le pietre. *Journal de physique*, novembre 1774.

(*b*) *Art de bâtir*, tomo I, pag. 208 e seg.

INDICAZIONE DELLE PIETRE.	GRAVITA' specifica.	PESO producente lo schiacciamento.
Pietre vulcaniche.		chilogram mi.
Basalto di Svezia	3,06	47809
Basalto di Alvergna	2,88	51945
Lava del Vesuvio, detta *Piperno*, vicino Pozzuoli	2,60	14802
Lava grigia de' contorni di Roma, poco dura, detta *Peperino*	1,97	5700
Lava tenera di Napoli	1,72	4014
Tufo di Roma	1,22	1447
Scoria vulcanica	0,86	831
Pietra pomice	0,60	863
Graniti.		
Granito verde de' Vosgi	2,85	15487
Granito grigio di Bretagna	2,74	16353
Granito di Normandia, detto *Gatmos*	2,66	17555
Granito grigio de' Vosgi	2,64	10581
Grès.		
Grès durissimo, rossastro	2,52	20337
Grès bianco	2,48	23086
Grès tenero	2,49	98
Pietre argillose.		
Pietra porco o fetida	2,66	17030
Pietra grigia di Firenze la di cui grana è fina.	2,56	10556
Pietre calcaree.		
Marmo nero di Fiandra	2,72	19719
Marmo bianco venato	2,70	7455
Marmo bianco statuario	2,69	8176
Marmo bianco turchino	2,67	7695
Pietra di Caserta, vicino Napoli, che riceve il polimento	2,73	14865
Pietra nera di San Fortunato, impiegata a Lione, durissima e conchigliosa	2,65	15668
Liais di Bagneux, vicino Parigi, durissima, di una grana fina	2,44	11113
Travertino di Roma, durissimo, di una grana fina, verderognola	2,36	7449
Roccia di Châtillon, vicino Parigi, dura, un poco conchigliosa	2,29	4347
Roccia dolce di Châtillon	2,08	3339
Roccia d'Arcueil, vicino Parigi	2,30	6334
Pietra di Saillancourt, vicino Pontoise,		
1ª. qualità	2,41	3536
2ª. qualità	2,29	2994
3ª. qualità	2,10	2304
Pietra soda di Conflans, impiegata a Parigi	2,07	2245
Pietra tenera o *Lambourde* di Conflans, 1ª. qualità	1,82	1407
Pietra da gesso di Montmartre, vicino Parigi.	1,92	1785
Vergelée de' contorni di Parigi, tenera, d'una grana grossolana, resistente all' acqua	1,83	1496
Lambourde di qualità inferiore, tenera, resistente male all' umido	1,56	575

7. Principali resultamenti delle sperienze di M. G. Rennie (*a*). Queste sperienze sono state fatte sopra piccoli cubi, di lato poll. inglesi $1\frac{1}{2}$.

INDICAZIONE DELLE PIETRE.	GRAVITA' specifiche.	PESO producente lo schiacciamento.
Graniti.		Libbre (avoir-du-poids).
Granito d'Aberdeen, *bleu*	2,623	24576
Granito a grana stretta di Peterhead		18636
Granito di Cornovaglia	2,662	14302
Pietre silicee.		
Pietra silicea di Dundée	2,530	14918
Pietra silicea di Brannlfall, vicino Leida, parallelamente o perpendicolarmente agli strati.	2,506	13632
Grit di Derby, pietra silicea, rossa e friabile.	2,316	7070
Pietre calcaree.		
Marmo bianco italiano, venato	2,726	21783
Marmo bianco del Brabante	2,697	20742
Pietra da calce nera e compatta, di Limerich	2,598	19924
Marmo rosso di Devonshire		16712
Pietra di Portland, d'una grana fina ed eguale, (il cubo avendo 2 poll. di lato)	2,423	14918
Idem, (il cubo avendo 1 1/2 poll. di lato)	2,428	10284
Mattone.		
Pietra di Stourbridge		3864
Mattone di Hammersmith		2254
Idem, bruciato		3243
Mattone rosso, medio delle due prove	2,168	1817
Mattone rosso pallido	2,085	1263
Calce		1127

Si troverà la resistenza allo schiacciamento, espressa in chilogrammi per una superficie di un centimetro qua-

---

(*a*) *Philosophical Transactions*, 1818; o Annali di chimica e di Fisica, settembre 1818.

drato, moltiplicando i numeri dell'ultima colonna per 0,03156.

8. Per mettere a portata di apprezzare la diminuzione di resistenza che ha luogo, quando l'altezza è più grande del lato della base, si citeranno le sperienze seguenti dovute a M. Rondelet (*a*). La base era un quadrato di 5 centimetri di lato.

INDICAZIONE DELLE PIETRE.	GRAVITA' specifica.	PESO producente lo schiacciamento.
		chilogrammi.
Pietra di *liais*, assai dura, un cubo.....	2,388	8851
due cubi posti l' uno sull' altro.....		5411
tre cubi, *idem*.....		4780
Pietra dura del fondo di Bagneux, un cubo.	2,255	6650
due cubi l' uno sull' altro.....		4223
tre cubi, *idem*.....		3890
Roccia dura di Châtillon, un cubo.....	2,342	5158
due cubi l' uno sull' altro.....		4010
tre cubi, *idem*.....		3853
La stessa pietra, un cubo.....	2,162	3537
due cubi l' uno sull' altro.....		2829
tre cubi, *idem*.....		2752
La stessa pietra, un cubo.....	2,199	3721
due cubi l' uno sull' altro.....		2977
tre cubi, *idem*.....		2890
La stessa pietra, prisma di $0^m,1$ di altezza.	2,346	5164
Lo stesso prisma diviso in quattro parti.....		4431
Lo stesso prisma diviso in otto parti.....		3698

9. Dietro una sperienza riportata da M. White (*b*), un prisma di pietra di Portland, avendo 14 pollici inglesi sopra 12 poll. di base e 2 pi. e 7 poll. di altezza, è stato fratturato sotto una pressione di $173\frac{1}{2}$ *tons*.

(*a*) *Art de bâtir*, tomo III. pag. 91.

(*b*) *The Philosophical magasine*, aprile 1832.

Resistenza del gesso allo schiacciamento.

10. Secondo M. Rondelet (*a*), il peso necessario a schiacciare un cubo di 5 centimetri di lato, è per lo gesso stemprato all' acqua..... 1239 ch.
e per lo gesso stemprato a latte di calce..... 1816

Resistenza della malta allo schiacciamento.

11. La resistenza della malta è variabilissima, secondo i materiali impiegati ed i processi di fabbricazione. La seguente tavola è distesa dietro le sperienze di M. Rondelet.

INDICAZIONE DELLE MALTE.	GRAVITA' specifica.	PESO sostenuto sopra una base di 25 centimetri quadrati.
		chilogrammi.
Malta di calce ed arena di riviera.....	1,63	767
La stessa, battuta.....	1,89	1048
Malta di calce ed arena di mina.....	1,59	1017
La stessa, battuta.....	1,90	1406
Malta di cemento o tegole pestate.....	1,46	1191
La stessa, battuta.....	1,66	1633
Malta di grès pestato.....	1,68	733
Malta di puzzolana di Napoli e di Roma mischiate.....	1,46	916
La stessa, battuta.....	1,68	1333
Intonaco d' una conserva antica de' contorni di Roma.....	1,55	1903
Intonaco di cemento delle demolizioni della Bastiglia.....	1,49	1368

I saggi sono stati fatti diciotto mesi dopo la fabbricazione delle malte. Quindici anni dopo sono stati ripetuti, e si è conosciuto che la consistenza era aumen-

(*a*) *Art de bâtir* t. I. pag. 309.

tata di circa $\frac{1}{8}$ per le malte di calce e sabbia, e di $\frac{1}{4}$ per quelle di cemento e puzzolana (*a*).

Resistenza del legname allo schiacciamento.

12. Inseguito dell' esperienze di M. Rondelet, la forza necessaria a schiacciare un cubo di legname di quercia è di 40 in 48 libbre a linea quadrata della base (385 a 463 chilogrammi a centimetro quadrato). Essa non diminuisce sensibilmente per un prisma la di cui altezza non sorpassa sette o otto volte la spessezza, e che non può piegare.

La stessa forza, per l' abete, è da 48 a 56 libbre (*b*) (462 a 538 chilogrammi per centimetro quadrato).

13. Dietro le sperienze di M. G. Rennie (*c*) la forza necessaria a schiacciare un cubo di un pollice inglese di lato, è per

la quercia inglese.....	3860	libbre (avoir-du-poids)
l' abete bianco	1928	
il pino di America....	1606	
l' olmo.....	1284	

La resistenza espressa in chilogrammi, per un centi-

(*a*) *Art de bâtir*, tomo I. pag. 305. Consultate ancora: *Recherches expérimentales sur les chaux de construction* di M. Vicat, e l'opera dello stesso Autore intitolata: *Résumé des connaissances positives actuelles sur les mortiers et cimens calcaires*, 1828.

(*b*) *Art de bâtir*, tomo IV. pag. 67.

(*c*) *Philosophical Transactions*, 1818; o Annali di chimica e di Fisica, settembre 1818.

metro quadrato, si ricava dai numeri precedenti moltiplicandoli per 0,07028.

14. Quando una pressione è esercitata contro la superficie d' un pezzo di quercia, a volere che questa superficie non ceda sensibilmente, bisogna, secondo M. Gauthey (*a*) che la forza non oltrepassi 160 chilogrammi per ogni centimetro quadrato, se la superficie premuta è parallela alle fibre; e 200 chilogrammi, se la detta superficie è perpendicolare alle medesime.

15. Dietro le sperienze di M.r Tredgold (*b*) lo sforzo esercitato contro una superficie premuta parallelemente alle fibre non deve oltrepassare 1400 libbre (avoir-dupoids) a pollice quadrato inglese, per la quercia, e 1000 libbre per l' abete giallo (108 e 70 chilogr. a centimetro quadrato).

Questi risultamenti suppongono essere i legnami secchi e di buona qualità.

16. In un esperimento fatto nel 1822 dai Signori Minard e Desormes, sopra due pezzi di quercia uniti estremo ad estremo con una commessura formata con un solo dente, e ritenuta da cerchi di ferro, le fibre della commessura a dente sono state schiacciate da una forza di 530 chil. a centimetro quadrato.

Resistenza del ferro di fucina allo schiacciamento.

17. Inseguito delle sperienze di M. Rondelet (*c*), un cubo di ferro di fucina di 6 a 12 linee di lato, co-

---

(*a*) *Traité de la construction des ponts*, tomo II. pag. 44.
(*b*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 60.
(*c*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 519.

mincia a comprimersi sotto una pressione media di 513 libbre per ogni linea quadrata (4945 chilogr. per ogni centimetro quadrato). Il ferro cede più facilmente piegando che comprimendosi, quante volte l'altezza è tripla della grossezza.

Resistenza del ferro fuso allo schiacciamento.

18. Dietro le sperienze di M. W. Reynolds di Ketley (*a*), la forza necessaria a schiacciare un cubo di lato $\frac{1}{4}$ di pollice inglese, di ghisa grigia e dolce è di..... 8960 libbre (avoir-du-poids.) di metallo di cannone..... 22400

19. Risultamenti principali de' saggi fatti da M. G. Rennie sullo schiacciamento del ferro fuso. (*b*)

(*a*) *A Practical essay on the strength of cast iron*, pag. 128. Sembra, dietro quest' Opera, che i resultamenti ottenuti da M. Reynolds non erano stati riferiti esattamente nella memoria di M. G. Rennie, inserita nel volume delle *Philosophical Transactions* pel 1818.

(*b*) *Philosophical Transactions*, 1818; o Annali di Chimica e di Fisica, settembre 1818.

FERRO ADOPERATO NELL' ESPERIENZA.	GRAVITA' specifica.	LATO della base quadrata.	ALTEZZA.	PESO producente lo schiacciamento.
		Pollice inglese.	Pollice inglese.	Libbre (avoir-du-poids).
Ferro preso dal centro di una gran massa , i di cui cristalli aveano la forma e l' aspetto di quelli che si veggono nella rottura di un cannone dello stesso metallo.....	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Ferro preso da una piccola massa a grana stretta d' un grigio fosco.....	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	2116
			$\frac{3}{8}$	2363
			$\frac{4}{8}$	2005
			$\frac{5}{8}$	1407
			$\frac{6}{8}$	1743
			$\frac{7}{8}$	1594
			$\frac{8}{8}$	1459
Ferro preso dalla prima massa		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	9773
Cubi ricavati da barre colate orizzontalmente..... .	7,113	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10114
Cubi ricavati da barre colate verticalmente.....	7,074	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	11137
Prismi di varie altezze di ferro colato orizzontalmente.....		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	9449
			$\frac{3}{8}$	9006
			$\frac{5}{8}$	8845
			$\frac{6}{8}$	8362
			$\frac{7}{8}$	6430
			$\frac{8}{8}$	6321
Idem, di ferro colato verticalmente.....		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	9328
			$\frac{5}{8}$	8385
			$\frac{6}{8}$	7896
			$\frac{7}{8}$	7018
			$\frac{8}{8}$	6430

Resistenza di diversi metalli allo schiacciamento.

20. Dietro le stesse sperienze , la forza necessaria a

schiacciare un cubo di lato $\frac{1}{4}$ di pollice inglese di rame fuso è di..... 7318 libbre (avoir-du-poids)

Per comprimere un cubo simile

di rame giallo	di $\frac{1}{10}$.....	3213
	$\frac{1}{2}$.....	10304
di rame battuto,	di $\frac{1}{10}$.....	3427
	$\frac{1}{8}$.....	6440
di stagno fuso,	di $\frac{1}{10}$.....	552
	$\frac{1}{3}$.....	966
di piombo fuso,	di $\frac{1}{2}$.....	485

I numeri precedenti, quelli dell'ultima colonna della tavola n°. 19, quando il lato della barra è di $\frac{1}{4}$ di pollice inglese, e quelli del n°. 18 debbono esser moltiplicati per 1,125 per dare in chilogrammi la resistenza sopra un centimetro quadrato.

ARTICOLO II.

Della resistenza de' corpi ad uno sforzo diretto nel senso della lunghezza, che tende a produrre l'allungamento e la rottura.

21. Nel considerare un corpo stirato nel senso della lunghezza, possiamo proporci di conoscer due cose: 1° di quanto si allungherà sotto uno sforzo dato; 2° lo sforzo necessario per separare le parti e produrre la rottura. Esistono poche sperienze dirette, fatte colla mira di determinare la quantità di cui si allunga un corpo sotto un dato sforzo; ma questa determinazione, come si vedrà in seguito, può ricavarsi dalle sperienze fatte sulla flessione. La resistenza alla rottura de' corpi tirati

nel senso della lunghezza, è l'oggetto di cui più si sono occupati coloro che han fatto simili sperienze, ed il solo di cui si tratterà in quest' articolo. Le nozioni che presenteremo sopra questo soggetto, si limitano ancora all' esposizione de' resultamenti ottenuti dalle sperienze.

Resistenza della pietra e del mattone allo stendimento.

22. Dietro Coulomb (*a*), la forza necessaria per produrre la rottura sopra una superficie di un pollice quadrato, è per una pietra bianca, di una grana fina e omogenea, di 215 libbre ($14^{ch.},4$ a centimetro quadrato); pel mattone della Provenza benissimo cotto, e di una grana molto unita, di 280 a 300 libbre ($18^{ch.},7$ a $20^{ch.}$ a centimetro quadrato).

23. Dietro M. Tredgold, la stessa forza, sopra un pollice quadrato inglese è, pel mattone, di 275 libbre (avoir-du-poids) (*b*); per la pietra calcarea di Portland, di 857 libbre (avoir-du-poids) (*c*) ($19^{ch.},5$ a $60^{ch.},2$ a centimetro quadrato).

Resistenza del gesso allo stendimento.

24. Dietro M. Rondelet (*d*), la forza di coesione del gesso è di 60 libbre a pollice quadrato ($4^{ch.}$ a centi-

---

(*a*) *Mémoires des savans étrangers*, 1773.
(*b*) *A practical essay on the strenght of cast iron*, pag. 150.
(*c*) *Idem*, pag. 155.
(*d*) *Art de bâtir*, tomo I. pag. 315.

metro quadrato). La forza di adesione colle pietre e coi mattoni è circa i $\frac{2}{3}$ della precedente. Questa forza è più grande per la pietra molare e pel mattone che per le pietre calcaree. Diminuisce molto col tempo.

Resistenza delle malte allo stendimento.

25. Dietro M. Rondelet (*a*), la forza di coesione della calcina è circa $\frac{1}{8}$ della resistenza allo schiacciamento. La forza di adesione colle pietre e coi mattoni sorpassa la forza di coesione.

26. Dietro M. Vicat (*b*), la forza di coesione sopra un centimetro quadrato è, per le malte ben fatte con sabbia quarzosa e calce eminentemente idraulica, di 9ch., 6

malte ben fatte con sabbia quarzosa e calce idraulica ordinaria, di..... ..... 6 , 0

malte ben fatte con sabbia quarzosa e calce comune media o grassa ..... 3 , 6

malte mal fatte, ordinariamente, al più..... 1 , 5

27. Lo stesso ingegnere ha indicato posteriormente i resultamenti generali seguenti.

Calci eminentemente idrauliche..... 12ch.

Calci idrauliche ordinarie..... 10ch.

Calci idrauliche di mezzana qualità..... 7

Calci grasse..... 3

Cattive malte. ..... 0 , 75

Si suppone che le proporzioni e la scelta del processo di estinzione siano state regolate convenevolmente. Le

---

(*a*) *Idem*, tomo I, pag. 315.

(*b*) *Recherches expérimentales sur les chaux de construction*, pag. 96.

resistenze si riferiscono alle malte continuamente esposte alle intemperie e fabbricate da un anno (*a*).

28. Le sperienze fatte sulle malte fabbricate col cemento di Pouilly hanno presentato i resultamenti seguenti (*b*). La forza di adesione è per ogni centimetro quadrato:

Prismi senza mescuglio di sabbia, posti sotto acqua	$6^{ch.}$,47
Parti eguali di cemento e sabbia sotto acqua	6 ,97
Idem, fuori acqua	5
Due parti di cemento e una di sabbia, sotto acqua	9 ,28
Idem, fuori acqua	9 ,9

29. Dietro alcuni sperimenti di M. J. White (*c*), un pilastro costrutto di mattoni con malta di calce, puzzolana e sabbia, saggiato dopo un mese, sollevandolo dall' estremità superiore, ha sostenuto il suo proprio peso sopra una altezza di 5 piedi 2 pol., base 3 pi. 4 pol. sopra 1 pi. 10 pol. inglesi. La parte interna non era interamente secca.

Un altro pilastro, costrutto nell' istesso modo con malta di calce e puzzolana schiacciata e passata per setaccio, avendo 6 pi. di larghezza, 3 pi. di grossezza e 8 pi. 10 poll. di altezza, sollevandolo a 15 poll. dall' estremità superiore, non si è rotto. Il peso era di circa 10 *tons*.

(*a*) *Résumé sur les mortiers et cimens calcaires*, pag. 189.

(*b*) Rapporto fatto da M. Mallet alla società d' Incoraggiamento sul cemento di M. Lacordaire, 17 giugno 1829.

(*c*) *The Philosophical Magasine*, aprile 1832.

Resistenza del legname allo stendimento.

30. Dietro le sperienze di M. Rondelet (*a*), la forza di coesione del legname di quercia tirato nel senso delle fibre, è 102 lib. a linea quadrata (981 chil. a centim. quadrato).

31. Resultamenti medî delle sperienze di M. Barlow (*b*) fatte sopra pezzi di diametro circa $\frac{1}{3}$ di pollice. Questi resultamenti son ricondotti per mezzo del calcolo a esprimere la forza necessaria per operare la rottura sopra un pollice quadrato inglese.

Abete,	1°.....	12857 lib. (avoir-du-poids)
	2°.....	11549
Frassino,	1°.....	17207
	2°.....	16947
Faggio.....		11467
Quercia,	1°.....	9198
	2°.....	11580
Teak.....		15090
Bosso.....		19891
Pero.....		9822
Mogano.....		8041

32. Dietro le stesse sperienze, l'adesione laterale delle fibre, cioè lo sforzo necessario per separare due parti di un pezzo facendole scorrere l' una sull' altra parallela-

---

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 65.
(*b*) *An Essay on the strenght and stress of timber*, pag. 73.

mente alle fibre, è nell' abete 592 lib. (avoir-du-poids) a poll. quadrato inglese.

33. Dietro le sperienze di M. Tredgold (*a*), la forza di coesione de' legnami tirati perpendicolarmente alla direzione delle fibre, è, sopra un pollice quadrato inglese, per

la quercia.....	2316	lib. (avoir-du-poids)
il pioppo.....	1782	
il larice.....	da 970 a 1700	

Questi ultimi numeri, e quei de' n^{i}. 31 e 32 debbono esser moltiplicati per 0,07028 per dare in chilogrammi la resistenza sopra un centimetro quadrato.

34. Secondo alcune sperienze fatte dai Sig. Minard e Desormes, la forza di coesione della quercia tirata nel senso delle fibre è di 600 a 700$^{ch.}$ a centimetro quadrato della sezione trasversale. La forza di coesione della tremula non apparisce esser minore.

35. Secondo le stesse sperienze, la forza di adesione laterale delle fibre, ovvero lo sforzo necessario per separare due parti di un pezzo facendole scorrere l' una sull'altra parallelamente alle fibre, è stata trovata nella tremula di 57 $^{ch.}$ a centimetro quadrato.

36. Sperienza fatta da' Sig. Minard e Desormes sull' allungamento progressivo d' un pezzo di quercia di 0^{m},036 di riquadratura, tirato nel senso della lunghezza.

(*a*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 29.

CARICHE.	LUNGHEZZE osservate.
chilogrammi.	metri.
0	1,016
1708	1,017
0	1,016
2411	1,0175
0	1,016
3114	1,01775
0	1,01625

Risulta da questa sperienza, che la quercia si allunga (senza aver perduto la facoltà di rivenire alla sua lunghezza primitiva dopo essere stata scaricata) di $\frac{1}{629}$ per una carica di 213$^{ch.}$ a centimetro quadrato della sezione trasversale. Ciò riviene ad un allungamento di 0,0007464 per una carica di un chilogrammo a millimetro quadrato della sezione trasversale.

37. Aggiungeremo, dietro le sperienze pubblicate da M. Bevan (*a*), l' espressione dello sforzo necessario a strappare delle viti di legname. Queste viti avevano 2 pollici inglesi di lunghezza, 0,22 pollici di diametro all' esterno della spira, e 0,15 pollici di diametro tra le spire. La spira formava dodici rivoluzioni in una lunghezza di un pollice. Le viti traversavano da una parte all' altra delle tavole di un pollice di spessezza. I numeri seguenti indicano lo sforzo necessario per strapparle.

Frassino secco..... 790$^{lib.\ (av.\text{-}du\ poids)}$
Quercia..... 760
Mogano..... 770
Olmo..... 655
Sicomoro..... 830

(*a*) *The Philosophical magasine*, ottobre 1827.

Nell' abete ed in altri legnami teneri lo sforzo era la metà dei precedenti.

Resistenza del ferro da fucina allo stendimento.

38. Secondo le sperienze fatte a Roma da Poleni (*a*) sopra otto piccole barre di $0^{m},00372$ di riquadratura, la forza di coesione, per ogni millimetro quadrato, varia da $41^{ch.}$ a $50^{ch.}$; il valor medio è $44^{ch.},5$.

39. Resultamenti dell' esperienze di M. Perronet sopra verghe di ferro quadrato, tirate nel senso della lunghezza (*b*).

LUNGHEZZA de' ferri.	RIQUADRATURA.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto sopra ogni millimetro quadrato.
metro.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
0,650	12,97	5972	35,5
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650	9,02	2983	36,7
0,325		3113	38,3
0,650	6,77	2134	46,6
0,325		2369	51,7
0,162		2472	53,9
0,081		2487	54,3
0,650		2159	47,1
Peso medio a millimetro quadrato..			42,9

(*a*) Memorie storiche della cupola del tempio Vaticano citate nell' Opera: *Traité de la construction des ponts*, tomo II, pag. 395.

(*b*) *Traité de la construction des ponts* di Gauthey, tomo II. pag. 134.

40. Resultamenti delle sperienze di M. Perronet sopra verghe di ferro tondo, stirate secondo la lunghezza.

LUNGHEZZA de' ferri.	DIAMETRO.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
metro.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
0,650	10,5	3020	37,3
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4
0,081		3368	41,6
0,650	7,88	2717	55,7
0,162		2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650	7,62	1463	32,1
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1
Peso medio a millimetro quadrato..			42,2

41. Resultamento delle sperienze fatte da' Signori Soufflot e Rondelet (*a*) sopra verghe di ferro tirate nel senso della lunghezza. La lunghezza de' pezzi era poco più di 2 piedi.

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 500.

INDICAZIONE DE' FERRI.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto a linea quadrata.
	linee.	linee.	libbre.	libbre.
Ferro, la cui frattura si mostra interamente nervosa..	2 $\frac{2}{3}$	2 $\frac{1}{4}$	3542	590
Idem.....	2 $\frac{2}{3}$	2	3374	633
Ferro la cui frattura presentasi un poco granulare....	6	2 $\frac{1}{2}$	6157	410
Ferro, la cui frattura si offre pe' $\frac{2}{3}$ nervosa.....	5	2 $\frac{1}{2}$	4874	390
Ferro a frattura metà nervosa.	5 $\frac{1}{2}$	3	5524	335
Ferro a frattura tutta nervosa.	6	3	15600	866
Ferro a frattura per un terzo granulare.....	6	3	7800	433
Ferro a frattura per più della metà granulare.....	6	5	5857	325
Ferro a frattura un poco granulare.....	3	2	3635	606
Ferro a frattura tutta nervosa, di 3 linee di diametro....			6600	933
Ferro a grossa grana, senza nervi.....	4	4	2991	187
Ferro a grana mezzana, senza nervi.....	4	4	3980	249
Ferro a grana fina, senza nervi.....	4	4	5840	365
Ferro di una grana mezzana, a frattura per metà nervosa.	4	4	7200	450
Ferro a frattura tutta nervosa.	4	4	10320	645
Ferro a grossa grana, a frattura metà nervosa.....	4	4	5840	365
Forza di coesione media per ogni linea quadrata				486

La forza media è $46^{ch.},8$ a millimetro quadrato.

42. Resultamenti delle sperienze fatte nel 1815 da' Signori Minard e Desormes. Lo sforzo era prodotto per mezzo di una leva.

INDICAZIONE DE' FERRI.	AREA della sezione trasversale rotta	CARICA producente la rottura		ALLUNGAMENTO diviso per la lunghezza primitiva.
		totale.	a millimet. quadrato.	
	millimetri quadrati.	chilogram.	chilogram.	
Ferro quadrato a grana mezzanamente brillante	115	5115	44,5	0,13
Idem. I pezzi saldati.....	150	4520	40	
Id......	121	3520	29,1	
Id......	134	6000	45,4	0,05
Id......	138	4760	34,5	
Id......	120	4120	34,3	
Id......	224	4920	39,7	0,025
Id......	129	5420	42	0,035
Id......	126	5320	42,2	
Ferro tondo d' una grana fina...	78	3140	40,2	0,11
Ferro quadrato a grana fina grigia turchiniccia.....	138	4120	29,9	0,025
La stessa barra	121	4520	37,3	0,035
Id......	100	3520	35,2	0,01
Id......	108	4580	42,4	0,095
Id......	108	5470	50,6	0,085
Id. Riscaldata al bianco per 5 minuti prima di esser saggiata...	108	4620	42,8	0,185
Pezzi saldati e ammassati a caldo.	117	5020	42,9	0,135
Ferro quadrato, a frattura in parte granulare e in parte nervosa ...	115	4120	35,8	0,07
La stessa barra.....	110	4270	38,8	0,15
Id......	110	4320	39,3	0,1
Pezzi ammassati a caldo, e allungati alla fucina.....	121	5120	42,3	0,15
Id......	147	5150	35,0	0,045
Id. Riscaldato al bianco e temperato nell' acqua fredda.....	121	4520	37,3	0,08
Ferro quadrato, nervoso circondato d' un sottile strato granulare.....	700	22030	31,4	0,075
La stessa barra	620	19228		
Id.,.....	625	21530	34,4	0,07
Id......	616	21820	35,4	0,03

Allorchè si saldavano insieme i pezzi di una stessa barra, il ferro prendeva per effetto di questo lavoro una grana più grossa. Non sembrò che il ferro fosse più disposto a rompere dove era più granelloso o nelle saldature, che nelle altre parti.

43. La tavola seguente presenta i risultamenti d' altre sperienze, fatte pure nel 1815 dai Signori Minard e De-

sormes colla mira di determinare l' allungamento progressivo del ferro sotto cariche sempre crescenti. La lunghezza primitiva delle parti di cui si osservava l'allungamento era di $0^m,2$.

INDICAZIONE de' FERRI.	AREA della sezione trasversale.	CARICA a millimetro quadrato producente un allungamento di $\frac{1}{400}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$	CARICA a millimetro quadrato producente la rottura.	ALLUNGAMENTO totale diviso per la lunghezza primitiva.
I. pezzo.	millimetr. quadrati.	chilog.	chilog.	chilog.	chilog.	chilogrammi.	
1ª. mostra	115	27,1	32,3	35,8	40,4	44,5	0,13
2ª.....	132	24,2	27,4	32		45,4	0,05
3ª.....	124		35,6			39,7	0,025
4ª.....	129		35,8	38,8		42	0,035
5ª.....	78	19,5	28,5	31,0	35,9	40,2	0,11
II. pezzo.							
1ª. mostra	103		26,4			40	0,025
2ª.....	117	30,1		35,2		38,6	0,035
3ª.....	108	30,7	32,6	35,2	39,4	42,4	0,095
4ª.....	108		31,2	33,9	38,6	50,6	0,085
5ª.....	117	26,7	30,9	33,5	37,5	42,9	0,135
6ª.(*).....	112		32,3	35			
7ª.....	108		27	30,5	35,7	42,8	0,185
III. pezzo.							
1ª. mostra	115	23,6	26,3	29,3	33,5	35,8	0,07
2ª.....	110		27	29,3	34,4	38,8	0,15
3ª.....	110		28,8	31,4	36,1	39,3	0,1
4ª.....	121		29,5	31,6	36,5	42,3	0,15
5ª.....	147	21,4	29,2	31,4		35,0	0,045
6ª.....	121	19,2	22,5	29,1	34,0	37,3	0,08
IV. pezzo.	324	26,7	28,2	30,1		32,8	0,04
V. pezzo.	804	21,5	24,8				
VI. pezzo.							
1ª. mostra	625	22,1	25,6	28 8		35,2	0,075
2ª.....	625	26,8	31,2	32,5		34,4	0,07
3ª.....	616	26	28,5	31,8		35,4	0,03
4ª.....	650	22,3	27,6				
VII. pezzo.	1056	22,6	24,7				
Filo ricotto ...	616	23	25			39,4	0,187
Medio		24,5	28,7	32,5	36,5	39,8	0,086

La mostra segnata (*) è stata caricata per due giorni del peso che l' aveva allungata di $\frac{1}{100}$, e per tre mesi del peso che l' aveva allungata di $\frac{1}{40}$, senza che gli allungamenti abbian ricevuto aumento al di là del primo effetto della carica. Intanto lo sforzo che ha prodotto un allungamento di $\frac{1}{40}$ era almeno i $\frac{4}{5}$ dello sforzo che avrebbe rotto il pezzo.

44. Resultamenti delle sperienze di M. Telfort (*a*) fatte per mezzo d' un pressore idraulico. L' azione è valutata dalla carica di una valvola di sicurezza.

INDICAZIONE DE' FERRI.	PESO sotto il quale la barra si stende.	PESO producente la rottura.		PESO sostenuto per ogni pollice quadrato inglese.	
	tonn.	tonn.	quint.	tonn.	quint.
Ferro South Wales, di diametro pol. $1\frac{3}{8}$		43	11	29	6
Idem		52	$15\frac{1}{4}$	29	16
Ferro di Staffordshire, di lato $\frac{3}{4}$ di pollice	12	15	$5\frac{3}{4}$	27	3
Idem $1\frac{1}{12}$	32	32	6	27	10
Ferro di Welsh, di lato 1 poll.	18	29		29	
Ferro di Svezia, di lato 1 poll.	17	29		29	
Ferro di pezzi vecchi saldati, di lato 1 poll	16	29		29	
Ferro comune di Staffordshire, di lato 1 poll	19	31		31	
Ferro comune, di diametro poll. 2.	45	100		31	16
Forza di coesione media, sopra un pollice quadrato inglese				29	$5\frac{2}{3}$

(*a*) *An essay on the strenght and stress of timber*, pag. 228; o pure *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 218.

Il resultamento medio riviene a 46$^{cb.}$,1 a millimetro quadrato. Bisogna supporlo un poco troppo elevato, dietro la natura dell'apparecchio impiegato per le sperienze.

45. Resultamenti delle sperienze del C.° Brown fatte con una macchina, nella quale l' azione è valutata per mezzo di un sistema di leve (*a*).

INDICAZIONE DE' FERRI.	LUNGHEZZA de' pezzi.		ALLUNGAMENTO prima della rottura.	PESO producente la rottura.		PESO sostenuto per ogni pollice quadrato inglese.
	pi.	pol.	pollici.	ton.	quin	tonn.
Ferro di Svezia a grana minutissima e serrata, di lato poll. $1\frac{5}{16}$..	3	6	$0\frac{3}{16}$	40	19	23,77
Idem	3	6	$0\frac{1}{4}$	39	15	23,19
Idem. di lato poll. $1\frac{3}{16}$	3	6	3	33	10	23,75
Ferro nero vecchio di Russia, di diam. poll. $1\frac{5}{16}$	3	6	$2\frac{1}{4}$	36	2	26,55
Ferro di Welsh n°. 3, di lato poll. $1\frac{1}{4}$	3	6	2	38	1	24,35
Ferro comune di Welsh a grana finissima e serrata, di lato poll. $1\frac{1}{8}$	3	6	0	31		24,90
Ferro di Welsh n°. 3, di diametro poll. 2 (si distese sotto 68 tonnellate).....	12	6	$18\frac{1}{2}$	82	15	26,33
Ferro di Welsh, di diam. poll. $1\frac{2}{9}$	5		7	43	10	26,34
Forza di coesione media sopra un pollice quadrato inglese....						25

Il resultamento medio riviene a 39$^{cb.}$,4 per un mil-

(*a*) *An essay on the strenght and stress of timber*, pag. 232; o pure *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 220.

limetro quadrato. È da supporsi che sia un poco troppo scarso dietro la natura dell' apparecchio impiegato nelle sperienze.

46. Resultamenti medî delle sperienze di M. Brunel (*a*) fatte sul ferro lavorato in piccole barre di lato circa $\frac{3}{8}$ di pollice. Questi resultamenti sono ricondotti ad una superficie di un pollice quadrato inglese.

	PESO sotto il quale la barra si stende.		PESO producente la rottura.	
	tonn.	qnint.	tonn.	quint.
Dietro dieci sperienze sul miglior ferro di Yorkshire.....	24	11	32	8
Dietro dieci sperienze sul ferro di seconda qualità di Yorkshire..	22	4	30	8

47. Resultamenti delle sperienze di M. Séguin maggiore sopra pezzi di ferro da fucina, tirati nel senso della lunghezza. Queste sperienze sono state fatte per mezzo di una leva (*b*).

(*a*) *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 224.
(*b*) *Des ponts en fils de fer*, 2.ª edizione, pag. 84 e 100.

INDICAZIONE DE' FERRI.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	millimetri.	chilogram.	chilogram.
Ferro di Saint-Chamond fatto al laminatojo	16	8	5611	43,8
Idem.....	10	8	4133	51,7
Idem, avente $0^m,01$ di diametro			3743	48
Ferro di Borgogna.....	13	13	5226	30,4
Idem riscaldato tutto al rosso e raffreddato lentamente....	13,5	13,5	5435	29,7
Idem, tagliato nel mezzo, saldato estremo ad estremo, senza allungarlo	13,3	13,3	5280	29,7
Idem, tagliato nel mezzo, saldato a becco di flauto, e allungato.....	10,15	10,15	5688	55,2
Idem, più allungato del precedente, senza esser saldato.	4,5	4,5	1238	61
Ferro detto a fettuccia, dolcissimo.....	20,3	1,7	1541	44,7

48. Dietro le sperienze in grande fatte a Pietroburgo (*a*) per mezzo di un pressore idraulico, i migliori ferri han sostenuto 26 tonnellate (valendo ciascuna 1050 chil.) a pollice quadrato inglese (42 chil. a millimetro quadrato). Essi cominciavano ad allungarsi ai due terzi di questo sforzo, e l' allungamento sembrava crescere in progressione geometrica, allorchè lo sforzo cresceva in progressione aritmetica.

I più cattivi ferri hanno sostenuto 14 tonnellate a pollice quadrato inglese. Il loro allungamento prima di rompere non era sensibile.

(*a*) Lettera di M. Lamé a M. Baillet, Annali delle Mine, 1825, tomo X, pag. 329.

Si ottenne un ferro che sostenne 24 tonnellate (39 chil. a millimetro quadrato), e cominciò ad allungarsi a 16 tonnellate , riunendo insieme alla fucina quattro barre di qualità media.

49. Secondo numerose sperienze fatte in Svezia nel 1826 da Lagerhjelm (*a*), il laminatojo dà sempre collo stesso ferro delle barre di una densità uniforme; il martello dà collo stesso ferro delle barre la cui densità è variabile e che spesso contengono delle sfaldature. Il laminatojo non torce la fibra del ferro , la qual cosa accade frequentemente sotto il martello. L' elasticità (vale a dire la proporzione delle cariche agli allungamenti piccolissimi che producono), quando non è alterata , è la stessa pe' pezzi lavorati col martello o col laminatojo; ma il peso che produce un allungamento permanente è minore per questi ultimi. La resistenza alla rottura per stendimento sembra essere indipendente dal processo di fabbricazione: è la stessa nei ferri crudi , dolci , nervosi o non nervosi. L' elasticità non è cambiata dall' effetto della tempera. Il ferro duttilissimo può allungarsi prima di rompere di 0,27 della sua lunghezza primitiva. La sezione è ridotta ai 0,722, e la gravità specifica è diminuita di 0,01. Il ferro si riscalda prima di rompere, e comparisce qualche volta una viva scintilla all' istante della rottura. Lo sviluppo del calore è maggiore nel ferro dolce che nel crudo.

50. Dietro le osservazioni fatte durante i saggi dei ferri destinati alla costruzione del Ponte degl' Invalidi a Pa-

---

(*a*) L' opera svedese del Sig. Lagerhjelm è menzionata nel Bollettino delle Scienze tecnologiche , gennajo 1829, tomo XI, pag. 41.

rigi, si è trovato per resultamento medio che il ferro lavorato si allungava sotto una carica di 1 chil. a millimetro quadrato della sezione trasversale, di 0,000 051 66 della sua lunghezza primitiva (*a*).

In questi sperimenti la carica portata fino a 18 chil. a millimetro quadrato, non era grande a segno da alterare l'elasticità naturale del ferro. Esso riprendeva esattamente la sua lunghezza primitiva quando si toglieva la carica. L'allungamento non aumentava quando lo sforzo era esercitato per 12 ed anche per 36 ore.

51. Principali risultamenti delle sperienze pubblicate dal Sig. Emilio Martin (*b*). S'impiegava un pressore idraulico per operare lo stiramento de' ferri.

INDICAZIONE DE' FERRI.	DIAMETRO o riquadratura.	CARICA producente la rottura		ALLUNGAMENTO diviso per la lunghezza primitiva.
		totale.	a millimetro quadrato.	
	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.	
Ferro tondo di Saint-Chamond.....	45	55 000	34,6	0,196
	45	57 500	36,2	0,230
	45	53 000	33,3	0,205
	45,5	54 500	33,5	0,206
	53,5	75 000	33,3	0,200
	54	82 000	35,8	0,160
	53	75 000	34,3	0,230
Ferro tondo di Fourchambault.....	45	54 500	33,5	0,210
	44,5	53 500	34,4	0,224
	49	63 000	33,5	0,225
	54	76 500	33,4	0,223
	54	78 000	34,1	0,243
	55,5	80 500	33,3	0,210

(*a*) *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, 2ª. edizione pag. 293.

(*b*) *Du fer dans les ponts suspendus*, *brochure* in 4°. 1832.

Ferro quadrato inglese di qualità superiore.	38,8	58 000	38,5	0,145
	38,8	56 000	37,5	0,166
	29	30 900	56,7	0,147
	25,5	23 300	35,8	0,197
	25,5	24 000	36,9	0,197
Ferro tondo inglese (*Best cable Crawshay*).	39	39 000	32,7	0,214
	32,8	29 400	34,9	0,232
	32	25 500	35,4	0,252
	28,5	21 500	33,7	0,203
	28,5 a 29	23 000	35,8	0,183
	25,5	17 000	33,3	0,143
	25,5	18 600	36,4	0,217
Ferro da gomene di Fourchambault.....	61	92 000	31,5	0,216
	57	81 000	31,7	
	57	80 400	31,5	0,201
	49	62 500	33,1	0,230
	45	53 900	33,9	0,176
	40,5	52 400	32,9	0,207
	33,5	30 000	34,0	0,195
	33,3	30 200	34,6	0,197
	29,7 a 29	22 400	33,2	0,188
	29,3	22 700	33,6	0,186
	29,5 a 29	22 500	33,8	0,186
	28,7 a 28,3	21 400	33,6	0,190
Ferro da gomene di Rigny.....	42,7 a 41,8	51 000	36,4	0,160
	34 a 33,8	26 900	29,8	0,226
	33 a 34	29 200	33,1	0,111
	33,5 a 33	31 200	35,9	
Ferro da gomene di Creuzot.....	63	102 000	32,8	0,089
	55,5	86 000	35,5	0,230
Ferro tondo di commercio di Creuzot..	37,5	39 500	35,8	0,225
	37,5	36 000	32,6	0,070
	37,5	41 500	36,7	0,218
Ferro da gomene di Saint-Chamond.....	45	58 000	36,5	0,183
	45	57 000	35,8	0,200
Ferro tondo proveniente dall'impasto di avanzi fatti al laminatojo di Guerigny...	45	51 000	32,1	0,241
Ferro tondo proveniente da avanzi di lamiera, *idem*.....	31,3	24 500	31,8	0,241

Resistenza della lamiera o ferro ridotto in lamine allo stendimento.

52. Risultamenti delle sperienze fatte dall' autore sopra pezzi di lamiera tirati nel senso della lunghezza. Le medesime sono state fatte, sospendendo immediatamente i pesi ai pezzi saggiati. Le dimensioni si sono misurate con esattezza.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	LARGHEZZA.	GROSSEZZA.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
Lamiera tirata nel senso del laminatojo.....	9	1,5	488	36,1
Idem.....	6,3	1,5	374	39,6
Idem.....	7,3	2,6	823	43,3
Idem.....	8,3	2,4	905	45,4
Idem.....	7,8	1,5	461	39,4
Idem.....	7,3	2,3	686	40,9
Medio.....	.....	.....	.....	40,8
Lamiera tirata perpendicolarmente al senso del laminatojo.....	6,1	1,0	241	39,5
Idem.....	7,2	2,2	551	33,5
Idem.....	7	1,5	351	33,5
Idem.....	7,3	1,1	316	39,3
Medio.....	.....	.....	.....	36,4

I pezzi cominciano ad allungarsi sensibilmente sotto pesi eguali alla metà o ai due terzi di quelli che producono la rottura.

Resistenza del fil di ferro allo stendimento.

53. Dietro Buffon (*a*), due fili di 2,26 millimetri di diametro sono stati rotti da pesi di 236 e 242$^{ch.}$, il che riviene a 60$^{ch.}$ a millimetro quadrato.

54. Resultamenti medî delle sperienze di M. Telfort (*b*).

DIAMETRO de' fili.	PESO producente la rottura.
poll. inglese.	lib. av.-du-poids.
$\frac{6}{70}$	531
$\frac{1}{10}$	738
$\frac{6}{100}$	277
$\frac{1}{11}$	157
$\frac{1}{10}$	630

Il risultamento medio è 63$^{ch.}$,6 a millimetro quadrato

55. Risultamenti delle sperienze di M. Séguin maggiore sopra fili di ferro tirati secondo la lunghezza. I diametri de' fili non sono stati misurati, ma calcolati dietro il peso di una porzione di filo di un metro di lunghezza, supponendo che il metro cubo pesi 7780 chilogrammi (*c*).

(*a*) Opere di Buffon, parte sperimentale, 4^{a}. memoria.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber* pag. 221; o pure *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 211.

(*c*) *Des ponts en fil de fer*, pag. 83 e 100.

INDICAZIONE DE' FILI.	DIAMETRI.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
Filo di ferro di Borgogna n°. 8, ricotto inegualmente.....	1,172	41,3	38,2
Idem. n°. 7, ricotto esattamente...	1,062	31,4	36,1
Idem. n°. 18, non ricotto.....	3,366	505,6	56,8
Idem. n°. 7, non ricotto.....	1,062	65,5	73,7
Filo dell'*Aigle* impiegato pei cardi.	0,2294	3,72	89,8
Filo detto *passe-perle* sufficientemente dolce.....	0,5917	23,6	85,7
Filo proveniente da una manifattura di Besançon,			
n°. 1, dolce.....	0,6188	25,96	86,1
2, dolce.....	0,7078	34,25	87
3, agro.....	0,7327	54,12	80,8
4, agro.....	0,838	42,3	76,6
5, agrissimo.....	0,9115	47,25	72,3
6.....	1,022	62,56	76,1
7.....	1,08	65,25	71,2
8, agrissimo.....	1,123	66,75	67,3
9, molto agro.....	1,293	91,74	69,8
10, dolcissimo	1,435	105	64,8
11, dolcissimo	1,476	100,25	58,6
12.....	1,691	124,8	55,5
13.....	1,8	145,5	57,2
14, dolcissimo, senza elasticità.	2,072	166,5	49,3
15.....	2,226	202	51,9
16, dolcissimo.....	2,489	311	63,9
17, sfoglioso.....	2,695	389	68,1
18.....	3,087	617	84
19.....	3,492	750	78,2
20.....	4,14	874,75	65,7
21.....	4,812	1138	62,5
22, agrissimo.....	5,449	1579	67,7
23, dolce.....	5,942	1738,5	62,6

56. Risultamenti delle sperienze di M. Dufour sopra fili di ferro tirati secondo la lunghezza. I diametri de' fili sono stati misurati con esatteza. I numeri sono i medî di molti saggi sopra ciascuna specie di filo (*a*).

(*a*) *Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève*, pag. 8 e seg.

INDICAZIONE DE' FILI.	DIAMETRI.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto sopra ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	chilogramml.	chilogrammi.
Fili provenienti dalla fabbrica la Ferriere n.° 4	0,85	48	84,4
13	1,9	196	69,1
17	2,75	382	64,3
19	3,7	776	72,2
Fili provenienti dalla fabbrica St-Gingolf, n.° 4	0,85	38,5	67,7
13	1,9	178	62,8
17	2,75	349	49,4
19	3,7	644	59,9

57. Alcune sperienze fatte a una temperatura di 6 a 8° sotto il zero avendo dato qualche indizio che il freddo facesse perdere ai fili una piccola parte della loro forza ($\frac{1}{18}$ o $\frac{1}{25}$), si fece passare un filo della fabbrica la Ferriere n°. 4 dentro tubi, dove era raffreddato a 22° $\frac{1}{2}$ sotto il zero, o riscaldato a 92° sopra il zero. Queste variazioni di temperatura non parvero avere alcuna influenza sensibile sulla forza del filo (*a*).

58. La forza del fil di ferro ricotto è stata trovata poco più della metà di quella del filo non ricotto.

59. La forza de' fili indicati non era diminuita, avvolgendoli ad un cilindro di $0^m,04$ di diametro (*b*).

60. Sperienze fatte da M. Lamé sopra i fili di ferro di Russia (*c*). Il diametro de' fili si è ricavato per mezzo del peso di una data lunghezza di filo, supponendo il

---

(*a*) *Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève*, p. 23.

(*b*) *Idem*, pag. 18.

(*c*) *Journal des voies de communication*, n°. 12, 1828.

peso del metro cubo di 7600$^{ch.}$. Il vero valore di un tal peso è tra 7600$^{ch.}$ e 7800$^{ch.}$.

NUMERI de' fili.	DIAMETRI.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
6	4,999	1457	74,2
7*	4,664	1042	61,0
9	3,743	800,5	72,7
10*	3,197	438,7	54,7
11*	3,086	358,1	47,9
12	2,687	410,2	72,3
13	2,190	376,4	99,9
14	1,902	277,9	97,8
16	1,497	208 7	118,5
17*	1,456	130,2	78,2
19	1,090	89,6	95,9
20	0,935	98,8	143,8

Le sperienze segnate * son tenute per difettose, essendosi il filo rotto nel punto di attacco.

61. Dietro le osservazioni di M. Vicat (*a*), l'allungamento del fil di ferro sotto la carica di un chilogrammo a millimetro quadrato della sezione trasversale, è:

pel fil di ferro n.° 18, di 0,0000579
n.° 17, 0,0000536

Resistenza del ferro fuso allo stendimento.

62. La tavola seguente presenta i risultamenti delle diverse sperienze fatte nel 1815 dai Sig^{i}. Minard e Desormes sopra pezzi cilindrici di ferro fuso, la cui gravità specifica era di 7,074.

(*a*) *Description du pont suspendu construit sur la Dordogne a Argentat*, pag. 22.

NUMERI delle mostre.	TEMPERATURA.	AREA della sezione trasversale.	CARICA producente la rottura	
			totale.	a millimetro quadrato.
	gradi centimetri.	millim. quadr.	chilogrammi.	chilogrammi.
1	— 6	330	3392	10,3
2	— 5	346	3542	10,23
3	— 5	363	3092	8,51
4	— 15	363	3720	10,27
5	+ 60	353	4020	11,39
11*	+ 72	346	3100	8,96
12*	+ 5	346	2720	7,86
13	+ 5	346	3670	10,6
6	+ 3	147	1920	13,06
7	+ 5	165	1920	11,63
8	+ 5	165	2140	13,89
9	+ 5	165	2360	14,3
10*	+ 5	165	1620	9,81

Le sperienze segnate * debbono esser rifiutate, giacchè i pezzi hanno presentato delle cavità nella massa. Trascurando queste, il risultamento medio delle prime otto è $10^{ch},21$; e quello delle ultime cinque è $13^{ch},22$ a millimetro quadrato.

63. Risultamenti delle sperienze del C.° Brown (*a*) sopra barre quadrate

RIQUADRATURA de' pezzi.	PESO producente la rottura.	
pollice inglese.	tonn.	quint.
1 $\frac{1}{4}$	11	7
	11	
	14	
	16	
1	11	10

Il risultamento medio riviene a $14^{ch},2$ a millimetro quadrato.

(*a*) *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 222 e 224.

64. Dietro gli sperimenti di M. G. Rennie (*a*), la forza di coesione pe' pezzi quadrati di lato $\frac{1}{4}$ di pollice inglese è, pel

ferro fuso orizzontalmente..... 1166 lib. (avoir-du-poids)
verticalmente..... 1218

Questi risultamenti rivengono a 13$^{cb.}$,1 e 13$^{cb.}$,7 a millimetro quadrato della sezione trasversale.

Resistenza del fil di rame allo stendimento.

65. Risultamenti delle sperienze fatte nel 1815 da' Sig^{i}. Minard e Desormes sopra la forza di coesione de' fili di rame rosso. La densità del rame era di 8,741.

INDICAZIONE DE' FILI.	DIAMETRI.	CARICA producente la rottura sopra un millimetro quadrato.	ALLUNGAMENTO prima della rottura.
	millimetri.	chilogrammi.	
Filo non ricotto.....	0,551	69,4	0,0084
Idem.....	1,478	49,4	0,0068
Idem.....	1,032	44,6	0,0037
Idem, dopo esser stato immerso nell'olio vicino ad infiammarsi.....	0,616	35,7	0,0091
Idem, dopo aver ricevuto 40 scariche elettriche di una piccola bottiglia di Leida.....	0,616	33,7	0,0018
Filo ricotto.....	0,551	24,4	0,164
Idem.....	1,032	21	0,167
Idem.....	1,478	22,3	0,197
Idem, nel vapore a 80°.....	1,032	21,7	0,154

(*a*) *Philosophical Transactions*, 1818. Annali di Chimica e di Fisica, settembre 1818.

66. Risultamenti delle sperienze di M. Dufour sopra fili di ottone tirati nel senso della lunghezza (*a*).

INDICAZIONE DE' FILI.	DIAMETRI.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
Filo n°. 4, molle, che può annodarsi.	0,85	48,5	85,2
Idem, ricotto.....		23,5	
Filo n°. 13, duro, crudo	1,9	117,5	41,4
Idem, ricotto.....		84	
Filo n°. 13.....		187,5	66,1
Idem, ricotto.....		100,5	

Resistenza di diversi metalli allo stendimento.

67. La tavola seguente contiene i principali risultamenti delle sperienze fatte nel 1815 da' Sig.^{i} Minard e Desormes, sopra pezzi cilindrici di metallo di cannone, la cui densità era di 8,16.

NUMERI de' pezzi.	TEMPERATURA.	DIAMETRI.	CARICHE producenti la rottura		ALLUNGAMENTO diviso per la lunghezza primitiva.
			totale.	a millimetro quadrato.	
	gradi Réaumur.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.	
1	— 6	14	3042	19,7	0,13
2*	+ 60	14	2692	17,5	
3	— 19	14	3442	22,3	
4	— 15	14	3620	23,5	0,14
5	+ 60	14	2920	19	0,13
6	+ 3	19	6330	22,4	0,15
7	+ 5	19,4	5940	20,1	0,14
8*	+ 5	19,4	5500	18,6	0,09
9	+ 60	19,4	6080	20,6	0,1
10	— 16	19,5	6330	21,2	0,12

(*a*) *Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève*, pag. 12, 23.

I pezzi segnati * presentavano delle cavità. Trascurando le due sperienze ad essi relative, il risultamento medio indica una forza di coesione di 21 chil. a millimetro quadrato della sezione trasversale.

68. Secondo gl'istessi ingegneri, la forza di coesione del piombo alla temperatura di 2° è di $1^{ch.},4$ a millimetro quadrato; e quella dello stagno alla temperatura di 22° è di 2 chilogr.

69. Dietro le sperienze di M. G. Rennie (*a*), la forza di coesione pe' pezzi quadrati di lato $\frac{1}{4}$ di pollice inglese è pel

	Libbre (avoir-du-poids).	Chilogrammi a millimetro quadrato.
Metallo di cannone duro....	2273	25,57
Rame battuto.....	2212	24,88
Rame fuso.....	1192	13,41
Rame giallo fino.....	1123	12,63
Stagno fuso.....	296	3,33
Piombo fuso.....	114	1,28

70. Risultamenti delle sperienze fatte dall'autore sopra pezzi stirati nel senso della lunghezza.

(*a*) *Philosophical Transactions*, 1818. Annali di chimica e di Fisica, settembre 1818.

INDICAZIONE DELLE SOSTANZE.	LARGHEZZA.	GROSSEZZA.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
Rame rosso in lamine..	11,2	1,2	269	20
Idem	11,6	1,8	463	22,2
Medio	.....	.....	.....	21,1
Piombo in lamine	30,4	3,3	166	1,65
Idem	20,2	3,3	116	1,74
Idem	14,7	3,3	78	1,61
Idem	31,2	2,4	63	0,84
Idem	29,6	2,4	86	1,21
Idem	16,5	2,4	41,3	1,04
Medio	.....	.....	.....	1,35

I pezzi han cominciato a stendersi sotto cariche che erano per quelli di rame circa la metà e per quelli di piombo tra la metà e i $\frac{2}{3}$ di quelle, che han prodotto la rottura.

71. Risultamenti delle sperienze fatte dai Sig.^{i} Tremery, e Poirier Saint-Brice (*a*). I numeri esprimono la forza di coesione sopra un millimetro quadrato della sezione trasversale.

	ch.
Ferro da fucina buonissimo.....	43,45
Lo stesso riscaldato al rosso scuro.....	7,80
Lamiera della migliore qualità.....	40,15
Idem.....	38,56
Rame in lamine di una eccellente qualità..	26,02

(*a*) *Annales des mines*, 2^{a}. serie, tomo 3, pag. 513.

Resistenza del vetro allo stendimento.

72. Risultamenti delle sperienze fatte dall'autore sopra pezzi stirati nel senso della lunghezza.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	DIAMETRO interno.	DIAMETRO esterno.	PESO producente la rottura.	PESO sostenuto per ogni millimetro quadrato.
	millimetri.	millimetri.	chilogrammi.	chilogrammi.
Tubo di vetro.....	2,3	4,85	44,4	3,1
Idem.....	3,45	7	71,9	2,47
Idem.....	3,45	6,95	65,9	2,3
Idem.....	2,45	5,6	40,4	2,03
Asta piena, di vetro....	.....	6,45	54,9	1,68
Parte della medesima asta.	.....	6,55	110	3,26
Asta piena, di cristallo.	.....	9,6	164	2,27
Media.....	.....	.....	.....	2,48

Resistenza del cordame allo stendimento.

73. Dietro le sperienze di Duhamel (*a*), la forza de' cordami aumenta in una proporzione un poco maggiore del loro peso. Aumenta ancora in maggior proporzione del numero de' fili che le compongono, il che può attribuirsi all' essere i fili nelle corde grosse meno indeboliti dalla torsione.

A peso eguale le corde nuove incatramate son più deboli delle bianche; togliendo il peso del catrame sono presso a poco della stessa forza. Ma il catrame coll' an-

---

(*a*) *Traité de l'art de la corderie*, o articolo *cordages* del dizionario di marina dell'Enciclopedia metodica.

dar del tempo diminuisce la forza della canape, e in generale i cordami bianchi hanno più durata di quelli incatramati, anche quando sono esposti ad esser bagnati e asciugati alternativamente. Inzuppando i cordami di grasso o di olio se ne diminuisce la forza senza procurare ad essi una più lunga durata.

Si può conchiudere come risultamento medio, che chiamando d il diametro di una corda bianca in centimetri, il peso capace di romperla è espresso da

$$400d^2 \text{ chilogrammi}$$

74. Secondo Coulomb, le corde bianche sostengono fino a 50 o 60$^{ch.}$ a filassa, ma non si deve caricarle di più di 40$^{ch.}$.

Le corde incatramate non sostengono che i $\frac{2}{3}$ o i $\frac{3}{4}$ delle corde bianche (*a*).

75. Principali risultamenti delle sperienze sulla forza de' cordami fatte da M. di Noirfontaine, Capitano del genio (*b*). Desse sono state fatte per mezzo di una leva.

(*a*) *Mémoires des savans étrangers*, tomo X, pag. 285.

(*b*) *Mémoire sur les ponts de cordages construits à Metz en 1827. Mémorial de l'officier du génie*, n°. 10.

INDICAZIONE DE' CORDAMI.	DIAMETRO.	CARICA.	ALLUNGAMENTO diviso per la lunghezza primitiva.	RESISTENZA a millimetro quadrato.
	millimetri.	chilogrammi.		chilogrammi.
Gherlino nuovo di canape di Strasburgo.....	13	1050	0,17	
		1250	rotto.	9,5
Idem, riunito da una impiombatura tripla.....		1048		
		1128	rotto.	8,6
Cavo nuovo di canape di Lorena.....	14	1090	rotto.	7,1
Gherlino nuovo di canape di Lorena.....	16	850	0,15	
		1090	0,17	
		1210	rotto.	6,04
Gherlino nuovo di canape di Strasburgo.....	17	848	0,12	
		1648	0,17	
		1808	rotto.	8,5
Cavo nuovo di canape di Lorena.....	23	850	0,15	
		2450	rotto.	5,9
Gherlino nuovo di canape di Lorena.....	23	1650	0,11	
		3010	rotto.	7,3
Vecchia corda.....	23	1680	rotto.	4,09
Gherlino nuovo di canape di Strasburgo.....	25	2500	0,14	
		3000	rotto.	6,3
Idem.....	28	2000	0,14	
		3290	0,27	
		3710	rotto.	6
Idem.....	33	3000	0,13	
		4340	0,14	
		4480	rotto.	5,4
La stessa corda formata a cappio per mezzo di una impiombatura tripla.....		8365	rotta.	5,1
Vecchia corda di capra..	34	4000	rotta.	4,4
Gherlino nuovo di canape di Strasburgo.....	40	3255	0,05	
		5365	0,15	
		7119	rotto.	5,6
La stessa corda formata a cappio per mezzo di una impiombatura tripla.....		13700	rotta.	5,5
		3815	0,07	
Cavo nuovo di canape di Strasburgo.....	40	6342	0,13	
		7392	rotto.	5,9
Idem.....	54	4000	0,07	
		9501	0,14	
		11091	rotto.	4,85

Le corde che non cedevano sotto una certa carica sostenuta per alcuni minuti, si rompevano quando l'azione della stessa carica si prolungava per molte ore. La natura della canape può cangiare di più di $\frac{1}{4}$ la resistenza delle funi della stessa grossezza. La resistenza media delle corde dev' esser valutata di 5 a 6 chil. a millimetro quadrato della sezione trasversale: ma non si deve farc che sostengano più della metà di questo sforzo.

ARTICOLO III.

Della resistenza di un corpo prismatico alla flessione prodotta da uno sforzo diretto perpendicolarmente alla sua lunghezza.

76. Quando un corpo prismatico è stirato secondo la lunghezza, tutti gli elementi longitudinali o fibre si allungano. Se lo stesso corpo è compresso e non può cedere piegando, le fibre si accorciano. Allorchè gli allungamenti o accorciamenti sono piccolissimi, sono proporzionali allo sforzo che li produce. D' altronde la variazione di lunghezza di un corpo, per uno sforzo dato, evidentemente è proporzionale alla lunghezza del medesimo.

77. Quando un corpo prismatico è piegato, le fibre poste dalla parte della faccia convessa sono allungate; quelle dal lato della faccia concava sono accorciate; alcune fibre, situate nell' interno del corpo, conservano una lunghezza invariabile. Ammettendo, in conformità di ciò che è stato detto quì sopra, che le resistenze opposte dalle fibre agli allungamenti ed accorciamenti sieno proporzionali alle quantità di cui variano le lunghezze

di queste medesime fibre, possiamo renderci ragione del modo come un corpo resiste alla flessione.

Sia un solido prismatico dritto (Fig. 1), incastrato orizzontalmente all' estremo A, e piegato dall' azione di un peso P sospeso all' altro estremo B. Consideriamo una sezione trasversale qualunque *mana'*. Sia *aa'* la linea orizzontale che è la sezione delle fibre la cui lunghezza non ha variato. Per l' equilibrio della parte del corpo situato a dritta di *mana'*, è necessario: 1°. che le stensioni e compressioni delle fibre abbiano fatto nascere in questa sezione delle forze verticali, la cui somma sia uguale al peso P; 2.° che la somma delle forze orizzontali prodotte da queste stensioni e compressioni sia nulla; 3.° che la somma de' momenti delle forze verticali e orizzontali di cui si tratta e del peso P presa rapporto all' asse fisso *aa'* sia nulla.

Si chiamerà

E la forza necessaria ad allungare od accorciare un prisma la cui sezione trasversale è l' unità superficiale, di una quantità eguale alla lunghezza di questo prisma.

ρ il raggio osculatore della curva del solido, al punto in cui è fatta la sezione trasversale *mana'*.

u l' ascissa d' un punto qualunque della sezione *ama'n* contata sopra *aa'*.

v l' ordinata d' un punto qualunque di questa sezione, presa perpendicolarmente ad *aa'*.

b il massimo valore di u.

f,u l' ordinata *pm* della curva che termina la parte della sezione trasversale in cui le fibre si allungano,

f,u l' ordinata *pn* della curva che termina la parte in cui le fibre si accorciano.

x la distanza della sezione trasversale $ama'n$ dall' estremità incastrata.

a la distanza del punto d' applicazione P dall' estremità incastrata, distanza che non differisce sensibilmente dalla lunghezza AB del solido.

Nello stato naturale del corpo dx è la lunghezza della porzione infinitamente piccola della fibra le cui coordinate sono u, v. Dopo la flessione questa lunghezza è aumentata di $\frac{dx}{\rho} v$, perchè l' angolo delle due normali consecutive è $\frac{dx}{\rho}$. La proporzione, secondo la quale questa fibra si è allungata, è dunque

$$\frac{\frac{dx}{\rho} v}{dx}, \text{ ovvero } \frac{v}{\rho}.$$

Essendo $dudv$ l' area della sezione trasversale della fibra, la resistenza ch' essa oppone all' allungamento è

$$\mathrm{E}.dudv.\frac{v}{\rho};$$

e il momento di questa resistenza, preso per rapporto all' asse aa', è

$$\mathrm{E}.dudv.\frac{v^2}{\rho}.$$

Per conseguenza le somme delle resistenze delle fibre stese e di quelle compresse sono rispettivamente

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v, \quad \frac{\mathrm{E}}{\rho}\int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v,$$

e la somma de' momenti di queste resistenze presi per rapporto all' asse aa', è

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v^2\right).$$

78. Si avrà dunque per esprimere l' equilibrio delle forze orizzontali,

$$\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v = \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv \,.\, v \,,$$

condizione che determina la situazione dell' asse aa'.

Questo asse passa pel centro di gravità della sezione trasversale $mana'$.

79. Si avrà in seguito, per esprimere l' equilibrio di rotazione attorno il medesimo asse,

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv \,.\, v^2\right) = P(a - x) \quad (*).$$

(*) Le due equazioni stabilite per l' equilibrio del solido AB nel caso in cui la flessione è piccolissima, e la spessezza del solido è anche piccola rispetto alla sua lunghezza, possono desumersi da principî più semplici.

Infatti dovendosi le condizioni di equilibrio ricavare dalla forma particolare del sistema, si vede che dal non poter questo solido prender moto progressivo, almeno nel senso assegnato a questa espressione, basterà assicurare il solo moto di rotazione. Concependo nella sezione $ama'n$ una linea orizzontale aa' intorno alla quale la rotazione si esegue, e considerando che $E\,.\,dudv.\,\frac{v}{\rho}$ è precisamente la resistenza che sviluppa una fibra qualunque di questa sezione nel senso della curva, e che il suo momento rapporto all' asse aa' è $E\,.\,dudv.\,\frac{v^2}{\rho}$, si ricava subito l' equazione

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv \,.\, v^2\right) = P(a - x).$$

Affinchè il solido possa piegarsi conviene, che le fibre situate alla faccia convessa si distendano e quelle situate alla faccia concava si comprimano, e che per ogni sezione trasversale vi sia una

Si trascurano i momenti delle forze verticali, ciò che è permesso quando la spessezza del corpo è piccola rapporto alla sua lunghezza. D' altronde è necessaria questa condizione affinchè gli allungamenti ed accorciamenti delle fibre e le forze interne che ne risultano sieno tali quali quí si suppongono; e i risultamenti seguenti non possono esser applicati, quando questa condizione non è soddisfatta (*).

---

linea orizzontale intorno alla quale la rotazione si esegue. Essendo questa linea determinata in ogni sezione dalle medesime condizioni, l'insieme di tutte queste linee costituirà una superficie orizzontale o lama, la cui projezione nel piano verticale dà la curva dell'equazione ottenuta, considerando il primo membro come eguale ad una quantità costante divisa per ρ. La condizione che in ogni sezione determina l' asse di rotazione è, che la somma delle resistenze delle fibre allungate sia eguale alla somma delle resistenze delle fibre compresse; e poichè la resistenza di una fibra è $E.dudv.\frac{v}{\rho}$, l'enunciata condizione evidentemente sarà espressa dall' equazione

$$\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv\,.\,v = \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv\ v.$$

La prima di queste equazioni dà le condizioni di equilibrio tra i momenti delle forze, la seconda è una equazione di condizione che fissa la posizione dell' asse.

(*) Qualunque sia la spessezza del corpo relativamente alla sua lunghezza, e sia grande o piccola la flessione, il primo membro di questa equazione non varia. Il secondo membro poi varia a tenore delle forze che agiscono sul corpo.

Supponiamo per maggior generalità che il solido sia caricato di forze qualunque, le quali lo abbiano fatto piegare secondo una curva. Sarà sempre facile esprimere la somma delle forze verticali e orizzontali, che agiscono dalla estremità non incastrata fino

80. La quantità

$$E\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv\,.\,v^2+\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv\,.\,v^2\right)$$

ha un valore che dipende dalla natura del corpo e dalla

---

alla sezione che si considera; non che la somma de' loro momenti. Riguardo alle forze che si sviluppano nella sezione $ama'n$, è evidente che qualunque esse sieno, potranno sempre ridursi a forze secondo la tangente e forze secondo la normale. Decomposte queste in forze verticali e orizzontali, e presine i rispettivi momenti, la somma di questi momenti comporrà il primo membro dell' equazione di sopra. Ma è da riflettere che questi momenti debbono esser identici a quelli che si ottengono prendendoli sulle forze dirette secondo la normale e quelle secondo la tangente. Ora i momenti delle prime sono nulli; non restano perciò che le forze secondo la tangente, le quali debbono esser decomposte in forze orizzontali e verticali per prenderne i momenti. Queste ultime forze possono esser di due specie; o forze che si sviluppano per eguale distensione di tutte le fibre della sezione, o quelle che provengono dalle distensioni che prova il solido per l'incurvamento, le quali sono nulle nell' asse di equilibrio, e crescono proporzionalmente dopo quest' asse fino alla fibra più lontana. Le prime forze non potendo indurre rotazione non debbono esser considerate; e d'altronde si vede che essendo tutte eguali e dirette nel medesimo senso, la somma de' loro momenti è nulla per la condizione istessa che fissa la posizione dell' asse di equilibrio. Non restano adunque che le forze sviluppate per effetto della flessione, le quali sia che si decompongano in forze orizzontali e verticali e poi se ne prendano i momenti, sia che si prendano direttamente i momenti di queste forze, si otterrà sempre l' espressione

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv+\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv\right),$$

come è facile assicurarsi, effettuando il calcolo. Dunque, sebbene

figura della sezione trasversale. Dessa è il *momento della resistenza alla flessione*, o più semplicemente il *momento di flessione* del corpo. Noi lo rappresenteremo in seguito per mezzo della lettera ε. Quando la figura della sezione trasversale del solido può esser divisa da una linea orizzontale in due parti simmetriche, questa linea è l' asse di equilibrio che contiene le fibre invariabili, e a partir dalla quale bisogna prendere il valore dell' integrale

$$E\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv\,.\,v^2,$$

il cui doppio è allora il valore del momento di resistenza alla flessione. Nel caso contrario, bisogna prima determinare la posizione dell' asse di equilibrio, per mezzo della condizione espressa nel n°. 78, e calcolare poi separatamente i valori de' due integrali che entrano nell' espressione di questo momento (*).

---

sia vero che i momenti delle forze verticali sono trascurabili quando la flessione è picciolissima, non può dirsi che questi si trascurano giacchè la loro somma è nulla, almeno nella ipotesi che l' asse di equilibrio sia determinato per mezzo dell' equazione del n°. 78; ed il primo membro dell' equazione del n°. 79 contiene precisamente i momenti di tutte le forze che si sviluppano per opporsi al moto rotatorio.

Il secondo membro poi conterrà la somma de' momenti di tutte le forze che agiscono dall' estremità B sino alla sezione $ama'n$. Quando poi vi agisce il solo peso P all' estremità e la flessione non è piccolissima, la quantità a non esprime più la lunghezza del solido, ma la distanza orizzontale delle due estremità dopo la flessione.

(*) Allorchè la flessione non è piccolissima, il solido ricevendo un allungamento uniforme per tutta la sezione, si è già detto

81. Se la figura della sezione è un rettangolo (Fig. 2), di cui b e c sieno la larghezza e l' altezza, il valore del momento di resistenza alla flessione è

$$\varepsilon = 2E\int_0^b du\int_0^{\frac{1}{2}c} dv\,.\,v^2 = E\frac{bc^3}{12}.$$

Quindi la resistenza alla flessione è proporzionale alla larghezza e al cubo dell' altezza del solido.

82. Se questa figura (Fig. 3.) è formata di due triangoli eguali, i cui lati sieno p e q, il valore del momento di flessione è

$$\varepsilon = 2E\int_0^p du\int_0^{\frac{qu}{p}} dv\,.\,v^2 = E\,\frac{pq^3}{6}.$$

83. Se la figura della sezione trasversale è un rettangolo, del quale b e c sieno i lati, e se l'asse orizzontale che contiene le fibre invariabili forma l' angolo φ col lato b, si avrà pel momento della resistenza alla flessione

$$\varepsilon = E\,\frac{b^3c\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + bc^3\cos^2\varphi}{12}.$$

Quindi un pezzo a base quadrata resiste egualmente in tutti i sensi alla flessione. Dippiù, se la base è un rettangolo di cui b è il lato maggiore, il minimo valore

---

che oltre le forze sviluppate per effetto della flessione, vi sono quelle che si sviluppano per effetto di quest'allungamento. Quest' ultime faranno discender più sotto l' asse delle fibre invariabili. Intanto bisogna considerare che la rotazione si esegua sempre intorno all' asse determinato dall' equazione del n°. 78, e da questo asse bisogna contare i momenti delle forze sviluppate in virtù della flessione. Per conseguenza l' asse di equilibrio o di rotazione non è sempre l' asse delle fibre invariabili.

del momento ha luogo quando il pezzo piega nel senso del lato *c*.

84. Quando la figura della sezione trasversale è un cerchio di raggio r, l'espressione generale del momento ε diviene

$$\varepsilon = 2\,\mathrm{E}\int_{-r}^{r} du \int_{0}^{\sqrt{r^2-u^2}} dv\,.\,v^2 = 2\,\mathrm{E}\int_{-r}^{r} du\,.\,\frac{1}{3}\,(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2\,\mathrm{E}\,.\,2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} dx\,.\,\frac{r^4}{3}\,\mathrm{sen.}^4\,x = \mathrm{E}\,\frac{\pi r^4}{4}\,.$$

Si conchiude da ciò che precede, che le resistenze alla flessione del quadrato e del cerchio che gli è iscritto, sono tra loro nel rapporto di 1 a $\frac{3\pi}{16}$

85. Il momento di flessione di un tubo è la differenza de' momenti di flessione di due cilindri. Se si chiami r' il raggio esterno, ed r'' il raggio interno del tubo, sarà

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{\pi\,(r'^4 - r''^4)}{4}\ (*).$$

(*) I valori ottenuti di ε per le diverse sezioni considerate sono relativi al caso in cui l'asse di equilibrio sia determinato per mezzo dell'equazione del n°. 78. Questa equazione è fondata sull'ipotesi che la materia del solido presenti alla compressione ed alla stensione la medesima resistenza. Quantunque ciò sia vero ne' primi istanti della flessione piccolissima, nondimeno volendo tener conto di questa circostanza, rappresentando per m il rapporto delle due resistenze, le due equazioni di equilibrio diverranno

$$\int_0^b du \int_0^{f_1 u} v\,dv = m \int_0^b du \int_0^{f_2 u} v\,dv\ ,$$

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv\ v^2 + m\int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv\,.\,v^2\right) = \mathrm{P}(a-x)\ ,$$

86. Consideriamo, come nel n°. 77, un solido prismatico dritto (Fig. 5.) incastrato orizzontalmente in una

---

nelle quali E rappresenta la forza necessaria per allungare un solido che ha per sezione trasversale l'unità di superficie di quanto è la sua lunghezza primitiva. In questo caso determinata la situazione dell'asse di equilibrio per mezzo della prima equazione sarà facile trovare l'espressione di

$$E\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv + m\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv\right).$$

Bisogna avvertire intanto che qualunque sia la situazione dell'asse di equilibrio, il rapporto delle resistenze alla flessione non varia. Si troverà infatti esser sempre ϵ proporzionale a c^3 pel caso della sezione rettangolare, ad r^4 per la sezione circolare, e così di seguito. Per esempio, nel caso della sezione rettangolare, la situazione dell'asse di equilibrio dipendendo dal rapporto delle due resistenze all'allungamento ed alla compressione, qualunque sia l'altezza c, le due parti sulle quali essa resta divisa dall'asse di equilibrio saranno proporzionali all'altezza medesima; e perciò ciascuno de' due integrali

$$\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv,\quad m\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv\ ,$$

e quindi anche la loro somma sarà proporzionale a c^5.

Infatti si ha dalla prima equazione

$$\frac{bv^2}{2} = \frac{mb(c-v)^2}{2},\ \text{ovvero}\ v^2 = m(c-v)^2,$$

da cui si ottiene

$$v = c.\ \frac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

e quindi

$$f_1 u = c.\ \frac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},\quad f_2 u = c\ \frac{1}{1+\sqrt{m}}.$$

estremità, e caricato di un peso nell'altra estremità M. Chiamiamo

x l'ascissa Ap di un punto m della curva del solido, contata sulla orizzontale AB;

y l'ordinata pm;

ρ il raggio del cerchio osculatore della curva del solido in m;

P il peso posto in M.

a la distanza orizzontale AB delle due estremità del solido;

f l'ordinata BM dell'estremità della curva;

s la lunghezza AmM del solido;

α l'angolo formato dalla tangente della curva in M colla orizzontale;

Si ha poi

$$\varepsilon = \frac{bc^3}{3} \cdot \frac{\mathrm{E}\,m}{(1+\sqrt{m})^2};$$

e chiamando E′ il coefficiente della resistenza alla compressione, si ha

$$\varepsilon = \frac{bc^3}{3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{\mathrm{E}}}+\sqrt{\frac{1}{\mathrm{E}'}}\right)^2},$$

giacchè $m = \frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}}$. Se E′ è uguale all'infinito, nel qual caso l'asse di rotazione è nella faccia concava, si ha

$$\varepsilon = \mathrm{E}\frac{bc^3}{3};$$

e se E è uguale all'infinito, cioè se la rotazione si esegue nella faccia convessa, si ha

$$\varepsilon = \mathrm{E}'\frac{bc^3}{3}.$$

Quando $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$ si ottiene il risultamento del n°. 81.

ε il valore del momento di resistenza alla flessione del solido, di cui l'espressione generale è data n°. 80.

L'equazione di equilibrio del n°. 79 è

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a - x),$$

cioè

$$\varepsilon \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P(a - x);$$

e potendosi nel caso di una flessione piccolissima trascurare il quadrato di $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

$$s = a + \frac{3f^2}{5a},$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{3f}{2a}.$$

87. Quando il solido è posto orizzontalmente sopra due appoggi (Fig. 6), le equazioni precedenti convengono alla curva formata da ciascuna metà. Chiamando

f la freccia AC della curva del solido;

$2P$ il peso sospeso nel mezzo del solido;

$2a$ la distanza MM′ degli appoggi

$2s$ la lunghezza MAM′ del solido tra gli appoggi;

α l'inclinazione della curva all'estremità M.

Si ha, supponendo la curvatura del solido piccolissima,

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

$$f = \frac{2P}{\varepsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48},$$

$$s = a + \frac{3f^2}{5a},$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{3f}{2a}.$$

La freccia della curva è proporzionale al peso 2P, e al cubo della distanza degli appoggi.

88. Considerando sempre come nel n°. 86 un solido prismatico dritto (Fig. 7.) incastrato orizzontalmente in una estremità, si può supporre che sia caricato in tutti i punti della sua lunghezza di pesi distribuiti di una maniera qualunque. Chiamando

x, y le coordinate orrizzontale e verticale d'un punto qualunque m della curva del solido,

x' l'ascissa di un punto qualunque m' situato tra m e l'estremità M;

a la distanza AB;

p' il valore del peso sospeso in m' rapportato all'unità di lunghezza dell'ascissa, in modo che $p'dx'$ è il peso sostenuto dall'elemento la cui projezione è dx' (La quantità p' si suppone data in funzione di x');

f l'ordinata BM dell'estremità della curva. Si avrà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \int_x^a dx' \cdot p'(x' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \int_0^x dx \int_x^a dx' \cdot p'(x' - x),$$

$$\varepsilon y = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_x^a dx' \cdot p'(x' - x).$$

89. Se i pesi sostenuti da ciascuno elemento della lunghezza del solido sono eguali, ciò che comprende il caso in cui questi pesi fossero quelli stessi degli elementi, p' avrà un valore costante p, e si avrà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8},$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{4f}{3a}.$$

pa è il peso totale ripartito sulla lunghezza del solido. Se questo peso fosse applicato in M, secondo il n°. 86, l'abbassamento di questo punto sarebbe maggiore, nel rapporto di 8 a 3.

90. Quando un solido, posto orizzontalmente sopra due appoggi (Fig. 8), è caricato da pesi distribuiti uniformente sull' intera lunghezza, ogni metà è nel caso stesso che se, essendo incastrata orizzontalmente a una estremità, fosse piegata nel tempo stesso da pesi distribuiti uniformemente sulla sua lunghezza e da una forza eguale alla somma di questi pesi e agente in senso contrario all' altra estremità. Si ha dunque

$$\varepsilon y = p\,a\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5a^4}{24},$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{8f}{5a}.$$

Pel n°. 87, se il peso $2pa$ fosse sospeso nel mezzo del solido, in luogo di esser ripartito uniformente sull' intera lunghezza, la freccia sarebbe maggiore nel rapporto di 8 a 5. Questi risultamenti sono confermati dalla sperienza.

91. Per applicare i precedenti risultamenti a un corpo dato, bisognerà sostituire in luogo di ε l'espressione del momento di flessione che conviene alla figura della sezione trasversale, conforme ai n^{i}. 80 e seg. Si darà poscia alla costante ε (n°. 77) il valore che conviene alla natura del corpo, e che dev' esser determinato dalla osservazione.

Le sperienze più atte a determinare questo valore consistono a situare orizzontalmente un solido prismatico sopra due appoggi, a caricarlo nel mezzo di un peso, e ad osservare la freccia della curvatura da esso prodotta. Se la sezione trasversale del solido è un rettangolo (Fig. 2), i lati del quale sieno b e c, si ha (n°. 81), $\varepsilon = \mathrm{E}\frac{bc^3}{12}$, e (n°. 87) $f = \frac{2\mathrm{P}}{\varepsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48}$: dunque

$$f = \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}} \cdot \frac{(2a)^3}{4.bc^3}, \quad \mathrm{E} = 2\mathrm{P} \cdot \frac{(2a)^3}{4.bc^3.f};$$

essendo $2a$ la distanza degli appoggi, e 2P il peso posto nel mezzo della lunghezza del solido.

Se la sezione trasversale è un cerchio, chiamando r il raggio, si ha

$$f = \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{E}} \cdot \frac{(2a)^3}{12\pi r^4}, \quad \mathrm{E} = 2\mathrm{P} \cdot \frac{(2a)^3}{12\pi r^4 f}.$$

92. Qualche volta si deve tener conto dell' azione del peso del solido; il che si fa (n°. 90) aggiungendo a 2P i $\frac{5}{8}$ di questo peso. Rappresentandolo per 2Π, si ha pel

caso di una sezione rettangolare

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2\Pi)}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{4.bc^3}, \quad E = (2P + \tfrac{5}{8}.2\Pi)\frac{(2a)^3}{4bc^3 f};$$

e pel caso di una sezione circolare

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2\Pi)}{E} \cdot \frac{2a^3}{12\pi r^4}, \quad E = (2P + \tfrac{5}{8}.2\Pi)\frac{(2a)^3}{12\pi r^4 f}.$$

93. Si osserverà finalmente, che non è necessario conoscere i valori assoluti del peso posto nel mezzo del solido e della freccia di curvatura corrispondente, ma solamente l'accrescimento della freccia di curvatura che corrisponde ad un dato aumento del peso. Infatti chiamando P', P'' due valori successivi di P, ed f', f'' i due valori corrispondenti di f, l'una o l'altra delle equazioni precedenti dà per una sezione rettangolare

$$E = (2P'' - 2P')\frac{(2a)^3}{4bc^3(f'' - f')}.$$

Veniamo ora ad esporre i risultamenti delle sperienze conosciute, dietro le quali si possono determinare i valori della costante E, che convengono a' diversi corpi. Dessi non possono esser dati esattamente, che col mezzo di sperienze nelle quali la flessione è piccolissima. Quando la stensione o la compressione delle fibre si avvicina al termine, in cui dee aver luogo la rottura, la loro resistenza cessa ordinariamente di esser esattamente proporzionale allo stendimento o alla compressione, come si è supposto ne' n^{i}. 76 e 77; la quale circostanza si esprime dicendo che l'elasticità è alterata.

Resistenza della pietra alla flessione.

94. Risultamenti delle sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre rettangolari di marmo e di pietra poste orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*a*).

INDICAZIONE DE' PEZZI.	DISTANZA degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	pollici.	pollici.	libbre.	pollici.
Marmo bianco statuario purissimo. Gravita specifica 2,706.	30	1,075	1,075	10 20 30	0,02 0,045 0,06
Pietra calcarea di Portland, bruna. Gravità specifica 2,113.....	24	2	1,45	10 20 30 40	0,01 0,015 0,02 0,022
Grès bianco siliceo di Long-Annet. Gravita specifica 2,212. .	18	1,45	1,525	20 30 40 50 60	0,015 0,02 0,022 0,025 0,03

Resistenza del legname alla flessione.

95. Risultamenti delle sperienze fatte da Duhamel (*b*), sopra pezzi di quercia posti orizzontalmente sopra due appoggi, e caricati nel mezzo della lunghezza. La di-

---

(*a*) *The philosophical magazine and journal*, vol. 56, p. 290.
(*b*) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1768.

stanza degli appoggi è 23 piedi, e il peso posto nel mezzo della lunghezza è 7591 libbre.

LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	FRECCIA della curvatura.
pollici.	pollici.	pollici.
10	9	$3\frac{1}{2}$
10	$11\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
12	13	1

Si conchiude da queste sperienze, per mezzo della formola del n°. 92, che il valor medio della costante E, preso il metro per unità di lunghezza, e il chilogrammo per unità di peso, è per lo legname di quercia

$$E = 1012\,000\,000^{ch}.$$

Risulta da ciò che un pezzo di quercia sostenendo una tensione longitudinale di 1^{ch} sopra un millimetro quadrato della sezione trasversale, si allunga di $\frac{1}{1012}$.

96. Risultamenti medî degli sperimenti fatti da M. Aubry (*a*) sopra pezzi di legname di quercia posti orizzontalmente sopra due appoggi e caricati nel mezzo. Qui non si sono inserite le particolarità delle cariche e delle frecce di curvatura corrispondenti osservate dall'autore; ma soltanto i numeri medî, proprî a indicare i rapporti

---

(*a*) *Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques*, pag. 55 e 66.

delle cariche alle freccie che da queste osservazioni risultano.

INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA. di curvatura.
piedi.	pollici.	pollici.	libbre.	linee.
12	3	3	169	12
5	1	2,5	35	2

97. Risultamenti medî degli sperimenti fatti a Corcira nel 1811 da M. C. Dupin (*a*) sopra legnami di diverse specie. L' intervallo degli appoggi era di 2^m.

LEGNAMI sottoposti alle sperienze.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	metro.	metro.	chilogrammi.	metro.
Quercia di demolizione, tagliata da 25 anni...	0,03	0,03	4	0,00585
Cipresso, tagliato da un anno.....	0,03	0,03	4	0,0072
Faggio, tagliato da un anno.....	0,03	0,03	4	0,0089
Abete di demolizione, tagliato da 25 anni.....	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0072
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,007
	0,05	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,005

(*a*) *Journal de l'École Polytechnique*, 17e *cahier*.

La prima sperienza sul legname di quercia dà pel valore della costante E,

$$E = 1\,688\,000\,000^{ch.}.$$

Le sperienze sul legname di abete danno per valore medio della stessa costante

$$E = 1\,029\,000\,000^{ch.}.$$

98. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Rondelet (*a*) sopra pezzi di legname di quercia e di abete. I pezzi avevano un pollice di riquadratura.

LEGNAME sottoposto alla sperienza.	INTERVALLO degli appoggi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	libbre.	linee.
Quercia.....	42	100	11,5
Abete.....	42	100	11

Si deduce da queste sperienze che il valore della costante E, per la quercia e per l' abete, è circa

$$E = 1300\,000\,000^{ch.}.$$

99. Risultamenti medî delle sperienze di M. Barlow, sull' elasticità di diverse specie di legnami (*b*).

Tutti i pezzi hanno 2 pollici inglesi di riquadratura.

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 514.

(*b*) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 180.

INDICAZIONE DE' LEGNAMI.	GRAVITA' specifica.	DISTANZA degli appoggi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.	NUMERI proporzionali all'elasticità.
		piedi.	lib. av. du-poids.	pollici.	
Teak.....	0,745	7	300	1,151	9658
Poon.....	0,579	7	150	0,228	6760
Quercia inglese.....	0,969	7	150	1,590	3495
Idem.....	0,934	7	200	1,280	5806
Quercia del Canadà.	0,872	7	225	1,080	8596
Quercia di Danzica.	0,756	7	200	1,590	4766
Quercia dell' Adriatico.....	0,993	7	150	1,430	3886
Frassino.....	0,760	7	225	1,266	6581
Faggio.....	0,696	7	150	1,026	5417
Olmo.....	0,553	7	125	1,685	2799
Abete picea (*pitch pine*).....	0,660	7	150	1,134	4900
Pino rosso.....	0,657	7	150	0,755	7360
Abete della Nuova Inghilterra.....	0,553	7	150	0,931	5967
Abete di Riga,.....	0,753	7	125	0,870	5315
Idem.....	0,738	6	150	0,883	3963
Abete di *Marforest*.	0,696	7	125	1,442	2581
Idem.....	0,693	6	150	1,006	3478
Idem.....	0,703	6	150	1,006	3478
Larice.....	0,531	7	125	1,885	2465
Idem.....	0,522	6	125	0,812	3591
Idem.....	0,556	6	150	0,831	4211
Idem.....	0,560	6	150	0,831	4211
Espares di Norvegia (abete).....	0,577	6	200	0,800	5832

La prima mostra di quercia inglese era di una qualità inferiore.

I numeri dell' ultima colonna moltiplicati per 175700 daranno i valori della costante E riferiti al metro per unità di lunghezza e al chilogrammo per unità di peso. Quindi per lo legname di quercia, il massimo valore di questa quantità dato dalla sperienza sulla quercia del Canadà, è

$$E = 1\,510\,000\,000^{ch.};$$

e il minimo valore, dato dalla sperienza sulla quercia

dell' Adriatico, è

$$E = 683\,000\,000^{ch.}.$$

Per l' abete, il massimo valore dato dalla sperienza sul pino rosso, è

$$E = 1293\,000\,000^{ch.};$$

e il minimo valore, ricavato dal risultamento medio delle sperienze sull' abete della foresta di Mar nella Scozia, è

$$E = 558\,500\,000^{ch.}.$$

M. Barlow dà inoltre (*a*) una serie di sperienze sopra verghe di abete. Il risultamento medio corrisponde al valore

$$E = 934\,000\,000^{ch.}.$$

100. Risultamenti medî delle sperienze sulla flessione del legname di quercia, fatte in Inghilterra da' Sig^{i}. Ebbels e Tredgold (*b*). I pezzi erano posti orizzontalmente sopra due appoggi e caricati nel mezzo. Tutti avevano un pollice di riquadratura.

SPECIE DI QUERCIA.	GRAVITA' specifica.	INTERVALLO degli appoggi.	PESO producente l'inflession.	FRECCIA di curvatura.
		piedi inglesi.	libbre avoir-du poids.	pollici inglesi.
Legname vecchio di vascello.....	0,872	2,5	127	0,5
Quercia giovane, *King's Langley, Herts*.....	0,863	2	237	0,5
Quercia di Beaulieu, Hants.	0,616	2,5	78	0.5
Idem, altro pezzo.....	0,736	2,5	65	0,5
Quercia di un vecchio albero.....	0,625	2	103	0,5
Quercia di Riga.....	0,688	2,5	233	8,5
Quercia inglese.....	0,748	2,5	137	0,5
Quercia verde, inglese..	0,763	2,5	96	0,5
Quercia di Danzica, secca.	0,755	2,5	148	0,5
Quercia (*quercus sessiliflora*).....		2	149	0,35
Quercia (*quercus robur*).		2	167	0,35

(*a*) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 125.
(*b*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 34.

101. Risultamenti medî delle sperienze fatte sulla flessione dell' abete, dagl' istessi autori (*a*).

SPECIE DI ABETE.	GRAVITA' specifica.	INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	PESO producente l' inflessione.	FRECCIA di curvatura.
		pi. ingl.	pol.ingl.	pol.ingl.	lib.ingl.	pollici.
Abete giallo di Riga.....		18	2	7	103	0,25
Abete giallo di Long Sound, Norvegia.....	0,640	2	1	1	261	0,5
Abete giallo, di Riga....	0,480	2,5	1	1	123	0,5
Idem.....	0,464	2,5	1	1	116	0,5
Abete giallo di Memel...	0,553	2,5	1	1	143	0,5
Idem.....	0,544	2,5	1	1	145	0,5
Pino di America, presunto il pino di Weymouth .	0,460	2	1	1	237	0,5
Idem.....	0,407	3	1	1	69	0,5
Abete bianco di Cristiania.	0,512	2	1	1	261	0,5
Abete bianco di Quebec...	0,465	2	1	1	180	0,5
Larice, Blair, nella Scozia.	0,622	2.5	1	1	93	0,5
Idem, disseccato.....	0,644	2,5	1	1	101	0,5
Idem.....	0,554	2,5	1	1	112	0,5
Idem, legname assai giovane.....	0,396	2,5	1	1	45	0,5
Abete di Scozia.....	0,529	2,5	1	1	89	0,5
Abete bianco d'Inghilterra.	0,555	2,5	1	1	103	0,5

Resistenza del ferro di fucina alla flessione.

102. La tavola seguente è formata dietro le sperienze fatte nel 1812 a Bordò da M. Duleau (*b*), sopra pezzi di ferro di fucina posti orizzontalmente sopra due appoggi e caricati nel mezzo. I risultamenti sono ricondotti per mezzo del calcolo a presentare la freccia della curvatura presa da ciascun pezzo sotto una carica di 10$^{ch.}$ posta nel mezzo

(*a*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 34.

(*b*) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, pag. 26.

PEZZI SOTTOMESSI ALLA SPERIENZA.	INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	FRECCIA di curvatura.
	metri.	millimetri.	millimetri.	millimetri.
Ferro del Perigord. La sezione trasversale è un triangolo equilatero di lato $0^m,038$	3			7,6
(La freccia è la stessa poggiando il pezzo sopra una faccia o sopra un canto).....				
Ferro del Perigord.....	1	61	5,5	12,57
Lo stesso pezzo.....	0,5	61	5,5	1,71
Ferro d'Inghilterra, come esce dalle grandi fucine.	3,035	34	8,56	136
Lo stesso pezzo.....	3,075	8,56	34	13,5
Ferro del Perigord.....	2	30	11	24
Lo stesso pezzo.....	1	30	11	3
Ferro del Perigord, dolce (destinato per ferri di cavalli).....	2	70	11,2	9,5
Ferro del Perigord.....	1	68	11	1,5
Idem, (come è stato trovato nella fucina).....	2	45	12	12
Ferro del Perigord.....	2	40	11,5	21
Lo stesso pezzo.....	1	40	11,5	2,5
Lo stesso pezzo.....	2	11,5	40	1,67
Ferro del Perigord (come è stato trovato nella fucina).....	3	77	14	14,4
Ferro d' Inghilterra, segnato B (come è stato trovato nella fucina).	1,5	67,8	14,7	2
Ferro del Perigord.....	3	25	15	37
Lo stesso pezzo.....	3	15	25	14
Ferro del Perigord.....	1	58	16,3	0,57
Idem.....	3	39	19,6	10,8
Lo stesso pezzo.....	3	19,6	39	2,8
Ferro del Perigord.....	2	60	20	2
Idem.....	3	60	20	6,6
Lo stesso pezzo.....	3	20	60	0,75
Ferro del Perigord.....	5	120	20	15
Ferro de'Landes.....	2	120	21	1
Ferro del Perigord.....	3	39	24,5	6
Lo stesso pezzo.....	3	24,5	39	2,33
Ferro del Perigord (come è stata trovato nella fucina).....	3	67	26	2,3
Ferro del Perigord.....	5	108	30	4,75
Lo stesso pezzo.....	5	30	108	0,4
Ferro del Perigord.....	2,92	31	31	3
Lo stesso pezzo posto sopra un canto.....				3,35

		DIAMETRO in millimetri.	
Ferro tondo, dell'Arriege, come esce dalle grandi fucine.....	3,69	21,49	48,25
Idem.....	2,99	21,51	27,5
Ferro tondo inglese, *idem*.	2,93	23,52	18
Ferro tondo dell'Arriege, *idem*.....	2,92	26,82	10
Ferro tondo di Bilbao, dolcissimo.....	2,92	31,8	5

Il risultamento generale di queste sperienze (*a*) è che il valor medio della costante E (v. il n° 77) che conviene al ferro da fucina, è, prendendo il metro per unità di lunghezza e il chilogrammo per unità di peso,

$$E = 20\,000\,000\,000^{ch.}.$$

Calcolando con questo valore le freccie di curvatura per mezzo della formola del n° 92, le maggiori differenze tra il calcolo e la sperienza non sorpassano $\frac{1}{4}$ in più e in meno.

Da questo risultamento si conchiude che un pezzo di ferro da fucina sostenendo una tensione di un chilogrammo sopra ogni millimetro quadrato della sezione trasversale, si allunga di $\frac{1}{20000}$.

103. Risultamenti delle sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre di ferro da fucina poste orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*b*). La lunghezza de' pezzi era di 6 piedi inglesi, e l' intervallo degli appoggi di poll. 66 $\frac{1}{2}$.

(*a*) *Essai théorique et expérimental*, pag. 54.

(*b*) *An essay on the strength and stress of cast iron*, 2°. ediz. pag. 102.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	PESO sopra 6 piedi di lunghezza.	FRECCIA DI CURVATURA sotto		
		58 libbre.	114 libbre.	170 libbre.
	libbre.	pollici.	pollici.	pollici.
Ferro inglese, barra quadrata di pol. 1,25....	33	0,0625	0,1	0,1875
Idem, di pol. 1,125....	25	0,125	0,25	0,375
Idem, di pol. 1.....	20	0,15	0,32	0,5
Idem, barra tonda, di poll: 1,25.....	24	0,125	0,25	0,375
Idem, di 1 pollice.....	17	0,25	0,5	0,8
Ferro di Svezia, barra quadrata di pol. 1,2..	32	0,0625	0,125	0,19
Idem, di pol. 1,125....	27	0,08	0,161	0,25
Idem, di 1 pollice.....	33	0,125	0,25	0,375

Il valore di E, calcolato dietro le sperienze sul ferro inglese, pochissimo differisce da quello indicato più sopra n.° 102. Il valor medio della stessa quantità, ricavato dalle sperienze sul ferro di Svezia, è

$$E = 23\,470\,000\,000^{ch}.$$

104. Altra sperienza sopra una barra di 38 pollici di lunghezza, di peso libbre 10,4, di un pollice inglese di riquadratura, posta sopra due appoggi, il cui intervallo era di 3 piedi.

CARICA nel mezzo,	FRECCIA DI CURVATURA	
	La barra essendo quale l'avea fornita la fabbrica.	La barra essendo stata riscaldata equabilmente, e raffreddata lentamente.
libbre.	pollici.	pollici.
126	0,05	0,059
352	0,1	0,117
310	0,12	0,145
330	0,13	0,154

La carica di 330 libbre non produceva alterazione, ma 20 libbre di più davano una curvatura permanente sensibile; 10 libbre di più ne davano del pari una alla barra addolcita al fuoco.

105. La stessa barra portata alla temperatura di 212° Fahreneheit, poscia raffreddata a 60°, sembrò prendere sotto la carica di 300 libbre una freccia maggiore alla prima temperatura che alla seconda di circa $\frac{1}{10}$.

Resistenza dell' acciajo alla flessione.

106. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Duleau sopra pezzi di acciajo posti orizzontalmente sopra due appoggi, e caricati nel mezzo. Le freccie di curvatura corrispondono, come nel n°. 102, a una carica di 10$^{ch.}$.

PEZZI SOTTOPOSTI ALLA SPERIENZA	INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	FRECCIA di curvatura.
	metri.	millimetri.	millimetri.	millimetri.
Acciajo fuso d' Inghilterra, segnato Huntsman.	0,98	13,3	5,9	32,05
Lo steso pezzo.....	0,98	5,9	13,3	8,4
Acciajo di cementazione di Germania, segnato Fortsman, pe'rasoi...	0,68	14,5	7,8	8
Lo stesso pezzo.....	0,68	7,8	14,5	2,1
Acciajo della stessa specie.....	1,845	25,7	21,6	2,8
Lo stesso pezzo.....	1,845	21,6	25,7	2,2
Acciajo della stessa specie.....	1,845	28,5	21,9	2,6
Lo stesso pezzo.....	1,845	21,9	28,5	1,8
Acciajo della stessa specie.....	1,35	54,8	25,5	0,55
Lo stesso pezzo.....	1,35	25,5	54,8	0,27
Acciajo della stessa specie.....	1,35	52	26,6	0,5
Lo stesso pezzo.....	1,35	26,6	52	0,3

Dietro queste sperienze la resistenza dell' acciajo è minore di quella del ferro, e i risultamenti presentano meno regolarità.

107. Risultamenti di alcune sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre di acciajo poste orizzontalmente e caricate nel mezzo (*a*). I numeri son dati in misure inglesi.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	DISTANZA degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	pollice.	pollice.	libbre.	pollice.
1. Acciajo di fucina, passato alla filiera, temperato, e addolcito al grado di una lima ordinaria.....	13	0,95	0,375	54 82 110	0,02 0,03 0,04
2. Acciajo dolce, cedente facilmente alla lima.....	24	0,92	0,36	18,6 37 47	0,5 0,1 0,127

108. La prima barra presentò eguali flessioni sotto le stesse cariche, 1° quando la sua tempera fu abbassata a un rosso di paglia intenso; 2° quando la sua tempera fu abbassata al turchino d' acciajo; 3° quando essa fu riscaldata al rosso e raffreddata lentissimamente, la carica di 110 libbre non producendo allora curvatura permanente; 4° quando il pezzo fu riportato allo stato di durezza e reso durissimo. In quest' ultimo stato una carica di 350 libbre produsse una freccia permanente di $0^{po},005$, la quale per

(*a*) *Repertory of arts and manufactures*, maggio 1825.

un' addizione di 10 libbre aumentò di $0^{po},005$. La barra ruppe sotto una carica di 580 libbre.

La seconda barra presentò parimenti eguali flessioni sotto le medesime cariche, 1° quando fu resa dura per modo che la lima non vi faceva impressione; 2° dopo che la tempera fu abbassata fino al color di paglia uniforme. In questo stato una carica di 130 libbre non produsse curvatura permanente, ma una ne produsse la carica di 150 libbre. La barra ruppe sotto 385 libbre.

Resistenza del ferro fuso alla flessione.

109. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Rondelet sopra barre di ferro fuso poste orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*a*). Tutte queste barre hanno un pollice di riquadratura.

PEZZI SOTTOPOSTI ALLA SPERIENZA.	INTERVALLO degli appoggi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	libbre.	linee.
Ghisa grigia	42	312	5,5
Ghisa dolce	42	312	4,6
Ghisa grigia	21	450	1
Ghisa dolce	21	450	0,875

Il valor medio della costante E dato dalle sperienze sulla ghisa grigia, è

$$E = 9\,029\,000\,000^{ch.};$$

e quello che risulta dalle sperienze sulla ghisa dolce è

$$E = 10\,653\,000\,000^{ch.}.$$

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 514.

110. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre di ferro fuso poste orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*a*).

PEZZI sottoposti alla sperienza.	INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	pollici.	pollici.	libbre.	pollici.
Ghisa grigia dolce, che cedeva facilmente alla lima, un poco al martello.....	34	1	1	20	0,01
Fusa da M. Dowson.	77	1,5	3	440	0,075
Lo stesso pezzo....	77	3	1,5	360	0,25
Fusa da M. Bramah (ghisa meno dolce della precedente).	36	0,9	0,9	180	0,183
Idem.....	36	0,9	0,9	180	0,189
Idem.....	36	0,75	0,975	180	0,255

La regola adottata dall' autore, come risultamento medio delle sperienze (*b*), riviene ad attribuire alla costante E il valore

$$E = 12\,144\,000\,000^{ch}.$$

111. Risultamenti medî di nuove sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre di ferro fuso poste orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*c*). I numeri son dati in misure inglesi.

(*a*) *A practical essay on the strength of cast iron*, pag. 45.

(*b*) *Idem*, pag. 40. I numeri rappresentati per *a* dall' autore son reciproci alla resistenza alla flessione. Si deve dividere per *a* il numero 12144000 onde ottenere il valore corrispondente di E, relativo al metro e al chilogrammo presi per unità di lunghezza e di peso.

(*c*) *A practical essay on the strength of cast iron*, 2ª. edizione pag. 76 e seg.

PEZZI sottoposti alla sperienza.	INTERVALLO degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	ALTEZZA de' pezzi.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.
	pollici.	pollici.	pollice.	libbre.	pollice.
1. Tre pezzi somministrati da M. Bramah.....	36	0,9	0,9	40	0,041
2. Due pezzi di ferro vecchio di Park..	33	1,3	0,65	60	0,1
3. Due pezzi di ferro di Adelfi.....	33	1,3	0,65	60	0,1
4. Due pezzi di ferro di Alfreton.....	33	1,3	0,65	60	0,1
5. Due pezzi provenienti da vecchia ghisa.....	33	1,3	0,65	60	0,09
6. Miscela di vecchio ferro di Park, e di buona ghisa vecchia, in parti eguali.....	33	1,3	0,65	72	0,1
7. Mescuglio di ferro con $\frac{1}{16}$ di rame.....	33	1,25	0,675	60	0,1

Una carica di 180 libbre agendo per molte ore non fece prender a' tre pezzi sotto il n° 1 che una curvatura quasi insensibile.

I pezzi sotto i n^{i} 2, 3 e 4 non sono stati alterati sotto cariche di 162 libbre, e hanno conservato delle curvature piccolissime dopo aver sostenuto delle cariche di 182 libbre.

I pezzi sotto il n° 5 non sono stati alterati sotto 180 libbre, e lo sono stati appena sotto 190 libbre.

I pezzi sotto i n^{i} 6 e 7 non sono stati alterati sotto 182 libbre, e lo sono stati un poco sotto 202 libbre.

Le sperienze sotto i n^{i} 1, 2, 3 e 4 danno per valor medio

$$E = 11\,530\,000\,000^{ch.}$$

ARTICOLO IV.

Della resistenza di un solido prismatico alla rottura prodotta da uno sforzo diretto perpendicolarmente alla sua lunghezza.

112. Le fibre de' corpi, sottomesse a stensioni o accorciamenti piccolissimi, si stendono o si accorciano della stessa quantità sotto il medesimo peso, come si è detto ai n^{i} 76, 77. Allora, se la sezione trasversale è rettangolare, le fibre la cui lunghezza non varia nel tempo della flessione del corpo, si trovano alla metà dell' altezza della sezione. Quando le variazioni di lunghezza delle fibre sono più considerevoli, queste fibre possono, sotto lo stesso sforzo, stendersi più o meno di quel che si accorciano. Allora le fibre invariabili si allontanano o si avvicinano alla faccia che diviene convessa durante la flessione. Ha luogo la rottura, quando le fibre stirate non possono esserlo di più senza separarsi, o quando quelle compresse non possono ricever compressione maggiore senza schiacciarsi. Diversa, secondo i corpi, è la maniera colla quale si opera la rottura. Nelle pietre, nel vetro e ne' metalli fusi, si fa una separazione pronta ed intera sopra tutta l'altezza della sezione. Nel legname, le fibre sono schiacciate verso la faccia concava e strappate irregolarmente verso la faccia convessa. Ne' metalli lavorati, la rottura non è sempre accompagnata da una separazione totale o parziale. Le molecole, senza cessare di esser aderenti, appariscono aver preso vicino alla sezione di rottura delle nuove posizioni di equilibrio, in virtù delle quali è cangiata la figura del solido.

Le condizioni della rottura dipendono dall' equilibrio che si stabilisce tra le forze che tendono a rompere il corpo, e le resistenze dovute alle forze sviluppate per effetto degli stiramenti e compressioni delle fibre nella sezione trasversale in cui la rottura deve operarsi. Per valutare esattamente queste resistenze, bisognerebbe conoscere 1° l'asse di equilibrio in cui sono situate le fibre invariabili; 2° il valore della forza prodotta in una fibra da una stensione o compressione data. Per mancanza di tali conoscenzè che non si potrebbero acquistare se non col mezzo di delicate sperienze, siamo obbligati, per ottenere almeno delle valutazioni approssimative, di ricorrere a delle ipotesi.

113. L'ipotesi la più semplice, e generalmente la meno lontana dal vero, consiste in ammettere che le resistenze delle fibre all' istante in cui sta per operarsi la rottura, sono ancora proporzionali alle loro stensioni o compressioni, come lo sono nel caso di una flessione piccolissima. Allora lo stato della sezione trasversale del corpo, nell' istante medesimo, punto non differisce dallo stato considerato ne' n^{i} 77 e seg. Bisogna solamente concepire che la fibra posta alla faccia convessa che è la più stesa, o l' altra posta alla faccia concava che è la più accorciata, ricevano il grado di allungamento o d' accorciamento che è immediatamente seguito dalla rottura.

La situazione dell' asse di equilibrio, in cui son poste le fibre invariabili, si determinerà sempre per mezzo della stessa condizione geometrica enunciata nel n° 78. Supponiamo quest' asse così determinato, e conserviamo le denominazioni del n° 77 che si rapportano alla Fig. 1; chiamiamo di più

v' la distanza all' asse di equilibrio aa' della fibra estrema situata alla faccia convessa o alla faccia concava del solido che è prossima a rompere;

R una costante esprimente la forza necessaria per rompere un prisma, la cui sezione trasversale è l'unità superficiale, tirato nel senso della lunghezza (*).

Osservando che la resistenza delle fibre situate alla distanza v' dall'asse aa' è $dudv$.R, e che la resistenza delle fibre situate alla distanza v dallo stesso asse è $dudv.\frac{Rv}{v'}$, si avrà per l' espressione della somma de' momenti di queste resistenze presi per rapporto all' asse aa',

$$\frac{R}{v'}\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right).$$

Chiameremo questa espressione *momento di rottura* del corpo, e la indicheremo colla lettera ρ.

114. Se la sezione trasversale può esser divisa in due parti simmetriche da una linea perpendicolare alla direzione della forza che agisce sul corpo, in questa linea è situato l' asse di equilibrio. I due integrali sono eguali, e si ha per l' espressione del momento di rottura

$$\rho = \frac{2R}{v'}\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv.v^2.$$

Paragonando queste formole a quelle trovate n° 80, per rappresentare il momento di flessione, si riconosce che l' espressione del momento di rottura può ricavarsi da quella del momento di flessione, scrivendo R in luogo di E, e dividendo per v', cioè per la distanza all' asse

---

(*) Questo valore di R si riferisce anche alla compressione.

di equilibrio contenente le fibre invariabili, della fibra che n' è più lontana. Dietro ciò, le espressioni de' n^{i} 81 e seg. daranno immediatamente i risultamenti qui appresso enunciati.

115. Quando la sezione è un rettangolo (Fig. 2) di cui b è la larghezza, c l' altezza, si ha $v' = \frac{c}{2}$, e l' espressione del momento di rottura è

$$'\rho = \frac{2R}{c} \cdot \frac{bc^3}{12} = R \cdot \frac{bc^2}{6}.$$

116. La figura della sezione essendo formata di due triangoli eguali (Fig. 3), di cui p e q sono i lati, il momento della resistenza alla rottura è

$$\rho = \frac{R}{q} \cdot \frac{pq^3}{6} = R\,\frac{pq^2}{6}.$$

117. Se la figura della sezione è un rettangolo i cui lati sono b, c, e l' asse contenente le fibre invariabili forma l' angolo φ col lato b, il momento di rottura è

$$\rho = R\,\frac{b^3 c \,\text{sen.}^2\varphi + bc^3 \cos.^2\varphi}{6(b\,\text{sen.}\,\varphi + c\,\cos.\varphi)}.$$

Quando la sezione è un quadrato, questa espressione si riduce a

$$\rho = R\,\frac{b^3}{6(\text{sen.}\varphi + \cos.\varphi)}\ ;$$

e se il pezzo è piegato secondo una delle diagonali del quadrato, si ha

$$\rho = R\,\frac{b^3}{6\sqrt{2}}\ .$$

Quindi un pezzo a base quadrata piegato nel senso delle diagonali della base resiste alla rottura meno di quello che fa quando è piegato nel senso de' lati, nel rapporto di 1 a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

118. La figura della sezione trasversale essendo un cerchio (Fig. 4) di cui r è il raggio, l'espressione del momento della resistenza alla rottura è

$$\rho = \frac{R}{r} \cdot \frac{\pi r^4}{4} = R \frac{\pi r^3}{4}.$$

I momenti di rottura pel quadrato e pel cerchio iscritto, sono tra loro nel rapporto di 1 a $\frac{3\pi}{16}$, come pel caso della flessione.

119. Riguardo ad un tubo, essendo r' il raggio esterno ed r'' l'interno, ed osservando che il momento di rottura del vuoto interno supposto pieno è $\frac{R}{r'} \cdot \frac{\pi r''^4}{4}$, si ha pel momento cercato

$$\rho = R \frac{\pi (r'^4 - r''^4)}{4r'}.$$

A sezioni trasversali eguali, un cilindro pieno ed un tubo offrono delle resistenze alla rottura che sono tra loro nel rapporto di

$$(r'^2 - r''^2)^{\frac{1}{3}} \text{ a } \frac{r'^4 - r''^4}{r'}.$$

A resistenze eguali, le sezioni trasversali del cilindro e del tubo sono tra loro nel rapporto di

$$\left(\frac{r'^4 - r''^4}{r'}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ a } r'^2 - r''^2 \ (*).$$

(*) Se si rappresenti per πm^2 l'area della sezione trasversale del tubo, l'espressione del momento di rottura diviene

$$\rho = R \frac{\pi m^2 (2r'^2 - m^2)}{4r'} = \frac{R \pi m^2}{4} \left(2r' - \frac{m^2}{r'}\right);$$

dalla quale con facilità si rileva che, restando la stessa area, la resistenza alla rottura non cresce come il raggio esterno, ma in una ragione maggiore. E siccome aumentando il raggio esterno, anche

120. Conoscendo l' espressione del momento di rottura per una base di frattura rettangolare, possiamo proporci d' iscrivere in un cerchio un rettangolo, determinato dalla condizione di render questa espressione un massimo. Se il diametro del cerchio è 1, i lati di questo rettangolo saranno rispettivamente $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (*).

121. Consideriamo un solido prismatico (Fig. 9) incastrato orizzontalmente all' estremità A, e caricato di un peso all' altra estremità M. Chiamiamo

---

l'interno deve aumentare per potersi conservare la stessa area; si vede che deve esistere un limite, al di là del quale non può portarsi questo aumento per non render la parete del tubo così sottile che venga poi a mancare di stabilità.

Sarebbe necessario che accurate sperienze determinassero questo limite, affinchè colla stessa materia si avesse una barra vuota di una resistenza massima per rapporto alle circostanze fisiche inerenti alla forma stessa della sezione trasversale del solido.

(*) Per aver il momento di rottura nella ipotesi che le resistenze alla compressione e allo stendimento non fossero eguali, bisogna prima determinare la situazione dell' asse di equilibrio nel modo esposto alla nota pag. 54; e supponendo ancor qui $\frac{R'}{R} = m$, si avrà l' espressione del momento di rottura

$$\rho = R\left(\frac{1}{v'}\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv + \frac{m}{v''}\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv\right),$$

essendo v', v'' le distanze rispettive delle fibre situate alla faccia convessa e alla concava che sono più distanti dall'asse di equilibrio. Applicandola al rettangolo, e osservando che in questo caso $v' = \frac{c\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$, $v'' = \frac{c}{1+\sqrt{m}}$ si ha senza difficoltà

$$\rho = \frac{bc^2}{3}\cdot\frac{2Rm}{(1+\sqrt{m})^2} = \frac{2bc^2}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{R}}+\sqrt{\frac{1}{R'}}\right)^2}.$$

ρ il momento di rottura, valutato conforme ai n^i 113 e seg., dietro la figura della sezione trasversale del solido;

P il peso sospeso all' estremità M del corpo;

a la distanza orizzontale dalla sezione A alla direzione del peso P;

s la lunghezza AM del solido;

f la freccia di curvatura CM.

La rottura tende a farsi nella sezione A (*), e le condizioni dell' equilibrio sono espresse da

$$\rho = Pa \quad , \quad \text{d' onde} \quad P = \frac{\rho}{a};$$

o presso a poco, supponendo che la curvatura del solido sia l' elastica del n° 86, che dà $s = a + \frac{3f^2}{5a}$,

$$P = \frac{\rho}{s - \frac{3f^2}{5a}}.$$

122. Consideriamo ora un solido prismatico (Fig. 10), posato orizzontalmente sopra due appoggi, e caricato nel mezzo. Chiamiamo

2P il peso sospeso nel punto di mezzo A del solido;

a la metà CM della distanza degli appoggi;

f la freccia di curvatura AC;

α l' angolo della tangente alla curva ne' punti M, M' colla orizzontale MM'.

La rottura del corpo tende a farsi nel mezzo A. Lo sforzo esercitato contro l'appoggio M (fatta astrazione dalla considerazione dell' attrito sopra questo appoggio) è una forza normale alla curva del solido, la quale ha per

---

(*) La rottura tende a farsi nella sezione ove la somma de' momenti delle forze che agiscono sul solido diviene la più grande, come sarà meglio dichiarato ai n^i 358 e 365.

componente verticale P e per componente orizzontale Ptang.α. Per conseguenza supponendo che la curva del solido sia l' elastica del n° 86, d' onde $\text{tang}.\alpha = \frac{3f}{2a}$, le condizioni dell' equilibrio si esprimono ponendo

$$\rho = Pa + P.f\,\text{tang}.\alpha, \text{ ovvero } \rho = P\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right);$$

d' onde

$$2P = \frac{2\rho}{a + f\,\text{tang}.\alpha}, \text{ ovvero } 2P = \frac{2\rho}{a\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)};$$

123. Considerando un solido prismatico dritto incastrato orizzontalmente in una estremità, come quello rappresentato Fig. 9, e caricato di pesi distribuiti comunque sulla lunghezza AB, si chiami

x la distanza orizzontale di un punto qualunque del solido dall' estremità A;

p il valore del peso sospeso in questo punto, riferito all' unità di lunghezza e dato in funzione della x;

a la distanza AC.

Si avrà per esprimere l' equilibrio

$$\rho = \int_0^a dx.px.$$

124. Se i pesi portati da ciascuno elemento della lunghezza del solido sono eguali tra loro, p è costante, e si ha

$$\rho = \frac{pa^2}{2}, \quad pa = \frac{2\rho}{a}.$$

Quindi, il solido sarebbe egualmente rotto o da un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, o da un peso, metà del primo, sospeso all' estremità B.

125. Quando un solido posto orizzontalmente sopra due appoggi, come si è supposto n° 122, è caricato

di pesi distribuiti uniformemente sulla sua lunghezza, rappresentando per p la carica corrispondente all'unità lineare, pa e $pa.\text{tang}.\alpha$ saranno le componenti verticale e orizzontale della pressione sostenuta dagli appoggi. Per conseguenza, supponendo che la curva del solido sia l'elastica del n° 90, da cui $\text{tang}.\alpha = \frac{8f}{5a}$, le condizioni dell'equilibrio sono espresse dall'equazione

$$\rho = pa.a + pa.f\,\text{tang}.\alpha - pa.\frac{a}{2},$$

ovvero

$$\rho = pa\left(\frac{a}{2} + f\,\text{tang}.\alpha\right), \text{ ovvero } \rho = \frac{pa^2}{2}\left(1 + \frac{16f^2}{5a^2}\right);$$

d' onde

$$2pa = \frac{4\rho}{a+2f\,\text{tang}.\alpha}, \text{ ovvero } 2pa = \frac{4\rho}{a\left(1 + \frac{16f^2}{5a^2}\right)}.$$

Quindi (trascurando il quadrato di $\frac{f}{a}$) il solido è del pari rotto da un peso distribuito uniformemente sulla sua lunghezza, o dalla metà del medesimo peso posto nel mezzo.

126. Quando il solido prismatico posato orizzontalmente sopra due appoggi, è caricato nel tempo stesso del peso 2P posto nel mezzo, e del peso costante p sopra ogni unità di lunghezza, l' equilibrio è espresso dall' equazione

$$\rho = (\text{P}+pa)a + (\text{P}+pa)f\,\text{tang}.\alpha - pa.\frac{a}{2}.$$

ovvero

$$\rho = (\text{P}+pa)(a+f\,\text{tang}.\alpha) - \frac{pa^2}{2}$$

d' onde

$$2\text{P} = \frac{2\rho - pa(a+2f\,\text{tang}.\alpha)}{a+f\,\text{tang}.\alpha}.$$

Nel caso di cui si tratta, supponendo la curvatura del solido determinata conforme a quello che si è detto al n° 90, si ha $\text{tang.}\alpha = \frac{3P+2pa}{8P+5pa} \cdot \frac{4f}{a}$: questo valore dev' esser sostituito nelle equazioni precedenti (*).

127. Per applicare i risultamenti precedenti a un corpo dato, bisognerà sostituire in luogo di ρ l' espressione del momento di rottura che conviene alla figura della sezione trasversale del corpo, conforme ai n^{i} 113 e seg. Si darà in seguito alla costante R il valore che conviene alla natura del corpo e che dev' esser determinato dall' osservazione.

(*) Infatti si ha, secondo il n° 90,

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = (P+pa)\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y = (P+pa)\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right);$$

nelle quali equazioni fatto $x = a$, si ha $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\alpha$, $y = f$;

e perciò

$$\text{tang.}\alpha = \frac{a^2}{6\varepsilon}(3P+2pa),$$

$$f = \frac{a^3}{24\varepsilon}(8P+5pa),$$

Da queste equazioni, eliminando ε, si ottiene

$$\text{tang.}\alpha = \frac{3P+2pa}{8P+5pa} \cdot \frac{4f}{a}.$$

Sostituendo questi valori nell' espressione di ρ, e ordinando rapporto a P si ha

$$P^3 + \frac{55pa}{24}P^2 + \left(\frac{41p^2a^2}{24} + \frac{6\varepsilon^2}{a^4}\right)P + \frac{3p\varepsilon^2}{a^3} + \frac{5p^3a^5}{12} - \frac{6\varepsilon^2\rho}{a^3} = 0,$$

la quale equazione stabilisce la relazione tra il peso P e le dimensioni del solido, pel caso di cui si tratta.

Le osservazioni per mezzo delle quali si determina il valore di questa costante, consistono a situare orizzontalmente un solido prismatico sopra due appoggi, a caricarlo nel mezzo di pesi sempre più grandi, e ad osservare nel tempo stesso il peso che cagiona la rottura, e la freccia di curvatura che ha luogo nel momento in cui il solido sta per rompersi. Se la sezione trasversale è un rettangolo (Fig. 2) di cui b e c sono i lati, si ha (n° 115) $\rho = R\frac{bc^2}{6}$, e (n° 122)

$$2P = \frac{2\rho}{a\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}$$, facendo astrazione dal peso del solido.

Dunque

$$2P = R\frac{bc^2}{3a\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}, \text{ d'onde } R = \frac{2P.3a\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}{bc^2},$$

essendo $2a$ l' intervallo degli appoggi, 2P il peso posto nel mezzo della lunghezza del solido, f la freccia di curvatura.

128. Se si ha riguardo al peso del solido, bisogna impiegare l' espressione di 2P del n° 126. Chiamando 2Π questo peso, l' espressione suddetta diviene

$$2P = \frac{Rbc^2 - 3\Pi(a + 2f\,\text{tang.}\,\alpha)}{3(a + f\,\text{tang.}\,\alpha)}.$$

d' onde

$$R = \frac{3[(2P + 2\Pi)(a + f\,\text{tang.}\,\alpha) - \Pi a]}{bc^2}$$

e si ha

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi} \cdot \frac{4f}{a}$$

129 Quando i solidi hanno una picciola lunghezza,

o non prendono che una leggiera curvatura all'istante della rottura, si possono trascurare i termini di secondo ordine introdotti dalla considerazione di questa curvatura: si ha allora, fatta astrazione dal peso del solido,

$$2P = R\frac{bc^2}{3a}, \quad \text{d'onde} \quad R = 2P \cdot \frac{3a}{bc^2};$$

e tenendo conto di questo peso,

$$2P = R\frac{bc^2}{3a} - \Pi, \quad \text{d'onde} \quad R = (2P+\Pi)\frac{3a}{bc^2}.$$

Veniamo ora a rapportare le sperienze fatte per valutare la resistenza alla rottura di diversi corpi, per mezzo delle quali può determinarsi il valore della costante R.

Resistenza della pietra e del mattone alla rottura.

130. Dietro le sperienze di Gauthey (*a*), un prisma di pietra calcarea dura di Givry, di 18 lin. di larghezza, e 8 lin. di grossezza, posato sopra due appoggi distanti di 18 linee, è rotto da una carica di 143 libbre posta nel mezzo. La resistenza, per la pietra tenera di Givry, non è che $\frac{1}{5}$ della precedente.

131. Dietro le sperienze di M. Barlow (*b*), un prisma di mattoni di 4 poll. inglesi di larghezza e 2 poll. di grossezza, posto sopra due appoggi distanti di 3 poll. si rompe sotto una carica nel mezzo di

343 lib. av.-du.-poids pel mattone vecchio comune.
403..... mattone nuovo comune.
444..... mattone buonissimo.

(*a*) *Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres*; Giornale di fisica, 1774.

(*b*) *An essay on the strenght and stress of timber*, pag. 250.

132. Risultamenti delle sperienze fatte da M. Tredgold sopra barre rettangolari di marmo e di pietra posate orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo (*a*). I numeri sono dati in misure inglesi.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	DISTANZA degli appoggi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA che produce la rottura.
	pollici.	pollici.	pollici.	libbre.
Marmo bianco statuario purissimo. Gravità specifica 2,706.	30	1,075	1,075	50
	15	1,08	1,05	110
	14	1,075	1,076	130
Pietra di Portland, bruna. Gravità specifica 2,113.....	24	2	1,45	100
Grès bianco siliceo. Gravità specifica 2,212.....	18	1,45	1,525	92
Pietra di Dundèe. Gravità specifica 2,621.....	14	1,45	1,5	414
Grès di Craigleith. Gravità specifica 2,362.....	14	1,55	1,55	137
Grès della cava di Hailes....	14	1,55	1,5	123
Grès di Long-Annet.....	9	1,525	1,45	160
Idem.....	7	1,55	1,55	233
Pietra calcarea di Portland..	12	2,07	1,55	270
Pietra di Bath.....	5,5	1	1	58

Resistenza della malta alla rottura.

133. Si vegga nelle Ricerche sulle calci di costruzione di M. Vicat la determinazione della resistenza alla rottura di diverse specie di malte.

(*a*) *The philosophical magazine and Journal*, vol. 56, pag. 200.

Resistenza del legname alla rottura.

154. Sono state pubblicate intorno alla rottura del legname moltissime sperienze, fra le quali meritano di esser distinte quelle di Buffon sulla quercia di recente abbattuta (*a*). I risultamenti medî di queste sperienze sono contenuti nella tavola seguente.

L' intervallo degli appoggi, rappresentato più sopra per $2a$ era di $\frac{1}{12}$ minore della lunghezza de' pezzi indicati in questa tavola.

(*a*) *Histoire naturelle*, parte sperimentale, XIe Memoria.

RIQUADRATURA de' pezzi.	LUNGHEZZA de' pezzi.	PESO de' pezzi.	CARICA nel mezzo che ha prodotto la rottura.	FRECCIA all' istante che la rottura ha luogo.	
pollici.	piedi.	libbre.	libbre.	pol.	lin.
4	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	3308	3	3
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5300	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3700	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	3
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950		
	8	148	15525	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	11250	3	3
	12	223	9100	4	1
	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7	8	203	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2
	14	351	13225	3	11
	16	405	11000	5	0
	18	452	9245	5	8
	20	503	8375	8	2
8	10	331	27750	2	8
	12	396	23450	3	0
	14	460	19775	3	6
	16	526	16375	4	6
	18	594	13200	4	3
	20	662	11487	6	3

Calcolando il valore di R per mezzo della formola del n° 128, coi dati della sperienza fatta sopra un pezzo

di 6 pollici di riquadratura e 10 piedi di lunghezza, si trova

$$R = 5\,862\,000^{ch.}.$$

La sperienza fatta sopra un pezzo di 8 pollici di riquadratura e 14 piedi di lunghezza, dà

$$R = 5\,920\,200^{ch.}.$$

Se si cercano i valori di R dati da tutte queste sperienze, non si troveranno in essi che delle differenze le quali possono esser attribuite alla diversità delle qualità de' legnami, o agli errori delle osservazioni. Ma non sarebbe lo stesso, se non si avesse riguardo al peso de' pezzi e alla curvatura, come si è fatto nello stabilire la formola del n° 128.

135. Sperienze fatte da Belidor, sopra travicelli di legname di quercia (*a*).

LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA.	DISTANZA degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	OSSERVAZIONI.
1 pollici.	1 pollici.	18 pollici.	406 libbre.	Non incastrato nelle estremità.
1	1	18	608	Incastrato nelle due estremità.
2	1	18	805	Non incastrato.
1	2	18	1580	*Idem*.
1	1	36	187	*Idem*.
1	1	36	283	*Idem*.
2	2	36	1585	*Idem*.
20 linee	28 linee.	36	1660	*Idem*.

136. Sperienze fatte da M. Rondelet sopra travicelli di legname di quercia e di abete (*b*).

(*a*) *Science des ingénieurs*, pag. 318.
(*b*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 71 e 514.

INDICAZIONE de' legnami.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	INTERVALLO degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	FRECCIA all' istante della rottura.
	pollici.	pollici.	pollici.	libbre.	linee.
Quercia...	2	2	24	2304	
	2	2	18	3105	
	2	3	24	5123	
	3	2	24	3475	
	1	1	42	312	22
	1	1	21	585	7
Abete.....	1	1	42	281	22

137. Risultamenti medî delle sperienze del colonnello Beaufoy (*a*). Le barre aveano 2 pollici inglesi di riquadratura, 4 piedi di distanza tra gli appoggi.

INDICAZIONE DE' LEGNAMI.	GRAVITA' specifica.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.
		lib. av-du-poids.
Quercia di Danzica.....	0,854	167
Abete di Riga.....	0,537	202
Abete picea (*Pitch pine*).		272
Quercia inglese	0,922	258
Idem.....		211

L' angolo indicato per α ne' n^{i} 122 c seg. nell' istante della rottura è di circa 6°.

138. Risultamenti medî delle sperienze de' sig^{i}. Peake e Barailler (*b*). I travicelli hanno due pollici inglesi di

(*a*) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 47.
(*b*) *Idem*, pag. 49

riquadratura. Sono incastrati in una estremità, e il peso che cagiona la rottura agisce a 5 piedi di distanza dal punto d' incastro.

INDICAZIONE DE' LEGNAMI.	GRAVITA' specifica.	CARICA che produce la rottura.
		lib. av-du-poids.
Abete di Riga, secco...	0,633	153
..... umido..		172
Pino giallo di Virginia.	0,558	189
Abete picea (*Pitch pine*).	0,777	256
Pino bianco del Canadà.	0,678	109
Larice.....	0,540	150
Larice di Danzica.....	0,648	156
Frassino.....	0,782	217
Teak.....	0,309	264

Le freccie all' istante della rottura, sono di 14 poll. inglesi circa.

139. La tavola seguente è estratta da quella data da M. Barlow (*a*), ed offre i risultamenti medî delle sperienze fatte sopra diverse specie di legname. Tutti i travicelli avevano 2 pollici inglesi di riquadratura.

(*a*) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 178.

INDICAZIONE DE' LEGNANI.	DISTANZA degli appoggi.	GRAVITA' specifica.	CARICA nel mezzo che produce la rottura-	FRECCIA all'istante della rottura.	NUMERI proporzionali alla resistenza alla rottura.
	pi. ingl.		lib.av-du-poids.	pol. ingl.	
Teak	7	0,745	938	4,32	2488
Poon	7	0,579	846	5,92	2266
Quercia inglese	7	0,969	450	5,90	1205
Idem	7	0,934	637	8,10	1736
Quercia del Canadà	7	0,872	673	6,00	1803
Quercia di Danzica	7	0,756	560	4,86	1477
Quercia dell'Adriatico	7	0,993	526	5,73	1409
Frassino	7	0,760	772	8,92	2124
Faggio	7	0,696	593	5,73	1586
Olmo	7	0,553	386	6,93	1042
Abete picea (*Pitchpine*)	7	0,660	622	6,00	1666
Pino rosso	7	0,657	511	5,83	1368
Abete della Nuova Inghilterra	7	0,553	420	4,66	1116
Abete di Riga	7	0,753	422	6,00	1131
Idem	6	0,738	467	6,00	1081
Abete della foresta di Mar	7	0,696	436	6,00	1168
Idem	6	0,693	561	6,42	1310
Idem	6	0,703	561	6,42	1310
Larice	7	0,531	325	8,58	890
Idem	6	0,522	379	5,00	850
Idem	6	0,556	501	5,00	1149
Idem	6	0,560	510	5,00	1172
Espares di Norvegia	6	0,577	655	4,00	1492

Nota. La prima mostra di quercia inglese era d' una qualità inferiore.

I numeri dell' ultima colonna moltiplicati per 4217 daranno molto prossimamente i valori della costante R, quando il metro è l' unità di lunghezza e il chilogrammo l' unità di peso. Il medio delle sperienze fatte sulla quercia dà

$$R = 6\,435\,000^{ch.}.$$

e il medio delle sperienze fatte sull' abete,

$$R = 5\,111\,000^{ch.}.$$

140. Sperienze de' Sig^{i}. Tredgold e Ebbels sopra travi-

celli di diverse specie di legname posati orizzontalmente sopra due appoggi e caricati nel mezzo (*a*). Questi avevano 1 pollice inglese di riquadratura.

INDICAZIONE DE' LEGNAMI.	GRAVITA' specifica.	INTERVALLO degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	FRECCIA all'istante della rottura.	NUMERI proporzionali alla resistenza alla rottura.
		pi. ingl.	lib. av du poids.	pol. ingl.	
Quercia inglese, albero giovane.	0,863	2	482	1,87	964
Idem, vecchio legname di vascello	0,872	2,5	264	1,5	660
Idem, di un vecchio albero	0,625	2	218	1,38	436
Idem, di qualità media	0,748	2,5	284		710
Idem, verde	0,763	2,5	219		547
Idem, di Riga	0,688	2	357	1,25	714
Faggio, di qualità media	0,690	2,5	271		677
Ontano	0,555	2,5	212		530
Platano	0,648	2,5	243		607
Sicomoro	0,590	2,5	214		535
Castagno verde	0,875	2,5	180		450
Frassino, di un albero giovane.	0,811	2,5	324	2,5	810
Idem, di qualità media	0,690	2,5	254		635
Frassino	0,753	2,5	314	2,38	785
Olmo comune	0,544	2,5	216		540
Olmo, *wich*, verde	0,763	2,5	192		480
Acacio verde	0,820	2,5	249		622
Mogano di Spagna, secco	0,852	2,5	170		425
Idem, di Honduras, secco	0,560	2,5	255		637
Noce verde	0,920	2,5	195		487
Pioppo d' Italia	0,374	2,5	131		327
Pioppo bianco	0,511	2,5	228	1,5	570
Salice	0,405	2,5	146	3	565
Betulla	0,720	2,5	207		517
Cedro del Libano, secco	0,486	2,5	165	2,75	412
Abete di Riga	0,480	2,5	212	1,3	530
Abete di Memel	0,553	2,5	218	1,15	545
Abete di Norvegia, di Longsound	0,639	2	396	1,125	792
Abete di Scozia	0,529	2,5	233	1,75	582
Idem	0,460	2,5	157		392
Abete bianco di Cristiania	0,512	2	343	0,937	686
Abete bianco di America	0,465	2	285	1,312	570
Abete bianco d'Inghilterra	0,555	2,5	186		465
Pino d'America, di Weymouth.	0,460	2	329	1,125	658
Larice, mostra scelta	0,640	2,5	253	3	632
Idem, qualità media	0,622	2,5	223		557
Idem, legno assai giovane	0,396	2,5	129	1,75	322

(*a*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 44.

I numeri dell' ultima colonna moltiplicati per 12651 daranno i valori della costante R ricavati da' dati di ciascuna sperienza, essendo il metro e il chilogrammo le unità di lunghezza e di peso. Questi valori si troveranno calcolati senza aver riguardo all' azione del peso de' pezzi e alla curvatura.

Il risultamento medio delle sperienze sul legname di quercia dà $R = 8\,501\,000^{cb.}$;
e il risultamento medio delle sperienze sul legname di abete dà $R = 7\,097\,000^{cb.}$.

141. Sperienze del Sig. Giorgio Buchanan (*a*), sulla flessione e sulla rottura dell' abete (*Memel fir*). La distanza tra gli appoggi è di 5 piedi inglesi.

LARGHEZZA.	ALTEZZA.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.	
pol. ingl.	pol. ingl.	lib. av. dupoids.	pol. ingl.	
2	2	170	0,5	
		357	1	scaricata, riprende la linea retta.
		442	1,5	scaricata, riprende la linea retta colla differenza di $\frac{1}{8}$ di poll.
		510	1,7	
		595		rotta.
2	2	170	0,5	
		344	1	come sopra.
		450	1,5	come sopra.
		510		rotta.
3	2	255	0,5	
		527	1	
		680		comincia a rompersi.
		850		rotta.
2	3	357	0,5	
		722	1	scaricata, riprende la linea retta.
		1045	1,5	scaricata, riprende la linea retta colla differenza di $\frac{1}{15}$ di poll.
		1190	2	rotta.
4	2	340	0,5	
		654	1	
		1037	1,5	rotta.
2	3	1020		rotta.

(*a*) *The Edinburgh philosophical journal*, tomo XII, 1825.

142. Le circostanze della flessione e della rottura de' legnami, come sarebbero gli allungamenti e accorciamenti delle fibre e il sito della fibra invariabile, sono state studiate nelle sperienze fatte dal Sig. C. Dupin, ma non sono state ancora pubblicate. Alcune ricerche su quest' oggetto sono state date da M. Barlow nell' opera già citata. Esse c' insegnano che, quando un prisma di legname è piegato progressivamente, le fibre poste alla faccia concava si accorciano più di quel che si allungano quelle situate alla faccia convessa. Il rapporto dell' accorciamento delle prime all' allungamento delle seconde, eguale all' unità nel principio della flessione, cresce progressivamente fino a divenire eguale a 1,7 circa. La fibra invariabile a poco a poco si avvicina alla faccia convessa. Nè travicelli sottomessi allo sperimento da M. Barlow, essa è stata osservata ordinariamente all' istante della rottura, a' $\frac{5}{8}$ dell' altezza della sezione, a contar dalla faccia concava.

Questi effetti son messi in evidenza da una sperienza rimarcabile immaginata da Duhamel. Dessa consiste a segare per traverso un pezzo di legname dal lato della faccia concava, e a riempire il vuoto della sega con una zeppa di legname duro. La forza del pezzo aumenta un poco quando la segatura penetra fino ad $\frac{1}{3}$ della grossezza; è la stessa quando arriva sino alla metà circa, e diminuisce un poco quando penetra fino ai $\frac{1}{4}$ della grossezza. Questa sperienza è stata ripetuta da M. Barlow coi medesimi risultamenti.

Resistenza del ferro fuso alla rottura.

143. La tavola seguente contiene le sperienze fatte da M. Banks (*a*). Le barre avevano 1 poll. inglese di riquadratura. Nel momento della rottura hanno preso una freccia di circa 1 pollice.

DISTANZA degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	CARICA media.
piedi inglesi.	lib. av.-du.-poids.	lib. av.-du-poids.
3	756	756
3	756	
2,5	1008	1008
3	735,5	735,5
3	963	972
3	958	
3	994	869
3	864	
3	874	

Il risultamento medio di queste sperienze dà pel valore della costante R che conviene al ferro fuso

$$R = 31\ 810\ 000^{ch.},$$

essendo sempre il metro l' unità di lunghezza e il chilogrammo l' unità di peso.

144. Risultamenti medî delle sperienze fatte al Creusot, da Ramus (*b*). Le barre hanno $0^{m},0812$ di riquadratura. Sono incastrate in una estremità. Il peso che cagiona la rottura ha un braccio di leva di $2^{m},11$.

(*a*) *Treatise on the power of machines*, pag. 96.

(*b*) *La Sidérotechnie, par M. Hassenfratz*, tomo I, pag. 47.

GHISA MESSA IN ESPERIENZA.	CARICA che produce la rottura.
	chilogrammi.
Ghisa bianca del Creusot, 1ª. fusione..	586
Ghisa grigia del Creusot, 1ª. fusione..	895
Risultamento medio dato da ghise grigie di diversi paesi, 2ª. fusione...	873
Ghisa grigia del Creusot, 2ª. fusione...	911

Il valore di R risultante da queste osservazioni si calcola osservando che, essendo P il peso posto all'estremo, Π il peso del pezzo, a il braccio di leva del peso P, si ha, dietro i n^{i} 115, 121 e 124,

$$\left(\mathrm{P}+\frac{\Pi}{2}\right)a = \rho = \mathrm{R}\frac{bc^2}{6},$$

d' onde

$$\mathrm{R} = (2\mathrm{P}+\Pi)\frac{3a}{bc^2}.$$

Questa formola, applicata al risultamento medio delle sperienze sulle ghise grigie, dà

$$\mathrm{R} = 22\ 460\ 000^{\mathrm{ch.}};$$

ma questo valore è un poco incerto, perchè le sperienze non sono descritte con sufficiente precisione da poter esser sicuri che la lunghezza del braccio di leva è valutata esattamente, e perchè si trascura l' effetto della curvatura del pezzo.

145. Risultamenti di diverse sperienze fatte alla scuola di Ponti e Strade, e riferite da Gauthey (*a*).

(*a*) *Traité de la construction des ponts*, tomo II, pag. 150.

RIQUADRATURA de' pezzi.	INTERVALLO degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	NUMERI proporzionali alla resistenza.
metro.	metro.	chilogrammi.	
0,0271	0,122	3143	19,3
0,0271	0,244	1943	23,9
0,0541	0,244	9178	14.1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,244	13006	20.0
0,0541	0,487	7250	21,2

I numeri dell'ultima colonna moltiplicati per 1500 000 daranno i valori della costante R; il valor medio dedotto da queste sperienze è

$$R = 28\,100\,000^{cb}.$$

146. Sperienze fatte da M. Rondelet (*a*). Le barre hanno un pollice di riquadratura.

GHISA MESSA IN ESPERIENZA.	DISTANZA degli appoggi.	CARICA nel mezzo che produce la rottura.	CARICA media.	FRECCIA all' istante della rottura.
	pollici.	libbre.	libbre.	linee.
Ghisa grigia.....	42	450	450	6,25
Idem.....		450		6,75
Ghisa dolce.....	42	650		15,75
Idem.....		1062	656	14
Idem.....		350		4,25
Idem.....		561		10,5
Ghisa grigia.....	21	540	795	1
Idem.....		1050		2
Ghisa dolce.....	21	1650	1461	5,25
Idem.....		1272		2

Si deduce dal risultamento medio delle sperienze sulla

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 514.

ghisa grigia, pel valore che conviene alla costante R,

$$R = 17\,973\,000^{ch.}.$$

Il risultamento medio delle sperienze sulla ghisa dolce dà, pel valore della stessa costante,

$$R = 29\,420\,000^{ch.}.$$

147. Sperienze fatte da M. G. Rennie (*a*) sopra barre di ferro fuso posate orizzontalmente sopra due appoggi e caricate nel mezzo. L' area della sezione trasversale di tutte queste barre è un pollice quadrato inglese, ad eccezione delle ultime due.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	PESO de' pezzi.		DISTANZA degli appoggi.		PESO producente la rottura.
	lib.	on.	pi.	po.	libbre.
Barra di un pollice quadrato	10	9	3		897
Idem	9	8	2	8	1086
Metà di questa barra			1	4	2380
Barra di un pollice quadrato, posta diagonalmente	9	8	2	8	851
Metà di questa barra			1	4	1587
Barra di 2 pollici di altezza sopra $\frac{1}{2}$ pol. di larghezza	9	5	2	8	2185
Metà di questa barra			1	4	4508
Barra di 3 pollici di altezza sopra $\frac{1}{3}$ di pol. di larghezza	9	15	2	8	3588
Metà di questa barra			1	4	6854
Barra di 4 pollici di altezza sopra $\frac{1}{4}$ di pol. di larghezza	9	7	2	8	3979
Prisma equilatero con un angolo in alto.	9	11	2	8	1437
Idem, con un angolo in basso	9	7	2	8	840
Metà della prima barra			1	4	3059
Metà della seconda			1	4	1656
Barra profilata secondo la forma di un L, contenuto in un quadrato di lato poll. 2.	10	0	2	8	3105
Barra profilata a semiellisse, contenuta in un rettangolo di 4 pol. di altezza sopa $\frac{1}{4}$ di pol. di larghezza	7	0	2	8	4000 *
Idem, profilata a semiparabola col vertice in giù			2	8	3860

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; o Annali di chimica e di fisica, settembre 1818.

Dietro altre sperienze sopra barre incastrate orizzontalmente a una estremità e caricate all'altra di un peso sospeso a 2 piedi e 8 poll. dal punto di appoggio, la carica che cagiona la rottura è per

una barra di un pollice quadrato... 280$^{lib\ av.\ du\ poids}$

una barra di 2 poll. sopra $\frac{1}{2}$ pollice.. 539.

Il risultamento ottenuto sopra la barra a base quadrata posata diagonalmente, è conforme al rapporto indicato n° 117. Il valor medio della costante R dato dalle sperienze sulle barre a base quadrata o rettangolare, è

$$R = 38\,580\,000^{ch.}.$$

148. La tavola seguente contiene i risultamenti di alcune nuove sperienze, pubblicate da M. Tredgold sopra barre di ferro fuso mantenute orizzontalmente in una estremità e caricate nell'altra (*a*). I pesi che cagionavano la rottura avevano un braccio di leva di 2 piedi inglesi.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA che produce la rottura.
	pollici.	pollice.	libbre.
Vecchio ferro di Parck.....	1,3	0,65	184
Ferro di Adelfi.....	1,3	0,65	173
Ferro di Alfreton.....	1,3	0,65	153
Pezzo proveniente da vecchie ghise.	1,3	0,65	168
Miscela di vecchio ferro di Park e di buona vecchia ghisa in parti eguali.	1,3	0,65	174
Miscela di ferro con $\frac{1}{10}$ di rame...	1,25	0,675	194

Le prime cinque sperienze danno pel ferro fuso il valor medio

$$R = 31\,740\,000^{ch.}$$

(*a*) *Practical essay on the strength of cast iron*, 2.ª edizione, pag. 80 e seg.

149. Sperienze del Sig. Giorgio Buchanan sopra barre di ferro fuso posate orizzontalmente e caricate nel mezzo (*a*). La distanza de' sostegni era di 32 pollici inglesi.

LARGHEZZA.	ALTEZZA.	CARICA nel mezzo.	FRECCIA di curvatura.	
pollici inglesi.	poll. ingl.	lib. av.-dupoids.	poll. ingl.	
1	1	357	0,25	
		765	0,5	scaricata, riprese la linea retta colla differenza di $\frac{1}{16}$ di poll.
		770		rotta.
2	2	714	0,25	
		1062	0,37	scaricata, riprese la linea retta colla differenza di $\frac{1}{15}$ di poll.
		1530		rotta.

Si può giudicare da questi risultamenti che la resistenza alla rottura del ferro fuso è circa 5 volte più grande di quella del legname di quercia.

Non si hanno sperienze concludenti sulla resistenza del ferro di fucina alla rottura prodotta da uno sforzo esercitato perpendicolarmente alla lunghezza de' pezzi.

Nozioni sulle teorie della resistenza alla rottura, proposte da Galileo, e da Mariotte e Leibnizio.

150. La prima consisteva in situare l' asse orizzontale di equilibrio nel punto infimo della sezione di rottura, e considerare come costante la forza interna sviluppata in ogni punto di questa sezione. Chiamando

R la resistenza per l' unità di superficie;

b la larghezza della sezione;

(*a*) *The Edinburgh philosophical journal*, tomo 12, 1825.

f_1u, f_2u i valori pm, pn dell' ordinata del contorno della sezione che corrispondono a una stessa ascissa u;

c l' altezza della sezione;

si aveva a questo modo

$$R\int_0^b du\int_{f_1u}^{f_2u} dv\,.\,v,$$

per l' espressione del momento della resistenza alla rottura. Questa, nel caso in cui la sezione è un rettangolo i cui lati sono b, c, diviene

$$R\frac{bc^2}{2}.$$

La teoria attribuita comunemente a Mariotte e a Leibnizio consisteva in situare pure l' asse orizzontale di equilibrio nel punto infimo della sezione, e supporre la forza interna sviluppata in ogni punto proporzionale alla sua distanza dall' asse di equilibrio. Il momento della resistenza alla rottura era allora

$$\frac{R}{c}\int_0^b du\int_{f_1u}^{f_2u} dv\,.\,v^2,$$

che nel caso del rettangolo diveniva

$$R\frac{bc^2}{3}.$$

Osservazione sulla teoria della resistenza alla rottura.

151. La teoria presentata ne' n^i 112 e seg. è fondata sulla ipotesi che le fibre longitudinali all' istante della rottura offrono delle resistenze proporzionali alle loro stensioni e contrazioni, e che sono eguali per stensioni e contrazioni eguali. Il sito dell' asse di equilibrio contenente le fibre invariabili è determinato dalla condizione

enunciata ne' n^{i} 77 e 78, di maniera che quando la sezione può esser divisa in due parti simmetriche da una retta orizzontale, quest' asse è nel mezzo dell' altezza della sezione, come ciò ha luogo pel rettangolo e pel cerchio.

Se questa ipotesi fosse esattamente conforme agli effetti naturali, i valori della costante R dedotti col mezzo delle precedenti formole dalle sperienze sulla rottura riferite ne' n^{i} 94 e seg., non differirebbero punto dai risultamenti ottenuti dalle sperienze dirette sulla rottura de' corpi prodotta per stendimento o per schiacciamento. Quando questa uniformità non ha luogo, la causa deve esserne, che le fibre de' corpi nel momento della rottura non opponendo resistenze eguali allo stendimento o alla compressione, l' asse di equilibrio cangia di sito, in modo che le espressioni del momento di rottura non si accordano più collo stato del solido (*).

(*) Ne' corpi in generale la resistenza alla compressione non è uguale alla resistenza alla stensione, nè le resistenze crescono proporzionalmente agli allungamenti o accorciamenti delle fibre. Da ciò si conchiude che l' asse di equilibrio deve cangiar di sito a misura che la flessione aumenta, e le resistenze sviluppate dalle fibre in un istante qualunque non sono proporzionali alle distanze dall' asse di equilibrio, come nelle formole precedenti si è supposto. Ora la posizione dell' asse di equilibrio dipendendo sempre dalla condizione che la somma delle resistenze delle fibre stese sia eguale alla somma delle resistenze delle fibre compresse, giusta quanto si è detto al n° 78 e alla nota pag. 49, deve dipender nel tempo stesso dal rapporto non solo che queste due resistenze hanno fra loro sotto una data carica, ma anche dalla funzione che esprime la relazione tra gli allungamenti o accorciamenti e gli sforzi necessarî a produrli. Mancano sperienze capaci a dare il rapporto e la funzione menzionata, nemmeno pe' materiali che

Ciò non pertanto deve osservarsi, 1° che i principali risultamenti ottenuti più sopra non sono men veri; in guisa che le resistenze per le basi rettangolari son sempre proporzionali alla larghezza e al quadrato della grossezza, e le resistenze delle basi di figure simili lo sono sempre al cubo delle dimensioni omologhe. I soli rapporti delle resistenze per le basi di diverse figure sono cambiati. (*). 2° Nelle applicazioni non si è mai nel caso

---

più comunemente soglionsi adoperare nelle costruzioni, ad eccezione di quelle poche notizie date intorno al legname nel n° 142. Si osservi però che siccome ne' casi ordinarî la flessione è picciolissima e le dimensioni della sezione del solido sono sempre picciole rispetto alla sua lunghezza, l' asse di equilibrio non può molto allontanarsi dalla linea data dall' equazione del n° 78; e poichè gli allungamenti di due fibre poste alle distanze v, v' dall' asse di equilibrio differiscono di una quantità picciolissima sono sensibilmente proporzionali alle distanze medesime. Quindi l' ipotesi fatta dall'autore (n° 113), cioè che le stesse circostanze che hanno luogo nel primo momento della flessione debbono sussistere ancora per gl' istanti successivi fino alla rottura del solido, è la più semplice e in moltissimi casi di poco lontana dal vero.

(*) A provar che le resistenze delle basi di figure simili conservano sempre lo stesso rapporto qualunque sia la situazione dell'asse di equilibrio, bisogna prima dimostrare che queste resistenze sono proporzionali alla quarta potenza delle dimensioni omologhe nel caso della flessione, o al cubo delle dette dimensioni nel caso della rottura. Quando l' espressione di ε è un monomio la detta proprietà si scopre immediatamente, e forse è anche facile rilevarla quando ε è un' espressione complessa e la sezione è un rettilineo. Si prenda per es. l' espressione di ε del n° 83 relativa ad una sezione rettangolare in cui l' asse di equilibrio fa l' angolo φ col lato b; chiamando $b\ c$, $b'\ c'$ i lati omologhi di due rettangoli simili, i loro momenti di flessione, relativamente ad un

di calcolare le resistenze rispettive de' corpi considerando questi nello stato che precede la rottura: si considerano al contrario, come si vedrà in appresso, quando non hanno potuto prendere che una leggiera flessione, che non ha affatto alterata l' elasticità ; e i risultamenti precedenti allora convengono sensibilmente al modo col quale la resistenza si esercita.

Della rottura di un solido prismatico di una picciola lunghezza.

152. Le nozioni precedenti, come si è osservato n° 79, possono essere applicate con esattezza fintanto che la

---

asse similmente situato in ciascuno, saranno

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{b^3c\,\mathrm{sen.}^2\varphi + bc^3\mathrm{cos.}^2\varphi}{12}$$

$$\varepsilon' = \mathrm{E}\,\frac{b'^3c'\,\mathrm{sen.}^2\varphi + b'c'^3\mathrm{cos.}^2\varphi}{12}$$

Facendo $\nu = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, ε' diverrà

$$\varepsilon' = \mathrm{E}\,\frac{b^3c\,\mathrm{sen.}^2\varphi + bc^3\mathrm{cos.}^2\varphi}{12}\,\nu^4;$$

e perciò

$$\varepsilon : \varepsilon' :: 1 : \nu^4 :: b^4 : b'^4$$

Per dimostrare questa proposizione in generale, sia $v = f(u)$ l' equazione della curva che forma il contorno della sezione; sarà

$$\varepsilon = 2\mathrm{E}\int_0^b du \int_0^{f(u)} v^2 dv = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}\int_0^b du\,[f(u)]^3.$$

Sia $v' = \varphi(u')$ l' equazione della curva che forma le sezione di un altro solido. Affinchè queste due equazioni appartengano a due curve simili, conviene che facendo $v' = \nu v$, $u' = \nu u$, le equazioni delle curve divengano identiche o possano divenirlo moltiplicando una di esse per un coefficiente costante. (Si vegga una Memoria

lunghezza del solido prismatico è molto maggiore delle dimensioni della sezione trasversale. È questo quello che effettivamente ha luogo nè casi che più frequentemente

---

del distinto Prof. Sig. F. P. Tucci sulla simiglianza delle curve piane, di quelle a doppia curvatura, e delle superficie curve). Fatta questa sostituzione si hanno le due equazioni $v = f(u)$, $v = \frac{1}{\nu}\varphi(\nu u)$, e quindi $\nu f(u) = \varphi(\nu u)$. Ora i momenti di flessione per due solidi, le cui sezioni hanno per equazione $v = f(u)$, $v' = \varphi(u')$, essendo

$$\frac{2E}{3}\int_0^b du[f(u)]^3, \quad \frac{2E}{3}\int_0^b du'[\varphi(u')]^3,$$

quando queste sezioni sono simili, per la relazione $u' = \nu u$, $\varphi(\nu u) = \nu f(u)$, diverranno

$$\frac{2E}{3}\int_0^b du[f(u)]^3, \quad \frac{2E}{3}\int_0^b \nu du.\nu^3[f(u)];$$

e perciò saranno fra loro come $1 : \nu^4$. È facile vedere come questo rapporto debba necessariamente cangiarsi in quello di $1 : \nu^3$ quando si tratta del momento di rottura, perchè le distanze delle fibre che sono più lontane dall'asse di equilibrio sono nel rapporto di $1 : \nu$.

Il cangiamento di situazione dell'asse di equilibrio fa sì che l'espressione di ε in luogo di esser composta di un solo integrale, lo è di due della stessa forma. Quindi se

$$E\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv + E'\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv$$

è il momento di flessione di un solido che ha per sezione una curva qualunque nel caso in cui l'asse orizzontale di equilibrio divide comunque l'altezza, quello di un solido la cui sezione è simile e similmente situata rispetto all'asse stesso potrà ridursi a

$$\nu^4\left(E\int_0^b du\int_0^{f_1 u} v^2 dv + E'\int_0^b du\int_0^{f_2 u} v^2 dv\right).$$

E perciò questi momenti saranno sempre nel rapporto di $1 : \nu^4$.

si presentano nelle costruzioni, e la cui considerazione è la più importante. Riguardo ai casi ne' quali la lunghezza del solido di poco supera le dimensioni della sezione trasversale, o anche è minore di queste dimensioni, siccome essi non sono stati a sufficienza studiati per mezzo di sperienze, ci limiteremo a presentare su questo soggetto qualche idea.

Consideriamo il solido AM (Fig. 9) incastrato orizzontalmente in una estremità, e supponiamo prima che il filo cui è sospeso il peso P sia situato nel piano della sezione A, cioè contro la faccia verticale del corpo nel quale l' estremità del solido AM è incastrata. L' azione del peso P non tenderà allora a far piegare la porzione AM del solido, ma tenderà a separare questa porzione da quella incastrata; e prima che questa separazione si operi le fibre che uniscono le parti prossime a disgiungersi si saranno allungate di una certa quantità. È naturale l' ammettere che lo sforzo necessario per produrre questo allungamento è proporzionale 1° all' area della sezione trasversale del solido, 2° alla grandezza dell' allungamento. Per conseguenza, se la sezione trasversale è un rettangolo, di cui b rappresenta il lato orizzontale e c il verticale; e se indichiamo per

δ l' allungamento nel senso verticale (supposto picciolissimo) delle parti del solido poste nella sezione trasversale A;

D un coefficiente costante specifico rappresentante la resistenza del corpo allo scorrimento di una parte sull' altra nel piano della sezione trasversale;

lo sforzo di cui si tratta sarà rappresentato da $D\delta . bc$. Scriveremo dunque per equazione di equilibrio

$$P = D\delta . bc ;$$

e concepiremo che la rottura avrà luogo quando l' allungamento δ avrà preso un valore tale da portare la disgiunzione delle due parti del corpo. Il peso che cagionerebbe la rottura sarebbe dunque proporzionale all' area della sezione trasversale.

153. Ritorniamo ora alla considerazione del solido, la cui parte a sinistra del punto A è incastrata fissamente, ma la parte a dritta di questo punto è libera, e sollecitata all' estremità M dal peso P. Dietro le osservazioni fatte nel n° 77, l' equilibrio della parte AM esige che le forze interne sviluppate nella sezione trasversale A dall' azione del peso P abbiano delle componenti verticali la cui somma eguagli questo peso; e di più bisogna che le componenti orizzontali di queste stesse forze facciano equilibrio al peso P attorno all' asse orizzontale corrispondente alle fibre la cui lunghezza non varia. Finora abbiamo considerato solo quest' ultimo equilibrio; ma nel caso di cui si tratta diviene necessario il considerare egualmente l' equilibrio delle forze verticali. Supponendo dunque queste forze verticali sviluppate nella sezione d' una maniera conforme a ciò che è stato spiegato più sopra (il che non può esser molto lontano dal vero, sopra tutto quando la lunghezza del solido è assai picciola), scriveremo prima l' equazione

$$P = D\delta . bc .$$

Quanto all' equilibrio di rotazione, se rappresentiamo per ρ il raggio del cerchio osculatore della curva affettata dall' asse longitudinale del solido al punto A, avremo conforme a ciò che si è veduto nell' art. precedente, per esprimere questo equilibrio, l' equazione

$$Pa = \frac{E}{\rho} \frac{bc^3}{12},$$

indicando sempre a la lunghezza AM, ed avendo E il significato assegnato nel n° 77.

Quando il solido sosterrà senza rompersi l' azione del peso P, riguarderemo l' equilibrio che si stabilisce nella sezione trasversale A come espresso da queste due equazioni. Se la lunghezza del solido fosse quasi nulla, si considererebbe solamente la prima. Se fosse molto grande si considererebbe solamente la seconda. Ne' casi intermedî si considereranno tutte due, ed esse daranno i valori delle quantità δ e ρ esprimenti rispettivamente il grado di allungamento delle parti nel senso verticale, e il grado di flessione, che hanno luogo nel punto d' incastro A (*).

(*) Per ben intender quanto in questo articolo si contiene, gioverà richiamare i principî stabiliti nel n° 77, ove si è detto che per l'equilibrio della parte del solido situato a dritta della sezione $ama'n$ (Fig. 1) si richiede che in detta sezione le forze sviluppate sien tali che decomposte in orizzontali e verticali diano una somma di forze verticali eguali a P, una somma di forze orizzontali eguali a zero, e che la somma de'momenti di tutte le forze presi per rapporto all'asse di equilibrio eguaglino il momento del peso P. Or mentre queste condizioni esigevano tre equazioni, ivi non se ne sono stabilite che due sole. È qui a proposito render ragione di ciò, sebbene nella nota a pag. 49 abbiamo fatto vedere che quelle due equazioni sono sufficienti per l'equilibrio di un solido incastrato in una estremità e piegato dall' azione del peso P posto nell' altra, ricavandole con maggior semplicità dalla natura stessa del movimento che il solido tende a prendere. Volendo dunque partire dagli enunciati principî generali, e comuni a qualunque sistema libero che può moversi in un piano, bisognerà esaminare la natura delle forze tutte sviluppate in questa sezione per poter fare la decomposizione indicata. Ora le forze suddette qualunque sieno e comunque dipendano dalla disposizione delle fibre, il più naturale è ridurle a forze normali e tangenziali. Le forze secondo la normale non possono esser che uniformi per

154. Riguardo alla rottura si osserverà che, conforme alle nozioni presentate nel n° 112, la riguardiamo come

---

tutta la sezione ed equivalenti ad una forza unica che tende a trar giù lungo la sezione *ama'n* la parte del solido a dritta di tal sezione; le tangenziali sono poi di due specie, cioè quelle uniformi che allungano di una stessa quantità tutte le fibre del solido, e quelle provenienti dalla flessione le quali producono allungamenti o accorciamenti tanto più grandi quanto più la fibra è distante dall'asse di equilibrio. Le forze tangenziali uniformi decomposte in orizzontali e verticali, daranno delle forze orizzontali eguali a due a due e di segno contrario, ed una somma di forze verticali eguale a P, in guisa che P è la risultante delle forze tangenziali e normali uniformi. Le forze tangenziali sviluppate per effetto della flessione, comunque si decompongano, danno sempre due risultanti parallele eguali e di segno contrario, e si ha precisamente il caso della coppia. Queste forze adunque non potendo indurre moto progressivo, la loro eguaglianza non serve appunto che a fissare la posizione dell'asse di equilibrio.

Fa d'uopo osservare, che se nel solido deve succedere un moto progressivo nel senso della sezione, la forza che tende a produrlo è tanto più grande quanto più la sezione è prossima all' incastro, talmente che in questo punto essa diviene eguale a P; perciò la sezione d'incastro è la più debole tanto per resistere al moto rotatorio che al moto progressivo. Invece adunque di considerar l'equilibrio per una sezione qualunque, si può per maggior facilità stabilir quello che corrisponde alla sezione d'incastro. In questa sezione non essendovi altre forze orizzontali che la coppia di cui abbiamo parlato, e queste dando il valore di ε che entra nell' equazione de' momenti, saranno sufficienti le due equazioni stabilite dall'autore pel caso di una sezione rettangolare, cioè

$$P = D\delta . bc ,$$

$$Pa = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{bc^3}{12} .$$

Quando a è sufficientemente grande, anche una picciola forza può produrre col momento Pa la flessione, in guisa che può suc-

determinata da un certo grado di stendimento acquistato dalle parti del corpo che si trovano più fortemente stese. Ora è chiaro che supponendo qui lo stato di equilibrio della sezione A conforme alle nozioni precedenti, le parti poste alla faccia superiore del solido in questa sezione si saranno allungate per effetto dell' abbassamento verticale e della flessione della parte AM di una frazione della loro lunghezza espressa da

$$\sqrt{\delta^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{c}{2}\right)^2};$$

ovvero, mettendo per δ e ω i loro valori ricavati dalle equazioni precedenti,

$$\frac{P}{bc}\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}.$$

---

cedere la rottura ed esser l'allungamento nel senso verticale picciolissimo e trascurabile, è perciò si rende inutile la prima equazione, come nel n° 77 e seg. Quando poi la forza P agisce a picciola distanza dall' incastro, per quanto grande essa si faccia, non sarà mai sufficiente col momento Pa a produrre la flessione, e perciò il solido tende a moversi verticalmente. Vi dev' esser dunque una certa lunghezza, al di là della quale una forza applicata all'estremo produce la flessione e anche la rottura, senza che produca allungamento sensibile nel senso verticale: parimenti dall'incastro fino ad una certa lunghezza, essendo impossibile la flessione per quanto grande si faccia P, il solido si moverà verticalmente. Per le lunghezze intermedie fra questi limiti, nelle quali per prodursi la flessione la forza P dev' esser molto grande, questa produrrà anche un allungamento sensibile secondo la verticale; ed avendo luogo i due movimenti, bisogna considerare le due equazioni stabilite dall' autore. Fra le diverse cose che la sperienza su questo proposito dovrebbe determinare, la più interessante sarebbe certamente il fissare gli annunciati limiti di lunghezza.

Ora la grandezza di questo allungamento essendo il termine che determina la rottura, ne segue che il peso che può rompere il solido è proporzionale all'espressione

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2}+\frac{36a^2}{E^2c^2}}}.$$

Questa formola soddisfà ai casi estremi: se la lunghezza del solido è molto picciola, si trascurerà il termine affetto dal rapporto $\frac{a^2}{c^2}$, e la resistenza alla rottura sarà proporzionale a bc; se questa lunghezza è assai grande per rapporto all' altezza c, si trascurerà al contrario il termine $\frac{1}{D^2}$, e la resistenza sarà proporzionale a $\frac{bc^2}{a}$, come in questo caso l'indica la sperienza (*). È verisimile che ne' casi intermedì, la formola di cui si tratta si allontanerà poco dagli effetti naturali, allorchè i coefficienti costanti $\frac{1}{D^2}$ e $\frac{36}{E^2}$ si determineranno in modo a soddisfare ai risultamenti ottenuti direttamente dalla sperienza.

155. Quando in vece di un pezzo incastrato in una estremità, si considererà un pezzo posato orizzontalmente sopra due appoggi e caricato nel mezzo (Fig. 10), potranno essere applicate le stesse considerazioni, concependo

---

(*) Sembra che nulla possa dirsi su questo proposito prima che i coefficienti D ed E sieno convenientemente determinati. Infatti il rapporto $\frac{a^2}{c^2}$ non divenendo mai nè troppo grande nè troppo picciolo anche ne' limiti in cui ha luogo o la sola flessione o il solo moto verticale, i termini da trascurarsi nel radicale non possono farsi dipendere dal detto rapporto solamente.

*

che *a* indichi la metà della distanza degli appoggi, e P la metà del peso posto nel mezzo.

ARTICOLO V.

Della resistenza di un corpo prismatico alla torsione.

156. A formare la teoria di questo genere di resistenza possono servire delle considerazioni analoghe a quelle impiegate per la resistenza alla flessione.

Sia (Fig. 12) un solido prismatico incastrato orizzontalmente in una estremità. Supponiamo che una forza P agisca all' altra estremità col braccio di leva *Bc* per torcere il solido attorno l' asse *Cc* ; immaginiamo che per effetto della torsione, un diametro *bb* della sezione estrema sopra la quale agisce la forza P, siasi trasportato in *b'b'*. Il diametro corrispondente AA dell' estremità incastrata non avrà ricevuto alcuno spostamento; e si deve concepire che tutti i diametri delle sezioni intermedie, come *dd*, siensi spostati proporzionalmente alla loro distanza *Cc* dall' estremità incastrata. Per effetto di questi spostamenti, le molecole che in due sezioni consecutive erano prima della torsione dirimpetto le une alle altre, si saranno allontanate, di una quantità proporzionale, 1° alla distanza di queste molecole dall' asse *Cc* ; 2° alla differenza degli angoli percorsi da ogni diametro in due sezioni trasversali consecutive, differenza proporzionale all' angolo *bcb'* , e reciproca alla lunghezza *Cc* del solido (*). Stimando la torsione picciolis-

(*) Infatti la differenza degli archi percorsi dalle estremità de' diametri che prima della torsione erano dirimpetto in due sezioni conse-

sima, si può supporre che le resistenze provenienti da' relativi spostamenti sieno a questi proporzionali. Il momento della resistenza che ha luogo in una sezione qualunque del solido deve inoltre esser eguale al momento del peso P. Consideriamo una sezione trasversale qualunque, e chiamiamo

a la lunghezza del solido, dalla sezione fissa AA fino alla sezione bb dove agisce la forza P;

θ l'angolo bcb' descritto dai diametri di questa sezione estrema, angolo che è supposto picciolissimo;

r la distanza di un punto qualunque di una sezione trasversale dal suo centro c;

φ l'angolo della linea r con un diametro della stessa sezione;

$r = f(\varphi)$ l'equazione della curva che forma il contorno della sezione;

R il braccio di leva Bc col quale la forza P agisce per produrre la torsione;

G un peso costante per ogni specie di corpo, rappresentante la resistenza specifica alla torsione.

L'elemento dell'area della sezione trasversale posto all'estremità del raggio r essendo $d\varphi dr.r$, si avrà

$$G\frac{\theta}{c}d\varphi.dr.r^2$$

per la resistenza proveniente dalla torsione che ha luogo in questo elemento; e per esprimere l'equilibrio tra il

---

cutive, sta alla distanza di queste due sezioni presa sull'asse Cc, come l'arco percorso dall'estremità del diametro bb sta alla distanza Cc. Ma essendo il solido prismatico, gli archi suddetti avranno lo stesso raggio e saranno proporzionali agli angoli; perciò ec.

momento della forza P e la somma de' momenti delle resistenze simili

$$PR = \frac{G\theta}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} dr . r^3,$$

ovvero

$$PR = \frac{G\theta}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi . \tfrac{1}{4}[f(\varphi)]^4 \ (*).$$

157. Se la sezione trasversale è un cerchio di raggio r, si ha $f(\varphi) = r$, e la formola precedente dà

$$PR = \frac{G\theta}{a} . 2\pi\frac{r^4}{4} = G\frac{\pi r^4\theta}{2a}, \text{ d' onde } \theta = \frac{P}{G} . \frac{2aR}{\pi r^4}.$$

158. Se la sezione trasversale è un quadrato il cui lato è b (Fig. 13), si deve cercare a parte l' espressione della resistenza alla torsione di uno degli otto triangoli eguali ad ABC. L' equazione di AB è $r = \frac{b}{2\cos.\varphi}$. Si ha inoltre

$$\int d\varphi \frac{1}{\cos.^4\varphi} = \frac{1}{3} . \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos^3.\varphi} + \frac{2}{3} . \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi},$$

(*) Questa formola è rigorosamente vera quando il solido è un cilindro a base circolare. Infatti si può allora supporre (particolarmente quando la torsione è picciolissima) che una fibra del solido dopo la torsione si trovi tesa sopra una superficie cilindrica e sia conformata a guisa di un' elice. E siccome sviluppando la superficie del cilindro lo sviluppo dell' elice è una linea retta, sarà vero che tutti i diametri allogati in un medesimo piano si saranno spostati proporzionalmente alla loro distanza dalla sezione incastrata. Ed essendo inoltre gli archi percorsi da ciascuna molecola egualmente distanti dall' asse esattamente proporzionali agli angoli, lo spostamento di due molecole che prima si corrispondevano in due sezioni consecutive sarà nella ragion diretta dell'angolo bcb', della loro distanza dall' asse, e nella inversa della lunghezza del solido.

e per conseguenza

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{1}{\cos.^4\varphi} = \frac{4}{3}.$$

Quindi il momento della resistenza del triangolo ABC è

$$\frac{G\theta}{a} \cdot \frac{b^4}{4.16} \cdot \frac{4}{3},$$

e per conseguenza si ha pel momento della resistenza del quadrato

$$PR = G \frac{b^4.\theta}{6a},$$

d'onde

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{6aR}{b^4}.$$

Il momento della resistenza del quadrato è a quello del cerchio iscritto nel rapporto di 1 a $\frac{3\pi}{16}$.

159. Quanto al caso di una sezione rettangolare, delle ricerche fondate sopra nozioni che non possiamo esporre hanno mostrato, che l' ipotesi precedente, che consiste in supporre le resistenze che hanno luogo in ogni elemento della sezione trasversale proporzionali alle distanze di questi elementi dal centro della sezione, non era esattamente conforme agli effetti naturali. Si deve in questo caso impiegare un metodo più esatto, dietro il quale si trova per l' espressione del momento di resistenza alla torsione di un pezzo rettangolare omogeneo, di cui b rappresenta la larghezza e c la grossezza (*a*)

$$PR = G \frac{b^3c^3.\theta}{3(b^2+c^2)a},$$

d'onde

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{3(b^2+c^2)aR}{b^3c^3}.$$

(*a*) Questa espessione è stata data da M. Cauchy, Esercizi di matematiche, 4° anno, pag. 59.

160. I risultamenti de' n.i precedenti serviranno a calcolare l' angolo di torsione affettato da un corpo prismatico sotto un dato sforzo, quando il valore della costante G sarà stato determinato per mezzo di precedenti sperienze. Queste consistono ad osservare contemporanea-

---

Le equazioni differenziali che esprimono le condizioni dell'equilibrio e del moto de' corpi solidi, e che sono la base delle ricerche di cui si tratta, sono state date in primo luogo dall' autore pel caso di un corpo omogeneo, in una memoria presentata nel 1821 all' Accademia delle scienze, e stampata nel tomo 7 delle sue memorie. Questa materia è stata in seguito il soggetto di estesissime ricerche che sono principalmente contenute in una memoria de' Sig.i Lamé e Clapeyron presentata all' Accademia delle Scienze nel 1828, e stampata nel giornale di matematiche di M. Crelle, in una memoria di M. Poisson stampata nel tomo 8° delle Memorie dell' Accademia, e negli Esercizi di matematiche di M. Cauchy.

Osserveremo che tutte le formole presentate negli articoli precedenti sono conformi ai risultamenti ottenuti per mezzo di queste nuove ricerche. Essendo i corpi omogenei, e lo sforzo dovuto alla pressione atmosferica potendo esser trascurato per rapporto agli sforzi ai quali essi sono esposti, si troverà per la costante indicata colla lettera E nel n° 77 lo stesso valore numerico, sia che si cerchi di determinarla per mezzo di sperienze dirette tirando un pezzo prismatico nel senso della lunghezza (nel qual caso si ha $E = \frac{P\delta}{\Omega}$, indicando P il peso che stira il pezzo, Ω l' area della sezione trasversale, δ l' allungamento diviso per la lunghezza primitiva); sia che si determini facendo piegare un pezzo rettangolare o circolare, conforme a ciò che è stato detto ne' n.i 91 e seg.

Quanto alla costante G che entra nelle formole relative alla torsione, essa è (supponendo i corpi omogenei e trascurando l'effetto della pressione atmosferica che si esercita alla loro superficie) legata alla costante E sempre dalla relazione $G = \frac{2E}{5}$.

mente l' angolo di torsione di un corpo, il peso che produce la torsione e il braccio di leva all'estremità del quale agisce il peso. Si calcola il valore di G per mezzo delle formole de' n^{i} 156 e seg. (*a*), che danno, se il corpo è tondo,

$$G = P\frac{2aR}{\pi r^4.\theta};$$

se è quadrato,

$$G = P\frac{6aR}{b^4.\theta};$$

e se è rettangolare,

$$G = P\frac{3(b^2+c^2)aR}{b^3c^3.\theta}.$$

Resistenza del ferro di fucina alla torsione.

161. La tavola seguente contiene i risultamenti delle sperienze fatte da M. Duleau sulla resistenza del ferro di fucina alla torsione (*b*). Il peso che produce la torsione è 10chil., e il suo braccio di leva è 0^{m},32.

(*a*) È senza dubbio superfluo osservare che in tutte queste formole si deve metter per θ il numero esprimente la lunghezza dell' arco corrispondente all' angolo di torsione nel cerchio il cui raggio è l' unità. Per conseguenza, se il detto angolo è espresso in gradi, bisogna moltiplicare il numero de' gradi per $\frac{\pi}{180}$ se i gradi sono sessagesimali; e per $\frac{\pi}{200}$ se si tratta di gradi centesimali.

(*b*) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, pag. 49.

INDICAZIONE DE' FERRI.	LUNGHEZZA.	GROSSEZZA.	ANGOLO di torsione.	NUMERI proporzionali alla resistenza.
	metri.	metro. diametro.	gradi sessag.	
Ferro tondo del Perigord..	2,81	0,0142	13,4	12,57
Idem	3,17	0,0197	6	11,47
Ferro tondo inglese, segnato *Dowlais*	2,40	0,0198	4	12,41
Ferro tondo dell'Ariege...	3,57	0,0215	4,8	11,16
Idem.....	2,89	0,0215	4,5	9,6
Ferro tondo del Perigord..	3,19	0,0221	3,32	11,99
Idem....	2,89	0,0230	3	10,96
Ferro tondo inglese.....	3,24	0,0235	2,34	14,48
Ferro tondo del Perigord..	2,94	0,0265	1,82	10,48
Idem	3,35	0,0267	1,87	11,23
Idem	2,92	0,0357	0,625	9,19
Ferro tondo dell'Ariege....	2,77	0,0268	1,65	10,39
		lati.		
Ferro quadrato inglese, segnato C2.....	4,12	0,0200	6,5	17,46
Idem	2,52	0,0200	4	17,36
Ferro quadrato del Perigord.....	2,52	0,0204	3,08	15,27
Idem	3,39	0,0326	0,62	15,40
Ferro piatto inglese.....	2,91	{ 0,0340 0,0086 }	11,4	
Idem	1,55	{ 0,0340 0,0086 }	5,62	
Ferro piatto del Perigord.	2,91	{ 0,0340 0,0105 }	7,2	
Ferro piatto inglese, segnato B.....	1,45	{ 0,0678 0,0147 }	0,85	

I numeri dell' ultima colonna, dedotti dalle sperienze sui ferri tondi, moltiplicati per 583 600 000, daranno i valori della costante G forniti da ciascuna sperienza, essendo il metro e il chilogrammo le unità di lunghezza e di peso. Il valor medio di questi numeri è 11,33; e il valor corrispondente di G è

$$G = 6\ 612\ 300\ 000^{ch.}.$$

I numeri dell'ultima colonna, dedotti dalle sperienze sui ferri quadrati, debbono esser moltiplicati per 543 770 000

per dare i valori di G. Il valor medio di questi numeri è 16,03, e il valore corrispondente di G è

$$G = 5\,510\,600\,000^{ch}.$$

La differenza de' due risultamenti dipende senza dubbio in gran parte dalla diversità delle qualità de' ferri (*a*).

Resistenza di diverse sostanze alla torsione.

162. Sperienze fatte da M. Savart (*b*) sulla resistenza che diverse sostanze oppongono alla torsione. Gli sforzi che operavano la torsione, i cui valori sono dati quì sotto, erano sempre esercitati a una distanza dall' asse del pezzo eguale a $0^m,111$. L'arco di cerchio sul quale gli angoli di torsione erano misurati era diviso in gradi decimali, in modo che la torsione di 1° corrisponde a un arco eguale a $\frac{3,1416}{200}$.

Avendo le sperienze mostrato 1° che gli archi di torsione erano esattamente proporzionali agli sforzi esercitati (tra limiti tali che il pezzo riprese la sua figura primitiva, quando l'azione avea cessato); 2° che gli archi

---

(*a*) Dietro ciò che è stato detto alla fine della nota (*a*) pag. 119, adottando per la costante E il valore $20\,000\,000\,000^{ch.}$ (conforme al n° 102), il valore della costante G dovrebbe esser i $\frac{2}{5}$ di questo numero, ovvero $8\,000\,000\,000^{ch.}$. Questo risultamento è d'altronde fondato sulla supposizione dell' omogeneità del ferro, cioè di una resistenza eguale in tutti i sensi. Le sperienze di M. Duleau sulla torsione conducono ad attribuire alla costante G un valore più piccolo: noi non decideremo se questa discordanza dev' esser attribuita alle differenze di qualità de' ferri, al difetto di omogeneità, o alla maniera come le osservazioni sono state fatte.

(*b*) Annali di chimica e di fisica, agosto 1829.

di torsione erano, a sforzo eguale, esattamente proporzionali alle lunghezze de' pezzi, non si sono qui rapportati che i risultamenti medî delle osservazioni destinate a verificare queste due proposizioni. •

SOSTANZE.	SEZIONE TRASVERSALE.	LUNGHEZZA de' pezzi.	SFORZO producente una torsione di 1°.
	Le dimensioni sono espresse in millimetri.	metro.	chilogram.
Gesso.	Rettangolo..... 27,1 sopra 6,98	0,3743	0,120
	17,21 sopra 5,19		0,0303
Quercia.	Rettangolo ..... 46,63 sopra 10,59	0,5235	0,355
	23,32 sopra 5,295		0,022
	96 sopra 5,37	0,5764	0,105
	96 sopra 2,54		0,0114
	96 sopra 1,7		0,00393
Acciajo fuso tirato alla filiera.	Quadrato ..... 5,72 di lato	1,0000	0,1584
Rame in lamine tirato alla filiera.	Rettangolo..... 51,87 sopra 1,17	0,2194	0,098
	Cerchio, Diametro..... 2,4	0,649	0,00297
	4,58		0,04117
	6,91		0,207
	9,04		0,580
	Quadrato, lato..... 4,68	0,649	0,0595
	5,66		0,1275
	9,18		0,880
	5,66	0,6567	0,126
	Triangolo equilatero, lato..... 4,35	0,6383	0,00835
	7,8		0,086
	8,8		0,1415
Ottone tirato alla filiera.	Cerchio, diametro..... 6,72	0,649	0,160
	Rettangolo..... 3,56 sopra 9,2	0,997	0,0555
	Quadrato, lato..... 5,72	1,302	0,101
Vetro da vetrate.	Rettangolo..... 54,4 sopra 1,516	0,63	0,07
		0,315	0,140
	Rettangolo..... 25,46 sopra 1,516	0,315	0,034

La prima osservazione sull'acciajo dà per G il valore $G = 6\,273\,400\,000^{ch.}$, e la seconda $G = 5\,490\,000\,000^{ch.}$. Queste sperienze confermano d'altronde l'esattezza delle formole date ai n^{i} 157 e seg.

163. Si trovano ancora alcune sperienze sulla torsione

pubblicate da M. Bevan nelle *Philosophical transactions*, 1829, 1ª parte.

ARTICOLO VI.

Della resistenza di un corpo prismatico alla rottura cagionata dalla torsione.

164. La torsione di un solido ne cagiona la rottura, quando le molecole che si trovano le più lontane le une dall' altre non possono allontanarsi di più senza disunirsi. Supponendo che all' istante in cui la rottura ha luogo, le resistenze degli elementi del solido hanno ancora tra loro i rapporti ammessi ne' n^{i} 156, si formerà l' espressione del momento della resistenza alla rottura nel modo seguente. Conservando le denominazioni del n° 156, e chiamando

r' il massimo valore di r nella sezione trasversale del solido;

T un peso esprimente la resistenza alla torsione, riferita all' unità di superficie, all' istante in cui la rottura ha luogo;

$\frac{Tr}{r'}$ sarà la resistenza alla torsione, all' istante della rottura, pe' punti delle sezioni trasversali situati alla distanza r dall' asse del solido. Per la resistenza di un elemento della sezione trasversale si avrà

$$\frac{T}{r'}.d\varphi.dr.r^2;$$

e per l'equazione di equilibrio

$$PR = \frac{T}{r'}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} dr.r^3 = \frac{T}{r'}\int_0^{2\pi} d\varphi.\tfrac{1}{4}[f(\varphi)]^4.$$

Paragonando questa espressione di PR a quella del n° 156, si riconosce che i valori del momento della resistenza alla rottura si dedurranno da quelli trovati ne' n^i 157 e seg., scrivendo T in luogo di $\frac{G\theta}{a}$ e dividendo per r'.

165. Quando la sezione trasversale è un cerchio, il valore del momento della resistenza alla rottura è

$$PR = T\frac{\pi r^3}{2}.$$

166. Quando la sezione trasversale è un quadrato, essendo b il lato, $r' = \frac{b}{\sqrt{2}}$, lo stesso valore è

$$PR = T\frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

I momenti delle resistenze, pel quadrato e pel cerchio iscritto, sono nel rapporto di 1 a $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

167. Relativamente a una sezione rettangolare, risulta dalle ricerche di cui si è parlato n° 159, che indicando per b e c i lati della sezione, si ha per l'espressione del momento che cagiona la rottura per torsione (*a*)

$$PR = T\frac{b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$$

(*a*). Questa formola non è stata data da M. Cauchy, ma si può ricavare dall'analisi che ha impiegata per trattare il caso di una verga rettangolare sollecitata a torcersi. Le formole qui presentate pel caso di un pezzo a base circolare e quadrata sono interamente esatte.

Noi concepiamo in tutti i casi determinata la rottura, perchè un elemento lineare del corpo ha ricevuto un grado di stensione o di compressione maggiore di quel che la natura del corpo il com-

168. La lunghezza del solido tra le due estremità non influisce sulla resistenza alla rottura cagionata dalla torsione; solamente, più lungo è il solido, e più grande sarà l' angolo di cui sarà stato torto per romperlo. Le formole precedenti serviranno a calcolare gli sforzi necessarî ad operar la rottura di un solido prismatico, allorchè il valore della costante T sarà stato determinato per mezzo dell' osservazione. Questo volore si ricaverà da' dati di ogni sperienza, se il corpo è tondo, dalla formola

$$T = P\frac{2R}{\pi r^3},$$

essendo P il peso che opera la torsione, R il suo braccio di leva, e r il raggio del cilindro torto; e se il corpo è quadrato o rettangolare dalle formole

$$T = P\frac{6R}{\sqrt{2}.b^3}, \text{ ovvero } T = P\frac{3R\sqrt{b^2+c^2}}{b^2c^2},$$

essendo b, c i lati della sezione trasversale.

Veniamo ad esporre le sperienze dalle quali può dedursi il valore della costante T.

---

porti, e in conseguenza del quale vi è disgiunzione o schiacciamento. Dietro questa nozione, supponendo sempre i corpi omogenei ed egualmente resistenti in tutti i sensi, esiste necessariamente una determinata relazione tra la costante rappresentata qui per T e quella rappresentata per R ne' n^{i} 113 e seg.; questa relazione è $T = \frac{4R}{5}$. Ma non possiamo attenderci che relazioni di questa natura sieno sempre verificate dalle sperienze, sia a ragione del difetto di omogeneità de' corpi, sia perchè nell' istante della rottura le azioni interne non sono quali si son supposte nelle soluzioni analitiche, soluzioni che sono essenzialmente fondate sulla supposizione che il cangiamento di figura sia picciolissimo.

Resistenza del ferro fuso alla rottura cagionata dalla torsione.

169. Dietro un risultamento riferito da M. Banks, che offre un medio tra molte sperienze (*a*), una barra di ferro fuso di 1 poll. inglese di riquadratura, è rotta da un peso di 631 lib. avoir-du-poids, il cui braccio di leva è di 2 piedi inglesi.

Il valore di T conchiuso da questo risultamento per mezzo della seconda formola del n° precedente è

$$T = 45\,060\,000^{ch.},$$

essendo il metro e il chilogrammo le unità di lunghezza e di peso.

170. La tavola seguente contiene i risultamenti delle sperienze fatte da M. Dunlop a Glasgow (*b*) sopra barre cilindriche. I pesi agivano con un braccio di leva di 14 pi. e 2 poll. inglesi.

LUNGHEZZA de' pezzi.	DIAMETRO.	PESO producente la rottura.
poll. inglesi.	poll. inglesi.	lib. avoir-du-poids.
$2\frac{3}{4}$	2	250
$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	384
3	$2\frac{1}{2}$	408
3	$2\frac{3}{4}$	700
4	$3\frac{1}{4}$	1170
5	$3\frac{1}{2}$	1240
5	$3\frac{3}{4}$	1662
5	4	1938
6	$4\frac{3}{4}$	2158

(*a*) *On the power of machines.*

(*b*) *Dr Thomson's annals of philosophy*, tomo XIII, pag. 200.

Il valor medio di T, conchiuso dai dati di queste sperienze, è

$$T = 20\,305\,000^{ch}.$$

171. Nella tavola seguente si troveranno i risultamenti delle sperienze sulla torsione del ferro fuso e di diversi altri metalli, fatte da M. G. Rennie (*a*). I pesi agivano all' estremità di un braccio di leva di 2 piedi inglesi.

INDICAZIONE DE' CORPI SOTTOMESSI ALLA TORSIONE.	LUNGHEZZA de' pezzi.	RIQUADRATURA.	PESO MEDIO producente la roltura.	
	poll. inglesi.	poll. inglesi.	lib. av. du poids. lib.	once.
Ferro colato orizzontalmente.....	0	$\frac{1}{4}$	9	15
Ferro colato verticalmente.....		$\frac{1}{4}$	10	10
Ferro colato orizzontalmente.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	7	3
Idem.....	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	1
Idem.....	1	$\frac{1}{4}$	8	8
Ferro colato verticalmente.....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	10	1
Idem.....	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	9
Idem.....	1	$\frac{1}{4}$	8	5
Idem.....	6	$\frac{1}{4}$	9	12
Ferro colato orizzontalmente.....	0	$\frac{1}{2}$	93	12
Idem.....	0	$\frac{1}{2}$	74	0
Idem.....	10	$\frac{1}{2}$	52	0
Acciajo.....	0	$\frac{1}{4}$	17	1
Ferro da fucina d' Inghilterra.....	0	$\frac{1}{4}$	10	2
Ferro da fucina di Svezia.....	0	$\frac{1}{4}$	9	8
Metallo duro di cannone.....	0	$\frac{1}{4}$	5	0
Ghisa gialla fina.....	0	$\frac{1}{4}$	4	11
Rame colato.....	0	$\frac{1}{4}$	4	5
Stagno.....	0	$\frac{1}{4}$	1	7
Piombo.....	0	$\frac{1}{4}$	1	0

(*a*) *Philosophical transactions*, 1818; o Annali di chimica e di fisica, settembre 1818.

Il risultamento medio delle sperienze sul ferro fuso dà pel valore della costante T,

$$T = 41\,360\,000.^{ch.}$$

172. La tavola seguente contiene i risultamenti delle sperienze fatte da' Sig.i Bramah, sopra barre quadrate di ferro fuso, incastrate stabilmente in una estremità, e torte da pesi agenti con un braccio di leva di 3 piedi inglesi (*a*).

INDICAZIONE DE' PEZZI.	LUNGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	PESO producente la rottura.
	piedi.	pollice.	libbre.
1. Ghisa con $\frac{1}{16}$ di lega di rame.....	1	$1\ \frac{1}{16}$	215
2. *Idem*.....	2	$1\ \frac{1}{16}$	213
3. Miscela di parti eguali di vecchio ferro di Adelfi e di Alfreton.....	1	$1\ \frac{1}{16}$	330
4. *Idem*.....	1	$1\ \frac{1}{16}$	310
5. *Idem* (la rottura è stata cagionata dallo scorrimento di un peso).....	2	$1\ \frac{1}{16}$	280
6. Ferro fuso.....	1	1	238
7. *Idem*.....	2	1	218

Il valor medio della costante T dato dalle sperienze 3, 4, 6 e 7 è

$$T = 25\,860\,000^{ch.}.$$

(*a*) *Practical essay on the strength of cast iron*, pag. 97.

ARTICOLO VII.

De' più grandi sforzi a' quali possono esser esposti con sicurezza i materiali impiegati nelle costruzioni.

173. Le nozioni presentate negli articoli precedenti fanno conoscere le leggi della flessione e della rottura de' corpi, cioè i gradi di curvatura e di torsione che un solido prismatico affetta sotto uno sforzo dato, non che lo sforzo necessario per romperlo. Ciò non basta per metter nel grado di regolar le dimensioni de' pezzi impiegati nelle costruzioni. Bisogna infatti poter esser sicuri, non solo che le forze agenti sopra ogni pezzo non ne cagioneranno la rottura immediata; ma ancora che la loro azione permanente o frequentemente ripetuta non produrrà nelle parti dell' edifizio delle alterazioni che possono col tempo far de' progressi e portarne la distruzione. Si debbono, per quanto è possibile, disporre in modo le costruzioni da non lasciare altre cause di deterioramento fuori che quelle dipendenti dalle alterazioni chimiche de' corpi, e sforzarsi di prevenire queste alterazioni per mezzo di opportuni processi di conservazione e di mantenimento. Le determinazioni di cui si tratta non possono presentare una precisione così grande come quelle di cui precedentemente ci siamo occupati. Passiamo ad esporre i principali risultamenti che la sperienza ha su questo soggetto somministrati.

★

Della pietra esposta allo schiacciamento.

174. I piccioli cubi di pietra sottomessi alla sperienza cominciano a fendersi sotto pesi che di poco sorpassano la metà di quelli che hanno prodotto lo schiacciamento e sono segnati nelle tavole. Questo schiacciamento può d' altronde esser prodotto da una forza minore, quando l' azione di essa si esercita per lungo tempo (*a*). Inseriamo qui l' indicazione data da Rondelet (*b*) delle pressioni esercitate sopra una superficie di 25 centimetri quadrati, nelle costruzioni riputate come le più ardite.

Pilastri del duomo di S. Pietro di Roma.....	409[ch.]
Pilastri del duomo di S. Paolo di Londra.....	484
Pilastri del duomo degl' Invalidi.....	369
Pilastri del duomo di S. Genoveffa.....	736
Colonne di S. Paolo fuori le mura, a Roma...	494
Pilastri della torre della chiesa di S. Mery....	735
Colonne della chiesa di tutti i Santi d'Angers (*c*).	1107

175. Secondo Perronet (*d*), i filari superiori delle pile del ponte di Neuilly sono caricate di un peso di circa 20 000 libbre a piede quadrato, e secondo le sperienze fatte da Soufflot, il peso necessario per schiacciare la pietra sarebbe di 240 000 libbre a piede quadrato.

(*a*) M. Rondelet, *Art de bâtir*, tomo III, pag. 101.

(*b*) *Idem*, tomo III, pag. 74.

(*c*) Esse sono costruite con una pietra calcarea di un grigio rossigno, conchigliosa e durissima. Un cubo di 5 centimetri di lato si schiaccia sotto 10940 chil.

(*d*) *Mémoires sur la reduction de l'épaisseur des piles, Mémoires de l'Académie de sciences*, 1777.

176. Secondo Telford e Nimmo (*a*) la pietra porta da 250 000 a 850 000 libbre avoir-du-poids a piede quadrato inglese, e il mattone 300 000 libbre. Nelle costruzioni si caricano di $\frac{1}{6}$ e più. Il pilastro del centro della sala del capitolo a Elgin, fatto con un gres rosso, è caricata di più di 40 000 libbre a piede quadrato, e ha sostenuto inoltre, per molti secoli, un pesante coperto rivestito di piombo. La pressione de' cunei di un arco può esser portata con sicurezza a 50 000 libbre a piede quadrato (610$^{ch.}$ per una superficie di 25 centimetri quadrati).

177. I pilastri che sostengono le catene del ponte sospeso d' Argentat costrutto di fabbrica di rottami di scisto di una durezza media, sono stati caricati ne' saggi del ponte di 4$^{ch.}$,5 a centimetro quadrato. La carica permanente è 3$^{ch.}$,78 (*b*).

178. Dietro le sperienze delle costruzioni, non debbonsi esporre le pietre a una pressione che sorpassa il $\frac{1}{10}$ di quella che produce lo schiacciamento ne' saggi fatti sopra piccioli cubi. Questa determinazione non darebbe ancora una intiera sicurezza che nel solo caso in cui le pietre fossero tagliate e poste in modo da esser premute uniformemente su tutta la superficie delle giunte, e se dietro la loro qualità, non fossero soggette a fendersi e a schiantarsi. Altrimenti bisognerebbe che lo sforzo fosse meno considerevole.

La carica dev' esser minore ancora quando si tratta di colonne o pilastri, la cui altezza è grande per rapporto

---

(*a*) *The Edinburgh cyclopœdia*, art. *Bridge*.

(*b*) *Description du pont suspendu d'Argentat*, di M. Vicat, pag. 9.

alle dimensioni trasversali, e che sono esposti a delle leggiere inclinazioni, l'effetto delle quali è di portare l'azione della carica sopra i canti delle faccie. Si veggano su questo soggetto le sperienze rapportate al n° 8.

Del legname esposto allo schiacciamento e alla stensione.

179. Dietro le sperienze rapportate n^i 12 e 13, 30 e 31, le resistenze opposte allo schiacciamento e alla stensione dalle fibre del legname sono diversissime, giacchè la prima non è neppur la metà della seconda. Questa circostanza è d'accordo colla osservazione del n° 142. La resistenza allo schiacciamento può esser valutata a circa $4^{ch.}$ a millimetro quadrato della sezione trasversale pel legname di quercia o di abete, e la forza di coesione a circa $8^{ch.}$. Non si debbono esporre i pezzi impiegati nelle costruzioni a pressioni che sorpassino la decima parte di quelle che cagionerebbero lo schiacciamento. Questa regola può servire a determinare le dimensioni e la distanza de' pali di fondazione; e si accorda colle indicazioni date da Perronet (*a*) e fondate sull'esperienza.

180. Nel ponte ad arcate di legname sopra pile di pietre costrutto a Ivry sulla Senna da M. Emmery (*b*) come pure ne' ponti dello stesso genere costrutti dall'autore a Asnière e a Argenteuil, i pezzi curvi formanti

---

(*a*) *OEuvres de Perronet*, *Mémoire sur les pieux et pilotis*. De' pali di $0^m,25$ e di $0^m,32$ di diametro non debbono esser caricati di più di 25 000 chil. e 50 000 chilogrammi.

(*b*) *Pont d'Ivry en bois sur piles en pierre*, Parigi, 1832.

la parte principale delle centine sostengono vicino all' imposta, pel solo effetto del peso della costruzione, una pressione di $0^{ch.},1$ sopra ogni millimetro quadrato della sezione trasversale. Come si sa che questi ponti generalmente rovinano prima che i legnami sieno interamente deteriorati, non converrebbe esporne i pezzi ad una carica maggiore.

Una sopraccarica accidentale di $200^{ch.}$ a metro quadrato della superficie del palco aumenta la pressione indicata di circa la metà.

Del legname esposto alla flessione trasversale.

181. Il limite della carica alla quale un pezzo può esser esposto dev' esser determinato dalla condizione che la flessione cagionata da questa carica e gli allungamenti e accorciamenti delle fibre longitudinali che ne risultano, non sieno capaci di alterare la costituzione fisica del legname; di maniera che il pezzo, dopo esser stato scaricato, riprenda la sua naturale figura, e la sua curvatura non aumenti col tempo. Non esistono sperienze speciali, che questo limite facciano conoscere con certezza.

Dietro i risultamenti riportati n^{i} 134 e seg., il valor medio della costante R per lo legname di quercia è presso a poco $R = 6\,000\,000^{ch.}$. L'esperienza delle costruzioni insegna che ai legnami non debbono farsi sostenere cariche che sorpassino il $\frac{1}{10}$ di quelle che cagionerebbero la rottura (*a*). Indicheremo per R$'$ lo sforzo più grande che deve farsi soffrire alle fibre longitudinali di un corpo

(*a*) V. Rondelet, *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 83.

sopra l' unità di superficie. Si avrà dunque, per lo legname di quercia, $R' = 600\,000^{ch.}$. Si calcoleranno in ogni caso le più grandi cariche alle quali un pezzo può esser esposto, mettendo il valore di R' in luogo di quello di R nelle formole de' n^{i} 113 e seg.

Supponendo, conforme alle sperienze riportate n° 95 e seg., che si abbia per la quercia $E = 1\,000\,000\,000^{ch.}$, una carica di $600\,000^{ch.}$ produce nelle fibre una variazione di lunghezza di 0,0006. Questa variazione dovrebbe dunque esser riguardata come la più grande che possa esser prodotta senza alterare l' elasticità naturale di questa specie di legname. Dietro M. Tredgold (*d*), si può far soffrire alle fibre della quercia uno sforzo di 3960 libbre a pollice quadrato inglese ($2\,780\,000^{ch.}$ a metro quadrato) e una distensione di $\frac{1}{4\,3\,9} = 0{,}0023$. Ma questi risultamenti non sembrano applicabili alle costruzioni che debbono durar lungo tempo.

La forza dell' abete giallo o rosso è almeno eguale a quella della quercia ; quella dell' abete bianco è un poco minore.

Del ferro di fucina esposto allo stendimento.

182. Le sperienze riferite ne' n^{i} 58 e seg. fan conoscere che le barre di ferro da fucina, tirate nel senso della lunghezza , sono rotte da una forza media di $40^{ch.}$ a millimetro quadrato della sezione trasversale. Dietro un attento esame de' risultamenti delle sperienze e l' esem-

---

(*b*) *Practical essay on the strength of cast iron*, 2^{a} edizione , pag. 279.

pio delle costruzioni, non si deve far soffrire a queste barre una carica permanente maggiore di 6 a 7 chilogrammi a millimetro quadrato; ed una carica totale composta di una parte permanente ed una accidentale, maggiore di 8 a 10 chilogrammi a millimetro quadrato.

Del ferro di fucina esposto alla flessione trasversale.

183. Supponendo, conforme a ciò che si è detto, che il limite delle flessioni che si lasceranno prendere ai pezzi è determinato dalla condizione che la stensione delle fibre sia dovuta solamente ad una carica di $6^{ch.}$ a millimetro quadrato, si dovrà supporre pel ferro di fucina $R' = 6\,000\,000^{ch}$ (v. n° 181); e calcolare le più grandi cariche che si possono far sostenere a' pezzi per mezzo delle formole de' n' 113 e seg., mettendo in luogo di R questo valore di R'.

Si ha, pel ferro di fucina, $E = 20\,000\,000\,000^{ch.}$ (n° 102): per conseguenza la carica di $6\,000\,000^{ch.}$ produce nelle fibre una variazione di lunghezza di 0,0003, che si riguarda qui come il limite di quelle che si possono produrre senza alterare la costituzione del ferro. M. Duleau ha dato l' espressione del più gran peso di cui possono caricarsi i pezzi di ferro, prendendo questo stesso limite 0,0003 (*a*). Questa frazione corrisponde ai più piccoli valori indicati dalle sperienze di questo ingegnere, valori il cui medio è presso a poco 0,00065. Quest' ultimo allungamento sarebbe prodotto da una carica di $13^{ch.}$

(*a*) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, pag. 79.

a millimetro quadrato, eguale a $\frac{1}{3}$ di quella che cagionerebbe la rottura. Dietro M. Tredgold, il ferro può sostenere senza alterazione una tensione di 17800 lib. av.-du-poids a pollice quadrato inglese ($12^{ch.},5$ a millimetro quadrato), e una stensione di $\frac{1}{1400} = 0,00071$ (*b*).

Del ferro fuso esposto allo schiacciamento e alla stensione.

184. Il ferro fuso offre una grande resistenza allo schiacciamento, quando i pezzi sono troppo corti per poter piegare. Dietro le sperienze rapportate ne' n^{i} 18 e seg., la forza necessaria a produrre lo schiacciamento è circa $100^{ch.}$ a millimetro quadrato. Non esistono sperienze dietro le quali si possa esattamente apprezzare il limite delle cariche alle quali possono nelle costruzioni esser esposti i pezzi; ma è molto verisimile che queste possono esser portate al quarto di quelle che cagionerebbero lo schiacciamento.

185. Dietro le sperienze citate ne' n^{i} 62 e seg., la forza di coesione del ferro fuso è di 13 o $14^{ch.}$ a millimetro quadrato. Questa forza è molto minore della resistenza allo schiacciamento. Nelle costruzioni si possono parimenti portar le cariche al quarto di quelle che produrrebbero la rottura. Ma de' pezzi di ferro fuso impiegati a questo modo presenterebbero poca sicurezza, se la costruzione fosse esposta a delle forti scosse.

(*b*) *A practical essay on the strength of cast iron*, 2ª edizione, pag. 104.

Del ferro fuso esposto alla flessione trasversale.

186. Dietro le sperienze citate ne' n^{i} 143 e seg., il valor medio di R che conviene alla ghisa di buona qualità è R = 30 000 000$^{ch.}$. Si possono caricare i pezzi del quarto del peso che cagionerebbe la rottura, e supporre R′ = 7 500 000$^{ch.}$. Le cariche più grandi che possono darsi ai pezzi si calcoleranno per mezzo delle formole de' n^{i} 113 e seg., ne' quali si metterà questo valore di R′ invece di R.

Supponendo che si abbia per la ghisa dolce, conforme alle sperienze citate n^{i} 109 e 110, E = 11 000 000 000$^{ch.}$, una tensione di 7 500 000$^{ch.}$ corrisponderà a un allungamento di 0,000 68, allungamento che si riguarda quì come il limite di quelli che possono farsi soffrire al ferro fuso senza alterarne la costituzione. Dietro M. Tredgold (*a*), questo limite è $\frac{1}{1204}$ = 0,000 83, e la massima tensione che questa materia possa soffrire senza alterazione è 15 300 libbre avoir-du-poids sopra un pollice quadrato inglese (10$^{ch.}$,7 a millimetro quadrato).

ADDIZIONE.

Per applicazione delle precedenti teorie crediamo utile aggiungere le seguenti quistioni.

I. Trovare il momento di flessione per una sezione ellittica.

Chiamando *b* e *c* i semiassi e supponendo il solido piegato nel senso del lato *c*, si ha

$$s = E\frac{\pi bc^3}{4}.$$

(*a*) *A practical essay on the strength of cast iron*, pag. 151.

Il rapporto di questo momento a quello del rettangolo circoscritto è $\frac{3\pi}{16}$: 1. Paragonando questo valore di ε con quello relativo alla sezione circolare, si ravvisa il vantaggio che si trarrebbe nelle costruzioni, sostituendo le barre ellittiche alle circolari.

II. Trovare il momento di flessione per un canale semicircolare, ossia pel caso in cui la sezione sia formata di due semicerchi concentrici.

Chiamando r', r'' i raggi esterno ed interno, e d la distanza dell' asse di equilibrio dal centro, si trova

$$d = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r'^3 - r''^3}{r'^2 - r''^2},$$

ed

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} E\left[\frac{r'^4 - r''^4}{4} - d^2(r'^2 - r''^2)\right].$$

III. Trovare il momento di flessione per un tubo in cui i cerchi non sono concentrici.

Chiamando r' il raggio esterno ed r'' l' interno, h la distanza verticale de' centri, d la distanza verticale del centro del cerchio più grande dall'asse delle fibre invariabili, si ha

$$d = \frac{r''^2 h}{r'^2 - r''^2},$$

$$\varepsilon = \pi E\left(\frac{r'^4 - r''^4}{4} - r'^2 h d\right).$$

Quest'espressione è massima quando $h = 0$, cioè quando i due centri sono sulla medesima orizzontale; ed è minima quando $h = r' - r''$, cioè quando i due cerchi si toccano all' estremità del diametro verticale del cerchio maggiore.

Si osservi che nella ipotesi adottata, cioè che la resistenza alla stensione sia uguale alla resistenza alla compressione, l'asse delle fibre invariabili è l' orizzontale che passa pel centro di gravità della sezione; e il valore di ε è uguale al momento d' inerzia della sezione moltiplicato per E. Quindi la teoria e le formole del centro di gravità e del momento d' inerzia, non che i risultamenti noti per la posizione del primo e pel valore del secondo relativi a diverse figure, possono servire a rendere più facili le ricerche precedenti.

SEZIONE SECONDA.

DELL' EQUILIBRIO E DELLA RESISTENZA DE' MASSI FORMATI DI MATERIE ADERENTI. — DELLO STABILIMENTO DE' MURI DI RIVESTIMENTO DELLE TERRE.

187. I massi nelle costruzioni sono formati di terre, di sabbie, di fabbrica. Per stabilirne le leggi dell' equilibrio e della resistenza, si riguardano essi in primo luogo come massi omogenei, le cui parti sono aderenti le une alle altre, e non hanno tendenza a separarsi piuttosto in una direzione che in un' altra. Si esamina poi ciò che deve accadere quando i massi son formati di materiali tagliati regolarmente e posti a filari.

ARTICOLO PRIMO.

Dell' equilibrio di un masso tagliato lateralmente.

188. Considerando un masso la cui superficie superiore è terminata da un piano orizzontale CD (Fig. 14), e che è tagliato lateralmente da un piano AC, si riguarda questo corpo come dovendo dividersi secondo una direzione rettilinea inclinata qualunque AT, scorrendo la parte ACT sopra AT. Si tratta di determinare l' inclinazione che deve avere la scarpa AC, affinchè non si faccia nel masso alcuna disgiunzione. Si chiamerà

h l' altezza AE del taglio fatto nel masso;

m il rapporto della base all' altezza della scarpa AC, o la tangente dell' angolo EAC;

β l' angolo EAT ;

Π il peso dell'unità di volume della materia del masso;

γ la forza, riferita all' unità di superficie, necessaria per separare due porzioni di masso, facendole scorrer l' una sull' altra ;

f il rapporto dell' attrito alla pressione, per due porzioni di masso scorrenti l' una sull' altra.

Si avrà pel peso del prisma CAT

$$\frac{\Pi h^2}{2}(\text{tang}.\beta - m);$$

per la forza che tende a farlo scorrer lungo AT,

$$\frac{\Pi h^2}{2}(\text{tang}.\beta - m)\cos.\beta;$$

e per la forza che vi si oppone

$$\frac{f\Pi h^2}{2}(\text{tang}.\beta - m)\,\text{sen}.\beta + \frac{\gamma h}{\cos.\beta}.$$

L' equazione che esprime l' eguaglianza di queste due forze è

$$(\text{tang}.\beta - m)(1 - f\,\text{tang}.\beta) = \frac{2\gamma}{\Pi h}(1 + \text{tang}^2.\beta),$$

e se ne ricava

$$m = \text{tang}.\beta - \frac{2\gamma}{\Pi h}\cdot\frac{1+\text{tang}^2.\beta}{1 - f\,\text{tang}.\beta}.$$

189. Se si determina il valore di β che rende questa espressione un massimo, si conoscerà nel tempo stesso il minimo valore che si possa dare a m, e la direzione secondo la quale il masso si romperebbe, se si dasse a m un valore un poco al di sotto di quello che conviene all' equilibrio.

Questo valore di β è dato dall' equazione

$$\text{tang}.\beta = \frac{1}{f}\left\{1 - \sqrt{\left(\frac{\frac{2\gamma}{\Pi h}(1+f^2)}{\frac{2\gamma}{\Pi h} + f}\right)}\right\};$$

e sostituendolo nell' espressione di m del n° precedente, si ha

$$m=\frac{1}{f}+\frac{2}{f^2}\left[\frac{2\gamma}{\Pi h}-\sqrt{\frac{2\gamma}{\Pi h}\left(\frac{2\gamma}{\Pi h}+f\right)(1+f^2)}\right]$$

per lo limite dell' inclinazione secondo la quale può esser tagliato il masso senza che succeda frana.

Se si risolve questa equazione rapporto ad h, si conoscerà la massima altezza sopra la quale il masso può sostenersi coll' inclinazione m.

190. Se h è picciolissima, questa formola darà per m un valore negativo; di maniera che si potrebbe allora tagliare il masso, senza che potesse succedere frana, secondo un piano tracciato a sinistra della verticale AE, e a più forte ragione secondo un piano verticale. Facendo

$$h=\frac{4\gamma}{\Pi}\left(f+\sqrt{1+f^2}\right),$$

la formola precedente darà $m=0$; quindi, sull' altezza espressa da questa formola, il masso tagliato verticalmente si manterrà ancora in equilibrio. Ma dando a h de' valori più grandi, si avranno per m de' valori positivi crescenti fino a un limite, che si trova supponendo h infinita, e che è

$$m=\frac{1}{f}.$$

Questo limite corrisponde all' inclinazione che la superficie del masso prenderebbe da sè stessa, supponendo distrutta la coesione delle parti, e ammettendo ch' esse non si matengono che per effetto solo dell' attrito.

191. Se si suppone $\gamma=0$, o che le parti del masso non abbiano tra loro alcuna coesione, si ha

$$\text{tang.}\,\beta=\frac{1}{f},\quad m=\frac{1}{f};$$

per modo che il masso deve allora esser tagliato secondo l' angolo della scarpa naturale.

Se si suppone $f=0$, o che la forza che unisce le due parti del masso sia indipendente dalla pressione, e solamente proporzionale all' estensione delle superficie di contatto, si ha

$$\text{tang}.\beta = \frac{\Pi h}{4\gamma}, \quad m = \frac{\Pi^2 h^2 - 16\gamma^2}{8\Pi\gamma h}.$$

192. Chiamando τ l' angolo che ha per tangente $\frac{1}{f}$, l' espressione di h del n° 190 può scriversi

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi\,\text{tang}.\frac{1}{2}\tau},$$

d' onde

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\Pi h.\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}\tau.$$

Essa rappresenta la massima altezza sopra la quale il masso può esser tagliato verticalmente, senza che ne succeda frana. Se $\gamma = 0$, quest' altezza è nulla. Se $f = 0$, essa è uguale a $\frac{4\gamma}{\Pi}$.

Il valore del numero f si conosce osservando la scarpa che prende la materia del masso, quando è rotta la coesione: f è la tangente dell' angolo che questa scarpa fa coll' orizzonte, e τ l' angolo che questa scarpa fa colla verticale. Osservando in seguito l' altezza sopra la quale il masso può esser tagliato verticalmente senza smottarsi, si conoscerà il peso γ per mezzo dell' equazione precedente.

193. Riprendendo il calcolo del n° 188, conservando le stesse denominazioni, e supponendo la superficie superiore CD del masso (Fig. 15) caricata uniformemente di materie che debbono dividersi secondo piani verticali corrispondenti alle estremità superiori T de' piani di rottura;

chiamando p la pressione che ne risulta sull' unità di superficie del piano CD; si avrà per la forza che tende a far scorrere il masso superiore lungo AT,

$$(ph+\tfrac{1}{2}\Pi h^2)(\text{tang.}\beta-m)\cos.\beta;$$

per quella che tende a impedirlo

$$f(ph+\tfrac{1}{2}\Pi h^2)(\text{tang.}\beta-m)\text{sen.}\beta+\gamma\frac{h}{\cos.\beta}.$$

Eguagliando queste due quantità, verrà

$$(\text{tang.}\beta-m)(1-f\,\text{tang.}\beta)=\frac{2\gamma(1+\text{tang.}^2\beta)}{2p+\Pi h}.$$

Se si paragona questa equazione a quella del n° 188, si ravviserà che le formole trovate nel n° 189 si applicheranno al caso attuale scrivendo $2p+\Pi h$ in luogo di Πh.

ARTICOLO II.

Dell' equilibrio di un masso terminato da due faccie laterali, la superficie superiore del quale è caricata di un peso.

194. Per maggior semplicità si considererà un masso compreso tra due piani verticali paralleli (Fig. 16). Supponendo che questo masso debba rompersi secondo la direzione AT, si chiamerà

h l' altezza AC del masso;

a la grossezza AB o CD;

α l' inclinazione della linea di rottura AT sull' orizzonte;

p un peso uniformemente ripartito sulla superficie superiore CD, per l' unità di lunghezza del masso;

Π, f e γ avranno i significati indicati n° 188.

La forza che tende a produrre lo scorrimento della parte superiore del masso lungo AT è

$$\left(P+\Pi ah-\frac{\Pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha\right)\text{sen.}\alpha\,;$$

quella che tende a impedirlo è

$$\left(P+\Pi ah-\frac{\Pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha\right)\cos.\alpha+\frac{\gamma a}{\cos.\alpha}.$$

Eguagliando queste due espressioni, si avrà

$$\left(P+\Pi ah-\frac{\Pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha\right)(\text{tang.}\alpha-f)=\gamma a(1+\text{tang.}^2\alpha),$$

da cui si ricava

$$P+\Pi ah=\frac{\Pi a^2}{2}\text{tang.}\alpha+\gamma a.\frac{1+\text{tang.}^2\alpha}{\text{tang.}\alpha-f}.$$

195. Facendo variare α, e determinando il valor minimo di $P+\Pi ah$, si conoscerà nel tempo stesso la direzione secondo la quale il masso si romperebbe, se la carica sorpassasse un poco il valore che conviene all' equilibrio, e la massima altezza che sia possibile dare a questo masso, o il massimo peso di cui si possa caricarlo.

Il valore di tang.α che corrisponde al minimo del secondo membro della equazione precedente è

$$\text{tang.}\alpha=f+\sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{\Pi a+2\gamma}}\,;$$

e sostituendolo in questo secondo membro, si trova

$$P+\Pi ah=f\left(\frac{\Pi a^2}{2}+2\gamma a\right)+\sqrt{2\gamma a(\Pi a^2+2\gamma a)(1+f^2)}$$

per l' espressione del massimo valore che sia possibile dare a $P+\Pi ah$, senza cagionare la rottura del masso.

196. Se si fa astrazione dal peso della parte superiore ACDT del masso, queste formole divengono

$$\text{tang.}\alpha=f+\sqrt{1+f^2},\quad P=2\gamma a(f+\sqrt{1+f^2}).$$

197. Se di più si suppone $f = 0$, o che la resistenza allo scorrimento sia indipendente dalla pressione e proporzionale alla superficie di rottura, si ha

$$\text{tang.}\alpha = 1\,,\quad P = 2\gamma a\,,$$

risultamenti dati da Coulomb (*a*). La rottura tende allora a operarsi secondo un piano inclinato di un mezzo angolo retto; il valore di P è proporzionale alla grossezza a del masso. Queste formole possono dar le leggi dello schiacciamento di un prisma di pietra, per effetto di uno sforzo esercitato sulla faccia superiore.

198. I risultamenti precedenti suppongono la composizione del masso omogeneo, come sarebbe quello di una massa di terra, di fabbrica a getto, o di minuto pietrame posto irregolarmente e unito colla calcina. In quest' ultimo caso per f e γ si debbono metter nelle formole i valori che convengono alla materia della calcina. Ma se il masso è formato di pietre un poco grandi tagliate regolarmente, e poste a filari orizzontali, la lesione inclinata che ha luogo nel momento della rottura dovrà formarsi nelle pietre stesse; e per conseguenza i valori di f e γ dovranno esser quelli che convengono alla materia di queste pietre. Così si rende ragione della maggior solidità che si ottiene impiegando l' enunciato modo di costruzione.

(*a*) *Mémoires des savans étrangers*, 1773.

ARTICOLO III.

Dell' equilibrio di un masso esposto a uno sforzo esercitato contro una faccia laterale.

199. Consideriamo un masso ABDC (Fig. 17) compreso tra due faccie parallele sottomesso all' azione di una forza orizzontale applicata in E. Questa forza potrà rompere il masso, facendo scorrer la parte superiore sull' inferiore, o rovesciando la prima. Questi due modi di rottura debbono esser esaminati a parte.

Caso in cui la rottura del masso si opera per scorrimento.

200. La rottura deve operarsi secondo una direzione inclinata qualunque ST nella parte ABEF del masso, e si tratta di determinare il minimo valore che possa esser attribuito alla forza orizzontale applicata in E colla condizione di operar la rottura. Si chiamerà

a la grossezza AB del masso;

H l' altezza AF o BE del punto di applicazione della forza orizzontale;

P il peso della parte superiore CDEF per un' unità di lunghezza del masso;

Q il valore della forza orizzontale applicata in E per un unità di lunghezza del masso;

α l' angolo della linea di rottura ST coll' orizzonte;

h la distanza SF;

Π il peso dell' unità di volume della materia del masso;

γ la forza, riferita all' unità di superficie, necessaria per separare due porzioni di masso, facendole scorrer l' una sull' altra;

f il rapporto dell' attrito alla pressione per due porzioni di masso scorrenti l' una sull' altra;

σ l' angolo che ha per tangente f.

La forza che tende a produrre lo scorrimento sopra ST è

$$Q\cos.\alpha+(P+\Pi ah-\tfrac{1}{2}\Pi a^2\text{tang}.\alpha)\,\text{sen}.\alpha;$$

la forza che vi si oppone è

$$-fQ\,\text{sen}.\alpha+f(P+\Pi ah-\tfrac{1}{2}\Pi a^2\,\text{tang}.\alpha)\cos.\alpha+\gamma\frac{a}{\cos.\alpha}.$$

Eguagliando queste due espressioni e ricavandone il valore di Q, viene

$$Q=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2P+2\Pi ah-\Pi a^2\text{tang}.\alpha)(f-\text{tang}.\alpha)+2\gamma a(1+\text{tang}.^2\alpha)}{1+f\,\text{tang}.\alpha}.\quad(l)$$

Questa espressione rappresenta il valore che bisognerebbe attribuire alla forza Q affinchè vi fosse equilibrio tra le azioni che tendono a far rompere il masso e le resistenze che si oppongono alla rottura. Le quantità h ed α sono indeterminate: non si può esporre il masso a un' azione orizzontale che sorpassi il minimo de' valori che riceverà Q nella equazione (l), quando vi si farà variare nel secondo membro h ed α.

201. Se si avesse $\gamma=0$, basterebbe prender tang. $\alpha=f$ per render nullo il valore di Q. Perciò quando la coesione è nulla, il masso non può sostenere alcuna azione orizzontale.

202. Inoltre osserveremo che il termine che contiene h nell' espressione (l) sarà positivo o negativo secondo che tang. α sarà $<$ o pure $>f$. Per conseguenza se l' inclinazione della linea di rottura ST sull' orizzonte

dovesse esser supposta minore dell' inclinazione del piano sul quale le parti del masso si terrebbero in equilibrio per effetto del solo attrito (inclinazione indicata per σ e che si chiama ordinariamente l' *angolo dell' attrito*), bisognerebbe prendere h la più picciola possibile. Al contrario, se l' inclinazione della linea di rottura sull' orizzonte dovesse esser supposta maggiore dell' angolo dell' attrito, bisognerebbe prendere h la più grande possibile. Possiamo dunque esser obbligati di ammettere che la linea di rottura parta dal punto E o pure dal punto A: questi due casi debbono esser considerati separatamente. Quanto all' inclinazione che dev' esser attribuita a questa linea di rottura, si vedrà or ora come dev' esser determinata.

203. Ammettiamo prima che la rottura si operi secondo la linea AU che parte dal punto A. Si farà $h = \mathrm{H}$ nell' equazione (l), e mettendo per brevità

$$\mathrm{A} = 2(f\mathrm{P} + f\Pi a\mathrm{H} + \gamma a),$$
$$\mathrm{B} = f\Pi a^2 + 2\mathrm{P} + 2\Pi a\mathrm{H},$$
$$\mathrm{C} = \Pi a^2 + 2\gamma a,$$

essa diverrà

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}\,\mathrm{tang.}\,\alpha + \mathrm{C}\,\mathrm{tang.}^2\alpha}{1 + f\,\mathrm{tang.}\,\alpha}. \qquad (m)$$

Supponiamo prima nulla la forza di coesione, e poi crescente progressivamente a partir da zero: vi saranno de' valori di tang.α che renderanno $\mathrm{Q} = 0$. Questi valori saranno dati dall' espressione

$$\mathrm{tang.}\,\alpha = \frac{\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}}}{2\mathrm{C}} \qquad (n)$$

Se γ non è tanto grande da render questi valori immaginarî, saranno essi tutti due positivi, e ogni valore di

tang.α compreso tra i valori di cui si tratta darebbe per Q un risultamento negativo. Per conseguenza il masso non può sostenere alcuna azione orizzontale, a meno che i valori dati dall' espressione (n) non sieno immaginarî; o a meno che, se sono reali, il più piccolo di essi non sorpassi $\frac{H}{a}$, cioè non indichi una linea di rottura situata al di sopra di AE. In effetti ogni linea di rottura tirata nell'angolo BAE può esser ammessa: ma non si può supporre che la rottura si stabilisca al di là di questa linea. Se i valori dati dall' espressione (n) sono reali, e se il più picciolo sorpassa $\frac{H}{a}$, si farà tang.$\alpha = \frac{H}{a}$ nell' espressione (m), e si avrà in questo caso il valore del massimo sforzo orizzontale che il masso possa sostenere.

204. Se i due valori dati dalla formola (n) fossero immaginarî, se ne conchiuderebbe che esiste un valor minimo positivo di Q; di cui bisognerebbe far la ricerca. Il valore di tang.α che rende minima l'espressione (m) è

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f}\sqrt{\frac{f^2A + fB + C}{C}}, \qquad (o)$$

che darà per tang.α de' valori di più in più piccioli, a misura che γ aumenterà. Se il valore di tang.α che se ne deduce fosse maggiore di $\frac{H}{a}$, il che indicherebbe una direzione della linea di rottura posta al di là di AE, bisognerebbe evidentemente fare tang.$\alpha = \frac{H}{a}$ nell'espressione (m), e si avrebbe allora il valore cercato per Q. Ma se il valore di tang.α dato dalla formola (o) è $< \frac{H}{a}$, bisognerà mettere questo valore nell' espressione (m).

205. Si deve osservar tuttavia che il valore di tang.α dato dalla formola (o) diminuendo, quando γ aumenta, può esser trovato $< f$. Ed infatti, se si suppone γ infinitamente grande, la formola (o) dà

$$\text{tang.}\alpha = \frac{-1+\sqrt{1+f^2}}{f}, \text{ ovvero } \text{tang.}\alpha = \tfrac{1}{2}\sigma ;$$

di maniera che la direzione della linea di rottura dividerebbe allora in due parti eguali l' angolo dell' attrito. Ma dietro ciò che è stato detto n° 202, non bisognerebbe ammettere quest' ultimo risultamento: perchè se tang.α è $< f$, convien supporre la linea di rottura il più sopra che si può, cioè partire dal punto E: a valore eguale per α, la formola (m) darà allora un valore minore per Q. Per conseguenza, se l' espressione (o) dà per tang.α un valore $< f$, si dovrà ricorrere ad altre formole stabilite nella supposizione che la linea di rottura parta dal punto E.

206. Ammettiamo ora che la rottura si operi secondo EV' che parte dal punto E.

La forza che tende a produrre lo scorrimento sarà

$$Q\cos.\alpha + (P + \tfrac{1}{2}\Pi a^2 \text{tang.}\alpha)\text{sen.}\alpha ;$$

quella che vi si oppone

$$-fQ\,\text{sen.}\alpha + f(P + \tfrac{1}{2}\Pi a^2 \text{tang.}\alpha)\cos.\alpha .$$

Eguagliando le espressioni di queste due forze, e tirandone il valore di Q, si trova

$$Q = \frac{1}{2}\frac{(2P+\Pi a^2 \text{tang.}\alpha)(f-\text{tang.}\alpha)+2\gamma a\,(1+\text{tang}^2.\alpha)}{1+f\,\text{tang.}\alpha}. \qquad (p)$$

Facendo per brevità

$$A = 2(fP+\gamma a),$$
$$B = f\Pi a^2 - 2P,$$
$$C = \Pi a^2 - 2\gamma a,$$

questa formola diverrà

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{A + B\,\text{tang.}\,\alpha - C\,\text{tang.}^2\alpha}{1 + f\,\text{tang.}\,\alpha}.$$

207. Se si suppone prima γ nulla o picciolissima, vi sarà un valore di tang.α che renderà nulla Q. Questo valore di tang.α è rappresentato dall' espressione

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2C}, \qquad (q)$$

che darà per tang.α il valore f quando sarà $\gamma = 0$, e de' valori sempre più grandi a misura che γ aumenterà. Se questo valore dato dalla formola (q) è $< \frac{H}{a}$, cioè se indica una linea di rottura compresa nell'angolo AEF, se ne conchiuderà evidentemente che il masso non può sostenere alcuna azione orizzontale. Ma se l' espressione (q) è $> \frac{H}{a}$ o è immaginaria, questo masso potrà resistere a una simile azione. Quindi, affinchè il masso possa sostenere un' azione orizzontale, bisogna e basta che il valore dato dall' espressione (q), e il più piccolo de' valori dati dall' espressione (n), sorpassino tutti due il rapporto $\frac{H}{a}$. Ma come qui si considerano de' valori di tang.α che sono necessariamente $> f$, l' espressione (n) corrisponde al caso il più sfavorevole alla resistenza del masso, e per conseguenza si potrà esaminare solamente se la condizione di cui si tratta ha luogo pel più piccolo de' valori dati dall' espressione (n): essa a più forte ragione avrà luogo pel valore dato dalla formola (q).

208. Riconosciuto che il masso può sostenere un'azione orizzontale, si tratterà di cercare, come di sopra, il valore di tang.α che corrisponde al minimo valore di

quest' azione. Questo valore è espresso dalla formola

$$\text{tang.}\alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f}\sqrt{\frac{-f^2\text{A}+f\text{B}+\text{C}}{\text{C}}}, \qquad (r)$$

il quale, a misura che γ aumenterà, darà de' valori sempre più piccioli. Finchè questi valori saranno $> \frac{\text{H}}{a}$, d' onde si conchiuderebbe che la linea di rottura EV si troverebbe diretta al di sotto di EA, il che non può esser ammesso, bisognerà fare $\text{tang.}\alpha = \frac{\text{H}}{a}$ nell' espressione (p) che darà il valore cercato per Q. Ma se il valore (r) è $< \frac{\text{H}}{a}$, il che indica una direzione della linea di rottura EV compresa nell' angolo AEF, bisognerà sostituire questo valore nell' espressione (p).

Fa d' uopo notare nondimeno che l' espressione (r), la quale, se γ fosse infinita, darebbe come l' espressione (o) $\text{tang.}\alpha = \text{tang.}\frac{1}{2}\sigma$, può dare de' valori di $\text{tang.}\alpha$ che sarebbero nel tempo stesso $< \frac{\text{H}}{a}$ e $> f$. Se ciò accadesse, non si dovrebbe più, conforme a ciò che è stato detto più sopra, impiegare l' espressione (p): bisognerebbe ricorrere all' espressione (l), la quale, sostituito per $\text{tang.}\alpha$ il valore dato dalla formola (o), darebbe per Q il più piccolo valore possibile che dev'esser ammesso nelle applicazioni.

209. In riassunto, quando si considera la rottura di un masso per scorrimento, e che si vuol determinare il massimo sforzo orizzontale Q al quale questo masso può resistere, bisogna esaminare i valori di $\text{tang.}\alpha$ espressi dalla formola (n). 1° Se questi valori sono reali e minori di $\frac{\text{H}}{a}$, il masso non potrà sostenere sforzo alcuno.

2° Se questi valori sono reali e maggiori di $\frac{H}{a}$, si farà tang.$\alpha = \frac{H}{a}$ nella formola (m), che darà per Q il valore cercato. 3° Se questi valori sono immaginarî, si calcolerà il valore di tang.α per mezzo della formola (o) e si sostituirà nella formola (m); si calcolerà parimenti il valore di tang.α per mezzo della formola (r) e si sostituirà nella formola (p): si adotterà in seguito il minimo de' due valori di Q ottenuti in tal modo (*).

(*) Bisogna osservare che se tang.$\alpha = f$, si ha $Q = \gamma a$. Ora i valori di Q risultanti dalle equazioni (m) e (p) in cui si metteranno per tang.α rispettivamente i valori dati dalle equazioni (o) ed (r) e che sono relativi alle supposizioni tang.$\alpha > f$, tang.$\alpha < f$, possono riuscir tutti due maggiori del valore $Q = \gamma a$ che corrisponde al caso tang.$\alpha = f$. Infatti osservando che tang.$\sigma = f$, e che $\frac{f - \text{tang.}\alpha}{1 + f\,\text{tang.}\alpha} = \text{tang.}(\sigma - \alpha)$, le due formole (m) e (p) potranno mettersi sotto la forma

$$Q = a\gamma + \tfrac{1}{2}[2P + 2\Pi aH - (\Pi a^2 + 2\gamma a)\,\text{tang.}\alpha]\,\text{tang.}(\sigma - \alpha),$$
$$Q = a\gamma + \tfrac{1}{2}[2P - (2\gamma a - \Pi a^2)\,\text{tang.}\alpha]\,\text{tang.}(\sigma - \alpha),$$

la prima delle quali corrispondendo al caso in cui $\sigma < \alpha$, dà per tang.$(\sigma - \alpha)$ una quantità negativa, e la seconda nella quale si suppone $\sigma > \alpha$, dà per tang.$(\sigma - \alpha)$ una quantità positiva. Affinchè nell' uno e nell' altro caso sia $Q > a\gamma$, è necessario che la quantità che moltiplica tang.$(\sigma - \alpha)$ nella prima equazione sia negativa, nella seconda positiva; cioè

$$2P < -2\Pi aH + (\Pi a^2 + 2\gamma a)\,\text{tang.}\alpha,$$
$$2P > (2\gamma a - \Pi a^2)\,\text{tang.}\alpha;$$

condizioni che possono verificarsi insieme.

In questo caso si adotterà per Q il valore γa.

Assicuratosi dunque che i valori di tang.α dati dalla formola (n) sono immaginarî o che il più piccolo di essi è maggiore di $\frac{H}{a}$,

210. I risultamenti precedenti suppongono il masso omogeneo. Essi possonsi applicare a' massi costrutti di terra, di fabbrica a getto, o di minuto pietrame posto irregolarmente, dando alle costanti f e γ i valori che convengono alla malta che unisce i materiali.

Riguardo ai massi costrutti di grandi pietre tagliate regolarmente e poste a filari ordinati, vi sono alcune volte certe direzioni secondo le quali il masso può rompersi più facilmente che secondo altre. Per esempio, se il masso è costrutto a filari orizzontali, deve rompersi nella commessura posta immediatamente al di sotto del punto di applicazione E della forza Q. In questo caso l'equilibrio esige che sia

$$Q = fP + \gamma a$$

mettendo per γ il valore che conviene alla malta.

Se le pietre fossero disposte in modo da non esservi commessure continue nelle direzioni secondo le quali lo scorrimento può operarsi, bisognerebbe esaminare l' estensione della superficie delle pietre che debbono esser rotte affinchè lo scorrimento abbia luogo, e valutare in conseguenza la resistenza dovuta alla coesione.

---

si prenderanno i tre valori di Q corrispondenti alle ipotesi tang.$\alpha >$, $=$, $< f$, e si adotterà il più piccolo di essi.

Il caso che ordinariamente si presenta in pratica è quello in cui è data la forza Q e il suo punto di applicazione, e si cerca la grossezza a per poter resistere allo sforzo dato. Risolvendo per rapporto ad a l' equazione $Q = \gamma a$ e le equazioni (m) e (p) nelle quali per tang.α si saranno messi rispettivamente i valori dati dalle equazioni (o) e (r), de' tre valori ottenuti per a si adotterà il maggiore, e si avrà la minima grossezza che si possa dare al masso per resistere all' azione della forza Q.

Caso in cui la rottura del masso si opera per rovesciamento.

211. Supponiamo ora che il masso essendosi rotto secondo una direzione inclinata AT (Fig. 18), la parte superiore ACDT si rovesci, girando sullo spigolo A. Conservando le denominazioni del n° 200, e indicando di più per

R la coesione assoluta della materia del masso sull' unità di superficie, ovvero la forza necessaria per separare due porzioni di masso, tirando perpendicolarmente al piano di rottura;

si avrà pel momento della forza che tende a far rovesciare la parte superiore,

$$QH.$$

Il momento delle forze che si oppongono a questo rovesciamento, prendendo pel momento della resistenza alla rottura sopra AT un' espressione conforme a quella che è data dall' ipotesi di Mariotte (v. n° 150), è

$$\frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \text{tang.}\alpha + \frac{Ra^2}{3\cos.^2\alpha}.$$

Eguagliando questi due momenti, si ha

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \text{tang.}\alpha + \frac{Ra^2}{3}(1 + \text{tang.}^2\alpha) \text{ (*)}.$$

212. Se si cerca il valore di tang.α che rende il se-

(*) È forse facile rilevare che il caso più sfavorevole è quello in cui la linea di rottura si suppone partire dal punto A, giacchè, a valore eguale pel momento QH, Q è tanto più piccola quanto più grande è H.

condo membro minimo, si conoscerà nel tempo stesso la direzione secondo la quale si opererebbe la rottura, se il valore del momento QH sorpassasse di poco quello che conviene all' equilibrio, e il più gran valore che sia possibile dare a questo momento. Il valore di tang.α che soddisfa a questa condizione è

$$\text{tang}.\alpha = \frac{\Pi a}{2R};$$

e sostituendolo nell' equazione precedente, si ha per lo limite cercato

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi^2 a^4}{12R} + \frac{Ra^3}{3}.$$

Risolvendo quest' ultima equazione per rapporto ad a, si conoscerà la minima grossezza che sia possibile dare al muro, affinchè resista all' azione della forza Q.

213. Se la forza di coesione è grandissima, si ha sensibilmente

$$\text{tang}.\alpha = 0, \quad QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} + \frac{Ra^2}{3}.$$

La rottura si opera allora nella base AB. Si suppone che la forza di adesione del masso alla base sia espressa da R.

214. A misura che R diminuisce, α aumenta, e la linea di rottura si allontana sempre più da AB. Ma se il valore di tang.α del n° 212 fosse maggiore di $\frac{H}{a}$ cioè se la linea di rottura oltrepassasse AE, non si potrebbe applicare la formola precedente, perchè l'azione della forza Q non può produrre una disgiunzione nella parte superiore CDEF del masso.

215. Quando l' espressione di tang.α del n° 212 è $> \frac{H}{a}$, se ne conchiude che la rottura del masso tende

a operarsi secondo una linea spezzata come AUE. La resistenza alla rottura risulta allora simultaneamente dalla coesione che ha luogo sopra le due parti di questa linea. Se la coesione è supposta nulla, come deve farsi quasi sempre nelle applicazioni, bisogna supporre la linea AU quasi contigua alla linea AF, e per conseguenza apprezzare il valore che conviene attribuire alla forza Q dietro l'equazione

$$QH = \frac{P.a}{2}$$

che corrisponde a un limite, al di sotto del quale la resistenza del masso non può esser valutata, almeno fino a che le parti di questo masso si riguardano come incapaci di essere schiacciate.

216. Se il masso non è aderente alla base colla stessa forza con cui le parti del masso lo sono fra loro, di maniera che il valore della forza di coesione nel piano AB abbia un valore R′ minore di R, ponendo l'equazione

$$QH = \frac{P.a}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} + \frac{R' a^2}{2},$$

si avrà un altro limite che il momento QH non potrebbe sorpassare senza cagionare il rovesciamento del masso.

217. Se il masso è costrutto di pietre tagliate regolarmente, e poste a filari orizzontali, i risultamenti precedenti possono essere applicati senza modificazione sensibile, attribuendo a R il valore che conviene alla materia della malta che unisce le pietre.

Il modo di rottura di cui abbiam trattato è quello che più frequentemente ha luogo, giacchè la rottura per scorrimento può esser prevenuta con diversi processi di costruzione, ed esige in generale uno sforzo più considerevole di quello che richiede la rottura per rovesciamento.

218. Se le faccie esteriori del masso fossero inclinate all' orizzonte o formate di linee discontinue, e se desso fosse sollecitato simultaneamente da molte forze applicate a diversi punti, non converrebbe cercare di esprimerne la resistenza per mezzo di formole generali colla veduta di applicarvi le regole de' massimi e minimi. Si dovrebbe allora colla guida delle nozioni precedenti, valutare la resistenza per diverse linee ipotetiche di rottura, a fin di distinguer il caso il più svantaggioso, e di assicurarsi che in questo stesso caso il masso presenterà la forza necessaria.

Delle pressioni esercitate sulle parti del masso, e che tendono a cagionarne lo schiacciamento.

219. Consideriamo il caso trattato ne' n^{i} 211 e seg. nel quale si è supposto la rottura del masso operarsi per rovesciamento, e supponiamo la costruzione talmente disposta che vi sia semplicemente equilibrio tra l' azione della forza orizzontale Q (Fig. 18) da una parte, e dall' altra l' azione delle resistenze provenienti dal peso delle parti del masso che tendono a esser sollevate e dalla coesione. La direzione della risultante unica di tutte queste forze incontrerebbe il canto A che è l' asse fisso attorno il quale il moto di rotazione tende a prodursi. Ma questo canto sarebbe allora esposto a schiacciarsi. Affinchè non possa aver luogo schiacciamento alcuno, bisogna che gli sforzi esercitati sopra questa parte del masso che è la più esposta, si trovino ripartiti sopra una superficie di una certa estensione.

Questa condizione esige che vi sia eccesso di resistenza dalla parte del masso; per modo che la direzione della

risultante della forza orizzontale Q e delle azioni che a questa forza resistono, deve passare per un punto *b* situato al di dentro della base del masso, a una distanza finita A*b* dal canto A. Supponiamo che siasi disposta la costruzione di maniera a ottenere un eccesso di resistenza, e che si voglia verificare se la pietra presenterà la forza necessaria. Si determinerà la direzione della risultante comune delle azioni che tendono a rompere il masso e delle forze che vi resistono, e il punto *b* in cui essa incontra la base AB. Si considererà poi che lo sforzo sostenuto dalla base del masso deve trovarsi ripartito sopra una porzione di questa base maggiore della porzione A*b*. Dunque, se si riguarda questa porzione A*b* come capace di sostener sola uno sforzo eguale alla risultante di cui si tratta, si conoscerà un limite che la pressione esercitata sulla pietra non può oltrepassare.

Della figura di un masso di egual resistenza alla rottura per rovesciamento.

220. Si cerca la curva BE' (Fig. 19), secondo la quale il masso dev' esser terminato al di sotto, affinchè la resistenza alla rottura secondo una direzione qualunque AT tirata nell' angolo BAE, sia sempre la stessa. Si chiamerà

M il momento della forza Q meno il momento della porzione ACDE del masso, presi questi momenti per rapporto al punto A;

H l'altezza 6E del punto d'applicazione della forza Q;

c la lunghezza della linea AE;

A l'angolo BAE;

α l'angolo BAT;

ρ il raggio AT;

Π e R avranno i significati indicati più sopra.

Considerando α e ρ come coordinate alle quali son rapportati i punti della curva BE, e chiamando α' e ρ' le coordinate di un punto qualunque T' situato al di là di T, si avrà

$$\tfrac{1}{3}\Pi . d\alpha' . \cos . \alpha' . \rho'^3$$

pel momento del peso di un elemento triangolare dell'area ATE. Per conseguenza, supponendo la rottura effettuata in AT, l'equazione di equilibrio sarà

$$M - \tfrac{1}{3}\Pi \int_{\alpha}^{A} d\alpha' . \cos . \alpha' . \rho'^3 = \frac{R\rho^2}{3} .$$

Differenziando rapporto ad α, si ha

$$\Pi d\alpha . \cos . \alpha . \rho^3 = 2R\rho d\rho ,$$

d'onde

$$\frac{\Pi}{2R} \text{sen} . \alpha = -\frac{1}{\rho} + cost. ;$$

e perchè quando $\alpha = A$, $\rho = c$, si ha

$$\rho = \frac{2R.c}{2R + \Pi(\text{sen}.A - \text{sen}.\alpha)c} ,$$

ovvero

$$\rho = \frac{2R.c}{2R + \Pi(H - c\,\text{sin}.\alpha)} ,$$

che è l'equazione della curva richiesta.

221. Se si suppone la coesione estremamente grande, questa equazione si riduce a

$$\rho = c :$$

la curva diviene l'arco di cerchio Eb descritto dal punto A.

222. Quando la coesione si suppone picciolissima, la curva si confonde sensibilmente colla retta EA. Se in

quest'ultimo caso si fosse dato al masso un profilo rettangolare, la parte EA$\mathcal{C}$ sarebbe inutile alla solidità.

Le considerazioni precedenti trovano principalmente la loro applicazione nello stabilimento de' controforti impiegati negli edifizî di stile gotico.

Sperienze sulla resistenza de' massi di fabbrica alla rottura per rovesciamento.

223. M. Seguin maggiore (*a*), e sopratutto M. Vicat (*b*) hanno fatto alcune sperienze intorno a questo genere di resistenza. Le ultime si rapportano principalmente al caso in cui lo sforzo è esercitato da una catena che inviluppa un masso, e che lo sollecita secondo una direzione inclinata. Le nozioni esposte quì sopra sono d' accordo coi risultamenti di queste osservazioni.

ARTICOLO IV.

Dello stabilimento de' muri di rivestimento che resistono alla spinta delle terre e delle acque.

224. Questa quistione comporta due parti: 1° la ricerca della pressione che esercitano le terre contro una parete piana, dalla quale sono rivestite; 2° la ricerca delle dimensioni che conviene attribuire ai muri che resistono a queste pressioni.

(*a*) *Des ponts en fil de fer*, 2.ª edizione pag. 110.

(*b*) *Influence du mode d'attache des chaînes sur la resistance des piliers des ponts suspendus. Annales des Ponts et Chaussées*, tomo 3.

Pressione esercitata dalle terre contro una parete piana.

225. Sia AB (Fig. 20) una parete piana premuta da un masso di terra e mantenuta da una forza Q ad essa parete perpendicolare; si domanda il valore di questa forza, e il punto E della parete al quale dev' esser applicata.

Supponendo che il masso debba dividersi secondo una direzione inclinata AT, si chiamerà

h l' altezza verticale AC del rivestimento ;

ε l'angolo BAC formato dalla parete colla verticale;

ζ l' angolo BAT formato dal piano di rottura colla parete ;

τ l'angolo CAF formato colla verticale dal piano sul quale le terre si terrebbero in equilibrio per effetto solo dell'attrito; di maniera che $f = \frac{\cos.\tau}{\text{sen.}\tau}$.

ϖ, f e γ avranno i significati indicati n° 188.

La forza che tende a far scorrer il prisma BAT sopra AT è

$$\frac{\varpi h^2}{2}[\text{tang.}(\zeta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon]\cos.(\zeta-\varepsilon)\ ;$$

la forza che vi si oppone è

$$Q\,\text{sen.}\zeta + fQ\cos.\zeta + \frac{f\varpi h^2}{2}[\text{tang.}(\zeta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon]\text{sen.}(\zeta-\varepsilon) + \frac{\gamma h}{\cos.(\zeta-\varepsilon)}.$$

Eguagliando queste due forze e ricavando il valore di Q, si ha

$$Q = \frac{\frac{\varpi h^2}{2}[\text{tang.}(\zeta-\varepsilon)+\text{tang.}\varepsilon][\cos.(\zeta-\varepsilon)-f\,\text{sen.}(\zeta-\varepsilon)] - \frac{\gamma h}{\cos.(\zeta-\varepsilon)}}{\text{sen.}\zeta + f\cos.\zeta},$$

ovvero, mettendo per f il valore $\frac{\cos.\tau}{\text{sen}.\tau}$,

$$Q=\frac{\varpi h^2}{2}[\text{tang}.(\tau-\zeta)+\text{tang}.\varepsilon][\text{tang}.(\zeta-\varepsilon)+\text{tang}.\varepsilon]\cos.\varepsilon - \frac{\gamma h \,\text{sen}.\tau}{\cos.(\tau-\zeta)\cos.(\zeta-\varepsilon)}.$$

Se si cerca il valore di ζ che rende il secondo membro un massimo, si conoscerà nel tempo stesso la direzione secondo la quale il masso si romperebbe se la forza Q fosse un po' troppo picciola, e il minimo valore che sia possibile dare a questa forza. Il massimo ha luogo quando

$$\tau-\zeta=\zeta-\varepsilon, \text{ ovvero } 2\zeta=\tau+\varepsilon;$$

d' onde segue che la direzione secondo la quale il masso tende a disgiungersi divide in due parti eguali l' angolo BAF compreso tra la parete e la scarpa naturale delle terre, quando è rotta la coesione e si sostengono solo per effetto dell' attrito. Il prisma determinato in tal modo chiamasi *prisma di massima spinta* (*a*).

226. Sostituendo il valore di ζ in quello di Q, viene

$$Q=\frac{\varpi h^2}{2}[\text{tang}.\tfrac{1}{2}(\tau-\varepsilon)+\text{tang}.\varepsilon]^2\cos.\varepsilon-\gamma h\frac{\text{sen}.\tau}{\cos.^2\frac{1}{2}(\tau-\varepsilon)}$$

per l' espressione cercata della spinta delle terre.

227. Se la parete AB è inclicata dal lato del masso (Fig. 21), l' angolo ε dev' esser preso con segno con-

---

(*a*) Il principio dietro il quale si determina il prisma di massima spinta è dovuto a Coulomb (*Mémoires des savans étrangers*, 1773). Il teorema precedente è stato dato da M. de Prony pel caso di una parete verticale (*Recherches sur la poussée des terres*, etc. 1802); e da M. Français, pel caso di una parete inclinata (*Mémorial de l' officier du génie*, n° 4, 1820).

trario. Il prisma di massima spinta è determinato dalla condizione

$$2\mathcal{C} = \tau - \varepsilon ;$$

il valore della spinta è

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2}\left[\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\tau+\varepsilon) - \text{tang.}\,\varepsilon\right]^2 \cos.\varepsilon - \gamma h \frac{\text{sen.}\,\tau}{\cos.^2\tfrac{1}{2}(\tau+\varepsilon)}.$$

228. Se la parete AB è verticale, $\varepsilon = 0$: si ha, per determinare il prisma di massima spinta,

$$2\mathcal{C} = \tau ;$$

il valore della spinta è

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2} \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\tau - 2\gamma h \,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\tau.$$

229. Supponendo per brevità

$$t = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon) \pm \text{tang.}\,\varepsilon ,$$

e nel caso in cui la parete è verticale

$$t = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\tau ,$$

in guisa che t rappresenta sempre il rapporto della base BT del prisma di massima spinta all'altezza AC; l'espressione della spinta diviene

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2} t^2 \cos.\varepsilon - \gamma h \frac{\text{sen.}\,\tau}{\cos.^2\tfrac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon)},$$

e nel caso in cui la parete è verticale

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2}.t^2 - 2\gamma h.t.$$

Quest' espressione è nulla quando $h = 0$; allorchè h aumenta, è prima negativa, poi ridiviene nulla quando h riceve un valore che si chiamerà h', e che è

$$h' = \frac{2\gamma}{\varpi} \cdot \frac{\text{sen.}\,\tau}{t^2\cos.^2\tfrac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon)\cos.\varepsilon},$$

e nel caso in cui la parete è verticale,

$$h' = \frac{4\gamma}{\varpi.t}, \text{ d' onde } \gamma = \tfrac{1}{4}\varpi h'.t.$$

Il masso può dunque sostenersi da se stesso sull' altezza h', il che si accorda col risultamento del n° 192. Al di là di questo valore, Q cresce indefinitamente con h.

230. L' espressione di Q può esser messa sotta la forma

$$Q = \frac{\varpi h}{2} t^2 (h - h') \cos . \varepsilon ;$$

e nel caso della parete verticale

$$Q = \frac{\varpi h}{2} t^2 (h - h').$$

231. Per conoscere ora il punto della parete in cui dev' esser applicata la forza Q, si osserverà che sopra una parte della parete corrispondente alla porzione z dell'altezza h, la spinta ha per espressione

$$\frac{\varpi z}{2} t^2 (z - h') \cos . \varepsilon .$$

Differenziando rapporto a z, viene

$$\frac{\varpi dz}{2} t^2 (2z - h') \cos . \varepsilon$$

per la spinta esercitata sulla parte di parete corrispondente alla porzione dz dell' altezza h. Si avrà il momento di questa spinta elementare, preso rapporto al punto A (Fig. 20 e 21), moltiplicando per $\frac{h-z}{\cos . \varepsilon}$. Prendendo la somma de' momenti di queste spinte elementari, e dividendola per la spinta totale, si ha

$$\frac{\int_0^h dz[-2z^2 + (2h + h')z - hh']}{h(h - h')\cos . \varepsilon} = \frac{h}{3\cos . \varepsilon} \cdot \frac{h - \frac{1}{2}h'}{h - h'}$$

per la distanza del punto di applicazione della forza Q dal punto inferiore A della parete (a). Quando la pa-

---

(a) Questa formola differisce da quella data da Sig.^{r} Prony

rete è verticale, questa distanza è

$$\tfrac{1}{3}h.\frac{h-\frac{3}{2}h'}{h-h'}.$$

232. L' inclinazione del piano di rottura che dà il prisma di massima spinta è indipendente dal valore della coesione. Se si suppone la coesione nulla, $h'=0$: il valore della spinta è

$$Q=\frac{\varpi h^2}{2}.t^2\cos.\varepsilon;$$

e quando la parete è verticale

$$Q=\frac{\varpi h^2}{2}.t^2.$$

La distanza del punto di applicazione di Q dall'estremità inferiore della parete è

$$\frac{h}{3\cos.\varepsilon};$$

e quando la parete è verticale,

$$\tfrac{1}{3}h,$$

come ne' fluidi.

233. Se nel tempo stesso si suppone nulla la coesione e nullo l'attrito, $h'=0$, $\tau=90^\circ$,

$$t=\text{tang.}(45^\circ\mp\tfrac{1}{2}\varepsilon)\pm\text{tang.}\varepsilon;$$

Français, nelle Memorie sopra citate, avendo questi dotti preso l' integrale del momento delle spinte tra i limiti h' e h. Si osserverà che, sebbene la somma delle spinte elementari sia nulla sopra l'altezza h', non ne segue che la somma de' momenti di queste spinte sia egualmente nulla. Sembra dunque che l' integrale debba esser preso tra i limiti o e h, come l' ha fatto Coulomb nella sua Memoria del 1773. Operando a questo modo, si fa sparire l'anomalia rilevata da Prony n°. 28 delle *Recherches sur la poussée des terres.*

e quando la parete è verticale

$$t = 1.$$

Il valore della spinta in quest' ultimo caso è

$$Q = \frac{\varpi h^2}{2},$$

conforme alle note proprietà de' fluidi.

Pressione esercitata contro una parete piana, quando la superficie superiore delle terre è sopraccaricata.

234. Riprendendo il calcolo del n° 225, supponendo la superficie superiore delle terre caricata uniformemente di materie che debbono dividersi secondo piani verticali corrispondenti alle estremità superiori T delle linee di rottura (Fig. 20 e 21), e chiamando

p il peso portato dall'unità di superficie,

si dovrà nelle formole del d°. n° scrivere $ph + \frac{1}{2}\varpi h^2$ invece di $\frac{1}{2}\varpi h^2$. L' angolo del prisma di massima spinta resterà sempre lo stesso. Il valore della spinta del n° 229 diverrà

$$Q = (ph + \tfrac{1}{2}\varpi h^2)\, t^2 . \cos . \varepsilon - \gamma h \frac{\text{sen.}\tau}{\cos.^2 \frac{1}{2}(\tau \mp \delta)} ;$$

e nel caso in cui la parete è verticale

$$Q = (ph + \tfrac{1}{2}\varpi h^2)\, t^2 - 2\gamma h . t.$$

235. Chiamando h'' il valore di h pel quale Q è zero, si avrà

$$h'' = h' - \frac{2p}{\varpi} ;$$

l' espressione di Q del n° 230, e l' espressione trovata al n° 231 per la distanza del punto di applicazione di Q dall' estremità inferiore della parete, converranno al caso di cui si tratta scrivendo h'' invece di h'.

236. Supponendo nulla la coesione delle terre, come al n° 232, il valor della spinta sarà

$$Q = (ph + \tfrac{1}{2}\varpi h^2)t^2 \cos.\varepsilon;$$

e se la parete è verticale

$$Q = (ph + \tfrac{1}{2}\varpi h^2)\, t^2.$$

La distanza del punto di applicazione di Q dall'estremità inferiore della parete sarà

$$\frac{h}{3\cos.\varepsilon} \cdot \frac{\varpi h + 3p}{\varpi h + 2p};$$

e se la parete è verticale

$$\tfrac{1}{3} h \cdot \frac{\varpi h + 3p}{\varpi h + 2p}.$$

237. Le espressioni precedenti di Q si applicano al caso in cui le terre si cangiano in un fluido, supponendo $\tau = 90°$, il che dà $t = 1$ quando la parete è verticale. Il valore precedente della distanza del punto di applicazione della pressione conviene egualmente alle terre non coerenti, e ai fluidi.

Equilibrio di un muro che sostiene la spinta delle terre.

238. Si riguarda il muro AB*ba* (Fig. 22 e 23) come suscettibile di rompersi secondo la direzione inclinata *a*S. La rottura può aver luogo sia perchè la parte superiore SB*ba* scorrerebbe sul piano di rottura, sia perchè sarebbe rovesciata girando sul canto *a*. La rottura per scorrimento, secondo una direzione inclinata tirata nella grossezza del muro, può esser prevenuta con diversi processi di costruzione; e astrazion fatta da questi processi, questo genere di rottura in generale non avrà

luogo se il muro ha la grossezza necessaria per resistere alla rottura per rovesciamento. Perciò considereremo qui solamente quest'ultimo genere di rottura.

Conservando le denominazioni de' n° 225 e seg., si chiamerà

a la larghezza Aa della base del muro;

h l' altezza verticale AC;

m il rapporto della base all' altezza, per la scarpa della faccia esterna ab del muro;

Π il peso dell' unità di volume della materia del muro;

R la coesione della materia del muro sull' unità di superficie (v. n° 211);

F il rapporto dell' attrito alla pressione per le terre che strisciano lungo la faccia interna AB del muro.

ε rappresenterà, come più sopra, l' angolo che la faccia interna AB forma colla verticale;

z l' altezza indeterminata SD.

Riguardando la pressione esercitata dalla terra contro BS come una forza applicata in E perpendicolarmente alla faccia del muro, il valore di questa forza secondo il n° 230 è

$$\tfrac{1}{2}\varpi z t^2 (z - h')\cos.\varepsilon.$$

La distanza SE, secondo il n° 231, è

$$\frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'};$$

d' onde segue che il braccio di leva aG della forza di cui si tratta, è

$$\frac{h-z}{\cos.\varepsilon}+\frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'}\mp a\,\mathrm{sen}.\varepsilon.$$

L' espressione del momento della spinta delle terre

sopra BS, preso per rapporto allo spigolo a, è dunque

$$\tfrac{1}{2}\varpi z t^2(z-h')\cos.\varepsilon\left[\frac{h-z}{\cos.\varepsilon}+\frac{z}{3\cos.\varepsilon}\cdot\frac{z-\frac{3}{2}h'}{z-h'}\mp a\,\mathrm{sen}.\varepsilon\right],$$

riferendosi i segni superiore e inferiore ai casi delle figure 22 e 23. La stessa espressione converrebbe al caso in cui la superficie delle terre fosse uniformemente sopraccaricata, scrivendo h'' in luogo di h', conforme al n° 235.

239. Il momento delle forze che si oppongono al rovesciamento, preso per rapporto al canto a, si compone del momento del peso del rettangolo ACca, che è

$$\tfrac{1}{2}\Pi a^2 h;$$

meno il momento del peso del triangolo abc,

$$\tfrac{1}{6}\Pi m^2 h^3;$$

meno o più il momento del peso del triangolo ACB,

$$\tfrac{1}{2}\Pi h^2\,\mathrm{tang}.\varepsilon(a\mp\tfrac{1}{3}h\,\mathrm{tang}.\varepsilon);$$

meno il momento del peso del triangolo aRS,

$$\tfrac{1}{3}\Pi(h-z)[a\mp(h-z)\,\mathrm{tang}.\varepsilon]^2;$$

meno o più il momento del peso del triangolo ARS,

$$\tfrac{1}{6}\Pi(h-z)^2\,\mathrm{tang}.\varepsilon[a\mp\tfrac{2}{3}(h-z)\,\mathrm{tang}.\varepsilon];$$

ai quali bisogna aggiungere il momento della resistenza alla rottura sopra aS, che è

$$\tfrac{1}{3}\mathrm{R}\{(h-z)^2+[a\mp(h-z)\,\mathrm{tang}.\varepsilon]^2\};$$

e infine il momento dell'attrito e dell'aderenza delle terre contro la faccia interna del muro, che è

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{F}\varpi z t^2(z-h')\cos.\varepsilon.a\cos.\varepsilon.$$

240. La condizione dell' equilibrio del muro, per un valore dato di z, si esprimerà eguagliando questa somma di momenti al momento della spinta delle terre sopra BS. Se si risolve questa equazione per rapporto ad a,

e si determina il valore di z colla condizione di render a un massimo, si conoscerà nel tempo stesso la direzione secondo la quale il muro si romperebbe, se la grossezza a fosse troppo picciola, e il minimo valore che si possa dare a questa grossezza.

241. Supporremo verticale la faccia interna del muro, nulla la coesione delle terre e quella della materia del muro, d'onde $\varepsilon = 0$, $h' = 0$, $R = 0$. Di più trascureremo l'attrito esercitato dal terreno contro la faccia interna del muro, per cui $F = 0$. In questo caso, se non vi è carica estranea sulla superficie superiore delle terre, il momento della spinta sopra BS, preso per rapporto al punto A, è

$$\tfrac{1}{2}\varpi z^2 . t^2 (h - \tfrac{2}{3} z);$$

e il momento di stabilità del muro

$$\tfrac{1}{2}\Pi a^2 h - \tfrac{1}{3}\Pi a^2 (h - z) - \tfrac{1}{6}\Pi m^2 h^3 .$$

Eguagliando queste due quantità, e risolvendo rapporto ad a, si trova

$$a = \sqrt{\frac{\varpi z^2 t^2 (3h - 2z) + \Pi m^2 h^3}{\Pi (h + 2z)}} .$$

Differenziando e eguagliando a zero, per determinare il valore di z che renderà a la più grande possibile, si avrà l'equazione

$$8\varpi t^2 \Pi z^3 - 6\varpi t^2 . \Pi h^2 z + 2\Pi^2 m^2 h^3 = 0 .$$

Questo valore, sostituito nell'espressione precedente, farà conoscer la minima larghezza che sia possibile dare alla base del muro.

242. Se la faccia esterna del muro è verticale, come pure l'interna, $m = 0$; l'espressione precedente di a si riduce a

$$a = \sqrt{\frac{\varpi z^2 t^2 (3h - 2z)}{\Pi (h + 2z)}} .$$

Il valore di z che rende questa espressione un massimo è

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,h\,;$$

e la minima grossezza che sia possibile dare al muro è

$$a = h\,.\,t\sqrt{\frac{9\varpi}{(12+8\sqrt{3})\Pi}}.$$

Quindi l'altezza RS è allora $\frac{1}{8}$ circa dell'altezza del muro, e la minima grossezza è presso a poco $0{,}59\,.\,ht\sqrt{\frac{\varpi}{\Pi}}$.

Equilibrio di un muro sostenente la spinta delle terre, supponendolo per intiero rovesciato sul lato esteriore della base.

243. Si riguarda ora il muro come un corpo posato sopra una base colla quale non avrebbe adesione alcuna, e si suppone l'adesione della materia del muro assai grande per non farsi disgiunzione alcuna nel caso che la spinta delle terre lo rovescerebbe facendolo girare intorno al lato esteriore della base. Ritenendo le denominazioni del n° 238 che si riferiscono alle fig. 22 e 23, l'espressione del momento della spinta delle terre sopra AB si dedurrà da quella che è stata trovata in questo numero supponendo $z = h$, e sarà

$$\tfrac{1}{2}\varpi t^2\left[\tfrac{1}{3}h^2(h-\tfrac{3}{2}h') \mp ah(h-h')\text{sen.}\,\varepsilon\,\text{cos.}\,\varepsilon\right].$$

Il momento delle forze che si oppongono al rovesciamento si dedurrà parimenti dall'espressione data n° 239, supponendo $z = h$, $\mathrm{R} = 0$, $\mathrm{F} = 0$, e sarà

$$\tfrac{1}{2}\Pi h\left[a^2 \mp ah\,\text{tang.}\,\varepsilon + \tfrac{1}{3}h^2(\text{tang.}^2\varepsilon - m^2)\right].$$

Eguagliando queste due espressioni, e risolvendo l'e-

quazione rapporto ad a, si troverà

$$a = \pm \tfrac{1}{2}\left[h \text{ tang.}\,\varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 (h - h') \text{ sen.}\,\varepsilon \cos.\,\varepsilon\right]$$
$$+\sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}\left[h \text{ tang.}\,\varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 (h - h') \text{ sen.}\,\varepsilon \cos.\,\varepsilon\right]^2\right.}$$
$$\left. + \frac{\varpi}{3\Pi} t^2 h (h - \tfrac{3}{2} h') - \tfrac{1}{3} h^2 (\text{tang.}^2\varepsilon - m^2)\right\}$$

per l' espressione della larghezza a darsi alla base del muro.

Questa espressione converrà al caso in cui la superficie superiore delle terre è sopraccaricata, scrivendo h'' in luogo di h', e dando a h'' il valore indicato n° 235.

244. Se la faccia interna del muro è verticale, $\varepsilon = 0$; il valore di a è

$$a = \sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi} t^2 h (h - \tfrac{3}{2} h') + \tfrac{1}{3} m^2 h^2},$$

formola nella quale $t = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\tau$, conforme al n° 229.

245. Se è verticale anche la faccia esterna del muro, $m = 0$, e si ha

$$a = t\sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi} . h (h - \tfrac{3}{2} h')}.$$

246. Se, supponendo nulla la coesione delle terre, esiste una sopraccarica nella faccia superiore, si deve (conforme al n° 235) scrivere $-\frac{2p}{\varpi}$ in luogo di h' nell' espressione generale di a del n° 243, e in quella de' due numeri precedenti. Ma se non esiste sopraccarica, si deve fare $h' = 0$. Allora l' espressione del n° 243 diviene

$$a = \pm \tfrac{1}{2} h \left[\text{ tang.}\,\varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 \text{ sen.}\,\varepsilon \cos.\,\varepsilon\right]$$
$$+h\sqrt{\tfrac{1}{4}\left[\text{tang.}\,\varepsilon - \frac{\varpi}{\Pi} t^2 \text{sen.}\,\varepsilon \cos.\,\varepsilon\right]^2 + \frac{\varpi}{3\Pi} t^2 - \tfrac{1}{3}(\text{tang}^2.\varepsilon - m^2)}.$$

247. Se, essendo nulla la coesione delle terre, la faccia interna del muro è verticale, si ha

$$a = h\sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi}t^2 + \frac{1}{3}m^2}.$$

248. Finalmente se, essendo nulla la coesione delle terre, le due faccie del muro sono verticali, si ha

$$a = h.t\sqrt{\frac{\varpi}{3\Pi}};$$

di maniera che la minima grossezza a darsi al muro è presso a poco $0{,}577.ht\sqrt{\frac{\varpi}{\Pi}}$, risultamento che non differisce sensibilmente da quello del n° 242.

249. Le formole de' tre n^i precedenti si applicheranno al caso in cui le terre si cangiano in un fluido, supponendo $\tau = 90^\circ$, il che dà $t = 1$ quando la faccia interna del muro è verticale.

Equilibrio di un muro che sostiene la spinta delle terre, supponendolo poter scorrere sulla sua fondazione.

250. Si può ancora riguardare il muro come un corpo posato sopra una base orizzontale, con cui non avesse che una debole aderenza, e sulla quale la spinta delle terre lo farebbe scorrere senza produrre in esso disgiunzione. Conservando le denominazioni del n° 238 che si rapportano alle fig. 22 e 23, si chiamerà

Φ il rapporto dell' attrito alla pressione allorchè il muro scorre sulla base Aa;

Γ la forza di coesione esistente tra la materia del muro e la base.

La forza che tende a produrre lo scorrimento è la

componente orizzontale della spinta Q, il cui valore è stato dato n° 230, cioè

$$\tfrac{1}{2}\varpi h t^2(h-h')\cos.^2\varepsilon.$$

Il peso del muro essendo

$$\Pi[ah-\tfrac{1}{2}h^2(m\pm\text{tang.}\varepsilon)],$$

si ha per la forza che si oppone allo scorrimento

$$\pm\tfrac{1}{2}\Phi\varpi h t^2(h-h')\,\text{sen.}\varepsilon\cos.\varepsilon+\Phi\Pi[ah-\tfrac{1}{2}h^2(m\pm\text{tang.}\varepsilon)]+\Gamma a.$$

Eguagliando queste due forze, si esprime la condizione dell'equilibrio del sistema; e risolvendo l'equazione rapporto ad a, si trova

$$a=\frac{h}{2}\cdot\frac{\varpi t^2(h-h')\cos.^2\varepsilon\,(1\mp\Phi\,\text{tang.}\varepsilon)+\Phi\Pi h(m\pm\text{tang.}\varepsilon)}{\Phi\Pi h+\Gamma}$$

per l'espressione della minima larghezza che sia possibile dare alla base del muro.

Questa espressione converrà al caso, in cui la superficie superiore delle terre è sopraccaricata, scrivendo h'' invece di h', e dando a h'' il valore indicato n° 235.

251. Se la faccia interna del muro è verticale, $\varepsilon=0$; il valore di a è

$$a=\frac{h}{2}\cdot\frac{\varpi t^2(h-h')+\Phi\Pi mh}{\Phi\Pi h+\Gamma},$$

formola nella quale $t=\text{tang.}\frac{1}{2}\tau$, conforme al n° 229.

252. Se la faccia esterna del muro è pure verticale, $m=0$; e si ha

$$a=\frac{h}{2}\cdot\frac{\varpi t^2(h-h')}{\Phi\Pi h+\Gamma}.$$

253. Supponendo nulla la coesione delle terre, se esiste una sopraccarica nella faccia superiore, si deve, conforme al n° 235, scrivere $-\frac{2p}{\varpi}$ in vece di h' nelle due espressioni precedenti. Ma se non vi è sopraccarica, si deve al-

lora fare $h' = 0$. Supponendo parimenti nulla la coesione tra il muro e la base, l' espressione del n° 250 diviene

$$a = \frac{h}{2}\left[\frac{\varpi}{\Phi\Pi}t^2\cos^2\varepsilon(1 \mp \Phi\,\text{tang.}\,\varepsilon) + m \pm \text{tang.}\,\varepsilon\right].$$

254. Se, essendo nulla la coesione, è verticale la faccia interna del muro, si ha

$$a = \frac{h}{2}\left[\frac{\varpi}{\Phi\Pi}t^2 + m\right].$$

255. Finalmente, se nella stessa ipotesi della coesione nulla, le due faccie son verticali, si ha

$$a = \frac{\varpi h.t^2}{2\Phi\Pi}.$$

256. Le formole de' tre numeri precedenti si applicheranno al caso in cui le terre si cangiano in un fluido supponendo $\tau = 90^\circ$, il che dà $t = 1$ quando la faccia interna del muro è verticale.

Tutti i risultamenti esposti dopo il n° 238 si applicano del pari a un muro formato di un masso omogeneo o a un muro costrutto con pietre poste a filari orizzontali.

ARTICOLO V.

Dello stabilimento delle fondazioni, quando i muri son sostenuti da terreni compressibili.

257. Quando non si può stabilir le fondazioni di un muro sopra un suolo sensibilmente imcompressibile, l'inconveniente che ne risulta è minore, se il muro per effetto della compressibilità del terreno si abbassa verticalmente senza pender da un lato o dall' altro. La fondazione deve dunque essser in modo disposta, che il muro

non abbia alcuna tendenza a rovesciarsi. Noi supponiamo il terreno egualmente compressibile in tutta l'estensione della superficie delle fondazioni.

Nel caso in cui il muro non sostiene che azioni verticali, questa condizione sarà soddisfatta, se il centro di gravità del peso del muro e de' pesi di cui è caricato, si trova nella linea verticale che passa pel centro di gravità dell'area delle fondazioni.

258. In generale, se un muro sostiene sforzi verticali e orizzontali, non avrà alcuna tendenza a rovesciarsi se la risultante di questi sforzi passa pel centro di gravità dell'area delle fondazioni; cioè se la somma de' momenti di questi sforzi, presi per rapporto a questo centro di gravità, è nulla (*a*).

259. Per esempio, nel muro rappresentato fig. 17 e 18, del quale sono state esaminate le condizioni di equilibrio ne' n^i 200 e seg., supponendo il profilo delle fondazioni rettangolare, conservando le denominazioni di questi numeri, e chiamando

a' la larghezza $\alpha\mathcal{C}$ della fondazione;

h' l'altezza $B\mathcal{C}$;

si avrà pel momento del peso del muro e della fondazione, preso per rapporto al mezzo della base $\alpha\mathcal{C}$,

$$\tfrac{1}{2}(P \pm \varpi ah)(a' - a);$$

e pel momento della forza orizzontale Q, preso rapporto allo stesso punto,

$$Q(h + h').$$

(*a*) Queste nozioni sono state presentate in una memoria redatta nel 1816 e pubblicata nel 1822 da M. Lambel, direttore delle fortificazioni. Esse lo sono state del pari nella memoria di M. Français, *Mémorial du génie*, n° 4.

*

La larghezza a' dovrà dunque esser determinata per mezzo dell' equazione

$$Q(h+h') = \tfrac{1}{2}(P + \varpi ah)(a' - a),$$

d' onde

$$a' = a + \frac{2Q(h+h')}{P + \varpi ah}.$$

260. In ogni altro caso, e particolarmente quando i muri sostengono la spinta delle terre o de' fluidi, non si troverà alcuna difficoltà per regolare la larghezza delle fondazioni in modo da soddisfare alla condizione di cui si tratta, poichè i risultamenti presentati nell' articolo precedente fanno conoscere la grandezza e la direzione della spinta. Si farà in modo che il momento di questa spinta preso per rapporto al mezzo della base delle fondazioni sia eguale al momento del peso del muro preso per rapporto allo stesso punto.

ARTICOLO VI.

Qualità diverse delle terre. Valutazione della gravità specifica, dell' attrito e della coesione.

261. Le proprietà delle terre, la natura e le qualità delle quali sono variabilissime, possono esser considerate sotto diversi punti di vista. Distingueremo quì 1° le terre smosse, e ridotte in minute parti che non hanno alcuna sensibile adesione fra loro; 2° le terre nello stato naturale supponendole secche o leggermente umettate; 3° le terre fortemente penetrate dall'acqua.

La gravità specifica delle terre e delle fabbriche non può esser conosciuta esattamente che per mezzo di apposite sperienze. La tavola seguente offre de' risultamenti medî

Terra vegetale	1,4
Terra sciolta	1,5
Terra argillosa	1,6
Argilla	1,9
Sabbia terrosa	1,7
Sabbia pura	1,9
Fabbrica di pietrame calcareo e siliceo, da	1,7
fino a	2,3
Fabbrica di pietrame granitico	2,3
Fabbrica di pietrame di basalto	2,5

Moltiplicando questi numeri per 1000, si ha il peso del metro cubo in chilogrammi.

Delle terre smosse, e ridotte in minute parti non coerenti.

262. In questo stato, le parti delle terre son riguardate non aver alcuna coesione le une colle altre. Nell' applicar dunque le formole degli articoli precedenti, si deve supporre la coesione nulla. Rimane a conoscere il rapporto dell' attrito alla pressione, o ciò che è lo stesso, la scarpa secondo la quale si dispongono naturalmente le terre, quando si forma un riempimento (v. i n^{i} 192 e 225).

263. Di tutte le terre, la sabbia fina e asciutta è quella che prende la scarpa più grande. Secondo una sperienza di M. Gadroy (*a*), questa scarpa è $\frac{5}{3}$, d' onde $f = 0{,}6$ e $\tau = 69^{\circ}$.

(*a*) *Traité expérimental et analytique de la pousée des terres par M. Mayniel*, pag. 1.

264. Secondo le sperienze di M. Rondelet (*a*), il piano della scarpa della sabbia fina ben secca, e del grès polverizzato, forma coll' orizzonte un angolo di $34^{\circ}\frac{1}{2}$; d'onde $f = 0{,}69$ e $\tau = 55^{\circ}\frac{1}{2}$.

Dietro le stesse sperienze (*b*), il piano della scarpa per la terra ordinaria ben asciutta e ridotta in polvere, forma coll' orizzonte un angolo che è almeno $46^{\circ}\ 50'$; d' onde $f = 0{,}94$ e $\tau = 43^{\circ}\ 10'$. Quando la stessa terra è leggermente umettata, quest' angolo diviene al più 54°; il che dà $f = 1{,}38$ e $\tau = 56^{\circ}$.

265. Secondo M. Barlow (*c*), la scarpa della sabbia della specie la più leggiera è $\frac{5}{4}$; d' onde $f = 0{,}8$ e $\tau = 51^{\circ}$. Secondo lo stesso autore, la scarpa del terreno della specie la più densa e la più compatta è $\frac{5}{7}$; d' onde $f = 1{,}4$ e $\tau = 35^{\circ}$.

266. Secondo il colonnello Pasley (*d*), la specie di terra non coerente (*loose shingle*) e perfettamente secca impiegata nelle sue sperienze, prendeva una scarpa di $\frac{6{,}23}{5}$, d' onde $f = 0{,}8$ e $\tau = 51^{\circ}$.

(*a*) *Art de bâtir*, tomo III, pag. 135.

(*b*) *Idem*, pag. 139, 141.

(*c*) *An essay on the strength and stress of timber*, pag. 249.

(*d*) *Course of military instruction*, tomo III, pag. 562. Quest' opera contiene una serie di sperienze sull' azione della terra contro i rivestimenti. Si osserverà che delle sperienze in piccolo non sono proprie a dare nozioni esatte sopra questa azione, i cui diversi elementi variano coll' altezza de' rivestimenti secondo diverse proporzioni. Niuno de' risultamenti ottenuti dall' autore è d' altronde in contraddizione colle nozioni presentate negli articoli precedenti. Questi risultamenti indicano solo che l' attrito e l' aderenza delle terre contro la faccia interna de' muri, la cui considerazione è stata

267. Citeremo attualmente le sperienze che sono state fatte colla veduta di misurare direttamente le pressioni esercitate dalla sabbia o da altre materie non coerenti (chiamate qualche volta semifluidi) contro il fondo o i lati delle capacità che le contengono.

Dietro le osservazioni di M. Delanges (*a*), gli angoli della scarpa coll' orizzonte sono per

La sabbia di fiume finissima.....	33°
Il miglio.....	23
Le migliarole di piombo.....	22 30′
I pallini di piombo di un diametro triplo di quelli delle migliarole.....	25

Il peso d' un pollice cubo è per

La sabbia	7,3 dramme.
Il miglio.....	4,2
Le migliarole	39,3

268. Pressioni esercitate sul fondo di un vaso cilindrico il cui asse è verticale. Il fondo era mobile e la pressione che sosteneva era misurata da una bilancia.

---

trascurata ne' calcoli de' n^{i} 238 e seg., producono degli effetti sensibili, quando l' altezza de' rivestimenti è picciolissima, come lo era nelle sperienze. Le sperienze descritte da M. Mayniel nelle sue ricerche sulla spinta delle terre, possono dar luogo a delle osservazioni simili.

(*a*) Statica e meccanica de'semifluidi, Memorie di matematica e fisica della Società italiana , tomo IV , 1788. Si trovano in questa memoria delle osservazioni curiosissime sulla maniera come la sabbia si muove, scolando fuori de' vasi per un orifizio.

VASI.	ALTEZZA de' semifluidi.	PRESSIONI SUL FONDO DEL VASO. Sabbia.		Miglio.		Migliarole.	
	pollici.	dram.	gr.	dram.	gr.	dram.	gr.
Vaso cilindrico di 6 poll. di altezza e 2 poll. di diametro.....	2	21	15	18	0	177	0
	4	28	0	26	30	220	0
	6	35	0	33	45		
Vaso cilindrico di 6 poll. di altezza e 3 poll. di diametro.....	2	76	30	49	0		
	6	139	0	88	0		

Le pressioni son minori del peso della materia contenuta nel vaso (per la sabbia $\frac{1}{3}$, pel miglio e per le migliarole $\frac{1}{5}$ circa), e non aumentano proporzionalmente alle altezze.

Ripetute queste sperienze sopra vasi conici, si è trovata la pressione sul fondo minore di quella pe' vasi cilindrici; di maniera che sembra esservi allora maggiore ostacolo alla discesa della colonna verticale che preme sul fondo che nel caso in cui questa colonna è contenuta tra pareti solide.

Si è procurato riconoscere se i semifluidi esercitavano una pressione verticale da sotto in sopra: non si è potuto osservare alcun' effetto sensibile.

269. Pressioni esercitate contro una parete verticale. Le sperienze sono state fatte per mezzo di una cassa rettangolare. In una estremità vi era una parete mobile sopra un asse posto sul suo lato inferiore, e si poteva situar la parete opposta in modo a far variare la lunghezza della cassa. Questa avea sei pollici di larghezza e di altezza. I pesi equivalenti alle pressioni laterali de'

semifluidi esercitavano la loro azione a 7 poll. e 7 lin. di distanza dall' asse di moto della parete mobile.

ALTEZZA del semifluido.	LUNGHEZZA del semifluido.	PESI EQUIVALENTI ALLE PRESSIONI LATERALI.					
		Sabbia.		Miglio.		Migliarole.	
pollici.	pollici.	dram.	gr.	dram.	gr.	dram.	gr.
2	4					14	0
2	6	2	22	2	45		
4	6					69	30
4	10	9	30	14	30		
6	2	23	0	27	7	206	0
6	4						
6	6	24	45	27	22		
6	8	24	52	31	30	206	0
6	16	24	45	32	0		

270. Quando un semifluido scola per un orifizio esistente nel fondo di un vaso, la sua superficie superiore, se l'altezza è sufficiente, si abbassa restando sulle prime piana e orizzontale fino a un certo livello, in cui si deprime nel mezzo, e finisce col prender la figura conica che corrisponde all' inclinazione ordinaria della scarpa. Le velocità dell' efflusso sono molto meno grandi di quelle che avrebbero luogo pe' fluidi.

271. Dietro le sperienze di M. Huber-Burnand (*a*) sulla sabbia finissima, la quantità di sabbia scolata in un tempo dato da un foro esistente nel fondo di una cassa è assolutamente la stessa, in volume e in peso, qualunque sia l'altezza iniziale della superficie della sab-

(*a*) Lettera sullo scolo e la pressione della sabbia. Biblioteca universale redatta a Ginevra; scienze e arti, 1829.

bia sull' orifizio. Succede lo stesso quando la sabbia scola da aperture esistenti nelle pareti laterali. Ma se quest' ultime aperture son dirette orizzontalmente e non hanno un diametro presso a poco eguale alla grossezza della parete, la sabbia non esce affatto qualunque sia la sua altezza nella cassa.

La sabbia versata in un tubo con due rivolte a angolo retto non rimonta nel tubo opposto come farebbe un liquido: si stende appena nel tubo orizzontale a una picciolissima distanza dalla rivolta.

La pressione che si esercita alla superficie superiore della sabbia contenuta in una cassa non influisce affatto sulla velocità di scolo della sabbia per un orifizio esistente nel fondo di essa cassa.

272. L' angolo della scarpa della sabbia è stato osservato da M. Huber-Burnand di 30 a 33°, di rado di 35°. Sotto lo stesso angolo si dispongono de' piselli, e della granaglia, e seguono interamente le stesse leggi.

273. Intorno alla pressione esercitata sul fondo di un vaso, lo stesso fisico ha fatto le osservazioni seguenti:

1° Un uovo ricoverto di alcuni pollici di sabbia la cui superficie è caricata di un peso di $25^{ch.}$ non si schiaccia. Succede lo stesso quando la sabbia è in moto per effetto di uno scolo che ha luogo nel fondo del vaso.

2° Quando due tubi verticali comunicanti per mezzo delle estremità inferiori contengono del mercurio, il livello comune del mercurio ne' due tubi non è alterato quando si versa della sabbia sul mercurio in uno de'tubi. Questo sperimento è stato fatto con un tubo di $0^{m},65$ di altezza e $0^{m},035$ di diametro. Si può esercitare una forte pressione sull' estremità superiore della colonna di sabbia senza cangiare il risultamento.

3° Adattando un fondo mobile allo stesso tubo che si riempie di sabbia o di piselli secchi, si riconosce che questo fondo non sostiene che una parte picciolissima e quasi insensibile del peso di queste materie ($0^{ch.},012$ sopra $1^{ch.},5$ a $2^{ch.}$), e che il detto peso è quasi per intero sostenuto dall' attrito che si stabilisce contro la parete laterale del tubo.

Queste sperienze sono riuscite egualmente con un tubo cilindrico di 4 pol. di diametro, e ancora con un tubo slargato verso il fondo

Quando si versa dell' acqua nel tubo pieno di sabbia, vi si mantiene insiem colla sabbia e non scola.

274. Queste osservazioni son confermate da quelle di M. Moreau capitano del genio (*a*). Per sottoporre alla sperienza una sabbia fina e umida si è fatto uso di una cassa di 4^{m} di lunghezza e 1^{m} di larghezza e di profondità. Il fondo presentava delle aperture di $2^{m},22$ di lunghezza $0^{m},27$ e $0^{m},6$ di larghezza, chiuse per mezzo di una lastra a bilico girante sur una cerniera, sorretta da una corda che passando per una puleggia sosteneva un piatto carico di pesi. La superficie superiore della sabbia nella cassa è stata caricata di pesi che hanno sorpassato $4300^{ch.}$ a metro quadrato. Altre sperienze sono state fatte sulla sabbia secca con una cassa più picciola. L' autore ne conchiude che non variando la lunghezza e l' altezza di un masso di sabbia, la pressione sopra un' estensione determinata del fondo, quando questo cede, diviene costante, o la sabbia sia sola, o sia caricata alla

---

(*a*) Notizia sopra una nuova maniera di fondare in cattivo terreno. *Mémorial de l' officier du génie*, n° 11.

sua superficie di pesi considerevoli, e anche di pesi qualunque. Sembra nondimeno che la pressione primitiva sostenuta dalla parte del fondo che va a cedere è più grande quando la sopraccarica è più considerevole; ma la pressione finale è sempre la stessa.

Cercando quale sarebbe l'inclinazione delle faccie de' prismi di sabbia che hanno per base le porzioni mobili del fondo, dietro la condizione che il peso di questi prismi fosse eguale alle pressioni osservate, si sono trovati de' risultamenti irregolari che corrispondevano ad angoli di scarpa di 46° a 55° coll'orizzonte. Essendo quest'angolo maggiore dell'inclinazione naturale della sabbia, le pressioni sono maggiori del peso de' prismi.

275. La teoria sopra esposta, articolo IV, si accorda con queste osservazioni. L'espressione data n° 229 (facendo $\gamma = 0$) rappresenterà la pressione esercitata contro la parete laterale di un vaso, nel caso in cui la sua larghezza è almeno eguale alla base del prisma di massima spinta. Sarebbe facile, seguendo gli stessi principî, formare l'espressione che conviene alla pressione di cui si tratta, quando la larghezza del vaso è meno grande. Si vede che il valore di questa pressione è considerevole, e aumenta rapidamente coll'altezza del vaso. È dunque facile concepire che quando il fondo comincia a cedere se le pareti laterali sono verticali o poco inclinate al di dentro, essa può dar luogo a un attrito che distrugge la massima parte dell'azione della gravità sulla porzione del sistema che si appoggia contro queste pareti. Sembra d'altronde che nuove sperienze sieno necessarie per fissare interamente le idee sopra quest'oggetto.

Delle terre nello stato naturale.

276. La maggior parte delle terre e anche le sabbie hanno acquistato una grandissima coesione quando le parti son rimaste lungo tempo in contatto e sono state fortemente compresse. In questo stato si possono tagliare verticalmente senza cagionar frana sopra un altezza di 1 a 2^m per la terra sciolta, e di 3 a 4^m o anche di più per le terre molto argillose. Non si conoscono su questo soggetto osservazioni precise. La forza di adesione della stessa terra può d' altronde variare col grado di umidità.

Il valore del coefficiente γ (v. n° 188) si conchiude dall' altezza sulla quale la terra può esser tagliata verticalmente, senza smottarsi, per mezzo dalla formola data n^i 192 e 229 ,

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\,\varpi\, h'.\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\tau,$$

essendo h' l' altezza di cui si tratta, ϖ il peso dell' unità di volume delle terre , τ l' angolo che forma colla verticale il piano della scarpa naturale , supponendo la coesione distrutta.

Supponendo per la terra sciolta $\varpi = 1500^{ch}$, $\tau = 40°$, $h' = 1^m$, si trova $\gamma = 136^{ch}$.

Supponendo per le terre le più forti $\varpi = 1800^{ch}$; $\tau = 35°$, $h' = 4^m$, si trova $\gamma = 568^{ch}$.

Il valore del coefficiente γ può esser riguardato per le terre come compreso fra questi due limiti; essendo il metro e il chilogrammo le unità di lunghezza e di peso.

277. Quando le terre nello stato naturale sono state tagliate, e la superficie della scarpa rimane esposta all' aria, le alternative di secchezza ed umidità, o l' effetto della gelata, ne cangiano le qualità. Le parti vicine alla

superficie si staccano successivamente; e in generale, le terre col tempo tendono a prender da se stesse la scarpa che avrebber presa prima, se non fosse esistita la coesione. Ma se la parete laterale è stata rivestita da una costruzione di fabbrica, questa alterazione non ha luogo; e le terre possono allora sostenersi sopra scarpe minori o con rivestimenti men grossi di quelli che avrebbero richiesto se la coesione delle parti fosse stata preliminarmente distrutta.

Degli effetti dell'acqua che penetra nelle terre.

278. La sabbia, la terra vegetale e la terra sciolta, penetrate dall' umido, non sembrano ricevere alterazione notabile. Le terre fangose e quelle dette saponacee si stemprano e divengon suscettibili di colare quasi come un fluido. La spinta delle terre di questa specie dev' esser calcolata colle formole relative al caso de' fluidi, attribuendo al peso dell' unità di volume il valore convenevole.

I terreni argillosi, e principalmente l'argilla pura, senza divenir fluenti, il che esigerebbe che assorbissero una grandissima quantità d' acqua, aumentano di volume quando son penetrati dall' umido. Un terreno omogeneo aumentando di volume agisce contro un rivestimento, della stessa manièra che farebbe un fluido di una gravità specifica eguale a quella di un tal terreno. Così, sebbene i terreni argillosi, secchi o leggermente umidi, abbiano una grande coesione, e sembrano esigere de' rivestimenti poco grossi, essi nondimeno divengono, a ragione della loro gravità specifica, i più pericolosi di tutti, quando si trovano nel caso di esser penetrati dalle acque.

De' casi in cui la natura del terreno varia nell' altezza del rivestimento.

279. I terreni offrono spesso degli strati di diversa natura. Si potrebbero prender in considerazione queste variazioni nel calcolo. La complicazione che ne risulterebbe, e le incertezze che rimangono sulla valutazione degli elementi della resistenza de' terreni di diverse specie, renderebbero per ora poco utili queste ricerche. Si osserverà solamente 1° che si sarà sempre al di sopra dell' equilibrio, attribuendo a tutta la massa il più piccolo valore dell' attrito e della coesione che conviene ai diversi strati; 2° che non esiste alcun caso in cui l' azione delle terre possa sorpassare quella di un fluido che abbia la stessa gravità specifica.

Dell' attrito e della coesione nelle fabbriche.

280. Dietro le sperienze di M. Rondelet (*a*), una pietra di *liais* (calcarea di una grana finissima) bene squadrata e orsata, scorrendo su d' una pietra simile, si sostiene in equilibrio sopra un piano inclinato di poco più di 30°. Se ne ricava, pel rapporto dell' attrito alla pressione, 0,58.

281. Dietro le sperienze di M. Boistard (*b*) il rapporto medio dell' attrito alla pressione per una pietra

---

(*a*) *Traité de l'art de bâtir*, tomo III, pag. 243.

(*b*) *Recueil d'expériences et d'observations faites sur différens travaux, etc.* pag. 132, edizione del 1822.

calcarea durissima, lavorata colla subbia o colla martellina è 0,78.

282. Secondo l' osservazione di M. Regnier (*a*), lo stesso rapporto, per una cassa di legname che scorre sopra il lastricato, è 0,58.

283. Secondo M. Perronet (*b*), i cunei di pietra cominciano a scorrer sui letti, quando l' inclinazione all' orizzonte è di 39° a 40° (Rapporto dell' attrito alla pressione, circa 0,82).

284. Secondo M. G. Rennie (*c*), i cunei di granito del nuovo ponte di Londra, co' letti bene spianati e senza malta, cominciano a scorrer sotto un angolo di 33° a 34°. Con uno strato di malta fresca ben impastata l'angolo è di 25° a 26°.

I cunei di grès, coi letti bene spianati, scorrono sotto un angolo di 35° a 36°; e con uno strato di malta sotto un angolo di 33° a 34°.

285. La tavola seguente contiene i risultamenti delle sperienze fatte da M. Boistard (*d*) sulla forza di coesione che offrono le malte, quando si vuol separarne due porzioni facendole scorrer l'una sull' altra. De' prismi di 5 pol. di altezza formati di pietra calcarea lavorata alla martellina nella base, senz'aristatura nel contorno, sono stati fabbricati sopra una lastra della stessa pietra; alcuni con malta composta di $\frac{1}{3}$ di calce estinta da diciotto

---

(*a*) Descrizione del dinamometro, *Journal de l'École Polytechnique, 5e cahier*, pag. 171.

(*b*) *Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts.*

(*c*) *Experiments on the friction and abrasion of the surface of solids.* — *Philosophical transactions*, parte I, 1829.

(*d*) *Recueil d'expériences etc.* pag. 125.

mesi e di $\frac{2}{3}$ di sabbia di cava passata per crivello e molto asciutta; le altre con malta composta di $\frac{1}{3}$ della stessa calce e di $\frac{2}{3}$ di cemento. Questi prismi, conservati al coverto, sono stati staccati dopo 16 giorni per mezzo di una corda diretta parallelamente alla superficie di rottura a 9 o 10 linee al di sopra della lastra, la quale corda, passando sopra una puleggia, avea l' altra estremità carica di pesi.

SUPERFICIE delle basi de' prismi.	PESO de' prismi.	PESI CHE HANNO STACCATO i prismi fabbricati con malta di	
		calce e sabbia.	calce e cemento.
pollici quadrati.	libbre.	libbre.	libbre.
16	8	159	60*
16	8,37	148	110
32	16,25	340	165*
32	16,12	333	115*
48	24	541	333
48	24,67	580	165*
64	33,75	928	465
64	33,12	300*	549

I risultamenti segnati * debbono esser rigettati, o sono incerti.

286. La tavola seguente contiene un' altra serie di sperienze fatte sugli stessi prismi, fabbricati nuovamente, e staccati dopo 18 giorni (*a*).

(*a*) *Idem*, pag. 129. Nell'edizione citata si dice che questi prismi sono stati staccati dopo diciotto *mesi*. Sembra questo un errore di stampa: la prima edizione delle sperienze sulla mano d' opera di M. Boistard, pubblicata nel 1804, e la sua Memoria sulle volte, inserita nella II^a^ parte della raccolta pubblicata da M. Lesage nel 1810, indicano diciotto giorni, come pure le copie manoscritte di questa Memoria.

SUPERFICIE delle basi de' prismi.	PESO de' prismi.	PESI CHE HANNO STACCATO i prismi fabbricati con malta di	
		calce e sabbia.	calce e cemento.
pollici quadrati.	libbre.	libbre.	libbre.
16	8,25	115	52
16	8,25	52	87
32	16,12	350	130
32	16,25	416	203
48	24,37	790	377
48	24,25	794	394
64	33,50	852	515
64	33,37	865	502

Secondo queste sperienze la forza di coesione della malta è proporzionale alla superficie, e può esser stimata almeno 1500 libbre a piede quadrato per la malta di calce e sabbia, e 800 libbre per la malta di calce e cemento (6960$^{ch.}$ e 3700$^{ch.}$ a metro quadrato). Dopo il primo mese l'aderenza è quasi tanto grande come dopo molti anni. Dopo un anno, l'aderenza della malta di cemento, seccata all'aria, è la metà di quella della malta di sabbia.

287. Dietro altre sperienze dello stesso autore (*a*), due prismi di 64 pollici quadrati, di peso libbre 33, sono stati fabbricati, uno con malta di sabbia e l'altro con malta di cemento, immersi immediatamente nell'acqua, e staccati dopo sedici mesi. La malta del primo era molle, come nel momento in cui fu impiegata, e la forza di coesione è stata di 115 libbre. La malta del secondo era

(*a*) *Idem*, pag. 131.

durissima e uno sforzo di 1000 libbre non ha potuto staccarlo (*a*).

288. Serviranno questi risultamenti ad apprezzare i valori del coefficiente rappresentato da γ ne' n^{i} 188 e seg., quando si tratterà di una rottura operata nelle commessure di un masso di fabbrica. Non si conoscono sperienze dirette per la valutazione dello stesso coefficiente quando la rottura deve operarsi nella pietra. Il coefficiente rappresentato da R ne' n^{i} 211 e seg. può valutarsi per mezzo de' risultamenti rapportati ne' n^{i} 25 e seg.

SEZIONE TERZA.

DELL' EQUILIBRIO E DELLO STABILIMENTO DELLE VOLTE.

289. Esistono molte specie di volte, di cui le principali sono le volte cilindriche dette a botte, le volte a crociera, le volte a schifo e le volte a cupola. Ci occuperemo principalmente delle volte cilindriche.

(*a*) Ravvicinando questi risultamenti a quelli citati ne' n^{i} 22 e 23, sembrerebbe che la forza di coesione della malta è molto minore quando la forza è esercitata parallelamente al piano di rottura che quando è esercitata perpendicolarmente a questo piano. Sarebbe tuttavia necessario, per fissar le idee su questo riguardo, che fossero state fatte delle sperienze comparative sopra le stesse malte.

Dando a γ i valori indicati n° 286, e calcolando il peso necessario a schiacciare un cubo di $0^{m},05$ di lato, per mezzo delle formole de' n^{i} 196 e 197, si trova un risultamento molto inferiore a quelli rapportati al n° 11. Forse si può attribuirne in parte la differenza alla presenza de' granelli di sabbia o di cemento, molto più duri della materia che li unisce.

Una volta è un' unione di parti solide contigue le une alle altre, chiamate *cunei*. Le commessure che li separano, chiamate *letti*, nelle volte costrutte di pietra, ordinariamente sono riempite di malta. Quando gli sforzi esercitati sopra ciascun cuneo, e la figura della volta son tali che il sistema non si trovi in equilibrio, la volta si rompe. La rottura può aver luogo, sia perchè le parti della volta si separano scorrendo le une sulle altre, sia perchè queste parti si scostano girando attorno gli spigoli superiori o inferiori de' cunei. L' attrito e l' aderenza delle malte si oppongono a questi movimenti, e contribuiscono a mantener la volta in equilibrio.

ARTICOLO PRIMO.

Condizioni generali dell' equilibrio di un' unione di cunei.

290. Sia un' unione di cunei ABNM (Fig. 24) che forma una porzione di volta a botte, appoggiata in AB contro un piano fisso, e mantenuta all' altra estremità da una forza, le cui componenti verticale e orizzontale sono P, Q. La figura di questo aggregato di cunei è data dalle curve d' intradosso e d'estradosso A*m*M e B*n*N, e dalle direzioni de' tagli de' cunei. Si suppongono delle forze qualunque applicate ai cunei, e si tratta di riconoscere se il sistema si manterrà in equilibrio.

Per formarsi un' idea netta della natura di quest'equilibrio, immaginiamo prima per maggior semplicità, che i cunei sieno semplicemente sollecitati dall' azione della gravità, e supponiamo che si mettano in opera

successivamente, cominciando da quello che è contiguo al piano fisso AB. I primi cunei posti contro questo piano potranno sostenersi pel solo effetto dell'attrito, se l'inclinazione de' letti sull'orizzonte non è troppo grande. Ma sarà tosto necessario per mantenerli al loro sito di applicare contro la faccia superiore dell' ultimo cuneo, una certa forza, di cui rappresentiamo qui per P e Q le componenti verticale e orizzontale. 1° Questa forza dovrà avere un valor tale da impedire che la totalità o una porzione qualunque dei cunei messi in opera cada o scorrendo su' letti o girando sugli spigoli inferiori di essi; 2° non dovrà poi esser tanto grande per produrre che la totalità o una porzione de' cunei messi in opera si sollevi o con moto progressivo sul piano de' letti o con un moto di rotazione attorno gli spigoli superiori di essi. Si vede dunque in generale, che considerando una sezione qualunque *mn*, il sistema delle forze applicate alla porzione di volta ABNM, compresovi le forze P, Q applicate contro la faccia superiore dell' ultimo cuneo, dev'esser tale che l' azione di quelle corrispondenti alla parte superiore *mn*NM non possa far scorrere in un senso o nell'altro questa parte sul piano *mn* supposto fisso, nè farla girare sugli spigoli *m* o *n*. Chiameremo

x, y le coordinate orizzontale e verticale del punto *m*;

x', y' le coordinate orizzontale e verticale del punto *n*;

θ l'angolo che la direzione del letto *mn* forma colla verticale;

z la lunghezza *mn* di questo letto;

a, b le coordinate del punto estremo M della curva d'intradosso;

a', b' le coordinate del punto estremo N della curva d'estradosso;

G, H le somme delle componenti verticale e orizzontale delle forze applicate ai cunei compresi nella porzione di volta *mn*NM;

α, β le coordinate del punto di applicazione C della risultante delle forze G e H;

T la pressione normale esercitata contro il letto *mn*;

f il rapporto dell' attrito alla pressione, quando le parti della volta strisciano sui piani de' letti;

γ il valore della forza di coesione, rapportata all' unità di superficie, che dev' esser vinta per operare lo scorrimento;

R il valore della forza di coesione, rapportata all'unità di superficie, che è vinta quando due cunei si separano, staccandosi perpendicolarmente al piano del letto.

291. Per esprimere le condizioni relative allo scorrimento sul letto *mn*, si osserverà in primo luogo che la forza che tende a far scorrer la porzione di volta *mn*NM nel senso *nm* è

$$(P+G)\cos.\theta;$$

e la forza che vi si oppone

$$(Q+H)\text{sen}.\theta+f(P+G)\text{sen}.\theta+f(Q+H)\cos.\theta+\gamma z:$$

affinchè lo scorrimento nel senso *nm* non abbia luogo, deve aversi

$$P(1-f\,\text{tang}.\theta)-Q(\text{tang}.\theta+f)$$
$$<-G(1-f\,\text{tang}.\theta)+H(\text{tang}.\theta+f)+\frac{\gamma z}{\cos.\theta}.$$

Si osserverà in secondo luogo che la forza che tende a far scorrere la stessa porzione di volta nel senso *mn* è

$$(Q+H)\,\text{sen}.\theta;$$

e la forza che vi si oppone

$$(P+G)\cos.\theta+f(P+G)\,\text{sen}.\theta+f(Q+H)\cos.\theta+\gamma z:$$

affinchè il moto progressivo nel senso *mn* non abbia luogo, deve aversi

$$-P(1+f\,\text{tang}.\theta)+Q(\text{tang}.\theta-f)$$
$$<G(1+f\,\text{tang}.\theta)-H(\text{tang}.\theta-f)+\frac{\gamma z}{\cos.\theta}.$$

Si richiede per l' equilibrio della porzione di volta ABNM che si possano attribuire alle componenti P, Q de' valori tali che per una sezione qualunque *mn* sieno soddisfatte queste condizioni.

292. Per esprimere ora le condizioni relative al moto di rotazione attorno gli spigoli superiore o inferiore del letto *mn*, si supporrà primieramente che la porzione di volta *mn*NM tende a girare da sopra in sotto sullo spigolo *m*, e che le forze P, Q sono applicate in N, che è il caso in cui queste hanno la minor tendenza possibile a favorire questo moto (*). Il momento delle forze che tendono a far girare la porzione di volta è

$$P(a'-x)+G(\alpha-x);$$

e il momento delle forze che vi si oppongono, valutando il momento della resistenza proveniente dalla coesione come si è fatto nel n° 211, è

$$Q(b'-y)+H(\beta-y)+\tfrac{1}{2}Rz^2.$$

(*) Potendosi disporre delle forze P e Q, convien supporle applicate al punto in cui producono il maggiore vantaggio. D' altronde, risultando queste dal contrasto vicendevole che le porzioni di volta si fanno nelle sezioni di rottura, è questo il punto in cui nella sezione NM si esercita la pressione dall' altra porzione di volta, quando ha luogo il moto del pezzo *mn*NM da sopra in sotto.

Quindi, affinchè il moto di rotazione non abbia luogo, deve aversi

$$P(a'-x)-Q(b'-y)<-G(\alpha-x)+H(\epsilon-y)+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

Si supporrà in secondo luogo che la porzione di volta *mn*NM tende a girare da sotto in sopra attorno lo spigolo *n*, e che le forze P, Q sono applicate in M, che è il caso in cui hanno la minor tendenza possibile a favorire questo moto. Il momento delle forze che tendono a far girare la porzione di volta è

$$Q(b-y')+H(\epsilon-y');$$

e il momento delle forze che si oppongono a questo moto è

$$P(a-x')+G(\alpha-x')+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

Quindi, affinchè questo secondo movimento non abbia luogo, deve aversi

$$-P(a-x')+Q(b-y')<G(\alpha-x')-H(\epsilon-y')+\tfrac{1}{3}Rz^2.$$

L'equilibrio della porzione di volta ABNM esige, oltre la condizione indicata nel n° precedente, che i valori attribuiti alle componenti P, Q sieno tali da soddisfare ancora a queste ultime condizioni, per una sezione qualunque *mn*.

Reciprocamente, quando le condizioni precedenti saranno soddisfatte per tutte le sezioni, la porzione di volta resterà necessariamente in equilibrio.

293. Il valore della pressione perpendicolare esercitata sul letto *mn* è

$$T=(P+G)\,\text{sen}.\,\theta+(Q+H)\cos.\,\theta.$$

294. Se si supponessero nulle le resistenze provenienti dall'attrito e dalla coesione, le condizioni del n° 291

relative all' equilibrio di scorrimento, si ridurrebbero a una sola equazione, che sarebbe

$$P - Q\,\text{tang.}\,\theta = -G + H\,\text{tang.}\,\theta, \quad \text{ovvero} \quad \text{tang.}\,\theta = \frac{P+G}{Q+H},$$

la quale esprime che la risultante delle forze applicate alla porzione di volta *mn*NM dev' esser perpendicolare al letto *mn* (*). Nell' ipotesi di cui si tratta, l' inclinazione di ogni letto ha un valore determinato, quando le forze applicate alla volta sono date. La forza applicata all' ultimo letto MN, di cui P e Q sono le componenti verticale e orizzontale, dev' esser ad esso normale.

295. Supponendo sempre nulle le resistenze provenienti dall' attrito e dalla coesione, le condizioni del n° 292, relative all' equilibrio di rotazione, divengono

$$P(a'-x) - Q(b'-y) < -G(\alpha - x) + H(\epsilon - y),$$
$$-P(a-x') + Q(b-y') < \quad G(\alpha - x') - H(\epsilon - y');$$

le quali esprimono che la direzione della risultante delle forze applicate alla porzione di volta *mn*NM deve passare tra i punti *m* ed *n* (**).

(*) In effetti, chiamando P' la risultante delle forze parallele P, G, e Q' quella delle forze Q, H, se nel punto di concorso delle forze P' e Q' con esse forze e colla risultante si forma il triangolo rettangolo, questo riuscirà simile a quello formato sulla ipotenusa *mn* colla verticale che passa per *m*, e l' orizzontale condotta per *n*; il che non può avvenire se la risultante delle forze P + G e Q + H non è perpendicolare al letto *mn*.

(**) Chiamando X, Y le coordinate del punto ove concorrono le forze P + G e Q + H, prese rispetto al punto *m*, la prima equazione diverrà

$$X(P+G) < Y(Q+H),$$

da cui

$$\frac{Y}{X} > \frac{P+G}{Q+H}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{Y}{X} > \text{tang.}\,\theta;$$

296. Da ciò che precede si vede che per esister l'equilibrio in un sistema di cunei è necessario in gene-

---

e perciò il punto suddetto dev'esser al di sopra della normale ad *mn* condotta pel punto *m*. Similmente chiamando X', Y' le distanze orizzontale e verticale dello stesso punto dal punto *n*, si avrà dalla seconda equazione

$$\frac{Y'}{X'} < \frac{P+G}{Q+H}, \text{ ovvero } \frac{Y'}{X'} < \text{tang.}\theta;$$

e quindi il punto di concorso delle forze deve trovarsi al di sotto della normale ad *mn* condotta pel punto *n*; e perciò la risultante incontrerà il letto *mn* tra i punti *m* ed *n*.

È chiaro che, quando si fa astrazione dall'attrito e dalla coesione, queste condizioni e quella dell'esser la risultante perpendicolare al letto *mn*, sono le sole necessarie all'equilibrio; giacchè mancando le prime, la volta roterebbe attorno uno degli spigoli *m* o *n*, e mancando l'altra, striscerebbe lungo *mn* nel senso verso il quale cadesse la risultante.

Se si fa astrazione dalla coesione e si tien conto del solo attrito, le due equazioni del n° 291 daranno

$$\frac{P+G}{Q+H} < \frac{\text{tang.}\theta + f}{1 - f\,\text{tang.}\theta},$$

$$\frac{P+G}{Q+H} > \frac{\text{tang.}\theta - f}{1 + f\,\text{tang.}\theta};$$

e chiamando σ l'angolo che ha per tangente f, l'espressione $\frac{P+G}{Q+H}$, che esprime la tangente dell'angolo fatto dalla risultante coll'orizzonte, dovrà esser contenuta fra i limti $\text{tang.}(\theta \pm \sigma)$.

E siccome la perpendicolare al letto *mn* forma coll'orizzonte l'angolo θ, σ sarà l'angolo formato dalla risultante colla perpendicolare; sicchè potrà la risultante deviare dall'una parte o dall'altra della perpendicolare per un angolo un poco minore di quello la cui tangente è uguale a f.

rale che le due componenti P, Q soddisfacciano a quattro ineguaglianze, che devono esser verificate per tutte le sezioni della volta dai valori di queste forze. Da ciò risulta che esistono certi limiti fra i quali i valori di P e Q debbono trovarsi. Se le condizioni di cui si tratta non si contraddicono, e se esistono de' valori di P e Q per mezzo de' quali vi si può soddisfare, potrà sussister l' equilibrio nel sistema di cunei proposto. E se si concepisce l' ultimo letto MN appoggiato contro un piano fisso come lo è il primo AB, e il sistema sottomesso all' azione delle forze che sono applicate ai cunei, si è nella sicurezza che non avverrà alcun movimento.

Applicazione a una piattabanda.

297. La porzione di volta di cui si cercano le condizioni di equilibrio sia la mezza piattabanda ABNM

E poichè per le due equazioni relative al moto rotatorio, dev' essere

$$\frac{Y}{X} > \frac{P+G}{Q+H}, \quad \frac{Y'}{X'} < \frac{P+G}{Q+H},$$

potrà essere

$$\frac{Y}{X} > \text{tang.}(\theta - \sigma), \quad \frac{Y'}{X'} < \text{tang.}(\theta + \sigma);$$

ossia basterà che il punto di concorso delle forze cada tra le due rette tirate da' punti *m* ed *n* formanti colla retta *mn* un angolo ottuso eguale a $90° + \sigma$.

Fia utile notare che se non vi fosse attrito, non si potrebbe appoggiar la volta sopra pulvinari orizzontali, perchè $\theta = 90°$ dà $\text{tang.}\,\theta = \infty$, e quindi anche $P + G = \infty$. Non così avviene quando si suppone esister l' attrito.

(Fig. 25) di uniforme grossezza. Facciamo astrazione dalle resistenze provenienti dall' attrito e dalla coesione, e supponiamo la piattabanda unicamente sollecitata dall' azione della gravità. Conserviamo le denominazioni del n° 290, e chiamiamo

a la metà della larghezza AM ;

c la grossezza MN ;

Π il peso dell' unità di volume della materia de' cunei.

Si avrà $P = 0$, $H = 0$, $G = \Pi[(a - x)c + \frac{1}{2}c^2 \text{tang.}\,\theta]$: e l' equazione del n° 294, diverrà

$$\text{tang}\,\theta = \frac{2\Pi(a-x)c}{2Q - \Pi c^2},$$

e darà, se θ' indica l' inclinazione del primo letto AB,

$$\text{tang.}\,\theta' = \frac{2\Pi ac}{2Q - \Pi c^2} ; \text{ d' onde } Q = \Pi\,\frac{2ac + c^2 \text{tang.}\,\theta'}{2\,\text{tang.}\,\theta'}.$$

Da queste equazioni si ricava

$$\frac{\text{tang.}\,\theta}{\text{tang.}\,\theta'} = \frac{a-x}{a}.$$

Quindi, essendo data l' inclinazione θ' del primo letto AB, il valore di Q è determinato dall' espressione precedente, e l' equilibrio esige che le direzioni di tutti i tagli s' incontrino in uno medesimo punto O (*).

298. Le condizioni del n° 295 relative all' equilibrio di rotazione, applicate alla sezione AB, divengono

$$Qc > \tfrac{1}{2}\Pi a^2 c - \tfrac{1}{6}\Pi c^3 \text{tang.}^2\theta',$$

$$-Qc < \tfrac{1}{2}\Pi ac(a + 2c\,\text{tang.}\,\theta') + \tfrac{1}{3}\Pi c^3 \text{tang.}^2\theta'.$$

La seconda ineguaglianza, la quale esprime che la por-

(*) Infatti essendo $\frac{\text{tang.}\,\theta}{a-x} = \frac{\text{tang.}\,\theta'}{a}$, la retta AO è costante.

zione di volta ABNM non può girare attorno lo spigolo superiore B, è soddisfatta, qualunque sia il valore positivo dato a Q; e si vede effettivamente, dalla figura della volta, che questo moto è impossibile. La prima ineguaglianza la quale esprime che la porzione di volta ABNM non può girare attorno lo spigolo inferiore A, mettendovi per Q il valore trovato al n° 297, diviene

$$ac > \tfrac{1}{2}(a^2 - c^2)\,\text{tang.}\,\theta' - \tfrac{1}{6}\,c^2\,\text{tang.}^3\theta'.$$

Si verifica che questa ineguaglianza è sempre soddisfatta, qualunque sia l' angolo θ', quando la semilarghezza a della volta non sorpassa il valore che si troverebbe facendo $\text{tang.}\,\theta' = 1$ nell' equazione

$$ac - \tfrac{1}{2}(a^2 - c^2)\,\text{tang.}\,\theta' + \tfrac{1}{6}\,c^2\,\text{tang.}^3\theta' = 0,$$

valore che è $a = c(1 + \sqrt{\tfrac{7}{3}})$. Se la semilarghezza a sorpassa questo valore, sarà necessario, affinchè l' ineguaglianza di cui si tratta sia soddisfatta, che $\text{tang.}\,\theta'$ non sorpassi il valore che sarebbe dato dall' equazione precedente. Altrimenti la risultante del peso della porzione di volta ABNM e della forza Q che dev' esser applicata orizzontalmente in N, si troverebbe diretta in guisa da incontrare la linea AB al di sotto del punto A, e tenderebbe per conseguenza a far girare la porzione di volta intorno a questo punto (*).

(*) L' equazione di sopra contiene tre quantità a, c, e $\text{tang.}\,\theta'$; sicchè, date due di esse, si può risolvendo l' equazione ottenere la terza. Dovendosi però adottare un valore non già che soddisfaccia all' equazione, ma che renda un risultamento positivo, è necessario conoscere se la quantità che si va cercando deve aumentarsi o diminuirsi sopra il valore somministrato dall' equazione, affinchè sia soddisfatta l' ineguaglianza richiesta dalla stabilità.

299. Se la grossezza della piattabanda fosse picciolis-

Ora se si cerca c, siccome il termine che contiene c^2 è positivo, e l'equazione ha una radice positiva e una negativa, i valori maggiori della radice positiva daranno risultamenti positivi; e più si aumenterà c, meglio si soddisfarà all'ineguaglianza.

Quando si cerca a, dovendosi cambiare i segni a tutta l'equazione, si adotterà per a un valore che dà un risultamento negativo; e perciò l'equilibrio sarà mantenuto da qualunque valore di a più piccolo della radice positiva somministrata dall'equazione.

Se poi si cerca tang.θ', si ha un'equazione di terzo grado, che per meglio analizzare scriveremo sotto la forma

$$z^3 - 3(m^2 - 1)z + 6m = o \qquad (\alpha)$$

con fare $\frac{a}{c} = m$, tang.$\theta' = z$. Questa equazione avendo l'ultimo termine positivo darà una radice negativa, la quale è inutile per la quistione di cui si tratta. Le altre radici saranno o tutte due immaginarie o tutte due positive.

Quando l'equazione ha due radici immaginarie, qualunque valore positivo si sostituisca per z, si avrà sempre un risultamento positivo, e perciò l'ineguaglianza proposta sarà soddisfatta per qualunque valore di z. Affinchè due radici sieno immaginarie, per la teoria delle equazioni di 3° grado conviene che $\frac{1}{4}(6m)^2 - \frac{1}{27} \cdot 3^3(m^2-1)^3$, ovvero $9m^2 - (m^2-1)^3$ sia una quantità positiva. Ora $m = 2{,}10$ rende questa espressione positiva, ed $m = 2{,}11$ la rende negativa; dunque quando m è minore di $2{,}11$, cioè $a < 2{,}11c$, l'equazione che dà θ' avendo due radici immaginarie, qualunque valore di θ' manterrà la volta in equilibrio, e può prendersi qualunque centro per segnare le direzioni de' tagli de' cunei. È questo il valore di a che soddisfà sempre all'ineguaglianza di cui si tratta, qualunque sia θ'. Perciò non è ammissibile quello che dall'autore si asserisce, cioè potersi adottare qualunque valore di θ' quando a non supera il valore $c(1 + \sqrt{\frac{7}{3}}) = 2{,}52c$ circa, e che è relativo al caso di θ' eguale a mezzo angolo retto.

Quando m è uguale o maggiore di $2{,}11$, l'equazione (α) avrà

sima per rapporto alla tratta, il limite di cui si parla sarebbe dato presso a poco dall' espressione

$$\text{tang}.\theta' = \frac{2c}{a};$$

---

due radici positive. I valori compresi fra queste due radici dovendo dare risultamenti negativi, bisognerebbe per soddisfare all'ineguaglianza ed aver risultamenti positivi adottare o un valore più piccolo della radice minore, o più grande della radice maggiore. Ma è da osservarsi che non solo fa d' uopo assicurar l' equilibrio della mezza piattabanda, ma anche di qualunque altra porzione MN*nm*. Ora adottando la radice più piccola, siccome debbonsi prender de' valori più piccoli di essa, resta assicurato l'equilibrio per qualunque altra porzione nella quale si ha θ più piccola, ed a parimenti più piccola. Ma se si adottasse la radice maggiore, la quale dev' esser aumentata per soddisfare all' ineguaglianza, non sarebbe sicuro l' equilibrio per le altre porzioni MN*nm* per le quali le obliquità de' letti vanno diminuendo, non ostante che a diminuisca essa pure.

In conseguenza, quando $a > 2{,}11c$, si adotterà per θ' un angolo un poco minore di quello dato dalla più piccola radice positiva dell' equazione (α); sarà così assicurato l'equilibrio non solo della mezza piattabanda ma di ogni altra sua parte.

Tuttocciò è conforme alla natura della quistione; giacchè trattasi di trovare un valore di z tale che alzata dal punto A la AC perpendicolare al letto AB, questa incontri l'orizzontale AB nel punto ove passa la risultante del peso della mezza piattabanda ABNM. Ora quando a è molto picciola rapporto alla grossezza c, questo valore è impossibile, giacchè la risultante suddetta passa sempre dentro il triangolo ABC, e perciò l' equazione dà radici immaginarie, e qualunque angolo può essere adottato. E siccome per la solidità è necessario che per qualunque porzione MN*nm* la risultante del peso di essa passi dentro il triangolo formato dal letto *mn*, dalla perpendicolare elevata dal punto *m*, e dalla orizzontale BN, ciò non si conseguirebbe per tutti i letti compresi nella mezza piattabanda, adottando il valore più grande di θ'.

e si avrebbe sensibilmente

$$Q = \frac{\Pi ac}{\text{tang}.\theta'}, \quad \text{ovvero } Q = \tfrac{1}{2}\Pi a^2.$$

300. Sostituendo nella formola del n° 293 i valori che convengono alla piattabanda, si trova per l'espressione della pressione normale sostenuta dal pulvinare AB,

$$T = \Pi\left(\frac{ac}{\text{sen}.\theta'} + \frac{c^2}{2\cos.\theta'}\right).$$

301. Nel caso in cui la grossezza della piattabanda è piccolissima rispetto alla sua tratta, quest' espressione diviene

$$T = \frac{\Pi ac}{\text{sen}.\theta'} \text{ (*)}.$$

302. Se si considerano due metà eguali di piattabanda (Fig. 26) separate dalla commessura verticale MN, l'equilibrio non potrà sussistere se i tagli de' cunei non sono diretti secondo linee che passano per lo stesso punto O, e l'angolo θ' formato dal letto estremo colla verticale non sia

---

(*) Questi valori (n° 299, 301) si ottengono trascurando nelle equazioni de' n^i precedenti il quadrato di c. Bisogna intanto osservare che il valore $\text{tang}.\theta' = \frac{2c}{a}$ soddisfà all' equilibrio qualunque sia il rapporto $\frac{c}{a}$; ma non bisogna adottarlo che quando veramente $\frac{c}{a}$ è una quantità molto piccola; giacchè sebbene diminuendo θ' al di là del valore dato dell' equazione del n° 298 si assicuri meglio la stabilità della volta, si accresce nondimeno sensibilmente la spinta orizzontale, alla quale debbono resistere i piediritti; e si accresce pure la pressione che le due metà della volta esercitano nella commessura verticale, per la quale pressione potrebbe la pietra schiacciarsi.

determinato conforme a quel che si è detto nel n° 298. Se quest' ultima condizione non fosse soddisfatta, la piattabanda si romperebbe, premendosi le due metà l' una contro l' altra in N, e gli spigoli A, A′ salendo lungo i piani immobili contro i quali i cunei estremi sono appoggiati. L' espressione di Q del n° 297 darà la pressione orizzontale esercitata dalle due metà della volta l' una contro l' altra nella sezione MN; e l' espressione di T del n° 300 darà la pressione normale sostenuta da' pulvinari AB, AB′. I piediritti della piattabanda dovranno presentare la stabilità necessaria per resistere a queste pressioni.

Condizioni dell' equilibrio di un sistema di cunei, supponendo tutti i tagli perpendicolari alla curva d'intradosso.

303. Considerando una porzione di volta ABNM, nella quale i tagli de' cunei sono perpendicolari alla curva di intradosso A*m*M, appoggiata con una estremità contro il piano immobile AB, e mantenuta all' altro estremo da una forza di cui P è la componente verticale e Q l' orizzontale: chiameremo

x, y le coordinate A*p*, *pm* di un punto qualunque *m* della curva d' intradosso;

z la lunghezza del letto *mn*;

s la lunghezza dell' arco A*m*;

a, b le coordinate del punto estremo M;

S la lunghezza totale A*m*M della curva d' intradosso;

ρ il raggio d' osculo di questa curva al punto *m*;

F il valore della forza applicata ai cunei pel punto *m* della curva d' indradosso, il qual valore s' intende

rapportato all' unità di lunghezza, e dato in funzione dell' arco della curva;

φ l' angolo che la direzione della forza F forma coll' asse orizzontale delle ascisse, parimenti dato in funzione dell' arco della curva;

T il valore della pressione che una parte della volta esercita contro l' altra perpendicolarmente al letto *mn*.

Facendo astrazione dalle resistenze provenienti dall' attrito e dalla coesione, e applicando quì le nozioni presentate ai n^{i} 290 e seg., la prima condizione dell' equilibrio del sistema è che la pressione normale T sostenuta dal letto *mn* sia uguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le forze applicate alla parte *mn*NM della volta. Osservando che le componenti verticale e orizzontale della pressione T sono rispettivamente $T\frac{dy}{ds}$ e $T\frac{dx}{ds}$, e che le somme delle componenti verticali e orizzontali delle forze applicate alla porzione *mn*NM della volta sono rispettivamente $\int_s^S ds.\mathrm{F}\,\mathrm{sen}.\varphi$, e $\int_s^S ds.\mathrm{F}\cos.\varphi$, questa condizione darà le due equazioni

$$T\frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds.\mathrm{F}\,\mathrm{sen}.\varphi,$$

$$T\frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds.\mathrm{F}\cos.\varphi.$$

304. La seconda condizione dell'equilibrio del sistema è che la direzione della risultante di tutte queste forze passi tra i punti *m* ed *n*; ma è inutile di tenerne quì conto. Questa condizione è implicitamente compresa nella

supposizione che i tagli de' cunei sono normali alla curva d' intradosso, giacchè allora le direzioni successive delle risultanti di cui si tratta formeranno necessariamente una seconda curva parallela alla prima (*).

305. Differenziando le due equazioni del n° 303; moltiplicando la prima per $\frac{dy}{ds}$, la seconda per $\frac{dx}{ds}$, e sommando (con osservare che $\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$, e per conseguenza $\frac{dx}{ds} d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d.\frac{dy}{ds} = 0$), si avrà

$$-dT = F ds \left(\frac{dy}{ds} \text{sen.}\, \varphi + \frac{dx}{ds} \cos.\, \varphi \right),$$

equazione dalla quale si ricaverà il valore della pressione. Varia questa pressione, quando da un punto della curva si passa all'altro, di una quantità eguale all'azione della forza F sull' elemento compreso tra questi due punti decomposta nel senso di questo elemento (**).

(*) Dovendo la risultante delle due forze P e Q esser normale ad MN e potendosi supporre applicata ad uno qualunque de' punti compresi fra M ed N, si potrà sempre ottenere che le direzioni delle risultanti, le quali dovranno necessariamente formare una seconda curva parallela alla curva interna, traversino tutti i cunei; in conseguenza la risultante di tutte le forze applicate alla porzione *mn*NM non può non passare tra i punti *m* ed *n*.

Dividendo la prima delle equazioni del n° 303 per la seconda, si elimina T, e si ha l'equazione della curva d' intradosso necessaria all' equilibrio pel sistema di forze di cui si tratta; la quale equazione corrisponde a quella stabilita al n° 294 che è

$\text{tang.}\, \theta = \frac{P + G}{Q + H}$ per esser in questo caso $\text{tang}\, \theta = \frac{dy}{dx}$.

(**) Si possono con egual facilità stabilire le equazioni di equi-

Caso in cui le forze applicate ai cunei son da pertutto normali alla curva d' intradosso.

306. In questo caso, $\text{sen.}\varphi = \frac{dx}{ds}$, e $\cos.\varphi = -\frac{dy}{ds}$.

L' equazione trovata nel n° precedente dà

$$d\mathrm{T} = 0,$$

---

librio, tenendo conto della resistenza proveniente dall' attrito. In questo caso potrà la risultante delle forze applicate nella porzione di volta MN*nm* cadere obliquamente sul letto *mn*. Ora essendo sempre T la pressione normale sopra *mn*, la resistenza sviluppata dall' attrito sarà una forza espressa da $\pm f\mathrm{T}$, la quale ha per componenti verticale e orizzontale $\pm f\mathrm{T}\frac{dx}{ds}$, $\mp f\mathrm{T}\frac{dy}{ds}$; e per-

ciò le due equazioni di equilibrio saranno

$$\mathrm{T}\left(\frac{dy}{ds} \pm f\frac{dx}{ds}\right) = \mathrm{P} + \int_s^{\mathrm{S}} ds.\mathrm{F}\,\text{sen.}\varphi,$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{dx}{ds} \mp f\frac{dy}{ds}\right) = \mathrm{Q} + \int_s^{\mathrm{S}} ds.\mathrm{F}\cos.\varphi.$$

Differenziando, e moltiplicando la prima equazione per $\frac{dy}{ds}$, la seconda per $\frac{dx}{ds}$, e poi sommando, si avrà

$$-d\mathrm{T} \pm f\mathrm{T}\left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}d.\frac{dx}{ds}\right) = \mathrm{F}\,ds\left(\frac{dy}{ds}\text{sen.}\varphi + \frac{dx}{ds}\cos.\varphi\right).$$

E siccome $\text{sen.}\theta = \frac{dy}{ds}$, $\cos.\theta = \frac{dx}{ds}$, sarà $\frac{dx}{ds}d.\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}d.\frac{dx}{ds} = d\theta$;

e quindi questa equazione si riduce a

$$-d\mathrm{T} \pm f\mathrm{T}d\theta = \mathrm{F}\,ds\left(\frac{dy}{ds}\text{sen.}\varphi + \frac{dx}{ds}\cos.\varphi\right).$$

di maniera che la pressione è costante in tutta l'estensione della volta.

Differenziando adunque le due equazioni del n° 303, si avrà

$$\mathrm{T}d.\frac{dy}{ds} = -\mathrm{F}ds.\mathrm{sen}.\varphi, \qquad \mathrm{T}d.\frac{dx}{ds} = -\mathrm{F}ds.\cos.\varphi,$$

d'onde (avendo riguardo ai valori di sen.φ e cos.φ) si ricava

$$\mathrm{T}d\varphi = -\mathrm{F}ds$$

ovvero, per esser $d\varphi$ (che è l'angolo di due normali consecutive) $= -\frac{ds}{\rho}$,

$$\mathrm{T} = \rho\mathrm{F}, \quad \text{ed} \quad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{T}}{\rho}.$$

Quindi la pressione esercitata da un cuneo all'altro è uguale alla forza applicata normalmente a ogni punto della curva d'intradosso, moltiplicata pel raggio di curvatura in questo punto; e l'equilibrio esige che in tutta l'estensione della curva quest'ultima forza abbia de' valori inversamente proporzionali al raggio di curvatura.

307. Se la curva d'intradosso fosse un arco di cerchio, la forza applicata ai cunei perpendicolarmente ad essa curva, dovrebbe avere un valore costante in tutta l'estensione della volta. L'equazione precedente dà la relazione che esiste tra questa forza e la pressione che si stabilisce tra i cunei. Si conchiude da ciò, che se la curva d'intradosso fosse un cerchio intero, la somma delle forze normali applicate alla volta in tutta l'estensione di questo cerchio, e la pressione esercitata da un cuneo all'altro, sarebbero tra loro come la circonferenza è al raggio, ovvero come 2π sta ad 1.

308. Si è supposto precedentemente che i cunei po-

tevano strisciare sui piani de' letti senza che a questo moto si opponesse alcuna resistenza proveniente dall' attrito o dalla coesione. Ammettendo l' esistenza dell' attrito e della coesione, per mantener la volta in equilibrio non è più necessario che le forze applicate perpendicolarmente alla curva d' intradosso dipendano dalla legge indicata n° 306. Ma qualunque sieno i valori di queste forze, la pressione normale esistente tra i cunei che potrà allora variare da un punto all' altro della volta, si calcolerà sempre in ogni punto per mezzo della formola $T = \rho F$ (*).

(*) Per poter ammetter questa proposizione, bisognerebbe dimostrare che tenendo conto delle resistenze provenienti dall' attrito e dalla coesione, T non fosse più costante, ma variasse in modo con F che fra questi due elementi passasse sempre la relazione $T = \rho F$. Ma questo non sembra vero. Infatti volendo tener conto dell' attrito dobbiamo ricorrere alle equazioni stabilite nella nota precedente, l' ultima delle quali nel caso attuale diviene

$$-dT \pm f T d\theta = 0, \quad \text{ovvero} \quad dT = \pm f T d\theta$$

da cui si ricava

$$T = Ae^{\pm f\theta},$$

essendo A una costante, che rappresenta la pressione orizzontale corrispondente alla commessura verticale, ed e la base de' logaritmi naturali. Questa formola dà i limiti fra' quali può esser compresa la pressione normale. Differenziando le due equazioni di equilibrio, e osservando che $d\theta = d\varphi = -\frac{ds}{\rho}$, $\frac{dy}{dx} = \text{sen.}\,\theta = -\cos\varphi$, $\frac{dx}{dy} = \cos.\theta = \text{sen.}\,\varphi$, e sostituendo inoltre il valore trovato di dT, le due equazioni sudette daranno il risultamento unico

$$T = \rho F(1 + f^2).$$

Caso in cui le forze applicate alla volta si riducono al peso de' cunei.

309. Conserviamo le denominazioni del n° 303, e chiamiamo

Π il peso dell'unità di volume della materia de' cunei;

θ l'angolo che il letto mn forma colla verticale, il

che dà $\frac{dy}{ds} = \text{sen}.\theta$, $\frac{dx}{ds} = \cos.\theta$.

Abbiamo quì $\varphi = 90°$, $\text{F}ds = \Pi z ds\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right)$. Le equazioni del n° 303 diverranno

$$\text{T}\,\text{sen}.\theta = \text{P} + \Pi\int_s^{\text{S}} ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right);$$

$$\text{T}\cos.\theta = \text{Q};$$

d'onde

$$\text{tang}.\theta = \frac{\text{P}}{\text{Q}} + \frac{\Pi}{\text{Q}}\int_s^{\text{S}} ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right).$$

Quest' ultima equazione diviene differenziando

$$\frac{d\theta}{\cos.^2\theta} = -\frac{\Pi}{\text{Q}} ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right);$$

ovvero $\left(\text{per esser } d\theta = -\frac{ds}{\rho}\right)$

$$\frac{2\text{Q}}{\Pi\cos.^2\theta} = 2\rho z + z^2,$$

equazione che darà la legge della grossezza de' cunei, quando la figura della curva sarà conosciuta, e viceversa.

Nel caso di cui si tratta, e in generale quando una volta è sollecitata solamente da forze verticali, la componente orizzontale della pressione T è costante in tutta

l' estensione della curva ed eguale alla forza Q. Chiamasi questa forza la *spinta orizzontale* della volta.

310. Quando la curva d' intradosso è un arco di cerchio, ρ è costante: l' equazione del n° precedente dà

$$z = -\rho + \sqrt{\rho^2 + \frac{2Q}{\Pi \cos.^2\theta}}.$$

Se i letti estremi sono orizzontali, la loro lunghezza è infinita (*).

Chiamando c la grossezza alla chiave ove la direzione del taglio è verticale, si ha pel valore della spinta orizzontale

$$Q = \tfrac{1}{2}\Pi(2\rho c + c^2).$$

La pressione esercitata perpendicolarmente al letto mn è

$$T = \frac{Q}{\cos.\theta} \text{ (**)}.$$

(*) Si vegga la fine della nota al n° 295.

(**) Volendo tener conto dell' attrito dev'essere (v. nota 295)

$$\frac{P}{Q} + \frac{\Pi}{Q}\int_s^S ds.z\left(1 + \frac{z}{2\rho}\right) = \text{tang.}(\theta \pm \sigma);$$

differenziando, e mettendo $-\frac{ds}{\rho}$ invece di $d\theta$, risulta

$$z^2 + 2\rho z = \frac{2Q}{\Pi \cos.^2(\theta \pm \sigma)},$$

formola che dà i limiti fra' quali debbono contenersi le grossezze de' cunei.

Fermiamoci al caso, in cui la curva d' intradosso è un cerchio di raggio r. Si chiami c la grossezza alla chiave in cui $\theta = 0$, e si avrà

$$Q = \tfrac{1}{2}\Pi.\frac{2cr + c^2}{1 + f^2};$$

e quindi

$$z^2+2rz=\frac{2cr+c^2}{(1+f^2)\cos^2.(\theta\pm\sigma)},$$

da cui si ricava

$$z=-r+\sqrt{r^2+\frac{2cr+c^2}{(1+f^2)\cos^2.(\theta\pm\sigma)}}.$$

Se $\frac{c}{r}$ è una frazione assai piccola, possono trascurarsi le sue potenze, e sviluppando il radicale colla formola del binomio, si ha prossimamente (Venturoli, Mecc., n° 646)

$$z=\frac{c}{(1+f^2)\cos^2.(\theta\pm\sigma)}.$$

Facendo uso del segno superiore e poi dell' inferiore potranno disegnarsi per punti le due curve di estradosso una corrispondente alle maggiori grossezze e l' altra alle minori. Queste due curve partendo dal medesimo punto alla chiave, concorrono anche nel punto stesso all' imposta orizzontale, giacchè quando $\theta=90^\circ$, si ha la grossezza unica $z=\frac{c}{f^2}$. Qualunque curva di estradosso compresa fra le due curve che servon di limite, sarà buona per l' equilibrio dell' arco.

Tra i valori di z dati dalla formola

$$z=\frac{c}{(1+f^2)\cos^2.(\theta-\sigma)}$$

si ha un minimo, quando $\theta=\sigma$, cioè tang.$\theta=f$; questo valor minimo è

$$z=\frac{c}{1+f^2}.$$

Ne' valori di z somministrati dalla formola

$$z=\frac{c}{(1+f^2)\cos.^2(\theta+\sigma)}$$

il massimo corrisponde a $\theta+\sigma=90^\circ$ ossia tang.$\theta=\frac{1}{f}$; nel qual caso si ha

$$z=\infty.$$

ARTICOLO II.

Principali sperienze ed osservazioni relative all' equilibrio delle volte.

311. Danisy (*a*) con sperienze sopra piccoli modelli di volte a botte che faceva rompere caricando di pesi le parti superiori, ha mostrato che nel momento della rottura le parti superiori si abbassavano appoggiandosi l' una contro l' altra alla chiave e respingendo le parti inferiori, le quali si rovesciavano girando attorno gli spigoli esteriori delle loro basi. Ed ha fatto osservare che in questi movimenti i cunei non strisciavano sui piani de' letti, ma si scostavano gli uni dagli altri girando sugli spigoli contigui. Delle sperienze simili sono state fatte più tardi da Gauthey (*b*) e Rondelet (*c*).

E siccome il valore di f è compreso ordinariamente fra 0,6 e 0,8, ne risulta che a partir dal vertice la minima grossezza ricade fra i 30° e 38°, ove la volta può avere una grossezza assai minore di quella alla chiave; e la massima grossezza ricade fra il 52° e il 60°, ove l' arco può ingrossarsi indefinitamente. Da ciò si vede come il riempir di fabbrica i reni degli archi per terminarli superiormente in una retta orizzontale può dare tal forma che convenga all' equilibrio.

(*a*) *Traité de la coupe des pierres*, di Frezier, tomo III. Queste sperienze sono state fatte nel 1732, avanti l' Accademia di Montpellier.

(*b*) *Dissertation sur les dégradations du Panthéon français*, pag. 111. *Traité de la construction des ponts*, tomo I, pag. 241, 2ª edizione.

(*c*) *Art de bâtir*, tomo III, pag. 236 e seg.

312. M. Boistard, ingegnere in capo di ponti e strade, ha pubblicato delle altre sperienze fatte più in grande e con maggior precisione (*a*). Le volte avevano $2^m,27$ di corda ed erano costrutte con cunei di mattoni orsati, che avevano $0^m,11$ di grossezza e di altezza. Con questi materiali sono state formate delle volte di tutto sesto, a semiovale ribassata al terzo e al quarto, ad arco di cerchio di cui la freccia era $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{17}$ della corda, e a piattabanda. Ciascuna di queste volte è stata sottomessa a tre saggi principali. Nel primo, le volte erano estradossate sopra $0^m,11$ di grossezza, e questa grossezza non essendo sufficiente perchè potessero mantenersi in equilibrio quando si abbassava l' armatura, un certo numero di cunei della parte superiore si abbassava appoggiandosi sulla sommità della centina (Fig. 28). Le due parti inferiori della volta formavano degli archi rampanti e si dividevano in due porzioni. La rottura tendeva a farsi verso il mezzo di ciascun arco dove i cunei non toccavano l' armatura, e le commessure si aprivano nell'estradosso all' estremità superiore ed all' inferiore di ciascun arco.

313. Nel secondo saggio, le volte erano ancora estradossate. Si abbracciava da ogni lato un certo numero di cunei della parte inferiore per mezzo di una corda che si appoggiava sull' estradosso e che era tesa da un peso. Se la tensione della corda non era sufficiente a mantener la volta in equilibrio, questa si rompeva aprendosi all' intradosso vicino la chiave e le im-

---

(*a*) *Recueil de divers Mémoires, publié par Le Sage*, tomo II, pag. 170 ; ovvero *Recueil d'expériences et d'observations faites par Boistard*, pag. 95. Queste sperienze sono state fatte nel 1800.

poste, e all' estradosso ne' reni (Fig. 29). Se la tensione della corda era sufficiente per l' equilibrio, le stesse sezioni si aprivano nel modo stesso per effetto del rassettamento; ma l' azione del peso tendendo a farle richiudere, desse aprivansi e chiudevansi alternativamente con una specie di moto oscillatorio, nel quale le parti della volta giravano a vicenda ne' due sensi, appoggiandosi ora sugli spigoli superiori de' cunei ed ora sugl' inferiori. Finalmente, aumentando la tensione della corda al di là di un certo limite, si manifestavano degli effetti analoghi ai primi in senso contrario (Fig. 30); cioè le parti inferiori della volta tendevano ad abbassarsi, e le superiori ad esser sollevate, aprendosi le commessure all' estradosso presso la chiave e le imposte, e all' intradosso ne' reni.

314. Nel terzo saggio si costruivano delle spalle, e si riempivano di fabbrica i reni della volta in modo da terminare a livello della sommità, ove la grossezza era sempre $0^m,11$. Se la grossezza delle spalle era sufficiente, la volta si manteneva in equilibrio quando si abbassava la centina. Nel caso contrario, o pure se si caricava prima la volta alla chiave, questa si rompeva in quattro parti (Fig. 31), aprendosi le commessure nell' intradosso nella chiave e nelle imposte, come pure nell' estradosso ne' reni.

Risulta da queste sperienze che nelle volte a semicerchio, di uniforme spessezza, o estradossate di livello, la rottura tende a farsi verso l' angolo di 50° circa, a contare dall' imposta. Nelle volte a semiovale descritta con tre archi di cerchio di 60° l' uno, e ribassate al terzo o al quarto, la rottura tende a farsi verso l' angolo di 45° o di 55°, a partir pure dall' origine dell'

arco minore. Nelle volte a arco di cerchio il punto di rottura è nell' intersezione dell' arco e del piediritto, a meno che la volta non sia estradossata sopra una picciolissima grossezza, o che l' ampiezza dell' arco non sorpassi 120° circa (*a*).

315. Le osservazioni fatte da M. Perronet (*b*) durante la costruzione di molti grandi ponti indicano parimenti la natura de' movimenti che hanno luogo nelle volte. Dietro queste osservazioni, i primi ordini di cunei possono esser posati senza l' appoggio dell' armatura, e non cominciano a strisciare che quando l' obliquità de' letti all' orizzonte è di 39° a 40° (*c*). Al di là di questa inclinazione, l' armatura sostiene una porzione del peso de' cunei, e quando s' impiega una centina sostenuta dalle spalle, la medesima discende nelle parti inferiori, e si solleverebbe alla cima se non s' impedisse questo moto situando nella sommità una carica sufficiente.

Questi effetti sono stati osservati all' arco di S. Edmo a Nogent-su-Senna, la cui figura era una semiovale di

---

(*a*) Si trovano altre sperienze relative all' equilibrio delle volte nell' opera intitolata: *A dissertation on the construction and properties of arches*, di G. Atwood, 1801. L' autore considerava le volte nell' ipotesi dello scorrimento de' cunei, e le sue sperienze fatte con cunei di rame ben politi, si rapportano specialmente a questa ipotesi.

(*b*) *Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts.* V. ancora *Recueil d' expériences et d' observations*, di Boistard, e *Etudes relatives à l' art des constructions*, di M. Bruyere, prima raccolta.

(*c*) Ciò suppone che il rapporto dell' attrito alla pressione è circa 0,82. Più sopra si è menzionata questa osservazione, n° 284.

$29^m,24$ di corda, e $8^m,77$ di saetta (Fig. 32). La grossezza alla chiave è di $1^m,62$. Ogni metà è composta di 47 ordini di cunei, non compresa la chiave. Dopo aver situati i primi 20 ordini di cunei, gli ultimi 5 si separarono a causa del rassettamento dell' armatura; i cunei si aprirono di $0^m,02$ all' estradosso al di sopra del 15° ordine, e si fece una disgiunzione verticale tra la volta e i filari orizzontali delle spalle, di cui l' effetto era sensibile fino al 7° ordine. Continuando la mettitura de' cunei, le aperture si richiusero; il punto di rottura si trovò riportato più sopra, e le commessure si aprirono di $0^m,002$ all' estradosso, dal 26° al 31° ordine.

La figura delle arcate del ponte di Neuilly è una semiovale ribassata al quarto, di corda 39^m. Ogni metà è composta di 56 ordini di cunei, non compresa la chiave. Negli archi adjacenti alle spalle, le commessure si sono successivamente aperte all' estradosso, in ragione che si procedeva innanzi alla mettitura de' cunei, da $\frac{1}{2}$ fino a 5 e 7 millimetri, dal 11° al 36° ordine. Degli effetti analoghi sono stati osservati negli altri ponti.

316. Altri movimenti hanno luogo dopo la mettitura della chiave: le centine sono allora caricate sulla cima, e tendono a sollevarsi ne' reni. Prima di disarmare il ponte di Nogent (Fig. 32) si erano sulle faccie dell' arcata tirate tre linee rette, una orizzontale posta alla sommità della volta, dall' un 28° ordine di cunei all'altro; e le due altre inclinate, a partir dalle estremità della prima fino ai punti in cui il taglio del 7° ordine incontra la tangente verticale alle imposte. La posizione di queste linee era stata rapportata a punti fissi. Gli ultimi cunei aperti all' estradosso nella parte superiore della volta, si sono richiusi, e la disgiunzione verticale che si era fatta tra

i cunei e i filari delle spalle è quasi interamente scomparsa. La linea orizzontale ha presa una curvatura che indica un rassettamento verticale, che andava diminuendo uniformemente dal mezzo alle estremità. Nella curvatura delle altre linee si è formato un punto di flesso, all' incontro del taglio tra il 16° e il 17° ordine; il che indicava, oltre il rassettamento verticale, e il chiudimento delle commessure negli ordini superiori fino al 17° incluso, un chiudimento simile nelle commessure della parte inferiore, che si trovava riportata verso le spalle. Dunque il punto di rottura si trovava posto tra il 16° e il 17° ordine di cunei, e bisogna osservare che la fabbrica de' reni era compita quando fu disarmata la volta.

Al ponte di Neuilly, dopo messa la chiave, gli ultimi cunei che si erano aperti all' estradosso si sono richiusi; e si sono aperte nuove commessure all' intradosso dall' una parte e dall' altra a cominciar dalla chiave. Le commessure sono rimaste aperte all' estradosso ne' reni; l'apertura più grande aveva luogo tra il 26° e il 27° ordine di cunei, la qual cosa ha indicato la posizione del punto di rottura. La fabbrica de' reni non era costrutta quando fu disfatta l' armatura.

317. I risultamenti precedenti si rapportano alle volte a botte: le osservazioni fatte sulle degradazioni della cupola di S. Pietro a Roma possono fissar le idee sopra i movimenti analoghi che hanno luogo nelle volte sferiche. Risulta da queste osservazioni che questo edifizio tendeva a rovinare nel modo indicato fig. 53; aprendosi la fabbrica all' estradosso in V, all' imposta della volta, e all' intradosso in AD, alla base del tamburo sul quale essa era poggiata, oltre all' offrire un gran numero di lesioni nella direzione de' piani meridiani. In que-

sto movimento i controforti si erano separati dal muro del tamburo. Queste degradazioni sono state arrestate per mezzo di cerchioni di ferro, che si oppongono all' ingrandimento del diametro della parte inferiore della cupola (*a*).

(*a*) Le degradazioni avvenute nella cupola di S. Pietro di Roma son descritte circostanziatamente nell' opera di Poleni intitolata: Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano, Padova, 1748. Vi si trova l' estratto di tutti gli scritti fatti fino a quell' epoca sulla cupola del Vaticano, fra' quali bisogna distinguere il Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell' anno 1742. In quest' ultima opera dovuta ai PP. Lesueur, Jacquier et Boscowich, la quistione dell' equilibrio delle volte è trattata con molta esattezza e sagacità. Le degradazioni della cupola vi son presentate come essendo il risultamento de' movimenti da noi indicati e che sarebbero prodotti dalla spinta delle parti superiori. Poleni non è d' accordo su questo punto con questi dotti; non ammette che la spinta della cupola abbia scostato le parti inferiori, e attribuisce unicamente le degradazioni a de' rassettamenti ineguali prodotti per difetto di costruzione. Intanto egli propone di rimediarvi con molte cinture di ferro, che sono state poste sotto la sua direzione da Vanvitelli nel 1748, e alle quali in seguito si sono aggiunte delle altre. Queste armature non possono avere altro oggetto che di contribuire a distruggere l' azione orizzontale della spinta.

Le idee de' PP. Lesueur, Jacquier e Boscowich sono state adottate da Gauthey, nella sua dissertazione sulle degradazioni del Panteon francese, pag. 117. Esse son contraddette da Rondelet, *Art de bâtir*, tomo II, pag. 69; tomo III, pag. 222. Ma le nozioni ammesse da questo architetto che ha sempre sostenuto che le volte a cupola non avevano spinta orizzontale, non sono conformi alla verità.

Sembra che Cristoforo Wren, abile geometra, che dal 1675 al 1710 ha costrutta la cattedrale di S. Paolo a Londra, aveva

318. Il risultamento generale delle osservazioni e sperienze indicate è 1° che ne' movimenti delle volte, le parti che si separano non strisciano le une sull' altre, ma si scostano girando sugli spigoli superiori o inferiori de' cunei; 2° che una volta rompendosi si separa ordinariamente in quattro parti principali, abbassandosi le due parti superiori, mentre le due inferiori sono rovesciate al di fuori. Non si deve perciò conchiuderne che una volta non possa rompersi per effetto dello scorrimento de' cunei; ma solamente che dietro le proporzioni che ad esse si danno ordinariamente, e i valori dell' attrito e della coesione, le volte si rompono più facilmente per lo scostarsi che per lo scorrer delle parti. Avviene pure qualche volta che le parti inferiori della volta cedono scorrendo sui letti orizzontali situati al di sotto delle imposte, mentre le parti superiori si abbassano girando sugli spigoli de' cunei.

ARTICOLO III.

Dello stabilimento delle volte.

319. La figura e le dimensioni generali di una volta son determinate dalla destinazione dell' edifizio di cui essa fa parte. Perciò si riguardano ordinariamente come date l' apertura della volta, la curva d' intradosso, l' al-

---

adottato sull' equilibrio delle volte, delle nozioni simili a quelle che quì presentiamo. V. *Account of the Family Wren*, pag. 356 e seg.; citato da Robison, *A system of mechanical philosophy*, tomo I, pag. 642.

tezza de' piediritti, la distribuzione del peso che dee sostenere. Si stabilisce pure da principio, dietro l' esempio delle costruzioni analoghe a quella che si progetta e riguardate come le più perfette, la grossezza alla chiave. Questa grossezza o è conservata uniforme in tutta l' estensione della volta, o aumenta progressivamente dalla sommità alle imposte. Nel progettare una volta, bisogna assicurarsi che resterà in equilibrio quando si scompone la centina. L' equilibrio di una volta si stabilisce, o caricando di più le parti che tendono ad esser sollevate, o dando ad esse maggior grossezza. Si deve parimenti verificare che le pressioni esercitate nelle diverse parti della volta non son tanto forti da cagionare lo schiacciamento della pietra o degli altri materiali di cui son formati i cunei. Queste ricerche nelle quali propriamente consiste lo stabilimento delle volte, non richieggono che delle applicazioni delle nozioni presentate nell'articolo 1°.

Dell' equilibrio delle volte a botte.

320. Consideriamo una volta a botte, composta di due parti eguali separate da una commessura verticale. L' azione del peso sostenuto dalla volta produce perpendicolarmente a questa commessura, tra le due metà, una pressione. Si potrebbe sopprimere una delle due metà della volta e sostituirvi una forza orizzontale eguale alla pressione di cui si tratta. Se questa forza orizzontale è molto grande per operare una rottura nella metà rimanente, spingendola al di fuori o per intero o in parte, o se non è tanto grande per impedir che cada al di dentro, la volta non potrà mantenersi in equilibrio. Vi si manterrà nel caso contrario. La ricerca delle condi-

zioni di questo equilibrio comprende diversi casi che debbono esser distinti ed esaminati a parte.

Rappresenti ABNM (Fig. 34) la metà di una volta a botte, ed *mn* una sezione qualunque, nella quale si suppone effettuata la rottura; chiameremo

b, b' le distanze OM, ON;

x, y le distanze Ap, mp;

x', y' le distanze Aq, nq;

z la lunghezza *mn* della sezione;

θ l' angolo che questa sezione fa colla verticale;

G il peso della porzione di volta *mn*NM per un unità di lunghezza;

α la distanza AD del punto A dalla verticale che passa pel centro di gravità C di questa porzione di volta;

T la pressione normale esercitata sul letto *mn*, per l' unità di lunghezza della volta;

f, γ, R avranno i significati indicati n° 290.

321. Supponendo prima che la rottura della volta non possa operarsi che per lo scorrimento de' cunei lungo i piani de' letti, si vede facilmente, dietro il numero 291, che la forza orizzontale Q applicata in NM, necessaria per impedire che la porzione di volta *mn*NM scorra sopra *mn* da sopra in sotto, ha per espressione

$$Q = \frac{G(\cos.\theta - f\,\mathrm{sen}.\theta) - \gamma z}{\mathrm{sen}.\theta + f\cos.\theta}. \qquad (A)$$

Calcolati i valori (A) per tutti i letti compresi nella mezza volta, il massimo di questi valori dovrà esser preso per la pressione che le due metà della volta esercitano l' una contro l' altra alla chiave, pressione che ordinariamente si distingue sotto il nome di *spinta orizzontale* della volta.

Si osserverà in seguito che la forza orizzontale Q ap-

plicata in MN il cui valore sarebbe sufficiente a respinger la porzione di volta *mn*NM, facendola scorrer nel senso *mn*, avrebbe per espressione

$$Q = \frac{G(\cos.\theta + f\,\mathrm{sen}.\theta) + \gamma z}{\mathrm{sen}.\theta - f\cos.\theta} \qquad (A_1)$$

Calcolati i valori (A_1) per tutti i letti compresi nella mezza volta, saremo sicuri dell' equilibrio di essa, se tutti questi valori sono maggiori della spinta orizzontale, determinata nel modo anzidetto. Nel caso contrario non potrà sussister l' equilibrio.

Quindi l' equilibrio della volta esige che il massimo di (A) sia più picciolo del minimo di (A_1).

322. Dietro le forme e le proporzioni che più frequentemente offrono le volte, la sezione di rottura che darà il valor massimo dell' espressione (A) sarà posta ne' reni della volta. Quella che dà il minimo dell' espressione (A_1) è il più sovente la prima commessura orizzontale posta al di sotto delle imposte. Allora la volta tende a rompersi nel modo indicato dalla fig. 35, abbassandosi la parte superiore, mentre le parti inferiori son da ogni lato respinte al di fuori.

Può accadere ancora che la sezione che dà il massimo dell' espressione (A) si trovi alle imposte o vicino ad esse, mentre quella che dà il minimo dell' espressione (A_1) è posta vicino alla sommità. La volta allora tende a rompersi nel modo che rappresenta la fig. 36, elevandosi la parte superiore, nell' atto che le parti inferiori strisciano al di dentro da ogni lato.

323. Ammettendo ora che la rottura della volta non possa operarsi che per l'allontanamento de'cunei girando sugli spigoli superiori o inferiori de' letti, si vedrà, dietro il n° 292, che la forza orizzontale Q (Fig. 34)

applicata al punto N, necessaria per impedire che la porzione di volta *mn*NM giri da sopra in sotto attorno lo spigolo *m*, ha per espressione

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3} R z^2}{b' - y}. \qquad (B)$$

Calcolati i valori di (B) per tutti i letti compresi nella mezza volta, il massimo di essi dovrà esser preso per la spinta orizzontale della volta.

Si osserverà in seguito che la forza orizzontale Q applicata in N, che sarebbe tanto grande da far girare la porzione di volta *mn*NM da sotto in sopra attorno lo spigolo *n*, avrebbe per espressione

$$Q = \frac{G(\alpha - x') + \frac{1}{3} R z^2}{b' - y'} \qquad (B_1)$$

Per esser sicuri dell' esistenza dell' equilibrio è necessario che i valori (B_1) calcolati per tutta la mezza volta si trovino sempre maggiori della spinta orizzontale. Nel caso contrario l' equilibrio non avrebbe luogo.

Si richiede dunque per l' equilibrio della volta che il massimo di (B) sia più piccolo del minimo di (B_1).

Ciò che si è detto suppone inoltre il massimo di (B) dato per una sezione di rottura prossima alla sommità, e il minimo di (B_1) dato per una sezione di rottura vicina alle imposte. Allora la volta tende a rompersi nel modo indicato nella fig. 57, cioè le parti superiori si abbassano appoggiandosi l'una contro l'altra nello spigolo superiore della commessura posta nella sommità, mentre le parti inferiori, rovesciate al di fuori, girano sugli spigoli esteriori delle loro basi. Le parti superiori premono allora le inferiori nello spigolo della sezione di rottura posto all' intradosso.

324. Ma la volta, come si è veduto n° 313, può pa-

rimenti rompersi nel modo indicato dalla fig. 38, cadendo le parti inferiori al di dentro col girare sugli spigoli inferiori delle loro basi, mentre le parti superiori son sollevate, premendosi l' una contro l' altra nello spigolo inferiore della sezione posta alla sommità. Le parti superiori premono allora le inferiori nello spigolo all' estradosso della sezione di rottura. Per verificare l'equilibrio relativo a quest' ultimo genere di rottura, bisogna osservare che la forza Q, applicata in M (fig. 34) che non fa girare da sotto in sopra sullo spigolo *m* la porzione di volta *mn*NM, ha per espressione

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3}Rz^2}{b - y} . \qquad (b)$$

Il massimo di questa espressione dev' esser preso per la spinta orizzontale della volta.

Si osserverà poi che il valore necessario alla forza Q applicata in M, per sollevare la porzione di volta *mn*NM, facendola girare attorno lo spigolo *n*, è

$$Q = \frac{G(\alpha - x') + \frac{1}{3}Rz^2}{b - y'} \qquad (b_1)$$

Dunque l' equilibrio esige che il massimo di (b) sia più piccolo del minimo di (b_1).

325. Nel n° 321 si è supposto, che la rottura della volta dovesse operarsi solo per scorrimento, e ne' n^i 323 e 324 solo per rovesciamento. Ma la rottura può anche aver luogo in parte per l' uno e in parte per l'altro di questi due moti. Il caso più comune è quello in cui la volta tende a rompersi nel modo indicato n° 323, fig. 37; e avviene pure qualche volta che abbassandosi le parti superiori come lo rappresenta la figura, le parti inferiori son rimosse nel modo indicato dalla fig. 35. È evidente che per prevenire questo movimento, il massimo dell'e-

spressione (B) dev' esser reso minore del minimo dell'espressione (A_1). Gli altri casi di rottura si presenteranno assai di rado, ed è inutile verificare l'equilibrio a questi relativo per la maggior parte delle volte che si possono aver a costruire.

Si avrà inoltre riguardo a tutte le combinazioni possibili, osservando che l'equilibrio esige 1° che le espressioni (A) e (B) sieno, in tutta l'estensione della volta, minori di (A_1) e (B_1); 2° che le espressioni (A) e (b) sieno in tutta l'estensione della volta minori di (A_1) e (b_1).

Volendo trascurar le resistenze cagionate dall' attrito e dalla coesione, si supporrà nelle formole precedenti f, γ, R eguali a zero. In caso contrario, si valuteranno queste quantità dietro i risultamenti rapportati n^{i} 25 e seg., 280 e seg.

326. Quando la volta è elevata sopra spalle o piediritti di cui ogni filare è formato di una sola pietra, nell'applicare tuttocciò che si è detto, le spalle e i piediritti debbono riguardarsi formar parte della volta.

327. Dietro ciò che precede, il metodo da tenersi per verificare l'esistenza dell' equilibrio, in quasi tutti i casi che possono presentarsi, consiste (a) 1° a cercare il valore della spinta orizzontale Q applicata in N (Fig. 34),

---

(a) Il processo che qui è indicato, fondato sulle nozioni esposte ne'n.^{i} prec., è conforme alla teoria data da Coulomb, nel 1773, *Mémoires présentés à l' Académie des sciences*. M. Audoy ha osservato nel n° 4 del *Mémorial de l'officier du génie* che le condizioni di equilibrio ottenute con questo processo non differivano da quelle che si trovano con metodi meno semplici esposti nel *Recueil d'expériences et d'observations* di M. Boistard, e nel *Traité de la construction des ponts* di Gauthey.

supponendo diverse posizioni alla sezione di rottura *mn* ne' reni della volta, e fermandosi alla posizione per la quale l' espressione del n° 323,

$$Q = \frac{G(\alpha - x) - \frac{1}{3}Rz^2}{b' - y},$$

o semplicemente (trascurando la coesione delle malte)

$$Q = G\frac{\alpha - x}{b' - y},$$

dà il valore più grande (a).

2° A esaminare se l'azione della spinta orizzontale così determinata, è tanto grande da rovesciare al di fuori o tutta o una porzione della mezza volta ABNM, facendola girare sullo spigolo de' cunei. Si riconoscerà generalmente alla sola ispezione, che la spinta orizzontale rovescerebbe più facilmente la mezza volta intera che

---

(a) Quando si trascura l' adesione delle malte, la ricerca della sezione di rottura *mn* (Fig. 34), cioè della sezione alla quale corrisponde il valor massimo dell' espressione $Q = G\frac{\alpha - x}{b' - y}$, può esser resa più facile per mezzo della proposizione seguente. Ammettiamo che la rottura debba operarsi non secondo la sezione normale *mn* ma secondo una linea verticale che passa pel punto *m*, e indichiamo con φ l' angolo che una tangente tirata alla curva d' intradosso forma colla verticale: si avrà al punto di rottura la relazione $\text{tang.}\varphi = \frac{x - x}{b' - y}$. Quindi la tangente tirata alla curva d' intradosso dal punto di rottura *m*, e la verticale CD che passa pel centro di gravità del peso G della parte superiore della volta, debbono incontrarsi in un punto dell'orizzontale tirata pel punto N. Questa proposizione è stata data da' Sig.i Lamé e Clapeyron. *Mémoire sur la stabilité des voûtes*, *Annales des Mines*, tomo 8, 1823.

una porzione di essa. Quindi dovrà farsi questo esame, supponendo la rottura nella prima commessura AB; cioè assicurarsi che l' espressione

$$Q = \frac{G(\alpha - x') + \frac{1}{3}Rz^2}{b' - y'},$$

ovvero, trascurando l' adesione delle malte,

$$Q = G\frac{\alpha - x'}{b' - y'}$$

calcolata per questa commessura, è maggiore della spinta orizzontale.

3° A esaminare se la spinta orizzontale può far scorrere sui piani de' letti una parte della mezza volta o tutta; cioè assicurarsi che l' espressione

$$Q = \frac{G(\cos.\theta + f\,\text{sen.}\theta) + \gamma z}{\text{sen.}\theta - f\cos.\theta},$$

ovvero, trascurando l' adesione delle malte,

$$Q = \frac{G(\cos.\theta + f\,\text{sen.}\theta)}{\text{sen.}\theta - f\cos.\theta},$$

calcolata per una sezione qualunque vicino all'imposta, è maggiore della spinta orizzontale. Se questa sezione fosse orizzontale, l' espressione precedente diverrebbe semplicemente

$$Q = fG + \gamma z,$$

ovvero, trascurando l' adesione delle malte

$$Q = fG.$$

Per la ricerca della situazione della sezione di rottura e della spinta orizzontale, si potrà profittare de' risultamenti rapportati n^{i} 314 e seg. Nelle volte a arco di cerchio e a piattabanda, la posizione della sezione di rottura è conosciuta anticipatamente, e il valore della spinta orizzontale può esser immediatamente calcolato.

Quando il risultamento del calcolo ha fatto conoscere che la volta progettata non sarebbe in equilibrio, si deve aumentare o la grossezza alla chiave, o la larghezza de' piediritti, o il peso di cui son caricati. Se il difetto di equilibrio derivasse dall' esser le parti inferiori esposte a scorrer sui piani delle commessure, vi si potrebbe rimediare, senza aumentare il volume della fabbrica, o interrompendo le commessure con pietre poste verticalmente o inclinando al di dentro i piani de' letti, o infine legando le parti della fabbrica con armature di ferro.

328. Quando le parti inferiori della volta, o le spalle o i piediritti su' quali è stabilita, non son formati con pietre che ne occupano tutta la grossezza, è necessario aver riguardo alla possibilità di una rottura nella fabbrica de' piediritti, conforme a ciò che si è veduto n° 211 e seg. Per esempio, nella volta, di cui la fig. 39 rappresenta la metà, si sa anticipatamente che la rottura tende a operarsi secondo *mno*. Si calcolerà dunque la spinta orizzontale Q dietro la condizione che questa forza applicata in N, impedisca alla parte *mno*NM di girare sullo spigolo *m*. Per assicurarsi in seguito che la spinta Q così determinata non può operare il rovesciamento del piediritto, facendolo girare sul canto B, si deve questo piediritto riguardare come suscettibile di dividersi secondo una retta inclinata B*t*, e stabilire le condizioni di equilibrio della massa ABCNM sottomessa all' azione della forza orizzontale Q che tende a farla girare sul canto B, in conformità di ciò che è stato fatto ne' citati numeri.

Se la forza di coesione della malta, nella fabbrica della spalla, fosse supposta piccolissima o nulla, si do-

vrebbe ammettere immediatamente (conforme ai n^{i} 214 e 215) che la rottura del piediritto avrà luogo secondo la direzione B*pm*, e non tener alcun conto della porzione di fabbrica AB*pm*.

329. Quando la fondazione di una volta è stabilita sopra un terreno compressibile, si deve aver riguardo alle considerazioni esposte n^{i} 257 e seg. Quindi, per la volta di cui abbiam fatto parola, la larghezza $\alpha\mathcal{C}$ della fondazione dovrebbe esser determinata dalla condizione che il momento del peso della massa di fabbrica $\alpha\mathcal{C}$CNM*m* preso rapporto al mezzo di $\alpha\mathcal{C}$, fosse eguale al momento della spinta orizzontale Q preso rapporto allo stesso punto.

Delle pressioni esercitate contro i piani de' letti nelle volte cilindriche.

330. Supponendo che il valore della spinta orizzontale Q sia stato calcolato conforme al n° 327, e conservando le denominazioni del n° 320 che si riferiscono alla fig. 34, si avrà

$$T = G \operatorname{sen}.\theta + Q \cos.\theta$$

pel valore della pressione esercitata normalmente contro un letto qualunque. Questa pressione per un letto orizzontale come AB si riduce a

$$T = G,$$

la quale rappresenta il peso di ABNM. Per la commessura verticale MN, si riduce a

$$T = Q,$$

come dev' essere.

331. La conoscenza del valore delle pressioni esercitate perpendicolarmente ai piani de' letti non basta per

verificare, che desse non sono tanto grandi da cagionare lo schiacciamento della pietra. Bisognerebbe di più conoscere la maniera come le pressioni possono esser ripartite nell' altezza *mn* de' piani de' letti. Consideriamo una volta nella quale la rottura tende a operarsi nel modo indicato fig. 37 e che è in equilibrio, in guisa che se si diminuisse un poco la larghezza de' piediritti, avrebbe luogo la rottura; e riguardiamo i cunei come corpi perfettamente duri applicati l' uno sull' altro. La pressione esercitata contro il piano MN (Fig. 34), e che è la spinta orizzontale Q, sarà evidentemente applicata contro lo spigolo superiore N. Se *mn* è la sezione di rottura, la pressione esercitata contro di essa sarà del pari evidentemente applicata contro lo spigolo *m*. Finalmente la pressione esercitata contro l' ultimo letto AB lo sarà evidentemente contro lo spigolo B. Quanto ai letti intermedî, si deve ammettere che in quelli prossimi ad MN ed AB, la pressione è applicata contro gli spigoli superiori; e a quelli prossimi alla sezione di rottura, la pressione è applicata contro gli spigoli inferiori. Si distinguerebbero le sezioni intermedie tra quelle in cui la pressione è applicata allo spigolo superiore e quelle in cui è applicata allo spigolo inferiore, per mezzo della condizione che la risultante delle due forze G e Q che producono questa pressione passi ad egual distanza dallo spigolo superiore e dall' inferiore.

352. In realtà, i cunei non essendo corpi perfettamente duri, non si può ammettere che le pressioni si esercitino contro i canti. Ciò non impedisce di poter calcolare con una sufficiente esattezza l'equilibrio delle volte dietro le regole enunciate precedentemente; ma sembra necessario di aver riguardo all' elasticità della materia

de' cunei, per valutare gli sforzi ai quali le parti della pietra sono esposte. Questa quistione sarebbe un caso particolare di una quistione più generale che consiste a determinare gli effetti che si producono in un corpo elastico di figura qualunque sottomesso all'azione di diverse forze. Non potendosi dar quì la soluzione di quest' ultimo problema, si cercherà di determinare questi sforzi dietro supposizioni che sembrano allontanarsi pochissimo dagli effetti naturali, e che son proprie a dar de' limiti la cui conoscenza è utilissima per lo stabilimento delle costruzioni.

Supponiamo, come nel n° precedente, la volta in equilibrio, e la rottura prossima a operarsi nel modo indicato fig. 37. Le commessure per le quali maggiormente importa di conoscere il valore della pressione sostenuta dalla pietra sono quelle di rottura, cioè le commessure estreme MN ed AB (Fig. 34) e quella di rottura posta ne' reni, che supporremo essere *mn*.

Considerando prima la commessura MN, e osservando che quando la volta è prossima a rompersi, questa commessura tende ad aprirsi in M, noi ammetteremo 1° che i due cunei separati da questa commessura non si premono collo spigolo inferiore M; 2° che per effetto dell' elasticità della materia di cui son formati, si sono un poco compressi appoggiandosi l' uno contro l' altro, in modo che la compressione che è nulla allo spigolo M aumenta uniformemente da questo spigolo a quello superiore N; 3° che gli elementi dell'altezza della commessura resistono con forze proporzionali alle compressioni che ricevono, e che aumentano ancora uniformemente, dallo spigolo M in cui son nulle fino allo spigolo N in cui sono al massimo. Ciò posto, chiamiamo

K la pressione massima che si esercita contro lo spigolo N, rapportata all' unità di superficie ;

v la distanza di un punto qualunque di MN dall'estremità inferiore M ;

c l' altezza totale MN di questa commessura ;

si avrà $\frac{Kvdv}{c}$ per la pressione che si esercita contro l' elemento dv dell' altezza del cuneo posto alla distanza v dallo spigolo inferiore. Ora le pressioni esercitate contro tutti gli elementi debbono esser tali che la somma de' loro momenti presi per rapporto allo spigolo m sia eguale al momento del peso G della porzione di volta mnNM, preso per rapporto allo stesso spigolo. Questa somma di momenti essendo

$$\frac{K}{c}\int_0^c dv.v(b-y+v), \quad \text{ovvero} \quad \tfrac{1}{6}K[3(b-y)c+2c^2],$$

si ha l' equazione

$$\tfrac{1}{6}K[3(b-y)c+2c^2]=G(\alpha-x),$$

d' onde

$$K=\frac{6G(\alpha-x)}{3(b-y)c+2c^2}.$$

Col mezzo di questa formola potrà calcolarsi il valore della più grande pressione alla quale è esposta la pietra alla chiave di una volta sull' unità di superficie, e verificare, dietro ciò che è stato detto n^i 174 e seg., se questa pietra ha la forza necessaria per resistervi.

333. Osserveremo quì che nelle ipotesi ora stabilite, si deve prendere per la spinta orizzontale della volta la somma delle pressioni esercitate nell' altezza della sezione MN. Indicando con Q$'$ questa somma, si avrà

$$Q'=\frac{K}{c}\int_0^c dv.v=\tfrac{1}{2}Kc;$$

e mettendo per K il valore precedente, sarà

$$Q' = \frac{3G(x-x)}{3(b-y)+2c}.$$

Il punto di applicazione della risultante Q′ è ai $\frac{2}{3}$ della altezza della sezione, a contar dall' estremità inferiore M. Questo nuovo valore della spinta orizzontale supera un poco il valore indicato più sopra per Q, cioè

$$Q = \frac{G(x-x)}{b-y+c},$$

e che è calcolato, supponendo questa spinta applicata in N. Si ha maggiore esattezza nel verificare l' equilibrio della volta, prendendo Q′ per la spinta orizzontale; ma in generale i risultamenti differiranno pochissimo da quelli che si otterrebbero riguardando questa spinta come rappresentata dalla forza Q, conforme al n° 327.

334. Considerando ora la sezione di rottura *mn*, si ammetterà parimenti che la pressione è nulla allo spigolo superiore *m*, ove la commessura tende ad aprirsi, e che aumenti uniformemente dopo questo spigolo fino a *n* in cui questa spinta è al suo massimo. Indicando *z* sempre l' altezza *mn* del letto, K il valor massimo della pressione, *v* la distanza di un punto qualunque di *mn* dalla estremità superiore *n*, si avrà come più sopra $\frac{Kvdv}{z}$ per la pressione sostenuta da un elemento dell' altezza del cuneo. La condizione alla quale sono sottomesse le pressioni sostenute dai diversi elementi è che la loro somma sia eguale alla pressione normale esercitata contro il letto dal peso G della porzione di volta *mn*NM, e dalla spinta orizzontale Q. Essendo questa somma

$\frac{K}{z}\int_0^z v dv$, ovvero $\frac{1}{2}Kz$, si ha l'equazione

$$\frac{1}{2}Kz = G\,\text{sen}.\theta + Q'\cos.\theta;$$

d'onde

$$K = \frac{2(G\,\text{sen}.\theta + Q'\cos.\theta)}{z},$$

formola che farà conoscere il valore della massima pressione normale alla quale la pietra è esposta sull' unità di superficie, nella sezione di rottura. Questo valore è doppio di quello che si troverebbe supponendo lo sforzo uniformemente ripartito in tutta l' altezza della sezione.

335. Considerando finalmente la sezione AB, e ammettendo le supposizioni indicate nel n° precedente, si riconosce che l' espressione precedente di K conviene egualmente a questa sezione. Rappresenti allora G il peso totale della mezza volta ABNM; e se questa sezione è orizzontale, si ha semplicemente

$$K = \frac{2G}{z}.$$

336. Riguardo alle commessure intermedie a quelle di rottura, non possono le ipotesi precedenti applicarvisi generalmente con esattezza; perchè anche quando una volta è prossima a rompersi, come qui la supponiamo, queste commessure non tendono sempre ad aprirsi, di maniera che non si può supporre nulla la pressione esercitata contro lo spigolo inferiore o superiore del letto. In esse la pressione si ripartisce in una maniera meno ineguale in tutta l' altezza della sezione. Per conseguenza se non avendo riguardo a questa osservazione, si calcolasse per queste commessure il valore di K per mezzo della formola del n° 334 il risultamento sorpasserebbe il vero valore della pressione normale alla quale la pie-

tra sarebbe esposta. Si concepisce inoltre, a meno che la figura della volta non sia irregolarissima, che se la pietra ha una resistenza sufficiente alla chiave, alla sezione di rottura, e alle commessure inferiori de' piedritti, l' avrà a più forte ragione in tutte le altre parti della volta.

337. Si è supposto nel n° 332 che la volta era in equilibrio o prossima a rompersi, e questa supposizione era necessaria per poter riguardare le commessure di rottura come prossime ad aprirsi. In realtà le volte hanno sempre un eccesso di stabilità, per mezzo del quale niuna commessura si apre, se non per effetto della compressione delle malte, circostanza di cui si fa quì astrazione. Il valore della spinta orizzontale deve sempre calcolarsi dietro le regole stabilite precedentemente. Trovandosi i cunei mantenuti da per tutto in contatto sopra tutta l' altezza de' piani delle commessure, non siamo più sicuri di esser d' accordo cogli effetti naturali supponendo nulla la pressione allo spigolo inferiore o superiore della commessura, e si deve pensare al contrario che la pressione si eserciti sopra tutta l' altezza della commessura, benchè meno fortemente vicino allo spigolo ove la commessura si aprirebbe se la volta potesse rompersi. Il valor totale della pressione esercitata contro i piani de' letti non può inoltre sorpassar mai quello che si calcolerebbe per mezzo delle formole del n° 330. Si conchiude da queste osservazioni che se si applicassero a una volta in cui vi è eccesso di stabilità le formole de' n^i 332 e 334, i valori di K così ottenuti supererebbero sempre quelli delle pressioni esercitate, e darebbero de' limiti da cui tanto più le vere pressioni sarebbero lontane quanto più grande sarebbe l' eccesso di stabilità della volta. I

valori più piccoli che si possono attribuire a K sono inoltre quelli che si otterrebbero supponendo le pressioni uniformemente ripartite nell' altezza de' letti.

338. Quando i cunei non sono posti immediatamente gli uni contro gli altri, e quando si scompone l' armatura di una volta prima che gli strati di malta interposti nelle commessure abbiano acquistato una sufficiente durezza, possono succedere de' rassettamenti che facciano aprire un certo numero di commessure vicino ai punti di rottura. In questa circostanza, la pietra può esser esposta a sforzi più grandi di quelli che sarebbero calcolati dietro i n^{i} 332 e 334, perchè la pressione dev' esser riguardata come nulla, non solo ad una delle estremità della commessura, ma anche sopra una certa porzione della sua altezza. Questi effetti, che bisogna procurare di prevenire sarebbero difficilmente ricondotti a de' termini precisi, e sottomessi a un calcolo esatto.

Dell' uso delle catene di ferro per consolidare le volte a botte.

339. Quando i piediritti hanno troppo poca larghezza per mantener la volta in equilibrio, questa può esser consolidata per mezzo di catene di ferro poste ne' reni. L' uso di esse è comunissimo in Italia, e se ne veggono negli edifizi i più magnifici. Supponiamo che la volta rappresentata fig. 40 tenda a rompersi nella sezione *mn*, in modo che le parti superiori discendono appoggiandosi l' una contro l' altra nello spigolo N, e rovesciando le parti inferiori, sulle quali premono negli spigoli *m*, e che tendono a far girare sugli spigoli B. Si preverrà la rottura della volta, legando le due metà con una catena

orizzontale. Convien situare questa catena immediatamente al di sotto della sezione di rottura *mn*. In effetti, quando la volta comincia a rompersi, i punti *m* sono quelli che percorrono orizzontalmente lo spazio maggiore. Ora possiamo opporci a questa rottura per mezzo di una forza orizzontale, di cui il momento, cioè il prodotto della forza e dello spazio percorso nel senso di questa forza dal suo punto di applicazione, deve avere un valore determinato per render nulla la somma de' momenti delle forze che agiscono sopra ogni metà della volta. Si deve dunque applicare questa forza nella direzione *mm*, poichè lo spazio percorso dal punto di applicazione essendo allora il più grande possibile, la forza sarà la minima possibile.

Si conoscerà inoltre la tensione che può stabilirsi nella catena, osservando che il momento di questa tensione aggiunto al momento del peso della mezza volta ABMN, dev' esser eguale al momento della spinta orizzontale che si esercita in N; presi tutti questi momenti relativamente allo spigolo B.

340. Quando la grossezza di una volta e de' suoi piedritti è piccolissima rapporto alla corda, è possibile che una sola catena non basti per prevenirne la rottura. Potremo assicurarcene considerando a parte le porzioni di volta AB*mn*, *mn*NM, e applicando a ciascuna le regole enunciate precedentemente. Se queste porzioni di volta non fossero in equilibrio, si dovrebbero mettere nuove catene all' altezza delle sezioni in cui la rottura tende a operarsi, determinando, dietro ciò che è stato detto, gli sforzi a' quali queste catene si troverebbero esposte.

341. Quando si trovano delle catene impiegate a quest' ufficio, può avvenire che per una elevazione di tempe-

ratura, la catena sia distesa, e cessi di esercitare lo sforzo necessario; e che in seguito di un abbassamento di temperatura sia tesa troppo fortemente, ed esposta a spezzarsi. Per ricercare i mezzi di prevenir questi effetti, si chiamerà

ω l' area della sezione trasversale della catena;

T il più piccolo valore della tensione che questa catena deve sostenere per far la funzione a cui è destinata;

t la tensione che le si fa soffrire quando si mette in opera;

R' il più gran valore della tensione, rapportata all' unità di superficie, cui la catena può esser esposta senza correr rischio di farla spezzare;

V la più alta temperatura alla quale sarà esposta la catena, espressa in gradi del termometro;

v la temperatura che ha luogo quando si mette in opera la catena;

V' la più bassa temperatura alla quale sarà esposta la catena;

δ la dilatazione lineare della sostanza della catena per un grado del termometro.

E avrà il significato del n° 77.

Riporteremo inoltre l' allungamento o accorciamento per una variazione di temperatura di 100° del termometro centigrado delle seguenti sostanze: cioè

ferro da fucina	0,00112
ferro fuso	0,00111
legname di abete	0,0008
pietra, circa (*a*)	0,0005

(*a*) *Notice sur la dilatation de la pierre par M. Destigny. Journal du génie civil*, tomo 2, pag. 227.

Quando si mette in opera la catena, e le si fa soffrire la tensione $\frac{t}{\omega}$ sull' unità di superficie della sua sezione trasversale, è allungata della frazione $\frac{t}{E\omega}$ della sua primitiva lunghezza.

Elevandosi la temperatura di $V-\nu$ gradi, il che produce l'allungamento $\delta(V-\nu)$, essa si stende, e lo sforzo che esercita è ridotto a $t-\delta(V-\nu)E\omega$. Perciò si deve avere

$$t-\delta(V-\nu)E\omega > T.$$

Parimenti la temperatura abbassandosi da ν a V', la catena riceverà un accorciamento eguale a $\delta(\nu-V')$, e la sua tensione diverrà $t+\delta(\nu-V')E\omega$. Si deve dunque aver del pari

$$t+\delta(\nu-V')E\omega < R'\omega.$$

342. Si deduce da queste due ineguaglianze

$$t > T+\delta(V-\nu)E\omega$$
$$t < R'\omega-\delta(\nu-V')E\omega;$$

d' onde

$$R'\omega-\delta(\nu-V')E\omega > T+\delta(V-\nu)E\omega,$$

e per conseguenza

$$\omega > \frac{T}{R'-\delta(V-V')E}.$$

Quando il valore di ω sarà stato determinato conforme a questa condizione, le due ineguaglianze precedenti daranno due limiti tra i quali t dovrà esser compresa. Si vede che non si potrebbe soddisfare alla condizione che il ferro non fosse esposto a rompersi, se la differenza delle temperature estreme fosse tale che si avesse

$$V-V' =, \text{ o pure} > \frac{R'}{\delta E}.$$

I valori da attribuirsi a E e R′ pel ferro da fucina sono stati indicati n^i 102 e 182.

343. Si è supposto qui sopra che la distanza de' due punti ove le estremità della catena sono ritenute non variassero per effetto de' cangiamenti di temperatura. In caso diverso, bisognerebbe nelle formole metter per δ non la dilatazione della sostanza della catena, ma la differenza delle dilatazioni rispettive della catena e del corpo nel quale è ritenuta.

Dell' equilibrio delle cupole.

344. L' equilibrio delle cupole differisce principalmente da quello delle volte a botte, da che in queste ultime il rovesciamento richiede solamente le disgiunzioni nelle sezioni indicate ne' n^i precedenti. Per rompersi la volta, non è necessario che si formi altra disgiunzione secondo piani perpendicolari alla sua lunghezza. Al contrario una volta sferica non può esser rovesciata senza che si aprano le stesse commessure come nelle volte cilindriche, e inoltre senza che si formino delle lesioni nella direzione de' piani meridiani. La formazione di queste lesioni esige che la coesione delle malte sia distrutta. La rottura della volta esigerebbe di più una specie di disunione e spostamento relativo delle pietre vicine, talmente che se le pietre fossero grandi, lavorate accuratamente e poste a commessure ricoverte, dovrebbero esser in parte infrante per poter aver luogo la rottura. È difficile valutare con sufficiente esattezza l' effetto della coesione delle malte, e soprattuto l' effetto della resistenza delle pietre. Ma sembra conveniente di non aver riguardo a queste due circostanze nello stabilimento di

una gran volta (*a*). Noi riguarderemo qui una volta sferica come divisa in un gran numero di parti separate da piani meridiani non aventi tra loro alcun legame.

345. Dietro ciò, quel che si è detto sull' equilibrio delle volte a botte potrà applicarsi alle volte a cupola, colla sola differenza che in vece di considerare delle porzioni di volta comprese tra pianì verticali paralleli, si dovrà considerare l' unione di un grandissimo numero di porzioni di volta comprese tra piani verticali che formano fra loro un angolo piccolissimo e si tagliano secondo l' asse della cupola. L' equilibrio di ciascuna di queste porzioni di volta dovrà esser verificato, dietro le regole esposte precedentemente. Ma è indifferente di considerare a parte una di queste porzioni o di stabilire il calcolo considerando nel tempo stesso l' intera cupola. Rappresentando la fig. 41 il piano di una volta sferica, si può verificare l' equilibrio di una porzione BOB′ compresa tra due piani meridiani vicinissimi, del pari che quello della metà *b*BB′*b*′ della volta. Adottando quest' ultimo

---

(*a*). Risulta da' calcoli de' PP. Lesueur, Jacquier e Boscowich, che fatta astrazione dall' adesione delle malte, il momento delle forze agenti per lo rovesciamento della cupola di San Pietro di Roma, è al momento delle forze resistenti, nel rapporto di 3 a 2 circa. (Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro sul fine dell' anno 1742.) Questa cupola è quasi interamente costrutta di mattoni con malta di puzzolana. L' adesione de' materiali è stata per lungo tempo sufficiente a mantener l' equilibrio. Ma delle lesioni prodotte da piccoli movimenti impressi per la caduta del fulmine, e pe' tremuoti, essendosi moltiplicate e aumentate gradatamente, si è dovuto arrestare i progressi di queste degradazioni, circondando le parti inferiori della cupola con cerchi di ferro.

partito, s' immaginerà che la semicirconferenza $\epsilon BB'\epsilon'$ è stata sviluppata in $\epsilon BB'\epsilon'$ e che tutti gli altri elementi semicircolari della volta sono stati parimenti sviluppati sugli spigoli del cilindro orizzontale che gli toccherebbe nella sezione meridiana projettata in BOB', Ne risulterà una porzione di volta a botte, compresa tra i piani verticali $\epsilon O\epsilon'$, $\epsilon O\epsilon'$, alla quale si applicheranno le regole esposte ne' n^{i} 320 e seg. Si osserverà inoltre, determinando il peso e la posizione del centro di gravità delle diverse parti, che questa porzione di volta è contenuta tra due piani verticali inclinati rapporto all' asse del cilindro, di maniera che gli elementi orizzontali sono tanto men lunghi, quanto più sono vicini alla sommità ove la loro lunghezza è nulla.

È evidente che se esistono porte o finestre nelle parti inferiori della cupola, si debbono supporre de' vuoti corrispondenti nella porzione di volta a botte $\epsilon O\epsilon'$, di cui le condizioni di equilibrio sono le stesse di quelle della cupola.

546. Quando una cupola è in equilibrio, si può tagliarla secondo un piano orizzontale, è sopprimere la parte superiore senza che l'equilibrio cessi di sussistere. Se per esempio, si è tolta la porzione *mm*NM, (Fig. 34), e che si considera la parte rimanente AB*mm* di una porzione di cupola compresa tra due piani meridiani vicinissimi, può accadere o che questa porzione si sostiene da sè medesima, o che fosse necessario, perchè si sostenesse, di applicarvi una forza orizzontale in *n*. In quest' ultimo caso, si stabiliscono tra i cunei, verso l'estremità superiore della parte rimanente AB*mm*, e perpendicolarmente alle commessure verticali, delle pressioni orizzontali, che non esistono quando la volta è intera.

347. Se una cupola fosse effettivamente formata di un gr[illegible] numero di parti separate da piani meridiani e senza leg[illegible]e [illegible]or[illegible], non si potrebbe tagliarla secondo questi piani, e sopprimerne una parte senza cagionarne la rottura. Quindi le grandi nicchie o emicicli non si sostengono che per effetto della tenacità de' materiali, o perchè il muro di facciata offre una stabilità sufficiente per resistere all' azione laterale della mezza volta.

Dell' uso delle cinture di ferro per consolidare le cupole.

348. L' utilità di queste armature è provata da un gran numero di esempi (*a*). Le considerazioni presentate n° 339 mostrano che i cerchi debbono esser situati di preferenza all' altezza della sezione di rottura. Indicando con t la tensione di un cerchio, questa tensione produce l' effetto di una forza orizzontale eguale a

$$2\pi.t,$$

che sarebbe distribuita uniformemente in tutti i punti della circonferenza, e perpendicolarmente ad essa. Per conseguenza se per calcolare l' equilibrio di una cupola si concepisse una volta a botte tener luogo della cupola

---

(*a*) Si vegga il secondo libro delle Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano, di Poleni, in cui l'autore cita molte cupole riparate e consolidate per mezzo di cerchi di ferro. La cupola interna e il cono che sostiene la lanterna a S. Paolo di Londra, sono state consolidate a questo modo. Si sono pure impiegati de' cerchi di ferro per contenere la volta intermedia della cupola del Pantcon a Parigi. Rondelet, *Art de bâtir*, tomo 4, pag. 527.

nel modo spiegato n° 345, bisognerebbe concepire le due metà di questa volta riunite da una o più catene, la cui tensione o somma delle tensioni fosse eguale a πt.

Si ricava la proposizione precedente da quel che si è detto n° 307. Possiamo rendercene ragione direttamente, osservando che secondo il principio delle velocità virtuali, l' equilibrio delle forze applicate nel senso de' raggi e di quella applicata nel senso della circonferenza, esige che le prime sieno alla seconda, come una variazione piccolissima della circonferenza è ad una variazione corrispondente del raggio; cioè come la circonferenza è al raggio.

Le considerazioni esposte ne' n^{i} 340, 341 e seg. si applicano egualmente ai cerchi impiegati per consolidare le cupole.

Dell' equilibrio delle volte a schifo e delle volte a crociera.

349. Le figure 42 e 43 rappresentino la pianta di una volta a schifo innalzata sopra una base poligona. Si può questa volta supporre divisa, da piani verticali che passano per gli angoli del poligono, in parti non legate fra loro; e considerare a parte le due porzioni opposte BOB′, BOB′, come una porzione di volta a botte. Si applicheranno a questa porzione di volta le regole de' n^{i} 320 e seg., avendo sempre riguardo, nella valutazione de' volumi, e nella determinazione de' centri di gravità, che essa è compresa tra piani inclinati all' asse del cilindro. In realtà le parti della volta son legate fra loro o per l' adesione delle malte, o perchè ordinariamente si pongono negli spigoli rientranti delle ca-

tene di pietra più forti che dovrebbero esser disunite e fratturate per potersi operar la rottura. L' effetto di questi legami è qui più sensibile di quel che lo sia nelle cupole, e tanto più quanto minore è il numero de' lati del poligono che serve di base. Ma questo effetto non essendo di natura tale a poter esser valutato con esattezza, sembra che non vi si debba aver riguardo, sopra tutto nello stabilimento di una grande volta.

350. L' equilibrio di una volta a crociera (Fig. 44) può esser considerato della stessa maniera, supponendola divisa in parti indipendenti l' una dall' altra da' piani verticali BOB′, BOB′. Le porzioni BOB, B′OB′ appartengono a una stessa volta a botte, e tendono a rompersi, rovesciando i pilastri sugli spigoli *Bb*, *B′b′*. Si osserverà che quì gli elementi orizzontali di queste porzioni di volta hanno maggior lunghezza a misura che sono più vicini alla sommità. La spinta orizzontale per questa ragione è maggiore, a grossezza eguale, di quel che sia nelle volte a schifo, ove si verifica il contrario. Ma si vede da un altro canto, che i pilastri sono caricati del peso delle due altre porzioni di volta BOB′, BOB′, e che non possono esser rovesciati senza trascinare nel loro moto queste porzioni di volta, il momento delle quali, preso rapporto agli spigoli *Bb*, *B′b′* dev' esser riunito al momento di stabilità delle metà delle porzioni BOB, B′OB′, preso rapporto agli stessi spigoli. Queste volte differiscono da quelle a schifo, da che le parti nel caso di una rottura sarebbero rovesciate separatamente, e non sono consolidate le une colle altre. Le osservazioni fatte di sopra sull' effetto del legame delle parti della volta, trovano anche qui la loro applicazione.

ARTICOLO IV.

De' calcoli relativi allo stabilimento delle volte.

351. I calcoli indicati nell' articolo precedente hanno per oggetto la valutazione de' volumi delle parti delle volte, e la ricerca delle situazioni de' rispettivi centri di gravità, o piuttosto delle distanze orizzontali de' centri di gravità da un piano dato. Trattandosi di una volta a botte compresa tra due piani verticali perpendicolari al suo asse, il calcolo è in generale stabilito per un' unità di lunghezza della volta, e si hanno a considerar solamente le aree delle parti della sezione trasversale. In altri casi, e specialmente ne' calcoli relativi allo stabilimento delle cupole, delle volte a schifo e delle volte a crociera, si debbono considerar i volumi delle parti della volta.

La figura della sezione trasversale di una volta essendo formata ordinariamente di linee rette, di archi di cerchio, o di altre curve di cui si hanno le equazioni, si possono effettuare rigorosamente i calcoli dietro le regole all' uopo fornite dalla geometria (*a*). Ma sarà più semplice, secondo ha osservato Coulomb (*b*), d' impiegare i metodi di approssimazione.

La figura di cui si tratta può esser sempre decomposta in parti come ABMN (Fig. 45), comprese tra due linee verticali e due linee curve o rette. Se la volta è termi-

---

(*a*) M. Audoy ha stabilito a questo modo le formole relative alle diverse specie di volte a botte. V. la sua Memoria, *Mémorial du génie*, n° 4.

(*b*) *Mémoires des savans étrangers*, 1773.

nata da due piani verticali perpendicolari all' asse, basta considerare l' area ABNM. Se questa volta è terminata da due piani verticali CQ, C′Q′ inclinati a quest' asse, bisognerà considerare il volume corrispondente all' area ABNM, e projettata orizzontalmente in CC′, Q′Q. Ciò posto, chiamiamo

x l' ascissa Ap;

y la lunghezza mn;

z la lunghezza qq';

X l' ascissa AP;

e riguardiamo y e z come funzioni della x. Se consideriamo solamente l' area ABNM, avremo

$$\int_0^X y\,dx$$

pel valore di quest' area; e

$$\frac{\int_0^X xy\,dx}{\int_0^X y\,dx}$$

per la distanza orizzontale del suo centro di gravità dalla linea AB. Se consideriamo il volume projettato in CC′Q′Q, avremo

$$\int_0^X yz\,dx$$

pel valore di questo volume; e

$$\frac{\int_0^X xyz\,dx}{\int_0^X yz\,dx}$$

per la distanza orizzontale del suo centro di gravità dal piano verticale di cui CC′ è la traccia.

352. Si vede da ciò che precede, che i calcoli di cui si tratta, si riducono sempre alla valutazione d'integrali definiti espressi generalmente da

$$\int_0^X dx.\mathrm{F}x.$$

Ora si hanno le seguenti formole approssimate per esprimere i valori di questi integrali. Supponendo l'intervallo AP o X diviso in un certo numero n di parti, delle quali la lunghezza è uguale a Δx; mettendo $\mathrm{F}x = u$, e indicando con u_0, u_1, u_2, ... u_n i valori di u che corrispondono alle ascisse o, Δx, $2\Delta x$, ... $n\Delta x$, si avrà

$$\int_0^X dx.\mathrm{F}x = \Delta x \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1} + \frac{1}{2}u_n \\ -\frac{1}{12}(\Delta u_n - \Delta u_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_0) - \frac{19}{720}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_0) \\ +\frac{3}{160}(\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 u_n - \Delta^5 u_0) + \text{ec.} \end{array} \right\}$$

Si ha parimenti, essendo n un numero pari,

$$\int_0^X dx.\mathrm{F}x =$$

$$\frac{\Delta x}{3} \left\{ \begin{array}{l} u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 4u_5 + \ldots\ldots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n \\ -\frac{1}{30}(\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_2 + \Delta^4 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^4 u_{n-6} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-2}) \\ +\frac{1}{30}(\Delta^5 u_0 + \Delta^5 u_2 + \Delta^5 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^5 u_{n-6} + \Delta^5 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-2}) \\ -\frac{37}{1260}(\Delta^6 u_0 + \Delta^6 u_2 + \Delta^6 u_4 + \ldots\ldots + \Delta^6 u_{n-6} + \Delta^6 u_{n-4} + \Delta^6 u_{n-2}) \\ + \text{ec.} \end{array} \right\}$$

L' uso di queste formole sarà più sicuro se si opera in modo che nella curva di cui u è l' ordinata non si trovino punti di flesso tra i punti di divisione dell' asse delle ascisse x. Quando la curva presenta de' punti di flesso, o cangia per salti di curvatura e di direzione, convien dividere l' integrale in molte parti separate da questi punti e calcolarne a parte i valori.

Nelle operazioni relative allo stabilimento delle volte, si possono misurare sopra disegni fatti con esattezza le lunghezze delle linee rappresentate da y e z nel n° precedente, il che abbrevierà di molto queste operazioni.

SEZIONE QUARTA.

DELL' EQUILIBRIO E DELLO STABILIMENTO DELLE COSTRUZIONI DI LEGNAME.

353. Le costruzioni di legname consistono generalmente in un sistema di pezzi ritenuti fra loro, nelle estremità solamente o in diversi punti della loro lunghezza. Queste costruzioni offrono delle proprietà differenti secondo che son sostenute da sotto o sospese a punti fissi più elevati della costruzione. È sempre necessario che l' equilibrio del sistema sia stabile; ma nel primo caso questa condizione esige che la figura del sistema sia invariabile; nel secondo caso, l' equilibrio sarà stabile anche quando la costruzione fosse perfettamente flessibile.

Il principio il più generale da cui si possa far dipendere la disposizione di un sistema di legname, è che i pezzi principali debbono esser situati secondo rette tirate da' punti d' onde si esercitano gli sforzi ai punti di appoggio. In una costruzione disposta a questo modo, gli sforzi che essa sostiene non tendono a cangiarne la figura facendo girare i pezzi sugl' incastri nelle loro estremità. Questo principio è principalmente applicabile alle costruzioni sostenute da sotto.

354. Ogni pezzo di una costruzione di legname deve offrire una resistenza proporzionata agli sforzi che può aver a sostenere.

Ci formeremo un' idea precisa del grado di resistenza che un pezzo deve presentare osservando che l' effetto di un cambiamento di figura qualunque sofferto da un

pezzo in virtù delle azioni alle quali è esposto, è sempre di allungare o di accorciare in una certa proporzione le fibre di questo pezzo. Se l' allungamento o l' accorciamento fosse troppo forte, il pezzo si romperebbe, o per una disgiunzione o per uno schiacciamento. Questi allungamenti o accorciamenti debbono sempre esser molto minori di quelli che porterebbero la rottura; ma in tutt' i casi si debbono riguardare come quelli che danno la misura della fatica alla quale il pezzo è esposto. Perciò in ogni caso particolare, la quistione si riduce a esaminare, dato un pezzo e gli sforzi che deve sostenere, in qual proporzione le fibre sono le più allungate o le più accorciate. Se questo allungamento o accorciamento corrisponde a una tensione o compressione che non passa i limiti indicati nell' articolo VII della prima sezione (n° 173 e seg.), saremo sicuri che il pezzo avrà la forza richiesta.

ARTICOLO PRIMO.

Della resistenza di un pezzo prismatico posato orizzontalmente, caricato e sostenuto di diverse maniere.

355. I risultamenti presentati ne' n^i 86 e seg. fanno conoscere le condizioni dell' equilibrio per un pezzo prismatico, ne' casi i più semplici. Quando il pezzo è incastrato a una estremità (Fig. 5 e 7), caricato all' altra di un peso P, e sopra ogni unità di lunghezza di un peso p, si ha (n^i 86 e 89)

$$f = \frac{P}{e} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{e} \cdot \frac{a^4}{8}$$

per l' abbassamento BM dell'estremità libera; essendo a la lunghezza AM, ed ε il momento della resistenza alla flessione, di cui si ha l'espressione generale nel n° 80.

356. Quando un pezzo è posato liberamente sopra due appoggi (Fig. 6 e 8), caricato nel mezzo del peso 2P, e sopra ogni unità di lunghezza di un peso p, si ha per l' abbassamento CA del punto medio del solido (n^i 87 e 90)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5a^4}{24};$$

essendo a la metà AM dell' intervallo degli appoggi.

357. I risultamenti presentati ne' n^i 121 e seg. fanno conoscere le condizioni dell'equilibrio per un pezzo prismatico caricato all' istesso modo, nel caso della rottura. Dietro i n^i 121 e 122, 124 e 125, quando un solido è incastrato orizzontalmente in una estremità, caricato all' altra di un peso P, e sopra ogni unità di lunghezza del peso p; ovvero quando un solido è posato orizzontalmente sopra due appoggi, caricato nel mezzo del peso 2P, e sopra ogni unità di lunghezza del peso p; si ha parimente (trascurando la considerazione della curvatura del solido)

$$\rho = Pa + \tfrac{1}{2}pa^2,$$

rappresentando a la lunghezza del solido nel primo caso, e la metà dell' intervallo degli appoggi nel secondo. ρ è il momento di resistenza alla rottura, di cui l' espressione generale è data n^i 113 e 124.

358. Quando la figura che prende un solido prismatico per effetto della flessione è conosciuta, se ne ricavano immediatamente le condizioni dell' equilibrio relative alla rottura. Il solido tende a rompersi nel punto ove la curvatura è più grande; e quando è prossimo a

rompersi il momento della resistenza alla flessione in questo punto è uguale al momento della resistenza alla rottura. Quindi le condizioni di equilibrio di cui si tratta si ottengono eguagliando ρ al valor massimo di $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$; essendo x, y l'ascissa e l'ordinata della curva del solido, avendo ε il significato indicato n° 80, e ρ il significato indicato n° 113 (*).

(*) La sezione, nella quale il solido tende a rompersi, corrisponde al punto ove la somma de' momenti delle forze che agiscono sul solido ha il più gran valore. In conseguenza la determinazione della sezione di rottura riducesi a trovare il massimo del secondo membro dell'equazione di equilibrio. E siccome il massimo di $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$ corrisponde al minimo del raggio di curvatura; perciò il solido tende a rompersi ove la curvatura è la più grande.

La ricerca del massimo del secondo membro dell'equazione d'equilibrio deve farsi dietro l'ispezione della formola; giacchè applicandovi le regole de' massimi e minimi, o non si troverebbe massimo, o il massimo assoluto potrebbe corrispondere ad un punto della curva non compreso fra le estremità del solido. Così per tutti i casi contemplati ne' n^i 86 e seg., come pure nel caso di cui si parla al n° 357, cui appartiene l'equazione di equilibrio

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = (\mathrm{P} + pa)(a - x) - p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right),$$

la quale può mettersi sotto la forma

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}(a - x) + \frac{p}{2}(a^2 - x^2),$$

il massimo del secondo membro corrisponde al valore $x = 0$. Ed in questo modo si è determinato il punto di rottura ne' n^i 121 seg. e nel n° 357.

Trovato il punto ove il solido tende a rompersi, si eguaglierà

Equilibrio di un pezzo posato sopra due appoggi, e caricato in un punto qualunque dell'intervallo degli appoggi.

359. Si suppone che un solido MM' (Fig. 46), posato sopra due appoggi posti in una medesima linea orizzontale, sia caricato di un peso 2P sospeso al punto B non posto nel mezzo dell' intervallo degli appoggi. Si tratta di conoscere le condizioni di equilibrio del solido relativamente alla flessione e alla rottura. Si chiamerà

a la metà CM dell' intervallo degli appoggi ;

z la distanza CD;

x l' ascissa Bp;

y l' ordinata mp;

f l' abbassamento BD del punto B;

ω l' angolo che la tangente alla curva del solido nel punto B forma coll' orizzonte;

ε avrà il significato indicato n° 80;

ρ avrà il significato indicato n° 113.

Le componenti del peso 2P, che rappresentano gli

---

il momento di rottura ρ alla somma de' momenti delle forze che agiscono sul solido, presi relativamente a questo punto; e questa equazione conterrà la relazione tra i pesi e le dimensioni del solido. Si terrà conto della curvatura del solido, o sostituendo agli appoggi delle forze normali alla curva, delle quali si possono conoscer le componenti orizzontale e verticale, o pure introducendo nella formola l' espressione della lunghezza della curva, diversa dalla distanza degli appoggi. Così le equazioni del n° 357 e quella della nota a pag. 86 appartengono all' istesso caso; ma solamente nella seconda si tien conto della curvatura.

*

sforzi esercitati sopra gli appoggi M e M′ sono rispettivamente

$$P\,\frac{a+z}{a} \quad \text{e}\ P\,\frac{a-z}{a};$$

e le parti BM, BM′ del solido sono piegate della stessa maniera che se, essendo incastrate in B, fossero sollecitate alle estremità M e M′ da queste componenti. Si avrà dunque, come al n° 86, per la parte BM

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}(a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)x-\frac{x^2}{2}\right]+\text{tang.}\,\omega,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]+x\,\text{tang.}\,\omega,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(a+z)(a-z)^3}{3a}+(a-z)\,\text{tang.}\,\omega.$$

Si avrà parimenti per la parte BM′

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a-z}{a}(a+z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a-z}{a}\left[(a+z)\,x-\frac{x^2}{2}\right]-\text{tang.}\,\omega,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a-z}{a}\left[(a+z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-x\,\text{tang.}\,\omega,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(a-z)(a+z)^3}{3a}-(a+z)\,\text{tang.}\,\omega.$$

Dovendo f e tang.ω avere gl' istessi valori in queste equazioni, si troverà, facendo l' eliminazione,

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{2(a^2-z^2)z}{3a},\quad f = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{(a^2-z^2)^2}{3a}.$$

360. Le equazioni delle parti BM, BM′ della curva sono rispettivamente

$$y = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[\tfrac{2}{3}(a-z)zx+\tfrac{1}{2}(a-z)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right],$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a-z}{a}\left[-\tfrac{2}{3}(a+z)zx+\tfrac{1}{2}(a+z)x^2-\tfrac{1}{6}x^3\right].$$

Si conoscerà l'ordinata minima facendo nella seconda equazione $\frac{dy}{dx}=0$, il che darà

$$x = a+z-\sqrt{a^2+\tfrac{2}{3}az-\tfrac{1}{3}z^2}.$$

Chiamando y_1 il valore della y corrispondente a questo valore della x, la freccia della curva del solido sarà $f-y_1$. Il punto B è quello in cui la curvatura del solido è la più grande, e in cui questo tende a rompersi: lo chiameremo *punto di rottura.*

361. A tenore di quest' ultima osservazione, e conforme al n° 358, le condizioni dell' equilibrio relativo alla rottura saranno espresse dall' equazione

$$\rho = P.\frac{a^2-z^2}{a};$$

il che può vedersi ancora osservando che ρ dev' esser uguale al momento dell' una o dell' altra delle forze agenti in M, M′, preso relativamente al punto di rottura B (*).

(*) Volendo tener conto della curvatura del solido, bisognerà intender messe in luogo degli appoggi, delle pressioni normali alla curva. Quella sull' appoggio M avrà per componenti verticale e orizzontale $P.\frac{a+z}{a}$ e $P.\frac{a+z}{a}\,\text{tang.}\,x$, essendo x l'angolo che la tangente alla curva in M fa coll' asse delle x. E secondo quel che si è detto nella nota precedente, si avrà

$$\rho = P.\frac{a^2-z^2}{a}+\int P.\frac{a+z}{a}\,\text{tang.}\,x;$$

Equilibrio di un pezzo posato sopra due appoggi, e caricato sopra una porzione della sua lunghezza.

562. Il solido MM′ (Fig. 47), posato sopra due appoggi in linea orizzontale, sia caricato solamente nell' intervallo NN′ di un peso p sull' unità di lunghezza; si domandano le condizioni di equilibrio. Supponendo che il punto B sia nel mezzo dell' intervallo NN′, si chiamerà z la distanza CD;

---

la quale equazione, colla sostituzione de' valori di f e di tang.α ricavati dall' equazione della curva BM, diverrà

$$\varphi = P.\frac{a^2-z^2}{a} + \frac{P^3}{\varepsilon^2}.\frac{(a^2-z^2)^3}{a^3}.\frac{(3a+z)(a+z)}{18}.$$

Il valore di φ relativo alla parte BM′ si ricaverà dal precedente cangiando z in $-z$, e si avrà

$$\varphi = P.\frac{a^2-z^2}{a} + \frac{P^3}{\varepsilon^2}.\frac{(a^2-z^2)^3}{a^3}.\frac{(3a-z)(a-z)}{18}.$$

Di queste due equazioni si adotterà la prima, nella quale il valore del secondo membro è più grande.

S' intenderà facilmente la ragione per cui la relazione fra il peso P e le dimensioni del solido è diversa quando si riferisce alla parte BM da quella che si rapporta alla parte BM′; giacchè ciascuna di queste parti deve considerarsi come incastrata nel punto B, e sforzata a rompersi dall' azione delle forze che in essa agiscono; e in questa ipotesi effettivamente potrebbero esse aver dimensioni diverse.

Quest' esempio è sufficiente per mostrare come dovrebbe procedersi in altri casi. Determinato il punto di rottura, per ogni parte del solido situata a destra e a sinistra di esso si troverà la somma de' momenti presi relativamente a questo punto, e la più grande di queste somme si farà eguale a φ.

a la metà CM della distanza degli appoggi;

a' la metà DE dell' intervallo nel quale è posta la carica;

x, y l' ascissa Bp e l' ordinata mp;

f l' abbassamento BD o MP del punto B;

ω l' angolo che la tangente alla curva nel punto B forma coll' orizzonte;

ε, ρ avranno i significati indicati n° 359.

Le componenti della carica $2pa'$ che rappresentano gli sforzi esercitati sopra M e M′ sono rispettivamente

$$pa'.\frac{a+z}{a} \quad \text{e} \quad pa'.\frac{a-z}{a}.$$

Ogni parte BM, BM′ del solido è piegata della stessa maniera che se, essendo incastrata in B, fosse sollecitata in un senso da' pesi posti in BN, BN′, e nell' altro dalle forze precedenti agenti in M, M′. Per conseguenza si avrà prima per tutti i punti compresi tra B e N (v. i n^{i} 87, 89 e 90),

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{pa'}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}(a-z-x)-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a'^2}{2}-a'x+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pa'}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)x-\frac{x^2}{2}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a'^2x}{2}-\frac{a'x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\text{tang.}\omega,$$

$$y=\frac{pa'}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a'^2x^2}{4}-\frac{a'x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)+x\,\text{tang.}\omega;$$

e le due ultime equazioni daranno, pe' valori che convengono al punto N, facendovi $x=a'$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pa'}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)a'-\frac{a'^2}{2}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{a'^3}{6}+\text{tang.}\omega,$$

$$y=\frac{pa'}{\varepsilon}\cdot\frac{a+z}{a}\left[(a-z)\frac{a'^2}{2}-\frac{a'^3}{6}\right]-\frac{p}{\varepsilon}\cdot\frac{a'^4}{8}+a'\,\text{tang.}\omega.$$

Si avrà in seguito per tutti i punti compresi tra N

ed M, determinando le costanti in modo che per $x = a'$ i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y sieno eguali a' precedenti,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a}(a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a}\left[(a-z)x - \frac{x^2}{2}\right] - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^3}{6} + \text{tang.}\varpi,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a}\left[(a-z)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] - \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a'^3x}{6} - \frac{a'^4}{24}\right) + x\,\text{tang.}\varpi.$$

L' ultima equazione, supponendo $x = a - z$, darà

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a+z)(a-z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{a'^3(a-z)}{6} - \frac{a'^4}{24}\right] + (a-z)\,\text{tang.}\varpi.$$

Ripetendo le stesse operazioni per la porzione BM' del solido, si troverà

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a-z)(a+z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon}\left[\frac{a'^3(a+z)}{6} - \frac{a'^4}{24}\right] - (a+z)\text{tang.}\varpi.$$

Da queste due equazioni, risulta

$$\text{tang.}\varpi = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(4a^2 - 4z^2 - a'^2)z}{6a};$$

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon}\left[\frac{(2a^2 - 2z^2 - a'^2)(a^2 - z^2)}{6a} + \frac{a'^3}{24}\right].$$

365. Si avranno le equazioni delle parti BN, NM della curva, sostituendo nelle precedenti espressioni di y che appartengono rispettivamente a queste parti il valore ora ottenuto per tang.ϖ. Le espressioni di y che convengono alle porzioni BN', N'M' della curva sono simili alle espressioni che si rapportano alle porzioni BN, NM; e si ricavano da quest' ultime cangiando $a+z$ in $a-z$, e viceversa. Si conoscerà dunque parimenti la figura della porzione BM del solido. La freccia della curvatura si troverà nel modo indicato n° 360.

364. Il punto B è quello nel quale la curvatura è la più grande, e dove il solido tende a rompersi. La condizione dell' equilibrio relativo alla rottura è espressa, conforme al n° 358, dall' equazione

$$\rho = pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - \frac{a'}{2}\right) \text{ (*)}.$$

365. Gli esempi precedenti bastano per indicare come si trovano le condizioni di equilibrio di un pezzo posato orizzontalmente sopra due appoggi, e caricato di una maniera qualunque. Il punto in cui tende a rompersi, e che deve riguardarsi come il punto d' incastro, è sempre situato nella verticale contenente il centro di gravità de' pesi di cui è caricato. Determinato il punto di rottura, come pure gli sforzi esercitati sopra ogni punto

---

(*) I valori di $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ relativi ai punti N, B, N' sono rispettivamente

$$pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - a'\frac{a+z}{a}\right),$$

$$pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - \frac{a'}{2}\right),$$

$$pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - a'\frac{a-z}{a}\right);$$

e siccome $\frac{a+z}{a}$ è sempre maggiore di $\frac{1}{2}$, il punto di rottura non potrà mai cadere in N. Potrà bensì cadere in N' se $\frac{1}{2} > \frac{a-z}{a}$, ovvero se $z > \frac{1}{2}a$. Quindi delle due equazioni

$$\rho = pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - \frac{a'}{2}\right), \quad \rho = pa'\left(\frac{a^2-z^2}{a} - a'\frac{a-z}{a}\right),$$

si sceglierà quella nella quale il secondo membro ha il più gran valore.

di appoggio, si debbono formar tante equazioni differenziali di secondo ordine quante parti vi sono da ogni lato del punto di rottura, per le quali le condizioni della flessione non possono esprimersi colla stessa formola. Le costanti introdotte dall' integrazione si determinano in modo che l' ordinata e l' inclinazione della tangente abbiano gl' istessi valori nel punto comune a due parti consecutive.

L' equazione che esprime le condizioni dell' equilibrio all' istante in cui il pezzo tende a rompersi si ottiene, eguagliando il momento di rottura ρ al valore di $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$ che appartiene al punto di rottura ; cioè al momento preso per rapporto a questo punto delle forze agenti sul pezzo nell' una o nell' altra delle parti separate da questo punto (*).

(*) Non sempre il punto di rottura si trova nella verticale che passa pel centro di gravità de' pesi che agiscono sul solido. Il caso ora trattato ne offre un esempio, giacchè il punto di rottura può trovarsi in B o in N', giusta l'osservazione fatta nella nota precedente.

Quando dunque si possono intender rimossi gli appoggi e sostituite delle forze eguali e contrarie alle pressioni da essi sostenute, potrà trovarsi il centro delle forze medesime; e converrà prender questo punto per origine delle coordinate, pel solo oggetto di render più semplice il calcolo.

In ogni caso per procedere alla ricerca della sezione di rottura fa d' uopo osservare, che quando un solido contiene diverse parti per le quali le condizioni della flessione non sono espresse da una medesima equazione, per ogni parte i momenti delle forze dovranno crescere o diminuire da un estremo all' altro. Presi dunque i valori di $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$ corrispondenti a tutte le estremità di queste

Equilibrio di un pezzo caricato di un peso, di cui una delle estremità è incastrata e l' altra è posata sopra un appoggio.

366. Il pezzo AMM′ (Fig. 48) incastrato orizzontalmente all' estremità A, sostenuto all' estremità M′ so-

---

diverse parti del solido, il massimo di essi sarà precisamente il valore di ρ. La qual cosa ci fa conoscer che la sezione di rottura deve trovarsi necessariamente in un punto singolare della curva del solido.

A confermar quanto abbiamo detto, esamineremo il caso di un solido MAM′ (Fig. 47) sostenuto in M, M′ da due appoggi, e caricato in due punti qualunque N, N′ di pesi 2Π e $2\Pi'$. Sia B il punto pel quale passa la risultante di questi pesi. Si chiami

a la metà CM dell' intervallo MM′;
z la distanza CE;
z' la distanza CE′;
x, y l' ascissa Bp e l'ordinata mp;
f la freccia BD del punto B;
ω l' angolo che la tangente della curva in B fa coll' asse delle x;
P, P′ le pressioni sugli appoggi M, M′;
Essendo

$$DE = \frac{\Pi'(z+z')}{\Pi+\Pi'},\quad DE' = \frac{\Pi(z+z')}{\Pi+\Pi'},\quad \text{sarà } CD = \frac{\Pi z - \Pi' z'}{\Pi+\Pi'}.$$

Chiameremo per brevità $CD = r$.

Dovendo essere

$$P+P' = 2\Pi+2\Pi',$$
$$P(a-r) = P'(a+r),$$

risulterà

$$P = \frac{(\Pi+\Pi')(a+r)}{a},\quad P' = \frac{(\Pi+\Pi')(a-r)}{a}.$$

pra un appoggio posto sulla stessa orizzontale del punto

Per la parte BN si ha

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{P}[(a-r)-x]-2\Pi[(z-r)-x]\,,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\mathrm{P}\left[(a-r)x-\frac{x^2}{2}\right]-2\Pi\left[(z-r)x-\frac{x^2}{2}\right]+\varepsilon\,\mathrm{tang.}\,\omega\,,$$

$$\varepsilon y=\mathrm{P}\left[(a-r)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-2\Pi\left[(z-r)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]+\varepsilon x\,\mathrm{tang.}\,\omega\,.$$

Per la curva NM, determinando le costanti in modo che nel punto N la tangente e l'ordinata sien comuni alle due parti BN, NM, si avrà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{P}[(a-r)-x]\,,$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\mathrm{P}\left[(a-r)x-\frac{x^2}{2}\right]-\Pi(z-r)^2+\varepsilon\,\mathrm{tang.}\,\omega\,,$$

$$\varepsilon y=\mathrm{P}\left[(a-r)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]-\Pi(z-r)^2x+\frac{\Pi(z-r)^3}{3}+\varepsilon x\,\mathrm{tang.}\,\omega\,.$$

Facendo in quest'ultima equazione $x=a-r$ si deve aver $y=f$, e quindi

$$\varepsilon f=\frac{\mathrm{P}(a-r)^3}{3}-\Pi(z-r)^2(a-r)+\frac{\Pi(z-r)^3}{3}+\varepsilon(a-r)\,\mathrm{tang.}\,\omega\,.$$

Da queste equazioni si ricaveranno quelle delle curve BN′, N′M′, cambiando P, Π, z, r, tang.ω in P′, Π′, z', $-r$, $-$ tang.ω, l'ultima delle quali dà

$$\varepsilon f=\frac{\mathrm{P}'(a+r)^3}{3}-\Pi'(z'+r)^2(a+r)+\frac{\Pi'(z+r)^3}{3}-\varepsilon(a+r)\,\mathrm{tang.}\,\omega\,.$$

Questa equazione e l'ultima delle precedenti daranno i valori di f e di tang.ω. Sostituendo il valore di tang.ω nelle equazioni precedenti si otterranno le equazioni delle parti BN, NM, dalle quali possono ottenersi quelle delle parti BN′, N′M′ col cambiamento sopra enunciato.

Per trovare la sezione di rottura si osservi che nell'equazione

A, sia caricato in M del peso Π; si chiamerà
a la distanza AB;
a' la distanza AM';
Π' lo sforzo esercitato sull' appoggio M'
ε e ρ avranno i significati indicati n° 359.

---

relativa alla parte NM il valore di $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$ è tanto più grande quanto più piccolo è x; e perciò il solido non può mai rompersi in N. Lo stesso deve dirsi del punto N'. Considerando ora l' equazione della parte BN, e facendo le due ipotesi $x = z - r$, $x = 0$, si ha pel punto N

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-r) - P(z-r),$$

e pel punto B

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-r) - 2\Pi(z-r);$$

e perciò il solido tenderà a rompersi in N o in B, secondo che sarà P minore o maggiore di 2Π.

Per l' altro ramo di curva BN' si ha parimenti pel punto B

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P'(a+r) - 2\Pi'(z'+r);$$

e pel punto N'

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P'(a+r) - P'(z'+r).$$

Il primo valore è identico coll'altro già trovato relativo allo stesso punto B. Si conchiude parimenti, che il solido tenderà a rompersi in B o in N' secondo che sarà P' maggiore o minore di 2Π. Ma quando $P > 2\Pi$ è $P' < 2\Pi'$, e viceversa; dunque la rottura non può mai avvenire in B che è il punto ove passa la risultante de' pesi 2Π, e $2\Pi'$; ma avverrà in N o N' secondo che sarà $P <$ o pur $> 2\Pi$.

Si avrà in primo luogo, per la porzione AM del pezzo,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a-x) - \Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - \Pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = \Pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \Pi'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Si avrà in seguito per la porzione MM′, determinando le costanti in modo che per $x = a$ i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y sieno uguali a quelli che sarebbero dati dalle equazioni precedenti,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \frac{a^2}{2} - \Pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = \Pi\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - \Pi'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

367. Dovendo quest'ultima espressione d'y esser nulla quando $x = a'$, si avrà

$$\Pi' = \Pi \frac{a^2(3a'-a)}{2a'^3}$$

per lo sforzo esercitato sul punto d'appoggio M′. Sostituendo questo valore nelle equazioni precedenti, si troverà per l'ascissa del punto in cui l'ordinata y è la più grande

$$a'\left(1 - \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}}\right);$$

e pel valore di quest'ordinata massima, o della freccia di curvatura del pezzo,

$$\frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{6}(a'-a)\sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}}.$$

368. Il pezzo tende necessariamente a rompersi in A e in M. Al punto A si ha

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi a - \Pi' a' = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2};$$

e al punto M,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi'(a'-a) = -\Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3}.$$

L' equilibrio è espresso all' istante della rottura da quella delle due equazioni

$$\rho = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2},$$

$$\rho = \Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3},$$

di cui il secondo membro ha il più gran valore. Il corpo tende a rompersi in A se la distanza AB è piccola; tende a rompersi in M se AB poco differisce da AM' (*).

369. Se si suppone il peso Π posto nel mezzo dell' intervallo AM', si avrà $a' = 2a$; e scrivendo 2P in vece di Π, verrà

$$\Pi' = \tfrac{5}{8} P$$

per lo sforzo esercitato sul punto d' appoggio. L' ascissa del punto in cui l' ordinata è la più grande sarà

$$2a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right);$$

e il suo valore

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3\sqrt{5}}.$$

(*) La rottura succederà in A o in M secondo che sarà a' maggiore o minore di $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a$.

Paragonando questo risultamento con quello del n° 87, si vede che la freccia di curvatura prodotta dallo stesso peso è più piccola nel rapporto di 1 a $\sqrt{5}$, di quel che sarebbe se le estremità del pezzo fossero posate sopra due appoggi.

L' ordinata del punto medio, in cui è posto il peso, è $\frac{P}{\varepsilon}.\frac{7a^3}{48}$, cioè i $\frac{7}{16}$ di quella che sarebbe nel caso di cui si è parlato.

370. Supponendo sempre il peso Π posto nel mezzo dell' intervallo AM', il pezzo tende a rompersi in A, e il primo valore di ρ del n° 368 dà

$$\rho = P\frac{3a}{4}.$$

Se le due estremità fossero posate sopra due appoggi, si avrebbe $\rho = Pa$. Per conseguenza, quando una delle estremità è incastrata, il pezzo, a forza eguale, può sostenere un peso maggiore nel rapporto di 4 a 3.

Equilibrio di un pezzo incastrato nelle due estremità e caricato di un peso.

371. Si supponga il pezzo AMM' (Fig. 49) caricato in M del peso Π, incastrato orizzontalmente alle due estremità A ed M'; e si osservi che l' effetto dell' incastro in M' è di render orizzontale in questo punto la direzione della tangente alla curva. Ora niente si oppone a quest' effetto prodotto dall' esser questo pezzo posato semplicemente sopra un appoggio in M', prolungato in M'M'' e caricato all' altra estremità M'' di un peso il cui valore è stato convenevolmente determinato. Ciò

posto, si chiamerà

a la distanza AB;

a' la distanza AM';

a'' la distanza AB'';

Π' lo sforzo sull' appoggio M';

Π'' il peso sospeso all' estremità M'';

ε e ρ avranno i significati indicati n° 359.

Si avrà in primo luogo per la porzione AM del pezzo

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a-x)-\Pi'(a'-x)+\Pi''(a''-x);$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi(ax-\tfrac{1}{2}x^2)-\Pi'(a'x-\tfrac{1}{2}x^2)+\Pi''(a''x-\tfrac{1}{2}x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi(\tfrac{1}{2}ax^2-\tfrac{1}{6}x^3)-\Pi'(\tfrac{1}{2}a'x^2-\tfrac{1}{6}x^3)+\Pi''(\tfrac{1}{2}a''x^2-\tfrac{1}{6}x^3).$$

Si ha in seguito per la porzione MM', determinando le costanti in modo che per $x=a$, i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y sieno uguali a quelli che sarebbero dati dalle equazioni precedenti,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi'(a'-x)+\Pi''(a''-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\tfrac{1}{2}a^2-\Pi'(a'x-\tfrac{1}{2}x^2)+\Pi''(a''x-\tfrac{1}{2}x^2)$$

$$\varepsilon y = \Pi(\tfrac{1}{2}a^2x-\tfrac{1}{6}a^3)-\Pi'(\tfrac{1}{2}a'x^2-\tfrac{1}{6}x^3)+\Pi''(\tfrac{1}{2}a''x^2-\tfrac{1}{6}x^3).$$

372. Dovendo il coefficiente $\frac{dy}{dx}$ e l' ordinata y esser zero al punto M', cioè quando $x=a'$, si ha

$$0 = \Pi\tfrac{1}{2}a^2-\Pi'\tfrac{1}{2}a'^2+\Pi''(a'a''-\tfrac{1}{2}a'^2),$$

$$0 = \Pi(\tfrac{1}{2}a^2a'-\tfrac{1}{6}a^3)-\Pi'\tfrac{1}{3}a'^3+\Pi''(\tfrac{1}{2}a'^2a''-\tfrac{1}{6}a'^3);$$

da cui si ricava

$$\Pi' = \Pi\frac{a^2(aa'-2aa''-2a'^2+3a'a'')}{a'^3(a''-a')}, \quad \Pi'' = \Pi\frac{a^2(a'-a)}{a'^2(a''-a')}.$$

Mettendo questi valori nelle formole precedenti, si conoscerà la figura del pezzo (*).

(*) Fatte le enunciate sostituzioni, le equazioni delle parti AM,

373. Se si suppone il peso Π posto nel mezzo dell' intervallo AM', si ha $a' = 2a$, e

$$\Pi' = \Pi \frac{2a'' - 3a}{4(a'' - 2a)}, \quad \Pi'' = \Pi \frac{a}{4(a'' - 2a)}.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni precedenti, e scrivendo 2P invece di Π, si avrà per determinare la figura della prima metà del pezzo,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P\left(\frac{a}{2} - x\right),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Si verifica che le equazioni appartenenti alla seconda metà indicano una figura simmetrica a quella della prima metà (*). L'ordinata del punto medio del pezzo o la freccia di curvatura, è

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{12};$$

MM' saranno rispettivamente

$$\varepsilon y = \frac{\Pi}{6a'^3}(a' - a)^2[3aa'x^2 - (a' + 2a)x^3],$$

$$\varepsilon y = \frac{\Pi}{6a'^3}[-a^3a'^3 + 3a^2a'^3x - 3a^2a'(2a' - a)x^2 + a^2(3a' - 2a)x^3].$$

Queste equazioni non contenendo più a'', fan conoscere che la flessione del solido è indipendente dalla lunghezza della parte, sulla quale dovrebbe intendersi prolungato, per ottenere che la tangente in M' fosse orizzontale.

(*) L'equazione appartenente alla curva della seconda metà è

$$\varepsilon y = P\left(-\tfrac{1}{3}a^3 + a^2x - \tfrac{3}{4}ax^2 + \tfrac{1}{6}x^3\right).$$

Facendo $x = 2a - x'$, cioè trasportando l'origine delle coordinate

e paragonando questo risultamento a quello del n° 87, si vede che quando le estremità sono incastrate la freccia di curvatura è il quarto di quella che ha luogo, quando le estremità sono posate sopra due appoggi.

374. Supponendo sempre il peso Π o 2P posto nel mezzo dell' intervallo AM′, la curvatura è la più grande possibile alle due estremità e al mezzo del pezzo, che perciò tende a rompersi in questi tre punti nel tempo stesso (*). L' equilibrio relativo alla rottura è espresso dall' equazione

$$\rho = \mathrm{P}\,\frac{a}{2}\,;$$

di maniera che il pezzo può sostenere un peso doppio di quello che sosterrebbe se le estremità fossero semplicemente posate sopra degli appoggi (*a*).

---

da A in M′, e prendendo le x positive in senso contrario, si ha un' equazione identica a quella della prima metà AM. Perciò le curve appartenenti alle due metà del solido sono simmetriche.

(*) Facendo $x = 0$ e poi $x = \frac{1}{2}a$ nell' equazione di equilibrio, si trova

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{P}a}{2}\,, \qquad \varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{\mathrm{P}a}{2}\,.$$

Non deve tenersi alcun conto del segno —, di cui è affetto il secondo risultamento, giacchè il segno è relativo al senso di curvatura del solido che è diverso ne' punti A ed M; e si sa già che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo quando la curva rivolge la sua convessità all' asse delle x, e negativo nel caso contrario.

(*a*) Questo risultamento è ammesso generalmente, benchè sia stato stabilito in altro modo; ma è contraddetto da M. Barlow, che nel suo *Essay on the strength and stress of timber*, pag. 132 sostituisce la ragione di 3 a 2 a quella di 2 a 1. La proposizione

Equilibrio di un pezzo sostenuto da tre o da un maggior numero di appoggi.

375. Quando una verga rigida caricata di pesi è sostenuta sopra un numero di punti di appoggio maggiore di due, gli sforzi che ciascun punto di appoggio dee sostenere sono indeterminati fra certi limiti. Questi limiti possono sempre esser fissati coi principî della statica. Ma se si suppone la verga elastica, l'indeterminazione cessa intieramente. Qui considereremo solamente la più semplice quistione di questo genere che possa esser proposta.

Si supporrà il pezzo MM′ (Fig. 50) posato orizzontalmente sopra tre punti di appoggio posti, uno nel mezzo A della lunghezza e gli altri due alle estremità M, M′. Ogni metà del pezzo è caricata nel mezzo N, N′ di un peso Π, Π′. Si tratta di determinare la figura secondo la quale il pezzo si conforma, e gli sforzi esercitati sopra ogni punto d' appoggio. Si chiamerà

---

sulla quale M. Barlow fonda il suo ragionamento, e che è enunciata pag. 115 dell' istessa opera, è inesatta e contraria alla sperienza. Si può osservare, che è difficile nelle sperienze di realizzare l' ipotesi dell' incastro alle due estremità. Per giungervi, bisogna che il pezzo sia prolungato da ogni lato per una lunghezza sufficientemente grande. Le espressioni di Π' e Π'' indicano effettivamente che gli sforzi esercitati sui punti fissi tendono a divenir infiniti, quando la lunghezza sulla quale il pezzo è prolungato diviene nulla. Si possono vedere su questo soggetto le sperienze riportate nel *Traité du mouvement des eaux*, Opere di Mariotte, tomo II, pag. 466.

a la metà AM o AM′ della lunghezza del pezzo;

p, q, q' gli sforzi esercitati in A, M, M′;

ω l'angolo che fa coll'asse Ax la tangente alla curva nel punto A;

ε e ρ avranno i significati indicati n° 359.

Esigendo i principî di statica 1° che la somma de' pesi Π, Π' sia eguale alla somma degli sforzi esercitati sui punti di appoggio; 2° che la somma de' momenti delle forze presi relativamente a un punto qualunque, per esempio al punto A, sia nulla; si hanno prima le due equazioni

$$\Pi + \Pi' = p + q + q', \qquad \Pi - \Pi' = 2(q - q').$$

376. Riguardando in seguito il pezzo come incastrato in A, si avrà per la porzione AN

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{a}{2} - x\right) - q(a - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\left(\frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \,\text{tang.}\,\omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi\left(\frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) - q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x \,.\, \varepsilon \,\text{tang.}\,\omega.$$

Per la porzione NM, determinando le costanti in modo che, per $x = \frac{a}{2}$, i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y sieno uguali a quelli che sarebbero dati dalle equazioni precedenti, si avrà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -q(a - x)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + \Pi\frac{a^2}{8} + \varepsilon \,\text{tang.}\,\omega,$$

$$\varepsilon y = -q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\Pi\frac{a^2}{8} + \varepsilon \,\text{tang.}\,\omega\right)x - \Pi\frac{a^3}{48}.$$

Le equazioni che converrebbero alle parti AN′ e N′M′ del pezzo si dedurranno dalle precedenti, scrivendo Π' in vece di Π, q' invece di q, e cangiando il segno di

tang. ω. Osservando in seguito che le equazioni appartenenti alle parti NM e N'M' debbono dare $y = o$ quando si suppone $x = a$, si avranno le due equazioni

$$o = -q\frac{a^2}{3} + \Pi\frac{5a^2}{48} + \varepsilon \text{ tang.}\omega,$$

$$o = -q'\frac{a^2}{3} + \Pi'\frac{5a^2}{48} - \varepsilon \text{ tang.}\omega.$$

377. Per mezzo di queste equazioni e di quelle del n° 375, si troverà

$$\text{tang.}\omega = \frac{\Pi - \Pi'}{\varepsilon}\cdot\frac{a^2}{32},$$

$$p = \frac{22\Pi + 22\Pi'}{32},$$

$$q = \frac{13\Pi - 3\Pi'}{32},$$

$$q' = \frac{-3\Pi + 13\Pi'}{32};$$

e si conoscerà la figura del pezzo sostituendo questi valori nelle equazioni precedenti. Si vede che il punto d'appoggio A sostiene solo i $\frac{2}{3}$ presso a poco della somma de' pesi di cui il pezzo è caricato. Gli sforzi esercitati sui punti d' appoggio sono indipendenti da ε, in modo che restano gli stessi per pezzi più o meno flessibili.

378. Il pezzo tende necessariamente a rompersi in uno de' punti A, N o N'. Si ha al punto A

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\frac{a}{2} - qa = (3\Pi + 3\Pi')\frac{a}{32};$$

al punto N

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -q\frac{a}{2} = -(13\Pi - 3\Pi')\frac{a}{64};$$

e al punto N'

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -q'\frac{a}{2} = -(-3\Pi + 13\Pi')\frac{a}{64}.$$

La condizione della rottura è espressa da quella delle tre equazioni

$$\rho = (3\Pi + 3\Pi')\frac{a}{32},$$

$$\rho = (15\Pi - 3\Pi')\frac{a}{64},$$

$$\rho = (-3\Pi + 15\Pi')\frac{a}{64},$$

il secondo membro della quale ha il più gran valore.

379. Se i pesi Π e Π' si suppongono eguali, verrà

$$\text{tang.}\,\omega = 0, \qquad p = \frac{22\Pi}{16}, \qquad q = q' = \frac{5\Pi}{16}.$$

380. Adottando la stessa supposizione, il pezzo tende a rompersi al punto A, e l'equilibrio relativo alla rottura è espresso dall'equazione

$$\rho = \frac{3\Pi}{16}a.$$

Ogni metà del pezzo è allora nello stesso caso che se fosse incastrata orizzontalmente in una estremità e sostenuta nell'altra. Il risultamento ottenuto si accorda effettivamente con quello del n° 370, scrivendo $2P$ in luogo di Π e $2a$ in luogo di a.

Osservazione sull' uso che deve farsi de' risultamenti precedenti nelle applicazioni.

381. I risultamenti esposti in questo articolo serviranno ad apprezzare le flessioni de' pezzi caricati orizzontalmente. Nelle formole si sostituiranno in luogo di ε i valori del momento di resistenza alla flessione, dati ni 81 e seg. Per esempio, se la sezione del pezzo è rettangolare si scriverà $E\frac{bc^3}{12}$ in luogo di ε. Il valore di E si ricava

dalle sperienze rapportate n^{i} 94 e seg. Si conoscerà così il grado della flessione del pezzo, in ragione delle dimensioni della sezione.

382. Questi risultamenti serviranno pure ad apprezzare le cariche che potrebbero cagionar la rottura de' pezzi, o le più grandi cariche che si possono far sostener a questi pezzi nelle costruzioni. Si sostituiranno invece di ρ i valori del momento di rottura dati ne' n^{i} 115 e seg. Per esempio, se la sezione del pezzo è rettangolare, si scriverà $R\frac{bc^2}{6}$ invece di ρ. Volendo conoscer le cariche capaci di cagionar la rottura, si attribuiranno a R i valori dedotti dalle sperienze rapportate ne' n^{i} 130 e seg.; e quando si vorranno conoscere le più grandi cariche che si possono far sostener ai pezzi nelle costruzioni, s' impiegheranno i valori di R′ indicati ne' n^{i} 181, 183 e 186.

Addizione.

Essendo frequente nelle costruzioni l' uso delle travi incastrate alle due estremità, crediamo utile aggiunger qualche cosa a quanto si è detto intorno a questo soggetto ne' n^{i} 371 e seg.

Supponiamo che il solido AM M′ (Fig. 49.) cui è applicato il peso Π in M sia di più caricato di pesi uniformemente distribuiti sulla sua lunghezza. Ritenendo i dati del n° 371, l' equazione di equilibrio della parte AM del solido sarà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{a'^2}{2}-a'x+\frac{x^2}{2}\right)+\Pi(a-x)-\Pi'(a'-x)+\Pi''(a''-x);$$

quella della parte MM′ sarà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{a'^2}{2}-a'x+\frac{x^2}{2}\right)-\Pi'(a'-x)+\Pi''(a''-x).$$

Integrando e determinando le costanti nel modo espresso nel n° 371, e poi supponendo $\frac{dy}{dx}=o$, $y=o$ quando $x=a'$, si avranno le

due equazioni di condizione che daranno i valori di Π' e Π''. Facendo per maggior semplicità $a'' = a' + h$, le equazioni suddette saranno

$$o = \frac{pa'^3}{6} + \Pi\tfrac{1}{2}a^2 - \Pi'\tfrac{1}{2}a'^2 + \Pi''(\tfrac{1}{2}a'^2 + a'h),$$

$$o = \frac{pa'^4}{8} + \Pi(\tfrac{1}{2}a^2a' - \tfrac{1}{6}a^3) - \Pi'\tfrac{1}{3}a'^3 + \Pi''(\tfrac{1}{3}a'^3 + \tfrac{1}{2}a'^2h);$$

dalle quali si ottiene

$$\Pi' = \frac{pa'(a'+6h)}{12h} + \Pi\frac{a^2(a'^2+3a'h-2ah-aa')}{a'^3h},$$

$$\Pi'' = \frac{pa'^2}{12h} + \Pi\frac{a^2(a'-a)}{a'^2h}.$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene pure

$$\Pi' = \Pi'' + \frac{pa'}{2} + \frac{\Pi a^2}{a'^3}(3a'-2a).$$

Le equazioni di equilibrio colla sostituzione de' valori di Π' e Π'' diverranno

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2}\left(\frac{a'^2}{6} - a'x + x^2\right) + \frac{\Pi(a'-a)^2}{a'^3}[aa' - (a'+2a)x],$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2}\left(\frac{a'^2}{6} - a'x + x^2\right) + \frac{\Pi a^2}{a'^3}[-a'(2x'-a) + (3a'-2a)x].$$

Le equazioni delle curve delle parti AM, MM' saranno rispettivamente

$$\varepsilon y = \frac{p}{12}\left(\frac{a'^2x^2}{2} - a'x^3 + \frac{x^4}{2}\right) + \frac{\Pi(a'-a)^2}{6a'^3}[3aa'x^2 - (a'+2a)x^3]$$

$$\varepsilon y = \frac{p}{12}\left(\frac{a'^2x^2}{2} - a'x^3 + \frac{x^4}{2}\right)$$

$$+ \frac{\Pi a^2}{6a'^3}[-aa'^3 + 3a'^3x - 3a'(2a'-a)x^2 + (3a'-2a)x^3].$$

Supponiamo ora il peso posto nel mezzo del solido, bisognerà fare $a' = 2a$, $\Pi' = 2P$; e si avrà

$$\Pi' = \frac{pa^2}{3h} + pa + P\frac{a+2h}{2h}.$$

$$\Pi'' = \frac{pa^2}{3h} + \frac{Pa}{2h}$$

$$\Pi' = \Pi'' + pa + P.$$

Le equazioni di equilibrio relative alla prima e alla seconda metà del solido saranno in questa ipotesi

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{a^2}{3}-ax+\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}-x\right),$$

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{a^2}{3}-ax+\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2}a+x\right);$$

Una qualunque di queste due equazioni si converte nell' altra, scrivendovi $2a-x$ invece di x; il che fa conoscere che le due curve sono simmetriche.

Facendo nella prima equazione $x=o$ e poi $x=a$, si trova

$$\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{pa^2}{3}+\mathrm{P}\frac{a}{2}\quad,\quad \varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{pa^2}{6}+\mathrm{P}\frac{a}{2}\right).$$

Il secondo valore di $\varepsilon\,\frac{d^2y}{dx^2}$ (fatta astrazione dal segno) essendo minore del primo, ne risulta che le sezioni d' incastro sono le più deboli, e che in esse il solido tende a rompersi contemporaneamente. Si avrà perciò

$$p=\frac{pa^2}{3}+\mathrm{P}\frac{a}{2}.$$

Se fosse $\mathrm{P}=o$ cioè se fosse il solido caricato solamente di pesi uniformemente distribuiti sulla sua lunghezza, si avrebbe

$$p=\frac{pa^2}{3}.$$

Paragonando questo risultamento a quello del n° 124, si vede che i pesi uniformi di cui si può caricare un solido quando le estremità sono incastrate e quando sono semplicemente appoggiate, sono nel rapporto di 3 a 2.

L' ipotesi fatta nel n° 371 per trovare le condizioni di equilibrio di un solido incastrato nelle due estremità, quella cioè di supporlo prolungato convenientemente in M'', e caricato in questo punto di un peso tale da rendere in M' la tangente orizzontale e l' ordinata eguale a zero, mentre conduce a determinare la curva secondo la quale si conforma il solido e i punti di rottura, non somministra poi le pressioni che questo solido fa sopra i muri ne' quali è incastrato. Se $\mathrm{M}'\,\mathrm{M}''$ fosse la parte incastrata, si po-

trebbe forse suppore che i muri di sostegno ricevessero nello spigolo inferiore M′ una pressione da sopra in sotto rappresentata da Π′ e un altra nell'estremità M″ da sotto in sopra rappresentata da Π″. Per potersi avverare la condizione dell'incastro, bisogna che la parte superiore del muro o pel peso proprio o per la coesione colle altre parti sia tale da resistere alla pressione Π″. È però più naturale supporre che per effetto delle anzidette pressioni la materia del muro riceva una leggiera compressione, e che in conseguenza di ciò una porzione della parte incastrata M′N si appoggi sul muro premendolo da sopra in sotto e l'altra porzione NM″ si appoggi alla parte superiore del muro urtandolo da sotto in sopra. Supporremo inoltre, il che ci sembra più semplice, che queste pressioni eguali a zero in N crescano poi proporzionalmente alla distanza dal punto N. Si chiami

K la pressione massima in M′;

L la pressione massima in M″;

z la distanza M′N;

t la distanza NM″;

Conserviamo inoltre i significati assegnati precedentemente ad a', h, Π', Π'', x, y, ε.

Dovendo per ipotesi esser $z : t :: K : L$, e $z + t = h$, sarà

$$z = \frac{Kh}{K+L}, \quad t = \frac{Lh}{K+L},$$

Sia z' la distanza di un punto qualunque di M′N da M′, la pressione sull'elemento dz' sarà $\frac{K(z-z')dz'}{z}$, e il suo momento rispetto al punto della curva del solido che ha per ascissa x sarà

$$\frac{K(z-z')dz'}{z}(a'+z'-x).$$

Sicchè la somma di tutti i momenti delle forze applicate in M′N sarà

$$\frac{K}{z}\int_0^z (z-z')(a'+z'-x)dz' = \tfrac{1}{3}\,Kz(a'+\tfrac{1}{3}z-x).$$

Parimenti, chiamando t' la distanza di un punto qualunque di NM″

da N, la forza corrispondente all' elemento dt' sarà $\frac{\mathrm{L}\,t'dt'}{t}$, e il suo momento rispetto al punto che ha per ascissa x sarà

$$\frac{\mathrm{L}t'dt'}{t}(a'+z+t'-x).$$

Per conseguenza la somma de' momenti di tutte queste forze sarà

$$\frac{\mathrm{L}}{t}\int_0^t t'(a'+z+t'-x)dt' = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}t(a'+h-\tfrac{1}{3}\,t-x).$$

Queste somme, mettendovi i valori di z e t, divengono rispettivamente

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{K}^2h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}\left(a'+\tfrac{1}{3}\,\frac{\mathrm{K}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}-x\right),\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{L}^2h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}\left(a'+h-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{L}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}-x\right).$$

Dovendo queste forze co' loro momenti produrre lo stesso effetto che producono i momenti delle forze Π' e Π'', potrà farsi

$$\Pi'(a'-x)-\Pi''(a'+h-x) =$$
$$\frac{\mathrm{K}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})}\left(a'+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{K}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}-x\right)-\frac{\mathrm{L}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})}\left(a'+h-\tfrac{1}{3}\,\frac{\mathrm{L}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}-x\right).$$

Questa equazione, che deve verificarsi qualunque sia x, sommini strerà le due equazioni seguenti:

$$\Pi'a'-\Pi''(a'+h) =$$
$$\frac{\mathrm{K}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})}\left(a'+\tfrac{1}{3}\,\frac{\mathrm{K}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}\right)-\frac{\mathrm{L}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})}\left(a'+h-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{L}h}{\mathrm{K}+\mathrm{L}}\right),$$
$$\Pi'-\Pi'' = \frac{\mathrm{K}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})}-\frac{\mathrm{L}^2h}{2(\mathrm{K}+\mathrm{L})},$$

dalle quali si ricaveranno i valori di K ed L. La seconda somministra subito

$$\mathrm{K} = \mathrm{L}+\frac{2(\Pi'-\Pi'')}{h}$$

e poscia, facendo l' eliminazione, si avrà

$$\mathrm{K} = \frac{2(2\Pi'+\Pi'')}{h},\quad \mathrm{L} = \frac{2(\Pi'+2\Pi'')}{h}.$$

Sostituendo questi valori di K ed L nelle espressioni di z e t, si trova

$$z = \frac{h}{3}\cdot\frac{2\Pi'+\Pi''}{\Pi'+\Pi''},\quad t = \frac{h}{3}\cdot\frac{\Pi'+2\Pi''}{\Pi'+\Pi''}.$$

Chiamando R ed R′ la somma delle pressioni esercitate rispettivamente sopra M′N , NM″ , sarà

$$R = \tfrac{1}{2} Kz = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(2\Pi' + \Pi'')^2}{\Pi' + \Pi''},$$

$$R' = \tfrac{1}{2} Lt = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{(\Pi' + 2\Pi'')^2}{\Pi' + \Pi''}.$$

In queste espressioni bisognerà sostituire per Π' , Π'' i valori corrispondenti al caso che si considera.

Supponiamo che si tratti di un solido caricato di un peso 2P nel mezzo, e di pesi uniformemente distribuiti sulla sua lunghezza. Sostituendo i valori di Π' e Π'' relativi a questo caso e che son riportati di sopra , si otterrà

$$R = \frac{1}{4h} \cdot \frac{[2pa(a+2h) + P(3a+4h)]^2}{pa(2a+3h) + 3P(a+h)},$$

$$R' = \frac{1}{4h} \cdot \frac{[2pa(a+h) + P(3a+2h)]^2}{pa(2a+3h) + 3P(a+h)}.$$

Se fosse $p = o$, cioè se il solido fosse caricato solamente del peso 2P, si avrebbe

$$R = P\frac{(3a+4h)^2}{12h(a+h)}, \qquad R' = P\frac{(3a+2h)^2}{12h(a+h)}.$$

E se si avesse $P = o$, sarebbe

$$R = \frac{pa}{h} \cdot \frac{(a+2h)^2}{2a+3h}, \quad R' = \frac{pa}{h} \cdot \frac{(a+h)^2}{2a+3h}.$$

I valori ottenuti per R ed R′ sono in generale maggiori de' valori di Π' e Π''; sarà per conseguenza più sicuro calcolar le pressioni con queste formole, anzi che prender per queste pressioni i valori stessi di Π' e Π''.

ARTICOLO II.

Della resistenza di un pezzo prismatico posto verticalmente e caricato sull'estremità superiore.

383. Si considera un pezzo AM (Fig. 51) la cui estremità inferiore A è posata sopra un piano orizzontale immobile. L' estremità superiore M è posta nella stessa verticale in cui trovasi l' estremità inferiore, ed è caricata di un peso Q. Si tratta di trovare le condizioni della flessione del pezzo cagionata dall' azione del peso. Si chiamerà

a la distanza AM delle estremità ;

s la lunghezza AmM del pezzo;

ω l' area della sezione trasversale del pezzo ;

x, y l' ascissa Ap e l' ordinata pm di un punto qualunque della curva formata dall' asse del pezzo ;

ε e ρ avranno i valori indicati n° 359.

L' equazione che esprime le condizioni dell' equilibrio è sempre fondata sul principio, che il momento della resistenza alla flessione dev'esser eguale in ogni punto dell'asse del pezzo, al momento della forza dalla quale il pezzo è sollecitato, preso per rapporto a questo punto. Osservando che la curva di quest' asse presenta la sua concavità all' asse delle ascisse, quest' equazione di equilibrio sarà

$$-\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q\,y\,,$$

di cui l' integrale completo è

$$y = A \operatorname{sen}.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.x + B \cos.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.x\,,$$

essendo A e B due costanti arbitrarie. Siccome quando $x = 0$ deve aversi $y = 0$, la costante B è nulla. La

costante A rappresenta evidentemente l' ordinata massima della curva che è supposta piccolissima, e che noi indicheremo con f. Quindi scriveremo

$$y = f \operatorname{sen} . \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} . x$$

384. Si deve aver $y = 0$ quando $x = a$. Se dunque f non è nulla, è necessario che sia

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} . a = i\pi, \qquad \text{d'onde } Q = i^2 \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2},$$

essendo i un numero intero qualunque, e π il rapporto della circonferenza al diametro; ciò che determina il valore del peso Q che può mantener piegato il pezzo. Questo valore, restando le altre cose eguali, è in ragion reciproca del quadrato della lunghezza del pezzo.

385. Sostituendo il valore di Q nell' equazione precedente, in cui la freccia f resta indeterminata, si ha

$$y = f \operatorname{sen} . i\pi . \frac{x}{a};$$

$$s = a \left\{ 1 + \left(\frac{i\pi f}{2a} \right)^2 \right\},$$

$$f = \frac{2}{i\pi} \sqrt{a(s-a)}.$$

386. Dando successivamente a i i valori interi 1, 2, 3, ec. la curva rappresentata dall' equazione prenderà diverse figure. La fig. 51 corrisponde al caso di $i = 1$ e $Q = \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$. La fig. 52 corrisponde al caso in cui $i = 2$ e $Q = 4\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$: un pezzo prenderebbe questa figura se il mèzzo N fosse mantenuto nella linea verticale che ne contiene le due estremità. La fig. 53 corrisponde al caso in cui $i = 3$ e $Q = 9\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$: un pezzo si disporrebbe secondo que-

sta figura, se i punti situati al terzo e ai due terzi della lunghezza fossero mantenuti nella verticale che ne contiene le estremità. E così di seguito.

387. Quando un pezzo compresso nel senso della lunghezza prende una flessione piccolissima, si deve concepire 1° che tutte le fibre longitudinali sostengano per effetto della pressione Q supposta uniformemente ripartita su tutta la sezione trasversale, uno sforzo $\frac{Q}{\omega}$ sull' unità di superficie, sforzo che produce in queste fibre una diminuzione di lunghezza espressa dalla frazione $\frac{Q}{E\omega}$, avendo E il significato indicato nel n° 77; 2° che per effetto solo della flessione le fibre sarebbero allungate dal lato della faccia convessa e contratte dal lato della faccia concava, di una quantità espressa per una fibra qualunque (conforme a quel che si è veduto n° 77) dalla frazione $v\frac{d^2y}{dx^2}$. Questi due effetti avendo luogo simultaneamente, la maggior compressione alla quale le fibre sieno esposte è

$$\frac{Q}{E\omega} + v'\frac{d^2y}{dx^2};$$

indicando con v' la distanza dall' asse di equilibrio della fibra posta dalla parte della faccia concava che è la più lontana dall' asse, e mettendo per $\frac{d^2y}{dx^2}$ il massimo valore che questo coefficiente differenziale può prendere in tutta l' estensione della curva.

Il limite della carica che si può far sostenere a un pezzo essendo determinato dal grado di compressione o di stensione delle fibre che risulta dall' azione di questa carica, conforme a quel che si è detto n° 354, si

vede che indicando (come si è fatto nel n° 181) per R′ il massimo sforzo al quale le fibre debbono esser esposte sull' unità di superficie, si deve scrivere

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \nu' \frac{d^2y}{dx^2},$$

equazione che determinerà in generale, come si vedrà negli articoli seguenti, il valore del peso di cui si può caricare il pezzo.

388. Nel caso particolare di cui si tratta, questa determinazione non può esser effettuata, perchè restando indeterminata la freccia f, la soluzione non dà alcuna relazione tra $\frac{d^2y}{dx^2}$ e Q. Questa indeterminazione sussiste ancora pe' casi di equilibrio esaminati ne' n^i seguenti. Indicheremo alla fine dell' articolo il modo come valutare la resistenza de' pezzi nelle applicazioni.

Equilibrio di un pezzo caricato verticalmente, allorchè l'estremità inferiore è incastrata e la superiore è libera.

389. In questo caso (Fig. 54), conservando le denominazioni del n.° 383, si ha

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q(f-y),$$

rappresentando f l'ordinata BM del punto estremo. L' integrale completo è

$$y = f + A \operatorname{sen.} \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.x + B \cos. \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}x,$$

essendo A e B le due costanti arbitrarie. Siccome si deve avere $y = o$ e $\frac{dy}{dx} = o$ quando $x = o$, la costante A è

nulla, e $B = -f$. L'equazione della curva è dunque

$$y = f\left(1 - \cos.\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.x\right).$$

390. Si deve avere $y = f$ quando $x = a$. Per conseguenza

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}.a = \frac{(2i+1)\pi}{2}, \quad \text{d'onde} \quad Q = \frac{(2i+1)^2\pi^2}{4}.\frac{\varepsilon}{a^2}.$$

391. L' equazione della curva diviene

$$y = f\left(1 - \cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}.\frac{x}{a}\right),$$

e dà

$$s = a\left\{1 + \left(\frac{(2i+1)\pi.f}{2.2a}\right)^2\right\},$$

$$f = \frac{2.2}{(2i+1)\pi}\sqrt{a(s-a)}.$$

392. La fig. 54 corrisponde al caso in cui $i = 0$ e $Q = \frac{\pi^2}{4}.\frac{\varepsilon}{a^2}$. La fig. 55 corrisponde al caso di $i = 1$ e $Q = \frac{9\pi^2}{4}.\frac{\varepsilon}{a^2}$: le ordinate de' punti situati a $\frac{1}{3}$ e ai $\frac{2}{3}$ della lunghezza del pezzo sono eguali a f e $2f$. La fig. 56 corrisponde al caso in cui $i = 2$ e $Q = \frac{25\pi^2}{4}.\frac{\varepsilon}{a^2}$: le ordinate de' punti situati a $\frac{1}{5}$ e ai $\frac{3}{5}$ della lunghezza del pezzo sono eguali a f; quella del punto situato ai $\frac{2}{5}$ è uguale a $2f$, e quella del punto situato a' $\frac{4}{5}$ è nulla. E così di seguito.

A lunghezza eguale, il peso che può far piegare il pezzo nel modo indicato fig. 54 è quattro volte minore di quello che può farlo piegare nel modo indicato fig. 51.

Equilibrio di un pezzo caricato verticalmente, allorchè l' estremità inferiore è incastrata e l' estremità superiore mantenuta in una stessa verticale.

393. In questo caso l' equazione di equilibrio è quella del n° 383; ma non si può soddisfare a questa equazione colla condizione che l' espressione di y dia nel tempo stesso $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$ quando $x = 0$. Risulta da ciò che un pezzo, nel caso di cui parliamo, non può esser mantenuto piegato. Ma se si suppone che il peso Q in luogo di agire esattamente nel senso dell' asse del pezzo, agisca a una distanza f da quest' asse, per quanto piccola si vorrà (Fig. 57), l' equazione di equilibrio sarà quella del n° 389, e il valore di y sarà rappresentato dall' equazione trovata in questo n°.

Questa equazione dovendo dare $y = 0$ quando $x = a$, si ha

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} . a = 2i\pi, \quad \text{d' onde} \quad Q = 4i^2\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

L' equazione della curva è

$$y = f\left(1 - \cos . 2i\pi \frac{x}{a}\right);$$

e bisogna osservare che questa equazione dà egualmente $\frac{dy}{dx} = 0$ quando $x = a$, per modo che la tangente della curva è necessariamente verticale all' estremità superiore come pure all' inferiore. La fig. 57 corrisponde al caso in cui $i = 1$ e $Q = 4\pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$: l' ordinata del punto medio ovvero la freccia di curvatura, è uguale a $2f$. Il valore del peso Q è quadruplo di quello che avrebbe

*

luogo se questo peso agisse nel senso dell' asse del pezzo, e se le estremità non fossero incastrate.

Il pezzo rappresentato dalla fig. 57 è nello stesso stato di equilibrio, che i $\frac{4}{5}$, a contar dal piede, del pezzo rappresentato dalla fig. 56: se si scrive effettivamente $\frac{4}{5}$ di a in luogo di a, nell' espressione precedente di Q, si ritroverà il valore indicato n° 392 pel caso della fig. 56.

Sperienze sulla resistenza de' pezzi di legname caricati verticalmente.

394. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Aubry (*a*) sopra pezzi di legname di quercia posti verticalmente e caricati sull' estremità superiore.

LUNGHEZZA de' pezzi.	RIQUADRATURA de' pezzi.	CARICA che ha cagionata la prima inflessione.	CARICA che ha cagionata la rottura.
pollici.	pollici.	libbre.	libbre.
18	$\frac{1}{2}$	80	205
36	$\frac{1}{2}$	20	54
18	1	534	638

395. Risultamenti delle sperienze di M. Girard, sopra pezzi di legname di quercia posti verticalmente e caricati sull' estremità superiore (*b*).

(*a*) *Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques*, pag. 33.

(*b*) *Traité analytique de la résistance de solides et des solides d' égale résistance*, pag. 138 e tav. I.

LUNGHEZZA de' pezzi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	PRIMA freccia di curvatura osservata.	CARICA che ha cagionato la prima inflessione.	CARICA che ha cagionato la rottura.
metri.	metro.	metro.	metro.	chilogrammi.	chilogrammi.
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	42514
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	
2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	33120
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
1,95	0,156	0,133	0,0879	17322	
1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	32997
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,126	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	37305
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

I pezzi s' incurvano generalmente sulle due faccie. Nella tavola si è scritta la più grande delle due prime freccie di curvatura osservate.

596. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Lamandé sopra pezzi di quercia di Champagne molto secca, posti verticalmente e caricati sull' estremità superiore (*a*).

(*a*) *Traité de la construction des ponts, par M. Gauthey*, tomo II, pag. 48.

LUNGHEZZA de' pezzi.	RIQUADRATURA de' pezzi.	PRIMA freccia di curvatura osservata.	CARICA che ha cagionato la prima inflessione.	CARICA che ha cagionato la rottura.
metro.	metro.	metro.	chilogrammi.	chilogrammi.
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3559
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9246	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	27211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40495
1,948	0,108	0,005	9663	27629

397. Risultamenti medî delle sperienze fatte da M. Rondelet (*a*), sopra pezzi posti verticalmente e caricati sull' estremità superiore. Questi pezzi avevano tutti un pollice di riquadratura

SPECIE DI LEGNAME.	LUNGHEZZA de' pezzi.	CARICA che ha cagionato la rottura.
	pollici.	libbre.
Quercia.....	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Abete.....	1	7490
	12	6355
	24	3429
	36	2575

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 68.

L' autore ricava da queste sperienze la seguente regola. Prendendo per unità la forza necessaria per schiacciare un cubo, che è di 44 libbre a linea quadrata della sezione trasversale per la quercia, 52 libbre per l' abete (n° 12), la forza necessaria per rompere un pezzo di cui l' altezza è

12 volte la grossezza, sarà $\frac{5}{6}$
24..... $\frac{1}{2}$
36..... $\frac{1}{3}$
48..... $\frac{1}{6}$
60..... $\frac{1}{12}$
72..... $\frac{1}{24}$

Secondo lo stesso autore, un pezzo di legname caricato verticalmente può cedere piegando quando la lunghezza sorpassa 10 volte la riquadratura.

Sperienze sulla resistenza de' pezzi di ferro da fucina caricati verticalmente.

398. Sperienze fatte alla scuola di ponti e strade sopra pezzi di ferro da fucina, posati verticalmente, e caricati sull' estremità superiore (*a*).

LUNGHEZZA de' pezzi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA che ha cagionato la rottura.
metro.	millimetri.	millimetri.	chilogrammi.
0,244	20,3	20,3	10126
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,323	13,5	13,5	3951

(*a*) Gauthey, *Traité de la construction des ponts*, tomo II, pag. 152.

399. Dietro un numero grandissimo di sperienze fatte da M. Rondelet (*a*), sopra pezzi di 6 a 12 linee di riquadratura e da 1 $\frac{1}{2}$ poll. a 20 piedi di lunghezza, questo architetto stabilisce che la carica necessaria per comprimere un cubo di ferro da fucina essendo di 512 libbre a linea quadrata della sezione trasversale, la carica necessaria a far piegare e rompere una barra la cui lunghezza è uguale a 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243 volte la riquadratura, è 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 1 libbre, a linea quadrata della sezione trasversale.

400. Sperienze fatte da M. Duleau, sopra pezzi di ferro da fucina posati verticalmente e caricati sull' estremità superiore (*b*).

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 522.

(*b*) *Essai théorique et expérimental sur la resistance du fer forgé*, pag. 26.

PEZZI SOTTOMESSI ALL' ESPERIENZA.	LUNGHEZZA de' pezzi.	LARGHEZZA de' pezzi.	GROSSEZZA de' pezzi.	CARICA che ha cagionato la flessione.
	metri.	millimetri.	millimetri.	chilogrammi.
Ferro del Perigord. La sezione è un triangolo equilatero di $0^m,038$ di lato	3,02			860
Idem	2,01	30	11	190
Idem, dolce (destinato per ferri di cavalli)	2,01	70	11,2	520
Lo stesso pezzo, fissato nel mezzo				1945
Ferro del Perigord (come è stato trovato nella fucina)	2,02	45	12	500
Ferro del Perigord	2,01	40	11,5	260
Lo stesso pezzo, fissato nel mezzo.....				900
Ferro del Perigord (come è stato trovato nella fucina).....	2,01	58	15	1000
Idem.....	3,02	25	15	180
Idem.....	3,02	39	19,6	780
Idem.....	2,01	60	20	2400
Idem.....	3,02	60	20	1200
Idem	3,02	39	24,5	1320
Idem	3,02	31	31	2000
Ferro tondo di Bilbao di $0^m,0318$ di diametro ..	3,02			1285

Il risultamento generale di queste osservazioni è che calcolando i valori delle cariche che cagionano la flessione dietro la formola $Q = \pi^2 \frac{\epsilon}{a^2}$ (nella quale si metterebbe per ϵ, $E\frac{bc^3}{12}$ per un pezzo rettangolare, ed $E\frac{\pi r^4}{4}$ per un pezzo cilindrico, facendo $E = 20000000000^{ch.}$) si trovano de' valori più piccoli di quelli dati dalla sperienza, nel rapporto di 7 a 8 circa (*a*). L' autore at-

(*a*) *Idem*, pag. 24.

tribuisce in parte questa differenza all' attrito della leva impiegata per trasmetter la pressione.

Sperienze sulla resistenza de' pezzi di ferro fuso, premuti nel senso della lunghezza.

401. Si possono vedere intorno a questo soggetto le sperienze di M. G. Rennie, di sopra riportate, n° 19. Secondo altre sperienze di M. Reynolds (*a*) fatte sulla ghisa dolcissima, due barre d' un pollice inglese quadrato e di 3 piedi di lunghezza, con una estremità posata sopra una barra orizzontale, colla quale formavano un angolo di 45° appoggiandosi l' una contro l' altra colle estremità superiori, hanno sostenuto sopra queste estremità una carica di 1568 libbre avoir-du-poids, che produceva nel senso di ciascuna barra uno sforzo di 11087 libbre.

In un altro saggio, due barre simili ma poste in modo da formare colla barra orizzontale degli angoli di $22^{\circ}\frac{1}{2}$, hanno sostenuto sulle estremità superiori una carica di 8960 libbre da produrre nel senso di ogni barra uno sforzo di 11709 libbre.

Osservazioni sull' uso che deve farsi de' risultamenti precedenti nelle applicazioni.

402. I risultamenti esposti ne' n^{i} 383 e seg. suppongono essenzialmente la forza rappresentata con Q diretta nel senso dell' asse del pezzo, o almeno nel piano verticale che passa pel detto asse, perpendicolarmente al

---

(*a*) *Banh's on the power of machines*, pag. 89.

quale la flessione si opera. In realtà quando un pezzo è caricato verticalmente, il peso ordinariamente è ripartito su tutta l' estensione della sezione trasversale. Affinchè dunque l' esperienza fosse esattamente d' accordo con questi risultamenti, bisognerebbe che i pezzi fossero terminati alle estremità o in una punta o in uno spigolo.

Nell' esporre questi risultamenti si è supposto determinato il senso della flessione del pezzo, e si è rappresentato per ε il valore del momento di resistenza alla flessione che in conseguenza doveva aver luogo e che si calcolerebbe dietro la figura del pezzo colle regole de' n^i 80 e seg. Quando un pezzo è caricato sull' estremità superiore, il senso della flessione in generale non è determinato. Egli è naturale lo ammettere che il pezzo piegherà nella direzione per la quale il valore del momento ε è il più piccolo possibile. Questo valore è lo stesso in tutte le direzioni, se la sezione trasversale è un cerchio, del pari che se è un quadrato, siccome si è veduto n° 83. Nel caso d' una sezione rettangolare, il più piccolo valore del momento di resistenza alla flessione corrisponde al caso in cui il pezzo piega nel senso del lato minore. Nelle sperienze i pezzi a base quadrata piegano indifferentemente nel senso della diagonale o de' lati. Anche i pezzi a base rettangolare, purchè tra i due lati della sezione non vi sia una differenza grandissima, non sempre si piegano esattamente nel senso del lato minore, essendo ordinariamente determinata la direzione della flessione o da qualche difetto d' omogeneità nel pezzo, o dal modo come la pressione si esercita alle estremità.

Queste osservazioni indicano per quali ragioni le sperienze conosciute non danno sempre pel peso che può far piegare un pezzo a base rettangolare caricato vertical-

mente, un valore conforme a quello che si calcolerebbe dalla formola $Q = \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$, supponendo la flessione aver luogo nel senso del lato minore della sezione trasversale. Ma quando si prendono le precauzioni necessarie per accordare le circostanze della sperienza colle ipotesi sulle quali le formole sono fondate, il risultamento è allora esattamente rappresentato da questa formola.

403. Riguardo alla carica che si può far sostenere ai pezzi compressi nel senso della loro lunghezza, si osserverà in primo luogo che il pezzo cederà necessariamente sotto una carica Q data dall' espressione

$$Q = \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2},$$

che pel caso di una sezione rettangolare diviene

$$Q = E \frac{\pi^2 . bc^3}{12 a^2}.$$

Ma questa espressione aumenta rapidamente a misura che la lunghezza a del pezzo diminuisce. In generale i pezzi impiegati a questo modo nelle costruzioni son troppo corti, avuto riguardo alla loro grossezza, per presentare il genere di flessione al quale si applicano i risultamenti de' n^{i} 383 e seg. Supponendo $E = 1\,000\,000\,000^{ch.}$ pel legname di quercia, $E = 20\,000\,000\,000^{ch.}$ pel ferro di fucina; e paragonando i valori dati da questa formola coi risultamenti rapportati secondo Rondelet ne' n^{i} 397 e 399, si troverà che la formola precedente dà de' valori più grandi di questi risultamenti, quando la grossezza c del pezzo supera il $\frac{1}{20}$ circa della lunghezza a. Per conseguenza pe' pezzi la cui lunghezza non è uguale a 20 volte la grossezza, cioè nella maggior parte de' casi che si presentano nelle costruzioni, la resistenza non dev' esser

determinata colla formola precedente, ma dietro la considerazione del peso che potrebbe schiacciare il pezzo.

Il peso che deve schiacciare o comprimere un pezzo la cui lunghezza è uguale a una o due volte la grossezza, può esser valutato per ogni millimetro quadrato della sezione trasversale a

3 ch.	pel legname di quercia e di abete,
40	ferro da fucina,
100	ferro fuso.

Si conchiude dalle sperienze sopra riferite: 1° Che pel legname la valutazione precedente dev' esser ridotta a' $\frac{5}{6}$ quando la lunghezza del pezzo è uguale a 12 volte la grossezza, e a metà quando è uguale a 24 volte la grossezza;

2° Che pel ferro di fucina la valutazione precedente dev' esser ridotta ai $\frac{5}{8}$ quando la lunghezza è uguale a 12 volte la grossezza, e a metà quando è uguale a 24 volte la grossezza;

3° Che pel ferro fuso la valutazione precedente dev' esser ridotta ai $\frac{2}{3}$ presso a poco quando la lunghezza è quadrupla della grossezza, a metà circa quando è ottupla, e a $\frac{1}{15}$ quando la lunghezza è uguale a 36 volte la grossezza.

Le sperienze conosciute non danno i mezzi di valutare con esattezza la resistenza ne' casi intermedî diversi da quelli che abbiamo specificati.

404. Quanto ai pezzi la cui lunghezza sorpassasse 20 volte circa la grossezza, per valutare la resistenza si può far uso delle formole de' n^{i} 386 e seg. colla certezza che questa valutazione non sorpasserà i risultamenti dati dalle sperienze.

405. Quando nelle applicazioni si sarà valutata, conforme ai due n^{i} precedenti, la resistenza che può presentare

un pezzo compresso verticalmente, per ricavarne il massimo peso di cui si possa caricarlo nelle costruzioni, si dovranno ridurre i risultamenti a $\frac{1}{10}$ circa per lo legname, $\frac{1}{4}$ o a $\frac{1}{5}$ pel ferro da fucina o fuso.

ARTICOLO III.

Della resistenza di un pezzo prismatico caricato verticalmente, quando la direzione del peso è distante dall' asse del pezzo.

406. Sia AM un pezzo verticale (Fig. 58) incastrato all' estremità inferiore, che sostiene il peso Π sospeso all' estremità della traversa MC connessa in modo a formar sempre col pezzo AM un angolo retto. L' azione del peso comprime il pezzo verticale nel senso MA, e tende a farlo piegare e rompere. Si chiamerà

a la distanza AB;

l la distanza MC;

ω l' area della sezione trasversale del pezzo;

x, y l' ascissa Ap e l' ordinata mp di un punto qualunque m della curva del pezzo;

f l' ordinata MB del punto estremo;

ε avrà il significato indicato n° 80.

L' equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi (l + f - y) ;$$

e l' integrale di questa equazione (che deve dare $y = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$ quando $x = 0$) è

$$y = (l + f) \left(1 - \cos . \; x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right).$$

Si deve avere $y = f$ quando $x = a$: dunque

$$\frac{l}{l+f} = \cos . a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}},$$

d' onde

$$f = l\left(\frac{1}{\cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}\right)$$

e

$$\Pi = \varepsilon \left\{\frac{\text{arc}\left(\cos . = \frac{l}{l+f}\right)}{a}\right\}^2.$$

L' equazione della curva è

$$y = l.\frac{1 - \cos . x\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}{\cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}.$$

Si deve metter nell' espressione di Π il più piccolo degli archi il cui coseno è uguale $\frac{l}{l+f}$, a meno che non vi sieno certi punti del pezzo AB mantenuti fissi (*). La

---

(*) Chiamando A il più piccolo arco che ha per coseno $\frac{l}{l+f}$, dall' equazione

$$\frac{l}{l+f} = \cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}$$

si ricava

$$a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} = \text{A} + 2i\pi,$$

essendo i un numero intero; e quindi

$$\Pi = \varepsilon\left(\frac{\text{A} + 2i\pi}{a}\right)^2.$$

L' equazione della curva, colla sostituzione di questo valore di Π, diviene

$$y = (l+f)\left[1 - \cos . \frac{x}{a}(\text{A} + 2i\pi)\right].$$

freccia di curvatura prodotta da un peso dato è propor

Facendo $i = o$, $i = 1$, $i = 2$, ec. si hanno diverse curve che conviene esaminare.

Osserveremo prima di tutto che siccome il coseno di un arco è sempre minore di 1, le y non possono mai divenir negative, e perciò niuna di queste curve può tagliar l'asse delle x.

Differenziando l'equazione della curva, e facendo $\frac{dy}{dx} = 0$, si ha

$$\text{sen.}\frac{x}{a}(A+2i\pi)=0\,, \quad \text{d'onde} \quad \frac{x}{a}(A+2i\pi)=k\pi\,,$$

essendo k un numero intero; e i punti ove la tangente è parallela all' asse delle x corrispondono alle ascisse

$$x = \frac{k\pi . a}{A+2i\pi}.$$

Il numero k è determinato dalla condizione che la quantità $\frac{k\pi}{A+2i\pi}$ sia minore di 1; perciò potrà farsi k eguale o minore di i. Le ordinate corrispondenti a questi punti sono massime o minime secondo che k è impari o pari. Le ordinate massime son tutte eguali a $2(l+f)$, e le minime son tutte zero. In questi ultimi punti la curva tocca l'asse, e si richiedono nel solido tanti punti fissi, oltre l' incastro nell' origine, quante unità contiene i.

L' ipotesi $i = o$ corrisponde al caso esaminato nel testo.

Se $i = 1$, sarà

$$y=(l+f)\left[1-\cos.\frac{x}{a}(A+2\pi)\right].$$

e si potrà fare $k = o$, $= 1$, $= 2$. L' ordinata corrispondente ad $x = \frac{\pi}{A+2\pi}\, a$, minore di $\frac{1}{2}a$, è $2(l+f)$; e quella corrispondente a $x = \frac{2\pi}{A+2\pi}\, a$ è zero. Si richiede che questo punto sia fisso affinchè il solido possa piegarsi secondo questa curva. In questo caso

zionale alla distanza MC. Il peso capace di far prendere al pezzo una data freccia di curvatura è reciproco al quadrato della lunghezza.

407. La quistione precedente differisce da quelle trattate ne' n^{i} 383 e seg., perchè in questo caso si ottiene una relazione tra 'l peso Π di cui è caricato il pezzo, e la freccia di curvatura f prodotta dall' azione di esso peso; il che permette di determinare, conforme a ciò che è stato detto n° 387, il limite degli sforzi a' quali si può esporre il pezzo in una costruzione. Avendo E il significato indicato n° 77, $\frac{\Pi}{E\omega}$ rappresenterà la compressione delle fibre risultante dall' azione del peso Π. Indicando di più, come al n° 113, con v' la distanza dall' asse di equilibrio della fibra estrema che è la più compressa, la maggior compressione delle fibre risultante dalla flessione

---

si ha $\Pi = \varepsilon\left(\frac{A+2\pi}{a}\right)^2$. La curva sarà rappresentata dalla fig. 1 (Tav. agg.)

Facendo $i = 2$, si ha

$$y = (l+f)\left[1 - \cos.\frac{x}{a}(A+4\pi)\right],$$

e potrà farsi $k = 0$, $= 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$. Facendo per brevità $\frac{\pi a}{A+4\pi} = m$, quantità minore di $\frac{1}{4}a$, i punti corrispondenti alle ascisse m e $3m$ hanno per ordinata $2(l+f)$, e quelli corrispondenti alle ascisse $2m$ e $4m$ hanno per ordinata zero. Si richiede che questi due punti sien mantenuti fissi, e risulta $\Pi = \varepsilon\left(\frac{A+4\pi}{a}\right)^2$. La fig. 2 (Tav. agg.) rappresenta la curva che prende il solido.

Così può continuarsi, supponendo $i = 3$, $i = 4$, ec.

del pezzo sarà espressa per un punto qualunque, come si vede dietro il n° 77, da $v' \frac{d^2y}{dx^2}$, quantità di cui il valor massimo, che ha luogo al punto A, è $\frac{v'\Pi l}{\varepsilon \cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}$.

Dunque il massimo accorciamento delle fibre è

$$\Pi\left(\frac{1}{E\omega}+\frac{v'l}{\varepsilon \cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}\right).$$

Per conseguenza, se si vuole che il massimo sforzo al quale le fibre sono esposte sull' unità di superficie non sorpassi un certo limite, rappresentato come al n° 181 da R', bisognerà che questo massimo accorciamento non sorpassi la frazione $\frac{R'}{E}$. Il valore di Π dunque non dovrà sorpassare quello che soddisfà all' equazione

$$\frac{R'}{E}=\Pi\left(\frac{1}{E\omega}+\frac{v'l}{\varepsilon \cos . a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}\right).$$

I valori da attribuirsi al peso R' pe' diversi materiali sono stati indicati n^i. 181 e seg.

408. Se la sezione trasversale del pezzo è un rettangolo di cui la larghezza è b e l' altezza è c, si ha $\omega = bc$, $\varepsilon = E\frac{bc^3}{12}$, $v' = \frac{c}{2}$. L' equazione precedente diviene

$$R'=\frac{\Pi}{bc^2}\left(c+\frac{6l}{\cos . a\sqrt{\frac{12\Pi}{Ebc^3}}}\right).$$

La frazione $\frac{12\Pi}{Ebc^3}$ sarà ordinariamente assai picciola, e per conseguenza questa equazione differirà pochissimo da

$$R'=\frac{\Pi}{bc^2}(c+6l), \quad \text{d' onde} \quad \Pi=\frac{R'bc^2}{c+6l}.$$

409. Si supporrà ora che l'estremità superiore del pezzo è fissa e incastrata (Fig. 59), e che il peso Π gli fa sostenere una tensione longitudinale nel tempo stesso che lo fa piegare. In questo caso, conservando le denominazioni del n° 406, l'equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(l - f + y);$$

e supponendo per brevità $\frac{\Pi}{\varepsilon} = r^2$, si avrà per l'integrale

$$l - f + y = Ae^{rx} + Be^{-rx},$$

rappresentando e la base de' logaritmi iperbolici, A e B due costanti arbitrarie.

Dovendo questa equazione dare al punto A, $x = o$, $y = o$, e $\frac{dy}{dx} = o$; e al punto M, $x = a$, $y = f$, si ha

$$\begin{aligned} l - f &= A + B, \\ o &= A - B, \\ l &= Ae^{ra} + Be^{-ra}; \end{aligned}$$

d'onde ricavasi

$$A = B = \frac{l}{e^{ra} + e^{-ra}},$$

$$f = l\left(1 - \frac{2}{e^{ra} + e^{-ra}}\right).$$

L'equazione della curva è

$$y = l.\frac{e^{rx} + e^{-rx} - 2}{e^{ra} + e^{-ra}}.$$

410. Si ottiene in questo caso, come nel precedente, una relazione tra 'l peso Π e la freccia di curvatura f che questo peso fa prendere al pezzo. Il massimo peso Π di cui il pezzo possa esser caricato si determinerà dunque pa-

rimenti colla condizione di non far sostenere alle fibre una tensione che sorpassi un limite dato. Conservando le denominazioni del n° 407, si avrà $\frac{\Pi}{E\omega}$ per l'allungamento delle fibre risultante dall'azione di Π, e $\frac{\Pi v' l}{\varepsilon}$ pel più grande allungamento delle fibre proveniente dalla curvatura del pezzo che ha luogo al punto M in cui esso tende a rompersi. Per conseguenza, se si vuole che la massima tensione non sorpassi R', si stabilirà l'equazione

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{1}{E\omega} + \frac{v' l}{\varepsilon}\right),$$

d'onde si dedurrà il valore di Π.

411. Se la sezione trasversale del pezzo è un rettangolo di cui b è la larghezza e c l'altezza, si ha $\omega = bc$, $\varepsilon = \frac{Ebc^3}{12}$, $v' = \frac{c}{2}$. L'equazione precedente diviene

$$R' = \frac{\Pi(c+6l)}{bc^2}, \quad \text{d'onde} \quad \Pi = R'\frac{bc^2}{c+6l}.$$

ARTICOLO IV

Della resistenza di un pezzo prismatico caricato obliquamente.

412. Si supponga un pezzo AM (Fig. 60) posto obliquamente la cui estremità inferiore è incastrata, e la superiore M è caricata di un peso Π. Si chiami

α l'angolo formato dalla direzione AB del pezzo colla verticale;

a la distanza AB;

ω l'arca della sezione trasversale del pezzo;

x, y l' ascissa Ap, e l' ordinata mp di un punto qualunque m della curva del pezzo;

f l' ordinata BM del punto estremo;

P, Q le componenti perpendicolare e parallela ad AB del peso Π sospeso al punto M, d'onde $P = \Pi \text{ sen.}\alpha$, $Q = \Pi \cos.\alpha$;

ε avrà il significato indicato n°. 80.

L' equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x)+Q(f-y);$$

e facendo per brevità $p^2 = \frac{P}{\varepsilon}$, $q^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$, si avrà per l'integrale di questa equazione

$$f-y = A \text{ sen.} q(x+B) - \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

essendo A e B due costanti arbitrarie.

Al punto A si ha $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; e al punto M, $x = a, y = f$; il che dà le tre condizioni

$$f = A \text{ sen.} qB - \frac{p^2 a}{q^2},$$

$$0 = qA \cos.qB + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \text{sen.} q(a+B).$$

Se ne ricava

$$\text{sen.} qB = \text{sen.} qa, \quad \cos.qB = -\cos.qa,$$

$$A = \frac{p^2}{q^3 \cos.qa},$$

$$f = \frac{p^2}{q^3}(\text{tang.} qa - qa).$$

Dietro i valori precedenti, l' equazione della curva sarà

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(\frac{\text{sen.} qa - \text{sen.} q(a-x)}{\cos.qa} - qx\right).$$

L' espressione di f darà il valore della freccia di curvatura in funzione delle forze P, Q. Dovendo questa freccia restar piccolissima, è necessario che tang.$qa - qa$ sia una quantità picciolissima. Essendo dunque o, μ_1, μ_2, μ_3, ec. la serie degli archi la cui lunghezza è rispettivamente eguale a quella della loro tangente, alla componente Q non si possono attribuire che de' valori che poco sorpassino i numeri o, $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$, ec. Adottando il primo di questi valori, il pezzo s' incurverà nel modo indicato fig. 60. I valori seguenti corrispondono a delle curve che offrono un numero di punti di flesso sempre più grande, e la cui esistenza supporrebbe che alcuni punti di queste curve fossero mantenuti fissi nella linea AB. Se tutti i punti sono liberi nell'intervallo AB, il peso Π che il pezzo potrà sostenere sarà legato alla condizione che il numero $a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ sia compreso tra o e μ_1, e che il valore precedente di f sia piccolisimo. Questo valore di f indicherà lo spostamento del punto M cagionato dall' azione del peso Π (*).

(*) Gli archi la cui lunghezza è uguale a quella della loro tangente sono tutti compresi nel primo e nel terzo quadrante, e possono ottenersi risolvendo l' equazione tang.$u = u + i\pi$, in cui i è un numero intero ed u un arco minore del quadrante. Si ha o, μ_1, μ_2, μ_3, ec., secondo che nella equazione si suppone $i = 0, = 1, = 2, = 3$, ec.

Chiamando z un arco un poco più grande di u, si potrà fare

$$qa = i\pi + z,$$

da cui si ricava

$$q = \frac{i\pi + z}{a}.$$

413. Il limite de' pesi di cui può esser caricato il

Sostituendo questo valore di q nell'equazione della curva, essa diviene

$$y = \frac{p^2 a^3}{(i\pi+z)^3}\left(\text{tang.}\, z - \frac{\text{sen.}\,(i\pi+z)\left(1-\frac{x}{a}\right)}{\cos.(i\pi+z)} - (i\pi+z)\,\frac{x}{a}\right).$$

Conviene esaminare le curve date da questa equazione allorchè si fa $i = 0$, $= 1$, $= 2$, ec.

Differenziando e mettendo $\frac{dy}{dx} = 0$, si ottiene

$$\frac{\cos.(i\pi+z)\left(1-\frac{x}{a}\right)}{\cos.(i\pi+z)} - 1 = 0;$$

da cui si ricava

$$x = \frac{2k\pi}{i\pi+z}a, \quad \text{ed} \quad x = \frac{2k\pi+2z}{i\pi+z}\,a;$$

formole nelle quali k è pure numero intero da determinarsi colla condizione che i valori di x sieno sempre minori di a.

Il coefficiente differenziale di secondo ordine risultando positivo per la sostituzione del primo valore di x, e negativo per la sostituzione del secondo, fa conoscere che la prima espressione dà le ascisse corrispondenti alle ordinate minime, e la seconda dà le ascisse delle ordinate massime.

Sostituendo le stesse espressioni di x nell'equazione della curva, si avranno le espressioni generali delle ordinate minime e massime che saranno rispettivamente

$$y = -\frac{2p^2}{q^3}.k\pi, \qquad y = \frac{2p^2}{q^3}(\text{tang.}\, z - z - k\pi).$$

Essendo tang.$z - z - k\pi$ quantità essenzialmente positiva, per esser z maggiore di u e k minore di i, e si ha tang.$u = u + i\pi$, ne segue che le ordinate minime son tutte negative e le massime tutte positive. Perciò la curva avendo nell'origine le ordinate positive, e terminando anche colle ordinate positive, perchè ad

pezzo si determina nell' istesso modo del pezzo conside-

$x = a$ corrisponde sempre $y = f$, taglierà l' asse, ogni volta che le ordinate passano dal positivo al negativo, e viceversa. Di più, le ordinate massime diminuiscono al crescer di k, e le minime in valori assoluti sono tanto più grandi quanto più grande è k.

Il caso contemplato nel testo corrisponde all' ipotesi $i = 0$.

Si faccia $i = 1$. La curva non ammetterà ordinate minime, perchè l' espressione $x = \frac{2k\pi}{\pi + z} a$ non ammette che $k = 0$, e quindi $x = 0$. L' altra espressione $x = \frac{2k\pi + 2z}{2\pi + z}$ ammette il solo valore $k = 0$; sicchè l' ascissa del massimo sarà

$$x = \frac{2z}{2\pi + z} a.$$

In questo caso la curva non taglia l' asse, e la fig. 3 (tav. agg.) ne rappresenta il tipo.

Sia $i = 2$. Il numero k potrà esser 1 nel minimo e zero nel massimo. Vi sarà perciò una sola ordinata massima che corrisponde all' ascissa

$$x = \frac{2z}{2\pi + z} a,$$

e una sola ordinata minima corrispondente ad

$$x = \frac{2\pi}{2\pi + z} a.$$

E siccome le ordinate dopo che son divenute negative debbono ritornar positive, la curva taglierà l' asse in due punti. In questo caso adunque si richiede che vi sien due punti mantenuti fissi, e la curva è rappresentata dalla fig. 4 (tav. agg.).

Se $i = 3$, vi saranno due ordinate massime corrispondenti alle ascisse

$$x = \frac{2z}{3\pi + z} a, \quad x = \frac{2\pi + z}{3\pi + z} a;$$

rato n° 406. Avendo ω e ν' gl' istessi significati del n° 407, si avrà $\frac{Q}{E\omega}$ per l' accorciamento delle fibre risultante dall' azione della forza Q diretta parallelamente all' asse del pezzo; e $\nu'\frac{d^2y}{dx^2}$ per l' accorciamento delle fibre poste alla faccia concava prodotto dalla flessione. Il massimo valore di quest' ultima quantità che ha luogo al punto A, essendo $\nu'\frac{p^2}{q}\text{tang.}qa$, il massimo accorciamento totale delle fibre è

$$\frac{Q}{E\omega}+\frac{\nu' P\,\text{tang.}\alpha\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}}.$$

---

e una sola minima, la cui ascissa è

$$x=\frac{2\pi}{3\pi+z}a.$$

La curva incontrerà due volte l' asse come nel caso precedente. Essa è rappresentata dalla fig. 5 (tav. agg.).

Si faccia $i=4$. Vi saranno due massimi e due minini. I primi corrispondono alle ascisse

$$x=\frac{2z}{4\pi+z}a, \qquad x=\frac{2\pi+z}{4\pi+z}a;$$

i secondi alle ascisse

$$x=\frac{2\pi}{4\pi+z}a, \qquad x=\frac{4\pi}{4\pi+z}a.$$

La curva incontrerà l' asse in quattro punti, che debbono esser mantenuti fissi, affinchè il solido possa piegarsi a questo modo. Essa è rappresentata dalla fig. 6 (tav. agg.).

In generale i punti d' incontro della curva coll' asse saranno sempre in numero pari.

Per conseguenza, se si vuole che il massimo sforzo esercitato per comprimer le fibre, riferito all' unità di superficie, non sorpassi R′, si metterà l' equazione

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' P \operatorname{tang}.a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}};$$

cioè

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{\cos.a}{E\omega} + \frac{v' \operatorname{sen}.a \operatorname{tang}.a \sqrt{\frac{\Pi \cos.a}{\varepsilon}}}{\sqrt{\Pi \cos.a.\varepsilon}} \right\}.$$

Si conoscerà il limite richiesto, determinando il peso Π in modo che questa equazione sia soddisfatta.

414. Se la sezione trasversale del pezzo è un rettangolo che ha b per larghezza e c per altezza, $\omega = bc$, $\varepsilon = E\frac{bc^3}{12}$, $v' = \frac{c}{2}$; l' equazione di sopra ottenuta diviene

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c \cos.a + \frac{6 \operatorname{sen}.a \operatorname{tang}.a \sqrt{\frac{12.\Pi \cos.a}{Ebc^3}}}{\sqrt{\frac{12.\Pi \cos.a}{Ebc^3}}} \right\}.$$

La quantità $\frac{12 \Pi \cos.a}{Ebc^3}$ sarà il più delle volte picciolissima, e per conseguenza questa equazione differirà pochissimo da

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} (c \cos.a + 6a \operatorname{sen}.a)$$

che dà

$$\Pi = \frac{R' bc^2}{c \cos.a + 6a \operatorname{sen}.a}.$$

I valori da attribuirsi a R′ pe' diversi materiali sono stati indicati ne' n^i 181 e seg.

415. Si supponga ora il pezzo AM (Fig. 61) fisso

ed incastrato all' estremità superiore A, e caricato all' estremità inferiore in modo che il peso Π tenda a distenderlo e non a contrarlo. Conservando le denominazioni del n° 412, si avrà per l' equazione di equilibrio

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}(a-x) - \mathrm{Q}(f-y),$$

ovvero

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2(a-x) - q^2(f-y).$$

L' integrale di questa equazione è

$$f-y = \mathrm{A}e^{q(a-x)} + \mathrm{B}e^{-q(a-x)} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

essendo e la base de' logaritmi iperbolici, A e B due costanti arbitrarie.

Si ha, al punto A, $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; e al punto M, $x = a$, $y = f$: dunque

$$f = \mathrm{A}e^{qa} + \mathrm{B}e^{-qa} + \frac{p^2a}{q^2},$$

$$0 = q(\mathrm{A}e^{qa} - \mathrm{B}e^{-qa}) + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{B};$$

d' onde si ricava

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A},$$

$$\mathrm{A} = -\frac{p^2}{q^3(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{p^2}{q^3}\left(qa - \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}}\right).$$

Il peso Π dev' esser tale che questa formola dia per f un valore piccolissimo.

L' equazione della curva è

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(qx - \frac{e^{qa} - e^{-qa} - e^{q(a-x)} + e^{-q(a-x)}}{e^{qa} + e^{-qa}}\right).$$

416. Le considerazioni impiegate nel n° 407 possono applicarsi al caso attuale. Le fibre del pezzo sono prima distese ugualmente dall'azione della componente Q, della quantità $\frac{Q}{E\omega}$. Le fibre situate alle faccie convessa e concava sono in seguito distese e compresse al punto A per effetto della curvatura, della quantità $\frac{\nu' p''}{q} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}}$. Per conseguenza, se la maggior tensione delle fibre non deve sorpassare R', si stabilirà l'equazione

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{\nu' P}{\sqrt{Q\varepsilon}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}.$$

Il massimo valore che si possa attribuire al peso Π è determinato dalla condizione che le sue componenti P, Q soddisfacciano a questa equazione.

417. Se la sezione trasversale del pezzo è un rettangolo che ha b per larghezza e per altezza c, $\omega = bc$, $\varepsilon = E\frac{bc^3}{12}$, $\nu' = \frac{c}{2}$. L'equazione precedente diviene

$$R' = \frac{1}{bc^2}\left\{Qc + \frac{6P}{\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} - e^{-a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}}{e^{a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} + e^{-a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}}\right\};$$

cioè

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2}\left\{c\cos.\alpha + \frac{6\,\mathrm{sen}.\alpha}{\sqrt{\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}}} - e^{-a\sqrt{\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}}}}{e^{a\sqrt{\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}}} + e^{-a\sqrt{\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Ebc^3}}}}\right\}$$

Quando la frazione $\frac{12\Pi\cos.\alpha}{Eab^3}$ sarà piccolissima, il che avrà luogo nella massima parte delle applicazioni, questa equazione differirà pochissimo da

$$R'=\frac{\Pi(c\cos.\alpha+6a\,\mathrm{sen}.\alpha)}{bc^2}$$

d'onde si ricava

$$\Pi=R'\frac{bc^2}{c\cos.\alpha+6a\,\mathrm{sen}.\alpha},$$

come nel caso precedente.

Equilibrio di un pezzo inclinato caricato tra le estremità.

418. Il caso più semplice è quello di un pezzo inclinato AB (Fig. 62), caricato in C del peso Π, e sostenuto negli estremi da porzioni di piani orizzontali. Questo pezzo non tende a scorrere, perchè lo scorrimento non produrrebbe l'abbassamento del peso Π. Indicando con a, a' le lunghezze AC, BC, si avranno gli sforzi esercitati in A e in B espressi da $\Pi\frac{a'}{a+a'}$, e $\Pi\frac{a}{a+a'}$. Ogni porzione AC, BC del pezzo può esser riguardata come incastrata in C e sollecitata all'estremità A o B da questi sforzi. Per conseguenza la parte AC che è compressa nel senso della sua lunghezza è nello stesso caso del pezzo considerato n° 412, essendo $\Pi\frac{a'}{a+a'}$ la forza ivi indicata da Π; e la parte BC che è stirata nel senso della sua lunghezza è nello stesso caso del pezzo considerato n° 415, essendo qui $\Pi\frac{a}{a+a'}$ la forza che in quel numero è stata rappresentata per Π.

419. Il pezzo AB (Fig. 63), sostenuto in una di-

rezione inclinata dal punto d' appoggio C sul quale esso non può scorrere, e caricato alle estremità di pesi che si fanno equilibrio, è sollecitato nel modo istesso del pezzo precedente. La parte BC che è compressa è nello stesso caso del pezzo considerato n° 412; e la parte AC che è distesa è nel caso medesimo del pezzo considerato n° 415.

420. Il pezzo inclinato AB (Fig. 64), caricato in C del peso Π, è sovente sostenuto in un modo diverso da quello che si è supposto nel n° 418. L' estremità superiore B è appoggiata contro un piano verticale, e l' estremità inferiore A sopra un piano orizzontale: ma siccome quest' ultima estremità tende allora a scorrere, deve urtare contro un appoggio o esser ritenuta da una catena. Il peso Π è in questo caso interamente sostenuto dall' appoggio A. Il pezzo esercita in B una pressione orizzontale determinata dalla condizione di fare equilibrio attorno il punto A, col braccio di leva AE, al peso Π agente col braccio di leva AD; e questa pressione orizzontale è riportata contro l' appoggio posto in A. Dunque chiamando a, a' le lunghezze AC, BC, ed α l'angolo ACD, questa pressione orizzontale sarà

$$\Pi \frac{a \operatorname{tang}.\alpha}{a+a'}.$$

Ogni parte AC e BC del pezzo è nello stesso caso che se fosse incastrata in C e sollecitata all' altra estremità dalle indicate forze. Per conseguenza: 1° la parte AC che è compressa dev' esser assimilata al pezzo considerato n° 412, essendo le forze indicate là per P, Q, Π rispettivamente eguali a

$$\Pi \operatorname{sen}.\alpha\left(1-\frac{a}{a+a'}\right),$$

$$\Pi\cos.\alpha\left(1+\frac{a\operatorname{tang}.^2\alpha}{a+a'}\right),\quad \Pi\sqrt{1+\frac{a^2\operatorname{tang}.^2\alpha}{(a+a')^2}}.$$

2° La parte BC che è parimenti compressa, dev'esser assimilata allo stesso pezzo, essendo le forze indicate per P, Q, Π nel n° 412 rispettivamente $\Pi \frac{a \text{ sen } \alpha}{a+a'}$, $\Pi \frac{a \text{ sen. } \alpha \text{ tang. } \alpha}{a+a'}$, $\Pi \frac{a \text{ tang. } \alpha}{a+a'}$.

ARTICOLO V.

Della resistenza di un pezzo prismatico piegato, posto orizontalmente tra due appoggi, e caricato nel mezzo.

421. Si suppone che un pezzo prismatico MAM′ (Fig. 65), essendo stato piegato, è messo orizzontalmente tra due appoggi il cui intervallo è un poco minore della lunghezza del pezzo, in guisa che la convessità è rivolta verso sopra. Essendo sospeso un peso 2P nel mezzo A della lunghezza del pezzo, si tratta di trovare le condizioni di equilibrio. Ogni metà del pezzo è nello stesso caso che se, essendo incastrata orizzontalmente in A, fosse sollecitata all' estremità M o M′ da una certa forza la cui componente verticale è P. Quindi chiamando

Q la componente orizzontale dello sforzo esercitato contro gli appoggi M o M′;

x, y le coordinate Ap, mp di un punto qualunque della curva;

a la metà AB dell' intervallo degli appoggi;

s la metà AmM della lunghezza del pezzo;

f l' ordinata BM del punto estremo della curva;

ε avendo il significato indicato n° 80:

l' equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{P}(a-x)+\mathrm{Q}(f-y)$$

ovvero, facendo per brevità $p^2=\frac{\mathrm{P}}{\varepsilon}$, $q^2=\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2(a-x)+q^2(f-y).$$

L' integrale di questa equazione è

$$f-y = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\,q(x+\mathrm{B})+\frac{v^2}{q^2}(a-x)$$

essendo A e B due costanti arbitrarie.

422. Si ha al punto A, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; e al punto M, $x=a$, $y=f$; il che dà le tre condizioni

$$f = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\,q\mathrm{B}+\frac{p^2}{q^2}a$$

$$0 = q\mathrm{A}\cos.\,q\mathrm{B}-\frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \mathrm{sen}.\,q(a+\mathrm{B}), \quad \text{d' onde} \quad q(a+\mathrm{B}) = i\pi,$$

essendo π il rapporto della circonferenza al diametro, ed i un numero intero qualunque. Se ne ricava

$$\mathrm{A} = -\frac{p^2}{q^2\cos.\,qa},$$

e rimane l' equazione di condizione

$$\mathrm{tang}.\,qa = qa-\frac{q^3f}{p^2} \quad \text{ovvero} \quad f=\frac{p^2}{q^3}(qa-\mathrm{tang}.\,qa).$$

Quindi il valore della forza Q è determinato dalla condizione che la tangente dell'arco $a\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}$ sia minore dell'arco stesso della quantità $f\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}$; quantità che dev' esser piccolissima perchè tale si è supposta la curvatura del pezzo.

423. Co' valori precedenti, l' equazione della curva diviene

$$y = \frac{p^2}{q^3}\left(qx - \frac{\text{sen.}\,qa - \text{sen.}\,q(a-x)}{\cos.\,qa}\right),$$

e se ne ricava presso a poco,

$$s = a + \frac{p^4 a}{4q^4}\left(3 - \frac{3\,\text{tang.}\,qa}{qa} + \text{tang.}^2 qa\right),$$

$$s = a + \frac{p^4 a^3}{4q^2} + \left(\frac{3p^2}{4q^2} - \frac{p^2 a^2}{2}\right) f.$$

Rappresentando per o, μ_1, μ_2, μ_3, ec. la serie degli archi la cui lunghezza è uguale a quella della loro tangente, si soddisfarà alla condizione precedente dando successivamente alla forza Q de' valori un poco minori di $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$, ec. Da queste supposizioni risulteranno delle curve con un numero di punti di flesso sempre più grande.

Ammettendo il primo di questi valori, la quistione proposta si troverà risoluta: le ultime equazioni de' n^i 422 e 423 faranno conoscere Q ed f quando saranno dati a, s e P. La forma della curva è rappresentata dalla fig. 65 (*).

424. Se si suppone $f = 0$, l' equazione di condizione trovata n° 422 diviene

$$\text{tang.}\,qa = qa, \quad \text{d' onde} \quad Q = \frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2} = (4{,}4934)^2 \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

(*) L' analisi delle curve che offrono de' punti d' incontro coll' asse si fa come nel n° 412. Le ordinate massime corrispondono in questo caso alle ascisse $x = \frac{2k\pi}{i\pi + z} a$, e le minime alle ascisse $x = \frac{2k\pi + 2z}{i\pi + z} a$. I punti d' incontro della curva coll' asse sono in numero impari.

Si ha

$$s = a + \frac{p^4 a^5}{4q^2};$$

d' onde

$$Q = \frac{P^2}{4\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{s-a}, \quad \text{e} \quad 2P = \frac{4\mu_1 \varepsilon}{a^2} \sqrt{\frac{s-a}{a}}$$

per l' espressione del peso 2P, che sospeso nel mezzo del pezzo può far abbassar questo punto a livello degli appoggi. Questo peso dev' esser riguardato come il più grande che il pezzo possa sostenere. Se si supponesse in effetti il punto A situato al di sotto del punto C (Fig. 66), supponendo le y positive contate da sotto in sopra, l'equazione di equilibrio dovrebbe essere scritta

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) + Q(f-y).$$

Si avrebbe per l' equazione di condizione

$$\text{tang.}\, qa = qa + \frac{q^3 f}{p^2}, \quad \text{ovvero} \quad f = \frac{p^2}{q^3} (\text{tang.}\, qa - qa);$$

e l' equazione della curva sarebbe

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left(\frac{\text{sen.}\, qa - \text{sen.}\, q(a-x)}{\cos. qa} - qx \right).$$

La forza Q dovrebbe esser supposta un poco maggiore di o, $\frac{\mu_1{}^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_2{}^2 \varepsilon}{a^2}$, $\frac{\mu_3{}^2 \varepsilon}{a^2}$, ec. La prima di queste supposizioni è quella che dev' esser adottata, e ne risulterà che la forza Q come pure il peso 2P, acquisteranno de' valori molto minori, di quelli che avevano quando il punto medio del pezzo era al di sopra della linea che passa per le estremità. La curva che non offre punti di flesso è rappresentata dalla fig. 66.

I risultamenti precedenti spiegano l' eccesso di resistenza che può presentare un pezzo, quando dopo es-

sere stato incurvato, le sue estremità sono poste tra ostacoli fissi. Si vede che questa resistenza ha un limite, che non si può oltrepassare senza obbligare il pezzo a cangiar tosto di figura. Dopo questo cangiamento il pezzo non sostiene che un peso molto minore, e anche minore di quello che sosterrebbe, a curvatura eguale, se le estremità fossero semplicemente posate sopra due appoggi.

Addizione.

In tutte le quistioni finora trattate, relative ai pezzi caricati nel senso della lunghezza, le forze si trovano sempre applicate all'estremità libera. Sarà forse utile far conoscere come drovrebbe procedersi nel caso che un pezzo si trovasse caricato di forze continue agenti nel senso della sua lunghezza.

Sceglieremo all'uopo un caso che, sebbene il più semplice, merita qualche attenzione per le condizioni alle quali bisogna aver riguardo nello stabilire l'equazione di equilibrio; ed è quello di un solido posato verticalmente sopra un piano, caricato di un peso nella estremità superiore, e nel quale si voglia tener conto ancora del peso del solido.

Prima però gioverà rammentare che in un pezzo qualunque animato da forze, nel quale non vi sieno estremità incastrate, le forze che si dovrebbero applicare alle estremità allorchè s'intendono rimossi gli appoggi, debbono far equilibrio a tutte le altre forze applicate sul solido; cioè tutte le forze applicate sul solido compresevi quelle agenti nelle due estremità libere debbono soddisfare alle equazioni di condizione per l'equilibrio di un sistema libero.

Ciò posto, sia il solido AB (Fig. 7, tav. agg.) posto verticalmente sopra un piano, caricato in B di un peso Q e piegato dall'azione del detto peso e del peso proprio. Supponendosi il solido incurvato, il suo peso totale si potrà intender raccolto nel centro di gravità della curva A*m*B; e questo agendo ad una

qualche distanza A*b* dalla retta AB, potrà col suo momento produrre un moto di rotazione intorno al punto A. Richiedendosi per condizione essenziale del problema che le estremità A e B sien mantenute nella verticale AB durante la flessione, conviene assolutamente intender applicate in A e B due forze orizzontali da determinarsi colla condizione che facciano equilibrio alle altre forze agenti nel solido. Si chiami

a la distanza verticale AB;

p il peso dell' unità di lunghezza del solido;

x, *y* le coordinate A*p*, *pm* di un punto qualunque *m* della curva del solido,

s la lunghezza del solido;

M e N le forze orizzontali applicate rispettivamente in A e B;

ε il momento di flessione.

Ora essendo la flessione piccolissima, e potendosi scriver *dx* invece di *ds*, la distanza del centro di gravità della curva A*m*B dalla verticale AB sarà $\frac{\int_0^a y dx}{s}$. Chiamando R la pressione verticale sostenuta dal piano immobile, e prendendo i momenti rispetto al punto A, si avrà

$$R = Q + ps,$$

$$M + N = 0,$$

$$Na + p\int_0^a y dx = 0.$$

Dalle due ultime equazioni si ricava

$$N = -\frac{p}{a}\int_0^a y dx,$$

$$M = \frac{p}{a}\int_0^a y dx.$$

Per trovare l' equazione di equilibrio rispetto a un punto qualunque *m* della curva del solido, si osserverà che considerando un punto *m'* della curva posto tra *m* e B, le cui coordinate sono

x', y', il peso dell' elemento corrispondente sarà pds', e il suo momento rispetto al punto m sarà $pds'(y-y')$, o più semplicemente $pdx'(y-y')$. Perciò l' equazione di equilibrio sarà

$$-\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=Qy+p\int_x^a dx'(y-y')-N(a-x),$$

ovvero, mettendo per N il suo valore,

$$-\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=Qy+p\int_x^a dx'(y-y')+\frac{p(a-x)}{a}\int_0^a ydx.$$

Essendo $\int_0^a ydx$ una quantità costante, si potrà metter $\int_0^a ydx=b$.

Differenziando si avrà

$$-\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{Q+p(a-x)}{\varepsilon}\frac{dy}{dx}-\frac{pb}{a\varepsilon}.$$

Questa equazione integrata conterrà tre costanti, oltre la b. Le condizioni relative alle estremità del solido danno per $x=0$, $y=0$, e $\frac{dy}{dx}=\frac{pb}{aR}$, valore che prossimamente sarà eguale a $\frac{pb}{a(Q+pa)}$; e poi quando $x=a$ si ha pure $y=0$. Queste condizioni serviranno per determinare le tre costanti introdotte dall' integrazione. Si avrà così,

$$y=\varphi(x,\ b).$$

Poscia si avrà

$$b=\int_0^a \varphi(x,\ b)dx.$$

Fatta l' integrazione tra gl' indicati limiti, si ricaverà il valore di b, che converrà sostituire nell' equazione della curva. Resterà in tal modo pienamente determinata la figura del solido incurvato.

ARTICOLO VI.

Della resistenza de' pezzi prismatici il cui asse è curvo.

425. Nell' articolo precedente ci siamo occupati di un pezzo la cui figura naturale è rettilinea, e che si mantiene incurvato per aumentarne la resistenza. Si tratta ora di pezzi la cui figura naturale è curva, come sono gli archi di legname o di ferro impiegati nella costruzione de' ponti.

Ne' pezzi di questo genere, può esistere una tale relazione tra la distribuzione della carica e la figura della curva, che il pezzo si trovi semplicemente compresso o stirato, e non tenda a cangiar di figura: si dice allora che il pezzo è tracciato secondo la *curva di equilibrio*. In ogni altro caso, il pezzo tende a piegare per l' azione de' pesi di cui è caricato.

De' pezzi la cui figura è quella della curva di equilibrio.

426. La ricerca della curva di equilibrio relativa a una data distribuzione della carica dipende da' principî già stabiliti trattando delle volte. Consideriamo un pezzo la cui figura naturale è la curva piana AM (Fig. 67), a ogni punto della quale è applicata una forza diretta nel piano della curva. Questo pezzo sarà in equilibrio, e non tenderà a piegare, se la pressione che ha luogo al punto qualunque *m* nel senso della curva è uguale e direttamente opposta alla risultante delle forze appli-

cate alla parte mM del pezzo. Si suppone inoltre l'estremità A appoggiata contro un piano fisso perpendicolare alla curva. Per conseguenza indicando, come al n° 305, per

x, y le coordinate orizzontale e verticale Ap, pm di un punto m della curva;

s la lunghezza dell' arco Am;

a, b le coordinate del punto estremo M;

S la lunghezza totale AmM della curva;

ρ il raggio di curvatura della curva al punto m;

α l' angolo che la tangente della curva al punto A forma coll' orizzontale Ax;

F il valore della forza applicata al punto m per una unità di lunghezza misurata sull' arco della curva;

φ l' angolo che la direzione della forza F forma coll' asse orizzontale Ax;

T la pressione al punto m, nel senso della curva;

P e Q le forze, verticale, e orizzontale applicate al punto estremo M;

si avrà generalmente

$$T\frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \,.\, F \operatorname{sen} . \varphi,$$

$$T\frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds \,.\, F \cos . \varphi,$$

per l'espressione delle condizioni che debbono esser soddisfatte affinchè il pezzo non tenda a piegare.

427. Se ne dedurrà, come al n° 305,

$$-dT = F ds \left(\frac{dy}{ds} \operatorname{sen} . \varphi + \frac{dx}{ds} \cos . \varphi \right),$$

per l' equazione che darà il valore della pressione esercitata secondo la lunghezza del pezzo.

Caso in cui le forze applicate al pezzo son in ogni punto normali alla curva.

428. In questo caso si troverà, come al n° 306, che la pressione dev' esser costante in tutta l' estensione della curva, la cui figura è determinata dalla condizione

$$\rho = \frac{T}{F}, \text{ d' onde } T = \rho F ;$$

cioè il raggio di curvatura dev' esser in ogni punto eguale alla pressione T divisa pel valore della pressione normale rapportata all' unità di lunghezza.

429. Se la pressione normale è costante, la figura della curva dev' esser un arco di cerchio.

Caso in cui le forze applicate al pezzo son tutte verticali.

430. In questo caso, chiamando p il peso di cui è caricato il punto m, il cui valore è rapportato all' unità di lunghezza, e dato in funzione dell' arco della curva, le equazioni del n° 426 diverranno

$$T\frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds.p ,$$

$$T\frac{dx}{ds} = Q.$$

La componente orizzontale della pressione T è costante in tutta l' estensione della curva ed uguale alla forza Q.

431. L' equazione del n° 427 è ora

$$-dT = pds.\frac{dy}{ds}, \text{ ovvero } -dT = pdy.$$

432. In vece di supporre la forza F e il peso p dati in funzione dell'arco s, si può supporli dati in funzione dell' ascissa x: allora le equazioni del n° 430 si cangiano in

$$T\frac{dy}{ds}=P+\int_x^a dx\,.\,p\,,$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q.$$

Ed in vece dell' equazione del n° 451, si ha

$$-dT=pdx\,.\,\frac{dy}{ds}.$$

433. Il caso il più semplice è quello in cui si suppone p costante, cioè il pezzo caricato di tal maniera che de' pesi eguali corrispondano a parti eguali dell'asse orizzontale Ax. In questo caso si ha

$$T\frac{dy}{ds}=P+p(a-x)\,,$$

$$T\frac{dx}{ds}=Q\,;$$

d' onde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P+p(a-x)}{Q}\,,$$

$$y=\frac{1}{Q}\left[Px+p\left(ax-\tfrac{1}{2}x^2\right)\right].$$

434. Il valore della pressione è

$$T=Q\frac{ds}{dx},\quad \text{ovvero}\quad T=Q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.$$

435. Consideriamo un pezzo curvo AM (Fig. 68), caricato nel modo indicato, e supponiamo che oltre la posizione del punto estremo M, si dia l' ordinata DN tirata nel mezzo dell' intervallo AB. Chiamando g la

freccia verticale NG, l' equazione precedente dovrà dare $y=\frac{b}{2}+g$ quando $x=\frac{a}{2}$, e $y=b$ quando $x=a$; d'onde si ricava

$$P=\frac{pab}{8g}-\frac{pa}{2},$$

$$Q=\frac{pa^2}{8g};$$

e per l' equazione della curva che è una porzione di parabola,

$$y=\frac{(b+4g)x}{a}-\frac{4gx^2}{a^2}.$$

436. L' inclinazione della curva al punto A è data dall' equazione

$$\text{tang}.\alpha=\frac{P+pa}{Q}, \quad \text{ovvero} \quad \text{tang}.\alpha=\frac{b+4g}{a}.$$

La formola del n° 434 dà per la pressione esercitata in un punto qualunque

$$T=\frac{pa^2}{8g}\sqrt{1+\left(\frac{b+4g}{a}-\frac{8gx}{a^2}\right)^2},$$

e per le pressioni che hanno luogo rispettivamente ai punti A ed M,

$$T=\frac{pa^2}{8g}\sqrt{1+\left(\frac{b+4g}{a}\right)^2},$$

e

$$T=\frac{pa^2}{8g}\sqrt{1+\left(\frac{b-4g}{a}\right)^2}.$$

437. Essendo sempre il pezzo curvo caricato come nel n° 433, supponiamo che oltre la posizione del punto estremo M (Fig. 69), si dia l'ascissa AC del punto O, che è il vertice della curva e dove la tangente è oriz-

zontale. Chiamando a' quest' ascissa, si dovrà avere $\frac{dy}{dx}=0$ quando $x=a'$. Se ne ricava

$$P=-p(a-a'),$$

$$Q=\frac{pa(2a'-a)}{2b};$$

e per l' equazione della curva,

$$y=\frac{b}{a}\cdot\frac{2a'x-x^2}{2a'-a}.$$

438. Se in vece dell' ascissa AC o a' del punto O, fosse data la sua ordinata CO che indicheremo per b', si avrebbe

$$P=-\frac{pa\sqrt{b'^2-bb'}}{b'+\sqrt{b'^2-bb'}},$$

$$Q=\frac{pa^2}{2b}\cdot\frac{b'-\sqrt{b'^2-bb'}}{b'+\sqrt{b'^2-bb'}},$$

$$a'=\frac{a}{b}\cdot(b'-\sqrt{b'^2-bb'});$$

e per l' equazione della curva

$$y=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{2ab'x-(b'+\sqrt{b'^2-bb'})x^2}{b'-\sqrt{b'^2-bb'}}.$$

439. Si ha nel caso del n° 437

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{2ba'}{a(2a'-a)};$$

e in quello del n° 438

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{2}{a}(b'+\sqrt{b'^2-bb'}).$$

Il valore della pressione, calcolata colla formola del n° 434, è

$$T=Q\sqrt{1+\left(\text{tang.}\,\alpha-\frac{px}{Q}\right)^2};$$

e diviene ai punti estremi A e M,

$$T = Q\sqrt{1+\text{tang.}^2\alpha} = \frac{Q}{\cos.\alpha}$$

e

$$T = Q\sqrt{1+\left(\text{tang.}\alpha - \frac{pa}{Q}\right)^2}.$$

440. Si considererà ancora il caso in cui la curva essendo appoggiata in A (Fig. 70) contro un piano verticale, la sua tangente in questo punto deve confondersi coll' asse orizzontale Ax. Supposte ora le y positive contate da sopra in sotto, e osservando che le equazioni del n° 433 debbono dare $\frac{dy}{dx} = o$, $y = o$ quando $x = o$; e $y = b$ quando $x = a$, indicando sempre per a e b l' ascissa AB e l' ordinata BM del punto estremo M: si avrà

$$P = -pa, \quad Q = \frac{pa^2}{2b};$$

e per l' equazione della curva,

$$y = \frac{bx^2}{a^2}$$

441. Il valore della pressione sarà

$$T = Q\sqrt{1+\frac{p^2x^2}{Q^2}}, \quad \text{ovvero} \quad T = \frac{pa^2}{2b}\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}.$$

Al punto estremo M la tangente della curva forma coll' asse delle ascisse un angolo la cui tangente è $\frac{2b}{a}$. Il valore della pressione in questo punto è

$$\frac{pa}{2b}\sqrt{a^2+4b^2}.$$

442 Si potrebbe supporre, che in vece del piano immobile posto in A, esista dall' altro lato del detto punto

un' altra porzione di curva AM′ (Fig. 71) eguale alla prima, e caricata nello stesso modo. Segue da ciò che la parabola ordinaria rappresentata dall' equazione del n° 440, è la figura, che convien dare ad un pezzo curvo MAM′ posato sopra due appoggi ai punti M, M′, e caricato di pesi uniformemente distribuiti sulla orizzontale BB′, per fare che questo pezzo non tenda punto a piegare sotto la carica. I valori precedenti di P e Q rappresentano gli sforzi verticali ed orizzontali sostenuti dai due appoggi. I valori di T del n° 461 danno la pressione sostenuta dalle diverse parti della curva, pressione che nel vertice A è uguale a Q.

443. Se in vece di una carica uniformemente distribuita sulla linea AB (Fig. 70), il pezzo curvo sostenesse una carica che va aumentando uniformemente dal punto A al punto B, le equazioni del n° 432 diverrebbero, indicando con k una quantità costante,

$$-\mathrm{T}\frac{dy}{ds}=\mathrm{P}+\int_x^a dx(p+kx).$$

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=\mathrm{Q};$$

d' onde

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{Q}}\left[\mathrm{P}+p(a-x)+\tfrac{1}{2}k(a^2-x^2)\right],$$

$$-y=\frac{1}{\mathrm{Q}}\left[\mathrm{P}x-p(ax-\tfrac{1}{2}x^2)+\tfrac{1}{2}k(a^2x-\tfrac{1}{3}x^3)\right].$$

Si deve avere al punto A, $x=o$, $y=o$, $\frac{dy}{dx}=o$; e al punto B, $x=a$, $y=b$: d' onde ricavasi per le forze che debbono esser applicate al punto estremo,

$$-\mathrm{P}=pa+\tfrac{1}{2}ka^2$$

$$\mathrm{Q}=\frac{3pa^2+ka^3}{6b};$$

e per l'equazione della curva di equilibrio,

$$y = \frac{b(3px^2 + kx^3)}{3pa^2 + ka^3}.$$

444. Il valore della pressione, calcolato colla formola del n° 434 sarebbe,

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\frac{3b(2px + kx^2)}{3pa^2 + ka^3}\right)^2};$$

e diverrebbe al punto estremo M,

$$T = Q\sqrt{1 + \left(\frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka^2}\right)^2}.$$

La curva in questo punto forma coll'orizzonte un angolo la cui tangente trigonometrica è

$$\frac{3b(2p + ka)}{3pa + ka^2}.$$

445. Se si supponesse la carica distribuita uniformemente sulla lunghezza del pezzo curvo, la figura che converrebbe allo stato di equilibrio sarebbe la curva conosciuta sotto il nome di catenaria. La pressione sostenuta nelle diverse parti del pezzo si calcolerebbe come si calcola la tensione in questa curva. In questo caso si può ricorrere alle formole date ne' trattati di statica (*a*) (*).

(*a*) Si può vedere ancora l'opera intitolata: *Rapport et Mémoire sur le ponts suspendus.*

(*) Si è veduto, come data la legge delle forze distribuite sul pezzo curvo, si può trovare la curva che conviene all'equilibrio. Viceversa, data la curva del solido, si potrebbe trovar la legge delle forze da applicarsi al pezzo affinchè restasse in equilibrio.

Della flessione de' pezzi curvi.

446. Consideriamo un pezzo curvo A*m*M (Fig. 72) incastrato orizzontalmente all'estremità A, e supponiamo che due forze P e Q l' una verticale e l' altra orizzontale applicate all' altra estremità M, lo abbian piegato

---

Arrestiamoci al caso in cui le forze son tutte verticali. Le formole del n° 430 danno

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}+\frac{1}{Q}\int_s^S ds\,.\,p\;;$$

e quelle del n° 432,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}+\frac{1}{Q}\int_x^a dx\,.\,p.$$

Differenziando la prima rispetto ad s, la seconda rispetto ad x, si ha rispettivamente

$$p=-Q.\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^2ds},$$

$$p=-Q.\frac{d^2y}{dx^2}$$

secondo che p è dato in funzione di s o di x. Sarà forse utile farà entrare in queste formole il raggio di curvatura, che chiameremo ρ. Si avrà allora ne' due casi contemplati

$$p=\frac{Q}{\rho}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

$$p=\frac{Q}{\rho}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3.$$

Si vede da queste formole che un pezzo incurvato a semicerchio e caricato di sole forze verticali, non potrebbe restar mai in equilibrio, giacchè ne' punti estremi il valore di $\frac{ds}{dx}$ diviene infinito.

secondo la curva $Am'M'$. Data la figura della curva AM, come pure il momento di resistenza alla flessione del pezzo e le forze P e Q, si tratta di conoscere la figura della curva AM'. Chiamiamo

x, y le coordinate orizzontale e verticale Ap, mp di un punto qualunque della curva AM;

s la lunghezza dell' arco Am;

x', y' le coordinate del punto m' della curva AM' nel quale si trasporta il punto m;

a, b le coordinate AB, MB del punto estremo M;

a', b' le coordinate AB', M'B' del punto M' nel quale si trasporta il punto M;

φ l' angolo che la normale della curva AM tirata al punto m forma colla verticale;

φ' l' angolo che la normale della curva AM' tirata al punto m' forma colla verticale;

ε il momento di resistenza alla flessione del pezzo curvo AM, la cui espressione generale è data n° 80.

Riprendiamo le considerazioni esposte n° 77, ed indichiamo come in quel n° per ν la distanza di un punto qualunque della sezione trasversale del pezzo dall'asse di equilibrio. Prima della flessione, la lunghezza di una porzione infinitamente piccola di una fibra posta alla distanza ν da quest' asse è $ds + \nu d\varphi$ per esser $d\varphi$ l' angolo di due normali consecutive. Dopo la flessione, facendo astrazione dal cangiamento che può esser sopravvenuto nella lunghezza dell' elemento ds, la lunghezza della stessa porzione di fibra sarà divenuta $ds + \nu d\varphi'$. La proporzione dunque secondo la quale questa porzione di fibra si è allungata è

$$\frac{(d\varphi' - d\varphi)\nu}{ds + \nu d\varphi}, \quad \text{o semplicemente} \quad \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}\nu,$$

trascurando $\nu d\varphi$ rispetto a ds, il che può sempre farsi ne' casi ordinari delle applicazioni, essendo la grossezza assai piccola relativamente al raggio di curvatura. Da ciò si conchiude, che le condizioni di equilibrio di un pezzo curvo si esprimono come quelle di un pezzo dritto, mettendo $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ in vece di $\frac{1}{\rho}$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$.

447. L'equazione esprimente le condizioni dello stato di equilibrio del pezzo curvo AM sarà dunque

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = P(a-x) + Q(b-y),$$

d'onde ricavasi

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,[P(a-x) + Q(b-y)].$$

La flessione del pezzo essendo supposta sempre piccolissima, gli angoli φ' e φ debbono differir pochissimo fra loro. Si può dunque riguardare il secondo membro come un angolo piccolissimo, che non differisce dal suo seno e il cui coseno è uguale all'unità. Quindi l'equazione precedente darà

$$\text{cos.}\varphi' - \text{cos.}\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\,\text{sen.}\varphi \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,[P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$\text{sen.}\varphi' - \text{sen.}\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,\text{cos.}\varphi \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,[P(a-x) + Q(b-y)].$$

Ma si ha $\text{cos.}\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\text{sen.}\varphi = \frac{dy}{ds}$; $\text{cos.}\varphi' = \frac{dx'}{ds}$, $\text{sen.}\varphi' = \frac{dy'}{ds}$; supponendo sempre che le parti del pezzo nel piegarsi non cangino di lunghezza. Dunque

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,[P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,[P(a-x) + Q(b-y)],$$

equazioni che integrate faran conoscere gli spostamenti di ciascun punto del pezzo curvo, quando la figura di questo pezzo sarà data.

448. Sviluppando il radicale in serie, le espressioni precedenti diverranno

$$dx'-dx=-\frac{1}{\varepsilon}dy\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right][P(a-x)+Q(b-y)],$$

$$dy'-dy=\frac{1}{\varepsilon}dx\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right][P(a-x)+Q(b-y)].$$

Per ragion della poca ampiezza della curva de' pezzi, si potrà quasi sempre nelle applicazioni limitarsi al secondo termine della serie. In molti casi non si commetterebbero che errori picciolissimi trascurando ancora questo termine.

449. In un pezzo curvo sollecitato nel modo indicato n° 446, le parti sono stirate nel senso della lunghezza dall'azione della forza P e compresse dall' azione della forza Q. La tensione o compressione prodotta da ciascuna di queste forze in un punto qualunque della curva, è uguale alla forza decomposta parallelamente alla direzione della curva in questo punto. Perciò indicando T una pressione come più sopra si è fatto, si ha

$$T=-P\frac{dy}{ds}+Q\frac{dx}{ds},$$

ovvero

$$T=\frac{-P\frac{dy}{dx}+Q}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Applicazione al caso in cui la figura del pezzo curvo è una porzione di parabola.

450. Si ha in questo caso $y = \frac{bx^2}{a^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$; e sostituendo nelle formole del n° 468,

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[P\left(ax^2 - \frac{x^3}{2}\right) + Q\left(bx^2 - \frac{bx^4}{3a^2}\right) \right] + \frac{4b^3}{a^6} \left[P\left(\frac{ax^4}{3} - \frac{x^5}{4}\right) + Q\left(\frac{bx^4}{3} - \frac{bx^6}{5a^2}\right) \right] - \text{ec.} \right\}$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + Q\left(bx - \frac{bx^3}{3a^2}\right) + \frac{2b^2}{a^4} \left[P\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + Q\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5a^2}\right) \right] - \text{ec.} \right\};$$

da cui si ricava integrando

$$x' - x = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[P\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right) + Q\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{15a^2}\right) \right] + \frac{4b^3}{a^6} \left[P\left(\frac{ax^5}{15} - \frac{x^6}{24}\right) + Q\left(\frac{bx^5}{15} - \frac{bx^7}{35a^2}\right) \right] - \text{ec.} \right\},$$

$$y' - y = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Q\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{bx^4}{12a^2}\right) + \frac{2b^2}{a^4} \left[P\left(\frac{ax^4}{12} - \frac{x^5}{20}\right) + Q\left(\frac{bx^4}{12} - \frac{bx^6}{30a^2}\right) \right] - \text{ec.} \right\}.$$

Se si chiamano h ed f le quantità di cui si è spostato il punto estremo M orizzontalmente e verticalmente, queste formole, facendo $x = a$, daranno

$$-h = \frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \text{ec.}\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} - \text{ec.}\right),$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} - \text{ec.}\right) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \text{ec.}\right).$$

*

451. Consideriamo un pezzo curvo MAM′ (Fig. 73) formato di due parti uguali, sostenuto verticalmente sopra due porzioni di un piano orizzontale, e caricato nel mezzo A del peso 2Π. Il pezzo cederà all'azione di questo peso, e il vertice si abbasserà nel tempo stesso che le estremità si allontaneranno l'una dall'altra. La metà AM del pezzo è nello stesso stato di equilibrio che se, essendo incastrata orizzontalmente in A, si trovasse sollecitata all'estremità M da una sola forza verticale Π agente da sotto in sopra. Per conseguenza, facendo $P = -\Pi$ e $Q = 0$ nelle equazioni precedenti, e limitandosi ai primi due termini della serie, i valori

$$h = \frac{\Pi}{6}\left(\frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10}\right),$$

$$-f = \frac{\Pi}{6}\left(\frac{a^3}{3\cdot 1} + \frac{ab^2}{15}\right),$$

esprimeranno rispettivamente la quantità di cui ogni punto M o M′ si sposta orizzontalmente e l'abbassamento del vertice A del pezzo. Questo abbassamento è un poco maggiore di quel che sarebbe per un pezzo rettilineo, posta la stessa distanza de' punti di appoggio.

452. La formola del n° 449 darà presso a poco, per la pressione esercitata nel senso della curva al punto la cui ascissa è x,

$$T = \Pi\left(\frac{2bx}{a^2} - \frac{4b^3x^3}{a^6}\right).$$

Siccome si suppone esser b picciolo rispetto ad a, il massimo valore di questa pressione avrà luogo ai punti estremi M o M′, ne' quali $x = a$.

453. Consideriamo ora lo stesso pezzo curvo MAM′ (Fig. 74), caricato similmente, ma nella supposizione che gli appoggi non permettano alle estremità M, M′

di slargarsi. Ciascuna metà del pezzo è nello stesso stato di equilibrio, che se fosse incastrata orizzontalmente in A e sollecitata all' estremità M o M' da una forza verticale Π agente da sotto in sopra, e da una certa forza orizzontale Q. Questa forza orizzontale dev' esser determinata colla condizione che i punti M o M' non si spostino orizzontalmente. Da ciò ne segue che mettendo — Π in luogo di P nelle due ultime equazioni del n° 450, e facendo $h = 0$, i valori che se ne deducono, e che sono, limitandosi ai due primi termini delle serie,

$$Q = \Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a}\right),$$

$$f = -\frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{128} - \frac{23ab^2}{6720}\right),$$

esprimono rispettivamente la pressione orizzontale che il pezzo curvo MAM' esercita contro gli appoggi in seguito dell' azione del peso 2Π, e la quantità di cui quest' azione fa abbassare il vertice A del pezzo. Quindi in un pezzo curvo di poca ampiezza, l' abbassamento del vertice è presso a poco indipendente dalla freccia b; e paragonandolo al valore di f del n° 86, si vede che non è neppure il $\frac{1}{40}$ dell' abbassamento che avrebbe luogo per un pezzo rettilineo delle stesse dimensioni. Ma non bisogna dimenticare che il valor precedente è calcolato senza aver riguardo alla contrazione che deve produrre la pressione esercitata nel senso dell' asse del pezzo, e che contribuisce colla flessione a far discendere il vertice della curva.

454. In questo caso, le azioni esercitate sul pezzo non tendono che a contrarlo. La formola del n° 449, mettendo — Π in vece di P, $\Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a}\right)$ in vece di Q,

e non conservando che i termini dell' ordine $\frac{b^2}{a^2}$, dà per la pressione sostenuta nel punto la cui ascissa è x,

$$T = \Pi\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3}\right).$$

Il suo valor massimo ha luogo nel punto che ha per ascissa $\frac{16a}{25}$, ed è

$$T = \Pi\left(\frac{25a}{32b} + \frac{423a}{700b}\right).$$

Applicazione al caso in cui la figura del pezzo curvo è un arco di cerchio.

455. Conserveremo le denominazioni de n° 466 che si rapportano alla figura 72, e chiameremo di più

A il raggio dell' arco di cerchio secondo il quale il pezzo è incurvato;

Φ il valore dell' angolo φ che conviene al punto estremo M del pezzo curvo.

Posto ciò, considerando come in quel numero, il caso di un pezzo incastrato orizzontalmente a una estremità e sollecitato all'estremità opposta da due forze, l'una P verticale e l' altra Q orizzontale; e osservando che

$$x = A\,\text{sen.}\varphi \qquad a = A\,\text{sen.}\Phi \qquad ds = A\,d\varphi;$$

$$y = A(1-\cos.\varphi), \quad b = A(1-\cos.\Phi),$$

l'equazione del n° 447 che esprime le condizioni dello stato di equilibrio del pezzo curvo, si scriverà

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = A^2.d\varphi[P(\text{sen.}\Phi - \text{sen.}\varphi) + Q(\cos.\varphi - \cos.\Phi)];$$

d' onde si ricava integrando

$$\varepsilon(\varphi' - \varphi) = A^2[P(\varphi\,\text{sen.}\Phi + \cos.\varphi - 1) + Q(\text{sen.}\varphi - \varphi\cos.\Phi)].$$

Operando su questa espressione come su quella del n° citato, se ne ricaverà nell' istesso modo

$$\varepsilon(dx'-dx)=$$

$$-A^3 d\varphi.\text{sen.}\varphi[P(\varphi\,\text{sen.}\Phi+\cos.\varphi-1)+Q(\text{sen.}\varphi-\varphi\cos.\Phi)],$$

$$\varepsilon(dy'-dy)=$$

$$A^3 d\varphi.\cos.\varphi[P(\varphi\,\text{sen.}\Phi+\cos.\varphi-1)+Q(\text{sen.}\varphi-\varphi\cos.\Phi)];$$

e integrando

$$\varepsilon(x'-x)=$$

$$-A^3\begin{cases}P[\text{sen.}\Phi(\text{sen.}\varphi-\varphi\cos.\varphi)+\frac{1}{2}\text{sen.}^2\varphi+\cos.\varphi-1]\\ Q[\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{2}\text{sen.}\varphi\cos.\varphi-\cos.\Phi(\text{sen.}\varphi-\varphi\cos\varphi)]\end{cases},$$

$$\varepsilon(y'-y)=$$

$$A^3\begin{cases}P[\text{sen.}\Phi(\varphi\,\text{sen.}\varphi+\cos.\varphi-1)+\frac{1}{2}\text{sen.}\varphi\cos.\varphi+\frac{1}{2}\varphi-\text{sen.}\varphi]\\ Q[\frac{1}{2}\text{sen.}^2\varphi-\cos.\Phi(\varphi\,\text{sen.}\varphi+\cos.\varphi-1)]\end{cases}.$$

Queste espressioni danno, in funzione dell' angolo φ appartenente a un punto qualunque m della curva, lo spostamento orizzontale e il verticale di questo punto. Supponendo $\varphi=\Phi$, si avranno gli spostamenti, orizzontale e verticale, del punto estremo M, indicati con h ed f:

$$-\varepsilon h=A^3\begin{cases}P(\frac{3}{2}\text{sen.}^2\Phi-\Phi\,\text{sen.}\Phi\cos.\Phi+\cos.\Phi-1)\\ Q(\frac{1}{2}\Phi-\frac{3}{2}\text{sen.}\Phi\cos.\Phi+\Phi\cos.^2\Phi)\end{cases}$$

$$\varepsilon f=A^3\begin{cases}P(\Phi\text{sen.}^2\Phi+\frac{3}{2}\text{sen.}\Phi\cos.\Phi-2\,\text{sen.}\Phi+\frac{1}{2}\Phi)\\ Q(\frac{3}{2}\text{sen.}^2\Phi-\Phi\,\text{sen.}\Phi\cos.\Phi+\cos.\Phi-1)\end{cases}.$$

456. La contrazione T che riceve un elemento qualunque della curva è espressa dalla formola

$$T=-P\,\text{sen.}\varphi+Q\cos.\varphi.$$

457. Considerando prima il caso in cui l' angolo Φ fosse poco considerevole, si trova, trascurando le po-

tenze di Φ superiori alla quinta,

$$-h = \frac{PA^3}{\varepsilon}\frac{5\Phi^4}{24} + \frac{QA^3}{\varepsilon}\frac{2\Phi^5}{15},$$

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon}\left(\frac{\Phi^3}{3} - \frac{3\Phi^5}{20}\right) + \frac{QA^5}{\varepsilon}\frac{5\Phi^4}{24};$$

formole che si possono scrivere

$$-h = \frac{Pa^3}{\varepsilon}\frac{5a}{24A} + \frac{Qa^3}{\varepsilon}\frac{2a^2}{15A^2},$$

$$f = \frac{Pa^3}{\varepsilon}\left(\frac{1}{3} + \frac{a^2}{60A^2}\right) + \frac{Qa^3}{\varepsilon}\frac{5a}{24A},$$

essendo a la distanza orizzontale delle due estremità della curva. Le quali si accordano con quelle date ai n^i 450 e seg., di maniera che pel grado di approssimazione di cui si tratta è indifferente considerare un arco di cerchio o un arco di parabola.

458. Supponiamo ora che il pezzo curvo abbia la figura di un quarto di cerchio. Facendo $\Phi = \frac{\pi}{2}$ nelle espressioni del n° 455, verrà

$$-h = \frac{PA^3}{\varepsilon}\frac{1}{2} + \frac{QA^3}{\varepsilon}\frac{\pi}{4},$$

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon}\frac{3\pi-8}{4} + \frac{QA^3}{\varepsilon}\frac{1}{2}.$$

Se si tratta di un semicerchio posto tra due appoggi che non permettono alle estremità di spostarsi, e caricato nel vertice del peso 2Π, si supporrà come nel n° 453, $h = 0$ e $P = -\Pi$, il che darà

$$Q = \frac{2\Pi}{\pi},$$

$$-f = \frac{\Pi A^3}{\varepsilon}\frac{3\pi^2-6\pi-4}{4\pi}.$$

Quindi la forza colla quale le estremità del pezzo tendono ad allontanarsi, e che chiamasi ordinariamente la

spinta orizzontale, è un poco meno del terzo del peso 2Π sospeso nel vertice del semicerchio.

459. La formola del n° 456 dà per la compressione longitudinale sostenuta da un elemento qualunque del semicerchio

$$T = \Pi\left(\text{sen}.\varphi + \frac{2\cos.\varphi}{\pi}\right).$$

Della flessione di un pezzo curvo di cui tutti i punti sostengono de' pesi.

460. Consideriamo il pezzo curvo AM (Fig. 75), incastrato orizzontalmente all' estremità A, e caricato in tutti i suoi punti di pesi, l' azione de' quali obbliga il pezzo a prender la posizione AM'. Conservando le denominazioni del n° 446, e chiamando

p il peso posto nel punto m corrispondente all'ascissa x,

il cui valore s' intende rapportato all' unità di lunghezza e dato in funzione della stessa ascissa;

x_1 l' ascissa Aq di un punto qualunque n compreso tra m ed M;

p_1 il valore di p nel punto n;

per esprimere le condizioni dell' equilibrio, in vece dell' equazione del n° 447, si avrà

$$\varepsilon\frac{d\gamma' - d\gamma}{ds} = \int_x^a dx_1\, p_1(x_1 - x),$$

da cui si ricaverà, come in quel numero,

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon}\, dy \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \int_x^a dx_1\, p_1(x_1 - x),$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon}\, dx \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \int_x^a dx_1\, p_1(x_1 - x),$$

formole che faranno conoscere lo spostamento di ciascun punto della curva.

461. Sviluppando il radicale in serie, queste formole diverranno

$$dx'-dx=-\frac{1}{\varepsilon}dy\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right]\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x),$$

$$dy'-dy=\frac{1}{\varepsilon}dx\int dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right]\int_x^a dx_1 p_1(x_1-x).$$

462. La pressione che ha luogo al punto m è uguale alla somma de' pesi di cui è caricata la parte mM, decomposti parallelamente alla direzione della curva in m. Questa pressione è dunque

$$T=-\frac{dy}{ds}\int_x^a dx_1 p_1, \quad \text{ovvero} \quad T=-\frac{\frac{dy}{dx}\int_x^a dx_1 p_1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Questo valore è negativo quando $\frac{dy}{dx}$ è positivo; allora la curva non è compressa ma stirata nel senso della sua lunghezza.

Applicazione al caso in cui la carica è uniformemente distribuita e la figura del pezzo curvo è una porzione di parabola.

463. Quando la carica è distribuita in modo che pesi eguali corrispondono a parti eguali dell' asse orizzontale Ax, p è costante, e le formole del n° 461 divengono

$$dx'-dx=-\frac{p}{\varepsilon}dy\int dx\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right\}\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$dy'-dy=\frac{p}{\varepsilon}dx\int dx\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\text{ec.}\right\}\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right).$$

Essendo inoltre $y = \frac{bx^2}{a^2}$ l' equazione della curva, d'onde $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$, queste formole danno

$$x'-x = -\frac{p}{\varepsilon}\left\{\frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} + \frac{bx^5}{15a^2} + \frac{2b^3}{a^6}\left(\frac{a^2x^5}{15} - \frac{ax^6}{12} + \frac{x^7}{35}\right) - \text{ec.}\right\}$$

$$y'-y = \frac{p}{\varepsilon}\left\{\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{b^2}{a^4}\left(\frac{a^2x^4}{12} - \frac{ax^5}{10} + \frac{x^6}{30}\right) - \text{ec.}\right\}.$$

Supponendo $x = a$, e indicando sempre per h, f gli spostamenti, orizzontale e verticale, del punto estremo M, si avrà, limitandosi ai due primi termini delle serie,

$$-h = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{3a^3b}{20} + \frac{ab^3}{42}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60}\right).$$

464. La formola del n° 462 darà presso a poco, per la tensione esercitata in un punto qualunque della curva,

$$\mathrm{T} = 2pb\,\frac{ax-x^2}{a^2}\left(1 - \frac{2b^2x^2}{a^4}\right).$$

465. Consideriamo una porzione di curva MAM′(Fig.76), formata di due parti eguali di figura parabolica, sostenuta verticalmente da due appoggi che non permettono alle estremità di allontanarsi, e caricata di pesi ripartiti nel modo indicato n° 463. Ogni metà del pezzo è nello stesso stato di equilibrio che se fosse incastrata orizzontalmente in A, e sollecitata da pesi distribuiti sull' intervallo AM o AM′, e di più da una forza verticale pa agente da sotto in sopra al punto estremo M o M′ e da una certa forza orizzontale Q agente nel medesimo punto. Ora supponendo un pezzo curvo solleci-

tato nel tempo stesso da pesi ripartiti sulla sua lunghezza e da forze applicate all' estremità, si conosceranno gli spostamenti de' punti del pezzo, sommando i risultamenti ottenuti ne' n^{i} 448 e 461. Per conseguenza, sommando i risultamenti de' n^{i} 450 e 463, si avrebbe per gli spostamenti de' punti estremi:

$$-h=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{8ab^2}{15}+\frac{16b^4}{105a}\right)+\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{3a^3b}{20}+\frac{ab^3}{42}\right),$$

$$f=\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{ab^2}{15}\right)+\frac{Q}{\varepsilon}\left(\frac{5a^2b}{12}+\frac{b^3}{10}\right)+\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{a^2b^2}{60}\right).$$

Ma in questo caso si ha $P=-pa$, e Q è determinata dalla condizione $h=0$. Dunque le pressioni esercitate contro gli appoggi sono

$$Q=\frac{pa^2}{2b};$$

e mettendo questo valore nell'espressione di f, si trova $f=0$. Questi risultamenti si accordano con que' de' n^{i} 440 e 442; giacchè la figura attribuita al pezzo curvo essendo quella che conviene all' equilibrio, si deve trovare un valor nullo per l' abbassamento del vertice.

466. Se il pezzo MAM′ (Fig. 76), supposto sempre di figura parabolica, fosse nel tempo stesso caricato del peso $2pa$ ripartito sulla sua lunghezza come si è ora supposto, e del peso 2Π sospeso nel vertice A, la spinta o pressione orizzontale esercitata contro gli appoggi sarebbe la somma del valor precedente di Q e del valor trovato n° 453, cioè

$$Q=\frac{pa^2}{2b}+\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}\right).$$

L' abbassamento del vertice sarebbe espresso dal valore di f del n° 453.

467. La pressione sostenuta dalle differenti parti del pezzo nel senso della lunghezza, è rappresentata dalla somma de' valori di T dati n^{i} 441 e 454, che è

$$T=\frac{pa^2}{2b}+\frac{pbx^2}{a^2}+\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25bx^2}{16a^5}\right).$$

Se la quantità $16pa-25\Pi$ è positiva, il massimo valore della pressione ha luogo alle estremità M o M′; che è

$$\frac{pa^2}{2b}+4pb+\Pi\left(\frac{25a}{32b}+\frac{45b}{112a}\right).$$

Se questa quantità è negativa, il massimo valore della pressione ha luogo al punto che ha per ascissa

$$x=a\,\frac{16\Pi}{25\Pi-16pa}\ (\star).$$

Applicazione al caso in cui la carica è uniformemente distribuita e la figura del pezzo curvo è un arco di cerchio.

468. Supponendo la carica uniformemente distribuita sulla lunghezza della curva, e chiamando p il valore del peso posto al punto qualunque m (Fig. 75), rapportato all' unità di lunghezza misurata sull' arco della cur-

---

(*) Essendo $\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{b}{8a}(16pa-25\Pi)$, vi sarà massimo, se la quantità $16pa-25\Pi$ è negativa. In caso contrario, potendosi l' espressione di T metter sotto la forma

$$T=\frac{pa^2}{2b}+\frac{pbx^2}{a}+\Pi\left[\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+(32a-25x)\frac{bx}{16a^5}\right],$$

si vede che il massimo valore di questa espressione si ottiene quando x acquista il massimo valore possibile; cioè quando $x=a$.

va, in vece dell' equazione del n° 460 avremo

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^3 d\varphi \int_{\varphi}^{\Phi} d\varphi_1 (\text{sen}.\varphi_1 - \text{sen}.\varphi),$$

ovvero

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^5 d\varphi [\cos.\varphi - \cos.\Phi - (\Phi - \varphi)\text{sen}.\varphi];$$

e integrando,

$$\varepsilon(\varphi' - \varphi) =$$

$$pA^3 [2\,\text{sen}.\varphi - \varphi(\cos.\Phi + \cos.\varphi) - \Phi(1 - \cos.\varphi)].$$

Si ricava da questa equazione, come nel n° citato,

$$\varepsilon(dx' - dx) =$$

$$-pA^4 d\varphi . \text{sen}.\varphi [2\,\text{sen}.\varphi - \varphi(\cos.\Phi + \cos.\varphi) - \Phi(1 - \cos.\varphi)],$$

$$\varepsilon(dy' - dy) =$$

$$pA^4 d\varphi . \cos.\varphi [2\,\text{sen}.\varphi - \varphi(\cos.\Phi + \cos.\varphi) - \Phi(1 - \cos.\varphi)];$$

e integrando nella supposizione di p costante, si trova

$$\varepsilon(x' - x) =$$

$$-pA^4 \begin{Bmatrix} \frac{5}{4}\varphi - \frac{5}{4}\,\text{sen}.\varphi\cos.\varphi - \cos.\Phi(\text{sen}.\varphi - \varphi\cos.\varphi) \\ -\frac{1}{2}\varphi\,\text{sen}.^2\varphi + \Phi(\frac{1}{2}\,\text{sen}.^2\varphi + \cos.\varphi - 1) \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon(y' - y) =$$

$$pA^4 \begin{Bmatrix} \frac{5}{4}\,\text{sen}.^2\varphi - \frac{1}{2}\varphi\,\text{sen}.\varphi\cos.\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2 \\ -\cos.\Phi(\varphi\,\text{sen}.\varphi + \cos.\varphi - 1) + \Phi(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\,\text{sen}.\varphi\cos.\varphi - \text{sen}.\varphi) \end{Bmatrix},$$

espressioni che danno gli spostamenti di un punto qualunque della curva. Facendo $\varphi = \Phi$, si avrà per gli spostamenti del punto estremo,

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon}[\Phi(\tfrac{1}{4} + \cos.\Phi + \cos.^2\Phi) - \tfrac{9}{4}\,\text{sen}.\Phi\cos.\Phi],$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon}[\cos.\Phi - \cos.^2\Phi + \tfrac{1}{4}\Phi^2 - \Phi(\text{sen}.\Phi + \text{sen}.\Phi\cos.\Phi) + \tfrac{5}{4}\,\text{sen}.^2\Phi]$$

469. La tensione longitudinale esercitata in un punto qualunque della curva è

$$T = pA(\Phi - \varphi)\,\text{sen}.\varphi\,.$$

470. Se si considera un arco di un picciola ampiezza, le formole del n° 468, non conservando come sopra si è fatto che la quinta potenza di φ, daranno

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{3\Phi^5}{40} \quad \text{ovvero} \quad -h = \frac{pa^4}{\varepsilon}\frac{3}{40}\frac{a}{A},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{\Phi^4}{8} \qquad\qquad f = \frac{p\,a^4}{\varepsilon.8},$$

che si accordano colle espressioni del n° 463, di maniera che quando possiamo limitarci a questo grado di approssimazione, è indifferente considerare un arco di cerchio caricato uniformente sulla sua lunghezza o un arco di parabola sostenente una carica ripartita uniformemente sulla sua projezione orizzontale.

471. Se il pezzo curvo è un quarto di circonferenza, si farà nelle formole del n° 468 $\Phi = \frac{\pi}{2}$, il che darà per gli spostamenti del punto estremo

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{\pi}{8},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{\pi^2 - 8\pi + 20}{16}.$$

472. Nel caso in cui il pezzo incurvato ad arco di cerchio fosse caricato di un peso distribuito uniformemente sulla sua lunghezza, e sollecitato nel tempo stesso dalle due forze P e Q, l'una verticale e l'altra orizzontale, applicate al punto estremo, bisognerebbe sommare le espressioni di h ed f de' n^i 455 e 468 per avere lo spostamento verticale e orizzontale di questo punto. Dietro ciò, se con-

sideriamo un pezzo incurvato secondo un quarto di circonferenza, avremo

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{\pi}{8} + \frac{PA^3}{\varepsilon}\frac{1}{2} + \frac{QA^3}{\varepsilon}\frac{\pi}{4},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{\pi^2-8\pi+20}{16} + \frac{PA^3}{\varepsilon}\frac{3\pi-8}{4} + \frac{QA^3}{\varepsilon}\frac{1}{2};$$

e se supponiamo che un pezzo incurvato secondo una semicirconferenza, caricato nel modo indicato, sia posto fra due appoggi che non permettono alle estremità di allontanarsi, bisognerà fare $P = -pA\frac{\pi}{2}$ (giacchè questa quantità rappresenta il peso di cui ogni appoggio è caricato), e $h = 0$, il che darà

$$Q = \frac{pA}{2},$$

$$-f = \frac{pA^4}{\varepsilon}\frac{5\pi^2-8\pi-24}{16}.$$

Quindi la spinta orizzontale di un pezzo incurvato a semicerchio, posto tra due appoggi che non permettono alle estremità di slargarsi, è uguale al peso di cui è caricata ogni metà, moltiplicato per la frazione $\frac{1}{\pi}$; cioè un poco meno del terzo di questo peso: questa spinta è la metà di quella che avrebbe luogo, se il peso di tutto il semicerchio fosse sospeso nel vertice. Il valore precedente di f rappresenta la quantità di cui si abbassa il vertice del semicerchio. Questa quantità è minore di quella che avrebbe luogo se il peso totale del semicerchio fosse sospeso al vertice nel rapporto di $5\pi^2 - 8\pi - 24$ a $6\pi^2 - 16\pi - 8$.

473. **La compressione longitudinale in un punto qua-**

lunque del pezzo sarà rappresentata da

$$T = -pA(\Phi - \varphi)\text{sen}.\varphi - P\text{sen}.\varphi + Q\cos.\varphi.$$

Supponendo $\Phi = \frac{\pi}{2}$, mettendo per P il suo valore $-pA\frac{\pi}{2}$, e per Q il valore $\frac{pA}{2}$, questa formola dà

$$T = pA\left(\varphi\,\text{sen}.\varphi + \frac{\cos.\varphi}{2}\right).$$

Uso de' risultamenti precedenti nelle applicazioni.

474. I risultamenti precedenti danno i mezzi di determinare il limite de' pesi di cui si può caricare un pezzo ricurvo ne' diversi casi di equilibrio che abbiamo considerati.

Quando la figura del pezzo è quella che conviene all' equilibrio de' pesi di cui è caricato, questo pezzo è semplicemente premuto nel senso della sua lunghezza; ed essendo le dimensioni della sezione trasversale ordinariamente assai piccole rispetto alla lunghezza, si può supporre questa pressione ripartita egualmente su tutta l' estensione della sezione trasversale. Per conseguenza, avendo calcolato il massimo valore della pressione rappresentata da T ne' n^{i} 426 e seg., indicando per ω l' area della sezione trasversale del pezzo, e (come ne' n^{i} 181 e seg.) per R′ il massimo sforzo che si vuol far sostenere alle fibre sopra un'estensione uguale all'unità di superficie, si porrà l' equazione

$$R' = \frac{T}{\omega},$$

per mezzo della quale si potrà stabilire il conveniente rapporto tra la carica che produce la pressione e le dimensioni del pezzo.

475. Quando il pezzo, per non aver la figura che conviene all' equilibrio, piega sotto l' azione de' pesi di cui è caricato, si può determinare il limite di questi pesi, conforme a ciò che è stato esposto nel n° 387. Rappresentiamo per ω la sezione trasversale del pezzo, e per v' la distanza dall' asse di equilibrio delle fibre che ricevono la più grande compressione. In virtù della pressione T, di cui si hanno i valori ne' n^{i} 449 e seg., le fibre sono prima compresse in tutta l' estensione della sezione di una frazione della loro lunghezza eguale a $\frac{T}{E\omega}$. Di più per effetto della flessione, le fibre estreme sono compresse di una frazione della loro lunghezza eguale a $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, come si vede facilmente da' n^{i} 77 e 446. Per conseguenza indicando R' il massimo sforzo che si vuol far soffrire alle fibre sull' unità di superficie, si stabilirà l' equazione

$$\frac{R'}{E} = \frac{T}{E\omega} + v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$$

che farà conoscere il limite cercato. Si deve osservare che il valore della quantità $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, dato dalle formole precedenti, si troverà positivo o negativo, secondo che nel punto cui si riferisce, la flessione avrà aumentato o diminuito l' angolo formato dalla normale della curva coll' asse verticale delle y. Ma quì non deve aversi riguardo al segno di questa quantità, e si deve il suo valore assoluto aggiungere a quello di $\frac{T}{E\omega}$. Bisogna inoltre rammentarsi che T si è supposto positivo quando rappresenta una pressione; e per conseguenza quando il suo valore si troverà negativo, sarà indizio che il pezzo

è stirato e non compresso. Se la sezione trasversale del pezzo non può esser divisa in due parti simmetriche da un asse perpendicolare al piano della flessione, v' deve rappresentare la distanza dall' asse di equilibrio (determinata conforme al n° 78) della fibra che è la più compressa, se T è positivo; e della fibra che è la più stirata, se T è negativo. Finalmente la somma de' valori assoluti delle quantità $\frac{T}{E\omega}$ e $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ sarà data in funzione dell' ascissa x; ed è evidente che si deve attribuire ad x in questa funzione il valore che la renderà la più grande possibile in tutta l' estensione della curva.

476. Consideriamo per esempio il caso del n° 473, in cui un pezzo ricurvo di figura parabolica, posto verticalmente tra due appoggi che non permettono alle estremità di allontanarsi l' una dall' altra, è caricato del peso 2Π sospeso nel vertice. Si ha dal n° 454

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{\Pi}{E\omega}\left(\frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3}\right),$$

e dal n° 447

$$\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{P}{\varepsilon}(a-x) + \frac{Q}{\varepsilon}\left(b - \frac{bx^2}{a^2}\right),$$

dove fa d' uopo metter $-\Pi$ per P, e per Q il valore dato al n° 453: si avrà dunque

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'\Pi}{\varepsilon}\left\{-\frac{7a}{32} - \frac{b^2}{28a} + x - \left(\frac{25}{32a} - \frac{b^2}{28a^3}\right)x^2\right\}.$$

Il valore di T è positivo in tutta l' estensione della curva, di maniera che il pezzo è da per tutto compresso nel senso della lunghezza. Il valore di $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ è prima negativo, poi diviene positivo, e si riduce a zero quan-

do $x = a$. Senza tener conto del segno di questa quantità, se ne aggiungerà il valore a quello di $\frac{T}{E\omega}$; e regolando i valori di v' e di ε conforme a quanto si è detto n° 475, si determinerà Π in modo che per tutti i valori di x compresi tra o e a, la somma de' valori di $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ e di $\frac{T}{Ex}$ non superi $\frac{R'}{E}$.

477. Il caso del n° 465 in cui un simil pezzo ricurvo è caricato del peso $2pa$, ripartito sulla sua lunghezza nel modo indicato n° 463, è uno de' casi di equilibrio menzionati nel n° 474.

478. Considerando, come nel n° 455, un pezzo incurvato ad arco di cerchio, incastrato orizzontalmente all' estremità superiore, e sollecitato all' altra dalle forze P e Q, l' una verticale l' altra orizzontale, si ha dal n° 456,

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega}(-P \operatorname{sen}.\varphi + Q \cos.\varphi) ;$$

e dal n° 455,

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v' A}{\varepsilon}\left\{P(\operatorname{sen}.\Phi - \operatorname{sen}.\varphi) + Q(\cos.\varphi - \cos.\Phi)\right\}.$$

479. Se si suppone, come nel n° 458, che si tratti di un semicerchio posto tra due appoggi che non permettono alle estremità di slargarsi, e il cui vertice è caricato del peso 2Π, si avrà $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $P = -\Pi$, $Q = \frac{2\Pi}{\pi}$, il che darà

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{\Pi}{Ex}\left(\operatorname{sen}.\varphi + \frac{2 \cos.\varphi}{\pi}\right),$$

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v' \Pi a}{\varepsilon}\left(\operatorname{sen}.\varphi - 1 + \frac{2 \cos.\varphi}{\pi}\right).$$

Queste espressioni debbono esser impiegate conforme a ciò che si è detto nel n° 475.

480. Se, come si è supposto nel n° 466, un pezzo di figura parabolica, oltre il peso $2pa$ ripartito sulla sua lunghezza, sostenesse ancora il peso 2Π posto nel vertice, bisognerebbe impiegare il valore di T dato nel n° 467, e si avrebbe

$$\frac{T}{E\omega}=\frac{1}{E\omega}\left\{\frac{pa^2}{2b}+\frac{pbx^2}{a^2}+\Pi\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}-\frac{25\,bx^2}{16\,a^3}\right)\right\}.$$

Ma siccome il solo peso 2Π è quello che produce la flessione del pezzo, il valore di $\nu'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ sarebbe lo stesso di quello del n° 476, e dovrebbe esser impiegato nell'istesso modo.

481. Se si tratta, come nel n° 472, di un pezzo curvato a arco di cerchio, incastrato orizzontalmente all'estremità superiore, caricato uniformemente del peso p sull'unità di lunghezza, e sollecitato all'estremità opposta dalla forza verticale P e dalla orizzontale Q, il valore di T sarà la somma de' valori dati ne' n^i 456 e 469, di maniera che si avrà per la proporzione secondo la quale un elemento qualunque della curva è contratto

$$\frac{T}{E\omega}=\frac{1}{E\omega}\left\{-pA(\Phi-\varphi)\,\text{sen}.\varphi-P\,\text{sen}.\varphi+Q\cos.\varphi\right\}.$$

L'espressione di $\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}$ sarà parimenti la somma delle espressioni date ne' n^i 455 e 468, in guisa che si ha

$$\nu'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\frac{\nu' pA^2}{\varepsilon}\left\{\cos.\varphi-\cos.\Phi-(\Phi-\varphi)\,\text{sen}.\varphi\right\}$$
$$+\frac{\nu' A}{\varepsilon}\left\{P(\text{sen}.\Phi-\text{sen}.\varphi)+Q(\cos.\varphi-\cos.\Phi)\right\}.$$

482. Considerando dunque, come nel n° 462, un se-

micerchio posto tra due appoggi che non permettono alle estremità di slargarsi, e sostenente il peso πpA distribuito uniformemente sulla sua lunghezza, si farà $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $P = -\frac{\pi pA}{2}$, $Q = \frac{pA}{2}$, il che dà

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{pA}{E\omega}\left(\varphi \operatorname{sen}.\varphi + \tfrac{1}{2}\cos.\varphi\right)$$

$$\nu' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = -\frac{\nu' pA^2}{s}\left(\varphi \operatorname{sen}.\varphi + \tfrac{1}{2}\cos.\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Queste espressioni debbono esser impiegate conforme a quel che si è detto n° 465.

Dell' effetto delle pressioni o delle tensioni esercitate nel senso della lunghezza de' pezzi ricurvi, per accorciarli o allungarli, e de' cangiamenti di figura che ne risultano.

483. Ne' diversi casi di equilibrio considerati qui sopra, si sono indicati i valori delle pressioni esercitate nel senso della lunghezza degli elementi de'pezzi curvi. Queste pressioni producono una diminuzione nella lunghezza di questi elementi, la quale ne' n^{i} 446 e seg. si è supposta invariabile, e questa diminuzione di lunghezza concorre colla flessibilità del pezzo a cangiarne la figura. Come però si tratta di cangiamenti picciolissimi, possiamo questi considerarli successivamente, calcolare a parte l'effetto di ciascuno, e prender poi la somma de' risultamenti che si saranno ottenuti.

Conservando le denominazioni del n° 446, e chiamando s' la lunghezza dell' arco Am' (Fig. 73), che si suppone ora diversa da quella dell' arco Am, si avrà $ds - ds'$ per l' accorciamento dell' elemento posto al punto m, ri-

sultante dallo sforzo esercitato nel senso di esso; e $\frac{ds-ds'}{ds}$ per la frazione che esprime la proporzione di questo accorciamento. Per conseguenza, chiamando ω l'area della sezione trasversale del pezzo, è T la pressione longitudinale corrispondente al punto m, si ha

$$E\omega\frac{ds-ds'}{ds}=T;$$

d'onde

$$s-s'=\frac{1}{E\omega}\int dx.T\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

equazione che farà conoscere le variazioni di lunghezza delle parti del pezzo curvo. Restando inoltre presso a poco la stessa la figura di questo pezzo, sarà facile ricavarne gli spostamenti de' punti risultanti dalle enunciate variazioni.

484. Consideriamo per esempio il caso del n° 455; in cui un pezzo curvo di figura parabolica posto verticalmente sopra due appoggi che non permettono alle estremità di allontanarsi l'una dall'altra, è caricato del peso 2Π sospeso nel vertice. Mettendo $\frac{2bx}{a^2}$ in vece di $\frac{dy}{dx}$, e T pel suo valore del n° 454, e limitandosi ai termini dell'ordine $\frac{b^2}{a^2}$, l'equazione precedente diverrà

$$s-s'=\frac{\Pi}{E\omega}\int dx\left(\frac{25a}{32b}-\frac{b}{28a}+\frac{2bx}{a^2}\right),$$

ovvero

$$s-s'=\frac{\Pi}{E\omega}\left(\frac{25ax}{32b}-\frac{bx}{28a}+\frac{bx^2}{a^2}\right).$$

Chiamando c la lunghezza totale delle porzioni di curva AM o AM' (Fig. 74), e c' la lunghezza che desse

acquistano per effetto della pressione, facendo nell' equazione precedente $x = a$, si avrà

$$c - c' = \frac{\Pi}{E\omega} \frac{25a^2}{32b}\left(1 + \frac{216\,b^2}{175\,a^2}\right)$$

per l'accorciamento risultante dall' azione del peso 2Π.

485. Se lo stesso pezzo curvo, caricato del peso $2pa$ ripartito sulla sua lunghezza è nello stato di equilibrio considerato nel n° 442, si deve mettere per T l' espressione del n° 441. L' equazione del n° 483 diviene allora

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b} \int dx \left(1 + \frac{4b^2x^2}{a^4}\right),$$

ovvero

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b}\left(x + \frac{4b^2x^3}{3a^4}\right);$$

d' onde si ricava

$$c - c' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^3}{2b}\left(1 + \frac{4b^2}{3a^2}\right)$$

per l' accorciamento totale di ciascuna metà del pezzo.

486. Supponendo finalmente, come nel n° 466, lo stesso pezzo caricato simultaneamente del peso $2pa$ ripartito sulla sua lunghezza e del peso 2Π sospeso nel vertice, l' accorciamento sarà la somma di quelli or ora calcolati. Si avrà dunque

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b}\left(x + \frac{4b^2x^3}{3a^4}\right) + \frac{\Pi}{E\omega}\left(\frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2}\right),$$

$$c - c' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^3}{2b}\left(1 + \frac{4b^2}{3a^2}\right) + \frac{\Pi}{E\omega} \frac{25a^2}{32b}\left(1 + \frac{216\,b^2}{175\,a^2}\right).$$

487. L' abbassamento del vertice della curva risultante dagli accorciamenti si calcolerà nel seguente modo. Considerando sempre un pezzo di figura parabolica,

si ha (*a*)

$$c = a\left[1 + \frac{1}{3.2}\left(\frac{2b}{a}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2b}{a}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(\frac{2b}{a}\right)^6 - \text{ec.}\right],$$

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 = 6\left[\frac{c-a}{a} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^3 + \text{ec.}\right].$$

Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{db}{dc} = \frac{3a}{4b}\left[1 + \frac{2.9}{10}\cdot\frac{c-a}{a} - \frac{3.54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2 + \text{ec.}\right];$$

d' onde segue, che essendo $c-c'$ una piccola variazione della lunghezza c della metà della curva, e $b-b'$ la variazione corrispondente della freccia b, limitandosi sempre ai termini dell' ordine del quadrato di $\frac{b}{a}$, si ha presso a poco

$$b - b' = \frac{3a}{4b}(c-c').$$

488. Per un pezzo la cui figura naturale è un arco di cerchio, l' equazione del n° 483 deve scriversi

$$s - s' = \frac{\text{A}}{\text{E}\omega}\int d\varphi.\text{T},$$

in cui si sostituirà l' espressione di T in funzione dell' angolo φ, conforme a ciò che è stato esposto precedentemente.

489. Per calcolare in seguito l' abbassamento del vertice corrispondente a un accorciamento dato della lunghezza della curva, si osserverà che

$$c = \text{A}\Phi = \text{A}.\text{arc sen}.\frac{a}{\text{A}},$$

$$b = \text{A}\cos.\Phi = \text{A}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{\text{A}^2}}\right);$$

(*a*) *Mémoire sur les ponts suspendus*, pag. 73.

d' onde si ricava differenziando rispetto ad A solo, poi rimettendo per $\frac{a}{A}$ il suo valore sen. Φ,

$$\frac{db}{dc} = \frac{1 - \cos.\Phi}{\text{sen.}\Phi - \Phi\cos.\Phi};$$

e per conseguenza

$$b - b' = \frac{1 - \cos.\Phi}{\text{sen.}\Phi - \Phi\cos.\Phi}(c - c').$$

Questa formola si accorda con quella del n° 487, quando l'angolo Φ è piccolissimo.

Sperienze sulla resistenza de' pezzi curvi.

490. Dietro le sperienze di M. Duleau (*a*), un pezzo di ferro da fucina di $0^m,06$ di larghezza e $0^m,02$ di altezza, è stato curvato a freddo secondo un arco di cerchio di $6^m,32$ di corda e $0^m,7$ di freccia. Posto questo pezzo verticalmente tra due appoggi che non permettevano alle estremità di allontanarsi (Fig. 77), l' azione del suo proprio peso non ne cangiava sensibilmente la figura.

Essendo $0^m,709$ la freccia dell' arco, ed il pezzo essendo successivamente caricato nel mezzo (Fig. 75) di 20, 120, 220, 260 e 280 chil., il vertice si è abbassato successivamente di 4, 34, 68, 89, e 112 millimetri. Il pezzo si è interamente piegato sotto un peso di 288 chil.

In un altra sperienza, essendo la freccia dell' arco $0^m,694$, il vertice del pezzo caricato successivamente di

---

(*a*) *Essai théorique et expérimental sur la resistance du fer forgé*, pag. 44.

50, 100, 150, 200 e 250 chil. si è successivamente abbassato di 10, 22, 39, 57 e 92 millimetri. Tolti i pesi, il vertice della curva è rimasto 0^m,024 più basso di quel che era prima della sperienza. Il pezzo si è piegato sotto un peso di 270 chil. che non era stato messo interamente nel mezzo.

Lo stesso pezzo era prossimo a piegarsi sotto due pesi di 280 e 285 chil., posti da ciascun lato a $\frac{1}{6}$ della lunghezza contando dalle estremità.

Lo stesso pezzo essendo stato caricato successivamente a $\frac{1}{4}$ della lunghezza a partir da una delle estremità, di un peso di 20 e di 100 chil., e la freccia primitiva essendo di 0^m,696, il punto caricato si è abbassato di 8 e di 45 millimetri. Il vertice della curva si è da prima sollevato un poco, poi si è abbassato quando la carica è arrivata a 150 chil. Il pezzo si è piegato sotto un peso di 177 chil.

491. Nelle centine di legname che sostengono il tetto della cavallerizza della caserma di Libourne, eseguite secondo i progetti del colonnello Emy, il pezzo principale di ogni armatura è un arco a semicerchio di 10^m,6 di raggio. Questi archi sostengono un peso di 9333 chil. (*a*). Sono formati di cinque ordini di tavoloni di abete, curvati e mantenuti a contatto gli uni cogli al-

---

(*a*) *Mémorial du génie*, n° 10, pag. 42. V. pure l' opera di M. Emy, intitolata: *Description d'un nouveau système d'arcs pour les grandes charpentes*. L' autore sembra attribuire a questo sistema di legname la proprietà di non dar luogo ad alcuna spinta orizzontale. Ma questa opinione non potrebbe esser ammessa, benchè in alcune circostanze, la spinta per esser debolissima non produce effetto sensibile.

tri, avendo ciascuno $0^{m},135$ di larghezza sopra $0^{m},054$ di grossezza, e formando insieme una sezione trasversale di 36450 millimetri quadrati. Quindi vicino all' imposta della centina in cui la pressione è la più forte, ogni millimetro quadrato della sezione trasversale sostiene uno sforzo di $\frac{4667}{36450} = 0^{ch.},12$.

ARTICOLO VII.

De' pezzi di diverse figure impiegati nelle costruzioni.
De' pezzi formati di molte parti connesse fra loro.

492. Finora abbiamo supposto esser prismatica la figura de' pezzi. La maggior parte di quelli impiegati nelle costruzioni di legname hanno effettivamente questa figura; ma nelle costruzioni di ferro, e sopra tutto quando s' impiega il ferro fuso, si adottano delle figure appropriate alla natura degli sforzi che i pezzi sostengono. Si ottiene in tal modo una resistenza eguale con un minor volume, e per conseguenza con una spesa minore.

La figura di un pezzo dev' esser determinata dietro la considerazione della resistenza alla rottura. Infatti conviene regolare la forza de' pezzi in modo che le stensioni e compressioni alle quali le parti sono esposte non possano sorpassare un limite dato. Le formole relative alla resistenza alla rottura si applicano a questa determinazione: basta fissar convenevolmente, conforme a ciò che si è veduto nell' articolo VII della 1ª sezione, il valore della costante che rappresenta il massimo sforzo che le fibre debbono sostenere sull' unità di superficie.

Il prisma rettangolare è la figura la più semplice che

si possa dare a un pezzo. Questa figura può esser modificata, sia cangiando la sezione trasversale senza che il pezzo cessi di esser prismatico, sia dando alla sezione delle dimensioni differenti ne' diversi punti della lunghezza del pezzo.

Della figura della sezione trasversale.

493. Consideriamo prima un pezzo sottomesso a degli sforzi che si esercitano perpendicolarmente alla sua lunghezza, di maniera che il senso nel quale questo pezzo tende a piegare sia determinato; come per esempio, un pezzo posato orizzontalmente e caricato di pesi. Dando alla sezione trasversale la figura di un rettangolo i cui lati sono orizzontali e verticali; chiamando

b la larghezza,

c l' altezza della sezione,

E e R avendo i significati indicati n^{i} 77 e 113;

il momento di resistenza alla flessione sarà (n° 81)

$$\varepsilon = \mathrm{E}\frac{bc^3}{12};$$

e il momento della resistenza alla rottura (n° 115)

$$\rho = \mathrm{R}\frac{bc^2}{6}.$$

Restando la stessa l' area della sezione trasversale, la resistenza alla rottura aumenta proporzionalmente all' altezza c. Ma non si può in generale, aumentar c e diminuir b al di là di un certo limite, perchè il pezzo non avrebbe stabilità, e perchè presenterebbe troppo poca resistenza nel senso orizzontale.

494. Restando le stesse l' area della sezione trasversale e la resistenza, si procura al pezzo maggior sta-

bilità e maggior resistenza nel senso orizzontale, dando alla sezione la forma di un tubo rettangolare (Fig. 77), o quella di due T opposte l' una all' altra (Fig. 78). Chiamando

b la larghezza esterna AB;

b' la larghezza interna DE (Fig. 77), o la somma delle larghezze DE, *de* (Fig. 78);

c l' altezza esterna AC;

c' l' altezza interna DF;

il momento della resistenza alla flessione sarà

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{bc^3 - b'c'^3}{12},$$

e il momento della resistenza alla rottura

$$\rho = \mathrm{R}\,\frac{bc^3 - b'c'^3}{6c}.$$

Affinchè una sezione rettangolare potesse sotto un egual superficie offrire la stessa resistenza alla rottura, la larghezza e l' altezza dovrebbero esser rispettivamente

$$\frac{(bc - b'c')^2 c}{bc^3 - b'c'^3} \quad \text{e} \quad \frac{bc^3 - b'c'^3}{(bc - b'c')c}.$$

Le sezioni rappresentate dalle fig. 77 e 78 sembrano esser in questo caso le più convenienti ad esser adottate. La prima par che debba offrire maggior solidità della seconda; ma quando i pezzi sono fatti di ferro fuso è difficile ottenere senza difetti i tubi rettangolari o circolari (*a*).

(*a*) In pezzi simili di ferro fuso, bisogna dare alle diverse parti dimensioni poco differenti, affinchè raffreddandosi nel medesimo tempo non tendano a disunirsi per effetto della contrazione della ghisa.

495. Quando un pezzo posto orizzontalmente e caricato di pesi deve presentare successivamente le sue diverse faccie all' azione della carica, come avviene per esempio agli assi orizzontali nelle macchine di rotazione, è conveniente che la figura della sezione trasversale sia tale che la resistenza del pezzo alla flessione sia la stessa in tutti i sensi. Un cilindro pieno e un tubo circolare offrono evidentemente questa proprietà. Giusta il n° 83 un prisma pieno a base quadrata e un tubo quadrato, l' offrono del pari (*a*). È lo stesso per le sezioni rappresentate nelle figure 79 e 80. Chiamando nella prima

b la dimensione esterna AB o CD,

e la grossezza Aa, Cc di ciascuno de' rettangoli che s' incrociano a angoli retti,

---

(*a*) Si discute la figura più convenevole degli assi di rotazione nel *Practical essays on mill work*, di Buchanan con note di T. Tredgold, 1823, tomo I, pag. 262; e nel *Practical essay on the strength of cast iron*, 1824, pag. 59. M. Tredgold sembra pensare che il cerchio è la sola figura che dà agli assi la proprietà di offrire in tutti i sensi la stessa resistenza alla flessione. L' errore di questo ingegnere proviene dal riguardar che fa egli la resistenza alla flessione come misurata dall' espressione che misura la resistenza alla rottura. Avevamo già osservato che una sezione quadrata dava la stessa resistenza alla flessione nel senso de' lati e nel senso delle diagonali. Ma di più questa sezione dà una resistenza eguale in tutti i sensi, e avviene lo stesso di un gran numero di figure che si possono formare combinando di una maniera simmetrica il cerchio e il quadrato. Risulta da ciò che se gli assi rinforzati da spigoli salienti che gl' inglesi chiamano assi *impiumati* (*feathered shafts*), non riescono così bene come gli assi quadrati o cilindrici pieni, ciò deriva probabilmente dal non esser quelli molto disposti per resistere alla torsione, e non già dalle ineguaglianze della flessione di questi assi.

il momento di resistenza alla flessione è in tutte le direzioni,

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{b^3\epsilon + b\epsilon^3 - \epsilon^4}{12}.$$

Il momento di rottura, se il pezzo piegasse nel senso de' lati de' rettangoli, sarebbe

$$\rho = \mathrm{R}\,\frac{b^3\epsilon + b\epsilon^3 - \epsilon^4}{6\,b},$$

e se il pezzo piegasse nel senso della diagonale del quadrato nel quale è iscritto,

$$\rho = \mathrm{R}\,\frac{\sqrt{2}(b^3\epsilon + b\epsilon^3 - \epsilon^4)}{b(b+\epsilon)}.$$

496. Chiamando nella fig. 80

b la dimensione esterna AB o CD;

b' la dimensione A'B' o A'C';

ϵ la grossezza Aa, Cc de' rettangoli posti in risalto sul quadrato;

il momento di resistenza alla flessione è in tutte le direzioni,

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\epsilon + (b - b')\epsilon^3}{12}.$$

Il momento di rottura, se il pezzo piegasse nel senso de' lati, sarebbe

$$\rho = \mathrm{R}\,\frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\epsilon + (b - b')\epsilon^3}{6b};$$

e se piegasse nel senso della diagonale,

$$\rho = \mathrm{R}\,\frac{\sqrt{2}[b'^4 + (b^3 - b'^3)\epsilon + (b - b')\epsilon^5]}{b(b+\epsilon)}.$$

497. Consideriamo ora un pezzo situato verticalmente e caricato sull' estremità superiore. Il senso della flessione essendo in questo caso indeterminato, convien dare

alla sezione trasversale la figura di un tubo tondo o quadrato, o pure una delle figure simmetriche indicate n° 495. Ciò suppone tuttavia che si sia sicuri che lo sforzo si eserciterà sempre esattamente nella direzione dell' asse del pezzo. Accade qualche volta, per esempio pe' pezzi inclinati che servono di puntello, che lo sforzo tende a esercitarsi sopra una faccia del pezzo e non nella direzione dell' asse. In questo caso si può adottare una delle sezioni rappresentate dalle fig. 81 e 82, la prima delle quali è stata-frequentemente impiegata.

Chiamiamo

b la larghezza AB del rettangolo nel quale la figura è iscritta;

c la sua altezza CD;

ϵ la grossezza CF del lato;

γ la grossezza AE della faccia;

z la distanza DM della faccia AB dall' asse di equilibrio contenente le fibre la cui lunghezza non varia durante la flessione.

Per conoscere il valore del momento di resistenza alla flessione della sezione di cui si tratta, bisogna prima determinare la situazione dell' asse di equilibrio, conforme ai n^{i} 78 e 80. La condizione enunciata nel n° 78 darà

$$bz^2-(b-\epsilon)(z-\gamma)^2=\epsilon(c-z)^2,$$

d' onde

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{b\gamma^2-\epsilon\gamma^2+\epsilon c^2}{b\gamma-\epsilon\gamma+\epsilon c}.$$

L' espressione del momento di resistenza alla flessione, dietro le formole del n° 80, sarà

$$s=\frac{E}{3}\left[bz^3-(b-\epsilon)(z-\gamma)^3+\epsilon(c-z)^3\right],$$

formola in cui si dovrà sostituire per z il valor precedente.

Osservando che CM o $c - z$ è la distanza indicata da v' nel n° 113, si ha per l'espressione del momento di rottura

$$\rho = \frac{R}{3} \cdot \frac{bz^3 - (b-c)(z-\gamma)^3 + c(c-z)^3}{c-z}.$$

Della figura della sezione longitudinale.

498. Quando un pezzo è prismatico, vi è generalmente un punto della lunghezza nel quale è più esposto a rompersi. Se il pezzo ha in questo punto una resistenza sufficiente, negli altri punti è più forte del necessario. Si può determinare la sua figura in guisa da presentare in ogni punto una forza sufficiente, e in nessun punto una forza eccedente: i pezzi la cui figura è determinata a questo modo sono stati chiamati *solidi di egual resistenza*. Basta dare alcuni esempi delle richerche di questo genere, che non offrono alcuna difficoltà.

Consideriamo un solido incastrato orizzontalmente in una estremità (Fig. 83), caricato nell'altra del peso P, le cui facce laterali sono formate da piani verticali paralleli, e la faccia superiore da un piano orizzontale. Chiamando

a la lunghezza AB del solido;
b la sua larghezza;
c l'altezza AM all'estremità incastrata;
x e v l'ascissa Bp e l'ordinata pm della curva BM che forma la faccia inferiore del solido;
R avendo il significato indicato n° 113;

si avrà prima per determinare l' altezza del solido in AM,

$$R\frac{bc^2}{6} = Pa, \quad \text{d' onde} \quad c = \sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}.$$

Si avrà poi per determinare la figura della curva BmM,

$$R\frac{bv^2}{6} = Px, \quad \text{d' onde} \quad v^2 = \frac{c^2x}{a}:$$

questa curva è una parabola il cui asse è BA.

499. Si può domandare la curva che prende il solido ABM piegando sotto l' azione del peso P. Si ha pel valore del momento di resistenza alla flessione appartenente a una sezione qualunque pm, $\varepsilon = E\frac{bv^3}{12} = \frac{bc^3x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}$. Dunque, indicando come nel n° 85 per y l' ordinata della curva del solido, l' equazione di equilibrio è

$$E\frac{bc^3x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = Px,$$

d' onde si ricava

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{E}\frac{12\,a^{\frac{3}{2}}}{bc^3x^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E}\frac{24\,a^{\frac{3}{2}}}{bc^3}\left(x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$y = \frac{P}{E}\frac{24\,a^{\frac{3}{2}}}{bc^3}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}x + \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$f = \frac{P}{E}\frac{8a^3}{bc^3}.$$

Questo valore di f o l' abbassamento del punto estremo B, è doppio di quello che avrebbe luogo se tutte le sezioni del solido avessero un altezza eguale a b.

500. Supponendo il solido caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza (Fig. 84),

conservando le denominazioni precedenti, e chiamando

p il peso portato sull' unità di lunghezza,

si ha

$$R\frac{bc^2}{6} = pa.\frac{a}{2}, \quad \text{d' onde} \quad c = a\sqrt{\frac{3p}{Rb}};$$

poscia

$$R\frac{bv^2}{6} = px.\frac{x}{2}, \quad \text{d' onde} \quad v = \frac{cx}{a}.$$

La faccia inferiore del solido è piana.

501. Essendo il solido caricato solamente del proprio peso (Fig. 85), e chiamando

p il peso dell' unità di volume del solido;

x l' ascissa Bp, alla quale corrisponde l' ordinata v;

x' l' ascissa Bp' di un punto qualunque m', compreso tra B ed m, alla quale corrisponde l'ordinata v';

si avrà

$$p\int_0^x dx'(x - x')\,v' = R.\frac{v^2}{6}.$$

Differenziando due volte di seguito per rapporto ad x, risulta

$$p\int_0^x dx'.v' = \frac{R}{6}.\frac{d\,v^2}{dx}, \quad pv = \frac{R}{6}.\frac{d^2.v^2}{dx^2},$$

equazione il cui integrale è

$$v = \frac{px^2}{2R}:$$

la curva BM è una parabola che ha per asse Bv.

Si risolvono facilmente le stesse quistioni nel caso in cui le sezioni trasversali del solido son tutti cerchi co' loro centri sopra una stessa retta orizzontale; quando sono rettangoli simili; quando è data la legge delle loro larghezze o altezze; ec.

502. Consideriamo un solido posto orizzontalmente sopra due appoggi e caricato in M di un peso 2P (Fig. 86). Chiamando

b la larghezza del solido

c l' altezza AM al punto in cui è sospeso il peso;

a la metà CB dell' intervallo degli appoggi;

z la distanza AC;

si avrà

$$R\frac{bc^2}{6} = P\frac{a^2-z^2}{a}, \quad \text{d'onde} \quad c = \sqrt{\frac{6P(a^2-z^2)}{Rab}};$$

e le due porzioni di curva BM, B'M apparterranno a due parabole il cui asse si confonde colla linea BB'.

503. Se si suppone che il peso 2P può esser posto in un punto qualunque dell' intervallo BB', e se si vuole che il solido resista sempre all' azione di questo peso, l' ordinata della curva della faccia superiore dovrà soddisfare all' espressione precedente di *c*. Questa espressione rappresenta un' ellisse che ha per semiasse minore $\sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}$; e siccome l' ellisse inviluppa le curve paraboliche che terminano il solido, quando si danno ai pesi delle situazioni determinate, questo solido offrirà una resistenza eccedente in tutti i punti fuorchè al punto di sospensione del peso.

504. Consideriamo un solido posato orizzontalmente sopra due appoggi, e caricato di pesi distribuiti uniformemente sulla sua lunghezza (Fig. 87). Chiamando

p il peso posto sull' unità di lunghezza;

a la metà BC dell' intervallo degli appoggi;

b la larghezza costante del solido;

c l' altezza CM del solido nel mezzo dell' intervallo degli appoggi,

x, v l' ascissa Cp e l' ordinata pm della curva BM che forma la faccia superiore del solido;

e osservando (come si è fatto n° 90) che ogni metà del solido resiste come un pezzo incastrato orizzontalmente a una estremità, sollecitato all' altra da una forza verticale pa, e di più da una forza pa agente in senso contrario e distribuita in tutta la lunghezza del pezzo, si avrà

$$\mathrm{R}\frac{bc^2}{6} = \tfrac{1}{2}pa^2\,, \qquad \text{d' onde} \quad c = a\sqrt{\frac{3p}{\mathrm{R}b}}\,;$$

$$\mathrm{R}\frac{bv^2}{6} = pa(a-x) - \tfrac{1}{2}p(a-x)^2, \qquad v = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.$$

La figura della curva BMB′ dev' essere una semiellisse.

505. Se il solido sostiene nel tempo stesso un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e un peso 2P posto nel mezzo dell' intervallo degli appoggi (Fig. 88), conservando le denominazioni precedenti, si avrà

$$\mathrm{R}\frac{bc^2}{6} = \tfrac{1}{2}pa^2 + \mathrm{P}a,$$

$$\mathrm{R}\frac{bv2}{6} = (pa+\mathrm{P})(a-x) - \tfrac{1}{2}p(a-x)^2,$$

d' onde

$$c = \sqrt{\frac{3a(pa+2\mathrm{P})}{\mathrm{R}b}}\,,$$

$$v = c\sqrt{\frac{[p(a+x)+2\mathrm{P}](a-x)}{(pa+2\mathrm{P})a}}\,.$$

506. Consideriamo ancora un solido posto verticalmente (Fig. 89), e caricato di un peso Q sull' estremità superiore, ammettendo che tutte le sezioni trasversali di esso sieno cerchi. Chiamiamo

a la semilarghezza AC o BC del solido;

x, y l' ascissa Cp e l'ordinata mp della curva che prende l' asse del solido;

f la freccia CM di questa curva;

r il raggio della sezione trasversale in m.

Supponendo che il solido non prenda che una piccola curvatura nell' istante in cui è prossimo a rompersi, si può render più semplice la quistione ammettendo che questa curva si confonda con un arco di parabola, che ha per equazione

$$y = f\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

L' equazione di equilibrio sarà

$$R\,\frac{\pi r^3}{4} = Qy, \quad \text{ovvero} \quad r^3 = \frac{4Qf}{\pi R}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Quindi il solido è di egual resistenza se r è proporzionale a $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}$. Il diametro delle sezioni diminuisce dal mezzo alle estremità che sono terminate in punta.

507. È spesso utile nelle costruzioni, consolidando convenevolmente le estremità de' pezzi, di ravvicinarsi alle forme che rendono i solidi di egual resistenza: queste forme convengono principalmente al ferro fuso, e ai pezzi sottomessi a sforzi diretti perpendicolarmente alla lunghezza. Quanto ai pezzi compressi nel senso della lunghezza, è utile, quando la lunghezza è considerevole relativamente alla grossezza, d' aumentare questa grossezza verso il mezzo; ma si deve sempre conservare alle estremità dimensioni tali che la pressione non possa schiacciarle. È anche vantaggioso in molti casi di dare alle estremità la forma di uno zoccolo che si applica contro i piani tra' quali il solido è contenuto. Questa disposizione tende a procurare al solido l' eccesso di resistenza che presenterebbe se le estremità fossero incastrate, conforme a ciò che si è veduto n° 393.

Addizione.

Sopra i solidi di egual resistenza.

I. L'equazione che dà la relazione fra i pesi di cui è caricato un solido prismatico e le sue dimensioni si ottiene eguagliando la somma de' momenti de' pesi stessi presi rispetto alla sezione più debole al momento di rottura, che in questo caso è costante per tutte le sezioni trasversali del solido. Le dimensioni determinate da questa equazione sono quelle che convengono alla sezione corrispondente al punto di rottura ; sicchè tutte le altre sezioni presenteranno un eccesso di resistenza. Ora se le sezioni si fanno variar di forma e di grandezza in modo che per ognuna di esse il corrispondente momento di rottura sia eguale alla somma de' momenti delle forze agenti sul solido dopo questa sezione fino all' estremità libera , presi rispetto alla sezione medesima , il pezzo presenterà in ogni punto la stessa resistenza alla rottura. Un solido così determinato dicesi di egual resistenza.

Quando l' integrale $\int du \int v^2 dv$ che entra nell' espressione del momento di elasticità non dà origine dopo le integrazioni a funzioni trascendenti , si potrà sempre esprimere la resistenza alla rottura di una sezione qualunque per Auv^2, essendo u , v la larghezza e l' altezza del rettangolo circoscritto alla curva, ed A un coefficiente costante dipendente dalla natura della curva che forma il contorno della sezione. Così per esempio, se la sezione è rettangolare, sarà $A = \frac{R}{6}$; se è ellittica , sarà $A = \frac{\pi R}{32}$; ec. Potrebbe anche A contenere u e v, purchè variando comunque questi due elementi la funzione A rimanga costante , come avviene quando le sezioni sono simili (v. nota a pag. 107).

Se si ha un solido incastrato in una estremità e caricato di un peso P nell' altra , e di pesi distribuiti sulla sua lunghezza e dati in funzione dell' ascissa , l' equazione di un solido di egual resistenza sarà

$$Auv^2 = Px + \int_0^x p'(x - x')dx' ; \qquad (1)$$

o più semplicemente

$$A u v^2 = \varphi(x). \qquad (2)$$

Il secondo membro dev' esser zero quando $x = 0$; e perciò nell' estremità libera si ha $uv = 0$. Quindi un solido di egual resistenza deve terminare o in punta o in linea retta.

Conoscendosi le dimensioni del solido nella sezione d'incastro, si avrà per questa sezione

$$A b c^2 = \varphi(a) ;$$

e per mezzo di questa relazione eliminando A dall'equazione (2), si ottiene

$$u v^2 = \frac{b c^2}{\varphi(a)} \varphi(x). \qquad (3)$$

Si vede adunque che il coefficiente A non influisce sulla legge secondo la quale debbono variar le sezioni affinchè un solido sia di egual resistenza. Si potranno perciò considerar rettangolari le sezioni ; ed è evidente che siccome le resistenze variano in ragion della sezione e dell' altezza di essa , ogni altro solido le cui sezioni sono proporzionali alle sezioni rettangolari ed hanno le medesime altezze de' rettangoli , sarà parimenti di egual resistenza ; come avviene nel caso in cui le curve che formano i contorni delle sezioni sono iscritte ne' corrispondenti rettangoli , e serbano a questi una ragione costante.

Data la relazione tra u e x , l' equazione (2) nella quale u divien funzione di x darà la relazione tra v ed x ; e viceversa. Se fosse data la relazione tra u e v, eliminando dall'equazione (2) una delle variabili , si avrà la relazione tra l' altra variabile e la x.

Supponendo che la faccia superiore e una delle faccie laterali del solido di egual resistenza sieno piane e disposte ad angolo retto , le relazioni tra u e x e tra v ed x rappresenteranno le equazioni delle curve secondo le quali debbono esser tracciate le superficie cilindriche che formano le altre due faccie del solido. Una si chiamerà la curva delle altezze , l' altra la curva delle larghezze. L' intersezione di queste due superficie cilindriche sarà una linea curva che può variare in infiniti modi , secondo le infinite diverse relazioni che si possono stabilire fra una delle di-

mensioni e l'ascissa corrispondente. Il luogo geometrico di tutte queste linee curve possibili è la superficie curva rappresentata dall' equazione (2).

Consideriamo un solido incastrato in una estremità e caricato solamente del proprio peso, e per maggior generalità supponiamo la sua densità variabile e data in funzione dell' ascissa. Si avrà facilmente per l' equazione del solido di egual resistenza

$$Auv^2 = \alpha \int_0^x q' u' v' (x - x') \, dx', \qquad (4)$$

in cui α è il rapporto dell' area della sezione a quella del rettangolo circoscritto, e q' la gravità specifica. Dovendo esser data o la curva delle altezze o quella delle larghezze, si potrà eliminare da questa equazione una delle variabili u o v. Differenziando due volte rispetto ad x, si avrà un equazione differenziale di secondo ordine che integrata darà la relazione tra l' altra variabile e l' ascissa. E siccome l' equazione medesima deve avverarsi per la sezione d' incastro corrispondente ad $x = a$ e in cui le dimensioni della sezione trasversale son note, si potrà come nel caso precedente eliminar la costante $\frac{A}{\alpha}$.

Chiamando X la distanza del centro di gravità della porzione di solido pmB (Fig. 85) dalla sezione pm, si avrà

$$X \int_0^x q' u' v' dx = \int_0^x q' u' v' (x - x') dx',$$

da cui

$$(x - X) \int_0^x q' u' v' dx' = \int_0^x q' u' v' x' dx' .$$

Essendo X una parte determinata di x, sarà l' espressione $x \int_0^x q' u' v' dx'$ che entra nel secondo membro dell' equazione (4) proporzionale a $\int_0^x q' u' v' x' dx'$. Si potrà dunque fare $\int_0^x q' u' v' (x - x') \, dx' = \beta \int_0^x q' u' v' x' dx'$, essendo β una costante.

L' equazione (4) diviene

$$Auv^2 = \alpha\beta \int_0^x q' u' v' x' dx' ,$$

o più semplicemente

$$Auv^2 = \int_0^x quvxdx. \qquad (5)$$

Differenziando questa equazione e dividendo per v, si avrà

$$A(2udv + vdu) = quxdx. \qquad (6)$$

Supponendo $u = X$, $du = X'dx$, essa diverrà

$$A(2Xdv + vX'dx) = qXxdx ,$$

la quale integrata dà

$$A . X^{\frac{1}{2}} v = \int X^{\frac{1}{2}} qxdx ,$$

intendendo la costante compresa nell'integrale del secondo membro. Parimenti supponendo $v = X$ e $dv = X'dx$, l'equazione (6) diverrà

$$A(2uX'dx + Xdu) = quxdx ,$$

la quale integrata dà

$$A . \log . X^2 u = \int \frac{qxdx}{X} .$$

Se si considera il caso di un solido incastrato in una estremità, caricato di un peso nell' altra e di pesi comunque ripartiti sulla sua lunghezza, e si tien conto del peso proprio, si avrà la seguente equazione generale di un solido di egual resistenza

$$Auv^2 = \varphi(x) + \int_0^x quvxdx. \qquad (7)$$

Differenziando rispetto ad x, si avrà

$$A(2uvdv + v^2 du) = \varphi'(x)dx + quvxdx. \qquad (8)$$

Supponendo $v = X$, $dv = X'dx$, e facendo per brevità

$$\frac{1}{A}\int \frac{qxdx}{X} = X_1 ,$$

la detta equazione integrata darà

$$A . \frac{uX^2}{X_1} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{X_1} .$$

Supponendo $u = X$, si ha un equazione non integrabile che in casi particolari.

Sarà facile ora far diverse applicazioni delle esposte formole, formando varie ipotesi intorno alle relazioni fra una delle dimensioni e l' ascissa, per ricavarne la legge fra l'altra dimensione e l' ascissa.

II. Formando un solido di egual resistenza si ha per oggetto di ottenere la stessa resistenza impiegando una minor quantità di materia, come si è detto al n° 492. Ma potendo una sezione qualunque variare in infiniti modi e presentare la medesima resistenza, si potranno trovare per una data legge di forze infiniti solidi di egual resistenza. Ora non tutti questi hanno lo stesso volume. In effetto se s' immagini che le aree delle sezioni di un solido di egual resistenza abbiano una picciolissima variazione, in guisa che la diminuzione di resistenza dalla sezione d' incastro all' estremità libera dipenda quasi esclusivamente dalla diminuzione dell' altezza delle sezioni, il volume di questo solido differirà pochissimo da quello di un solido prismatico. È dunque necessario determinare fra tutti i solidi di egual resistenza della medesima lunghezza e capaci di resistere a uno sforzo dato quello il cui volume è un minimo. (Girard, *Traité de la resistance des solides*, ec. n° 171).

Essendo $\int uvdx$ l' espressione generale del volume di un solido, dovrà esser per la teorica delle variazioni

$$\delta \int uvdx = 0,$$

ovvero

$$uv.\delta x + \int (dx\,\delta.uv - d.uv\,\delta x) = 0.$$

Mettendo separatamente a zero la parte affetta dal segno $\int$, si avrà

$$dx\,\delta.uv - d.uv\,\delta x = 0 \qquad (9)$$

L' altra parte presa tra i limiti $x = 0$ ed $x = a$ dà

$$bc\,\delta.a = 0,$$

che è verificata da sè stessa perchè la lunghezza a non varia. Conviene ora introdurre nell' equazione (9) la condizione dell' esser il solido di egual resistenza. Dall' equazione generale (8) si

ricava

$$dx = \frac{A(2uvdv + v^2du)}{\varphi'(x) + quvx}, \text{ d'onde poi } \delta x = \frac{A(2uv\delta v + v^2\delta u)}{\varphi'(x) + quvx}.$$

Sostituendo in (9) in vece di δx il valor ritrovato, si avrà

$$d.[\varphi(x) + \int quvxdx]\,\delta.uv - Ad.uv\,(2uv\delta v + v^2\delta u) = 0;$$

ovvero

$$d.[\varphi(x) + \int quvxdx][u\delta v + v\delta u] - A(udv + vdu)\,(2uv\delta v + v^2\delta u) = 0.$$

Eguagliando separatamente a zero i coefficienti di δv e δu, e osservando che $d.[\varphi(x) + \int quvxdx] = Ad.uv^2$, si ha, fatte le riduzioni,

$$uvdv = 0\ ,\quad v^2du = 0$$

le quali equazioni, combinate insieme prima sommandole e poi sottraendole, danno

$$vdu + udv = 0\ ,\quad vdu - udv = 0.$$

La prima equazione integrata dà

$$uv = bc.$$

In questo caso le sezioni debbono esser costanti, ed il volume sarà un massimo. La seconda integrata dà

$$\frac{v}{u} = \frac{c}{b},$$

cioè le sezioni debbono esser simili, ed il volume sarà un minimo.

Il supporre dunque le sezioni simili, nel mentre che dà il solido di minimo volume, rende le variazioni delle sezioni indipendenti dalla loro figura, giacchè il coefficiente A rimane costante.

III. Il metodo tenuto nel n° 449 per determinare la curva presa dal solido di egual resistenza sotto l'azione del peso P posto nell'estremità segna ancora la via da tenersi per procedere in tutti i casi ad una simile ricerca. Intanto se si volessero determinare queste medesime curve ne' casi considerati ne' n^i 450 e 451, si avrebbero delle equazioni con funzioni trascendenti che somministrerebbero de' valori infiniti per le ordinate de' punti estremi. Questo risultamento singolare che doveva esser comune a tutti i tre casi e pur non si presenta che ai due ultimi, e che l'autore solamente nella prima edizione fa rilevare ed interpetra in un

modo poco soddisfacente, sembra derivar naturalmente dalla quistione che si considera.

In fatti l'equazione per mezzo della quale si determina il solido di egual resistenza è

$$\frac{Ru\nu^2}{6} = \varphi(x),$$

rappresentando generalmente per $\varphi(x)$ la somma de' momenti dei pesi applicati sul solido presi rispetto ad una sezione posta alla distanza x dall'estremità libera. L'equazione dalla quale si deve determinare la curvatura che prende il solido sotto l'azione delle medesime forze è

$$\frac{Eu\nu^3}{12} \cdot \frac{1}{\rho} = \varphi(x),$$

essendo ρ il raggio di curvatura; e mettendo in vece di $\varphi(x)$ il suo valore, si avrà

$$\frac{\nu}{\rho} = \frac{2R}{E};$$

da cui risulta che la resistenza alla flessione è in ragion diretta dell'altezza ν e nell'inversa del raggio di curvatura; cioè in ogni punto il rapporto $\frac{\nu}{\rho}$ si deve mantener costante. Ora se l'altezza ν è costante sarà anche ρ costante, e il solido si piegherà secondo un arco di cerchio. Ma se ν è variabile e va a finire a zero nell'estremità, ρ tende anche esso a divenir eguale a zero, e quindi la curvatura verso l'estremità tende a divenir infinita. Non potendo le stensioni o compressioni delle fibre sorpassare un certo limite, il solido dovrà rompersi prima di prender la curvatura che le forze tenderebbero a produrre. È regolare dunque che si abbiano de' valori infiniti per le freccie de' punti estremi. Se nel n° 449 si è pervenuti a trovar l'equazione della curva che prende il solido, il risultamento non deve esser stimato esatto, giacchè dovendo crescer la curvatura del solido a misura che si va verso l'estremità libera, non è più permesso trascurar il $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ nell'espressione del raggio di curvatura, come ivi si è fatto. Se poi ν è

variabile ma nell' estremità conserva un valore finito, sarà possibile trovar la curva del solido; ma convien sempre nel determinarla far attenzione al valore che il raggio di curvatura tende a prendere verso l' estremità medesima, per decidere se si può in tutta l' estensione del solido trascurar senza errore sensibile il quadrato di $\frac{dy}{dx}$.

Si osservi ancora che nel determinar un solido di egual resistenza si è stabilito che la faccia superiore e una delle faccie laterali fossero piane e situate ad angolo retto. Ma siccome questa determinazione è indipendente dalla situazione che una sezione trasversale serba rispetto a quella che la precede, può supporsi che tutte queste sezioni conservando la medesima area sieno in modo disposte, che i loro centri di gravità si trovino allogati in una linea retta orizzontale. Giacchè la curva che si va cercando appartenendo alla linea che passa pe' centri di gravità, se si lasciasse il solido della forma sopra enunciata, la linea di cui si tratta sarebbe in generale a doppia curvatura, e la quistione riuscirebbe assai più complicata.

IV. Allorchè si considera un solido situato verticalmente e caricato di un peso Q nell' estremità superiore, per poter stabilir l' equazione del solido di egual resistenza convien tener conto del momento del peso relativamente ad una sezione qualunque, il quale momento è uguale al peso stesso moltiplicato per l' ordinata corrispondente a quella sezione, della curva secondo la quale si piega il solido. Perciò nella supposizione che le sezioni fossero cerchi, si avrebbe l' equazione del n° 506

$$\frac{R\pi r^3}{4}=Qy.$$

Per determinare r in funzione di x, bisoguerebbe conoscer la curva che prende il solido nel momento in cui sta per rompersi. Questa curva essendo incognita, si è supposto nello stesso numero che pochissimo dovesse differir da una parabola avente per equazione $y=f\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Ci sembra che questo metodo non possa esser assolutamente adottato; giacchè oltre all' inconveniente di

poter dare tanti solidi diversi per quante ipotesi si possono fare sulla curva che esso prende in vece di supporla parabola, osserviamo ancora che questa curva dipendendo necessariamente dalla forma che ha il solido, non si può determinar questa forma dietro l' ipotesi che il solido debba necessariamente piegarsi secondo una curva data. D' altronde variando i momenti Qy al variar della curva, un solido determinato con questo ripiego non sarebbe di egual resistenza, che nell' istante in cui acquistata la curvatura supposta, si trovasse pure nello stato che precede la rottura. Ma i solidi caricati verticalmente non cominciando ad inflettersi che sotto una carica di un valore determinato, non si può decidere se dandosi la forma risultante dalla ipotesi perverranno a prender la curvatura supposta prima di rompersi, o pure ne prenderanno una maggiore. Nell' uno e nell' altro caso riesce illusoria la determinazione del solido di egual resistenza.

A schivar questa difficoltà inerente alla proposta teoria, ci sembra più regolare render una tale ricerca indipendente dalla flessione, come si fa pe' pezzi orizzontali caricati di pesi. Riteniamo per maggior semplicità che le sezioni sieno circolari. Or ammettendo il pezzo non incurvato, i momenti Qy sarebbero tutti zero. Ma fa d' uopo osservare che trattandosi di determinare l' ampiezza delle sezioni, ed essendo questa determinazione indipendente dalla loro situazione rispettiva, si può supporre che una delle linee esterne sia verticale. Allora la linea che passa pe' centri di gravità delle sezioni sarà una curva rispetto alla quale si potranno prender i momenti del peso Q. Questo riducesi anche a supporre, essendo verticale la linea de' centri, che l'asse di equilibrio, intorno al quale succede la rotazione in ogni sezione, non passi pel centro ma per un punto similmente situato in ogni sezione. E tanto più crediamo potersi ciò fare, in quanto che non potendosi la flessione de' pezzi verticali, che è una verità di fatto, altrimenti spiegare che supponendo un difetto di omogeneità in qualche sezione, l' asse di equilibrio non può passare pel centro di gravità della sezione; ma passerà per un punto similmente determinato in ogni sezione, adottando l'ipotesi la più semplice, cioè che il rapporto della resistenza alla stensione e

alla compressione sia da per tutto costante. Esprimendo per αQr il momento del peso Q rispetto a una sezione qualunque, essendo α un coefficiente costante, si avrà l'equazione

$$\frac{R\pi r^3}{4} = \alpha Q r, \quad \text{ovvero} \quad \frac{R\pi r^2}{4} = \alpha Q;$$

da cui risulta che r dev'esser costante; cioè un solido caricato verticalmente per esser di ugual resistenza deve aver la figura cilindrica.

Supponendo il solido nello stato che precede la flessione, si avrà $Q = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{E\pi r^4}{4}$ (n° 384); mettendo questo valore di Q nell'equazione di sopra, si ricaverà

$$\alpha = \frac{R}{E} \cdot \frac{a^2}{\pi^2 r^2}.$$

Se il solido fosse caricato del solo peso proprio, chiamando Π il peso dell'unità di volume della materia di cui è composto ed a la sua lunghezza, e considerandolo nello stato che precede la flessione, si avrebbe facilmente l'equazione

$$\frac{R\pi r^3}{4} = \alpha \Pi r \int_x^a \pi r'^2 dx',$$

da cui, differenziando dopo aver diviso per r,

$$\frac{R}{2\Pi\alpha} \frac{dr}{r} = -dx;$$

e integrando nell'ipotesi che $x = 0$ dia $r = c$, si avrà

$$x = \frac{R}{2\Pi\alpha} \log \frac{c}{r};$$

la quale equazione mostra che il solido di egual resistenza in questo caso deve esser generato dalla rivoluzione di una logaritmica, e precisamente del ramo asintotico appartenente alle ascisse negative. Essendo la sottangente $\frac{R}{2\Pi\alpha}$ ordinariamente grandissima, questa figura, quando l'altezza non è molto grande, differirà poco dalla cilindrica.

Nel caso in cui si avesse a tener conto dell'azione del proprio

peso e di quella di un peso estraneo posto sulla sommità, si avrebbe l'equazione

$$\frac{R\pi r^3}{4} = \alpha Q r + \alpha \Pi r \int_x^a \pi r'^2 dx' ,$$

la quale, divisa per r, e differenziata, riesce identica a quella del caso precedente; e perciò il peso Q non altera la forma che deve aver il solido per esser di egual resistenza. E in fatti essendo rigorosamente assegnabile il volume di questo solido compreso fra una sezione qualunque e la base superiore, il suo peso sarà determinato. Si può perciò intender rimossa questa parte di solido e sostituitovi un peso Q ad essa equivalente ad agente secondo l' asse del solido. Con questo cambiamento il solido, conservando la medesima forma, si trova esser di egual resistenza tanto al proprio peso che al peso estraneo Q.

De' pezzi formati di molte parti connesse fra loro.

508. Quando un pezzo è composto di molte parti, la resistenza che può presentare si valuta differentemente secondo il modo come le parti son connesse fra loro.

Consideriamo in primo luogo un composto di molti pezzi soprapposti (Fig. 90) e riuniti con fasce di ferro che li mantengono in contatto ma che non impediscono che i punti corrispondenti delle faccie contigue si spostino gli uni per rapporto agli altri quando il sistema viene a piegare. La sua resistenza sarà la somma delle resistenze che ciascun pezzo offrirebbe separatamente. Quindi, essendo rettangolare la sezione trasversale de' pezzi, e chiamando

b la larghezza comune de' pezzi soprapposti;

c l' altezza di ciascuno;

n il loro numero;

ε e ρ avendo i significati indicati n^i 80 e 113;

E e R avendo i significati indicati n^i 77 e 113;

l' espressione del momento di resistenza alla flessione sarà (n° 81),

$$\varepsilon = n\mathrm{E}\frac{bc^3}{12};$$

e l' espressione del momento di rottura (n° 115)

$$\rho = n\mathrm{R}\frac{bc^2}{6}.$$

Si fa quì astrazione dall' effetto dell' attrito che proviene dalla forza colla quale i pezzi sono stretti l'uno contro l'altro. La resistenza del sistema è la stessa, sia che si mettano i pezzi gli uni sugli altri nel senso in cui deve operarsi la flessione, o che si mettano l' uno a fianco all' altro.

505. Se un sistema simile a quello di cui abbiamo parlato fosse formato di pezzi divisi in molte parti nel senso della lunghezza (Fig. 91), si dovrebbe riguardare il momento di resistenza alla flessione aver differenti valori nelle diverse parti. Nella parte *mm*, il momento di resistenza alla flessione è la somma de' momenti de' tre pezzi soprapposti; nella parte *nn*, è solamente la somma de' momenti di due di questi pezzi. Si deve, per quanto è possibile, disporre le commessure in modo che non s' incontrino l' una sull' altra; e con questa condizione si potrà riguardare la resistenza come eguale alla somma delle resistenze de' pezzi soprapposti, meno uno.

Si può anche in alcuni casi, se le commessure sono situate convenevolmente, riguardare la resistenza del sistema, come eguale alla somma delle resistenze de' pezzi soprapposti. Per esempio, nel solido rappresentato fig. 92, incastrato in una estremità, caricato nell' altra, e composto di tre pezzi soprapposti, la resistenza è al punto d' incastro la somma delle resistenze de' tre

pezzi. Ai punti m, n che si suppongono posti a $\frac{1}{3}$ e ai $\frac{2}{3}$ della lunghezza, la resistenza è solamente i $\frac{2}{3}$ e il $\frac{1}{3}$ della precedente: ma siccome l' azione del peso P per cagionare la flessione o la rottura in questi punti è parimenti i $\frac{2}{3}$ e il $\frac{1}{3}$ dell'azione del peso medesimo al punto d' incastro, il sistema offre in ogni punto una resistenza almeno eguale a quella che ha luogo in quest' ultimo punto. Si potrebbe evidentemente sopprimere qui la porzione superiore e l' inferiore de' pezzi che sono dopo il punto n, senza alterare la resistenza del sistema alla rottura.

510. Consideriamo ora un composto di pezzi soprapposti, le cui faccie sono tagliate a denti, o unite con chiavi e fortemente strette da fasce di ferro. La resistenza alla flessione o alla rottura di questa riunione di pezzi non differirà sensibilmente da quella che offrirebbe un sol pezzo delle stesse dimensioni.

511. Se un composto (Fig. 94) fosse formato di due pezzi separati, ma connessi fra loro in modo che una linea tracciata prima della flessione perpendicolarmente alla lunghezza divenisse necessariamente dopo la flessione una normale comune alle due curve formate da' pezzi, la resistenza alla flessione si valuterebbe, togliendo dal momento di resistenza alla flessione del solido riguardato come pieno, il momento di un solido compreso tra' due pezzi. Quindi chiamando

b la larghezza comune de' due pezzi;

c' l' altezza del composto;

c'' l' altezza dell' intervallo compreso tra i due pezzi;

si avrebbe pel momento di resistenza alla flessione

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{b(c'^3 - c''^3)}{12}.$$

Il momento di rottura sarebbe

$$\rho = R\,\frac{b(c'^3 - c''^3)}{6\,c'}.$$

L' ipotesi sulla quale son fondate queste formole non può esser realizzata nei pezzi posti parallelamente, che quando essi son connessi fra loro per mezzo di un sistema di traverse e croci o da chiavi che penetrano in apposite tacche, come si vede rappresentato fig. 94. Ma se uno de' pezzi è curvo (Fig. 95) o se lo sono tutti due, e se questi pezzi sono congiunti nelle estremità in modo da non poter scorrere l' uno sull' altro, basta che sieno riuniti da traverse per poter valutare la resistenza del sistema dietro le formole precedenti. Converrà in ogni caso particolare, regolare la curvatura de' pezzi in modo da render il sistema di egual resistenza, conforme ai principî esposti nell' articolo precedente.

512. Ne' sistemi rappresentati dalle fig. 94 e 95, il pezzo posto dal lato che diviene concavo nell' atto della flessione resistendo solamente ad una compressione esercitata nel senso della sua lunghezza, può esser formato di molte parti poste cogli estremi a contatto, mantenute nel prolungamento l' una dell' altra. Del pari, il pezzo posto dal lato che divien convesso durante la flessione resistendo solamente a una tensione esercitata nel senso della sua lunghezza, può esser formato di molte parti, purchè queste sieno connesse fra loro con delle armature capaci di offrire alla tensione una resistenza eguale a quella del pezzo. Una simile divisione del pezzo superiore e dell' inferiore non altererà sensibilmente la forza del sistema.

513. Conoscendo la natura degli sforzi a' quali i pezzi sono esposti nelle composizioni di questo genere, si può

per ciascuna sceglier la materia che meglio convenga. Questa scelta è determinata dalla condizione di ottenere una data resistenza colla minima spesa possibile. Paragonando le resistenze rispettive del ferro fuso e del ferro da fucina alla compressione e allo stendimento col prezzo di queste materie, si riconoscerà, che fia sempre vantaggioso impiegare il ferro fuso pe' pezzi compressi, e il ferro da fucina pe' pezzi stirati. Questa disposizione presenta ancora più sicurezza quando la costruzione è esposta a delle scosse, perchè il ferro da fucina può spesso senza rompersi prestarsi a una stensione rapida, qualità di cui è quasi interamente sprovveduto il ferro fuso,

Il legname di quercia o di abete, compresso o stirato, costa molto meno, a resistenza eguale, del ferro da fucina o fuso, ed è meno esposto a rompersi per effetto degli urti; ma non offre la stessa durata quando può esser attaccato dall' umido.

514, Si è spesso proposto di consolidare i pezzi di legname con armature di ferro. Quando un pezzo è sottomesso a uno sforzo diretto perpendicolarmente alla sua lunghezza, la miglior disposizione consiste a incastrare nelle sue facce laterali un armatura composta di un pezzo curvo e di una corda rettilinea connessi nelle loro estremità (Fig. 96). Si può anche incastrare un simil composto tra due pezzi di legname posti l' uno a fianco all' altro, e stretti con chiavarde. Se si suppone che i punti del ferro e del legname si mantengano esattamente a contatto durante la flessione, o se per maggior sicurezza si è consolidato questo composto di ferro con delle traverse, come si vede fig. 95, la resistenza del sistema è uguale a quella del pezzo di legname più quella dell' armatura di ferro valutata conforme al n° 511.

La corda rettilinea dev' esser sempre di ferro da fucina; ma è vantaggioso d' impiegare il ferro fuso per la curva.

Sperienze sulla resistenza de' pezzi formati di molte parti connesse fra loro.

515. Dietro una sperienza di M. Aubry (*a*), un travicello di quercia di 1 poll. di larghezza, 2 $\frac{1}{2}$ pollici di altezza, posato orizzontalmente sopra due appoggi distanti 5 piedi, e caricato nel mezzo, si è rotto sotto un peso di 755 libbre producente una freccia di 2 pollici.

Un altro travicello dello stesso legname, di 1 poll. di larghezza e 2 poll. di altezza, formato di tre pezzi intaccati di 3 linee, di 6 in 6 pollici, e stretti da due chiavarde di diametro di 1 $\frac{1}{4}$ linea, posto e caricato come il precedente, si è rotto sotto un peso di 475 lib. producendo una freccia di 3 poll. e 2 linee.

A tenore di questa sperienza, il secondo travicello era presso a poco forte quanto se fosse stato di un sol pezzo.

516. Le sperienze di M. Duleau sopra pezzi di ferro da fucina (*b*) presentano i seguenti risultamenti. I pezzi erano posati orizzontalmente sopra due appoggi e caricati nel mezzo: tutti avevano $0^m,06$ di larghezza. Le chiavarde di $0^m,02$ di diametro per mezzo delle quali questi pezzi erano riuniti, erano alla distanza di $0^m,4$.

(*a*) *Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques*, pag. 65.

(*b*) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, pag. 40.

I risultamenti son ricondotti per mezzo del calcolo a presentare la freccia della curvatura presa da ogni pezzo sotto una carica di 10 chil.

INDICAZIONE DE' PEZZI.	INTERVALLO degli appoggi.	ALTEZZA totale.	ALTEZZA del vuoto.	FRECCIA di curvatura.
	metri.	millimetri.	millimetri.	millimetri.
Due pezzi di ferro del Perigord, posti di piatto e soprapposti senza chiavarde.....	2	21,1	0	7
Gl' istessi pezzi posti di piatto, stretti con chiavarde.....	4	21	0	11,5
Gl' istessi allontanati di 0^m,11, per mezzo di zeppe strette da chiavarde.....	4	32	11	4,57
Gl' istessi allontanati di 0^m,021 collo stesso mezzo	4	42	21	2,6
Gl' istessi allontanati di 0^m,032 collo stesso mezzo.....	4	53	32	1,8
Gl' istessi allontanati di 0^m,153 per mezzo di pezzi a croce..	5,8	174	153	0,275
Due pezzi di ferro del Perigord stretti l' uno sull' altro per mezzo di chiavarde.....	4	40	0	2,2

La resistenza alla flessione del sistema formato di pezzi a croce poco differisce da quella che si calcolerebbe per mezzo della formola del n° 511. Quanto ai pezzi stretti semplicemente con chiavarde, la resistenza è minore; e tanto più quanto più grande è l' intervallo de' pezzi, il che deve attribuirsi alla flessione delle chiavarde (*a*).

(*a*) Si trovano alcune sperienze analoghe alle precedenti nel tomo IV dell'*Art de bâtir*, pag. 529. M. Barlow ha dato pure alcune sperienze sopra modelli di travi armate. *Essay on the strength and stress of timber*, pag. 196.

Delle armature destinate a prolungare i pezzi, o a legare tra loro i pezzi posti l' uno nel prolungamento dell' altro.

517. Consideriamo in primo luogo de' pezzi esposti a sforzi diretti perpendicolarmente alla loro lunghezza. Si può prolungarli, o riunir due pezzi l' uno nel prolungamento dell' altro, di una maniera perfettamente solida, impiegando una porzione di tubo nel quale le estremità de' pezzi sarebbero contenute e fortemente strette. Ma come la parete interna del tubo non sarebbe premuta in tutta la sua estensione, si può sopprimerne una parte, e impiegare delle disposizioni più semplici, benchè fondate sullo stesso principio.

Per esempio, un pezzo di legname che dev' esser incastrato orizzontalmente può esser prolungato nell' incastro per mezzo di due armature di ferro fuso (Fig. 97), applicate contro le faccie laterali, e riunite in *m*, *n* per mezzo di traverse. La faccia superiore e l' inferiore del pezzo debbono esser strette fortemente contro queste traverse per mezzo di zeppe o viti di pressione. Con questa disposizione, il peso non può cedere a uno sforzo esercitato verticalmente da sopra in sotto che rompendosi al di sopra della traversa *n*.

L' armatura rappresentata dalla fig. 98 potrebbe esser impiegata per prolungare un pezzo, all' estremità del quale dovesse esser sospeso un pezzo; e rovesciando la stessa armatura, se ne potrebbero formare le estremità di una trave, il che è qualche volta utile quando si tratta di riparare delle travi di cui sien deteriorate le tenute.

Finalmente si potrebbe per mezzo dell' armatura rappresentata fig. 99, riunire l' uno estremo coll' altro di due pezzi per formarne uno, o consolidare una trave che la carica avesse rotta. Ma non saremmo sicuri di riuscir così bene in quest' ultimo caso come nel precedente, perchè l' armatura trovandosi posta nella parte del pezzo ove tenderebbe a prender la massima curvatura, bisognerebbe un contatto molto più perfetto fra il pezzo e l' armatura, affinchè non vi fosse flessione sensibile (*a*).

In questi congegnamenti la resistenza delle armature può esser valutata dietro il n° 511. Per ottenere che il legname non si comprima sensibilmente è necessario che le porzioni di superficie sulle quali si stabilisce la pressione sieno molto grandi. Il valore della pressione si calcolerà sempre facilmente. Per esempio nel caso della fig. 97, la pressione in *m* deve fare equilibrio attorno il punto *n* a' pesi di cui è caricato il pezzo; la pressione in *n* è eguale alla somma di questi pesi e della pressione che ha luogo in *m*.

518. Le due parti d' un pezzo esposto a piegare trasversalmente da sopra in sotto possono ancora essere riunite nel modo indicato fig. 100, per mezzo di un pezzo posto al di sotto, connesso con chiavi di legno duro inserite in corrispondenti tacche, e strette con fasce di ferro. In fatti le fibre durante la flessione son compresse nella parte superiore *am*, e stirate nella parte inferiore *an*. La commessura *mn* non nuoce alla resistenza delle

---

(*a*) Si può vedere un processo per consolidare le estremità marcite delle travi nelle *Transactions of the society of arts and manufactures*, 1802. V. pure la stessa collezione 1824; o il Bollettino della società d' incoraggiamento, giugno 1825.

fibre compresse (n° 142), e alla resistenza delle fibre stese supplisce quella del pezzo applicato al di sotto. Si può determinare la forza di questo pezzo con la condizione che il momento della resistenza delle sue fibre preso rispetto all' asse di equilibrio a, sia eguale al momento delle fibre tagliate nell' intervallo an, preso rispetto allo stesso asse.

519. Riguardo ai pezzi posti l' uno nel prolungamento dell' altro, ed esposti a una tensione longitudinale, si possono essi congiungere nel modo indicato fig. 101 per mezzo di pezzi a contatto connessi con chiavi e fasce di ferro. Si possono anche impiegare de' tiranti di ferro o incastrandoli nel legname come lo indica la fig. 102, o mettendoli al di fuori e fissandoli a delle traverse. In tutti i casi i pezzi riuniti sono necessariamente indeboliti ne' punti di contatto, essendo la sezione trasversale diminuita per effetto delle intaccature. Si deve dare ai tiranti una forza eguale a quella che resta al legname; e bisogna, affinchè non vi sia schiacciamento, che sia molto grande la superficie del legname sulla quale questi tiranti si appoggiano, e che l' adesione laterale delle fibre che tendono a staccarsi non possa esser rotta.

ARTICOLO VIII.

Degli apparati di legname i più semplici destinati a sostenere o ad innalzare de' pesi.

520. I pezzi di legname sono esposti a diversi generi di sforzo, e possono esser sollecitati a piegare e a rompere in infiniti modi. Si sono considerati negli articoli precedenti i casi i più semplici dell' equilibrio di un sol

pezzo: in questo articolo e ne' seguenti ci proponiamo di esaminare le condizioni dell' equilibrio delle composizioni formate di molti pezzi, limitandoci ai sistemi che più frequentemente si presentano nelle costruzioni.

521. Il modo il più semplice di sostenere un peso per mezzo di un sol pezzo, consiste a metterlo sull' estremità superiore del pezzo elevato verticalmente. Le condizioni di equilibrio per questo caso sono state trovate nel n° 383. Un tal sistema non ha stabilità, a meno che la trave verticale non abbia l' estremità inferiore incastrata. Si può mantenerla in questa posizione o per mezzo di pezzi inclinati o altri appoggi fissi, o impedendo all' estremità superiore di spostarsi per mezzo di funi attaccate a punti fissi. Il cordame non avendo altro oggetto che d' impedire al pezzo verticale di uscir dalla posizione di equilibrio non stabile in cui è posto, il grado di resistenza che deve a questo procurarsi non può in generale esser valutato con esattezza.

522. Si può ancora sostenere un peso per mezzo di un sol pezzo verticale, sospendendolo a qualche distanza dall' asse del pezzo. Si è nella necessità di far così, quando non solamente si tratta di sostenere il peso ma di sollevarlo. Si è nel n° 406 trattato il caso in cui il pezzo è incastrato all' estremità inferiore, ed il peso è semplicemente sostenuto. Quando si vuole elevare il peso, si mette ordinariamente una puleggia in C (Fig. 103), un altra in D, e si agisce sulla corda in F. Il pezzo AB è allora sollecitato non solo dal peso Π ma dalla tensione della corda DF. Se le distanze BC, CD fossero eguali, e se le tensioni delle corde CΠ, DF non differissero l' una dall' altra, il pezzo si troverebbe nello stesso caso che se l' estremità superiore B fosse caricata

di un peso eguale alla somma di queste tensioni. In realtà la tensione della corda DF supera quella della corda CH, e il pezzo AB è sollecitato a piegare verso la prima. Si deve prender la risultante delle due tensioni; e applicare i risultamenti de' n^{i} 406 e seg., mettendo questa risultante invece della forza indicata da Π in que' numeri, e per la distanza indicata da *l*, la distanza della direzione della risultante dall' asse di equilibrio.

La stabilità dell' equilibrio dipende quì unicamente dalla resistenza del pezzo alla flessione, e lo spostamento dell' estremità superiore aumenta il braccio di leva delle forze che lo sollecitano. È assolutamente necessario mantener ferma questa estremità per mezzo di cordami. Ma, come nel caso precedente, il grado di resistenza delle funi non può essere anticipatamente valutato con esattezza.

523. I castelli di questo genere son qualche volta disposti in modo che si agisce sulla corda DF (Fig. 104) per mezzo di un verricello fisso in E al pezzo AB prossimo all' estremità inferiore. In questo caso le due parti AE, BE si trovano in differenti stati di equilibrio. La parte AE è solamente sollecitata a piegare dall' azione del peso Π, e si possono a questa applicare i risultamenti de' n^{i} 406 e seg. La parte BE è sottomessa all' azione del peso Π e della tensione della corda DF. Si può, trascurando la flessione della parte AE, applicare alla parte BE ciò che è stato detto nel numero precedente.

524. Nell' apparato rappresentato dalla fig. 105, il pezzo orizzontale BB′ caricato nel mezzo C del peso Π è nello stato di equilibrio considerato ne' n^{i} 356 e 357. I pezzi verticali AB, A′B′ sostengono ciascuno la metà del peso Π e sono nello stato di equilibrio considerato ne' n^{i} 383

o 389, secondo che le estremità inferiori de' pezzi sono semplicemente sostenute o sono incastrate ne' loro appoggi. Fatta astrazione dalla resistenza degl' incastri ne' punti B, B′, l' equilibrio non è stabile, e si deve mantener l' apparato con pezzi inclinati o con cordame.

Se il peso Π non fosse semplicemente sospeso al punto C, ma dovesse essere elevato per mezzo di una corda che passasse per una o più troclee fisse attaccate a questo punto, è evidente che bisognerebbe riguardare il punto C come caricato del peso Π aumentato della tensione della corda sulla quale si agirebbe per sollevare questo peso.

525. Il castello rappresentato dalla fig. 106, se il pezzo orizzontale BB″ fosse formato di due parti separate da una commessura in B′, presenterebbe semplicemente la riunione di due sistemi simili a quello che si è considerato. I pezzi verticali AB, A″B″ sosterrebbero ciascuno la metà dell' uno de' pesi Π che si suppongono eguali, e il pezzo A′B′ sosterrebbe uno sforzo eguale a uno di questi pesi. Ma se la trave orizzontale BB″ è di un sol pezzo; ciascuna metà BB′, B′B″ resiste come un pezzo orizzontale incastrato a una estremità e sostenuto nell' altra. Per conseguenza riguardando i pezzi AB, A′B′, A″B″ come appoggi inflessibili, saranno applicabili i risultamenti ottenuti ne' n^{i} 366 e seg., risultamenti che si accordano con que' della soluzione esposta ne' n^{i} 375 e seg. Si conchiuderà da ciò che lo sforzo verticale sostenuto da ciascun pezzo estremo AB, A″B″ è uguale a $\frac{5}{16}\Pi$, e che per conseguenza lo sforzo sostenuto dal pezzo intermedio A′B′ è uguale a $\frac{22}{16}\Pi$. L' effetto del legame delle due parti del pezzo BB″ riducesi ad aumentare sensibilmente la carica del ritto A′B′, diminuendo quella degli altri due.

526. Consideriamo ancora il castello rappresentato dalla fig. 107, in cui la trave orizzontale BB''', caricata di tre pesi eguali Π, sostenuta da quattro pezzi verticali equidistanti, è supposta di un sol pezzo. Se si riguardano i pezzi verticali come appoggi inflessibili, si può valutare la resistenza che deve presentare il pezzo BB''', e gli sforzi esercitati sopra ciascun pezzo verticale, per mezzo di un calcolo simile a quello de'n^{i} 371 e seguenti. Infatti, una delle metà BC' della trave può esser riguardata come un pezzo incastrato orizzontalmente all' estremità C', e sollecitato da tre forze verticali agenti da sotto in sopra ai punti B, B' e da sopra in sotto al punto C. Osserveremo per prima che nel pezzo AMM' (Fig. 49) considerato n° 371, si avrebbero per la terza parte $M'M''$ di questo pezzo, conservando le denominazioni indicate in quel numero, e determinando le costanti in modo che per $x = a'$ i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y fossero eguali a' valori dati dalle equazioni appartenenti alla parte MM', le equazioni seguenti:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi''(a''-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \tfrac{1}{2}a^2 - \Pi' \tfrac{1}{2}a'^2 + \Pi''(a''x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi(\tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{6}a^3) - \Pi'(\tfrac{1}{2}a'^2x - \tfrac{1}{6}a'^3) + \Pi''(\tfrac{1}{2}a''x^2 - \tfrac{1}{6}x^3).$$

Applichiamo ora queste equazioni come pure quelle date ne' numeri citati, alla metà BC' (Fig. 107) del pezzo BB'''. Indicando per

a la metà di uno degl' intervalli eguali BB', $B'B''$;

Q lo sforzo esercitato sul ritto AB ;

Q' lo sforzo esercitato sul ritto $A'B'$;

le equazioni converranno al caso di cui si tratta, scri-

vendo Q′ in luogo di Π, Π in luogo di Π′, Q in vece di Π″, $2a$ e $3a$ per a' e a''. In conseguenza, per le parti B′C′, CB′ e BC, si avranno rispettivamente le equazioni

$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3) - \Pi(ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Q(\tfrac{3}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3),$$

$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{6}a^3) - \Pi(ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3) + Q(\tfrac{3}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3),$$

$$\varepsilon y = Q'(\tfrac{1}{2}a^2x - \tfrac{1}{6}a^3) - \Pi(2a^2x - \tfrac{4}{3}a^3) + Q(\tfrac{3}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3).$$

Facendo successivamente $x = a$, $x = 2a$, $x = 3a$, si ricava per le coordinate de' punti B′, C, B contate a partir dalla linea orizzontale che passa pel punto C′,

$$\varepsilon y = (2Q' - 5\Pi + 8Q)\tfrac{1}{6}a^3,$$

$$\varepsilon y = (5Q' - 16\Pi + 28Q)\tfrac{1}{6}a^3,$$

$$\varepsilon y = (8Q' - 28\Pi + 54Q)\tfrac{1}{6}a^3.$$

Dovendo le coordinate de' punti B, B′ esser uguali fra loro, si ha

$$6Q' - 23\Pi + 46Q = 0.$$

Le condizioni dell' equilibrio tra 'l peso Π e gli sforzi esercitati sugli appoggi danno di più

$$2Q' - 3\Pi + 2Q = 0.$$

Da queste due equazioni si ricava $Q = \frac{7}{20}\Pi$ per lo sforzo esercitato sugli appoggi estremi AB, A‴B‴, e $Q' = \frac{23}{20}\Pi$ per lo sforzo esercitato sui ritti intermedî A′B′ e A″B″. L' effetto del legame delle parti anche ora riducesi ad aumentare la carica degli appoggi intermedi, diminuendo quella degli estremi.

527. Quanto al grado di resistenza che deve presentare il pezzo BB‴, si osserverà, che per le parti B′C′,

B'C e CB si ha rispettivamente

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q'(a-x) - \Pi(2a-x) + Q(3a-x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi(2a-x) + Q(3a-x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q(3a-x);$$

ovvero, mettendo per Q e Q' i valori ottenuti,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(4a-10x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(-19a+15x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20}(21a-7x).$$

I punti di massimo per la curvatura sono C, B' e C': essa è la più grande nel primo dove, per esser $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\frac{7a}{20}$, il pezzo tende a rompersi. Le condizioni della rottura di questo pezzo sono dunque espresse, conforme al n° 358, dall'equazione

$$\rho = \Pi\frac{7a}{20}.$$

Si sono riguardati i pezzi verticali come appoggi inflessibili. La quistione sarebbe diversa e più complicata, se questi pezzi si supponessero flessibili o compressibili. Ma non è necessario per le applicazioni di trattare la quistione in tal modo, e non si avranno a temere errori pericolosi, dando ai pezzi verticali delle resistenze proporzionali agli sforzi, di cui qui sopra si son trovati i valori.

528. Si può sostenere un peso per mezzo di un sol pezzo inclinato, quando la sua estremità inferiore è incastrata. Questo caso di equilibrio è stato trattato ne'

n^{i} 412 e seg. La fig. 108 rappresenta un peso Π sostenuto da due pezzi inclinati, supponendo che le estremità inferiori sieno semplicemente sostenute sopra degli appoggi. Indicando per α e β gli angoli che i pezzi AC, BC formano colla corda verticale CΠ, gli sforzi che risultano nelle direzioni de' due pezzi dall' azione del peso Π, sono espressi rispettivamente da

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\ell}{\text{sen.}\,(\alpha+\ell)}, \quad \Pi \frac{\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}\,(\alpha+\ell)}.$$

Questi pezzi si appoggiano l' uno contro l' altro in C, e la pressione orizzontale che in questo punto ha luogo è

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\alpha.\text{sen.}\,\beta}{\text{sen.}\,(\alpha+\beta)}$$

In A e in B essi tendono ad allontanarsi, e questa stessa espressione rappresenta la pressione orizzontale che esercitano contro gli appoggi che li ritengono, o la tensione di una catena AB per mezzo della quale i pezzi sarebbero mantenuti.

529. Se i due pezzi AC, BC formano colla verticale degli angoli eguali indicati da α, gli sforzi esercitati nella direzione de' pezzi sono espressi da

$$\frac{\Pi}{2\cos.\alpha},$$

e la pressione orizzontale da

$$\tfrac{1}{2}\Pi \,\text{tang.}\,\alpha.$$

Ne' castelli di cui si tratta, i pezzi inclinati sono nello stato di equilibrio considerato n° 383, dovendosi alla forza Q di quel numero surrogare gli sforzi esercitati nella direzione de' pezzi.

530. Nel castello rappresentato dalla fig. 109, il pezzo AC è compresso e il pezzo BC stirato. La pressione eser-

citata secondo AC dev' esser la risultante delle tensioni delle corde BC e CΠ. Per conseguenza, indicando con α e ϵ gli angoli formati da AC e BC colla corda verticale CΠ, si avrà rispettivamente

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\epsilon}{\text{sen.}\,(\epsilon - \alpha)} \quad \text{e} \quad \Pi \frac{\text{sen.}\,\alpha}{\text{sen.}\,(\epsilon - \alpha)}$$

per la pressione esercitata secondo AC e per la tensione della corda BC. Il pezzo AC tende a scorrere in A sul suo appoggio, e la pressione orizzontale che esercita contro l' ostacolo che dee ritenerlo è

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\alpha\ \text{sen.}\,\epsilon}{\text{sen.}\,(\epsilon - \alpha)}.$$

I castelli ora considerati presentano un equilibrio stabile, relativamente agli spostamenti che potrebbero aver luogo nel piano verticale che contiene i pezzi inclinati, e la corda alla quale il peso è sospeso ; ma è necessario di mantenerli in questo piano per mezzo di funi.

531. Per dare maggiore stabilità al sistema, si sostituiscono al pezzo unico AC due pezzi inclinati aC, a'C (Fig. 110), formandosi così il castello conosciuto sotto il nome di *capra*. La linea AC essendo l' intersezione del piano verticale che contiene le corde BC, CΠ col piano aCa', che è perpendicolare al primo, s' indicheranno per α, ϵ gli angoli BCΠ. ACΠ, e per γ gli angoli eguali aCA, a'CA. L' azione del peso Π produrrà nel senso di ciascun pezzo aC, a'C una pressione espressa da

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\epsilon}{\text{sen.}\,(\epsilon - \alpha).\ 2\cos.\,\gamma}.$$

La forza colla quale il corrente aa' è teso è

$$\Pi \frac{\text{sen.}\,\epsilon.\,\text{tang.}\,\gamma}{2\ \text{sen.}\,(\epsilon - \alpha)}.$$

*

La tensione della corda BC, e la forza orizzontale colla quale le estremità inferiori a, a' de' pezzi inclinati tendono a scorrere parallelamente ad AB, sono espresse dalle formole date nel n° precedente.

532. Se ne' castelli di cui si tratta, il peso Π non fosse solamente sospeso al punto C, ma sollevato per mezzo di una corda che passa per una o più troclee fisse in questo punto, per determinare gli sforzi esercitati nella direzione de' pezzi, in vece del peso Π si dovrebbe considerare la risultante di questo peso e della tensione della corda alla quale sarebbe applicata la forza. Bisogna inoltre distinguere il caso rappresentato dalla fig. 111, in cui la corda CD che solleva il peso Π si avvolge sopra un verricello fisso in D, vicino all' estremità inferiore del pezzo AC. In questo caso, la parte AD del pezzo è semplicemente compressa collo sforzo risultante dall' azione del peso Π, ed espresso dalle formole de' numeri precedenti. La tensione della corda BC conserva del pari il valore dato in questi numeri. Ma la parte CD del pezzo principale è compressa nel senso della sua lunghezza collo sforzo risultante dall' azione del peso Π aumentato della tensione della corda CD. Lo stato di equilibrio di questa parte CD può esser assimilato senza errore pericoloso a quello del pezzo considerato n° 585.

533. Quando un peso è sostenuto da più di due pezzi inclinati contenuti in uno stesso piano verticale, o da più di tre pezzi inclinati non contenuti nello stesso piano, le condizioni dell' equilibrio lasciano indeterminati fra certi limiti gli sforzi esercitati secondo la direzione di ciascun pezzo. In fatti, benchè il peso sembra dover esser sostenuto da tutti i pezzi, niente im-

pedisce di supporre che lo sia nel primo caso da due tra essi soltanto, e nel secondo solamente da tre. Fra questi pezzi, quelli che sono compressi si trovano nello stato di equilibrio considerato n° 383; e siamo condotti da' risultamenti della soluzione esposta in quel numero, ad assimilarli a degli appoggi che non cedono, finchè lo sforzo che sostengono non oltrepassa un limite determinato. Considerando il sistema di questa maniera, affinchè la costruzione dia un' intera sicurezza, bisogna che il massimo sforzo al quale ogni pezzo è esposto dietro i diversi modi di decomposizione del peso che possono aver luogo, sia al di sotto del limite di cui si è parlato. Ma è importante di osservare che la soluzione del n° 383, che fa vedere che un pezzo compresso nel senso della lunghezza non cede quando lo sforzo è al di sotto di un limite dato, prende unicamente in considerazione la disposizione del pezzo a cedere per effetto di una flessione. In realtà il pezzo prima di piegarsi, si comprime sempre più per effetto dell' elasticità della sua sostanza. Convien aver riguardo a questa circostanza, nelle quistioni di cui si tratta, e allora non vi è più nulla d' indeterminato nella maniera come l' azione del peso si distribuisce sugli appoggi.

Per darne un esempio, supporremo il peso Π (Fig. 112) sostenuto da' tre pezzi inclinati AC, A′C, A″C contenuti nello stesso piano verticale, e chiameremo

α, α', α'' gli angoli formati dalla direzione de' tre pezzi colla corda verticale CΠ;

p, p', p'' gli sforzi esercitati, in seguito dell' azione del peso Π, nella direzione di ciascun pezzo;

F, F′, F″ le forze di elasticità de' tre pezzi;

a l' altezza del punto C al di sopra della linea orizzontale AA'' ;

h, f le quantità di cui si sposta il punto C orizzontalmente e verticalmente per effetto della compressione simultanea de' tre pezzi.

(Indicando per F la forza di elasticità del pezzo AC, s' intende che bisognerebbe un peso eguale a F per allungare o accorciar questo pezzo di una quantità eguale alla sua lunghezza attuale, e cosi degli altri).

Ciò posto, le condizioni dell' equilibrio tra 'l peso Π e le tre pressioni esercitate secondo i pezzi daranno immediatamente

$$p\cos.\alpha + p'\cos.\alpha' + p''\cos.\alpha'' = \Pi,$$

$$p\,\text{sen}.\alpha + p'\,\text{sen}.\alpha' + p''\,\text{sen}.\alpha'' = 0.$$

Di più, supponendo piccolissimo lo spostamento del punto C, i pezzi AC, A'C, A''C si trovano compressi presso a poco delle quantità $f\cos.\alpha - h\,\text{sen}.\alpha$, $f\cos.\alpha' - h\,\text{sen}.\alpha'$, $f\cos.\alpha'' - h\,\text{sen}.\alpha''$ (*); e come le loro lun-

---

(*) Ammettendo che il punto C si sposti di una quantità picciolissima, gli angoli α, α', α'' si potranno considerar come eguali nelle due posizioni del punto C. In questa medesima ipotesi sarà facile trovare che pel pezzo che fa colla verticale l' angolo α, $f\cos.\alpha$ ed $h\,\text{sen}.\alpha$ rappresenteranno presso a poco le quantità di cui esso si comprime rispettivamente per effetto degli spostamenti f ed h. Riunendo queste due espressioni, si avrà la quantità totale della compressione ricevuta dal pezzo.

Riguardando, giusta la convenzione ordinaria, le pressioni p, p', p'' come positive, si farà dipender il loro segno da' coseni degli angoli che le loro direzioni fanno con due assi rettangolari, l' uno verticale l' altro orizzontale. Volendo che h ed f sieno anche positive, si prenderà il senso delle x e delle y positive

ghezze sono rispettivamente $\frac{a}{\cos.\alpha}$, $\frac{a}{\cos.\alpha'}$, $\frac{a}{\cos.\alpha''}$, si avrà

$$\frac{f\cos.^2\alpha - h\,\text{sen}.\alpha\cos.\alpha}{a}, \quad \frac{f\cos.^2\alpha' - h\,\text{sen}.\alpha'\cos.\alpha'}{a}, \quad \frac{f\cos.^2\alpha'' - h\,\text{sen}.\alpha''\cos.\alpha''}{a}$$

per le frazioni delle lunghezze che rappresentano i rispettivi accorciamenti. Se ne ricavano le tre equazioni

$$p = \mathrm{F}.\frac{f\cos.^2\alpha - h\,\text{sen}.\alpha\cos.\alpha}{a},$$

$$p' = \mathrm{F}'.\frac{f\cos.^2\alpha' - h\,\text{sen}.\alpha'\cos.\alpha'}{a},$$

$$p'' = \mathrm{F}''.\frac{f\cos.^2\alpha'' - h\,\text{sen}.\alpha''\cos.\alpha''}{a},$$

che insieme colle due precedenti daranno i valori degli spostamenti h ed f, e degli sforzi p, p', p''.

534. Supponiamo per esempio, esser eguali le forze

---

per lo stesso verso per lo quale si è mosso il punto C orizzontalmente e verticalmente.

Le due equazioni stabilite

$$p\cos.\alpha + p'\cos.\alpha' + p''\cos.\alpha'' = \Pi,$$

$$p\,\text{sen}.\alpha + p'\,\text{sen}.\alpha' + p''\,\text{sen}.\alpha'' = 0,$$

racchiudono la condizione che la risultante delle tre pressioni è una forza verticale eguale a Π. La seconda di esse mostra che dei sen.α alcuni debbono esser positivi, altri negativi; mentre può avvenire che tutti i cos α sieno positivi. Perciò nell' introdurre i seni e cosenii è necessario far attenzione a' segni che debbono accompagnarli, il che si fa facilmente quando le pressioni sono rapportate ad assi rettangolari.

Nel riunire le due espressioni $f\cos.\alpha$ ed $h\,\text{sen}.\alpha$ per aver l'intero accorciamento del pezzo, convien prenderle col segno che ad esse compete; sicchè il pezzo sarà stato compresso o stirato secondo che la loro somma risulterà positiva o negativa.

di elasticità de' tre pezzi, il pezzo intermedio A'C verticale, e gli angoli α, α'' eguali a 45°. Lo spostamento orizzontale h del punto C sarà nullo, e si potrà sopprimere la seconda delle due equazioni di equilibrio. Si avrà $\cos.\alpha' = 1$, $\cos.\alpha = \cos.\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e

$$f = \frac{\sqrt{2}.\Pi a}{F(1+\sqrt{2})},\ p = p'' = \frac{\Pi}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})},\ p' = \frac{\sqrt{2}.\Pi}{1+\sqrt{2}};$$

lo sforzo sostenuto dal pezzo verticale è doppio degli sforzi sostenuti dagli altri due (*).

(*) Pel principio della ragion sufficiente si vede dover esser in questo caso $h = 0$ e $p = p''$. Ma quando anche ciò non si vedesse *a priori*, le formole stabilite condurrebbero al medesimo risultamento. In fatti quelle cinque equazioni di sopra, essendo $\cos.\alpha' = 1$, $\text{sen}.\alpha' = 0$, $\cos\ \alpha = \cos.\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, divengono

$$\frac{(p+p'')}{\sqrt{2}} + p' = \Pi,\ p\ \text{sen}.\alpha + p''\ \text{sen}\ \alpha'' = 0,$$

$$p = \frac{F}{a}\left(\frac{f}{2} - \frac{h\text{sen}\ \alpha}{\sqrt{2}}\right),\ p' = \frac{F}{a}.\frac{f}{2},\ p'' = \frac{F}{a}\left(\frac{f}{2} - \frac{h\text{sen}.\alpha''}{\sqrt{2}}\right).$$

La seconda equazione dà $p\ \text{sen}.\alpha = -p''\ \text{sen}.\alpha''$; e poichè $\cos.\alpha = \cos.\alpha''$, ne risulta $\text{sen}.\alpha = -\text{sen}.\alpha''$, d' onde $p = p''$. Con questi valori le altre equazioni diverranno

$$p\sqrt{2} + p' = \Pi,\ p = \frac{F}{a}.\frac{f-h}{2},\ p' = \frac{Ff}{a},\ p'' = \frac{F}{a}.\frac{f+h}{2}.$$

La seconda e la quarta di queste equazioni non potrebbero sussistere insieme se non fosse $h = 0$; e quindi rimangono le equazioni

$$p = p'',\quad p = \frac{Ff}{2a},\quad p' = \frac{Ff}{a},\quad p\sqrt{2} + p' = \Pi,$$

delle quali facilmente si ricavano i valori riportati nel testo.

È facile estender questa soluzione ad un numero qualunque di pezzi posti in piani diversi e concorrenti in un medesimo punto. In fatti rapportando tutto il sistema a tre assi rettangolari col-

535. Se i tre pezzi fossero posti da uno stesso lato

---

l' origine nel punto di sospensione C, e prendendo per asse delle z la verticale, si chiamino

α, β, γ gli angoli fatti da un pezzo qualunque cogli assi delle x, y, z rispettivamente;

h, k, f le quantità di cui si sposta il punto C nel senso delle x, y, z; ritenendo gli altri dati, si avrà

$$p\cos.\gamma + p'\cos.\gamma' + p''\cos.\gamma'' + \ldots = \Pi,$$
$$p\cos.\beta + p'\cos.\beta' + p''\cos.\beta'' + \ldots = 0,$$
$$p\cos.\alpha + p'\cos.\alpha' + p''\cos.\alpha'' + \ldots = 0,$$

per esprimere che la risultante è una forza verticale. La compressione totale ricevuta da un pezzo sarà espressa generalmente da $f\cos\ \gamma + k\cos.\beta + h\cos.\alpha$; sicchè si avranno le altre equazioni

$$p = \mathrm{F}\frac{(f\cos\ \gamma + k\cos.\beta + h\cos.\alpha)\cos.\gamma}{a},$$
$$p' = \mathrm{F}'\frac{(f\cos.\gamma' + k\cos.\beta' + h\cos.\alpha')\cos.\gamma'}{a},$$
$$p'' = \mathrm{F}''\frac{(f\cos.\gamma'' + k\cos.\beta'' + h\cos.\alpha'')\cos.\gamma''}{a},$$

ec.

Se si chiami ω l' angolo che la projezione del pezzo sul piano orizzontale fa coll' asse delle x, queste equazioni diverranno:

$$p\cos.\gamma + p'\cos.\gamma' + p''\cos.\gamma'' + \ldots = \Pi,$$
$$p\,\mathrm{sen}.\gamma\,\mathrm{sen}.\omega + p'\mathrm{sen}.\gamma'\,\mathrm{sen}.\omega' + p''\mathrm{sen}.\gamma''\,\mathrm{sen}.\omega'' + \ldots = 0,$$
$$p\,\mathrm{sen}.\gamma\cos.\omega + p'\mathrm{sen}.\gamma'\cos.\omega' + p''\mathrm{sen}.\gamma''\cos.\omega'' + \ldots = 0;$$
$$p = \frac{\mathrm{F}}{a}(f\cos.\gamma + k\,\mathrm{sen}.\gamma\,\mathrm{sen}.\omega + h\,\mathrm{sen}.\gamma\cos.\omega)\cos.\gamma,$$
$$p' = \frac{\mathrm{F}'}{a}(f\cos.\gamma' + k\,\mathrm{sen}.\gamma'\,\mathrm{sen}.\omega' + h\,\mathrm{sen}.\gamma'\cos.\omega)\cos.\gamma',$$
$$p'' = \frac{\mathrm{F}''}{a}(f\cos.\gamma'' + k\,\mathrm{sen}.\gamma''\cos.\omega + h\,\mathrm{sen}.\gamma''\cos.\omega'')\cos.\gamma'',$$

ec.

per rapporto alla corda verticale CΠ (Fig. 112), solo il primo AC sarebbe compresso, e gli altri due stirati. Le equazioni del n° 533 converrebbero egualmente a questo caso, cangiandovi i segni di p' e p''.

536. Nel castello rappresentato dalla fig. 113 in cui i pezzi inclinati AB, A′B′ contenuti in uno stesso piano verticale colla corda CΠ, sostengono il peso Π per mezzo del pezzo orizzontale BB′, affinchè il sistema stia in equilibrio, è necessario, fatta astrazione dalla resistenza delle articolazioni, che i pezzi AB, A′B′ sieno egualmente inclinati. Essendo α l' angolo che dessi formano colla verticale, questi pezzi sono compressi secondo la loro lunghezza colla forza $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$, e sono nello stesso stato di equilibrio del pezzo considerato n° 383. Le estremità A, A′ tendono ad allontanarsi l' una dall' altra con una forza orizzontale espressa da $\frac{1}{2}\Pi\,\text{tang.}\,\alpha$.

Quanto al pezzo orizzontale BB′, ogni metà BC o B′C′ è nello stesso caso che se fosse incastrata orizzontalmente in C, e sollecitata all' estremità B o B′ dalla forza diretta secondo AB o A′B′. Queste metà si trovano dunque nello stesso stato di equilibrio del pezzo considerato n° 412, essendo $\frac{1}{2}\Pi$, $\frac{1}{2}\Pi\,\text{tang.}\,\alpha$ e $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$ le forze che in quel numero sono rappresentate rispettivamente per P, Q, Π.

537. Nel n° 528 si è considerato il caso di un peso Π sostenuto da due pezzi inclinati, e si è osservato esser necessario ritenere le loro estremità inferiori che tendono ad allontanarsi. Si può ancora formare un castello dello stesso genere, lasciando le estremità A, B (Fig. 114) libere di scorrere sul piano orizzontale che le sostiene, e situando ad una certa altezza una piana orizzontale EF.

Chiamiamo

α l' angolo formato da' pezzi AC, BC colla corda verticale CΠ;

a la lunghezza delle parti CE, CF;

a' la lunghezza delle parti AE, BF.

I punti di appoggio A e B sostengono ciascuno uno sforzo verticale eguale a $\frac{\Pi}{2}$. Ogni pezzo AC, BC può esser riguardato come sollecitato da questo sforzo a girare attorno la sua estremità superiore, e deve stabilirsi nella piana EF la tensione necessaria per prevenire questo moto. Questa tensione è dunque determinata dalla condizione che il suo momento preso per rapporto al punto C sia eguale al momento dello sforzo verticale $\frac{\Pi}{2}$ agente in A o in B, preso rapporto allo stesso punto. Per conseguenza il valore della tensione di cui si tratta è

$$\Pi \frac{a+a'}{2a} \text{ tang.} \alpha ;$$

e questa formola rappresenta ancora la pressione orizzontale che esercitano l' uno contro l' altro in C i due pezzi CA, CB. Da ciò si vede che le parti di questi pezzi sono nello stesso caso del pezzo considerato ne' n^{i} 412 e seg. La parte AE dev' esser riguardata come incastrata in E e sollecitata in A dallo sforzo verticale $\frac{\Pi}{2}$ che tende a contrarlo. La parte CE deve parimenti esser riguardata come incastrata in E e sollecitata in A dallo sforzo verticale $\frac{\Pi}{2}$ e dallo sforzo orizzontale $\Pi \frac{a+a'}{2a}$ tang.α, i quali tendono tutti due a contrarlo.

538. Si può supporre che nel sistema considerato

n° 528 e rappresentato dalla fig. 108, si metta oltre la piana AB un altra piana orizzontale EF, come indica la fig. 114. In questo caso lo sforzo orizzontale $\frac{1}{2}\Pi \operatorname{tang}.\alpha$ col quale i pezzi tendono ad allontanarsi fra loro, è ancora interamente sostenuto dagli ostacoli posti in A e B o dalla piana AB. Si deve assimilare il pezzo AC a quello considerato n° 383, ma ammettendo che uno de' suoi punti sia renduto fisso. Risulta dall' analisi esposta in quel numero, in cui i pezzi son riguardati come verghe flessibili e non compressibili che se il punto fisso E è posto a uno de' punti di divisione del pezzo in 2, 3, cc. parti eguali, il valore dello sforzo capace di farlo piegare diverrà 4, 9, ec. volte più grande che se non esistesse alcun punto fisso. Si deve inoltre aver riguardo alle nozioni esposte n° 403 per apprezzare il più grande sforzo al quale il pezzo possa esser esposto.

La piana EF posta in uno de' punti di divisione del pezzo AC in parti eguali, non soffre alcuna tensione longitudinale. In fatti, benchè l'esistenza di un punto fisso così posto determina nel pezzo un modo particolare di flessione, in questo punto non si esercita sforzo alcuno.

Le osservazioni or ora fatte possono esser applicate al castello considerato n° 536 e rappresentato dalla fig. 113, se si suppone che un corrente orizzontale sia posto a una certa altezza tra i pezzi AB, A'B'.

539. Il castello rappresentato fig. 115 è formato del peso Π sospeso all' estremità C del pezzo orizzontale BC che è consolidato dal saettone AD. I punti A e B sono fissi, ma si suppone i pezzi esser liberi di girare intorno a questi punti. Chiameremo

l, l' le distanze BD, CD;

α l'angolo BAD.

Il punto fisso B sostiene da sotto in sopra uno sforzo verticale $\Pi \frac{l'}{l}$ che fa equilibrio al peso Π attorno il punto D. Il punto D è caricato della somma del peso Π e di questo sforzo, che è $\Pi \frac{l+l'}{l}$. Questa carica dovendo esser sostenuta dal pezzo AD, si stabilisce nel senso della sua lunghezza la pressione $\Pi \frac{l+l'}{l.\cos.\alpha}$, e nel tempo stesso nella direzione BD la tensione $\Pi \frac{l+l'}{l}$ tang.α, che è distrutta dalla resistenza del punto fisso B. Per conseguenza, per assicurarsi che il castello ha forza sufficiente per sostenere il peso Π, bisogna prima esaminare se il saettone AD assimilato al pezzo considerato n° 383 può sostenere la pressione longitudinale $\Pi \frac{l+l'}{l \cos.\alpha}$. Il pezzo BC dev' esser poscia riguardato come obbligato a passare in B e D per punti fissi, come stirato nella parte BD dalla forza $\Pi \frac{l+l'}{l}$ tang.α, e sollecitato a rompersi in D da una forza il cui momento è $\Pi l'$, e che tende a produrre in questo punto una curvatura il cui raggio ha per valore inverso $\frac{\Pi l'}{\varepsilon}$. Dietro ciò se, come al n° 387, si vuole che il massimo sforzo esercitato sull' unità di superficie non superi R', si stabilirà l' equazione

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{(l+l') \text{ tang } \alpha}{E\omega.l} + \frac{\nu' l'}{\varepsilon}\right);$$

che diviene, quando la sezione trasversale è un rettangolo di cui b e c rappresentano la larghezza e l'altezza,

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2}\left(\frac{c(l+l') \text{ tang.} \alpha}{l} + 6\, l'\right),$$

e che darà il massimo valore del peso Π di cui si possa caricar l' apparato.

540. Si supporrà ora che il pezzo orizzontale BC e il saettone DE (Fig. 116) sieno uniti ad un pezzo verticale AB, incastrato nell'estremità inferiore. Quel che è stato detto più sopra potrà applicarsi ai pezzi BC, DE. Quanto al pezzo AB, esso è sollecitato in E dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{l\cos.\alpha}$ diretta secondo DE, ed equivalente a una forza orizzontale $\Pi\frac{l+l'}{l}\text{tang.}\alpha$, ed una verticale $\Pi\frac{l+l'}{l}$. Lo stesso pezzo è sollecitato in B dalla forza orizzontale $\Pi\frac{l+l'}{l}\text{tang.}\alpha$ diretta nel senso BD e dalla forza verticale $\Pi\frac{l'}{l}$ diretta da sotto in sopra. Per maggior semplicità, supporremo la curvatura del pezzo AB estremamente piccola in modo che si possano trascurare gli spostamenti de' punti B, E rispetto alle lunghezze delle parti del pezzo (il che è permesso ne' casi ordinari delle applicazioni). Si vedrà allora 1° che questo pezzo, compresso longitudinalmente nell' intervallo AE dallo sforzo Π, è sollecitato a rompersi in un punto qualunque di questo intervallo da una forza di cui $\Pi(l+l')$ è il momento, e che tende per conseguenza a produrre una curvatura il cui raggio ha per valore inverso $\frac{\Pi(l+l')}{\varepsilon}$ (*).

(*) Trascurando i momenti delle forze agenti nel senso della lunghezza del pezzo, il solido AB, incastrato in A, si troverà sollecitato da due forze eguali, agenti perpendicolarmente alla sua lunghezza, dirette in senso contrario, ed applicate l' una in B l' altra in E. Questo caso presenta una singolarità che merita es-

Il limite de' valori di Π, per ottener che le fibre non sostengano sull' unità di superficie una pressione che sorpassa R', sarà dunque dato, conforme a quel che si è veduto n° 387, dall' equazione

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{1}{E\omega} + \frac{\nu'(l+l')}{\varepsilon}\right),$$

---

ser avvertita. Chiamando a, a' le lunghezze delle parti AE, EB, ed R la forza applicata in B e in E, l' equazione di equilibrio della parte AE sarà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -R(a-x) + R(a+a'-x);$$

ovvero

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Ra'.$$

Avendo l'espressione $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ un valore costante, il solido nella parte AE prenderà una curvatura uniforme, e potrà rompersi in un punto qualunque dell' intervallo AE.

L' equazione di equilibrio della parte BE sarà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = R(a+a'-x).$$

Volendo procedere alle integrazioni, si determineranno le costanti colla condizione che nel punto E le curve delle due parti del pezzo, abbian comuni la tangente e l' ordinata, secondo le norme stabilite ne' n^{i} 359 e seg.

Il massimo valore di $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}$ per la parte BE si ottiene, quando x ha il minimo valore possibile, cioè quando $x = a$; perciò il punto di rottura è in E, ove si ha

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = Ra'.$$

Rimettendo per R ed a' i valori corrispondenti al caso di cui si tratta, il momento Ra' diviene $\Pi(l+l')$.

la quale, quando la sezione è rettangolare, diviene

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2}[c + 6(l + l')].$$

2° Che lo stesso pezzo AB, stirato longitudinalmente nell' intervallo BE dallo sforzo $\Pi \frac{l''}{l}$, è sollecitato a rompersi in E da una forza che ha per momento $\Pi(l + l')$. Il limite de' valori di Π, affinchè le fibre non sostengano in questo punto sull' unità di superficie una tensione che sorpassi R', sarà dunque dato dall' equazione

$$\frac{R'}{E} = \Pi\left(\frac{l''}{E\omega . l} + \frac{\omega'(l + l')}{\varepsilon}\right),$$

che diviene quando la sezione del pezzo è rettangolare

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2}\left\{\frac{cl''}{l} + 6(l + l')\right\}.$$

Se il punto D è nel mezzo di BC, il pezzo AB tende egualmente a rompersi in un punto qualunque dell' intervallo AE, e in E. Il pezzo tende a spezzarsi piuttosto nell' intervallo AE che in E se BD è $<$ CD. Lo stato di equilibrio del pezzo non dipende dall' inclinazione del saettone DE.

541. In conseguenza della curvatura che prende il pezzo, e di cui non si tien conto nelle formole precedenti, i valori del peso Π dati da queste formole saranno un pò troppo grandi; e il pezzo tende a rompersi in A piuttosto che in un altro punto dell'intervallo AE. Dietro ciò noi esamineremo d'una maniera compiuta lo stato di equilibrio del pezzo verticale AB. Indicheremo per

a la lunghezza della parte AE;

a' la lunghezza della parte BE.

x, y l' ascissa verticale e l' ordinata orizzontale della

curva del pezzo, essendo l' origine delle coordinate in A;

f l' ordinata del punto E;

f' l' ordinata del punto estremo B.

Osservando che $a' = \frac{l}{\text{tang.}\,\alpha}$, si rileva da ciò che precede che il pezzo AB è sollecitato 1° in E dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{a'}$ agente orizzontalmente da dritta a sinistra e dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{l}$ agente verticalmente da sopra in sotto; 2° in B dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{a'}$ agente orizzontalmente da sinistra a dritta, e dalla forza $\Pi\frac{l'}{l}$ agente verticalmente da sotto in sopra. Per conseguenza 1° l' equazione esprimente le condizioni dell' equilibrio della parte AE del pezzo sarà

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi\frac{l+l'}{a'}(a-x) + \Pi\frac{l+l'}{l}(f-y) + \Pi\frac{l+l'}{a'}(a+a'-x) - \Pi\frac{l'}{l}(f'-y),$$

o pure

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(l+l'+\frac{(l+l')f-l'f'}{l}-y\right). \qquad (\alpha)$$

2° l' equazione esprimente le condizioni dell' equilibrio della parte BE sarà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon}\left(\frac{l+l'}{a'}(a+a'-x) - \frac{l'}{l}(f'-y)\right). \qquad (\beta)$$

Operando come nel n° 406, si ha per l' integrale dell' equazione (α), o per l' equazione della curva della parte AE del pezzo,

$$y = \left\{l+l'+\frac{(l+l')f-l'f'}{l}\right\}\left\{1-\cos.\,x\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\right\}. \qquad (\gamma)$$

Chiamiamo φ l' inclinazione della tangente della curva nel punto che corrisponde al punto E : questa equazione dovrà dare, quando $x = a$, $y = f$ e $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\varphi$. Dunque

$$f = \left\{l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l}\right\}\left\{1 - \cos.a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\right\},$$

$$\text{tang.}\varphi = \left\{l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l}\right\}\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}.\ \text{sen.}\,a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}.$$

Operando come nel n° 415, si ha per l' integrale dell' equazione (β), o per l' equazione della curva della parte BE del pezzo,

$$f' - y = \text{A}\left(e^{\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}(a+a'-x)} - e^{-\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}(a+a'-x)}\right) + \frac{l(l+l')}{a'l'}(a+a'-x), \qquad (\delta)$$

essendo A un coefficiente arbitrario. Dovendo questa equazione dare come la precedente $y = f$ e $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\varphi$ quando $x = a$, risulta

$$f' - f = \text{A}\left(e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}\right) + \frac{l(l+l')}{l'},$$

$$\text{tang.}\varphi = \text{A}\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}\left(e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} + e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}\right) + \frac{l(l+l')}{a'l'}.$$

Avendosi quattro equazioni lineari tra le quantità f, f', tang.φ ed A, si elimineranno facilmente le due ultime, e si determineranno i valori di f e f'. Sostituiti questi valori nelle equazioni (γ) e (δ), si conosceranno le equazioni delle due parti della curva secondo la quale si piega il pezzo.

542. Siccome non si considerano che delle flessioni picciolissime, si commetterà un errore picciolissimo trascurando f e f' nel secondo membro delle due prime equazioni di cui si tratta, il che le riduce a

$$f=(l+l')\left\{1-\cos.a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\right\},$$

$$\text{tang.}\varphi=(l+l')\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\,\text{sen.}\,a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}};$$

d' onde

$$A=(l+l')\frac{\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}.\,\text{sen.}\,a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}-\frac{l}{a'l'}}{\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}\left(e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}+e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}\right)}.$$

L' equazione (γ) dà pel punto A che è quello ove la curvatura è la più grande nella parte AE del pezzo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\Pi}{\varepsilon}(l+l').$$

L' equazione (δ) dà pel punto E ove la curvatura è la più grande nella parte EB del pezzo,

$$-\frac{d^2y}{dx^2}=A.\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}\left(e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}-e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}\right),$$

o mettendo per A il valor precedente

$$=\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}.(l+l')\left(\frac{l}{a'l'}-\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\,\text{sen.}\,a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}\right).\frac{e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}-e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}}{e^{a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}+e^{-a'\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}}}.$$

Queste espressioni moltiplicate per ν', daranno la più grande stensione sofferta dalle fibre per ragion della curvatura, e serviranno a determinare le dimensioni neces-

sarie a darsi al pezzo affinchè resista a uno sforzo dato, siccome si è veduto negli articoli precedenti.

La quantità $\frac{\Pi}{\varepsilon}$ nella maggior parte delle applicazioni sarà picciolissima, e il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ al punto E, trascurando le quantità dell' ordine di $\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}$, si potrà ridurre a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon}(l+l'). \quad (*)$$

Quest' ultimo risultamento si accorda con quelli presentati al n° 540.

543. Qualche volta il pezzo AB non è incastrato nell' estremità inferiore; ma è consolidato da un pezzo inclinato AF (Fig. 117). In questo caso, tutto ciò che è stato detto ne' numeri precedenti deve applicarsi alla parte del castello situata al di sopra del punto A. Quanto alla parte situata al di sotto di questo punto, supponiamo prima il pezzo AF diretto in modo che il punto F sia al di là della verticale che passa pel punto di sospensione del peso Π. Chiamiamo h la distanza AA', φ l'angolo $A'AF$, e indichiamo sempre per $l+l'$ la distanza BC. Il peso Π tende a far girare il pezzo $A'B$ at-

---

(*) In fatti sviluppando gli esponenziali, e arrestandosi al secondo termine, l' ultima frazione si riduce a $\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}$; trascurando parimenti $\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}$ sen.$a\sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} = a\frac{\Pi}{\varepsilon}$ a fronte di $\frac{l}{a'l'}$, l' equazione di sopra riducesi a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}\cdot(l+l')\cdot\frac{l}{a'l'}\sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} = \frac{\Pi}{\varepsilon}(l+l').$$

torno il punto A', e il suo momento preso rispetto a questo punto è $\Pi(l+l')$. Affinchè questo moto non abbia luogo è necessario che il pezzo AF opponga nel senso della lunghezza una resistenza $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{sen.}\,\varphi}$. Questa forza agisce al punto A nella direzione FA, ed equivale a una forza orizzontale $\Pi\frac{l+l'}{h}$, e un altra verticale $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}$ diretta da sotto in sopra. Perciò 1° il pezzo AF dev'esser assimilato al pezzo considerato n° 383, essendo quì $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{sen.}\,\varphi}$ la forza ivi indicata da Q; 2° la parte AA' del pezzo verticale non è più compressa secondo la lunghezza che colla forza $\Pi\left(1-\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}\right)$. Ma siccome lo sforzo orizzontale $\Pi\frac{l+l'}{h}$ esercitato al punto A dal pezzo AF dev' esser distrutto da uno sforzo eguale esercitato in senso contrario al punto d'appoggio A', questa parte AA' è nello stesso caso di un pezzo incastrato a una estremità e sollecitato all'altra dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}$ che tende a comprimerlo longitudinalmente, e dalla forza $\Pi\frac{l+l'}{h}$ diretta perpendicolarmente alla sua lunghezza.

Se poi il pezzo inclinato è diretto in modo che il punto F si trova al di quà della verticale che passa pel punto di sospensione del peso Π, l'armatura tenderà a girare sul punto F. La forza comprimente il pezzo AF sarà sempre espressa da $\Pi\frac{l+l'}{h\,\text{sen.}\,\varphi}$, e la parte AA' del pezzo verticale sarà stirata secondo la sua lunghezza con la forza $\Pi\left(\frac{l+l'}{h\,\text{tang.}\,\varphi}-1\right)$. Sarebbe allora

necessario che quest' ultimo pezzo fosse attaccato in A′ al suo punto d' appoggio.

544. Nel castello rappresentato dalla fig. 118 il peso Π è sospeso in C nel mezzo del pezzo orizzontale BB′, appoggiato colle estremità sopra punti fissi, e consolidato da' saettoni AD, A′D′ connessi con questo pezzo, ed appoggiati essi pure contro punti fissi in A e A′. Piegando il pezzo BB′ sotto l' azione del peso Π, e comprimendosi i saettoni, l' azione del peso si trova ripartita su i quattro punti fissi. Il metodo impiegato in diverse quistioni precedentemente trattate potrebbe far conoscere le condizioni della flessione e della rottura di questo castello. Ma in generale trattandosi nelle applicazioni non tanto di conoscere il peso capace di operar la rottura quanto un limite al di sopra del quale trovasi necessariamente questo peso, si può in questo ed in casi simili evitare nel modo seguente il calcolo complicato cui si perverrebbe.

Si distingueranno nel castello proposto due sistemi, de' quali ciascuno sosterrebbe solo il peso Π, e in ciascuno de' quali le condizioni della flessione e della rottura possono esser immediatamente conosciute: cioè 1° il pezzo BB′ appoggiato sui punti B, B′, fatta astrazione da' saettoni; 2° la porzione di poligono ADD′A′ appoggiata sui punti A, A′, fatta astrazione dal legame della parte DD′ della trave colle parti BD, B′D′. Essendo ciascuno di questi sistemi, considerato a parte, men forte del castello proposto, si è sicuri che il peso che può rompere il castello è maggiore di quello che romperebbe il più forte de' due sistemi.

Se il pezzo BB′, appoggiato su' punti B, B′ sostenesse solo il peso Π, il valore di questo peso determinato colla

condizione di non obbligare il pezzo a rompersi in C dovrebbe esser valutato secondo il n° 122.

Se il sistema ADD'A' sostenesse solo il peso Π, e che niuno sforzo fosse esercitato su' punti B,B', si sarebbe nel caso del n° 536. Per conseguenza indicando per α l' angolo BAD, 1° il peso Π affinchè non obbligasse il pezzo DD' a rompersi in C, dovrebbe esser determinato dalle equazioni de' n^{i} 413 o 414, in cui a rappresenterebbe la distanza CD, e dove si metterebbe $\frac{1}{2}\Pi$ e $\frac{1}{2}\Pi$ tang.α in luogo di P e Q; 2° affinchè i saettoni resistessero allo stesso peso, questo dovrebbe esser determinato conforme ai n^{i} 383 e 403, prendendo $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$ per lo sforzo esercitato secondo la loro lunghezza.

Nelle applicazioni, l' equazione del n° 414 differirà generalmente assai poco da $R' = \frac{1}{bc^2}(Qc+6Pa)$; o mettendo per P e Q i valori precedenti,

$$R' = \frac{\Pi}{2.bc^2}(c\,\text{tang.}\,x+6a).$$

Da un altro lato, chiamando a' la distanza BD, si ricaverebbe dal n° 122, considerando l' equilibrio del pezzo BB' sostenuto sui punti B, B',

$$R' = \frac{\Pi.6(a+a')}{2.bc^2}.$$

Per conseguenza quando si tratta di un pezzo rettangolare, affinchè il sistema ADD'A' sia più forte del pezzo BB', basta che tang.x sia $< \frac{6a'}{c}$; supponendo d' altronde ai saettoni AD, A'D' una resistenza sufficiente.

545. Si supporrà ora che il pezzo orizzontale BB' e i saettoni DE, D'E' (Fig. 119) sieno uniti ai due pezzi ver-

ticali AB, A′B′. Se in questo castello le estremità inferiori A, A′ fossero semplicemente sostenute, e potessero scorrere liberamente sui loro appoggi, i saettoni darebbero stabilità all' equilibrio del sistema, ma non ne aumenterebbero la forza, e il pezzo orizzontale BB′ sarebbe sollecitato a rompere in C come se i saettoni non esistessero. In fatti questo pezzo, è ne' due casi egualmente sollecitato a romper in C dalla forza $\frac{1}{2}\Pi$ agente da sotto in sopra al punto A col braccio di leva BC.

546. Se al contrario si suppone nel castello rappresentato dalla fig. 119, che le estremità inferiori A, A′ de' ritti sieno fisse, gli sforzi esercitati su questi punti potranno esser supposti diretti obliquamente, il che diminuirà l' azione che tende a romper in C il pezzo BB′. Si potrà applicare a questo castello il principio impiegato n° 544, distinguendo due sistemi, di cui ciascuno potrebbe solo sostener il peso Π; cioè 1° il pezzo BB′ sostenuto solamente dai ritti AB, A′B′; e 2° la porzione di poligono EDD′E′ appoggiata in E, E′ contro questi stessi ritti.

Affinchè il primo sistema sostenga il peso Π, bisogna che questo peso non possa rompere il pezzo BB′ sostenuto alle sue estremità, e di più che i pezzi AB, A′B′ resistano ciascuno a una pressione longitudinale $\frac{1}{2}\Pi$.

Affinchè il secondo sistema sostenga lo stesso peso, bisogna in primo luogo che la porzione del pezzo DD′ e i saettoni DE, D′E′ abbiano una forza sufficiente, conforme a ciò che si è veduto n° 544. Si osserverà in seguito che si esercita in E nella direzione DE uno sforzo $\frac{\Pi}{2\cos.\alpha}$, equivalente a una forza orizzontale $\frac{\Pi \tang \alpha}{2}$ e una verticale $\frac{\Pi}{2}$. La forza verticale è trasmessa al punto

d' appoggio A. L' orizzontale si decompone in due altre applicate ai punti A e B. Chiamando h, h' le distanze AE, BE, si ha $\frac{\Pi h' \text{tang.} \alpha}{2(h+h')}$ per la componente applicata in A, che è distrutta dalla resistenza del punto d' appoggio; e $\frac{\Pi h \text{tang.} \alpha}{2(h+h')}$ per la componente applicata in B che produce una tensione nella porzione del pezzo BD. Per conseguenza bisogna in secondo luogo che le porzioni di pezzo BD, B'D' possano resistere alla tensione longitudinale $\frac{\Pi h \text{tang} \alpha}{2(h+h')}$. Terzo finalmente, quanto ai pezzi verticali AB, A'B', si può riguardare il pezzo AB come mantenuto fisso al punto E, e sollecitato all' estremità A da una forza verticale $\frac{\Pi}{2}$, e da una orizzontale, il cui momento per far piegare il pezzo in E è $\frac{\Pi hh' \text{tang.} \alpha}{2(h+h')}$. Il momento della forza orizzontale agente all' estremità B per far piegare il pezzo in quel punto, ha lo stesso valore. Per conseguenza trascurando, come si è fatto nel n° 540, la considerazione della curvatura de' pezzi, e conformandosi al n° 387, il limite de' valori di Π, affinchè le fibre de' pezzi verticali AB, A'B' non sostengano sull' unità di superficie, ai punti di rottura E, E', delle pressioni che sorpassino R', sarà dato dall' equazione

$$\frac{R'}{E} = \frac{\Pi}{2}\left(\frac{1}{E\omega} + \frac{\nu' . hh' \text{tang.} \alpha}{\varepsilon (h+h')}\right);$$

che diviene, quando la sezione trasversale è rettangolare

$$R' = \frac{\Pi}{2bc^2}\left(c + \frac{6 . hh' \text{tang.} \alpha}{h+h'}\right).$$

Queste formole, a ragion della curvatura che prendono

i pezzi, daranno per Π un valor troppo grande, ma pochissimo diverso dal vero ne' casi ordinari delle applicazioni.

Il peso Π determinato colla condizione che possa esser sostenuto dall' uno o dall' altro de' sistemi di cui si è parlato, sarà a più forte ragione sostenuto dal castello proposto.

Dell' equilibrio delle grue.

547. Si distinguono due specie di grue: 1° quelle il cui asse è fitto nel suolo o contro un muro, e non può essere spostato; 2° le grue mobili che sono sostenute sul suolo e possono esser da un luogo all' altro trasportate.

La figura 120 rappresenta una grua della prima specie, formata soltanto dall' albero AB e dal pezzo inclinato DC, connesso coll' albero in modo che l' angolo de' due pezzi non possa variare. L' albero gira all' estremità inferiore sopra un perno, ed è mantenuto in A da un collare. La corda che solleva il peso Π passa in C e in B sopra delle troclee, e si avvolge in E sull' asse di un verricello fisso all' albero AB. La tensione R della parte CB della corda può esser un poco maggiore o un poco minore del peso Π, secondo che questo peso è sollevato da una troclea semplice o da un paranchino. Indicheremo con S la risultante del peso Π e della tensione R della porzione CB della corda. Il pezzo CD dev' esser riguardato come incastrato in D e sottomesso in C all' azione della forza S: si deve dunque assimilarlo a quello considerato n° 412, prendendo S per la forza che in quel numero è indicata da Π. Facendo astrazione dalla curvatura che l' albero deve prendere, si può ri-

guardare la parte BE dell'albero come un pezzo incastrato in E e sollecitato in B dalla risultante delle tensioni delle due porzioni BC, BE della corda. La parte DE resiste come un pezzo incastrato in D e sollecitato in B dalla tensione R. Si deve assimilarlo al pezzo considerato n° 415, prendendo R per la forza indicata da Π in quel numero, e DB per la distanza rappresentata da *a*. La parte AD resiste come un pezzo incastrato in A e sottomesso all' azione del peso Π : si deve assimilarlo al pezzo considerato n° 406, mettendo per *a* ed *l* la distanza AD e la distanza orizzontale dal punto C al punto A. Finalmente per la parte AA′ dell'albero, si osserverà che deve stabilirsi in A′ contro l' appoggio uno sforzo orizzontale, il cui momento preso per rapporto al punto A sia eguale al momento del peso Π preso per rapporto allo stesso punto. Quindi la parte AA′ dev'esser riguardata come incastrata in A e sollecitata in A′ da questo sforzo orizzontale e dallo sforzo verticale Π che tende a comprimerla.

La direzione della forza S può differir pochissimo da CD in guisa che l'articolazione in D sia poco tormentata. Le grue di questa specie possono dunque presentare una solidità bastantemente grande.

548. Si può mantener l' estremità C del pezzo CD per mezzo del tirante BC (Fig. 121), e allora non è più necessario che l'incastro in D renda invariabile l'angolo BDC. In questo caso, prendendo la risultante S del peso Π e della tensione R della porzione di corda BC, si decomporrà questa forza in due altre, dirette secondo CD e CB ; si conoscerà così la compressione esercitata secondo CD e la tensione esercitata secondo CB. Il pezzo CD resiste come quelli considerati ne' n^i 583 o 589, se-

condo che desso è libero o pur no di girare sul punto D. Facendo sempre astrazione dalla curvatura che l' albero può prendere, la parte BE dev' esser riguardata come incastrata in E, e sollecitata in B dalla risultante della tensione della porzione di corda BE, della tensione R della porzione di corda BC, e della tensione del tirante BC. La parte DE dev' esser riguardata come incastrata in D, e sollecitata in B dalla tensione R della porzione di corda BC, e dalla tensione del tirante BC. Le parti AD e AA′ sono sollecitate a rompersi in A nel modo indicato più sopra.

Il pezzo CD, che è sempre compresso, dev' esser di legname o di ferro fuso. Il tirante BC quando è teso può esser formato semplicemente di barre di ferro da fucina. Se la risultante S fosse diretta nell' angolo BCD, i pezzi CD, CB sarebbero tutti due compressi, e dovrebbero esser egualmente capaci di resistere a questo genere di sforzo.

549. Le grue poggiate sul suolo senza esservi attaccate, debbono esser disposte in modo che la verticale contenente il centro di gravità de' pesi di cui son caricate non esca giammai dalla base, il che esige ordinariamente l' uso di un contrappeso.

La figura 122 rappresenta una grua di questo genere sorretta da un carro circolare, il che permette di sopprimere l' albero. La forza de' pezzi CD e CD′ sarà regolata secondo il n° 532.

550. La figura 123 rappresenta una grua nella quale l' albero è sostenuto in A sopra un perno e mantenuto in *a* da un collare: quest' albero può girare. Tutto il peso del castello è trasmesso all' albero nel punto D. Il pezzo CC′ è un semplice tirante orizzontale che dev' es-

ser fisso in B all' estremità dell' albero. Si regolerà la forza de' pezzi CD, BC, o C′D, BC′ secondo il n° 532. La parte BD dell' albero resiste come un pezzo incastrato in D e sollecitato in B da una forza eguale alla differenza delle tensioni delle due porzioni BC, BC′ del tirante. La parte D*a* resiste come un pezzo incastrato in *a*, e sollecitato dal peso totale dell'armatura; quindi, dopo aver cercato la distanza dall' asse AB del centro di gravità di tutti i pesi che poggiano sul punto D, si assimilerà questa parte D*a* al pezzo considerato n° 406, prendendo Π per la somma di questi pesi, *l* per la distanza orizzontale del loro centro di gravità dal punto *a*, ed *a* per la distanza *a*D. Finalmente la parte *a*A dell' albero resiste come un pezzo incastrato in *a*, e sollecitato all' estremità A da una forza verticale eguale al peso del castello, e da una forza orizzontale sufficientemente grande per fare equilibrio a questo peso attorno il punto *a* supposto fisso.

551. Nella grua rappresentata fig. 124, l' albero è fisso e porta il peso dell' armatura sull' estremità superiore B. I pezzi BC e B′C′ son due tiranti inclinati, e CC′ un pezzo orizzontale che deve abbracciar l' albero in D per mezzo di un collare. L' azione del peso Π produce nel tirante BC una tensione determinata dalla condizione che la sua componente verticale sia eguale a Π. Il pezzo CD è compresso secondo la sua lunghezza, da una forza eguale alla componente orizzontale di questa stessa tensione. Delle azioni analoghe si esercitano al punto C′. I pezzi CD, C′D deggiono essere assimilati al pezzo considerato n° 383. La parte CE del pezzo CD, oltre la compressione prodotta dall' azione del peso Π di cui si è parlato, sostiene di più un altra pressione

longitudinale eguale alla tensione della porzione di corda CE. La parte BD dell'albero resiste come un pezzo incastrato in D e sollecitato in B da una forza eguale alla risultante delle tensioni de' tiranti BC, BC′. Le parti D*a* e *a*A sono sollecitate e resistono conforme a quel che si è veduto nel n° precedente.

552. Indicheremo finalmente la grua mobile rappresentata dalla fig. 125, nella quale l'estremità superiore dell'albero AB è mantenuta per mezzo di sarte. I pezzi inclinati CD, C′D son incastrati all'estremità inferiore dell'albero, e son sostenuti da' tiranti BC, BC′ attaccati all'estremità superiore. Si determineranno come nel caso precedente, le pressioni longitudinali esercitate sui pezzi CD, C′D, e le tensioni esercitate su' tiranti BC, BC′. L'albero AB è libero di rovesciarsi dall'un lato o dall'altro, ed è sollecitato a rovesciarsi dalla differenza delle componenti orizzontali delle tensioni de' tiranti BC, BC′. Debbono dunque stabilirsi, nelle sarte che mantengono l'estremità superiore dell'albero, delle tensioni determinate dalla condizione che le loro componenti orizzontali distruggano la differenza di cui si è parlato. Quando questa condizione è soddisfatta, l'albero dev' esser assimilato al pezzo considerato n° 383, prendendo per la forza indicata da Q in quel numero la somma delle componenti verticali delle tensioni de' tiranti BC, BC′, e delle tensioni delle sarte.

ARTICOLO IX.

Delle porte di chiusa.

553. Le parti che compongono le porte di chiusa sostengono nel tempo stesso l' azione verticale del loro proprio peso, e l' azione orizzontale della pressione dell' acqua. Si considereranno in questo articolo solamente le porte formate di un quadro rettangolare, i cui lati verticali son riuniti per mezzo di traverse orizzontali, sulle quali sono inchiodati de' tavoloni.

Dell' azione della gravità sull' ossatura delle porte di chiusa.

554. La figura 126 rappresenta una porta, la cui parte principale è il quadro BCFE. Il ritto de' cardini BC è sostenuto in A sopra un perno e mantenuto in D da un collare. Questo collare è ordinariamente ritenuto da molti pezzi di ferro, nella direzione de' quali si stabiliscono delle tensioni, da determinarsi colla condizione che la loro risultante faccia equilibrio attorno il punto A al peso della porta, che tende a farla girare su questo punto.

555. Il ritto BC essendo mantenuto verticalmente per mezzo del collare D, tutto il peso della porta è sostenuto dalla sua parte inferiore AB e dall' appoggio A. L' azione della gravità tende a distaccare tutto il resto dell' ossatura dal ritto BC, facendolo girare sul punto B. Se si previene questo movimento, attaccando per mezzo di squadri di ferro la traversa superiore CF o tutte le

traverse, al ritto BC, l' azione della gravità non tende più che a far discendere il ritto EF, cangiando in parallelogrammo il rettangolo formato dal quadro. Si richiede per la solidità della costruzione 1° che le varie parti della porta non possano staccarsi dal ritto cardinale; 2° che la figura rettangolare del quadro non possa esser alterata.

556. Queste condizioni saranno soddisfatte, assicurando la congiunzione della traversa superiore CF col ritto cardinale per mezzo di uno squadro in C, e mettendo nel quadro il pezzo diagonale BF. Si può supporre le traverse libere di girare sui loro punti d' incastro ne' due ritti. Chiamando G un peso che sospeso al punto F, avrebbe rispetto al punto B lo stesso momento del peso della porta, e φ l' angolo CBF, si avrà $\frac{G}{\cos \varphi}$ per la pressione longitudinale sostenuta dal diagonale; e G tang.φ per la tensione longitudinale sostenuta dalla traversa superiore CF e dallo squadro C.

557. Si soddisfarebbe ancora alle medesime condizioni per mezzo del *tirante* inclinato CE, congiunto in C col ritto cardinale. Le traverse possono sempre esser supposte libere di girare sui loro punti d' incastro ne' due ritti. La tensione longitudinale sostenuta dal tirante è rappresentata da $\frac{G}{\cos . \varphi}$, chiamando φ l' angolo CEF.

558. Quando non s' impiega nè diagonale nè tirante, è necessario che una almeno delle traverse orizzontali (per esempio, la traversa superiore) sia congiunta col ritto cardinale in modo da non poter girare sul punto d' incastro. Basta questa condizione per mantener la figura rettangolare del quadro. Restando tutte le altre

traverse libere di girare sui loro punti d' incastro, la traversa così congiunta sostiene sola tutto il peso della porta, ad eccezione del ritto cardinale. Essa resiste come un pezzo incastrato orizzontalmente in una estremità e caricato di pesi ripartiti sulla sua lunghezza.

Si ottiene maggior solidità, congiungendo col ritto cardinale nel modo indicato non solo la traversa superiore CF ma anche la traversa inferiore BE, o tutte le altre traverse. Il peso della porta si ripartisce allora sulle diverse traverse così congiunte.

559. Si ottiene ancora maggior solidità congiungendo le traverse in modo che la loro direzione non possa variare al punto d' incastro, non solo col ritto cardinale BG ma ancora col ritto battente EF.

560. Dietro ciò che precede le traverse sulla lunghezza delle quali è distribuito una parte del peso della porta, possono trovarsi in tre condizioni differenti.

1° Se sono congiunte coi due ritti in modo che possano girare liberamente sui loro punti d' incastro, resistono come pezzi sostenuti alle due estremità. Si conchiude dal n° 90 che la massima compressione o stensione delle fibre, cagionata in un punto qualunque dalla flessione verticale, è

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{2\varepsilon}(a^2 - x^2),$$

indicando p il peso portato sull' unità di lunghezza, a la metà della lunghezza della traversa, x la distanza del punto che si considera dal punto medio della lunghezza, ε il momento di resistenza alla flessione (il pezzo si suppone piegarsi verticalmente), v' la distanza delle fibre estreme compresse o stese dall' asse di equilibrio segnato nella sezione trasversale.

561. 2° Se le traverse sono congiunte col ritto cardinale solamente, in modo a non poter girare sul punto d' incastro, resistono come pezzi incastrati orizzontalmente in una estremità. Si conchiude dal n° 89 che la massima compressione delle fibre è

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right);$$

rappresentando a la lunghezza della traversa, x la distanza del punto che si considera dall' estremità incastrata.

562. 3° Se le traverse sono congiunte coi due ritti, in modo che le loro direzioni non possano variare ai punti d' incastro, esse resistono come pezzi incastrati orizzontalmente in una estremità, e di cui l' altra estremità è soggetta alla condizione che la tangente della curva vi rimanga orizzontale. Lo stato di equilibrio di questi pezzi, supponendo la carica che sostengono uniformemente distribuita sulla loro lunghezza, può esser determinato nel modo seguente.

Chiamando

p il peso costante, di cui è caricata ogni unità di lunghezza del pezzo AM (Fig. 127);

x, y le coordinate Ap, pm di un punto qualunque m della curva del pezzo;

a, f l'ascissa AB e l'ordinata MB del punto estremo M;

ε avendo il significato indicato n° 80;

l' equazione di equilibrio del pezzo AM sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + A;$$

indicando A una quantità costante. Se ne ricava

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + Ax;$$

determinando la costante A in modo che si abbia $\frac{dy}{dx} = 0$ nel punto M in cui $x = a$, il che dà $A = -\frac{pa^2}{6}$, si avrà

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p\left(\frac{a^2x}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{6} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{24}.$$

L' abbassamento del punto estremo M è tre volte minore di quel che sarebbe se questo punto fosse interamente libero, come si è supposto n° 89. La massima compressione delle fibre è

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{3} - ax + \frac{x^2}{2}\right),$$

indicando a la lunghezza della traversa, ed x la distanza del punto che si considera dall' estremità incastrata.

Del caso in cui la porta è sostenuta da una girella.

563. Quando la porta è sostenuta da una girella posta sotto il ritto EF (Fig. 126), o ad esso vicina, il quadro BCEF non tende a cangiar di forma. Si può sopprimere il diagonale BF e il tirante CE, e la solidità della costruzione è abbastanza assicurata congiungendo le traverse ai due ritti con opportuni squadri di ferro.

564. Quando il ritto battente EF è sostenuto in questa guisa, le traverse resistono in generale ai pesi di cui son caricate, di una maniera diversa da quella indicata ne' n^i 560 e seg.

1° Se l' unione delle traverse co' due ritti è tale che queste possano girare liberamente sui loro punti d' incastro, vi si potrà applicare ciò che è stato detto n° 560.

565. 2° Se le traverse solo col ritto cardinale sono unite in modo che non possano girare sul punto di congiunzione, resistono come pezzi incastrati orizzontalmente in una estremità e sostenuti nell'altra. Lo stato di equilibrio di questi pezzi può esser determinato nel seguente modo.

Chiamando

p il peso costante, di cui è caricata ogni unità di lunghezza del pezzo AM (Fig. 128);

x, y le coordinate, orizzontale e verticale, Ap, mp di un punto qualunque m della curva del pezzo;

a la lunghezza AM;

Π lo sforzo esercitato dal pezzo sul punto d' appoggio posto all' estremità M;

ε avendo il significato indicato n° 80;

l' equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) - \Pi(a-x),$$

d' onde

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \Pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Determinando il peso Π colla condizione che sia $y = 0$ quando $x = a$, viene $\Pi = \frac{3}{8} pa$, e

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{16} - \frac{5ax^3}{48} + \frac{x^4}{24}\right).$$

La massima compressione delle fibre è

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v'.p}{\varepsilon}\left(\frac{a^2}{8} - \frac{5ax}{8} + \frac{x^2}{2}\right).$$

566. 3° Se le traverse sono egualmente unite ai due ritti, in modo che non possano girar liberamente sui punti di congiunzione, esse resistono come pezzi incastrati orizzontalmente alle due estremità. Conservando le denominazioni del numero precedente, l' equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) - \Pi(a - x) + A,$$

rappresentando A una quantità costante. Se ne ricava

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \Pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + Ax,$$

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \Pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + A\frac{x^2}{2}:$$

determinando le costanti Π ed A in modo che si abbia $\frac{dy}{dx} = 0$ e $y = 0$ al punto estremo in cui $x = a$, il che dà $\Pi = \frac{pa}{2}$, $A = \frac{pa^2}{12}$,

$$\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{x^4}{24}\right).$$

Facendo $x = \frac{a}{2}$, si ha per l'ordinata del punto di mezzo, o la freccia di curvatura, $\frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{384}$. Paragonando questo risultamento a quello del n° 90, si vede che questa freccia è 5 volte minore di quella che sarebbe se il pezzo fosse semplicemente sostenuto alle estremità. Paragonandolo a quello del n° 373, si vede che la freccia di curvatura è la metà di quella relativa al caso in cui il peso pa in vece di esser uniformemente ripartito sulla lunghezza del pezzo fosse sospeso nel mezzo.

La massima compressione delle fibre è

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v'}{\varepsilon} p\left(\frac{a^2}{12} - \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{2}\right).$$

Dell' azione dell' acqua sulle traverse delle porte di chiusa.

567. Quando la porta è chiusa e sostiene la pressione dell' acqua, i ritti AD, EF (Fig. 126) sono appoggiati in tutta la loro altezza, e per conseguenza non sono sollecitati da questa pressione, la quale tende solamente a piegare le traverse incastrate ne' due ritti. Per valutare l' azione alla quale le traverse sono esposte, bisogna distinguere il caso delle porte *semplici* e quello delle porte *angolari.* Nel primo caso l' azione della pressione dell' acqua sopra ogni traversa può esser assimilata a quella di un peso uniformemente ripartito sulla lunghezza di un pezzo orizzontale sostenuto alle estremità. Si apprezzerà dunque quest' azione per mezzo dei n^{i} 90 e 125. Nel secondo caso, si stabilisce nel senso della lunghezza delle traverse una pressione che dev' esser presa in considerazione.

568. Supporremo che ogni traversa sostenga la pressione esercitata dall' acqua sullo spazio compreso tra i mezzi degli intervalli che esistono tra questa traversa e le due vicine; e che lo stesso pezzo sostenga egualmente lo sforzo esercitato dalla parte di una porta sull' altra in virtù di questa pressione. Chiamando p_1 lo sforzo risultante dalla pressione dell' acqua sopra ogni unità di lunghezza della traversa, $2a$ questa lunghezza MM′ (Fig. 129), e φ l' angolo della *capriata* CMM′, si avrà $p_1 2a$ per lo sforzo esercitato perpendicolarmente sopra MM′, e $p_1 a$ per le componenti di questo sforzo che debbono esser distrutte alle estremità M, M′. La pressione che le due traverse MM′ esercitano l' una contro

l'altra in M' è dunque una forza parallela a CM, la cui componente perpendicolare a MM' è $p_1 a$. Quindi la pressione stessa è $\frac{p_1 a}{\text{sen.}\varphi}$, e la sua componente diretta secondo MM' è $\frac{p_1 a}{\text{tang.}\varphi}$. Segue da ciò che il pezzo MM' dev'esser riguardato come appoggiato alle sue estremità e sostenente nel tempo stesso il peso $2p_1 a$ distribuito uniformemente sulla sua lunghezza, e la pressione longitudinale $\frac{p_1 a}{\text{tang.}\varphi}$.

569. Dunque ogni metà di questo pezzo si trova nello stesso stato di equilibrio di un pezzo AM (Fig. 130), incastrato orizzontalmente in A, caricato di pesi uniformemente distribuiti sulla sua lunghezza, e sollecitato in M da una forza verticale P agente da sotto in sopra, e dalla forza orizzontale Q. Indicando per

x, y le coordinate, orizzontale e verticale, Ap, pm della curva AM;

a la distanza AB;

f l'ordinata BM del punto estremo M;

p_1 il peso portato dal pezzo sopra ogni unità di lunghezza;

ε avendo il significato indicato n° 80;

l'equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -p_1\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + P(a-x) + Q(f-y),$$

ovvero, osservando che in questo caso $P = p_1 a$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p_1}{2\varepsilon}(a^2 - x^2) + \frac{Q}{\varepsilon}(f-y).$$

L'integrale di questa equazione è

$$f - y = A\,\text{sen.}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}(x + B) - \frac{p_1}{Q^2} - \frac{p_1}{2Q}(a^2 - x^2),$$

essendo A e B due costanti arbitrarie. Si deve avere nel punto A, $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; e al punto B, $x = a$, $y = f$; il che dà le tre equazioni

$$f = \text{A sen.B}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1 a^2}{2Q},$$

$$0 = \text{A}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\cos.\text{B}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

$$0 = \text{A sen.}(a + \text{B})\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2};$$

d' onde ricavasi

$$\cos.\text{B}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 0, \quad \text{sen.B}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 1, \quad \text{A} = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2.\cos.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}},$$

$$f = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - 1\right\} - \frac{p_1 a^2}{2Q};$$

e per l' equazione della curva

$$y = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2}\cdot\frac{1 - \cos.x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - \frac{p_1 x^2}{2Q},$$

nella quale si deve metter per Q il suo valore $\frac{p_1 a}{\text{tang.}\varphi}$.

570. Le dimensioni della sezione trasversale possono esser regolate in modo da render il pezzo capace di resistere a quest' azione, per mezzo delle considerazioni del n° 387. Il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha luogo al punto A, ed è $\frac{\text{tang.}\varphi}{a}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{p_1 a}{\varepsilon\,\text{tang.}\varphi}}} - 1\right\}$. Per conseguenza, conservando le denominazioni di quel numero, se

si volesse che la più grande pressione sostenuta dalle fibre sull' unità di superficie non sorpassasse R′, si stabilirebbe l' equazione

$$\frac{R'}{E} = \frac{p_1 a}{E\omega \text{ tang.}\varphi} + \frac{v'.\text{tang.}\varphi}{a}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{p_1 a}{e \text{ tang.}\varphi}}} 1 - \right\}.$$

Dell' azione simultanea del peso del legname e dell' acqua sulle traverse delle porte di chiusa.

571. Il peso del legname piega le traverse verticalmente, e l' azione dell' acqua le piega orizzontalmente. Stante la picciolezza delle due flessioni, si possono riguardare le stensioni e le contrazioni delle fibre come eguali alla somma di quelle che ciascuna flessione produrrebbe separatamente. Ne' n^{i} 560 e seg. sono stati indicati i cangiamenti di lunghezza delle fibre dovuti alla flessione verticale ne' diversi casi che possono presentarsi. Quindi per conoscere il valore totale della compressione alla quale le fibre sono esposte per effetto delle due flessioni, si sommerà l' uno de' valori di $v' \frac{d^2y}{dx^2}$ dati in quei numeri col valore della stessa quantità ricavato dall' equazione del n° 569. I valori della somma varieranno nei diversi punti del pezzo, e sarà necessario che il massimo di essi non sorpassi la frazione $\frac{R'}{E}$, se si vuole che il massimo sforzo esercitato per comprimer le fibre sull' unità di superficie non sorpassi R′.

572. Per esempio, nel caso de' n^{i} 560 e 564, che è quello in cui le traverse sono sollecitate con maggior forza, le più grandi variazioni di lunghezza delle fibre nel senso

verticale e nel senso orizzontale, hanno egualmente luogo nel mezzo della lunghezza del pezzo. Supponendo rettangolare la sezione trasversale del pezzo, e chiamando b il lato orizzontale e c il verticale, le equazioni da cui dipenderanno queste dimensioni sarà

$$\frac{R'}{E} = \frac{3pa^2}{Ebc^3} + \frac{p_1 a}{Ebc.\text{tang.}\varphi} + \frac{b\,\text{tang.}\varphi}{2a}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{12p_1 a}{Eb^3c.\text{tang.}\varphi}}} - 1\right\}.$$

573. Chiamando l la distanza CM (Fig. 129), si ha $a = \frac{l}{2\cos.\varphi}$, e l'equazione precedente diviene

$$\frac{R'}{E} = \frac{3p_1 l^3}{4Ebc^3.\cos.^3\varphi} + \frac{p_1 l}{2Ebc.\text{sen.}\varphi} + \frac{b\,\text{sen.}\varphi}{l}\left\{\frac{1}{\cos.\frac{l}{2\cos.\varphi}\sqrt{\frac{6p_1 l}{Eb^3c\,\text{sen.}\varphi}}} - 1\right\}.$$

Delle porte ricurve.

574. Alle porte destinate a sostener la pressione dell'acqua si dà spesso una curvatura nel senso orizzontale. Essendo questa curvatura assai leggiera, si potrà applicare alla disposizione dell'ossatura, in quanto che si considera come destinata a resistere all'azione verticale della gravità, tuttocciò che è stato detto ne' n^i 554 e seguenti.

575. Riguardo all'azione dell'acqua sulle traverse curve, supporremo che la loro figura MEM'(Fig. 131) sia un arco di cerchio. Chiamando

p_1 la pressione normale esercitata dall'acqua sopra ogni unità di lunghezza della traversa;

l la distanza CM;

a la metà MD della corda MM'

d la saetta DE della curva;

r il raggio dell' arco MEM′;

φ l' angolo CMM′:

si ha, secondo il n° 306, per la pressione risultante dall' azione dell' acqua che è esercitata nel senso della lunghezza della curva $p_1 r$, ovvero

$$p_1 \frac{a^2+d^2}{2d}.$$

Riguardando questa curva come un arco appoggiato alle sue due estremità M, M′ contro punti fissi, e osservando che l' angolo formato dalla curva in questi punti con MM′ ha per seno $\frac{2ad}{a^2+d^2}$, e per coseno $\frac{a^2-d^2}{a^2+d^2}$, si vedrà che lo sforzo esercitato dalla curva contro questi punti fissi ha per componenti, l' una parallela l' altra perpendicolare a MM′,

$$p_1 \frac{a^2-d^2}{2d} \quad \text{e} \quad p_1 a.$$

Da un altra parte, non ostante la loro curvatura, le traverse delle due porte, conforme al n° 568, esercitano sempre l' una contro l' altra in M′ una pressione $\frac{p_1 a}{\text{sen.}\varphi}$, producente nella direzione MM′ uno sforzo $\frac{p_1 a}{\text{tang.}\varphi}$. Per conseguenza se si ha la relazione

$$\frac{p_1 a}{\text{tang.}\varphi} = p_1 \frac{a^2-d^2}{2d},$$

da cui ricavasi

$$d = a \frac{1-\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi}, \quad r = \frac{a}{\text{sen.}\varphi},$$

essendo lo sforzo risultante dall' azione dell' acqua eguale a quello che risulta dall' appoggio scambievole che si fanno le due porte, la traversa curva non ten-

derà a piegarsi, e sarà solamente premuta nel senso della lunghezza. Supporremo la figura della porta esser determinata secondo questa condizione. La curva delle due porte è allora formata da uno stesso arco che passa pe' tre punti M, M′, M; e la pressione esercitata nel senso della lunghezza della curva è $\frac{p_1 a}{\text{sen.}\varphi}$

576. Dietro ciò, per regolare la forza delle traverse in modo da resistere nel tempo stesso all' azione del peso del legname e alla pressione dell' acqua, bisognerà addizionare la maggior compressione cagionata dalla flessione verticale (compressione che si ricaverà da una delle formole date n^{i} 560 e seguenti), colla quantità $\frac{p_1 a}{E\omega . \text{sen.}\varphi}$, ed eguagliare la somma a $\frac{R'}{E}$.

577. Per esempio, nel caso de' n^{i} 560 e 564, si avrebbe, in vece dell' equazione del n° 572

$$R' = \frac{3pa^2}{bc^2} + \frac{p_1 a}{bc . \text{sen.}\varphi}.$$

578. Mettendo $\frac{l}{2\cos.\varphi}$ in luogo di a, questa equazione diviene

$$R' = \frac{3pl^2}{4bc^2 \cos.^2\varphi} + \frac{p_1 l}{2bc \,\text{sen.}\varphi.\cos.\varphi}.$$

Applicando le formole precedenti, si conoscerà esser vantaggioso l' impiegare delle traverse ricurve per la costruzione delle grandi porte.

ARTICOLO X.

De' ponti di legname.

579. Il palco o tavolato de' ponti di legname è sostenuto da molte centine, le quali son formate o di un sistema di pezzi dritti orizzontali e inclinati, o di una riunione di pezzi ricurvi componenti un arco colla convessità rivolta verso sopra. Il palco o è posato sopra i pezzi delle centine che ne sostengono il peso, o vi è sospeso. Nello stabilimento di questa specie di costruzioni si deve principalmente aver riguardo alle seguenti condizioni: 1° che l'equilibrio sia stabile; 2° che i pezzi abbiano la forza sufficiente per resistere al peso permanente della costruzione, e alle sopraccariche che possono esser ripartite su tutta l'estensione del palco; 3° che i pezzi possano pure resistere alle sopraccariche che sarebbero poste in punti determinati del tavolato.

De' ponti sorretti da travi e da saettoni.

580. Il caso il più semplice è quello in cui, essendo poco considerevole l' ampiezza delle travate, le centine sulle quali è stabilito il palco non son formate che di una sola trave. La forza di questo pezzo può esser determinata per mezzo de' n^{i} 125 e 126, 359 e seg.

581. Quando la distanza de' punti di appoggio non permette d' impiegar una trave soltanto, si consolida questo pezzo con de' saettoni (Fig. 132).

La pressione verticale che si stabilisce sull' estremità superiore di essi, tende a farli girare sulle loro estre-

mità inferiori, e, per prevenire questo moto, si stabilisce necessariamente una certa pressione nella porzione DD′ della trave. Si può pure supporre il moto de' saettoni prevenuto dall' effetto di una tensione che avrebbe luogo nelle porzioni BD, B′D′ della trave; ma bisogna allora ammettere che le sue estremità B, B′ sieno stabilmente attaccate alle spalle. Stante che le estremità delle travi sono per la maggior parte del tempo semplicemente posate sulle spalle, è più conforme allo stato ordinario delle costruzioni di supporre che la porzione DD′ della trave è compressa.

L'incastro de' saettoni colla trave ai punti D, D′ ne diminuisce la forza, e non si può attribuir ad essa in questi punti una resistenza eguale a quella che presenta in tutti gli altri punti. Per maggior semplicità supporremo le parti della trave interamente disgiunte ai punti D, D′. Stimando il peso della costruzione e delle sopraccariche uniformemente distribuito sull' intervallo BB′, le porzioni BD, B′ D′ resistono come pezzi sostenuti alle due estremità. Le estremità superiori D, D′ de' saettoni son caricate della metà del peso corrispondente agl' intervalli B D, B′D′ e del peso corrispondente all' intervallo CD, CD′. Chiamando

p la carica corrispondente all'unità di lunghezza della trave;

a, a' le distanze CD, BD;

α l'angolo BAD;

si ha $p(a+\frac{1}{2}a')$ per la forza verticale agente in D, $p\frac{(a+\frac{1}{2}a')}{\cos.\alpha}$ per la pressione esercitata nel senso DA della lunghezza del saettone, e $p(a+\frac{1}{2}a')\,\mathrm{tang}.\alpha$ per la pressione esercitata nella direzione DD′. I saettoni AD,

A'D' possono esser assimilati ai pezzi considerati n^{i} 385 e seg., e si può regolarne la forza secondo ciò che è stato detto ne' n^{i} 402 e seguenti.

582. Il pezzo DD' dev' esser riguardato come sostenuto alle estremità, compresso nel senso della lunghzza e caricato nel tempo stesso del peso p sopra ogni unità di lunghezza. La metà CD di questo pezzo può esser assimilata al pezzo AM (Fig. 130), incastrato orizzontalmente all'estremità A e sollecitato, nel modo indicato n° 569. Si può dunque applicarvi l' analisi esposta in quel numero, di maniera che, scrivendo p in luogo di p_1, l' equazione della curva è

$$y = \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{1 - \cos . x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos . a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - \frac{px^2}{2Q},$$

nella quale si dee metter per Q il valor $p(a+\frac{1}{2}a')\text{tang}.\alpha$ dello sforzo esercitato nel senso della lunghezza del pezzo

Si avrà, come nel n° 570, per l' equazione dietro la quale debbono esser regolate le dimensioni del pezzo,

$$\frac{R'}{\omega} = \frac{p(a+\frac{1}{2}a')\text{ tang}.\alpha}{E\omega} + \frac{v'}{(a+\frac{1}{2}a')\text{ tang}.\alpha}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{p(2a+a')\text{ tang}.\alpha}{2\varepsilon}}} - 1\right\};$$

equazione che diviene, quando la sezione trasversale è un rettangolo il cui lato orizzontale è b e il verticale c,

d' onde $\omega = bc$, $v' = \frac{c}{2}$, $\varepsilon = E\frac{bc^3}{12}$,

$$R' = \frac{p(a+\frac{1}{2}a')\text{ tang}.\alpha}{bc} + \frac{E.c}{(2a+a')\text{ tang}.\alpha}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{6p(a+a')\text{ tang}.\alpha}{Ebc^3}}} - 1\right\}.$$

583. Si può ottenere un valore approssimato ma trop-

po piccolo di R′, supponendo la curvatura del pezzo DD′ (Fig. 132) tanto piccola da poter trascurar la freccia di curvatura rispetto alla lunghezza del pezzo. L'equazione di equilibrio del n° 569 si riduce allora a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon}(a^2 - x^2)$, e il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è $\frac{pa^2}{2\varepsilon}$.

L'equazione che serve a regolar le dimensioni del pezzo è

$$\frac{R'}{E} = \frac{p(a + \frac{1}{2}a')\,\text{tang.}\alpha}{E\omega} + \frac{\nu'.pa^2}{2\varepsilon};$$

e diviene, quando si suppone rettangolare la sezione trasversale,

$$R' = \frac{p}{bc}\left[(a + \tfrac{1}{2}a')\,\text{tang.}\alpha + \frac{3a^2}{c}\right].$$

Il valore di R′ dedotto da questa equazione differirà pochissimo ne' casi ordinari delle applicazioni, da quello che sarebbe dato dall' equazione del n° precedente.

584. Indipendentemente dalla carica ripartita uniformemente sull' intervallo BB′ (Fig. 132), un peso Π potrebbe esser situato in un punto determinato di questo intervallo. Se questo peso fosse posto tra i punti B e D, eserciterebbe sulla porzione BD un' azione che dietro le regole esposte negli articoli precedenti potrebbe esser facilmente valutata. Produrrebbe di più un nuovo sforzo verticale sul punto D. Per esempio se il peso Π fosse posto propriamente nel punto D, la carica sostenuta dall' estremità superiore del saettone diverrebbe $\Pi + p(a + \frac{1}{2}a')$, indicando sempre per p il peso ripartito sull'unità di lunghezza nell' intervallo BB′. La pressione esercitata nel senso della lunghezza del saettone sarebbe $\frac{\Pi + p\,(a + \frac{1}{2}a')}{\cos.\alpha}$, e la pressione esercitata nella direzione DD′ sarebbe $[\,\Pi + p\,(a + a\,\frac{1}{2}a')\,]$ tang.α. Quest'ul-

tima quantità dovrebb'esser messa in luogo di Q nell'equazione del n° 582, per regolare la forza del pezzo DD'. Si deve inoltre osservare che il punto D' sostenendo solamente lo sforzo verticale $p(a+\frac{1}{2}a')$, e la pressione esercitata nel senso D'D essendo solamente $p(a+\frac{1}{2}a')\,\text{tang.}\,\alpha$, la porzione $\Pi\,\text{tang.}\,\alpha$ della pressione esercitata nel senso DD' non è distrutta al punto D', e per conseguenza è trasmessa al pezzo B'D'. Perciò quest'ultimo pezzo, appoggiato nelle sue estremità, sostiene ora la pressione longitudinale $\Pi\,\text{tang.}\,\alpha$, mentre è caricato del peso p sull'unità di lunghezza. Si debbono ad esso applicare le formole del n° 582, facendovi $Q=\Pi\,\text{tang.}\,\alpha$.

585. Se il peso Π è posto nell'intervallo DD', lo sforzo che produce si ripartisce sui due punti D, D'. Per esempio se questo peso è posto nel mezzo G della trave, ciascuna estremità de' saettoni sostiene lo sforzo verticale $\frac{1}{2}\Pi+p(a+\frac{1}{2}a')$. La pressione longitudinale sostenuta da' pezzi è $\frac{\frac{1}{2}\Pi+p(a+\frac{1}{2}a')}{\cos.\alpha}$, e la pressione longitudinale sostenuta dalla porzione del pezzo DD' è $[\frac{1}{2}\Pi+p(a+\frac{1}{2}a')]\,\text{tang.}\,\alpha$. Ciascuna metà CD di quest'ultimo pezzo è sempre nello stesso stato di equilibrio del pezzo AM (Fig. 130), di cui ci siamo occupati nel n° 569, e l'equazione di equilibrio è parimenti

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-p\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right)+P(a-x)+Q(f-y),$$

in cui si ha $P=\frac{1}{2}\Pi+pa$, $Q=[\frac{1}{2}\Pi+p(a+\frac{1}{2}a')]\,\text{tang.}\,\alpha$. L'integrale di questa equazione, facendo $q^2=\frac{Q}{\varepsilon}$, è

$$f-y=$$

$$A\,\text{sen.}\,q(x+B)+\frac{p}{Q}\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{P}{Q}(a-x)-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

rappresentando A e B due costanti arbitrarie. Al punto A si deve avere $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; e al punto B, $x = a$, $y = f$; il che dà le tre condizioni

$$f = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\,q\mathrm{B} + \frac{pa^2}{2\mathrm{Q}} - \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{Q}} - \frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2},$$

$$0 = \mathrm{A}q\cos.\,q\mathrm{B} - \frac{pa}{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

$$0 = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\,q(a + \mathrm{B}) - \frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2},$$

d' onde si ricava

$$\mathrm{A}\,\mathrm{sen}.\,q\mathrm{B} = \frac{p}{\mathrm{Q}q\cos.\,qa} + \frac{\mathrm{P} - pa}{\mathrm{Q}q}\,\mathrm{tang}.\,qa,$$

$$\mathrm{A}\cos.\,q\mathrm{B} = -\frac{\mathrm{P} - pa}{\mathrm{Q}q},$$

$$f = \frac{pa^2}{2\mathrm{Q}} - \frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{Q}} + \frac{p}{\mathrm{Q}q}\left(\frac{1}{\cos.\,qa} - 1\right) + \frac{\mathrm{P} - pa}{\mathrm{Q}q}\,\mathrm{tang}.\,qa;$$

e sostituendo nell' equazione precedente,

$$y = \frac{\mathrm{P} - pa}{\mathrm{Q}q}\,\mathrm{sen}.\,qx + \left(\frac{p}{\mathrm{Q}q\cos.\,qa} + \frac{\mathrm{P} - pa}{\mathrm{Q}q}\,\mathrm{tang}.\,qa\right)(1 - \cos.\,qx) - \frac{\mathrm{P}x - p(ax - \frac{1}{2}x^2)}{\mathrm{Q}},$$

in cui si debbon mettere per P e Q i valori precedenti.

586. Il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ corrisponde a $x = 0$; per modo che questa porzione del pezzo tende a rompersi nel mezzo: il detto valore è

$$\frac{p}{\mathrm{Q}\cos.\,a\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}}} + \frac{\mathrm{P} - pa}{\sqrt{\mathrm{Q}\varepsilon}}\,\mathrm{tang}.\,a\sqrt{\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}} - \frac{p}{\mathrm{Q}}.$$

Per conseguenza volendo, dietro le considerazioni esposte n° 387, regolar le dimensioni del pezzo di maniera che la più grande pressione sostenuta dalle fibre sull'unità di superficie non sorpassi R′, si stabilirà l'equazione

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'.p}{Q}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}-1\right\}+\frac{v'.\Pi}{2\sqrt{Q\varepsilon}}\,\text{tang}.a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

dove si metterà per Q il valore $\left[\frac{1}{2}\Pi+p\left(a+\frac{1}{2}a'\right)\right]\text{tang}.\alpha$.

Quando la sezione trasversale è un rettangolo di cui b è la larghezza e c l'altezza, questa equazione diviene

$$R'=\frac{Q}{bc}+\frac{Epc}{2Q}\left\{\frac{1}{\cos.a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}-1\right\}+\frac{3\Pi}{bc^2\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}\,\text{tang}.a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}.$$

587. Si può in questo caso, come nel n° 583, aver un' espressione approssimata di R′, trascurando nell'equazione di equilibrio il termine $Q(f-y)$. Il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è allora $-\frac{pa^2}{2\varepsilon}+\frac{Pa}{\varepsilon}$, e per conseguenza

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'\left(Pa-\frac{1}{2}pa^2\right)}{\varepsilon};$$

ovvero, mettendo per P e Q i loro valori,

$$\frac{R'}{E}=\frac{\left[\Pi+p(2a+a')\right]\text{tang}.\alpha}{2E\omega}+\frac{v'(\Pi a+pa^2)}{2\varepsilon};$$

equazione che, quando la sezione trasversale del pezzo è rettangolare, diviene

$$R'=\frac{\left[\Pi+p(2a+a')\right]\text{tang}.\alpha}{2bc}+\frac{3(\Pi+pa)a}{bc^2}.$$

588. Il sistema rappresentato fig. 132, se si suppone che i saettoni possano girar liberamente sui punti d'incastro che ne formano le estremità, e che le estremità

B, B′ della trave sono solamente posate sopra degli appoggi, non presenta un equilibrio stabile. È dunque necessario di prevenire i cangiamenti di figura, e s' impiegano ordinariamente per quest' oggetto le staffe o pezzi a morsa BE, BE′. Questi pezzi possono anche servir a rinforzare i saettoni opponendosi alla loro flessione nel piano delle centine.

589. Quando la distanza de' punti d' appoggio è troppo grande per poter far la trave di un sol pezzo, si congiungono i saettoni alle estremità di una sottotrave posta nell' intervallo DD′ (Fig. 133). In questo caso la sottotrave e le parti corrispondenti della trave sono ordinariamente legate fra loro in modo che l' una serve di rinforzo all' altra. Supponendo sempre le parti della trave disgiunte ai punti D, D′, si potrà applicare a questo sistema tutto ciò che di sopra è stato detto. Conviene solamente osservare 1° che nel valutare gli sforzi verticali esercitati a' punti D, D′, si deve tener conto del peso della sottotrave ; 2° che la pressione longitudinale esercitata nell' intervallo DD′ non può esser trasmessa alla trave e dev' esser interamente sostenuta dalla sottotrave. D' onde risulta che applicando le equazioni de' n^{i} 582 e 583, 586 e 587, si deve, nel primo termine del secondo membro, mettere per ω l' arca della sezione trasversale della sola sottotrave, mentre che si può negli altri termini valutare il momento ε nella supposizione che la trave e la sottotrave resistano insieme alla flessione, dietro le indicazioni date n^{i} 508 e seg.

590. Quando la distanza de' punti d' appoggio è considerevole, si può impiegare un sistema analogo mettendo molti ordini di sottotravi e di saettoni (Fig. 134). Noi supponiamo sempre per maggior semplicità, le parti delle travi e delle sottotravi disgiunte ai punti D, D$_{,}$,

$D_{,,}$.... Gli sforzi verticali che si esercitano sulle estremità superiori di ciascun saettone, le pressioni che ne risultano nel senso della loro lunghezza, e quelle nel senso delle sottotravi si valuteranno senza difficoltà. Si determinerà la resistenza di ciascuna parte del sistema dietro ciò che si è veduto ne' n^{i} precedenti.

Potendo i saettoni richieder pezzi o lunghissimi o formati di molte parti messe l'una in prolungamento dell'altra, è necessario prevenirne la flessione non solamente per mezzo di pezzi a morsa contenuti nel piano della centina ma con pezzi orizzontali e inclinati destinati a legar le centine fra loro. L' uso de' pezzi a morsa è d' altronde reso necessario dalla mancanza di stabilità dell' equilibrio, come si è osservato n° 588.

591. Se si supponesse, come è stato indicato n° 581, esser i saettoni mantenuti per effetto di una tensione stabilita dalle spalle alle estremità superiori di questi pezzi, si potrebbe disporre un sistema di sottotravi e di saettoni nel modo indicato fig. 135. La solidità di questo sistema esige che le parti di cui ciascuna sottotrave è formata, sieno congiunte fra loro per mezzo di leghe di ferro, e che le estremità di queste sottotravi sieno attaccate alle spalle. Siccome è difficile attaccar solidamente questi pezzi alla parte superiore di una spalla, il sistema di cui si tratta sembra convenir principalmente a un ponte composto di molte travate, perchè le due metà delle travate adjacenti a una stessa pila potrebbero farsi scambievolmente equilibrio.

592. Supponendo sempre le giunture delle parti delle travi e sottotravi poste ai punti D, $D_{,}$, $D_{,,}$,...., si valuteranno facilmente, come sopra, le pressioni esercitate nel senso della lunghezza di ogni saettone, e le ten-

sioni sostenute dalle sottotravi. Per regolare in conseguenza la forza di questi ultimi pezzi, bisogna conoscer le condizioni di equilibrio di un pezzo che sarebbe sostenuto alle due estremità, caricato di pesi distribuiti sulla sua lunghezza, e stirato nel senso longitudinale.

Ogni metà di questo pezzo può esser assimilata al pezzo AM(Fig. 130) incastrato orizzontalmente in A, caricato di pesi distribuiti sulla sua lunghezza, e sollecitato in M dalla forza verticale P agente da sotto in sopra, e dalla forza orizzontale Q in guisa diretta da esercitare una tensione nel senso AB. Chiamando

p il peso portato dal pezzo sopra ogni unità di lunghezza;

x, y le coordinate, orizzontale e verticale, Ap, mp della curva AM;

a la distanza AB;

f l'ordinata BM del punto estremo;

ε avendo il significato indicato n° 80;

l'equazione di equilibrio sarà

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -p\left(\frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2}\right) + \mathrm{P}(a-x) - \mathrm{Q}(f-y),$$

ovvero, siccome si ha $\mathrm{P} = pa$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon}(a^2 - x^2) - q^2(f-y),$$

scrivendo per brevità q^2 in vece di $\frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon}$.

L'integrale di questa equazione è

$$f - y = \mathrm{A}e^{qx} + \mathrm{B}e^{-qx} + \frac{p}{2\mathrm{Q}}(a^2 - x^2) - \frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2},$$

rappresentando A e B due costanti arbitrarie, ed e la base de' logaritmi iperbolici. Si deve al punto A aver

$x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; e al punto B, $x=a$, $y=f$; il che dà le tre condizioni

$$f=A+B+\frac{pa^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0=A-B,$$

$$0=Ae^{qa}+Be^{-qa}-\frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

d' onde si ricava

$$A=B=\frac{\varepsilon p}{Q^2(e^{qa}+e^{-qa})},$$

$$f=\frac{pa^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\left(1-\frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right);$$

e per l' equazione della curva,

$$y=\frac{px^2}{2Q}-\frac{\varepsilon p}{Q^2}\,\frac{e^{qx}+e^{-qx}-2}{e^{qa}+e^{-qa}}.$$

593. Il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, che ha luogo al punto A, è $\frac{p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right)$. Si avrà dunque, come al n° 407, per l' equazione che serve a regolar le dimensioni della sezione trasversale,

$$\frac{R'}{E}=\frac{Q}{E\omega}+\frac{v'\cdot p}{Q}\left(1-\frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right),$$

nella quale si dee sostituire per Q il valore della tensione longitudinale alla quale il pezzo è esposto.

594. Se si supponesse la curvatura del pezzo picciolissima, e si trascurasse in conseguenza il termine $Q(f-y)$ nell' equazione differenziale, il risultamento non differirebbe da quello dato al n° 583.

595. Se si vuole ora, come si è fatto al n° 585, considerare il caso in cui un peso Π fosse posto nel mezzo

del pezzo, si dovrà conservare all' equazione differenziale la forma generale

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=-p\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right)+\mathrm{P}(a-x)-\mathrm{Q}(f-y),$$

e l' integrale sarà

$$f-y=$$
$$\mathrm{A}e^{q(a-x)}+\mathrm{B}e^{-q(a-x)}-\frac{p}{\mathrm{Q}}\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}(a-x)-\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2},$$

Le condizioni relative ai punti estremi daranno

$$f=\mathrm{A}e^{qa}+\mathrm{B}e^{-qa}-\frac{pa^2}{2\mathrm{Q}}+\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{Q}}-\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2},$$

$$0=\mathrm{A}qe^{qa}-\mathrm{B}qe^{-qa}-\frac{pa}{\mathrm{Q}}+\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

$$0=\mathrm{A}+\mathrm{B}-\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2};$$

d' onde si ricava

$$\mathrm{A}=\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2}\cdot\frac{e^{-qa}}{e^{qa}+e^{-qa}}-\frac{\mathrm{P}-pa}{q\mathrm{Q}(e^{qa}+e^{-qa})},$$

$$\mathrm{B}=\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2}\cdot\frac{e^{qa}}{e^{qa}+e^{-qa}}+\frac{\mathrm{P}-pa}{q\mathrm{Q}(e^{qa}+e^{-qa})},$$

$$f=\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{Q}}-\frac{pa^2}{2\mathrm{Q}}-\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2}\left(1-\frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right)-\frac{\mathrm{P}-pa}{q\mathrm{Q}}\cdot\frac{e^{qa}-e^{-qa}}{e^{qa}+e^{-qa}};$$

e sostituendo nell' equazione precedente,

$$y=\frac{\mathrm{P}x-p(ax-\frac{1}{2}x^2)}{\mathrm{Q}}-\frac{\varepsilon p}{\mathrm{Q}^2}\cdot\frac{e^{qx}+e^{-qx}-2}{e^{qa}+e^{-qa}}$$
$$-\frac{\mathrm{P}-pa}{\mathrm{Q}}\cdot\frac{e^{qa}-e^{-qa}-e^{q(a-x)}+e^{-q(a-x)}}{e^{qa}+e^{-qa}}.$$

596. Il massimo valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, che corrisponde a $x=0$, è

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\left(1-\frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right)+\frac{\mathrm{P}-pa}{q\mathrm{Q}}\cdot\frac{e^{qa}-e^{-qa}}{e^{qa}+e^{-qa}}.$$

Si avrà dunque, come più sopra, per l' equazione che serve a regolar le dimensioni della sezione trasversale,

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{\omega'.p}{Q}\left(1 - \frac{2}{e^{qa}+e^{-qa}}\right) + \frac{\omega'(P-pa)}{qQ}\cdot\frac{e^{qa}-e^{-qa}}{e^{qa}+e^{-qa}},$$

nella quale in vece di P e Q bisogna sostituire i loro valori, conforme a ciò che si è veduto n^{i} 584 e 585.

597. L' equazione del n° 587 può esser applicata al caso di cui si tratta, quando si suppone picciolissima la curvatura del pezzo.

598. Negli ultimi sistemi considerati, le estremità delle sottotravi essendo attaccate a punti fissi, l' equilibrio è stabile, e le staffe che legano fra loro i saettoni non sono utili che per prevenire la flessione de' pezzi.

599. La fig. 136 indica un altra disposizione di saettoni, secondo la quale niuna azione si esercita nel senso delle travi longitudinali del palco. Supponiamo sempre le parti di dette travi disunite ne' punti D, D_1, D_2,...., ciascuna di esse DD′, DD_1, D_1D_2.... resisterà alla carica posta nell' intervallo corrispondente del palco come un pezzo sostenuto alle sue estremità. Gli sforzi esercitati verticalmente ai punti D, D_1, D_2,... si decomporranno nel senso de' due saettoni che partono da questi punti, e produrranno sopra ciascun pezzo delle pressioni longitudinali.

Quest' ultimo sistema non essendo sollecitato a cangiar di figura, qualunque sia la distribuzione della carica, presenta di per sè stesso un equilibrio stabile. Ma l' impiego de' pezzi a morsa indicati sulla figura sarebbe necessario in generale, per opporsi alla flessione de' saettoni, e sostener il loro peso tenendoli sospesi ai punti D, D_1, D_2,....

Dell' azione che i ponti formati di travi e saettoni esercitano sulle pile o sulle spalle.

600. Quando le centine sono formate di una sola trave, come si è supposto n° 580, le estremità di questa esercitano solamente uno sforzo verticale sui loro punti di appoggio, sforzo che si valuta facilmente dietro le leggi dell' equilibrio della leva.

601. Nel caso del n° 581, i punti d' appoggio A e A′ (Fig. 132) sostengono ciascuno uno sforzo verticale eguale a quello esercitato sulle estremità superiori D, D′ de' saettoni; e di più uno sforzo orizzontale eguale alla pressione longitudinale sostenuta dal pezzo DD′. I punti B, B′ sostengono uno sforzo verticale dovuto al peso ripartito nelle parti BD, B′D′.

Quando vi sono molti saettoni, l' estremità inferiore di ciascun pezzo esercita sempre contro la spalla sforzi verticali e orizzontali analoghi. La somma degli sforzi orizzontali esercitati contro ogni spalla è uguale alla somma delle pressioni longitudinali sostenute da' pezzi posti nell' intervallo DD′ (Fig. 134).

Gli sforzi orizzontali tendono a rovesciare le spalle; i verticali a mantenerle sulle loro basi. L' azione per mezzo della quale potrebbero esser rovesciate è misurata dalla differenza de' momenti degli sforzi verticali e orizzontali, presi rispetto all' asse attorno il quale girerebbe tutta la massa delle spalle.

602. Nel caso del n° 591, le estremità inferiori de' saettoni esercitano sempre contro le spalle gli stessi sforzi verticali e orizzontali di cui si parla. Ma di più, la parte superiore delle spalle, a cui debbono esser con-

nesse le sottotravi, è sollecitata dall' effetto delle tensioni longitudinali da esse sostenute. La somma di queste tensioni orizzontali è uguale alla somma delle pressioni orizzontali esercitate dalle estremità inferiori de' saettoni; e siccome le prime forze agiscono per far girare la massa della spalla con bracci di leva maggiori delle seconde, la spalla è sollecitata a rovesciarsi al di dentro.

603. Nel caso del n° 599, l' estremità inferiore di ogni saettone esercita contro la spalla uno sforzo verticale e un altro orizzontale, eguali alle componenti verticali e orizzontali della pressione longitudinale sostenuta dal saettone. La somma degli sforzi verticali esercitati da' saettoni DA, DA′ che partono da un medesimo punto D è uguale allo sforzo verticale esercitato in D; e gli sforzi orizzontali esercitati da questi stessi saettoni sono eguali fra loro.

604. Nel sistema del n° 590, si può sopprimere ogni azione orizzontale contro i punti di appoggio, per mezzo di una catena la cui tensione resisterebbe alla spinta de' saettoni (Fig. 137). In questo caso la catena sospesa alle travi e ai saettoni sostiene ordinariamente il tavolato del ponte (*a*).

De' ponti sostenuti da archi.

605. Riguarderemo prima gli archi che formano la parte principale delle centine in questa specie di ponti

---

(*a*) Il ponte di Sciaffusa era disposto su questo principio, come pure il ponte di Wettingen, il più grande arco di legname che abbia mai esistito.

(Fig. 138 e 139) come un corpo omogeneo, al quale si possono applicare i risultamenti esposti più sopra, articolo VI.

Se il peso della costruzione e delle sopraccariche posto sul tavolato fosse distribuito uniformemente nell' intervallo BB', la figura che bisognerebbe dare al pezzo curvo, affinchè non avesse alcuna tendenza a piegare, sarebbe, conforme al n° 442, un arco di parabola. In realtà le parti situate presso le estremità sono un poco più caricate di quelle che son situate nel mezzo, e si dà ordinariamente a questi pezzi la figura di un arco di cerchio. Ma, avuto riguardo alla grossezza del pezzo e alla poca ampiezza della sua curvatura, si può riguardarla come non sollecitata affatto a piegare per effetto del peso della costruzione e di una sopraccarica distribuita uniformente sul palco, e sostenente solamente una pressione longitudinale, il cui valore si calcolerà per mezzo delle formole de' n^i 440 e 441. Il valore di Q dà la pressione orizzontale esercitata dall'arco contro i punti d' appoggio.

606. Se, oltre una carica ripartita uniformemente sull' intervallo BB', fosse posto un peso sul vertice C della curva, l' arco cesserebbe di esser in equilibrio. Per mezzo de' n^i 466 e 467 si conoscerebbe l' azione esercitata da questo peso per aumentare la pressione orizzontale contro i punti d' appoggio, e la pressione longitudinale nelle differenti parti dell' arco. Si potrebbe valutare in seguito, per mezzo del n° 480, l' azione del peso per far piegare l' arco, e i più grandi sforzi che le parti di quest' arco avrebbero a sostenere.

607. Il mezzo C dell' intervallo BB' non è il luogo ove un peso esercita la massima azione per piegare l'arco,

È dunque necessario ricercar le condizioni dell' equilibrio, supponendo il peso posto in un punto qualunque di questo intervallo.

Consideriamo il pezzo curvo MCM′(Fig. 140) formato di due parti simmetriche separate dall'asse verticale AC, e le cui estremità M, M′ situate sopra una retta orizzontale sono sostenute da appoggi che non permettono ad esse di allontanarsi l' una dall' altra. Se si sospende un peso 2Π in un punto qualunque N del pezzo curvo, questo peso farà piegare il pezzo, obbligherà il punto N a spostarsi, ed eserciterà degli sforzi orizzontali e verticali contro i punti di appoggio. Ciascuna parte NM, NM′ del pezzo si troverà allora nello stesso stato di equilibrio che se il pezzo fosse sostenuto in N da un appoggio fisso e fossero applicate alle estremità M, M′ delle forze eguali agli sforzi sostenuti da' punti di appoggio. Gli spostamenti delle estremità che avrebbero luogo in quest' ultimo caso, corrispondono agli spostamenti del punto N che hanno luogo nel primo. Si possono trovar le condizioni di equilibrio di ciascuna parte del pezzo, applicandovi le formole del n° 448; bisogna solamente osservare che essendo il pezzo semplicemente sostenuto in N sopra un appoggio, la direzione della curva in questo punto non è determinata precedentemente, come lo è per un pezzo curvo incàstrato all' estremità superiore. Chiameremo

a, b le distanze AM, AC;

α la distanza orizzontale CD dal punto N al vertice della curva;

x, y le coordinate orizzontale e verticale de' punti della curva, contate dal punto N.

La curva, supposta di figura parabolica, avrebbe per

equazione, contando le coordinate dal punto C, $y = \frac{bx^2}{a^2}$. Ma contando le coordinate dal punto N, l' equazione della parte NM è $y = \frac{b}{a^2}(2\alpha x + x^2)$, d' onde $\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a^2}(\alpha + x)$. Sostituendo questi valori nelle formole del n° 448, in cui si scriverà $\frac{b}{a^2}(a^2 - \alpha^2)$ in vece di b, e trascurando le potenze superiori di $\frac{dy}{dx}$, si ha per la parte NM della curva

$$dx' - dx$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} dx \frac{2b}{a^2}\left[P\left\{(a-\alpha)\alpha x + \left(a - \frac{3\alpha}{2}\right)x^2 - \frac{x^3}{2}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{Qb}{a^2}\left\{(a^2-\alpha^2)\alpha x - \alpha^2 x^2 + (a^2-\alpha^2)x^2 - \frac{4\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{3}\right\}\right],$$

$$dy' - dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} dx \left[P\left\{(a-\alpha)x - \frac{x^2}{2}\right\} + \frac{Qb}{a^2}\left\{(a^2-\alpha^2)x - \alpha x^2 - \frac{x^3}{3}\right\} + m\right],$$

essendo m una costante introdotta dall' integrazione, e il cui valore dipende dall' inclinazione che la curva deve prender sull' appoggio N. Se ne ricava

$$x' - x$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2}\left[P\left\{(a-\alpha)\frac{\alpha x^2}{2} + \left(a - \frac{3\alpha}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{Qb}{a^2}\left\{(a^2-\alpha^2)\frac{\alpha x^2}{2} + (a^2 - 2\alpha^2)\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^4}{3} - \frac{x^5}{15}\right\}\right],$$

$$y' - y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[P\left\{(a-\alpha)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right\} + \frac{Qb}{a^2}\left\{(a^2-\alpha^2)\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right\} + mx\right];$$

e facendo $x = a - \alpha$ per conoscere gli spostamenti h ed f

del punto M, si ha

$$-h=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}\left(\frac{5a^4}{24}-\frac{a^3\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^2}{4}+\frac{a\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^4}{8}\right)+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(\frac{4a^5}{15}-\frac{a^4\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^5}{10}\right)\right],$$

$$f=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{P}\left(\frac{a^3}{3}-a^2\alpha+a\alpha^2-\frac{\alpha^3}{3}\right)+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(\frac{5a^4}{12}-a^3\alpha+\frac{a^2\alpha^2}{2}+\frac{a\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}\right)-m(a-\alpha)\right].$$

Le stesse formole converranno alla parte NM′ della curva, cangiando il segno di α e quello di m. Per conseguenza, indicando con P_1, Q_1 le forze applicate al punto M′, e con h_1, f_1 gli spostamenti di questo punto, si avrà

$$-h_1=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{2b}{a^2}\left[\mathrm{P}_1\left(\frac{5a^4}{24}+\frac{a^3\alpha}{2}+\frac{a^2\alpha^2}{4}-\frac{a\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^4}{8}\right)+\frac{\mathrm{Q}_1 b}{a^2}\left(\frac{4a^5}{15}+\frac{a^4\alpha}{2}-\frac{a^2\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{10}\right)\right],$$

$$f_1=\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathrm{P}_1\left(\frac{a^3}{3}+a^2\alpha+a\alpha^2+\frac{\alpha^3}{3}\right)+\frac{\mathrm{Q}_1 b}{a^2}\left(\frac{5a^4}{12}+a^3\alpha+\frac{a^2\alpha^2}{2}-\frac{a\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}\right)-m(a+\alpha)\right].$$

608. Nella quistione di cui si tratta si ha $\mathrm{P}=-\Pi\frac{a+\alpha}{a}$; $\mathrm{P}_1=-\Pi\frac{a-\alpha}{a}$; $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}_1$; ed è necessario che $h=-h_1$, e $f=f_1$. Dalle equazioni che esprimono queste condizioni si ricava

$$m=-\frac{\Pi}{a}\left(\frac{2a^2\alpha}{3}-\frac{2\alpha^3}{3}\right)+\frac{\mathrm{Q}b}{a^2}\left(a^2\alpha-\frac{\alpha^3}{3}\right),$$

$$\mathrm{Q}=\frac{5\Pi}{32}\cdot\frac{5a^4-6a^2\alpha^2+\alpha^4}{a^3b},$$

$$h=-h_1=\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{(19a^8-60a^6\alpha^2+66a^4\alpha^4-28a^2\alpha^6+3\alpha^8)b\alpha}{96a^7},$$

$$-f=-f_1=\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{3a^8+104a^6\alpha^2-102a^4\alpha^4-5\alpha^8}{384a^5},$$

formole che fan conoscere la pressione orizzontale esercitata contro gli appoggi, e lo spostamento del punto N in cui è sopeso il peso 2Π.

609. Quanto all'azione di questo peso per comprimere e far piegare il pezzo curvo, si osserverà primieramente, conforme al n° 475, che se questo pezzo nell'atto che è caricato del peso 2Π in N, sostiene il peso p sopra ogni unità di lunghezza dell'intervallo MM′, il valore della pressione T sarà dato dall'espressione del n° 441, alla quale si unirà l'espressione del n° 449, mettendovi per P e Q i valori precedenti. Si avrà dunque per la parte NM del pezzo, trascurando sempre il quadrato di $\frac{b}{a}$,

$$T=\frac{pa^2}{2b}+\Pi\frac{2b(a+\alpha)(\alpha+x)}{a^3}+\frac{5\Pi}{32}\cdot\frac{5a^4-6a^2\alpha^2+\alpha^4}{a^3b}.$$

Si osserverà in seguito che

$$v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\frac{v'}{\varepsilon}\left\{P(a-\alpha-x)+\frac{Qb}{a^2}(a^2-\alpha^2-2\alpha x-x^2)\right\},$$

formola in cui si dovran sostituire per P e Q i valori precedenti. Queste due espressioni serviranno a determinare le dimensioni del pezzo curvo, conforme a ciò che si è veduto nel n° 475. Converranno alla parte NM′ del pezzo cangiando il segno di α.

610. Si conoscerà l'effetto della flessione prodotta dal peso 2Π nel punto N in cui è sospeso, facendo nell'espressione precedente $x=0$; il che dà

$$v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=\frac{v'}{\varepsilon}\left\{P(a-\alpha)+\frac{Qb}{a^2}(a^2-\alpha^2)\right\},$$

o mettendo per P e Q i valori precedenti,

$$v'\frac{d\varphi'-d\varphi}{ds}=-\frac{v'\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{(a^2-\alpha^2)(7a^4+30a^2\alpha^2-5\alpha^4)}{32a^5}.$$

Se si suppone $\alpha = 0$, cioè che il peso 2Π è posto nel vertice C del pezzo curvo, questa formola si accorda con quella data al n° 476. Ma il punto C non è la posizione nella quale il peso 2Π darebbe luogo alla massima flessione possibile; perchè il valor massimo dell' espressione precedente corrisponde ad $\alpha = a\sqrt{\frac{7}{3} - \sqrt{\frac{176}{45}}}$, ovvero $\alpha = 0{,}3556a$ circa. Quindi il peso 2Π produrrà la massima flessione possibile, quando la distanza CD sarà un poco più grande del terzo della distanza AM. Il valore corrispondente della massima stensione o compressione delle fibre proveniente dalla flessione al punto di sospensione N, è molto prossimamente

$$\nu' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = -\frac{\nu'\Pi}{\varepsilon} . 0{,}382\, a .$$

611. Farem notare che l'espressione di $\nu' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$ del n° 609 ha un massimo positivo che corrisponde al valore $x = -\alpha - \frac{Pa^2}{2Qb}$. Sostituendo questo valore in quella espressione, si ha pel valor del massimo

$$\frac{\nu'}{\varepsilon} \cdot \frac{(Pa + 2Qb)^2}{4Qb} ;$$

ovvero mettendo per P e Q i valori dati al n° 608,

$$\frac{\nu'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(9a^4 - 16a^3\alpha - 30a^2\alpha^2 + 5\alpha^4)^2}{160\,a^5(5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4)} . \qquad (A)$$

Questa formola si riduce a $\frac{\nu'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{81a}{800}$ quando $\alpha = 0$, o quando il peso 2Π è sospeso nel vertice C. Il suo valore aumenta quando α aumenta negativamente a partir da zero. La distanza al vertice C del punto in cui bisogna situare il peso 2Π per renderla la più grande possibile è

un poco minore de' $\frac{2}{5}$ dell' intervallo AM′, e il valor massimo è con molta approssimazione $\frac{\varphi'\Pi}{\varepsilon}$.0,177$a$. Essendo questo minore del valore rinvenuto nel n° precedente, se ne ricava che il peso 2Π sospeso in N diminuisce la curvatura del pezzo curvo nel suo punto di sospensione più di quel che l' aumenti nella parte CM′. Non si deve d' altronde obbliare, che è necessario considerare in pari tempo l' effetto del cangiamento di figura del pezzo curvo, e quello della pressione longitudinale cui è esposto, per giudicare dello sforzo sostenuto dalle fibre (*).

(*) La formola (A) dà la massima espressione di $\varphi' \frac{d\varphi' - d\gamma}{ds}$ corrispondente ad un determinato valore di α. Se si differenzia rispetto ad α, e si eguaglia a zero il differenziale, si conoscerà il sito nel quale il peso 2Π produce il massimo aumento di curvatura in un altro punto dell' arco. È da osservarsi primieramente che pel massimo dev' esser α negativa, e che in conseguenza il punto richiesto deve trovarsi nel ramo NM′ della curva. Scritto $-\alpha$ in luogo di α, e fatto per semplicità $\alpha = ma$, quella formola diviene

$$\frac{\varphi'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{5a}{32} \cdot \frac{(m^4 - 6m^2 + 3{,}2m + 1{,}8)^2}{m^4 - 6m^2 + 5},$$

ovvero

$$\frac{\varphi'\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{5a}{32} \cdot \frac{(m-1)^2(m^3 + m^2 - 5{,}m - 1{,}8)^2}{(m^2-1)(m^2-5)}$$

Eguagliando a zero il differenziale di questa espressione, ed osservando che m dev' esser positiva e minore dell' unità, si vedrà che la determinazione di questo valore dipenderà dalla risoluzione dell' equazione

$$m^6 + m^5 - 8m^4 - 9{,}6m^3 + 16{,}6m^2 + 16{,}6m - 8 = 0.$$

612. Nella maggior parte de' ponti di legname (Fig. 138) o di ferro (Fig. 139) formati da un arco, s'impiegano de' saettoni che concorrono coll'arco a sostener il peso delle parti del palco prossime alle spalle. Questi pezzi possono esser diretti parallelamente all'arco o verso un punto posto immediatamente al di sopra delle imposte. Dessi sarebbero poco utili se la costruzione dovesse sostener solamente una carica uniformemente ripartita nell' intervallo de' punti di appoggio. Ma siccome i ponti son destinati a sostener de' carichi che occupano successivamente le diverse parti di questo intervallo, l' uso de' saettoni riesce vantaggioso in quanto che diminuisce l'azione esercitata sull'arco, nel caso in cui questa tende a pie-

---

Questa equazione ha una sola radice positiva compresa tra *o* e 1 che è molto prossimamente

$$m = o,379\,,$$

il qual volore dà di fatto un massimo, perchè rende negativo il coefficiente differenziale di secondo ordine. Si ha quindi $\alpha = o,379\,a$, e l'espressione precedente per questo valore di α diviene $\frac{\nu'\Pi}{\varepsilon} \cdot o,177a$.

Senza tener conto del segno che precede l'espressione di $\nu'\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$, il quale indica solamente se la curvatura è aumentata o diminuita nel punto che si considera, sarà facile rilevare che il valore riportato nel n° 610, qualunque sia α, è sempre maggiore di quello dato al n° 611. Da ciò si ricava che lo sforzo sostenuto dalle fibre per effetto solo della variazione di curvatura, è sempre maggiore nel punto di sospensione che in qualunque altro punto. Questa osservazione renderà più facile la ricerca del massimo del secondo membro dell' equazione del n° 475, che serve a determinare le dimensioni del pezzo curvo.

★

garlo con maggior forza. Non bisogna dimenticare che le azioni verticali esercitate alle estremità superiori dei sacttoni, producono, conforme a ciò che abbiam veduto nel n° 581, delle pressioni dirette nel senso della lunghezza de' pezzi orizzontali superiori, alle quali questi ultimi pezzi debbono esser capaci di resistere (*a*).

613. Quando gli archi sono formati di molti ordini di pezzi curvi di legname, si può riguardare la pressione longitudinale come ugualmente ripartita su tutti i pezzi. Il momento di flessione ε dev' esser valutato conforme ai n^i 508 e seg., tenendo presente che ogni ordine di pezzi ricurvi è ordinariamente diviso in molte parti nel senso della lunghezza. Mettendo questi ordini di pezzi a contatto, stringendoli con fasce di ferro, e distribuendo le commessure in modo che non si corrispondano sulla medesima normale, il momento di fles-

---

(*a*) In molti ponti di legname o di ferro sostenuti da archi le staffe o altri pezzi per mezzo de' quali il peso del palco è trasmesso all' arco, son diretti secondo le normali alla curva. Si stabiliscono allora alle loro estremità superiori delle pressioni o tensioni dirette nel senso de' pezzi orizzontali superiori; ed ai punti ove gli stessi pezzi premono sull' arco, delle pressioni orizzontali eguali alle prime, e dirette verso il mezzo dell' arco. Quindi l' arco è allora sollecitato non solo dall' azione verticale del peso della costruzione, ma pur anche dalle azioni orizzontali che non esistono quando le staffe son messe verticalmente. Si può del pari osservare che quando i pezzi che trasmettono all' arco il peso del palco sono ad esso perpendicolari, questo peso non è uniformemente ripartito sull' intervallo compreso tra le spalle. La parte di mezzo dell' arco è più caricata e le parti vicine alle spalle lo sono meno, il che esige dalla parte dell' arco una maggior resistenza.

sione è da per tutto almeno eguale alla somma de' momenti di flessione di ogni pezzo, meno uno di questi momenti. Se i pezzi non sono solamente messi a contatto, ma intagliati a denti, o riuniti con chiavi (come l'indica la fig. 93), e se le commessure sono incrociate come si è detto, il momento di flessione nelle parti le più deboli differirà poco da quello di un solido di un sol pezzo, avendo per altezza la somma delle altezze dei pezzi, meno una.

614. Ne' ponti di ferro gli archi sono ordinariamente formati da due ordini di pezzi curvi, legati fra loro per mezzo di traverse normali e di croci. Le parti poste le une in continuazione delle altre, in ogni ordine, debbono esser riunite con leghe di ferro da fucina, fortemente strette, che presentano alla tensione una resistenza eguale a quella delle parti stesse. Un arco formato a tal modo può esser riguardato come un corpo di un sol pezzo, il cui momento di flessione ε si valuterà conforme al n° 511. La pressione longitudinale può esser supposta egualmente ripartita sopra i due ordini di pezzi curvi..

Del legame delle centine ne' ponti di legname.

615. Ad eccezione de' casi indicati nel n° 558, le costruzioni di cui ci occupiamo presentano un equilibrio stabile in quanto a' cangiamenti di figura che possono aver luogo nel piano verticale di ogni centina. Ma l' equilibrio non è punto stabile riguardo agli spostamenti delle parti della centina che avrebbero luogo da un lato o dall'altro di questo piano. Bisogna solamente eccettuare il caso in cui i pezzi orizzontali superiori

diretti da una spalla all'altra, fossero formati di pezzi uniti estremo ad estremo e fissati alle spalle.

Quest' ultima disposizione non avendo quasi mai luogo, è indispensabile di prender delle precauzioni per mantener le centine ne'loro piani rispettivi. Si perverrà a questo scopo situando da una centina all' altra delle fasce o traverse orizzontali, congiunte nelle loro estremità coi pezzi delle centine, in modo che l' angolo da esse formato col piano delle centine non possa variare. Con questa disposizione una centina non potrebbe rovesciarsi girando sui suoi punti di appoggio, senza che tutte le altre prendessero lo stesso movimento e senza che tutte le suddette fasce fossero rotte alle due estremità (*a*).

616. Si mantengono le centine d' una maniera più sicura ancora, aggiungendo alle fasce orizzontali de' pezzi diretti diagonalmente ne' loro intervalli. Si possono metter queste traverse oblique tra gli archi ne' piani inclinati che contengono i saettoni, nel tavolato, e ne' piani verticali o normali che contengono i pezzi doppi. L' effetto di questi pezzi obliqui deriva da questo, che le centine non possono rovesciarsi senza che di essi una parte si accorci e l' altra si allunghi. Le loro estremità debbono esser attaccate ai pezzi delle centine con leghe

---

(*a*) Questa disposizione è principalmente applicabile ai ponti di ferro. L' esempio del ponte di Austerlitz a Parigi, di cui gli archi hanno più di 32^m di corda, prova che l' impiego delle fasce orizzontali non è indispensabile. Non si erano messe fasce nel grande arco di ferro fuso di 72^m di corda che forma il ponte di Sunderland, ma vi si sono aggiunti posteriormente alla costruzione, alcuni correnti diretti diagonalmente.

di ferro fortemente strette. Col mezzo de' pezzi obliqui non è più necessario per la stabilità dell' equilibrio che le traverse orizzontali sien congiunte coi pezzi delle centine in modo che l'angolo non possa variare nel punto di congiunzione, ma fa d' uopo sempre che le estremità delle dette fasce sieno attaccate ai pezzi delle centine.

617. Le principali cause del rovesciamento delle centine di un ponte sono l' azione del vento e le scosse impresse dal passaggio delle vetture. Non si può apprezzarle con sufficiente esattezza per sottomettere al calcolo lo stabilimento de' pezzi destinati a prevenir questo rovesciamento.

ARTICOLO XI.

Delle centine o armature di legname da servire per la costruzione delle volte.

618. Lo stabilimento delle centine esige la conoscenza degli sforzi che queste debbono sostenere durante la costruzione della volta.

Si distinguono due specie principali di centine: 1° quelle che son sostenute sopra punti di appoggio distribuiti nell' intervallo delle spalle; 2° quelle che sono interamente sostenute da punti di appoggio presi nel piede delle spalle, sotto le imposte della volta.

Degli sforzi esercitati sulle centine per effetto del peso de' cunei.

619. Quando si costruisce una volta, ogni ordine di cunei è posato sopra un pezzo di legno orizzontale chia-

mato dossale che si appoggia sui pezzi superiori dell'armatura della centina. I dossali esercitano sopra questi pezzi degli sforzi diretti nel senso de' tagli de' cunei, e di cui si tratta conoscer il valore.

Consideriamo la porzione di volta rappresentata dalla fig. 141, appoggiata sopra una centina. Un cuneo qualunque come ABDC riceve dal cuneo posto immediatamente al di sopra di esso una pressione normale al letto AB. Di più, siccome quest' ultimo cuneo tende a scorrer lungo AB, e la forza proveniente dalla resistenza della centina che lo ritiene non è uguale a quella che tende a tirarlo lungo AB ma è diminuita dall' effetto dell' attrito e dalla coesione che hanno luogo in quella commessura, ne segue che il cuneo ABDC è ancora sollecitato nella direzione BA da una forza eguale a queste resistenze. Finalmente questo stesso cuneo è sollecitato verticalmente dal peso proprio. Possiamo considerarlo come un corpo appoggiato contro il piano inclinato CD, sollecitato dalle tre forze di cui si è parlato, e ritenuto da una forza proveniente dalla resistenza dell' armatura, che supporremo parallela alla commessura CD. Posto ciò, chiamando

$G_1, G_2, G_3, \ldots G_n$ i pesi del 1°, 2°, 3° .... n^{simo} cuneo, contando dal cuneo superiore, per un unità di lunghezza della volta;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ gli angoli formati dalle commessure inferiori degli stessi cunei con una linea verticale;

$z_1, z_2, z_3 \ldots, z_n$ le lunghezze delle commessure inferiori de' cunei;

$T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$ le pressioni normali che hanno luogo su queste commessure inferiori;

R_1, R_2, R_3, ... R_n gli sforzi esercitati sulla centina parallelamente alle commessure inferiori di ciascun cuneo ;

f e γ avendo i significati indicati n° 290 ;

e osservando 1° che la forza T_{n-1} perpendicolare ad AB, si decompone perpendicolarmente e parallelamente a CD nelle due forze $T_{n-1}\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1})$, e $-T_{n-1}\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1})$; 2° che la resistenza proveniente dall' attrito e dalla coesione sulla commessura AB è $fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}$, e che questa forza, diretta secondo BA, si decompone perpendicolarmente e parallelamente a CD nelle due forze $(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1})\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1})$, e $(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1})\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1})$; 3° che il peso G_n del cuneo ABDC si decompone perpendicolarmente e parallelamente a CD nelle due forze $G_n\,\text{sen}.\alpha_n$ e $G_n\cos.\alpha_n$: si vede prima che la pressione normale esercitata dal cuneo ABDC sulla commessura inferiore CD è

$$T_n = T_{n-1}[\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + \gamma z_{n-1}\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n\,\text{sen}.\alpha_n ;$$

e si ha di più, per l' equazione esprimente le condizioni dell' equilibrio di questo cuneo,

$$R_n = -T_{n-1}(1+f^2)\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \gamma z_{n-1}[\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) - f\,\text{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n(\cos.\alpha_{n-1} - f\,\text{sen}.\alpha_n) - \gamma z_n .$$

620. Per mezzo di queste equazioni si calcoleranno facilmente le pressioni indicate da R, cominciando dal cuneo superiore, e osservando che $T_0 = 0$ e $\gamma z_0 = 0$, di maniera che si ha per questo cuneo

$$T_1 = G_1\,\text{sen}.\alpha_1 ,$$

$$R_1 = G_1(\cos.\alpha_1 - f\,\text{sen}.\alpha_1) - \gamma z_1 .$$

621. Se si suppone nulla la forza di coesione, come convien fare nella maggior parte delle applicazioni, le equazioni del n° 619 divengono

$$T_n = T_{n-1}[\cos.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f \operatorname{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n \operatorname{sen}.\alpha_n,$$

$$R_n = -T_{n-1}(1+f^2)\operatorname{sen}.(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n(\cos.\alpha_n - f \operatorname{sen}.\alpha_n);$$

e si ha pel cuneo superiore

$$T_1 = G_1 \operatorname{sen}.\alpha_1,$$

$$R_1 = G_1(\cos.\alpha_1 - f \operatorname{sen}.\alpha_1).$$

622. Si vede da queste formole che la pressione normale esercitata sulla centina da uno stesso ordine di cunei varia continuamente a misura che la costruzione della volta progredisce. Il primo ordine di cunei che comincia a caricar la centina è quello la cui inclinazione è tale che si ha $\text{tang}.\alpha_1 < \frac{1}{f}$ (V. pe' valori di f i n^i 280 e seg., e 315). Nel posare nuovi ordini di cunei, la pressione da questo esercitata sulla centina diminuisce, e può anche divenir nulla o negativa. Accade lo stesso pe' cunei seguenti, ed è per questa ragione che quando si abbassa l'armatura prima che la volta sia chiusa, si vede qualche volta sostenersi in aria un certo numero di cunei, che quando furon messi caricavano la sottoposta armatura (*a*). Ogni filare di cunei esercita la massima pressione possibile quando non è ancora ricoverto dal filare superiore. La pressione esercitata diminuisce dopo la mettitura di questo filare; diminuisce di nuovo dopo la mettitura dell' altro filare che ricopre questo; e così di seguito.

(*a*) V. i n^i 312 e seg., come pure le opere citate nelle note

623. Per aver una conoscenza compiuta delle azioni esercitate sopra una centina, e de' diversi stati di equilibrio pe' quali questa costruzione dee passare durante la mettitura de' cunei, è dunque necessario calcolare colle formole de' n.i 619. o 621, i diversi valori che prende successivamente la pressione normale esercitata da ogni ordine di cunei, a misura che questo è ricoverto da un maggior numero di altri. Ma se si vuole conoscer per ogni punto della curva della centina, un limite che la pressione normale esercitata in questo punto non può sorpassare, basterà calcolare la pressione esercitata da ogni filare di cunei, nell'ipotesi che ognuno di essi sia l' ultimo che è stato messo, cioè impiegando la formola

$$R_n = G_n (\cos . \alpha_n - f \operatorname{sen} . \alpha_n) - \gamma z_n ;$$

ovvero, trascurando la coesione

$$R_n = G_n (\cos . \alpha_n - f \operatorname{sen} . \alpha_n).$$

Dello stabilimento delle centine.

624. Nel costruire una volta bisogna proporsi per oggetto che ogni cuneo posto sull' armatura rimanga nell' istesso sito fino a che la volta sia stata chiusa, e disfatta l' armatura, l' insieme de' cunei si mantenga da sè stesso in equilibrio. La volta, durante e dopo il disarmamento, può senza inconveniente soffrire un leggiero rassettamento, prodotto dall' elasticità della materia de' cunei, e dalla compressione della malta o delle zeppe poste nelle commessure. Ma uno spostamento qualunque de' cunei che avesse luogo prima che la volta fosse chiusa, non potrebbe esser che nocivo. Per ciò le centine debbono esser disposte in modo che

durante la mettitura il sistema non tenda a cangiar di figura e i pezzi non sieno sollecitati a girare su loro punti di congiunzione.

625. La figura 142 rappresenta una centina retta da punti di appoggio posti nell' intervallo delle spalle. Gli sforzi esercitati da' cunei perpendicolarmente alla curva della centina, sui pezzi DD_1, D_1D_2, ... sono trasmessi ai punti d'appoggio da' ritti DE, D_1E_1, D_2E_2,... diretti nel senso di questi sforzi. Si può senza errore sensibile, assimilare i pezzi DD_1, D_1D_2.... a un pezzo caricato di pesi distribuiti sulla sua lunghezza, e sostenuto orizzontalmente sulle sue estremità. Sarà facile, per quello che si è veduto più sopra, calcolare lo sforzo esercitato sopra ciascun pezzo come pure le pressioni che ne risultano nella direzione de' ritti DE, D_1E_1,...

626. Questo sistema resterà in equilibrio e non tenderà a cangiar di figura per tutto il tempo della costruzione della volta. Se i punti B, B' sono fissi, e se i tre pezzi che si riuniscono ai punti D, D_1, D_2.... sono legati fra loro, l' equilibrio è stabile, anche quando si suppone che tutti i pezzi sien liberi di girare sui punti di congiunzione. Sarebbe nondimeno utile di porre alcune traverse, come è indicato sulla figura: questi pezzi consoliderebbero i ritti, opponendosi alla loro flessione nel senso del piano della centina (*a*).

627. Quando i punti d' appoggio debbono esser presi nel piede delle spalle, la centina può esser disposta nel modo indicato dalla fig. 143. Lo sforzo esercitato da'

(*a*) Si trova il disegno di una centina disposta su questo principio ne' *Reports di Smeaton*, tomo III, pag. 349.

cunei, perpendicolarmente alla curva della centina, è trasmesso da' pezzi DD_1, D_1D_2,.... ai punti D, D_1, D_2,.... in cui questi pezzi son congiunti fra loro. Gli sforzi normali esercitati al punto D si decompongono nel senso del saettone DA e del tirante orizzontale DD'. La pressione che ne risulta nel senso del saettone è distrutta dalla resistenza del punto d' appoggio A, e la pressione diretta nel senso del tirante è distrutta da una pressione eguale proveniente dallo sforzo esercitato al punto D'. Una decomposizione simile ha luogo ai punti D_1, D_2,.... I pezzi DD_1, D_1D_2,.... sono nello stesso stato che nel sistema considerato n° 625, e si calcoleranno facilmente le pressioni longitudinali sostenute da' saettoni e da' tiranti.

628. Questo sistema resterà in equilibrio, e non sarà sollecitato a cangiar di figura durante la costruzione della volta, se si mettono nel tempo stesso i cunei da' due lati. Ammettendo le supposizioni indicate n° 626, l'equilibrio è stabile. I pezzi DE, D_1E_1, D_2E_2, ... indicati sulla figura non sono utili che per consolidare i tiranti e i saettoni e riportarne il peso su' punti D, D_1, D_2,....

629. Si può ancora disporre una centina di questo genere nel modo indicato fig. 144. In tal caso gli sforzi normali esercitati al punto D sono immediatamente trasmessi ai punti d' appoggio per mezzo de' saettoni DA, DA'; e così degli altri punti D_1, D_2.... I saettoni non sostengono che delle pressioni longitudinali facili a calcolarsi.

630. In quest' ultimo sistema l' equilibrio è stabile, e la centina non è sollecitata a cangiar di figura anche quando vi sien più cunei posti da una parte che

dall' altra. I pezzi DE, D_1E_1,.... hanno lo stesso oggetto come nel caso precedente (*a*).

631. Si può applicare alle centine ciò che si è detto pe' ponti di legname ne' n^i 615 e seg. sulla necessità di legar le armature fra loro.

ARTICOLO XII.

De' solai.

632. Distingueremo principalmente 1° i solai formati di travicelli paralleli appoggiati sui muri o sostenuti da travi poste per traverso da un muro all' altro; 2° i solai formati di pezzi che non arrivano da un muro all' altro, e sono congiunti fra loro; 3° quelli formati di molti ordini di tavoloni soprapposti, uniti a scanalatura e linguetta, le cui direzioni s' incrociano, e sono inchiodati gli uni sugli altri.

I solai della prima specie non richieggono ricerche

(*a*) Il principio di questa disposizione è stato applicato per la prima volta al ponte di Westminster da King, nel 1740. Lo è stato pure al ponte di Black-Friars, costrutto da Mylne nel 1769, e di cui l' arco di mezzo ha 100 piedi inglesi di corda. *A system of mechanical philosophy*, di Robison, tomo I, pag. 687. M. Rennie ha disposto dell' istessa maniera le centine del ponte di Waterloo, la cui corda e di 120 piedi inglesi. V. la III.ª parte de' *Voyages dans la Grande-Bretagne* di M. Ch. Dupin, *Tredgold's Principles of carpentry*, e le ultime Enciclopedie inglesi. Le volte di questi ponti, e sopra tutto quella dell' ultimo che è di granito, erano pesantissime, avendo i cunei più di 6 piedi di altezza.

speciali. Si potrà sempre, dietro i risultamenti presentati n^{i} 88 e seg., e 123 e seg. paragonare la resistenza de' pezzi alle cariche che avranno a sostenere.

633. La disposizione de' solai della seconda specie, chiamati ordinariamente *solai di pezzi congiunti*, può esser variata all' infinito. L' oggetto che si ha in mira è quella di eseguire la costruzione con pezzi la cui lunghezza è minore dell' intervallo de' muri. Considereremo solamente una delle più semplici disposizioni indicata dalla fig. 145. Questo sistema, formato di quattro pezzi disposti simmetricamente in un quadro quadrato, può esser supposto caricato di pesi distribuiti uniformemente in tutta l' estensione del quadro. Si può ancora supporlo caricato da un solo peso posto nel centro, la cui azione è trasmessa ai quattro punti indicati da C, C, C′, C′. In tutti i casi se la carica è disposta simmetricamente, il suo effetto sarà di far piegare il sistema in modo che i quattro punti B, B, B′, B′ si abbasseranno di quantità eguali e resteranno contenuti in uno stesso piano orizzontale. Segue da tutto ciò che considerando a parte i due pezzi AB, AB e i pesi che sostengono, possiamo riguardarli come formanti un sistema nel quale i pezzi sarebbero per tal modo connessi che i punti B, B′ resterebbero necessariamente allo stesso livello durante la flessione. Si può dir lo stesso de' pezzi A′B′, A′B′.

Supporremo che un peso 4Π è posto nel centro del quadro, e che in ciascun punto C, C, C′, C′, ne risulti uno sforzo verticale Π. Le estremità A, A, A′, A′ de' pezzi eserciteranno ciascuna sul punto del quadro che le sostiene uno sforzo Π. Si possono dunque ricercare le condizioni di equilibrio della proposta ar-

matura riguardando il sistema de' due pezzi AB, AB come sostenuto ai punti C, C sopra un asse fisso, e caricato alle estremità A, A di due pesi Π.

634. Posto ciò si considereranno due pezzi eguali M*n*, *m*N (Fig. 146) caricati alle estremità M, *m* di pesi Π. Questi pezzi s' incrociano nell' intervallo N*n*. L' estremità del primo è connessa al punto *n* del secondo, e l' estremità del secondo lo è al punto N del primo. I due pezzi poggiano in C sopra un asse orizzontale fisso. Il peso Π sospeso in M tende a far girare il pezzo M*n* sul punto C; ma questo moto è impedito, perchè un certo sforzo si esercita da sopra in sotto sul punto N, e uno sforzo eguale ha luogo da sotto in sopra nel punto *n* di questo pezzo, in seguito dell' azione del peso Π sospeso in *m* e della connessione de' due pezzi. Possiamo dunque riguardare la porzione CM del primo pezzo incastrata in C secondo una direzione che bisognerà conoscere, e sollecitato in M dal peso Π e in N dallo sforzo di cui si è parlato. Possiamo riguardar parimenti la porzione CN del secondo pezzo come incastrata in C e sollecitata in N dallo stesso sforzo. Chiameremo

x, *y* le coordinate, orizzontale e verticale, di un punto qualunque della curva de' pezzi, contate dal punto C;

a la distanza AC;

a' la distanza BC;

f l' abbassamento AM del punto M;

f' l' abbassamento BN del punto N;

ω l' angolo che la tangente della porzione di curva CM forma in C coll' asse orizzontale C*x*;

Π' lo sforzo che l' estremità di un pezzo esercita sull' altro ai punti N, *n*;

ε e ρ avranno i significati indicati n^{i} 80 e 113.

Si avrà in primo luogo per la parte CN del primo pezzo Mn,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a - x) - \Pi'(a' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - \Pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \,\text{tang}\,.\,\omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \Pi'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x.\varepsilon \,\text{tang}.\omega.$$

Si avrà in seguito per la parte MN dello stesso pezzo, determinando le costanti in modo che per $x = a'$ i valori di $\frac{dy}{dx}$ e y sieno eguali a quelli che sarebbero dati dalle equazioni precedenti,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) - \Pi' \frac{a'^2}{2} + \varepsilon \,\text{tang}\,.\,\omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - \Pi'\left(\frac{a'^2x}{2} - \frac{a'^3}{6}\right) + x.\varepsilon \,\text{tang}.\omega.$$

Si avrà finalmente per la parte CN del secondo pezzo mN,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi'(a' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi'\left(a'x - \frac{x^2}{2}\right) - \varepsilon \,\text{tang}\,.\,\omega$$

$$\varepsilon y = \Pi'\left(\frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - x\,.\,\varepsilon \,\text{tang}\,.\,\omega\,.$$

Il primo e l'ultimo de' valori di y debbono dare $y = f'$ quando $x = a'$. Dunque

$$\varepsilon f' = \Pi\left(\frac{aa'^2}{2} - \frac{a'^3}{6}\right) - \Pi' \frac{a'^3}{3} + a'\,.\,\varepsilon \,\text{tang}.\omega,$$

$$\varepsilon f' = \Pi' \frac{a'^3}{3} - a'\,.\,\varepsilon \,\text{tang}\,.\,\omega.$$

L' equilibrio dell' uno e dell' altro pezzo intorno al punto C esige inoltre che si abbia

$$\Pi a = 2\Pi' a' .$$

Da queste tre equaziani si ricava

$$\Pi' = \Pi \frac{a}{2a'} ,$$

$$\text{tang.}\,\omega = -\frac{\Pi}{\varepsilon}\,\frac{(a-a')a'}{12},$$

$$f' = \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{(3a-a')a'^2}{12};$$

e sostituendo i valori di Π e di tang.ω nell'equazione appartenente alla parte MN del primo pezzo, e poi facendo $x = a$, si troverà per l' abbassamento AM del punto estremo M,

$$f = \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{a(2a^2 - 2aa' + a'^2)}{6}.$$

Se in luogo de' due pezzi Mn, Nm che s' incrociano sulla lunghezza Nn, non si avesse che un sol pezzo Mm sostenuto in C, e caricato alle due estremità del peso Π, la freccia di curvatura sarebbe, giusta il n° 87, $\frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{a^3}{3}$. L' effetto dell' incrociamento de' due pezzi è di diminuire la freccia di curvatura, e tanto più quanto maggiore è l' intervallo Nn. Se i due pezzi s' incrociano su tutta la lunghezza, cioè se $a' = a$, la formola precedente dà, come dev' essere, $f = \frac{\Pi}{\varepsilon}\cdot\frac{a^3}{6}$.

Per le parti CN ed MN del primo pezzo e per la parte BC del secondo si ha rispettivamente

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{a}{2} - x + \frac{ax}{2a'}\right),$$

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a - x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\left(\frac{a}{2} - \frac{ax}{2a'}\right).$$

Quando $a' = \frac{1}{2}a$, il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è costante in tutti i punti della parte CN del pezzo Mn; di maniera che il pezzo in questa parte è incurvato secondo un arco di cerchio il cui raggio è $\frac{\varepsilon}{\Pi} \cdot \frac{2}{a}$, e questo pezzo è ugualmente disposto a rompersi in tutti i punti di questa parte. Se a' è $< \frac{1}{2}a$, il pezzo Mn tende a rompersi in N, e se a' è $> \frac{1}{2}a$, tende a rompersi in C. Si conosceranno le condizioni della rottura, conforme al n° 358, mettendo nel primo caso

$$\rho = \Pi(a - a'),$$

e nel secondo

$$\rho = \Pi\frac{a}{2}.$$

Se in luogo de' due pezzi che s' incrociano non si avesse che un sol pezzo Mm sostenuto in C, e caricato alle estremità de' pesi Π, si dovrebbe avere, secondo il n° 122, $\rho = \Pi a$. Dalle equazioni precedenti si potrà giudicare in qual rapporto l' incrociamento de' pezzi rende il sistema più solido.

635. I risultamenti precedenti si applicheranno immediatamente al sistema rappresentato nella fig. 145, caricato nel modo indicato n° 633, e faranno conoscere la quantità di cui i quattro pesi Π faranno piegare i pezzi, o il valore che bisognerebbe dare a questi pesi per operarne la rottura.

Se i punti di appoggio A, A' sono posti al quarto de' lati del quadro, si ha $a' = \frac{a}{2}$, e

$$\rho = \Pi\frac{a}{2}.$$

*

Quindi il sistema presenta allora una forza doppia di quella di due pezzi di una lunghezza eguale alla distanza de' lati del quadro, benchè il volume del legname non sia maggiore che della metà. In realtà, la forza di questo sistema non sarebbe assolutamente doppia di quella de' due pezzi, perchè il legname è indebolito a' punti d' incastro che sono quelli in cui tende a rompersi.

636. Se si suppone che la sezione trasversale de' pezzi è un rettangolo di cui la larghezza è b, ρ sarà proporzionale a b. Da un altro canto, se l' altezza de' pezzi è regolata in modo che la relazione che dietro le formole precedenti deve esistere tra ρ, a ed a', sia soddisfatta, questa relazione lo sarà ancora, se si vengono ad aumentare in uno stesso rapporto le quantità a, a' e b. Dunque se si fanno variare in un medesimo rapporto tutte le dimensioni orizzontali della fig. 145, senza cangiar l' altezza de' pezzi, il valore del peso 4Π capace di operar la rottura, resterà costantemente lo stesso.

637. Se il sistema di quattro pezzi, rappresentato nella fig. 145, fosse caricato di pesi distribuiti in tutta l' estensione del quadro, con calcoli simili a' precedenti si troverebbero le condizioni dell' equilibrio. Non ci arresteremo di più su queste ricerche che non offrono difficoltà, e di cui basta l' aver indicato i principî.

Della flessione e della rottura de' piani elastici.

638. L' oggetto che ci proponiamo costruendo i solai della terza specie, indicati nel principio di questo articolo, è di formare una massa piena compresa tra due piani paralleli, e di cui tutte le parti sieno per quanto

è possibile legate fra loro. Le leggi della resistenza di siffatto corpo, supponendolo omogeneo in tutte le sue parti, sono state ricercate (*a*); ma siccome l' esposizione di queste ricerche sarebbe lunghissima, e supporrebbe la conoscenza di metodi analitici che non sono ancora passati nelle opere e nei corsi destinati all' istruzione degl' ingegneri, rapporteremo soltanto i risultamenti i più semplici e che ci sembrano i più utili.

639. Consideriamo un piano sostenuto orizzontalmente sopra un quadro rettangolare fisso, e supponiamo un peso Π posto nel suo centro. Chiamiamo

a, *b* i due lati del quadro;

h la grossezza del piano;

f l' abbassamento del centro del piano in cui è posto il peso Π;

E avendo il significato indicato n° 77.

Si avrà

$$f = \frac{45\Pi a^3 b^3}{\pi^4 E h^3}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}+\dfrac{1}{(a^2+3^2b^2)^2}+\dfrac{1}{(a^2+5^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \dfrac{1}{(3^2a^2+b^2)^2}+\dfrac{1}{(3^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \dfrac{1}{(5^2a^2+b^2)^2}+\dfrac{1}{(5^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \text{ec.}\end{array}\right\}$$

rappresentando π il rapporto della circonferenza al dia-

(*a*) Queste leggi sono state esposte per la prima volta dall' autore in una Memoria presentata all' Accademia delle Scienze nel 1820. V. il Bollettino delle Scienze della società Filomatica, anno 1823, pag. 92.

metro. La freccia di curvatura è reciproca al cubo della grossezza del piano ; e pe' piani di figure simili è proporzionale alla seconda potenza de' lati.

640. Essendo il piano caricato dell' istessa maniera, e de' due lati a e b essendo a il minore, se si vuole, come al n° 382, che le fibre poste alla faccia convessa e concava del piano non sostengano sull' unità di superficie per l' azione del peso Π uno sforzo maggiore di R', bisognerà stabilir l' equazione

$$R' = \frac{45\Pi a b^3}{2\pi^2 h^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1^2}{(a^2+b^2)^2}+\dfrac{3^2}{(a^2+3^2b^2)^2}+\dfrac{5^2}{(a^2+5^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \dfrac{1^2}{(3^2a^2+b^2)^2}+\dfrac{3^2}{(3^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \dfrac{1^2}{(5^2a^2+b^2)^2}+\dfrac{3^2}{(5^2a^2+3^2b^2)^2}+\text{ec.}\\ \text{ec.}\end{array}\right\}$$

e prendere il valore di Π dato da questa equazione per lo limite de' pesi di cui si può caricare il piano. Questo valore è proporzionale al quadrato della grossezza del piano. Rimane lo stesso quando si fanno variare i lati a e b in uno stesso rapporto, in guisa che non dipende dalla grandezza assoluta de' lati (*a*).

641. Supponiamo ora lo stesso piano rettangolare caricato di pesi uniformemente distribuiti in tutta la sua estensione, indicando con p il peso corrispondente all'unità di superficie. Si avrà

(*a*) Questa proposizione analoga a quella indicata n° 636 era stata dimostrata in un modo tutto diverso da Mariotte. V. le sue opere, tomo II, pag. 168.

$$f = \frac{180\,pa^4b^4}{\pi^6 E h^3}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.1(a^2+b^2)^2} - \frac{1}{1.3(a^2+3^2b^2)^2} + \frac{1}{1.5(a^2+5^2b^2)^2} - \text{ec.} \\ -\frac{1}{3.1(3^2a^2+b^2)^2} + \frac{1}{3.3(3^2a^2+3^2b^2)^2} - \text{ec.} \\ +\frac{1}{5.1(5^2a^2+b^2)^2} - \frac{1}{5.3(5^2a^2+3^2b^2)^2} + \text{ec.} \\ -\text{ec.} \end{array}\right\}$$

La freccia di curvatura è ancora reciproca al cubo della grossezza del piano. Se il peso p sostenuto sull' unità di superficie è costante, questa freccia è pe' piani di figure simili proporzionale alla quarta potenza del lato. Se il peso totale pab è costante, la freccia è proporzionale alla seconda potenza del lato.

642. Essendo il piano caricato nel modo indicato, e il lato a il minore de' due lati a e b, se si vuole che le fibre poste alla faccia convessa e concava del piano non sostengano sull' unità di superficie uno sforzo maggiore di R′, bisognerà stabilir l' equazione

$$R' = \frac{90\,pa^2b^4}{\pi^4h^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1(a^2+b^2)^2} - \frac{1}{3(3^2a^2+b^2)^2} + \frac{1}{5(5^2a^2+b^2)^2} - \text{ec.} \\ -\frac{3}{1(a^2+3^2b^2)^2} + \frac{3}{3(3^2a^2+3^2b^2)^2} - \frac{3}{5(5^2a^2+3^2b^2)^2} + \text{ec.} \\ +\frac{5}{1(a^2+5^2b^2)^2} - \frac{5}{3(3^2a^2+5^2b^2)^2} + \frac{5}{5(5^2a^2+5^2b^2)^2} - \text{ec.} \\ -\text{ec.} \end{array}\right\}$$

e prendere il valore di p che vi soddisfà per lo limite de' pesi di cui si può caricare l' unità di superficie del piano elastico. Questo valore è proporzionale al quadrato della grossezza del piano. Il peso totale pab di cui potrebbe esser caricato il piano non varia quando si fanno variare i lati a, b in uno stesso rapporto, e non dipende dalla grandezza assoluta de' lati.

643. Questi risultamenti possono essere applicati ai solai del genere di quelli di cui si tratta; ma siccome le parti di essi non presentano il legame e l'omogeneità di un corpo continuo, non si deve attribuir loro nelle applicazioni una forza tanto grande quanto l'indicherebbero le formole precedenti.

Regole pratiche per lo stabilimento de' solai.

644. Secondo M. Rondelet (*a*), i travicelli di un solajo posti ad una distanza eguale alla loro larghezza, debbono aver per altezza $\frac{1}{24}$ della lunghezza del solajo. Questa regola si accorda sensibilmente con le indicazioni date da altri architetti.

La distanza ordinaria delle travi che sostengon i travicelli è di 12 piedi. La riquadratura di questi pezzi dev'esser $\frac{1}{18}$ della lunghezza del solajo.

645. M. Tredgold (*b*) distingue due specie di solai: 1° i solai semplici (*single joisted floors*) formati da un ordine di travicelli; 2° i composti (*framed floors*) formati di travi colle quali si congiungono trasversalmente delle travi più piccole che sostengono poi i travicelli. Queste piccole travi ricevono inoltre da sotto, altri travicelli di una piccola riquadratura, su' quali sono inchiodate le tavole della soffitta.

I travicelli sono generalmente alla distanza di un piede (misura inglese) da mezzo a mezzo. Ne' solai semplici, chiamando

---

(*a*) *Art de bâtir*, tomo IV, pag. 133.

(*b*) *Elementary principles of carpentry*, pag. 61 e seg.

a, b la larghezza e l'altezza de' pezzi, in pollici;
c la lunghezza, in piedi;
le dimensioni de' travicelli, la cui larghezza non è al di sotto di 2 pollici, si regolano facendo

$$b = 2{,}2\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$ per lo legname di abete,

$$b = 2{,}3\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$ per lo legname di quercia.

Ne' solai composti; 1° supponendo le travi distanti fra loro 10 piedi, distanza che non dovrebbe giammai esser oltrepassata, si prenderà per questi pezzi

$$b = 4{,}2\ \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$, ovvero $a = 74\frac{c^2}{b^3}$ per l'abete,

$$b = 4{,}34\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$, ovvero $a = 82\frac{c^2}{b^3}$ per la quercia.

2° Per le piccole travi trasversali congiunte alle travi principali, la cui distanza dev' esser di 4 a 6 piedi, si prenderà

$$b = 3{,}42\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$, ovvero $a = 40\frac{c^2}{b^3}$ per l'abete,

$$b = 3{,}53\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$, ovvero $a = 44\frac{c^2}{b^3}$ per la quercia.

3° Le dimensioni de' travicelli superiori si regolano conforme a ciò che più sopra si è detto. La larghezza de' travicelli inferiori che non servono che a fissar le tavole della soffitta non deve oltrepassar 2 pollici. L'altezza di questi pezzi si regola colle formole

$$b = 0{,}64\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$ per l'abete,

$$b = 0{,}67\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}$$ per la quercia.

ARTICOLO XIII.

Della resistenza delle pareti de' vasi alla pressione de' fluidi.

646. La pressione de' fluidi si esercita perpendicolarmente alla superficie delle pareti de' vasi. Nel caso di un fluido elastico, la grandezza di questa forza può esser supposta costante in tutta l' estensione della parete. Nel caso di un liquido sottomesso all' azione della gravità, le parti inferiori sono premute più fortemente delle altre, ed è spesso necessario aver riguardo a questa differenza.

647. Le pareti dei vasi sono generalmente formate di sostanze solide. Sono corpi che possono resistere ai cangiamenti di figura a' quali si troverebbero sollecitati per effetto della pressione de' fluidi, ma che cedono un poco a questa pressione, in ragione dell' estensibilità o della compressibilità delle loro parti. Vi è qualche volta un rapporto tale tra la figura della parete e la grandezza delle pressioni normali esercitate nelle sue diverse parti, che questa parete non tende, propriamente parlando, a cangiar di figura, ma è solamente sollecitata a distendersi o a comprimersi nel senso della superficie. Distingueremo questo caso dicendo che la parete è disegnata secondo la *superficie di equilibrio.* Quando ciò ha luogo, la parete può esser formata di una sostanza perfettamente flessibile come sarebbe un tessuto di fili, le cui parti sarebbero capaci di resistere alla compressione o alla stensione, ma non resisterebbero alla flessione. L' equilibrio è stabile se tutte le parti della superficie

sono stirate, e la sola cosa che importa conoscere è la grandezza della tensione che sostengono.

Non si può qui presentare di una maniera compiuta e generale la ricerca degli effetti che si manifestano in una parete premuta da un fluido, ma le nozioni che si esporranno saranno sufficienti nella maggior parte delle applicazioni. Considereremo successivamente una linea e una superficie, entrambe sollecitate da forze dirette secondo le normali.

Dell' equilibrio di una linea sollecitata da forze perpendicolari alla sua direzione.

648. Le condizioni dell' equilibrio di una linea riguardata come un filo perfettamente flessibile, a tutti i punti del quale sono applicate delle forze normali, possono esser dedotte da ciò che si è veduto ne' n^{i} 306 e 428. Si può del pari trovarle direttamente nel modo seguente.

Consideriamo prima una curva MM′ (Fig. 147) descritta sopra un piano nel quale son dirette le forze applicate normalmente alla curva. Possiamo riguardarla come un poligono d' infiniti lati e supporre le forze applicate ai vertici del poligono. Chiamiamo

ds la lunghezza di un elemento mn dell' arco della curva, o d' un lato del poligono;

ρ la lunghezza del raggio di curvatura al punto m;

F il valore della forza normale applicata al punto m, per un' unità di lunghezza misurata sull'arco della curva;

T la forza colla quale il lato mn del poligono è stirato.

L' equilibrio del poligono esige che la forza applicata a ogni vertice m sia distrutta dalle tensioni degli ele-

menti mn, mn'. La forza applicata in m è Fds, e la direzione di questa forza divide in due parti eguali l'angolo nmn'. Dunque 1° la tensione del lato mn' dev'esser eguale alla tensione T del lato mn; 2° il rapporto di T a Fds è quello del seno dell'angolo fmn o fmn', che differisce infinitamente poco da un angolo retto, al seno dell'angolo infinitamente piccolo compreso tra mn e mn' il cui valore è $\frac{ds}{\rho}$. Segue da ciò 1° che il valore della tensione T dev'esser lo stesso per tutti i lati del poligono, o sia che il filo è ugualmente teso in tutte le sue parti; 2° che si deve avere in ogni punto della curva

$$\frac{Fds}{T} = \frac{ds}{\rho}, \quad \text{ovvero} \quad F = \frac{T}{\rho}.$$

La pressione normale è in ogni punto eguale alla tensione divisa pel raggio di curvatura. Se il filo non forma una curva chiusa, bisogna che gli ultimi elementi MN, M'N' sieno tirati nel senso della loro lunghezza con forze eguali alla tensione T.

649. Consideriamo ora una curva a doppia curvatura, sulla quale agiscono pure delle forze normali. Possiamo riguardarla come un poligono i cui lati sono infinitamente piccoli, e nel quale tre lati consecutivi non sono compresi in uno stesso piano. Le forze applicate a ogni vertice del poligono debbono esser dirette secondo il raggio del cerchio osculatore. Tutto ciò che è stato detto nel n° precedente si applica a questo sistema: fa d'uopo per l'equilibrio che il filo sia egualmente teso in tutte le sue parti, e questo è ciò che avrà luogo se la forza normale applicata a ogni punto è uguale alla tensione divisa pel raggio di curvatura (*a*).

(*a*) Si concepisce nettamente l'esistenza dell'equilibrio in un fil

650. Quando delle forze sono applicate perpendicolarmente a una verga solida ricurva, la quale non cede all' azione di esse che per un cangiamento piccolissimo di figura dovuto all' elasticità, non è necessario affinchè sussista l' equilibrio, che sien soddisfatte le condizioni sopra enunciate. La tensione esercitata nel senso della curva può variare da un punto all' altro. Quanto al modo di conoscer la tensione longitudinale che ha luogo in un punto qualunque, si osserverà che una verga sollecitata da forze normali non può in generale restar in equilibrio a meno che queste forze non si distruggano reciprocamente o a meno che la verga non sia mantenuta da due punti fissi se forma una curva piana, o da tre se forma una curva a doppia curvatura. Gli sforzi esercitati sui punti fissi saranno determinati dalla condizione che essendo composti colle forze applicate normalmente a tutti i punti della curva, ne risulti un sistema che si possa ridurre a due forze eguali e direttamente opposte. La tensione delle diverse parti della verga è pro-

---

formante una curva a doppia curvatura, rammentandosi che secondo un teorema dimostrato da Lancret (*Mémoires présentés à la première classe de l' Institut*, tomo 1, pag. 420), si può sempre far passare per una curva qualunque una superficie sviluppabile tale che, sviluppata la superficie, la curva data vi segnerebbe una linea retta. Questa superficie, chiamata *superficie rettificante*, è formata dalle intersezioni successive de' piani, che toccando la curva sono perpendicolari ai raggi de' cerchi osculatori di questa curva. Segue da ciò, che esiste sempre una superficie perpendicolare ai raggi di curvatura della curva data, sulla quale questa curva è una linea della più breve distanza. Dunque il filo potrà esser riguardato come teso sulla superficie di un corpo solido fisso, ove resta in equilibrio, e dove esercita in ogni punto una pressione normale.

dotta nel tempo stesso dalle forze normali applicate a tutti i punti, e dalle forze particolari applicate a punti determinati, e necessarie per stabilire l' equilibrio.

Ciò posto, se in una verga ricurva MM' (Fig. 148) sollecitata nel modo indicato, e che forma una curva non chiusa, si vuol conoscer la tensione longitudinale sostenuta dall' elemento *mn*, si osserverà che questa tensione risulta da che le forze applicate alle due parti *m*M, *m*M' della curva si distruggono a vicenda per mezzo del legame che l'elemento *mn* stabilisce tra queste due parti. Per conseguenza se tutte le forze applicate alla parte *m*M o pure tutte quelle applicate alla parte *m*M' si decompongono parellelamente alla tangente della curva al punto *m*, la somma delle componenti così ottenute sarà la tensione cercata.

651. Consideriamo ora una curva piana chiusa MN (Fig. 149) sollecitata da forze normali dirette nel piano della curva, e supponiamo che si domandi la tensione sostenuta dall' elemento *mn*. Se tutte le forze applicate alla curva si decompongono parallelamente alla direzione della tangente al punto *m*, si osserverà che i punti *m*, *m'* ne' quali la direzione della tangente è la stessa, dividono la curva in due parti, in ciascuna delle quali le forze normali producono delle componenti dirette in sensi opposti. Se si prendono le risultanti delle componenti parallele a *mn* fornite rispettivamente dalle forze agenti nelle parti *m*M*m'*, e *m*N*m'*, si otterranno due forze eguali e direttamente opposte. La distruzione di queste forze produce la tensione de' due elementi *mn*, *m'n'*: si conosceranno dunque queste due tensioni decomponendo una delle risultanti di cui si è parlato in due forze dirette rispettivamente secondo *mn* e *m'n'*.

652. Ammettiamo che la figura della verga MN sia a doppia curvatura, e supponiamo egualmente che tutte le forze applicate alla curva sieno state decomposte parallelamente alla tangente condotta al punto *m*. Se si concepisce la curva proposta inviluppata da un cilindro i cui lati sieno paralleli a questa tangente, vi sarà un punto *m'* pel quale il piano tangente al cilindro sarà parallelo al piano tangente condotto pel punto *m*. I due punti *m*, *m'* divideranno come sopra la curva in due parti, in ciascuna delle quali le forze normali produrranno delle componenti parallele ad *mn*, dirette in sensi opposti. Se si prendono rispettivamente le risultanti delle componenti fornite da ciascuna parte della curva, si troveranno due forze eguali e direttamente opposte, la cui reciproca distruzione produce le tensioni degli elementi *mn*, *m'n'*. Per conseguenza se una di queste forze si decompone in due altre parallele e dirette ne' due piani tangenti tirati ai punti *m*, *m'*, la componente diretta nel piano tangente al punto *m* darà la tensione sostenuta dall' elemento *mn*.

Dell' equilibrio di una superficie sollecitata da forze ad essa normali.

653. Le condizioni dell' equilibrio di una superficie supposta perfettamente flessibile sollecitata da forze normali, possono essere stabilite per mezzo delle considerazioni seguenti.

La linea MN (Fig. 150) formi il contorno di una superficie, e rappresentiamoci il solido che ricovre questa superficie e che supporremo fisso. Avendo segnato due punti qualunque M, N che dividono questa linea in

due porzioni MpN , MqN , si può divider ciascuna di queste due porzioni in un medesimo numero di parti piccolissime eguali tra loro in ciascuna porzione. Si può in seguito dal punto M al punto N, e da ciascun punto di divisione p della prima parte a ciascun punto di divisione corrispondente q della seconda, tender de' fili che si applicheranno sul solido secondo la linea della più breve distanza pmq descritta sulla sua superficie tra le loro estremità p, q.

L' insieme di questi fili, supponendoli infinitamente vicini, formerà una superficie; e se alle due estremità di ogni filo pmq, si applicano nella direzione degli elementi estremi delle forze eguali T, questo filo in virtù della tensione T, premerà il corpo sul quale è applicato secondo una direzione normale alla superficie. Il valore della pressione esercitata al punto m sarà $\frac{T}{\rho}$, indicando con ρ il raggio del cerchio osculatore della curva del filo al punto m. Se ora si concepisce soppresso il corpo , ed applicate a tutti i punti m delle forze normali eguali a $\frac{T}{\rho}$, sussisterà l' equilibrio. Si osserverà che non è necessario che le forze T abbiano de' valori eguali per tutti i fili; basta che la tensione sia costante nell' estensione di ciascun filo.

Se frattanto si situano altrimenti i punti M, N sulla curva, si potrà formare della stessa maniera un secondo sistema di linee di minima distanza , e tender nuovi fili che incrocieranno i primi. Se un nuovo filo che passa pel punto m è teso dalla forza T′, produrrà in questo punto una pressione normale eguale a $\frac{T'}{\rho'}$, essendo ρ' il raggio di curvatura della curva del nuovo filo al pun-

to m, e questa pressione si aggiungerà a quella che è prodotta dal primo filo. Per conseguenza, sopprimendo il corpo, si manterrà l'equilibrio applicando al punto m una forza eguale a $\frac{T}{\rho} + \frac{T'}{\rho'}$.

Così continuando, si vede che si può tender sul corpo un numero indefinito di fili appartenenti a diversi sistemi di linee di minima distanza. La sola condizione necessaria per l' equilibrio è che la tensione di ogni filo sia la stessa in tutti i suoi punti. Se si chiamino T, T', T'', ec. le tensioni rispettive de' fili che s'incrociano al punto qualunque m, e ρ, ρ', ρ'', ec. i raggi di curvatura delle curve di questi fili al punto m, la pressione normale esercitata in questo punto sarà $\frac{T}{\rho} + \frac{T'}{\rho'} + \frac{T''}{\rho''} +$ ec. È evidente inoltre che ad ogni punto p del contorno della superficie debbono esser applicate, nella direzione de' diversi fili che partono da questo punto, altrettante forze rispettivamente eguali alle tensioni de' medesimi fili. Tutte queste forze sono dirette nel piano tangente alla superficie al punto p.

Se la superficie proposta non fosse terminata da un contorno ma fosse tutta chiusa, ciò che precede potrebbe esserle applicato, considerando che l'equilibrio è stabilito ne' fili tesi su questa superficie, e formanti uno o più sistemi di linee di minima distanza. Ogni filo formerebbe una curva chiusa, la tensione sarebbe costante in tutta la sua lunghezza, e la forza normale risultante in ogni punto del filo dalla sua tensione sarebbe uguale a questa tensione divisa pel raggio di curvatura della curva del filo. La pressione normale sostenuta dal corpo in un punto qualunque sarebbe la somma delle pres-

sioni normali prodotte dalle tensioni di tutti i fili che s' incrocierebbero in questo punto.

654. Dalle cose precedenti risulta, che una superficie flessibile sollecitata da forze normali per esser in equilibrio basta che si possa decomporla per mezzo di uno o più sistemi di linee della più breve distanza in strisce infinitamente strette riguardate come fili, e che ripartite tra i diversi fili tanto le forze normali applicate a ogni punto interno, che le forze tangenziali applicate a ogni punto del contorno della superficie, ciascun filo sia in equilibrio. Data una superficie qualunque perfettamente flessibile, vi è un' infinità di sistemi di forze applicate perpendicolarmente ai punti interni, e tangenzialmente ai punti del contorno, che possono esser in equilibrio col mezzo di questa superficie.

655. Consideriamo una superficie perfettamente flessibile, mantenuta da un contorno fisso e sollecitata da forze normali tali che la superficie è in equilibrio e non tende a cangiar di figura. Si può domandar come l' equilibrio è stabilito, quale tensione la superficie sostiene in ogni punto secondo una direzione determinata, e quali sono gli sforzi esercitati sopra ogni punto del contorno fisso. Questa quistione non può in generale esser risoluta fino a che si riguardano gli elementi della superficie come inestensibili, perchè l' equilibrio può essere stabilito in infiniti modi. Ma se si suppongono estensibili gli elementi della superficie, la quistione è determinata.

Del caso in cui una superficie sollecitata da forze normali è ugualmente tesa in tutti i sensi.

656. Sia una superficie perfettamente flessibile e inestensibile sollecitata da forze normali, e supponiamo stabilito l' equilibrio tra queste forze e gli sforzi di tensione che hanno luogo nel senso della superficie. Ammettiamo che siasi segnata sulla superficie una linea qualunque della più breve distanza, e consideriamo la porzione della superficie formata da una striscia diretta secondo questa linea, ed avente una larghezza costante e piccolissima: questa striscia sarà tesa secondo la sua lunghezza con una certa forza. Ciò posto, si dice che una superficie è ugualmente tesa in tutti i sensi 1° se la tensione della striscia è costante in tutte le parti della sua lunghezza; 2° se il valore di questa tensione è lo stesso qualunque sia la direzione della linea della più breve distanza secondo la quale la striscia è segnata.

Sia λ la larghezza della striscia che dev' esser supposta infinitamente piccola, e θ il valore della sua tensione longitudinale che lo sarà del pari: il rapporto $\frac{\theta}{\lambda} = T$ rappresenta la tensione delle parti della superficie rapportata all' unità lineare. La quantità finita T dà la misura della forza colla quale la superficie è tesa.

657. Sia MN (Fig. 151) una porzione del contorno di una superficie egualmente tesa in tutti i sensi. È necessario, affinchè l' equilibrio sia mantenuto, che in ogni punto del contorno sieno applicate delle forze dirette nel piano tangente alla superficie. Si può riguardar questo contorno come composto di parti infinitamente

piccole bc, la cui lunghezza è uguale a λ, e supporre che le forze distribuite sull' intervallo bc sieno applicate nel suo mezzo a. Si può parimenti riguardar la superficie come formata di una infinità di fili o strisce infinitamente strette dirette secondo i raggi del semicerchio descritto da' punti a col raggio $\frac{1}{2}\lambda$. Le forze tangenziali applicate a ogni punto a dovranno far equilibrio alle tensioni delle striscie che partono da questo punto. Sieno $mnqp$ due delle strisce di cui si tratta, e le cui direzioni formano colla normale ad degli angoli ω. La larghezza pq di queste strisce sarà $\frac{\lambda}{2}d\omega$, la loro tensione $T\frac{\lambda}{2}d\omega$, e la risultante delle tensioni delle due strisce, $T\lambda d\omega.\cos.\omega$. La somma di tutte le risultanti simili, o l' integrale $T\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega.\cos.\omega$, il cui valore è $T\lambda$, è la forza che dev' esser applicata al punto a. Quindi l' equilibrio di una superficie ugualmente tesa in tutti i sensi colla forza T richiede che in tutti i punti del contorno della superficie sieno applicate perpendicolarmente a questo contorno delle forze eguali fra loro, il cui valore per un unità di lunghezza sia T.

658. Essendo data la figura di una superficie considerata come un tessuto perfettamente flessibile e inestensibile, esiste sempre un sistema di forze applicate normalmente a tutti i punti interni, per effetto del quale la superficie sarebbe mantenuta in equilibrio, ed egualmente tesa in tutti i sensi. Sia M (Fig. 152) uno de' punti della superficie, e supponiamo che siasi descritto un cerchio da questo punto come centro, e con un raggio infinitamente piccolo eguale a $\frac{\lambda}{2}$. Consideriamo

una delle strisce infinitamente strette *mnpq*, tirate secondo le direzioni delle linee della più breve distanza che s' incrociano al punto M. Indichiamo per r il raggio di curvatura della sezione normale della superficie, fatta al punto M nella direzione dell' asse di questa striscia, e per ω l' angolo di questa sezione col raggio fisso AM. La larghezza *mn* o *pq* della striscia sarà $\frac{\lambda}{2} d\omega$, e la forza colla quale è tesa, $T \frac{\lambda}{2} d\omega$. Questa striscia, riguardata come un filo isolato, sarebbe mantenuta in equilibrio applicando al punto M, perpendicolarmente alla superficie, una forza il cui valore rapportato all' unità di lunghezza sarebbe secondo i numeri 648 e 649, $T.\frac{\lambda}{2} d\omega.\frac{1}{r}$; e per l' intervallo *mnpq*, $T.\frac{\lambda}{2} d\omega.\frac{1}{r}\lambda$, ovvero $T.\frac{\lambda^2}{2}.\frac{1}{r} d\omega$. Se si considera parimenti un altra striscia $m'n'p'q'$ diretta perpendicolarmente alla prima, indicando per r' il raggio di curvatura della sezione normale fatta nella superficie secondo la direzione della nuova striscia, si avrà del pari $T.\frac{\lambda^2}{2}.\frac{1}{r'} d\omega$ pel valore della forza che, applicata sull'intervallo $m'n'p'q'$ perpendicolarmente alla superficie, manterrebbe questa nuova striscia in equilibrio. Se si prende dunque la somma delle quantità $T\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) d\omega$ in una estensione eguale a $\frac{1}{4}$ della circonferenza a contar dal punto A, si avrà la somma delle forze che, applicate normalmente alla superficie, nell' estensione del cerchio descritto dal punto M, fanno equilibrio alla tensione di tutte le strisce che s' incrociano in questo punto. Ora si sa che il valore della quantità $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ è indipendente dall' angolo ω, e che

chiamando ρ, ρ' i due raggi di curvatura principali della superficie pel punto M, questo valore è $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$. Dunque l'integrale cercato è $T\frac{\pi\lambda^2}{2.2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$. La superficie del cerchio descritto dal punto M col raggio $\frac{\lambda}{2}$ essendo inoltre $\frac{\pi\lambda^2}{4}$, si vede che l' espressione

$$T\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$$

rappresenta il valore della forza normale che dev' esser applicata al punto M (rapportato questo valore all' unità di superficie), affinchè la superficie proposta sia egualmente tesa in tutti i sensi colla forza T (*a*).

Se i due raggi di curvatura fossero eguali e dello stesso segno, proprietà che appartiene alla sfera, la forza di cui si tratta sarebbe $\frac{2T}{\rho}$. Da ciò si rileva che la stessa pressione normale che potrebbe produrre una tensione T nel senso degli elementi circolari di una superficie cilindrica, produrrebbe in tutti i sensi una tensione $\frac{1}{2}$ T in una superficie sferica di egual diametro.

Applicazione a vasi di diverse figure.

660. Considereremo in primo luogo de' vasi contenenti un fluido che esercita da dentro in fuori una pressione e le cui pareti sono piane. Queste pareti sono generalmente tese nella direzione della superficie nel

---

(*a*) È facile vedere che si perverrebbe allo stesso risultamento, considerando qualunque altra figura di cui il punto M sarebbe il centro.

tempo stesso che sostengono una pressione normale. Il caso il più semplice è quello di un tubo rettilineo, le cui pareti sono formate da piani paralleli all' asse del tubo; per esempio il tubo rettangolare AH (Fig. 153), che si suppone aperto ne' due estremi. Le pareti non sono punto stirate nel senso della lunghezza, ma nel senso della larghezza soltanto. Considerando una parte mq' di questo tubo, si possono riguardare le porzioni $mnn'm'$, e $pqq'p'$ delle faccie inferiore e superiore, come rispettivamente tese, in direzioni parallele ai lati mm', pp' per effetto delle pressioni opposte che si esercitano sulle porzioni $mnqp$, $m'n'q'p'$ delle faccie laterali, con una forza eguale alla metà della pressione esercitata sopra ciascuna di queste ultime porzioni. Nel modo stesso, ciascuna porzione mq, $m'q'$ sarà tesa parallelamente a mp, $m'p'$ con una forza eguale alla metà della pressione esercitata nell' estensione mn' o pq'. Una qualunque delle porzioni di parete di cui si tratta, come $mnqp$, può dunque esser riguardata come un pezzo che è nel tempo stesso teso secondo la sua lunghezza, premuto da forze normali distribuite uniformemente sulla lunghezza, e sostenuto alle due estremità. Gli si può applicar l' analisi del n° 592, e regolar la forza della parete dietro l' equazione del n° 593. Indicherà a la metà della lunghezza mp; Q, la metà della pressione normale esercitata sopra mn' o pq'; p, il valore della pressione normale esercitata sopra $mnqp$ per un' unità lineare misurata sulla lunghezza mp.

661. Se il tubo fosse chiuso alle due estremità o a una sola, non si potrebbe più applicarvi rigorosamente ciò che precede. Ma procedendo come si è detto, si conoscerebbe un limite dietro il quale si sarebbe sicuri

di dare a ogni parete una forza più che sufficiente. Consideriamo, per esempio un vaso quadrangolare e verticale ABGH (Fig. 154), aperto nella faccia superiore, il cui fondo poggia sopra un piano orizzontale fisso, e che è ripieno di un fluido pesante. Se il fondo del vaso non esistesse, si potrebbe applicare ad ogni elemento trasversale mq' ciò che è stato detto nel n° precedente, facendo attenzione che la pressione del fluido aumentando colla profondità, questi elementi hanno a sostenere degli sforzi tanto più grandi quanto più lontani son essi dalla superficie superiore del fluido. Ma se esiste il fondo del vaso, esso tenendo connesse fra loro le quattro pareti laterali, impedisce che nel senso delle lunghezze mn degli elementi si stabiliscano delle tensioni così grandi, e che questi elementi s' incurvino tanto cedendo alla pressione normale. Il risultamento del calcolo indicato più sopra darà dunque per le parti delle pareti, delle grossezze che tanto più sorpasseranno le grossezze realmente necessarie, quanto più saranno vicine al fondo del vaso.

662. Se il vaso fosse interamente chiuso, le pareti sarebbero tese secondo molte direzioni. Se per esempio il vaso rettangolare AH (Fig. 154) è chiuso alle due estremità, e contiene un fluido premente da dentro in fuori, una faccia qualunque AF è stirata secondo due direzioni parallele ai lati AB e AE. Questa faccia può esser riguardata come appartenente a un tubo rettangolare il cui asse è parallelo ad AB o ad un altro il cui asse è parallelo ad AE. Se si considerano successivamente questi due tubi aperti alle due estremità, e vi si applica ciò che è stato detto n° 660, si otterranno de' risultamenti dietro i quali la forza della parete AF

si troverebbe necessariamente fissata al di là di ciò che è necessario. L'eccesso di forza che gli si darebbe se si adottassero questi risultamenti, sarebbe tanto più grande quanto più piccola è la lunghezza de' tubi rispetto alle dimensioni trasversali.

La ricerca del vero stato di equilibrio delle pareti in casi di simil genere, comporta un analisi particolare che non può esser quì esposta.

663. Se le pareti, in vece di esser piane, fossero formate da porzioni di superficie cilindrica, si potrebbe far uso delle nozioni precedenti, applicando i risultamenti presentati nell' articolo VI, sulla resistenza de' pezzi curvi.

664. Consideriamo ora un vaso di cui la parete è curva, e in primo luogo un tubo rettilineo aperto alle due estremità. Supponiamo che il fluido in esso contenuto eserciti su tutti i punti di una stessa sezione trasversale delle pressioni eguali, o che si possono supporre eguali senza errore sensibile, come nel caso in cui il gas o l' acqua scorrono in tubi di un piccolo diametro. La parete del tubo non è stirata nel senso della sua lunghezza, ma solamente nel senso delle sezioni trasversali. Un elemento trasversale del tubo può esser riguardato come una striscia o un filo sollecitato da forze normali dirette nel suo piano. Queste forze essendo eguali in tutti i punti, il filo non può esser in equilibrio, a meno che il raggio di curvatura non abbia ancora un valore costante. Quindi la parete tenderà a cangiar di figura a meno che la sezione trasversale del tubo non sia circolare.

Supponendo circolare la sezione, sia p il valore della pressione normale prodotta dal fluido sopra un' unità di

superficie della parete, e consideriamo un elemento trasversale del tubo, la cui lunghezza misurata sull' asse sia eguale all' unità lineare; p rappresenterà egualmente la pressione normale esercitata sopra un' unità di lunghezza della circonferenza di questo elemento. Per conseguenza, chiamando r il raggio del tubo, si avrà, giusta il n° 648, pr per la tensione che si stabilirà nel senso di questa circonferenza. Quindi si dirà che la superficie del tubo è tesa nel senso delle sezioni trasversali colla forza pr. Si vede che la tensione risultante da una stessa pressione normale interna cresce proporzionalmente al raggio del tubo.

Indicando con h la grossezza della parete, supposta costante e molto più piccola del raggio r, e (come al n° 181) per R' la massima tensione che si vuol far soffrire alle fibre sull' unità di superficie, si potrà regolare la grossezza della parete, stabilendo l' equazione

$$R'h = pr.$$

665. Se la sezione trasversale del tubo non fosse circolare, la parete tenderebbe a cangiar di figura, e ne cangerebbe effettivamente se fosse formata da un tessuto flessibile. Se è formata da una sostanza solida, la figura non cangerà totalmente ma sarà leggermente modificata dall' effetto dell' elasticità di questa sostanza. La materia della parete è allora sollecitata di due maniere: 1° per effetto del cangiamento di curvatura, che stende o comprime le fibre prossime alle faccie esterne o interne; 2° per effetto della tensione che si stabilisce nel senso delle sezioni trasversali, tensione che varia da un punto all' altro di queste sezioni, e che stende le fibre in tutta la grossezza della parete. La modificazione che ricevono le parti per effetto del cangiamento di curvatura

è nella maggior parte delle applicazioni poco considerevole; essa può esser determinata per mezzo de' principî esposti più sopra, articolo VI. Quanto all' effetto della tensione cagionata dalla pressione del fluido, che importa per ordinario considerar di più, sia MN (Fig. 155) la sezione trasversale del tubo, e supponiamo che si voglia conoscer la tensione sostenuta da questa sezione nel punto *m*. Si tirerà la tangente *mp*, e l' altra *nq* parallela alla prima. Si osserverà in seguito, conforme al n° 651, che le pressioni normali esercitate dal fluido sulle porzioni di curva *m*M*n*, decomposte parallelamente alle linee *mp*, *nq*, equivalgono alle pressioni esercitate sulla linea *pq* ad esse perpendicolare; d' onde segue che si avrà la tensione esercitata in *m*, prendendo la metà della pressione che il fluido eserciterebbe sopra *pq*. Si vede che la tensione delle diverse parti della parete è proporzionale alla distanza delle due tangenti *mp*, *nq*.

666. Se il tubo rettilineo di cui si tratta fosse chiuso in una estremità, la resistenza del fondo si opporrebbe al cangiamento di figura della parete, e alla stensione delle sezioni trasversali. Questa parete adunque sarebbe sollecitata meno fortemente, sopra tutto nella parte vicina all' estremità chiusa. Sarebbe lo stesso a più forte ragione, se il tubo fosse chiuso alle due estremità. Ma in quest' ultimo caso, in virtù della pressione del fluido contro le due basi del tubo, la parete sosterrebbe una tensione nel senso de' lati della superficie cilindrica, nel tempo stesso che ne sosterrebbe una nel senso delle sezioni trasversali. Se la sezione trasversale del tubo è circolare, si ha, conservando le denominazioni del n° 664, $p.\pi r^2$ per la pressione esercitata sui fondi opposti, e

per conseguenza $\frac{p \cdot \pi r^2}{2\pi r}$, o $\frac{pr}{2}$ per la forza colla quale una porzione della circonferenza del tubo eguale all' unità lineare è tesa nel senso de' lati. Quindi, supponendo la pressione uniforme in tutta l' estensione del tubo, la tensione che ha luogo nel senso de' lati è la metà di quella che ha luogo nel senso delle sezioni trasversali. Se la sezione trasversale del tubo non fosse circolare, la tensione che avrebbe luogo nel senso de' lati sarebbe ancora minore rispetto a quella che avrebbe luogo nel senso delle sezioni trasversali.

667. Sia un vaso cilindrico di una lunghezza indefinita, di cui l' asse è orizzontale, e che contiene un liquido pesante. Rappresenti MAN (Fig. 156) la sezione trasversale del vaso ed MN il livello della superficie del fluido; la pressione normale che avrà luogo in un punto qualunque *m* della sezione sarà proporzionale alla distanza *mp*. Per conseguenza se la parete del vaso è formata da un tessuto flessibile, la condizione dell' equilibrio, conforme al n° 648, sarà che il raggio di curvatura al punto *m* sia reciproco alla distanza *mp*, il che determina la natura della curva MAN. Ravvicinando ciò che fu detto ne' n^i 77 e 86, si vedrà che la figura di questa curva è quella che prenderebbe una lama omogenea, di una larghezza e grossezza uniforme, la cui figura naturale è rettilinea, e che sarebbe tenuta piegata per mezzo di una corda attaccata dal punto M al punto N. La curva è ugualmente tesa in tutti i suoi punti, e si conoscerebbe la tensione, supponendo che il peso del fluido contenuto nel tubo è applicato al punto O, e decomposto secondo le direzioni delle tangenti MO, NO tirate ai punti estremi. È evidente che l' equilibrio

esige che i punti M, N sieno fissi, o che la curva vi sia tirata da due forze eguali alla sua tensione, e dirette nel prolungamento di queste tangenti.

668. Se la sezione trasversale del cilindro orizzontale non ha la figura che conviene all' equilibrio; e se la parete è fatta d'una materia solida, dessa è leggiermente piegata per effetto della pressione del fluido. Lo stato di flessione di questa parete, come pure la tensione che può aver luogo nel senso della sezione trasversale, dipendono nel tempo stesso dalla figura della sezione, e dal modo come il vaso è sostenuto: la loro determinazione si fa co' principî esposti nell'articolo VI della presente sezione.

669. Se lo stesso vaso cilindrico fosse chiuso alle due estremità, le parti prossime a queste estremità sarebbero sollecitate con minor forza nel senso delle sezioni trasversali. La parete sarebbe di più tesa parallelamente all' asse. Il valor totale di questa tensione sarebbe evidentemente eguale alla pressione esercitata dal fluido sopra ciascuna base del cilindro: ma non si può conoscere esattamente il modo come questa tensione è ripartita sui differenti lati della superficie cilindrica, senza considerar la parete curva e le due basi come un sol corpo elastico e determinarne completamente lo stato di equilibrio.

670. Quando un fluido è contenuto in un vaso interamente chiuso, e in cui la pressione è uguale in tutte le parti, la parete se è flessibile non può mantenersi in equilibrio se non ha la figura di una sfera. In questo caso, conforme ai n^{i} 648 e 659, chiamando p la pressione interna sopra un' area eguale all' unità di superficie, ed r il raggio della sfera, la parete è stirata in tutti i sensi colla forza $\frac{1}{2}pr$; di maniera che se h

è la grossezza di questa parete, per assicurarsi che questa grossezza è sufficiente, si dovrà verificare l'equazione

$$R'h = \tfrac{1}{2}pr.$$

Sarebbe lo stesso se la parete formata di una sostanza solida omogenea, avesse naturalmente la figura sferica. In fatti la pressione del fluido non tendendo a cangiar questa figura, la parete non può ceder che dilatandosi, ed essa dev'esser tesa egualmente in tutti i sensi.

671. Quando la figura del vaso non è sferica, la parete dev' esser necessariamente formata di una sostanza solida. La pressione del fluido tende a cangiarne la figura, nel tempo stesso che le fa soffrire una stensione. La ricerca dello stato di equilibrio di questa parete, in generale complicatissima, richiede considerazioni che non possono essere quì esposte. Ma lasciando da una banda questa ricerca, possiamo proporci nelle applicazioni, di regolare la grossezza della parete in modo da esser sicuri che resisterà all' azione del fluido. Per pervenirvi, conforme ai principî enunciati più sopra n^{i} 653 e seg., si concepirà che siasi segnata sulla superficie del vaso una linea di minima distanza in una direzione qualunque, e una striscia infinitamente stretta d' una larghezza uniforme diretta secondo questa linea. Riguardando in seguito questa striscia come una verga elastica sottomessa in ogni punto a forze normali, la cui intensità dipenderà dalla pressione del fluido, si potrà determinare lo stato di flessione e di tensione della stricia di cui si tratta dietro i principî dell' articolo VI citati più sopra, e regolarne convenevolmente la forza. Ora è evidente che se una striscia qualunque così separata dalla superficie, presenta una resistenza sufficiente, la parete formata dalla riunione di tutte le strisce pre-

senterà una resistenza più che sufficiente, poichè la loro mutua adesione non può che opporsi al loro cedimento all' azione del fluido.

672. Per esempio, se la figura del vaso è una superficie di rivoluzione, sulla quale i meridiani sono linee della più breve distanza, si potrà considerare uno di questi meridiani, come l' asse di una striscia infinitamente stretta, e regolare la grossezza della parete in modo che questa striscia supposta isolata resista all' azione del fluido. La parete avrà allora una resistenza più che sufficiente. Se la superficie di rivoluzione fosse una sfera, la forza della parete così determinata sarebbe precisamente doppia di quella che è necessaria, come si vede da' n^{i} 648 e 659.

Sperienze sulla resistenza de' vasi contenenti un fluido che esercita una pressione sulle pareti.

673. Secondo una sperienza di Mariotte (*a*), un cilindro di latta di un piede di diametro, e di una lunghezza che non è indicata, ma che pare essere stata da uno a due piedi, di cui le due basi erano formate di lamine di rame colle quali la latta era saldata, ha sostenuto senza rompersi la pressione di una colonna d' acqua di 90 piedi di altezza. Il medesimo cilindro si è rotto dopo qualche tempo in una saldatura sotto la pressione di una colonna d' acqua di 100 piedi. La grossezza della latta non è indicata; ma l' autore stabilisce un ravvicinamento tra la resistenza di questa materia

---

(*a*) *Traité du mouvement des eaux*, tomo II, pag. 471.

nella sua sperienza, e la resistenza di una striscia di latta di tre linee di larghezza che avea sostenuto una tensione di 120 libbre.

674. Secondo un altra sperienza dello stesso autore (*a*), un vaso di piombo a forma di barile, di 18 pollici di lunghezza, un piede di diametro nel mezzo 8 pollici alle due estremità, e $2\frac{1}{2}$ linee di grossezza, terminato con basi piane fatte collo stesso piombo, ha sostenuto senza rompersi la pressione di una colonna d'acqua di 100 piedi di altezza. Il piombo essendo stato limato nel mezzo dell'altezza del barile in una estensione di 6 pollici di lunghezza e 4 di larghezza e la grossezza ridotta a un poco meno di una linea nel mezzo di ciò che era limato, il piombo cedè in questo sito, e vi si fece una fenditura.

675. Secondo due sperienze di M. Jardine di Edimburgo (*b*), un tubo di piombo di diametro poll. inglesi $1\frac{1}{2}$, di grossezza $\frac{1}{5}$ di pollice, ha sostenuto senza alterazione apparente la pressione di una colonna d'acqua di 1000 piedi di altezza, e si è rotto sotto quella di una colonna d'acqua di 1200 piedi.

Un altro tubo della stessa grossezza di 2 pollici di diametro, ha sostenuto senza alterazione apparente la pressione di una colonna d'acqua di 800 piedi, e si è rotto sotto quella di una colonna d'acqua di 1000 piedi.

676. Secondo una sperienza dell'autore, un vaso sensibilmente sferico di lamina di ferro di eccellente qualità formato di due emisferi riuniti per mezzi di chiodi ri-

---

(*a*) *Idem*, pag. 472.

(*b*) Citate negli Annali di Chimica e di Fisica, marzo 1826.

baditi e saldati ricovrendosi di $0^m,01$, avendo $0^m,337$ di diametro esterno nel senso del cerchio massimo secondo il quale la saldatura era fatta, $0^m,323$ nel senso perpendicolare a questo cerchio massimo, e $0^m,0026$ di grossezza, è stato rotto sotto la pressione di 144 chilog. a centimetro quadrato. La rottura si è manifestata per mezzo di una piccola fenditura, a $0^m,05$ dalla saldatura.

Secondo un altra sperienza, un vaso simile, di $0^m,285$ di diametro nel senso del cerchio massimo secondo il quale la saldatura era fatta, $0^m,279$ nel senso opposto, e $0^m,0024$ di grossezza, è stato rotto sotto la pressione di 163 chilog. a centimetro quadrato. La rottura si è ugualmente manifestata per una piccola fenditura, a $0^m,12$ dalla saldatura.

677. Il risultamento delle sperienze di Mariotte non può esser sottomesso al calcolo, a ragion dell' incertezza della prima, e della figura complicata del vaso nella seconda. Applicando alle due sperienze di Jardine la formola indicata più sopra n° 664, si trova che il piombo è stato rotto da sforzi di $1^{ch.},37$ e $1^{ch.},58$ a millimetro quadrato. Queste sperienze si accordano dunque intieramente coi risultamenti delle sperienze dirette rapportate n° 70. Se si applica del pari alle due sperienze dell' autore sopra vasi sferici il calcolo indicato nel n° 670, adottando il massimo de' due diametri, si trova che il ferro laminato è stato rotto da sforzi di 40 e 47 chil. a millimetro quadrato. Questo risultamento si accorda pure colle sperienze dirette rapportate n° 52, che sono state fatte sul ferro laminato d' inferior qualità.

APPENDICE.

DE' PONTI SOSPESI.

678. I ponti ordinari di legname o di ferro fuso son formati da diverse centine situate colla convessità rivolta verso sopra, in piani verticali paralleli, e ad una conveniente distanza fra loro. Il tavolato o è posto al di sopra di esse, o vi è sospeso e resta al di sotto. In ciascuno di questi casi gli archi delle centine sono compressi nel senso della lunghezza; e perchè l'equilibrio sia stabile conviene che queste formino un sistema di forma invariabile e sieno ritenute nel piano verticale che le contiene. Inoltre per questi ponti fa d' uopo dare agli archi e agli altri pezzi che compongono le centine, le dimensioni necessarie per resistere non solo alle pressioni risultanti dal peso permanente della costruzione e da una carica uniformemente distribuita sul palco, ma per opporsi puranche a qualunque cambiamento di figura che le cariche accidentali poste in uno o in diversi punti del palco tendono a produrre; cangiamento che non potrebbe sparire senza il soccorso di forze estranee dovute all' elasticità.

Se in vece gli archi cui si sospende il palco si situassero colla convessità rivolta al suolo, i pezzi saranno stirati nel senso della lunghezza, e non sono per la stabilità necessarie le sopraddette condizioni. Si richiede viceversa che gli archi sieno flessibili. In questa guisa si presteranno a cangiar di forma senza che alcun membro sia esposto a rompersi; e cessata la causa che avrà prodotto un cambiamento o spostamento qualunque, la

costruzione ripiglierà spontaneamente e la figura ed il sito che conviene all' equilibrio, per effetto delle sole forze alle quali è sottoposta.

A questi ponti ne' quali il tavolato è sospeso ad archi o catene flessibili si è dato il nome di ponti sospesi o pensili.

679. Affinchè questo genere di costruzioni riesca vantaggioso bisogna che il passaggio delle più pesanti vetture vi si faccia con sicurezza e senza incomodo; il che vuol dire che non solo il sistema dev' esser solido, ma che non ostante l' estrema sua flessibilità presenti pure una certa fermezza e rigidezza. Nello stabilimento di siffatti ponti bisognerà dunque soddisfare alle seguenti condizioni: 1° che le catene abbiano la forza sufficiente per resistere alle tensioni risultanti delle più grandi cariche alle quali il ponte può trovarsi esposto; 2° che i cambiamenti di figura prodotti da una carica accidentale posta in un punto o in diversi punti della lunghezza del palco, non che quelli prodotti dalle variazioni di temperatura e dalla estensibilità delle catene, sieno poco sensibili; 3° che le oscillazioni e vibrazioni prodotte dal passaggio delle vetture sieno poco estese, e non possano cagionare la rottura de' pezzi; 4° che le ondolazioni nel senso orizzontale prodotte dall'azione del vento sieno debolissime e ristrette fra limiti vicinissimi.

680. Le catene de' ponti sospesi si costruiscono ordinariamente di ferro da fucina. Esamineremo in seguito se per quest' uso potrebbe essere impiegato il legname.

Dell' equilibrio delle catene.

681. Consideriamo una catena flessibile AOM (Fig. 8, tav. agg.) carica di pesi, fissa nel punto A. All'altra estremità M sieno applicate la forza orizzontale Q e la verticale P. Serviranno per determinare la curva che conviene all'equilibrio le equazioni del n° 430 o quelle del n° 432, secondo che i pesi sono dati in funzione dell' arco o dell' ascissa, avvertendo di scrivere — P in vece di P. Data dunque la legge secondo la quale la catena di un ponte si trova aggravata, possono determinarsi e la figura che essa prende e la tensione che ha luogo in ciascun suo punto.

682. Nel caso di cui ci occupiamo, possiamo dispensarci di trattare la quistione in tutta la sua generalità. In fatti il palco del ponte trovasi disposto presso a poco secondo una linea orizzontale; ed essendo di costante grossezza, il suo peso può considerarsi come uniformemente ripartito sulla orizzontale. Quantunque non sia lo stesso pel peso delle catene, riflettendo, che generalmente la freccia è molto piccola rispetto alla corda, che gli elementi estremi son poco inclinati all' orizzonte, e che il suddetto peso delle catene non è che una picciolissima parte della carica totale, si può senza molto allontarsi dal vero supporre il peso intero della costruzione distribuito uniformemente sopra una linea orizzontale. Con questa supposizione la figura delle catene sarà una parabola ordinaria, e ci serviranno le equazioni de' n^{i} 433 e seg. Chiamando come in que' n^{i} a e b le coordinate del punto estremo M, α l' angolo fatto dalla tangente della curva al punto A coll'asse delle x,

si avià

$$T\frac{dy}{ds} = -P + p(a-x),$$

$$T\frac{dx}{ds} = Q;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P + p(a-x)}{Q},$$

$$\text{tang}.\alpha = \frac{-P + pa}{Q};$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}.\alpha - \frac{px}{Q}, \qquad (1)$$

$$y = x\,\text{tang}.\alpha - \frac{px^2}{2Q}, \qquad (2)$$

$$b = a\,\text{tang}.\alpha - \frac{pa^2}{2Q}, \quad \text{ovvero} \quad \text{tang}.\alpha = \frac{b}{a} + \frac{pa}{2Q}. \qquad (3)$$

Ritenendo le denominazioni de' n^i 435 e seg., si avranno i valori di P, Q, T nelle diverse ipotesi ivi trattate.

683. Per conoscer la lunghezza della curva tra i punti A ed M, si avrà

$$s = \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int dx\sqrt{1+\left(\text{tang}.\alpha - \frac{px}{Q}\right)^2}.$$

Essendo ordinariamente $\frac{dy}{dx}$ piccolissimo, valerà meglio per le applicazioni integrare questa espressione sviluppando il radicale in serie. Si avrà così

$$s = x + \frac{Q}{p}\left(\frac{1}{3.2}\text{tang}.^3\alpha - \frac{1}{5.8}\text{tang}.^5\alpha + \frac{1}{7.16}\text{tang}.^7\alpha - \frac{5}{9.128}\text{tang}.^9\alpha + \text{ec.}\right)$$
$$- \frac{Q}{p}\left[\frac{1}{3.2}\left(\text{tang}.\alpha - \frac{px}{Q}\right)^3 - \frac{1}{5.8}\left(\text{tang}.\alpha - \frac{px}{Q}\right)^5 + \text{ec.}\right], \qquad (4)$$

in cui bisogna fare $x = a$ per aver la lunghezza dell' intera curva.

684. Ordinariamente i punti A ed M sono situati sulla stessa orizzontale. Per questo caso adunque relativo alla fig. 9 (tav. agg.), prendendo l'origine delle coordinate nel punto O, e contando le y positive da sotto in sopra, si avranno le stesse equazioni del n° 440, avvertendo sempre di cambiare il segno di P. La tensione orizzontale sarà dunque

$$Q = \frac{pa^2}{2b}. \qquad (5)$$

e la tensione nel punto A sarà

$$T = \frac{Q}{\cos.\alpha}, \quad \text{ovvero} \quad T = Q\sqrt{1 + \text{tang.}^2\alpha} \qquad (6)$$

La lunghezza dell' arco OM, è espressa come al n° 487, dalla formola

$$c = a\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}\left(\frac{2b}{a}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(\frac{2b}{a}\right)^4 + \frac{1}{7\cdot 16}\left(\frac{2b}{a}\right)^6 - \frac{5}{9\cdot 128}\left(\frac{2b}{a}\right)^8 + \text{ec.}\right] \qquad (7)$$

da cui ricavasi

$$\left(\frac{2b}{a}\right)^2 = 6\left[\frac{c-a}{a} + \frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2 - \frac{54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^3 + \frac{207}{350}\left(\frac{c-a}{a}\right)^4 - \text{ec.}\right] \qquad (8)$$

Dell' azione de' pesi posti sul palco di un ponte per cambiare la figura delle catene e aumentarne la tensione.

685 Allorchè una carica estranea si trova uniformemente distribuita su tutta la lunghezza del palco, la figura delle catene non si altera, ma se ne aumenta la tensione. Chiamando ϖ il peso estraneo corrispondente all' unità di lunghezza del palco, e Q' la tensione oriz-

zontale, sarà

$$Q' = \frac{a'(p+\varpi)}{2b}, \quad \text{ovvero} \quad Q' = Q\left(1+\frac{\varpi}{p}\right) \qquad (1)$$

d'onde si conchiude che la tensione aumenta nel rapporto di $1 : 1+\frac{\varpi}{p}$.

686. Non avviene lo stesso quando un peso estraneo si troverà situato in un punto qualunque del palco. È di somma importanza il conoscere il cambiamento di figura che ne risulta, e precisamente l'abbassamento del punto medio del palco, non che l'aumento di tensione nelle catene. Prima d'intraprender questa ricerca faremo osservare che essendo la catena flessibile e prestandosi perciò ad ogni cambiamento di figura, l'abbassamento del punto medio sarà tanto più grande quanto più verso il mezzo questo peso estraneo è situato e quanto minore spazio occupa sul palco. In fatti molte vetture che occupassero o in tutto o nella massima parte la lunghezza del ponte servirebbero ad aumentare la tensione delle catene ma non a modificarne sensibilmente la figura.

Esamineremo particolarmente il caso, in cui le estremità A e B del filo AOB (Fig. 10, tav. agg.) sono situate sulla stessa orizzontale, ed il peso estraneo trovasi uniformemente distribuito sopra una porzione $p'p''$ di AB divisa per metà del punto C. Il filo anche in questo caso si comporrà di due parti simmetriche intorno alla verticale CO. Tirate da' punti p', p'' le ordinate $p'm'$, $p''m''$, il filo resterà diviso nelle tre porzioni Am', $m'm''$, $m''B$, nelle quali la tensione orizzontale deve avere lo stesso valore, perchè dev' esser in ogni punto eguale agli sforzi orizzontalmente esercitati ne' punti fissi A e B. Di più, dovendo le dette tre porzioni for-

mare una curva continua, le due porzioni Am', $m'm''$, e le altre due $m'm''$, m''B avranno una tangente comune ai punti m', m''. Ciò posto, si chiami 2Π il peso addizionale uniformemente ripartito sopra $p'p''$, Q$''$ la tensione orizzontale, α l' angolo fatto dalla tangente al punto A coll' asse delle x, α' l' angolo fatto dalla tangente al punto m' collo stesso asse, e si faccia AB$=2a$, $p'p''=2a'$, $p'm'=y'$, CO$=b'$. Nelle equazioni (1) e (3) del n° 682 scrivendo $a-a'$ e y' in vece di a e b, si avrà per la porzione Am',

$$\text{tang.}\,\alpha=\frac{y'}{a-a'}+\frac{p(a-a')}{2Q''},$$

$$\text{tang.}\,\alpha'=\text{tang.}\,\alpha-\frac{p(a-a')}{Q''}=\frac{y'}{a-a'}-\frac{p(a-a')}{2Q''}.$$

Mettendo poscia nelle stesse equazioni in luogo di a e b, a' e $b'-y'$, e $p+\frac{\Pi}{a'}$ in vece di p, si avrà per la porzione m'O,

$$\text{tang.}\,\alpha'=\frac{b'-y'}{a'}+\frac{pa'+\Pi}{2Q''},$$

$$0=\frac{b'-y'}{a'}-\frac{pa'+\Pi}{2Q''}.$$

Da queste quattro equazioni si ricava

$$y'=\frac{p(a^2-a'^2)+2\Pi(a-a')}{2Q''}, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{tang.}\,\alpha&=\frac{pa+\Pi}{Q''}\\ \text{tang.}\,\alpha'&=\frac{pa'+\Pi}{Q''}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$b'=\frac{pa^2+\Pi(2a-a')}{2Q''}. \qquad (4)$$

Per la formola (4) del n° 683 la lunghezza della por-

zione di curva Am' sarà espressa da

$$a-a'+\frac{Q''}{p}\left[\frac{1}{6}\text{tang.}^3\alpha-\frac{1}{40}\text{tang.}^5\alpha+\frac{1}{112}\text{tang.}^7\alpha-\text{ec.}\right]$$

$$-\frac{Q''}{p}\left[\frac{1}{6}\left(\text{tang.}\alpha-\frac{p(a-a')}{Q''}\right)^3-\frac{1}{40}\left(\text{tang.}\alpha-\frac{p(a-a')}{Q''}\right)^5+\text{ec.}\right],$$

e quella della porzione $m'O$ da

$$a'+\frac{a'Q''}{a'p+\Pi}\left[\frac{1}{6}\text{tang.}^3\alpha'-\frac{1}{40}\text{tang.}^6\alpha'+\frac{1}{112}\text{tang.}^7\alpha'-\text{ec.}\right].$$

Supponendo il filo inestensibile, le due porzioni Am', $m'O$ debbono esser eguali alla sua semilunghezza primitiva. Chiamando c questa semilunghezza conosciuta, e mettendo in quelle espressioni i valori (3) di tang.α e tang.α', si avrà

$$c=a+\frac{Q''}{p}\left[\frac{1}{6}\frac{(pa+\Pi)^3-(pa'+\Pi)^3}{Q''^3}-\frac{1}{40}\frac{(pa+\Pi)^5-(pa'+\Pi)^5}{Q''^5}+\text{ec.}\right]$$

$$+\frac{a'Q''}{pa'+\Pi}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{pa'+\Pi}{Q''}\right)^3-\frac{1}{40}\left(\frac{pa'+\Pi}{Q''}\right)^5+\text{ec.}\right] \qquad (5)$$

Si trovi per tentativi un valore di Q'' che soddisfaccia a questa equazione. Sostituito questo valore in (2), (3) (4), si avranno i valori di y', b', tang.α e tang.α'; e quindi saranno determinate le curve Am', $m'm''$, $m''B$. Paragonando il valore di b' col valor primitivo di b, si conoscerà l' abbassamento del punto medio.

686. Il valore di b' aumenta a misura che diminuisce a', e diventa massimo quando $a'=0$. Nel caso dunque in cui il peso 2Π fosse tutto riunito nel punto di mezzo, si avrebbe

$$y'=b'=\frac{pa^2+2\Pi a}{2Q''},\quad \text{tang.}\alpha'=\frac{\Pi}{Q''};$$

Dalla prima si ricava

$$Q''=\frac{pa^2+2\Pi a}{2b'}, \qquad (6)$$

e dalla seconda si conchiude che gli elementi estremi de' due rami $Am'O$, $Bm''O$ formano in O un angolo finito, e le loro tensioni hanno per componenti orizzontali Q'', e per componenti verticali Π.

Mettendo nell' equazione (1) del n° 682 il valore (3) di tang.α, si ha l' equazione di ciascuna metà della curva,

$$y = \frac{pa+\Pi}{Q''}x - \frac{px^2}{2Q''}. \qquad (7)$$

L' equazione (5), mettendo $a' = o$ diventa,

$$c = a + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{6}\frac{(pa+\Pi)^3-\Pi^3}{Q''^2} - \frac{1}{40}\frac{(pa+\Pi)^5-\Pi^5}{Q''^4} + \text{ec.}\right],$$

e sostituendovi il valore (6) di Q'' si ha

$$c = a + \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2.3}\frac{(pa+\Pi)^3-\Pi^3}{(pa+2\Pi)^2}\cdot\left(\frac{2b'}{a}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\frac{(pa+\Pi)^5-\Pi^5}{(pa+2\Pi)^4}\cdot\left(\frac{2b'}{a}\right)^4 + \text{ec.}\right]$$

o infine

$$c = a\left\{1 + \frac{1}{3.2}\frac{\left(1+\frac{\Pi}{pa}\right)^3-\left(\frac{\Pi}{pa}\right)^3}{\left(1+\frac{2\Pi}{pa}\right)^2}\left(\frac{2b'}{a}\right)^2 - \text{ec.}\right\}$$

Essendo ordinariamente $\frac{\Pi}{pa}$ una frazione picciolissima, si potrà trascurare il suo quadrato e le potenze superiori, osservando che allora si ha presso a poco

$$\frac{\left(1+\frac{\Pi}{pa}\right)^n-\left(\frac{\Pi}{pa}\right)^n}{\left(1+\frac{2\Pi}{pa}\right)^{n-1}} = 1-(n-2)\frac{\Pi}{pa},$$

la formola precedente si riduce a

$$c = a\left[1 + \frac{1}{3.2}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\left(\frac{2b'}{a}\right)^2 - \frac{1}{5.8}\left(1-\frac{3\Pi}{pa}\right)\left(\frac{2b'}{a}\right)^4 + \frac{1}{7.16}\left(1-\frac{5\Pi}{pa}\right)\left(\frac{2b'}{a}\right)^6 - \text{ec.}\right] \qquad (8)$$

da cui col metodo inverso delle serie, facendo per compendio $\frac{c-a}{a} = \delta$, si ricava

$$\left(\frac{2b'}{a}\right)^2 = 6\left[\left(1+\frac{\Pi}{pa}\right)\delta + \frac{9}{10}\delta^2 - \frac{54}{175}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\delta^3 + \frac{207}{350}\left(1-\frac{2\Pi}{pa}\right)\delta^4 - \text{ec.}\right] \quad (9)$$

Queste equazioni sono nel nuovo stato di equilibrio le analoghe delle equazioni (7) e (8) del n° 684.

Dividendo l' equazione precedente per l'equazione (8) del n° 684, si ha

$$\frac{b'^2}{b^2} = \frac{1+\frac{\Pi}{pa}+\frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)-\frac{54}{175}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\left(\frac{c-a}{a}\right)^2+\text{ec.}}{1+\frac{9}{10}\left(\frac{c-a}{a}\right)-\frac{54}{175}\left(\frac{c-a}{a}\right)^2+\text{ec.}}$$

ed effettuando la divisione

$$\frac{b'^2}{b^2} = 1+\frac{\Pi}{pa}-\frac{9}{10}\frac{\Pi}{pa}\left(\frac{c-a}{a}\right)+\text{ec.}$$

Ne' casi ordinari, la quantità $\frac{c-a}{a}$ sarà picciolissima; e moltiplicata per $\frac{\Pi}{pa}$ darà una frazione picciolissima, che può trascurarsi in confronto dell' unità. Quindi si avrà presso a poco

$$b' = b\sqrt{1+\frac{\Pi}{pa}}.$$

Sviluppando il radicale, e trascurando le potenze di $\frac{\Pi}{pa}$, si ha infine

$$b'-b = \frac{\Pi b}{2pa} \quad (10)$$

cioè l' abbassamento del punto medio è in ragion diretta della freccia, e nell' inversa del peso totale del ponte.

Sostituendo questo valore in (6), si ha

$$Q'' = \frac{pa^2 + 2\Pi a}{2b\left(1 + \frac{\Pi}{2pa}\right)}; \qquad (11)$$

ovvero, per esser $Q = \frac{pa^2}{2b}$ (684),

$$Q'' = Q\left(1 + \frac{3\Pi}{2pa + \Pi}\right). \qquad (12)$$

Sottraendo da questa quantità il valore di Q si avrà

$$Q'' - Q = \frac{3\Pi a}{4b\left(1 + \frac{\Pi}{2pa}\right)} \qquad (13)$$

Dunque l'aumento della tensione orizzontale è presso a poco proporzionale al rapporto della corda alla freccia.

Questi risultamenti debbono esser notati; essi fan conoscere che i cangiamenti di figura prodotti dal passaggio delle vetture non aumentano coll'aumentar l'ampiezza dell' arco; anzi si rendono meno sensibili facendo crescer la freccia in minor rapporto della lunghezza del palco.

Coll' istesso metodo si tratterebbe il caso di un peso posto in un punto qualunque del palco, o di più pesi messi contemporaneamente in diversi punti della lunghezza del ponte.

Dell' equilibrio de' sostegni su' quali sono appoggiate le catene.

688. Allorchè il sito della costruzione non offre de' punti ad una conveniente altezza ove poter saldamente attaccare le estremità delle catene, è necessario che sulle

ripe sieno elevati de' sostegni che adempiano a questo uffizio. Per la solidità di questi sostegni praticasi ordinariamente nella parte opposta di far partire dal punto di attacco un altra catena diretta obliquamente verso il suolo, ed ivi invariabilmente fermata. Questa chiamasi *catena di ritenuta*, a differenza di quella che tien sospeso il palco che può dirsi *catena di sospensione.*

689. Tutte le disposizioni che possono per tale oggetto adottarsi si riducono a due: 1° quella in cui le estremità delle due catene sono attaccate a un pezzo mobile intorno a un punto fisso; 2° l'altra in cui le due catene sono messe in prolungamento l'una dell'altra e non formano che una catena sola appoggiata sulla sommità del sostegno. Esamineremo l'equilibrio de' sostegni in questi due casi.

690. Sia primieramente un ritto AB (Fig. 11, tav. agg.), fisso al punto B intorno al quale può girare, ed inclinato verso la catena di ritenuta. Dall'estremità A partano i due rami di catena AM, AN. Pe' calcoli precedenti si conoscerà l'angolo α che la catena di sospensione AM fa nel punto A coll'orizzontale, e la componente orizzontale Q della tensione da essa sostenuta, in guisa che la tensione medesima nel punto A sarà $\frac{Q}{\cos.\alpha}$. (683) Si chiami μ l'angolo formato dalla catena di ritenuta coll'orizzontale, θ l'angolo fatto dal ritto colla verticale, e G la tensione della catena di ritenuta. Per l'equilibrio si richiede che decomposte le tensioni di AM e di AN, ciascuna in due forze, una perpendicolare l'altra secondo AB, le componenti perpendicolari sieno eguali fra loro. Facendo dunque l'indicata decomposizione e chiamando S lo sforzo secondo AB, si avrà

$$G = \frac{Q}{\cos.\alpha} \cdot \frac{\cos.(\alpha+\theta)}{\cos.(\mu-\theta)},$$

$$S = \frac{Q}{\cos.\alpha}[\text{sen}.(\alpha+\theta) + \cos.(\alpha+\theta)\,\text{tang}.(\mu-\theta)]. \qquad (1)$$

Se AB dividesse per metà l'angolo NAM formato dalle catene, si avrebbe

$$G = \frac{Q}{\cos.\alpha},$$

$$S = \frac{Q}{\cos.\alpha}.2\text{sen}.\frac{\alpha+\mu}{2}. \qquad (2)$$

In questo caso le tensioni delle due catene sono eguali.

Se il ritto è verticale si ha $\theta = 0$, e,

$$G = \frac{Q}{\cos.\mu},$$

$$S = Q(\text{tang}.\alpha + \text{tang}.\mu). \qquad (3)$$

In questo caso sono eguali le tensioni orizzontali delle due catene.

Ne' grandi ponti ove le tensioni sono considerevoli, è d' uopo fare i pezzi mobili di picciola lunghezza, fissandoli ad un fermo sostegno elevato sulle sponde. Si può adottare perciò il sistema di attaccare le estremità delle catene ad una specie di settore come lo indica la fig. 12, o ad una specie di pendolo come si vede nella fig. 13.

691. Sia ora MACN (Fig. 14, tav. agg.) una sola catena continuata, appoggiata sulla sommità di un pilastro di fabbrica o di un castello di legname o di ferro fuso. Supporremo che le direzioni AM, CN sieno tangenti alla curva AC secondo la quale è terminato il pilastro. Convien quì pure distinguer due casi: quello in cui la catena può scorrer senza sforzo sul pilastro, come quando è sostenuta da un sistema di rulli o cilindri, il che per-

mette di riguardar come nullo l'attrito di seconda specie; e quello in cui poggiando immediatamente sopra una curva AC non può scorrer senza che si sviluppi l'attrito.

692. Nel primo caso la tensione della catena AM trasmettendosi per intero alla catena di ritenuta, le tensioni de' due rami di catena saranno eguali; e per l'equilibrio avranno luogo le equazioni (2). Il pilastro soffre inoltre uno sforzo orizzontale eguale a

$$Q\left(1-\frac{\cos.\mu}{\cos.\alpha}\right),$$

e una carica verticale eguale a

$$Q.\frac{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\mu}{\cos.\alpha}.$$

Per far quindi che il pilastro non soffrisse alcuna azione orizzontale, bisognerebbe far l'angolo μ eguale ad α.

Chiamando come sopra θ l'angolo fatto dalla direzione della risultante colla verticale si avrà

$$\text{tang.}\theta=\frac{\cos.\alpha-\cos.\mu}{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\mu} \qquad (6)$$

Per la stabilità del pilastro si richiede che la risultante cada dentro la base.

693. Se poi la catena non può scorrer sul pilastro senza attrito, la tensione della porzione AM non si trasmette tutta nella parte AN. Supponiamo che la curva AC sia un arco di cerchio. L'effetto che quì ne risulta è identico a quello che si verifica allorchè una forza tiene in equilibrio un peso per mezzo di una fune avvolta a un cilindro. Si sa da' trattati di Meccanica che in questo caso la relazione fra la potenza e la resistenza può variare fra i limiti di $1 : e^{\pm\frac{\varphi s}{r}}$, essendo e la base de' lo-

garitmi neperiani, s l' arco abbracciato dalla fune, r il raggio del cilindro e φ il coefficiente dell' attrito. Si avrà dunque fra Q e G la relazione

$$G = \frac{Q}{\cos.\alpha}\, e^{-\frac{\varphi s}{r}}. \qquad (7)$$

Dippiù per lo sforzo sostenuto dal pilastro si ha

$$S = \sqrt{\frac{Q^2}{\cos.^2\alpha} - \frac{2QG\cos.(\alpha+\mu)}{\cos.\alpha} + G^2}, \qquad (8)$$

espressione in cui si dee sostituire per G il valore (7). Si ha inoltre

$$\text{tang}.\theta = \frac{Q - G\cos.\mu}{Q\,\text{tang}.\alpha + G\,\text{sen}.\mu}; \qquad (9)$$

lo sforzo orizzontale è

$$Q - G\cos.\mu, \qquad (10)$$

e il verticale è

$$Q\,\text{tang}.\alpha + G\text{sen}.\mu. \qquad (11)$$

Paragonando queste formole colle altre (4) e (5), e osservando che è $G < \frac{Q}{\cos.\alpha}$, si vedrà che per effetto dell' attrito della catena sulla curva AC è aumentato lo sforzo orizzontale e diminuita la carica verticale.

694. Se la risultante delle due forze G e $\frac{Q}{\cos.\alpha}\, e^{-\frac{\varphi s}{r}}$ cade fuori la base, il pilastro tenderà a rovesciarsi girando intorno allo spigolo B. Ma questo effetto sarà tosto impedito dall' attrito che si sviluppa in senso contrario. Di fatti il pilastro non può moversi girando intorno al punto B senza che la curva d' appoggio scorra lungo la catena nel senso CA. Ora è lo stesso in quanto

agli effetti il supporre che stia ferma la catena e la curva d' appoggio scorra nel senso CA, o pure che la curva d' appoggio sia fissa e la catena si muova nel senso AC. In quest' ultimo caso sviluppandosi l'attrito in senso contrario, la tensione diminuirà dal punto C al punto A o se si vuole aumenterà dal punto A al punto C nel rapporto di $1 : e^{\frac{\varphi s}{r}}$. Per la qual cosa, restando $\frac{Q}{\cos.\alpha}$ la tensione della catena di sospensione, quella della catena di ritenuta diverrà

$$G = \frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi s}{r}}, \qquad (12)$$

prima che il pilastro cominci a moversi.

Da ciò risulta che l' equilibrio del sostegno dev'esser verificato solamente supponendolo sottomesso alle due forze $\frac{Q}{\cos.\alpha}$, $\frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi s}{r}}$ dirette secondo AM, AN.

In fine se anche in questo caso la direzione della risultante non incontrasse la base, bisognerebbe verificare se il momento del peso del pilastro relativamente al punto B è maggiore del momento della forza S per farlo girare attorno lo stesso punto.

695. Fa d' uopo osservare che G non può mai sorpassare $\frac{Q}{\cos.\mu}$; giacchè appena perverrebbe ad acquistare questo valore, non essendovi più azione orizzontale, non vi sarebbe più tendenza al movimento. E quindi se $\frac{Q}{\cos\alpha} e^{\frac{\varphi s}{r}}$ è almeno uguale a $\frac{Q}{\cos.\mu}$, si è sicuri senz' altro calcolo che il pilastro non può esser rovesciato.

696. Finora abbiamo riguardata la catena di ritenuta come tesa in linea retta; e di fatto trovandosi essa sottomessa a grandi tensioni, la curvatura dovuta all' azione del proprio peso dev' esser quasi insensibile, sicchè può farsene astrazione ne' calcoli precedenti. Volendo però tenerne conto, si procederà nel modo seguente.

Consideriamo prima le due catene attaccate all' estremità di un ritto verticale AB (Fig. 15), mobile intorno al punto B. Dovendo in questo caso esser uguali le tensioni orizzontali de' due rami di catena (n° 690), si conoscerà la tensione orizzontale della catena di ritenuta, che è uguale a Q.

Si chiami σ il peso dell' unità di lunghezza della catena AN, la distanza $AP = l$, $PN = g$. A ragion della poca ampiezza della curva, possiamo per maggior semplicità riguardarla come caricata di pesi uniformemente distribuiti sull' orizzontale AP, il cui valore per l' unità di lunghezza sarà $\frac{\sigma}{\cos.\mu}$. Ciò posto, per mezzo delle equazioni (1) (2) del n° 682, facendo $x = \frac{1}{2}l$, e in vece di p scrivendo $\frac{\sigma}{\cos.\mu}$, si avrà l' ordinata del punto medio

$$pm = \frac{g}{2} + \frac{\sigma l^2}{8Q\cos.\mu}.$$

La freccia qm misurata verticalmente avrà per valore

$$qm = \frac{\sigma l^2}{8Q\cos.\mu},$$

e la freccia rm misurata perpendicolarmente ad AN sarà

$$rm = \frac{\sigma l^2}{8Q}. \qquad (13)$$

697. La lunghezza AmN sarebbe data esattamente dalla

formola (4) del n° 685; ma in grazia della picciolezza della freccia, si può calcolarne la semilunghezza colla formola (7) del n° 684, scrivendo $\frac{l}{2\cos.\mu}$ in vece di a, in luogo di b mettendo il valor precedente di rm, e limitandoci al primo termine della serie. La lunghezza intera sarà dunque

$$\frac{l}{\cos.\mu}\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{\sigma l\cos.\mu}{2Q}\right)^2\right];$$

e quindi la differenza fra AmN è la retta AN sarà

$$\frac{\sigma^2 l^3\cos.\mu}{24Q^2}. \qquad (14)$$

Supponendo che la carica uniforme da p divenga $p+\varpi$, la tensione Q diverrà $Q\frac{p+\varpi}{p}$ (n° 685). Dando a Q questo valore, l'eccesso di lunghezza della curva AmN sulla corda AN sarà

$$\frac{\sigma^2 l^3\cos.\mu}{24Q^2}\cdot\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}.$$

Essendo questo valore più piccolo del precedente, l'estremità del ritto si sposterà dalla parte del ponte, e la carica addizionale ϖ produrrà lo stesso effetto che se la catena di ritenuta si allungasse della quantità

$$\frac{\sigma^2 l^3\cos.\mu}{24Q^2}\left(1-\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right); \qquad (15)$$

e lo spostamento orizzontale del ritto sarà presso a poco

$$\frac{\sigma^2 l^3}{24Q^2}\left(1-\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right). \qquad (16)$$

Queste formole faran conoscere la massima deviazione del ritto dalla verticale prodotta dalla sopraccarica ϖ uniformemente distribuita sul palco. Per un peso addizionale

2Π posto nel mezzo del ponte si ha dalla formola (12) del n° 687 che la tensione orizzontale Q cresce nel rapporto di 1 ad $1+\frac{3\Pi}{2pa+\Pi}$; per cui si conosceranno le piccole oscillazioni prodotte dal passaggio delle vetture scrivendo nelle formole (15) e (16) $\frac{2pa+\Pi}{2pa+4\Pi}$ in vece di $\frac{p}{p+\varpi}$.

Si osservi che lo spostamento del punto A è indipendente dall' altezza, ma cresce rapidamente colla distanza AP o BN; quindi il ritto resterà tanto più fermo, quanto più la catena di ritenuta si avvicina alla verticale.

698. Supponiamo ora la catena appoggiata sopra un pilastro fisso, sul quale può scorrere. In questo caso in vece della tensione orizzontale Q si conoscerà la tensione G della catena di ritenuta. Chiamando β l' angolo che la tangente alla curva AmN nel punto A fa coll' orizzonte, l'equazione (3) del n° 682 colle debite sostituzioni darà

$$\text{tang.}\,\beta = \text{tang.}\,\mu + \frac{\sigma l}{2Q\cos.\mu}.$$

Dalla formola (6) del n° 684 si ha pure

$$G = Q\sqrt{1+\text{tang.}^2\beta};$$

eliminando tang.β fra queste due equazioni, si ottiene

$$Q = -\frac{\sigma l\,\text{sen.}\,\mu}{2} + \sqrt{G^2\cos.^2\mu - \frac{\sigma l^2\cos.^2\mu}{4}},$$

o presso a poco

$$Q = G\cos.\mu - \frac{\sigma l\,\text{sen.}\,\mu}{2} \qquad (17)$$

Messo questo valore di Q nelle formole precedenti si ha l' eccesso di lunghezza della curva AmN sulla corda

AN, e la quantità di cui aumenterà la distanza AN per effetto dell' aumento di tensione. In seguito di questo aumento è necessario o che la catena scorra sulla curva d' appoggio della quantità espressa dalla formola (15), o che il pilastro s' inclini alcun un poco, e l'estremità superiore si sposti orizzontalmente della quantità espressa dalla formola (16).

Le catene per l' estensibilità della materia, si allungano allorchè aumenta la tensione, e si accorciano nel caso contrario. Questo effetto si riunisce a quello proveniente dalla curvatura delle catene di ritenuta, ed aumenta lo spostamento dell' estremità del pilastro. Di esso terremo conto in seguito (*).

(*) Il ragionamento fatto al n° 694, dal quale si è conchiuso che il pilastro non può cominciare a rovesciarsi prima che la catena di ritenuta abbia acquistata la tensione $\frac{Q}{\cos.\alpha}\, e^{\frac{\varphi s}{r}}$, è poggiato sull' ipotesi che le catene suddette sieno tese in linea retta e sieno inestensibili. Se si considera però che in realtà sono esse incurvate dal proprio peso, e che possono per un aumento di tensione ricevere un raddrizzamento, si vedrà che se le tensioni delle due catene AM, CN sono nel rapporto di $1 : e^{-\frac{\varphi s}{r}}$, e che la loro risultante cade fuori la base, il pilastro comincerà a rovesciarsi non collo scorrer della curva d' appoggio lungo la catena nel senso CA, ma col trarre seco la catena medesima fino a che per lo spostamento del punto C siasi aumentata sufficientemente la tensione della catena di ritenuta. In fatti esiste una relazione fra la tensione della catena di ritenuta e la sua lunghezza, tale che non può crescer l' una senza che l' altra diminuisca, e viceversa. Non potendo dunque diminuir questa lunghezza perchè la catena

De' mezzi per fissare nel suolo le estremità delle catene di ritenuta.

699. Le catene di ritenuta ordinariamente son prolungate dentro il suolo senza cangiar direzione, e la loro estremità è fissata per mezzo di traverse o piattaforme di ferro fuso ad un masso il cui peso unito alle resistenze originate dall' attrito e dall' adesione colle parti contigue valga a resistere alla tensione G.

Ne' grandi ponti questo masso dev' esser di fabbrica, e ne' piccoli potrebb' esser anche lo stesso terreno. In quest' ultimo caso bisognerebbe fare diverse ipotesi sul solido che la catena tende a staccare, e considerare quello che presenta la minima resistenza. Per maggior sicurezza si può prescinder dalle resistenze provenienti dall' attrito e dalla coesione, fidando solamente sul peso del masso di terra.

Nelle diverse disposizioni che possono adottarsi allorchè s' impiega un masso di fabbrica per opporsi alla tensione G, sarà facile co' principî di statica calcolar la resistenza di questo masso.

700. Si può in quest' ultimo caso far cambiar di direzione alle catene di ritenuta, e farle penetrare verticalmente nel suolo. Questa disposizione è vantaggiosa in quanto che il peso del masso è interamente impie-

---

non può scorrer sulla curva d' appoggio, conviene che aumenti la distanza CN, il che succede rotando il pilastro attorno il punto B e traendo seco la catena di ritenuta.

Si vedrà in seguito che lo stesso effetto ha luogo per le variazioni di temperatura.

gato a sostener la tensione della catena. Nel punto ove la catena cambia di direzione, bisogna che la catena medesima sia appoggiata ad un altro masso di fabbrica cui si darà la forma più propria per resistere direttamente alla risultante delle tensioni de' due rami di catena che partono da questo punto.

701. Si può anche trarre partito dal peso della spalla, facendo, secondo ha proposto M. Stevenson, passare la catena al di sotto della spalla, come ANOC (Fig. 16). Con ciò l' azione della catena tende a far girare il prisma NC intorno al lato C, e quest' azione è anche favorita dalla spinta della terra sulla faccia ON. Resiste a questo moto il momento del peso della spalla; e quindi è facile determinarne convenientemente la resistenza.

702. È della massima importanza assicurarsi della natura del terreno nel quale s' immergono le catene. Un terreno che si rende fluido quando è penetrato dall'acqua, non solo sarebbe incapace di resistere a qualunque azione, ma non presenterebbe alcuna sicurezza per la fabbrica che vi si fosse affidata.

Dell' allungamento delle catene prodotto dall' estensibilità della materia, e dell'abbassamento del palco che ne risulta.

703. In ciò che precede si è supposta invariabile la lunghezza delle catene. Ma la materia di cui son esse formate si stende per effetto della tensione che soffrono, e questo stendimento produce un aumento nella freccia e fa discender il palco del ponte.

Si perviene a determinare la variazione di lunghezza nella catena di sospensione per mezzo delle considera-

zioni esposte ne' n' 483 e seg. Ritenendo dunque le denominazioni ivi impiegate, e trascurando nelle formole $\frac{b^2}{a^2}$ rispetto all' unità, si avrà dal n° 485

$$c' - c = \frac{p}{E\omega} \frac{a^3}{2b}$$

per l' allungamento prodotto dal peso p distribuito uniformemente su tutta la lunghezza del palco. Quindi un altra carica accidentale uniforme di cui ϖ è il valore corrispondente all'unità di lunghezza del palco, produrrà un allungamento espresso da

$$c' - c = \frac{\varpi}{E\omega} \frac{a^3}{2b} \qquad (1)$$

704. Se nel mezzo della curva è sospeso un peso 2Π, l' allungamento della catena sarà espresso, giusta il n° 484, da

$$c' - c = \frac{\Pi}{E\omega} \frac{25a^2}{32b}. \qquad (2)$$

705. Dal n° 487 si ha che per ogni variazione nella semilunghezza c della catena, la variazione della freccia è espressa da

$$b' - b = \frac{3a}{4b}(c' - c).$$

Sostituendo in questa espressione il valore (1) di $c'-c$, e chiamando f la variazione corrispondente della freccia, si avrà

$$f = \frac{3}{8} \frac{\varpi a^4}{E\omega . b^2} \qquad (3)$$

per l' abbassamento del punto medio prodotto dalla carica uniforme ϖ per effetto dell' allungamento della catena di sospensione.

706. Si osservi che ne' diversi ponti, ϖ dev'esser presso a poco proporzionale a Q cioè a $\frac{pa^2}{2b}$. Se dunque nella formola (3) si scrive questa quantità in vece di $E\varpi$, sarà f presso a poco proporzionale a $\frac{3\varpi a^2}{4pb}$, cioè a $\frac{\varpi}{p}$ e ad $\frac{a^2}{b}$. Quindi ne' ponti in cui il rapporto $\frac{a}{b}$ non varia, questo abbassamento aumenta proporzionalmente ad a.

Nel modo stesso chiamando f' la variazione della freccia per l'allungamento prodotto da un peso 2Π posto nel mezzo, si ha

$$f' = \frac{\Pi}{E\varpi} \cdot \frac{75}{128} \frac{a^3}{b^2} \qquad (4)$$

E scrivendo, come sopra, $\frac{pa^2}{2b}$ in vece di $E\varpi$, sarà f' presso a poco proporzionale a $\frac{75}{64} \cdot \frac{\Pi}{p} \frac{a}{b}$, cioè a $\frac{\Pi}{p}$, e ad $\frac{a}{b}$. Da ciò deriva che pe' diversi ponti in cui il rapporto $\frac{a}{b}$ non cambia, l'abbassamento prodotto da un peso 2Π posto nel mezzo è costante.

Allorchè si pone un peso nel mezzo del palco di un ponte, questo punto si abbassa per due cause: 1° perchè l'azione del peso fa cambiare la figura delle catene; 2° perchè le fa allungare. Il primo abbassamento (n° 686) è proporzionale a $\frac{\Pi b}{pa}$, il secondo a $\frac{\Pi a}{pb}$. Essi seguono leggi differenti; ma tutti due conservano lo stesso valore assoluto, quando si fa crescere in uno stesso rapporto la freccia e la corda.

709. Per calcolare l'effetto prodotto dall'allungamento delle catene di ritenuta, considereremo i due modi di far portare le catene sui sostegni di cui si è parlato al

n° 689. Ritenendo sempre le denominazioni precedentemente impiegate, e considerando in primo luogo il caso in cui le catene sono attaccate all' estremità di un ritto verticale capace di rovesciarsi , si avrà

$$G = \frac{Q}{\cos.\mu}.$$

Essendo la lunghezza della catena presso a poco eguale a $\frac{l}{\cos.\mu}$, l'allungamento sarà rappresentato da

$$\frac{G}{E\omega}\cdot\frac{l}{\cos.\mu} \quad \text{ovvero} \quad \frac{Q}{E\omega}\cdot\frac{l}{\cos.^2\mu}. \tag{5}$$

Se oltre la carica permanente p vi si aggiunge la carica per ogni unità di lunghezza ϖ, le tensioni G e Q aumenteranno nel rapporto di $1 : \frac{p+\varpi}{p}$. Quindi per questa sopraccarica, la lunghezza della catena di ritenuta aumenterà della quantità

$$\frac{G}{E\omega}\frac{\varpi}{p}\cdot\frac{l}{\cos.\mu} \quad \text{ovvero} \quad \frac{Q}{E\omega}\frac{\varpi}{p}\cdot\frac{l}{\cos.^2\mu}, \tag{6}$$

e lo spostamento orizzontale dell'estremità superiore del ritto sarà

$$\frac{G}{E\omega}\frac{\varpi}{p}\cdot\frac{l}{\cos.^2\mu} \quad \text{ovvero} \quad \frac{Q}{E\omega}\frac{\varpi}{p}\cdot\frac{l}{\cos.^3\mu}. \tag{7}$$

Questo spostamento si deve aggiungere a quello avuto nella formola (16) del n° 698, e si avrà lo spostamento totale prodotto dalla sopraccarica ϖ espresso da

$$\frac{Q}{E\omega}\frac{\varpi}{p}\cdot\frac{l}{\cos.^3\mu}+\frac{\sigma l^3}{24\,Q^2}\left(1-\frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right). \tag{8}$$

Siffatto spostamento nell'estremità superiore de' ritti produce una diminuzione nella corda. Rappresentando per η una diminuzione picciolissima della corda , differenziando l' equazione (8) del n° 684, e avvertendo che η

dev' esser presa negativamente, l' aumento della freccia sarà espresso prossimamente da

$$\frac{3a}{4b}\,\eta. \qquad (9)$$

Nel calcolo adunque dell' abbassamento del palco prodotto dalla carica ϖ sopra ogni unità di lunghezza, si deve aggiunger questo valore a quello della formola (3), sicchè l' abbassamento totale sarà

$$\frac{3}{8}\,\frac{\varpi}{\mathrm{E}\omega}\,\frac{a^4}{b^2} + \frac{3a}{4b}\,\eta, \qquad (10)$$

dove per η si metterà il valore (8).

710. Se le catene poggiano sopra un pilastro fisso, facendo astrazione dall' attrito, si ha $\mathrm{G} = \frac{\mathrm{Q}}{\cos.\alpha}$, e l' allungamento sarà espresso da

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{l}{\cos.\alpha\,\cos.\mu}. \qquad (11)$$

E se si aggiunge la carica ϖ sopra ogni unità di lunghezza del palco, l' allungamento per quest' ultima causa sarà

$$\frac{\mathrm{Q}\varpi}{\mathrm{E}\omega p}\,\frac{l}{\cos.\alpha\,\cos.\mu}; \qquad (12)$$

la quale quantità dev' esser aggiunta a quella che rappresenta l' allungamento proveniente dal raddrizzamento delle catene rappresentato dalla formola (16) del n° 697. E chiamando γ l' allungamento totale, sarà

$$\gamma = \frac{\sigma^2 l^3 \cos.\mu}{24\,\mathrm{Q}^2}\left(1 - \frac{p^2}{(p+\varpi)^2}\right) + \frac{\mathrm{Q}\varpi}{\mathrm{E}\omega p}\cdot\frac{l}{\cos.\alpha\,\cos.\mu}. \qquad (13)$$

L' effetto di questo allungamento sarà di permettere alla catena di scorrere sull' appoggio; quindi la catena di sospensione e allungandosi della quantità γ, la freccia

aumenterà della quantità

$$\frac{3a}{4b}\gamma. \qquad (13)$$

Questa espressione, aggiunta al valore della formola (3) del n° 705, darà l' abbassamento totale del palco prodotto dall' allungamento delle catene di sospensione e di ritenuta e dal raddrizzamento di quest' ultime per effetto di una sopraccarica ϖ sopra ogni unità di lunghezza.

Degli effetti delle variazioni di temperatura.

711. L' azione del calore fa aumentare l' altezza de sostegni, e insiememente fa allungare le catene. Da ciò deriva un piccolo abbassamento nel mezzo del palco, di cui bisogna tener conto.

Nell' esaminare questi effetti si può riguardare come invariabile la temperatura e per conseguenza la lunghezza della parte di catena che penetra nel suolo, e come assolutamente fissi i punti ove è terminato il tavolato e dove son attaccate le estremità delle catene di ritenuta.

I risultamenti riportati al n° 341 fan conoscere le variazioni di lunghezza per ogni 100° gradi del termometro centigrado delle sostanze di cui si può aver a far uso.

712. Facendo la solita distinzione (n° 689) intorno al modo come le catene possono esser sostenute, esamineremo prima il caso in cui le estremità delle catene sono attaccate ad un ritto verticale AB (Fig. 15) mobile intorno al punto B. Per una data elevazione di temperatura sieno δ, λ, γ gli allungamenti rispettivi che ricevono il

ritto AB, la catena di ritenuta AN e la metà della catena di sospensione. Essendo questi allungamenti picciolissimi, si può supporre che il punto A si sposterebbe orizzontalmente se si allungasse solo AN, e perpendicolarmente ad AN se si allungasse solo AB. Quindi per effetto degli allungamenti simultanei di AN ed AB, il punto A si eleva verticalmente della quantità δ, e orizzontalmente della quantità $\frac{\lambda}{\cos.\mu} - \delta \,\text{tang}.\mu$. Chiamando η la diminuzione che ne risulta nella semicorda delle catene, sarà

$$\eta = \frac{\lambda}{\cos.\mu} - \delta \,\text{tang}.\mu . \qquad (1)$$

Ora essendosi nel tempo stesso accresciuta la semilunghezza c della catena della quantità γ e diminuita la semicorda a della quantità η, gli accrescimenti corrispondenti della freccia saranno $\frac{3c}{4b}\eta$ e $\frac{3a}{4b}\gamma$; e siccome l' estremità del pilastro si è elevato della quantità δ, l' abbassamento del punto medio del palco sarà $\frac{3c}{4b}\eta + \frac{3a}{4b}\gamma - \delta$, ovvero mettendo per η il valore (1),

$$\frac{3a}{4b}\gamma + \frac{3c}{4b\cos.\mu}\lambda - \left(\frac{3c\,\text{tang}.\mu}{4b} + 1\right)\delta . \qquad (2)$$

Trattandosi di un abbassamento di temperatura, questa stessa formola darà la diminuzione della freccia con cambiare i segni di γ, λ e δ.

713. Passiamo ora al caso in cui le catene sono appoggiate ad un pilastro fisso (Fig. 14, tav. agg.). Fa d' uopo osservare che il peso della costruzione agendo costantemente sulla catena di sospensione, questa deve mantenersi sempre tesa; sicchè per un aumento di tempera-

tura allungandosi la catena di ritenuta conviene che una piccola porzione di essa scorra nel senso CA ; e l' effetto contrario si sperimenta per un abbassamento di temperatura.

Nel calcolare la quantità di catena che può scorrere nell' un senso o nell' altro, si deve ammettere che ciascuno de' punti A e C resti sempre nella medesima verticale in guisa che la semicorda a rimane costante. Or quando il punto C si eleva della quantità δ, la distanza CN aumenta presso a poco della quantità $\delta \text{sen}.\mu$, e quindi l' eccesso di lunghezza della catena di ritenuta sarà

$$\lambda - \delta \text{sen}.\mu, \qquad (3)$$

e la catena deve scorrere di questa quantità nel senso CA. Quindi la semilunghezza c della catena aumenterà della quantità

$$\gamma + \lambda - \delta \text{sen}.\mu,$$

da cui risulta un aumento nella freccia espresso

$$\frac{3a}{4b}(\gamma + \lambda - \delta \text{ sen}.\mu).$$

Ma siccome il punto A si è elevato della quantità δ, l' abbassamento effettivo del punto medio sarà

$$\frac{3a}{4b}(\gamma + \lambda - \delta \text{ sen}.\mu) - \delta. \qquad (4)$$

La stessa formola darà l' elevazione del mezzo del palco prodotta da un abbassamento di temperatura, cambiando i segni di γ, λ e δ.

714. La formola (3) rappresenta la quantità di cui per effetto delle variazioni di temperatura la catena deve scorrere sulla sommità del pilastro, allorchè l' attrito non si oppone allo scorrimento. Quando però la catena non può scorrere senza che l' attrito entri in azione,

lo scorrimento non comincerà ad aver luogo che quando le tensioni de' due rami di catena si troveranno es-

ser nel rapporto di $1 : e^{\pm \frac{\varphi s}{r}}$. In conseguenza per una elevazione di temperatura la tensione della catena di ritenuta potrà diminuire fino a divenire eguale a

$\frac{Q}{\cos.\alpha} e^{-\frac{\varphi s}{r}}$, e per un abbassamento di temperatura crescere fino ad acquistare il valore $\frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi s}{r}}$. E sebbene al n° 695, avendo riguardo al solo equilibrio del sistema, si è conchiuso che la tensione della catena di ritenuta avea per limite il valore $\frac{Q}{\cos.\mu}$, questa proposizione non può esser più ammessa quando per un abbassamento di temperatura questa tensione deve non solo resistere a quella della catena di sospensione, ma deve sorpassarla, e far scorrere la catena nel senso AC. Dunque la grossezza della catena di ritenuta dev' esser regolata in modo da poter resistere ad una tensione espressa dalla formola $\frac{Q}{\cos.\alpha} e^{\frac{\varphi s}{r}}$, ove per Q si metterà il massimo valore che può ricever la spinta orizzontale per effetto delle cariche permanenti e addizionali.

Si osservi che siccome l' attrito è proporzionale alla pressione, la catena scorrerà più facilmente nel senso CA che nel senso AC.

715. Nel calcolare intanto la quantità di catena che può scorrere sul pilastro, si deve osservare, che per la relazione che deve passare fra la lunghezza della catena di ritenuta e la sua tensione nel punto C, l'allungamento λ

prodotto in essa da una elevazione di temperatura dev' esser parte speso ad aumentare la curvatura della catena medesima, e parte a distruggere l' effetto della contrazione che riceve la materia di cui è formato la catena per effetto della diminuzione della tensione. Per fissare le idee supponiamo che nel metter in opera le catene siasi regolata in modo la lunghezza della catena di ritenuta da risultarne tensioni eguali ne' due rami di catena. Facendo $Q' = Qe^{-\frac{\varphi s}{r}}$, dalla formola (14) del n° 697 si ricava facilmente che per aumentare la curvatura della catena di ritenuta in corrispondenza della tensione $\frac{Q'}{\cos.\alpha}$, vi bisogna la lunghezza

$$\frac{\sigma^2 l^3 \cos.\mu}{24}\left(\frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{Q^2}\right);$$

e dal n° 709 si sicava pur facilmente che l'espressione

$$\frac{l}{E\omega \cos.^2\mu}(Q - Q')$$

rappresenta la diminuzione di lunghezza proveniente dalla contrazione della materia della catena. Sicchè la formola

$$\frac{\sigma^2 l^3 \cos.\mu}{24}\left(\frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{Q^2}\right) + \frac{l}{E\omega.\cos.^2\mu}(Q - Q') \qquad (5)$$

darà la porzione della lunghezza della catena di ritenuta che deve impiegarsi per l'aumento della curvatura e per la contrazione della materia.

Trattandosi di un abbassamento di temperatura, fatto $Q'' = Q e^{\frac{\varphi s}{r}}$, è facile ricavare la formola

$$\frac{\sigma^2 l^3 \cos.\mu}{24}\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q''^2}\right) + \frac{l}{E\omega.\cos.^2\mu}(Q'' - Q), \qquad (6)$$

la quale rappresenta la parte di lunghezza della catena di ritenuta da impiegarsi per mantenere la curvatura corrispondente a $\frac{Q''}{\cos.\alpha}$, e quella destinata a distruggere l'effetto della stensione che ha ricevuto la catena per l'aumento della tensione.

Togliendo dal valore ρ della formola (3) il valore (5) o (6) secondo che trattasi di una elevazione o di un abbassamento di temperatura, si avrà la quantità di catena che può scorrere o nell'uno o nell'altro senso.

716. È possibile che la catena in vece di scorrere obblighi il pilastro a piegare un poco alternativamente dall'un lato e dall'altro, il che avrebbe luogo se la sezione trasversale fosse tanto piccola rispetto all'altezza da risultarne la resistenza prodotta dall'attrito maggiore di quella che il pilastro oppone alla flessione. In questo caso assai raro, trattandosi di spostamenti picciolissimi, l'elasticità de' materiali, di cui son composti i sostegni, supponendoli anche formati di pietra, permetterà queste leggiere flessioni senza sensibile degradazione. Non si può inoltre temere che il pilastro avendo incominciato a piegare, continui a moversi per lo stesso verso, perchè l'effetto n'è interrotto dall'aumento di tensione della catena, e lo spostamento operato verso un lato sarà distrutto e operato dal lato opposto appena cangerà lo stato di temperatura. Ciò non ostante sarà sempre utile di legare le parti del pilastro e formarne un sol corpo (*).

(*) Potendo per una elevazione di temperatura trovarsi la tensione della catena di ritenuta a quella della catena di sospensione nel rapporto di $1 : e^{-\frac{\varphi s}{r}}$, non si può contare sulla stabilità del

717. Quanto agli effetti prodotti sul tavolato, giova av-

---

pilastro, che nel caso in cui la risultante delle due tensioni cade dentro la base, secondo si è detto nella nota a pag. 533. In generale però il moto del pilastro non può esser che picciolissimo, essendo tale lo spostamento che si richiede per aumentare la tensione della catena di ritenuta tanto da opporsi al detto moto. E se si mette in considerazione che il pilastro per rotare intorno allo spigolo esteriore dovrebbe esser solamente appoggiato sulla base, si conoscerà che avendo per lo contrario una forte adesione colla base, il suo moto non può ridursi che ad una leggiera flessione cui dee facilmente prestarsi in virtù dell' elasticità stessa de' materiali di cui è formato. Ciò non pertanto, qualunque sieno i mezzi di costruzione impiegati per opporsi a questa flessione, le spinte continuate che pe' pesi accidentali e per le variazioni di temperatura si esercitano sul pilastro per farlo piegare in diversi sensi possono alla fine produrre delle degradazioni che sarebbe difficile mettere a calcolo. Gioverà perciò sempre meglio adottare una delle disposizioni di cui si è parlato al n° 690, le quali si prestano alle oscillazioni de' punti di attacco con poco o quasi niuno sforzo orizzontale sul pilastro.

L'autore non conviene in questa opinione, stimando che l'enunciato vantaggio non basti a compensare alcuni inconvenienti. I quali sono, la difficoltà di stabilir solidamente su' sostegni de' pezzi mobili sottomessi a fortissime pressioni, e l' effetto che risulta dalle scosse prodotte dal passaggio delle vetture, essendovi a temere che in alcuni casi, per la stessa mobilità de' pezzi, la fabbrica del pilastro possa esser tormentata più che dalle spinte orizzontali che agiscono quando la catena deve scorrere sulla sommità del pilastro superando la resistenza dell' attrito.

Ma questa opinione che per le ragioni testè addotte non poteva ammettersi, manca di ogni appoggio ora che i due ponti sospesi elevati sul Garigliano e sul Calore per opera del ch. Cav. Luigi Giura Ispettore del Corpo di Acque e Strade, somministrano una pruova di fatto in contrario. Avendo questo egregio costruttore

vertire che se questo è formato di pezzi continui nel senso della lunghezza e fissati alle spalle, bisognerà comporli di parti riunite, lasciando un poco di giuoco nelle unioni per permettere a questi pezzi di allungarsi o accorciarsi allorchè la temperatura varia ; il che si rende assai più necessario, se il palco in vece di esser orizzontale fosse convesso. Dappoichè senza questa precauzione, per una elevazione di temperatura, le parti acquistando maggiori dimensioni, il punto di mezzo del palco tenderebbe a salire mentre dovrebbe discendere per potersi mantenere la conveniente tensione nella catena. L'effetto contrario avrebbe luogo per un abbassamento di temperatura.

---

saputo abilmente adattare il principio del pendolo ad una costruzione grandiosa, ha superato la prima difficoltà, e ci ha reso certi che con questa disposizione i pilastri reggon saldi alle scosse più violente (che tali furon quelle cui fu sottomesso il primo ponte prima di aprirsi al passaggio) senza dar segno di apparente degradazione. I due menzionati ponti, che a gloria del nostro Real Governo vede primi in questo genere l' Italia, ove pochi anni innanzi rinomato scrittore presumeva difficile per ora l' introduzione (*Cavalieri, Istituzioni di Architettura* ec. §. 483), potendo per l'armonia delle parti, per la sveltezza de' sostegni e per l'esattezza dell'esecuzione esser riguardati come costruzioni perfette, fan desiderare che, a vantaggio dell'arte e per tesoro di cognizioni positive sulle proprietà fisiche e meccaniche del nostro ferro, ne sien pubblicate la descrizione e le particolarità. Dal qual proposito altre gravi ed importanti occupazioni han certamente tenuto finora distolto il prelodato Ispettore.

*

Della materia più propria per la formazione delle catene de' ponti sospesi.

718. In ogni costruzione la scelta della materia dev'esser determinata dalla condizione di ottener la massima resistenza colla minima spesa. Ne' ponti sospesi però bisogna anche aver riguardo alla rigidezza del sistema, e a tutte le condizioni enunciate nel n° 679.

719. La maggior parte de' ponti finora costrutti hanno le catene formate di barre di ferro da fucina. Ed è d'altronde evidente che in questo caso, trattandosi di pezzi stirati, deve il ferro da fucina esser preferito al ferro fuso tanto perchè l' eccesso di resistenza alla stensione del primo sul secondo è assai maggiore della differenza del prezzo, quanto perchè il ferro da fucina è meno esposto a rompersi per effetto delle scosse cui può andar soggetta la costruzione.

720. Il legname quando è stirato nel senso della lunghezza può esser usato con maggior vantaggio che quando è compresso, giacchè oltre all' esser la sua resistenza alla stensione doppia di quella alla compressione, è da osservarsi che il disseccamento progressivo cui va soggetto favorisce la compressione e si oppone alla stensione. Potrebbe dunque esser il legname impiegato con molto profitto per la formazione delle catene de' ponti sospesi; e se la durata di questo materiale non è molto lunga quando se ne fa uso per la composizione degli archi compressi, è verisimile che in quest' altro genere di costruzioni, preservandolo dall' influenza dell' umido, potrebbe con piccola spesa di manutenzione resistere per un tempo lunghissimo.

Non minore è il vantaggio che se ne trarrebbe relativamente alla spesa. In fatti la resistenza media del legname alla stensione è di $8^{ch.}$ a millimetro quadrato (n° 31 e seg.), e quella del ferro da fucina di $40^{ch.}$ a millimetro quadrato (n^i 38 e seg.). Il limite della carica cui si può esporre il legname senza che si alteri la sua elasticità naturale è $\frac{1}{10}$ della precedente (n° 181), e del ferro da fucina è circa il $\frac{1}{7}$ di quella che produce la rottura (n° 182). Perciò un pezzo di legname ed un altro di ferro che si trovassero esposti alla medesima tensione dovrebbero aver le aree nel rapporto di $\frac{40}{7} : \frac{8}{10}$, ossia di 7 : 1 circa. E siccome il ferro a volume eguale costa circa 60 volte più del legname, si vede che il legname sarebbe 8 o 9 volte più economico del ferro. D'altronde le catene di legname di quercia, a resistenza eguale, non peserebbero più di quelle di ferro, e quelle di abete sarebbero anche più leggiere.

721. L' economia considerevole risultante dall'impiego del legname dovrebbe farne preferire l' uso in queste specie di costruzioni. È da osservare però che questa materia è suscettible di allungarsi più del ferro. In fatti da' n^i 95 e 102 risulta che una verga di abete o di quercia si allunga circa 20 volte di più di una di ferro esposta alla medesima tensione; e siccome la sezione trasversale della prima dev'esser sette volte più grande della seconda, gli allungamenti rispettivi sarebbero nel rapporto di 20 : 7.

Da ciò si conchiude che gli allungamenti prodotti dalle cariche accidentali nelle catene di un ponte sospeso sarebbero molto più forti nelle catene di legname che in quelle di ferro; da cui risulterebbe una variazione nella figura molto più sensibile nel primo caso che nel secondo.

Vi è dunque a temere, che un ponte sospeso a catene di legname il quale avesse una grande corda sarebbe esposto a delle oscillazioni verticali che renderebbero incomodo il passaggio; per cui pare che l'uso debba limitarsene a de' ponti di piccola corda (*).

(*) I dati da' quali si sono ricavate le esposte conseguenze, ricevono delle modificazioni nel nostro Paese, ove il prezzo del legname è tenue, ed assai elevato quello del ferro. Qui si può bene asserire che il ferro a volume eguale costa circa 150 volte più della quercia, e 90 volte più dell' abete. Quindi l' economia della quercia sul ferro sarebbe di circa 1 : 21, e quella dell' abete di 1 : 13. E quando anche si volessero triplicare le dimensioni delle catene di legname per fare che le stensioni non fossero maggiori di quelle delle catene di ferro, pure la quercia sarebbe più economica del ferro nel rapporto di 1 : 7 circa, e l' abete di 1 : 5 circa. Osservando però che sarebbe difficile comporre le articolazioni delle catene di legname senza impiegare delle armature di ferro, ammettendo che il costo di dette armature, traverse, perni ed altro sia il quarto della spesa totale, si vedrà che le catene di quercia costerebbero il quinto o il sesto di quelle di ferro, e le catene di abete il quarto.

Non bisogna tralasciare di osservare che la dilatazione del legname per l' azione del calore essendo i $\frac{2}{3}$ di quella del ferro, i ponti a catene di legname sarebbero meno esposti alle variazioni che derivano da questa causa.

Da n^{i} 53 e seg. risulta che la resistenza de' fili di ferro sta a quella delle barre dello stesso metallo come 3 : 2. Si è profittato di questa osservazione per sospendere i ponti a delle corde formate da fasci di fili di ferro. Le sperienze avendo fatto conoscere che i fili di ferro resistono senza alterarsi all' azione continuata di una carica molto più facilmente che le barre di ferro, si può ai fili di ferro far soffrire in costruzione una tensione di 24$^{ch.}$ a millimetro quadrato che corrisponde ai $\frac{2}{5}$ di quella che cagionerebbe

Delle oscillazioni verticali de' ponti sospesi.

722. Una vettura che si trasporta da un capo all'altro di un ponte sospeso non solo modifica continuamente la figura delle catene, giusta le leggi stabilite ne' n^{i} 685 e seg., ma per l'asprezza della superficie su cui scorre imprime al palco ed alle catene de' movimenti oscillatorî di cui bisogna tener conto. In fatti se questa vettura nel percorrere il palco sormonta un ostacolo ricadendo percuoterà il palco medesimo, ed imprimerà al punto su cui cade una velocità dovuta all'altezza della caduta. Durante le oscillazioni prodotte da questa percossa, la vettura rimane a contatto col tavolato. Un nuovo urto produce gli stessi effetti, i quali si riuniscono a' primi, e così di seguito.

Nell' esaminare le leggi di queste oscillazioni, supporremo il filo AMB (Fig. 17, tav. agg.) perfettamente flessibile e inestensibile, caricato del peso p sopra ogni unità di lunghezza, e supporremo che le oscillazioni derivanti dalle scosse ripetute sieno prodotte da una velocità verticale impressa al peso 2Π posto nel punto medio M del filo.

723. Consideriamo un punto qualunque m della curva, le cui coordinate Ap, pm sono x ed y; l'elemento

---

la rottura. Le catene formate di barre e quelle di fili di ferro dovrebbero aver le sezioni come 24 : 7. Non vi sono dati per giudicare della differenza di prezzo che quì potrebbe esservi fra le barre e le corde di fili di ferro. Ammettendo che il prezzo di quest' ultime sia triplo del prezzo delle prime, le spese per un ponte a catene e per uno a fili di ferro potrebbero esser come 8 : 7.

consecutivo $mn = ds$ è caricato del peso pdx. Quando il sistema è in quiete, vi deve esser equilibrio tra l'azione di questo peso e le due tensioni che agiscono ai punti m ed n. Ora delle dette due tensioni essendo Q'' la componente orizzontale (n° 686), le componenti verticali ai punti m ed n saranno rispettivamente $Q''\frac{dy}{dx}$, e $Q''\frac{dy+d^2y}{dx}$. Quindi per l'equilibrio dell'elemento mn, essendo eguali le forze orizzontali, si richiede che sia $Q''\frac{dy}{dx} = pdx + Q''\frac{dy+d^2y}{dx}$, ovvero

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{Q''}. \qquad (1)$$

Questa equazione poteva anche ricavarsi differenziando l'equazione (1) del n° 682.

Oltre questa equazione, che appartiene a tutti i punti della curva, n'esiste un'altra particolare al punto M. Dovendo in questo punto le tensioni de' due rami di curva fare equilibrio al peso 2Π, sarà $2Q''\frac{dy}{dx} = 2\Pi$, ovvero

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Pi}{Q''}, \qquad (2)$$

la quale equazione deve aver luogo quando $x = a$.

Per integrare queste due equazioni si faccia

$$y = Ax + Bx^2,$$

essendo A e B due costanti arbitrarie. Sostituendo questa espressione nelle equazioni (1) e (2) si trova

$$A = \frac{pa+\Pi}{Q''}, \quad B = -\frac{p}{2Q''};$$

e l'equazione che dà la figura della metà della curva

nello stato di equilibrio sarà

$$y = \frac{pa+\Pi}{Q''}x - \frac{p}{2Q''}x^2, \qquad (3)$$

ove per Q'' si metterà il valore dato dalla formola (11) del n° 687.

Questi risultamenti si accordano con quelli trovati per altra via nel n° citato.

In seguito rappresenteremo per Q la tensione orizzontale, sopprimendo gli accenti per maggior semplicità.

724. Supponiamo il punto m smosso pochissimo dalla situazione che occupa nello stato di equilibrio, e dopo il tempo t si trovi in m' le cui coordinate sono x', y'. Chiamando g la velocità impressa ai corpi pesanti nell' unità di tempo, la massa dell'elemento mn sarà $\frac{pdx}{g}$; e le forze acceleratrici secondo le x e le y a cui son dovuti i movimenti del punto m saranno rispettivamente $\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2}$ e $\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}$. Essendo i movimenti picciolissimi, si può supporre che la tensione T che ha luogo al punto m conservi lo stesso valore per tutta la durata del moto; ed essendosi supposto il filo inestensibile, sarà $mn = m'n' = ds$; per cui le componenti orizzontali e verticali della tensione al punto m' saranno $T\frac{dx'}{ds}$ e $T\frac{dy'}{ds}$, ovvero $Q\frac{dx'}{dx}$ e $Q\frac{dy'}{dx}$ per esser $Q = T\frac{dx}{ds}$. Le componenti orizzontali e verticali della tensione al punto n' saranno $Q\frac{dx'+d^2x'}{dx}$ e $Q\frac{dy'+d^2y'}{dx}$. Le risultanti delle forze orizzontali e verticali dovendo esser eguali rispettivamente alle forze acceleratrici a cui son dovuti i movimenti, si avrà

$$\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2} = Q\frac{d^2x'}{dx}, \quad \frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2} = pdx + Q\frac{d^2y'}{dx};$$

ovvero

$$\frac{p}{gQ}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{d^2x'}{dx^2}\ ,\ \frac{p}{gQ}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{p}{Q}+\frac{d^2y'}{dx^2}\ ,$$

delle quali una dà le leggi delle oscillazioni orizzontali, l' altra delle verticali.

Supponendo che al punto M sia impressa dal peso 2Π solamente una velocità verticale, e che le parti AM, BM della curva eseguano i medesimi movimenti offrendo in ogni istante delle curve simmetriche, supponendo di più che nel principio del moto nessun punto della curva si trovi spostato orizzontalmente, non avremo che a considerare la seconda di queste due equazioni. Ma oltre questa equazione appartenente a tutti i punti della curva ve n'è un altra relativa al punto M. Di fatti in quest' ultimo punto essendo la componente verticale della tensione in ciascun ramo di curva espressa da $T\frac{dy'}{ds}$ ovvero $Q\frac{dy'}{dx}$, ed essendo la forza acceleratrice espressa da $\frac{2\Pi}{g}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}$, si avrà

$$\frac{2\Pi}{g}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=2\Pi-2Q\frac{dy'}{dx}\ ,$$

ovvero

$$\frac{\Pi}{gQ}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{\Pi}{Q}-\frac{dy'}{dx}\ ,$$

la quale equazione deve aver luogo quando $x=a$.

725. Per determinare adunque la natura de' movimenti verticali della curva si hanno le due equazioni

$$\frac{p}{gQ}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{p}{Q}+\frac{d^2y'}{dx^2}\ , \qquad (4)$$

$$\frac{\Pi}{gQ}\cdot\frac{d^2y'}{dt^2}=\frac{\Pi}{Q}-\frac{dy'}{dx}\ , \qquad (5)$$

la prima delle quali deve aver luogo per tutti i punti della curva, e la seconda pel punto M in cui $x = a$.

Ora essendo per ogni punto della curva $\frac{p}{Q} = -\frac{d^2y}{dx^2}$, e pel punto M, $\frac{\Pi}{Q} = \frac{dy}{dx}$, in vece delle equazioni (4) e (5) si potranno prender le altre due

$$\frac{p}{gQ} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2(y'-y)}{dx^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{\Pi}{gQ} \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{d(y'-y)}{dx}. \qquad (7)$$

726. La funzione y' in x e t che soddisfà all' equazione (6) dev' esser tale che quando $x = 0$ e $y = 0$ sia anche $y' = 0$. Se si prende

$$y'-y = \text{sen}.mx\,(\text{A sen}.nt + \text{B cos}.nt)$$

essendo m ed n numeri qualunque ed A, B coefficienti arbitrari, questa espressione soddisfarà all' equazione (6), mettendo $\frac{p}{gQ} n^2 = m^2$. L' espressione generale che soddisfà all' equazione indefinita (6) si avrà riunendo tutti i valori particolari di $y'-y$ della stessa forma del precedente, i quali si ottengono variando i valori di m,A e B. Le costanti A e B si determinano dietro la figura e la velocità iniziale del sistema.

Supponendo che al principio del moto la figura della curva è quella che conviene all'equilibrio, questa funzione deve dare $y'-y = 0$ quando $t = 0$, per cui sarà $B = 0$. L' espressione generale per la quale l' equazione (6) è soddisfatta sarà in questo caso

$$y'-y = \sum A \,\text{sen}.mx \,\text{sen}.m\sqrt{\frac{gQ}{p}}\,t \qquad (8)$$

in cui il segno S indica la somma di tutti i valori simili a questi, dando ad m ed A de' valori qualunque.

727. Sostituendo il valore di $y'-y$ nell'equazione (7), e facendo dopo la sostituzione $x=a$, questa equazione è soddisfatta se si pone

$$\frac{\Pi m}{p}\text{sen.}\,ma=\cos.\,ma\text{, ovvero }ma\,\text{tang.}\,ma=\frac{pa}{\Pi}. \quad (9)$$

Esiste un numero infinito di valori di m che soddisfanno all' equazione (9). In fatti se si costruisce una curva che abbia per ascisse ma e per ordinate $ma\,\text{tang.}\,ma$, questa curva sarà composta di una infinità di rami, di cui il primo (Fig. 18, tav. agg.) tocca l'asse delle ascisse al punto A, gli altri lo tagliano alle distanze dall' origine π, 2π, 3π....., avendo per asintoti delle perpendicolari a quest'asse situati alle distanze dall' origine $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ .... Supponendo di più che siasi tirata una retta parallela all' asse delle ascisse ad una distanza $AC=\frac{pa}{\Pi}$, le ascisse de' punti m, m', m''..... daranno la serie infinita de' valori di ma e quindi di m.

728. Differenziando l' equazione (8) rispetto a t, e chiamando φx la velocità verticale impressa ad un punto qualunque all' origine del moto, si avrà

$$\varphi x=S\text{A}m\sqrt{\frac{gQ}{p}}.\text{sen.}\,mx. \quad (10)$$

Differenziando si ha

$$\frac{d.\varphi x}{dx}=S\text{A}m\sqrt{\frac{gQ}{p}}.m\cos.\,mx.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $dx\cos.m'x$, essendo m' uno de' numeri che soddisfanno all'equazione (9).

e integrando tra i limiti o ed a, si ha

$$\int_o^a dx \cos.m'x \frac{d.\varphi x}{dx} = \mathrm{S}\,\mathrm{A}m^2\sqrt{\frac{gQ}{p}}\int_o^a dx \cos.mx \cos.m'x.$$

Ora essendo

$$\cos.mx \cos.m'x = \tfrac{1}{2}[\cos.(mx+m'x)+\cos.(mx-m'x)],$$

si trova

$$\int_o^a dx \cos.mx \cos.m'x = \frac{m\,\mathrm{sen}.ma \cos.m'a - m'\cos.ma\,\mathrm{sen}.m'a}{m^2-m'^2}.$$

Ma i numeri m ed m' dovendo soddisfare alle equazioni

$$m\,\mathrm{sen}.ma - \frac{p}{\Pi}\cos.ma = o,$$

$$m'\mathrm{sen}.m'a - \frac{p}{\Pi}\cos.m'a = o,$$

moltiplicando la prima per $\cos.m'a$, la seconda per $\cos.ma$, e sottraendo l' una dall' altra si ha

$$m\,\mathrm{sen}.ma \cos.m'a - m'\cos.ma\,\mathrm{sen}.m'a = o.$$

Dunque l' integrale precedente sarà nullo, finchè m' è diverso da m. Facendo $m'=m$, quell' espressione si riduce a $\frac{o}{o}$, il cui vero valore è $\frac{\mathrm{sen}.2ma+2ma}{4m}$; e quindi si avrà $\int_o^a dx \cos.^2 mx = \frac{\mathrm{sen}.2ma+2ma}{4m}$, e perciò

$$\int_o^a dx \cos.mx \frac{d.\varphi x}{dx} = \mathrm{A}m\sqrt{\frac{gQ}{p}}.\frac{\mathrm{sen}.2ma+2ma}{4}.$$

E siccome all' origine delle coordinate dev' esser necessariamente $\varphi x = o$, integrando per parti il primo membro dell' equazione precedente, si ha infine

$$\mathrm{A} = \frac{4}{m\sqrt{\frac{gQ}{p}}(\mathrm{sen}.2ma+2ma)}\left(\cos.ma\,\varphi(a)+m\int_o^a dx.\mathrm{sen}.mx\,\varphi x\right).$$

Ma essendosi supposto che quando $t = 0$ la figura della curva è quella che conviene all'equilibrio, e che il moto è prodotto solamente da una velocità verticale impressa al punto in cui è situato il peso 2Π, φx sarà nulla in tutta l'estensione della curva, ed in un piccolissimo spazio vicino al punto M sarà $\varphi x = V$. Sarà dunque $\cos . ma\, \varphi(a) = V . \cos . ma$, e $\int_0^a dx \operatorname{sen} . mx\, \varphi x = 0$ prossimamente, perchè preso tra limiti estremamente vicini. Si avrà dunque

$$A = 4V\sqrt{\frac{p}{gQ}} \cdot \frac{\cos . ma}{m(\operatorname{sen} . 2ma + 2ma)},$$

e quindi

$$y' - y = 4V\sqrt{\frac{p}{gQ}}\, S \frac{\cos . ma}{m(\operatorname{sen} . 2ma + 2ma)} \operatorname{sen} . mx \operatorname{sen} . m\sqrt{\frac{gQ}{p}}\, t, \quad (1)$$

espressione nella quale non si trovano più quantità indeterminate.

Si vede dalla forma di questa equazione che il moto della corda è il risultamento della soprapposizione di un infinità di movimenti semplici, ciascuno de' quali è rappresentato da un termine della serie del secondo membro. Questi moti semplici consistono in una serie indefinita di oscillazioni eguali, la cui durata si ha mettendo

$$m\sqrt{\frac{gQ}{p}}\, t = 2\pi, \text{ da cui } t = \frac{2\pi}{m}\sqrt{\frac{p}{gQ}}.$$

A causa dell' irrazionalità del numero m questi moti si eseguono in tempi che non hanno misura comune; sicchè la corda non ritorna mai alla situazione primitiva.

729. Fermiamoci al caso in cui il peso Π è assai piccolo rispetto al peso pa. Dall' equazione (9) si ricava

$$ma = \text{arc} . \cot . \frac{\Pi}{pa} . ma = \frac{(2i+1)\pi}{2} - \text{arc} . \tan . \frac{\Pi}{pa} ma,$$

essendo i un numero intero qualunque. Sviluppando arc. tang. $\frac{\Pi}{pa} ma$ in serie e limitandoci al primo termine, si avrà

$$ma = \frac{(2i+1)\pi}{2} - \frac{\Pi}{pa} ma,$$

da cui si ricava

$$2ma = \frac{(2i+1)\pi}{1 + \frac{\Pi}{pa}},$$

ovvero, trascurando le potenze di $\frac{\Pi}{pa}$,

$$2ma = (2i+1)\pi \left(1 - \frac{\Pi}{pa}\right), \qquad (12)$$

da cui si avranno tutti i valori di m facendo $i = 0, = 1, = 2$, ec. Si osservi che nello sviluppo di arc. tang. $\frac{\Pi}{pa} ma$ tanto maggiore è l' errore che si commette limitandoci al primo termine delle serie quanto m è più grande; ma crescendo in pari tempo i valori di $m(\text{sen}. 2ma + 2ma)$ i termini di $y' - y$ corrispondenti ad m molto grande si possono trascurare; per cui l' errore non può influire sensibilmente nel risultamento finale. Dalla formola (12) si ricava

$$\text{sen}. 2ma = \text{sen}. (2i+1)\pi \frac{\Pi}{pa},$$

$$\text{sen}. ma = \cos. \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{\Pi}{pa},$$

$$\cos. ma = \text{sen}. \frac{(2i+1)\pi}{2} \frac{\Pi}{pa};$$

i quali valori si dovranno sostituire nella formola (11).

La durata delle oscillazioni è data dalla formola

$$t = \frac{4a}{2i+1}\left(1 + \frac{\Pi}{pa}\right)\sqrt{\frac{p}{gQ}},$$

ovvero, mettendo per Q il valore dato dalla formala (11) del n° 687,

$$t = \frac{4}{2i+1}\left(1+\frac{\Pi}{4pa}\right)\sqrt{\frac{2b}{g}}.$$

Le durate delle oscillazioni semplici decrescono come i numeri 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ec.; differiscono dunque da quelle di una corda tesa in linea retta, la durata delle quali è, come si sa, rappresentata da' termini della serie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ec.

730. Facendo $x = a$, si ha la legge de'movimenti del punto M in cui è posto il peso 2Π, e che di tutti i punti è quello che più si allontana dalla situazione primitiva. Si osservi che

$$\text{sen.}\frac{(2i+1)\pi}{2}\frac{\Pi}{pa}\text{sen.}\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right) = \tfrac{1}{2}\text{sen.}(2i+1)\pi\frac{\Pi}{pa};$$

di più per esser $\frac{\Pi}{pa}$ una quantità piccolissima, l'arco $(2i+1)\pi\frac{\Pi}{pa}$ è anche picciolissimo e si può prender l'arco in vece del seno a meno che i non fosse molto grande, nel qual caso i termini della serie si possono trascurare (n° 729). Introdotte queste riduzioni, si ha presso a poco

$$y'-y = 2V\sqrt{\frac{p}{gQ}}\cdot\frac{2\Pi}{\pi p\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{2i+1}\text{sen.}\frac{(2i+1)\pi}{2a}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\sqrt{\frac{(1}{\frac{gQ}{p}}}$$

I più grandi valori di $y'-y$ si hanno facendo $t = \frac{a}{1-\frac{\Pi}{pa}}\sqrt{\frac{p}{gQ}}$. In questo caso la serie del secondo membro diviene $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ ec. di cui il valore

è $\frac{\pi}{4}$. Questi più grandi valori sono sempre espressi presso a poco da

$$y'-y=\mathrm{V}\sqrt{\frac{p}{g\mathrm{Q}}}\cdot\frac{\Pi a}{pa-\Pi}, \qquad (14)$$

ovvero, mettendo per Q il valore (11) del n° 687,

$$y'-y=\frac{\mathrm{V}\Pi}{pa-\Pi}\sqrt{\frac{b}{g}\cdot\frac{2pa+\Pi}{pa+2\Pi}},$$

la quale quantità differisce pochissimo da

$$y'-y=\frac{\mathrm{V}\Pi}{pa}\left(1+\frac{\Pi}{4pa}\right)\sqrt{\frac{2b}{g}}. \qquad (15)$$

Quindi il più grande spostamento è presso a poco proporzionale a $\frac{\mathrm{V}\Pi}{pa}\sqrt{b}$. Ne' ponti in cui $\frac{b}{a}$ è lo stesso, lo spostamento massimo cresce presso a poco in ragione inversa della radice quadrata della corda.

731. L' equazione (13), differenziata per rapporto a t, darà

$$\frac{dy'}{dt}=2\mathrm{V}\frac{\Pi}{pa}\sum_{i=0}^{i=\infty}\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2a}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\sqrt{\frac{g\mathrm{Q}}{p}}\cdot t \qquad (16)$$

per l' espressione della velocità colla quale il punto M esegue le sue oscillazioni, la quale velocità è proporzionale a V e a $\frac{\Pi}{pa}$.

732. Questi risultamenti fan conoscere che le oscillazioni prodotte dal passaggio delle vetture hanno minore estensione e si eseguono con minor velocità nelle grandi costruzioni che nelle piccole.

Delle vibrazioni longitudinali dovute all' elasticità della materia.

733. Allorchè il palco di un ponte riceve un urto qualunque, in virtù dell' elasticità della materia tutte le parti della costruzione concepiscono un moto vibratorio pel quale alternativamente si allungano e si accorciano. È necessario conoscere l' estensione di questi movimenti per regolare convenientemente le dimensioni delle catene.

734. Per valutare l' effetto che da un urto prodotto sul palco verso l'estremità delle aste di sospensione può risultarne sulle aste medesime, supporremo che una verga elastica AB (Fig. 18, tav. agg.) sia sospesa verticalmente pel punto A e che un peso 2Π cadendo da una certa altezza incontri un ostacolo nel punto B nel quale va ad urtare. Tutti i punti della verga si metteranno in movimento.

Chiamiamo x la distanza qualunque Am, e supponiamo primieramente la verga in equilibrio sotto l' azione del proprio peso e del peso 2Π. L' elemento $mn = dx$ per l' allungamento della verga si sarà trasportato in pq; onde facendo $Ap = \xi$ sarà $pq = d\xi$. La proporzione secondo la quale quest' elemento si è allungato è $\frac{d\xi - dx}{dx}$, e quindi la tensione nel punto p sarà $E\omega \frac{d\xi - dx}{dx}$, essendo ω l' area della sezione trasversale, ed avendo E il significato assegnato nel n° 77. Passando dal punto p al punto q, questa tensione aumenterà del suo differenziale, e diverrà $E\omega . \frac{d\xi + d^2\xi - dx}{dx}$.

Chiamando p il peso dell' unità di lunghezza della verga, e riguardando come positive le forze che tendono ad aumentare le x, per l' equilibrio deve aversi $E\omega . \frac{d^2\xi}{dx} + pdx = 0$, ovvero

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{p}{E\omega}, \qquad (1)$$

la quale equazione deve sussistere per tutti i punti della verga.

Nel punto B, dovendo la tensione far equilibrio al peso 2Π, si avrà $E\omega \left(\frac{d\xi - dx}{dx}\right) = 2\Pi$, ovvero

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2\Pi}{E\omega} + 1, \qquad (2)$$

la quale equazione deve sussistere quando $x = AB = a$

735. Integrando come al n° 723, si ha

$$\xi = \left(1 + \frac{2\Pi + pa}{E\omega}\right)x - \frac{p}{2E\omega}x^2. \qquad (3)$$

L' espressione

$$\frac{d\xi}{dx} - 1 = \frac{2\Pi + p(a-x)}{E\omega}, \qquad (4)$$

che si ricava da questa equazione, fa conoscere la proporzione secondo la quale ogni elemento del filo si è allungato. Nel punto A in cui $x = o$ succede il massimo allungamento, e per determinare le dimensioni della verga, si ha l' equazione (n° 474)

$$R' = \frac{2\Pi + pa}{\omega}.$$

736. Supponiamo ora tutti i punti in movimento per effetto della caduta del peso 2Π. Chiamiamo ξ' il valore variabile col tempo t che prende allora la distanza

Ap. Sarà come sopra (n° 724)

$$\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = pdx + \mathrm{E}\omega\cdot\frac{d^2\xi'}{dx},$$

ovvero

$$\frac{p}{g.\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{p}{\mathrm{E}\omega} + \frac{d^2\xi'}{dx^2}\ ; \qquad (5)$$

e questa equazione deve aver luogo per tutti i punti della verga.

Per l' equazione del moto del punto B si ha

$$\frac{2\Pi}{g}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = 2\Pi - \mathrm{E}\omega\left(\frac{d\xi'-dx}{dx}\right),$$

ovvero

$$\frac{2\Pi}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{2\Pi}{\mathrm{E}\omega} + 1 - \frac{d\xi'}{dx}, \qquad (6)$$

la quale equazione deve sussistere pel valore $x = a$.

Facendo sulle equazioni (5) e (6) gl' istessi ragionamenti fatti per le equazioni (4) e (5) del n° 725, si vedrà che in loro vece si possono scrivere le due equazioni

$$\frac{p}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \frac{d^2(\xi'-\xi)}{dx^2}, \qquad (7)$$

$$\frac{2\Pi}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\frac{d(\xi'-\xi)}{dx}. \qquad (8)$$

737. Queste equazioni, integrate come quelle del n° citato e colla condizione che $\frac{d\xi'}{dt}$ sia eguale a V quando $x=a$, e sia nullo per tutti gli altri valori di x, danno

$$\xi'-\xi = 4\mathrm{V}\sqrt{\frac{p}{g\mathrm{E}\omega}}\,\mathrm{S}\,\frac{\cos\, ma}{m(2ma+\mathrm{sen}\,.\,2ma)}\mathrm{sen}\,.\,mx\,.\,\mathrm{sen}.m\sqrt{\frac{g\mathrm{E}\omega}{p}}\,t, \qquad (9$$

essendo i valori di m dati dall' equazione

$$\frac{2m\Pi}{p}\,\mathrm{sen}\,.\,ma = \cos\,.\,ma. \qquad (10)$$

738. Consideriamo particolarmente il caso in cui il peso 2Π fosse grandissimo rispetto a pa. L' equazione (10) dà presso a poco pel più piccolo valore di ma, $ma = \sqrt{\frac{pa}{2\Pi}}$, d' onde $m = \sqrt{\frac{p}{2\Pi a}}$. Tutti gli altri valori di m saranno grandissimi rispetto a questo, in modo che nella formola (9) si possono trascurare tutti i termini all' infuori del primo. E siccome ma è picciolissimo, si ha presso a poco

$$\xi' - \xi = V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}\, x.\text{sen}.\sqrt{\frac{g.E\omega}{2\Pi.a}}\, t. \qquad (11)$$

Ogni punto si allontana alternativamente da sotto e da sopra in proporzione della distanza x. L' estensione dell' escursione del punto B, che è quello che più si allontana dalla posizione di equilibrio, è

$$V\sqrt{\frac{2\Pi a}{g.E\omega}}. \qquad (12)$$

739. Dalla formola (11) si ha

$$\frac{d\xi' - d\xi}{dx} = V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}\ \text{sen}.\sqrt{\frac{g\ E\omega}{2\Pi a}}\, t,$$

ovvero, mettendo per $\frac{d\xi}{dx}$ il valore dato dato dalla formola (4),

$$\frac{d\xi'}{dx} - 1 = \frac{2\Pi + p(a-x)}{E\omega} + V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}\ \text{sen}.\sqrt{\frac{g.E\omega}{2\Pi a}}\, t$$

per l' espressione della proporzione secondo la quale la verga si è allungata. La più grande estensione possibile ha luogo quando $\text{sen}.\sqrt{\frac{g.E\omega}{2\Pi a}}\, t = 1$. Si ha allora

$$\frac{d\xi'}{dx} - 1 = \frac{2\Pi + p'a-x)}{E\omega} + V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}. \qquad (13)$$

Quindi l' effetto dell' urto del peso 2Π consiste nell' accrescer la lunghezza primitiva della quantità

$$\frac{2\Pi}{E\omega} + V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}.$$

Quest' urto produce lo stesso allungamento che produrrebbe un peso

$$2\Pi + V\sqrt{\frac{2\Pi.E\omega}{g.a}} \qquad (14)$$

sospeso in quiete all' estremità inferiore. Si noti che l' effetto dell' urto decresce come la radice quadrata della lunghezza.

Le dimensioni della verga debbono esser regolate dietro l' equazione (n° 387)

$$\frac{R'}{E} = \frac{2\Pi + pa}{E\omega} + V\sqrt{\frac{2\Pi}{g.E\omega.a}}. \qquad (15)$$

740. Consideriamo ora un filo perfettamente flessibile AOB (Fig. 20, tav. agg.) attaccato alle due estremità, carico del peso p sopra ogni unità di lunghezza dell'ascissa, e del peso 2Π nel punto di mezzo O. Sieno x, y le coordinate di un punto qualunque della curva in equilibrio supposta inestensibile, riferite al punto A, ed s l' arco Am. Ammettendo che il filo divenga estensibile e che allungandosi sotto la tensione si trasporti nella posizione AO'B, fissiamo la posizione del punto μ nel quale il punto m si è trasportato, abbassando da questo punto sulla curva AmO, la normale μp, e indicando per σ l' arco Ap e per τ la normale μp che sarà sempre estremamente piccola. Concepiamo finalmente, che il filo elastico sia stato rimosso dalla posizione di equilibrio AO'B e che il punto m oscillando dall' una parte e dall' altra del punto μ, le quantità σ e τ prendano i

valori variabili σ' e τ'. Supporremo inoltre $\mu\nu$ eguale alla sua projezione sulla curva AmO, e perciò l' elemento consecutivo al punto m prima dell' allungamento sarà espresso da ds, dopo l' allungamento da $d\sigma$ e nel tempo dell' oscillazione da $d\sigma'$.

Ciò posto, la tensione che ha prodotto l' allungamento dell' elemento mn nello stato di equilibrio sarà $E\omega\frac{d\sigma - ds}{ds}$ (n° 483). Sostituendo il differenziale di questa espressione nell' equazione $-dT = pdx.\frac{dy}{ds}$ (n° 432), si avrà

$$E\omega.\frac{d^2\sigma}{ds} = -pdx.\frac{dy}{ds}, \text{ ovvero } \frac{d^2\sigma}{ds^2} = -\frac{p}{E\omega}.\frac{dx}{ds}.\frac{dy}{ds}. \quad (16)$$

L' equazione particolare al punto O si trova eguagliando al peso 2Π le componenti verticali delle tensioni degli elementi estremi separati da questo punto. Perciò si avrà

$$E\omega\left(\frac{d\sigma - ds}{ds}\right)\frac{dy}{ds} = \Pi, \text{ ovvero } \frac{d\sigma}{ds} = 1 + \frac{\Pi}{E\omega}.\frac{ds}{dy}; \quad (17)$$

la quale equazione deve aver luogo quando $s = c$, essendo c la semilunghezza della curva.

741. Supponendo la freccia assai piccola relativamente alla corda, si potrà fare $ds = dx$; e le equazioni precedenti diverranno

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{p}{E\omega}.\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = 1 + \frac{\Pi}{E\omega}.\frac{dx}{dy}.$$

E mettendo in queste equazioni il valore di dy ricavato dall' equazione (3) del n° 725, si avrà

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{p}{E\omega.Q}[\Pi + p(a-x)], \qquad (18)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = 1 + \frac{\Pi}{E\omega}\cdot\frac{Q}{\Pi + p(a-x)}. \qquad (19)$$

742. Si faccia

$$\sigma = Ax + Bx^2 + Cx^3,$$

essendo A, B, C coefficienti indeterminati. Sostituendo questo valore nell' equazione (18) che deve sussistere per tutti i valori di x e nell' equazione (19) che deve aver luogo per $x = a$, si troveranno i valori di A, B, C; e quindi ne risulta

$$\sigma = x + \frac{1}{2E\omega.Q}\left\{[2Q^2 + pa(2\Pi + pa)]x - p(\Pi + pa)x^2 + \tfrac{1}{3}p^2x^3\right\} \qquad (20)$$

743. Se si mette $x = a$, risulta

$$\sigma = a + \frac{1}{2E\omega.Q}(2Q^2a + pa^2\Pi + \tfrac{1}{3}p^2a^3),$$

e mettendo per Q il valore (6) del n° 686, si ha

$$\sigma = a + \frac{2\Pi a^2 + pa^3}{E\omega.2b'}\left(1 + \frac{2p(3\Pi + pa^2)b'^2}{3a(2\Pi + pa)^2}\right),$$

o presso a poco

$$\sigma = a + \frac{2\Pi a^2 + pa^3}{E\omega.2b'};$$

formola nella quale si dovrà sostituire per b' il valore (10) dato nel n° 687.

744. Dalla equazione (20) si ricava

$$\frac{d\sigma}{dx} - 1 = \frac{1}{2E\omega.Q}\left\{2Q^2 + pa(2\Pi + pa) - 2p(\Pi + pa)x + p^2x^2\right\} \qquad (21)$$

745. Supponiamo il filo in movimento. Si può riguardare il moto del punto μ come composto di due altri, uno parallelo a pq, l' altro a $p\mu$. Noi prenderemo a

considerare solamente quello nel senso della curva. E ragionando come al n° 724, verrà

$$\frac{pdx}{g}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\mathrm{E}\omega\cdot\frac{d^2\sigma'}{ds}+pdx\cdot\frac{dy}{ds},$$

ovvero

$$\frac{p}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\frac{d^2\sigma'}{dx\,ds}+\frac{p}{\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{dy}{ds}. \qquad (22)$$

L' equazione particolare al punto O, nelle stesse supposizioni del n° 724, e stimando la massa del peso 2Π divisa in due parti eguali, di cui ciascuna è sostenuta da uno de' due rami di curva separati dal detto punto, sarà

$$\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\Pi\frac{ds}{dy}-\mathrm{E}\omega\left(\frac{d\sigma'}{ds}-1\right),$$

ovvero

$$\frac{\Pi}{g.\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\frac{\Pi}{\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{ds}{dy}-\left(\frac{d\sigma'}{ds}-1\right). \qquad (23)$$

Facendo come sopra $dx=ds$, le due equazioni precedenti diverranno

$$\frac{p}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\frac{d^2\sigma'}{dx^2}+\frac{p}{\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{dy}{dx}, \qquad (24)$$

$$\frac{\Pi}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\frac{\Pi}{\mathrm{E}\omega}\frac{dx}{dy}-\left(\frac{d\sigma'}{dx}-1\right) \qquad (25)$$

746. Applicando a queste equazioni le osservazioni fatte per quelle del n° 725, si potranno in loro vece scrivere le due equazioni seguenti:

$$\frac{p}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=\frac{d^2(\sigma'-\sigma)}{dx^2}, \qquad (26)$$

$$\frac{\Pi}{g\mathrm{E}\omega}\cdot\frac{d^2\sigma'}{dt^2}=-\frac{d(\sigma'-\sigma)}{dx}, \qquad (27)$$

la prima delle quali deve sussistere per tutti i punti della curva, l' altra per $x = a$.

747. Queste equazioni, essendo interamente simili alle altre (6) e (7) del n° 725, si potranno integrare all' istesso modo. Si avverta solo che la velocità V impressa al punto O verticalmente produce nel senso de' due elementi della curva la velocità $V.\frac{dy}{ds}$, ovvero (mettendo dx in vece di ds e per $\frac{dy}{dx}$ il valore che conviene ad $x = a$ preso dall' equazione (3) del n° 723) $V\frac{\Pi}{Q}$. Si dovrà dunque in quelle equazioni scrivere σ' e σ in luogo di y' e y, $E\omega$ per Q, e $V.\frac{\Pi}{Q}$ in vece di V.

748. Supponendo Π piccolissimo rispetto a pa, si avrà, in luogo dell'equazione (14) del n° 730,

$$\sigma' - \sigma = \frac{V\Pi^2}{pQ\left(1 - \frac{\Pi}{pa}\right)}\sqrt{\frac{p}{g.E\omega}} \qquad (28)$$

pel più grande valore delle vibrazioni del punto O. Sostituendo in questa formola il valore (11) di Q del n° 687, si ha presso a poco

$$\sigma' - \sigma = \frac{2V\Pi^2 b}{p^2a^2}\left(1 - \frac{\Pi}{2pa}\right)\sqrt{\frac{p}{g.E\omega}}. \qquad (29)$$

È naturale il supporre che ne' diversi ponti siasi fatto ω proporzionale alla tensione orizzontale il cui valore è $\frac{pa^2}{2b}$ (n° 684). Scrivendo perciò $\frac{pa^2}{b}$ in vece di $E\omega$, l'espressione precedente riuscirà proporzionale a

$$\frac{V\Pi^2 b\sqrt{b}}{p^2a^2}\left(1 - \frac{\Pi}{2pa}\right). \qquad (30)$$

Quindi il più gran valore delle vibrazioni longitudinali è presso a poco proporzionale a $\frac{b\sqrt{b}}{p^2a^3}$, e ne' ponti in cui il rapporto $\frac{b}{a}$ non varia, la grandezza delle escursioni decresce come la potenza $\frac{3}{2}$ di a.

749. La velocità colla quale i punti della catena si movono è data dall' equazione

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{2V\Pi^2}{pQa} \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos. \frac{(2i+1)\pi}{2a}\left(1 - \frac{\Pi}{pa}\right)\sqrt{\frac{g.E\omega}{p}}\, t,$$

la quale si ottiene dall' equazione del n° 731 facendovi le sostituzioni indicate al n° 747. Queste velocità son dunque proporzionali a $\frac{V\Pi^2}{pQa}$, ovvero (mettendo per Q il valore (11) del n° 684)

$$\frac{V\Pi^2 b}{p^2a^3}\left(1 - \frac{3\Pi}{2pa}\right), \qquad (31)$$

e ne' diversi ponti son presso a poco proporzionali a $\frac{b}{p^2a^3}$. Supponendo $\frac{b}{a}$ costante, queste velocità diminuiscono come il quadrato della corda.

750. Bisogna notare che la durata delle oscillazioni verticali dipendenti dalla flessibilità delle catene, poste tutte le altre cose eguali, è proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{Q}}$, e quella delle vibrazioni longitudinali dipendenti dall'elasticità della materia è proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{E\omega}}$. Nella maggior parte de' casi le dimensioni delle catene sono regolate in modo che il valore $E\omega$ risulti più di mille volte maggiore di Q; le vibrazioni longitudinali son

dunque assai più rapide delle oscillazioni verticali. Bisogna parimenti notare che le oscillazioni verticali sono indipendenti dalla materia, mentre le vibrazioni longitudinali dipendono dalla costante E. E siccome questa costante moltiplicata per la sezione ω ha pel legname un valore più piccolo che pel ferro (n° 721), gli spostamenti dalla situazione di equilibrio sarebbero più grandi in un ponte a catene di legname, il quale perciò colla stessa resistenza presenterebbe meno rigidezza di un ponte a catene di ferro.

751. Differenziando rispetto ad x l' equazione (11) del n° 728 dopo avervi fatte le sostituzioni indicate nel n° 747 e dopo avervi messi per sen.$2ma$, sen.ma, cos.ma i valori riportati nel n° 729, si avrà il valore di $\frac{ds'}{dx}-1$, che rappresenta la quantità di cui l'elemento della curva situata al punto che ha per ascissa x, si allunga per effetto dell' urto. Questa quantità varia col tempo; il suo valor massimo si ha mettendo $\frac{(2i+1)\pi}{2a}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\sqrt{\frac{gE\omega}{p}}\,t=\frac{(2i+1)\pi}{2}$. Si avrà dunque, sostituendovi il valore di $\frac{ds}{dx}-1$ dato dalla formola del n° 744,

$$\frac{ds'}{dx}-1=\frac{1}{2E\omega.Q}\left\{2Q^2+pa(2\Pi+pa)-2p(\Pi+pa)x+p^2x^2\right\}$$

$$+\frac{4V\Pi}{Q}\sqrt{\frac{p}{gE\omega}}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{\text{sen.}\frac{(2i+1)\pi}{2}\cdot\frac{\Pi}{pa}\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)\frac{x}{a}}{\text{sen.}(2i+1)\pi\cdot\frac{\Pi}{pa}+(2i+1)\pi\left(1-\frac{\Pi}{pa}\right)}.(-1)^i,\quad(52$$

di cui il primo termine rappresenta l' allungamento proveniente dalle cariche e l' altro dall' urto. Si osservi che

nella supposizione di $\frac{\Pi}{pa}$ piccolissimo non si possono fare sulla quantità sotto il segno $\mathcal{S}$ le riduzioni indicate nel n° 730, giacchè nel denominatore essendovi un fattore di meno in i, i termini della serie decrescono meno rapidamente, e non è più permesso trascurare i termini su' quali le dette riduzioni influiscono che sono quelli corrispondenti ad i molto grande. A misura però che $\frac{\Pi}{pa}$ si avvicina ad esser uguale a zero, quella quantità si avvicina ad un limite espresso da

$$\frac{2V\Pi^2}{Q.pa}\sqrt{\frac{p}{g.E\omega}}\sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i\cos.\frac{(2i+1)\,\Pi}{2}.\frac{x}{a}$$

ovvero, mettendovi il valore di Q del n° 687,

$$\frac{4V\Pi^2 b}{p^2a^3}\left(1-\frac{3\Pi}{2pa}\right)\sqrt{\frac{p}{g.E\omega}}\sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2}\frac{x}{a}. \quad (33)$$

E facendo come al n° 748 $E\omega$ proporzionale a $\frac{pa^2}{2b}$, il coefficiente della serie è presso a poco proporzionale a

$$\frac{V\Pi^2 b\sqrt{b}}{p^2a^4}. \quad (34)$$

Perciò nella ipotesi di $\frac{\Pi}{pa}$ piccolissimo, gli allungamenti di cui si tratta sono presso a poco proporzionali a $\frac{b\sqrt{b}}{p^2a^4}$. Se $\frac{b}{a}$ è costante, questi allungamenti decrescono come la potenza $\frac{5}{2}$ della corda.

751. Questi risultamenti si accordano con quelli ricavati da' n^i 722 e seg. per stabilire, che ne' ponti so-

spesi non si dee temere di aumentar gli effetti delle scosse aumentando la corda; questi anzi diminuiscono al crescer dell' ampiezza dell' arco, ed ancor più rapidamente se la corda si fa crescere in maggior proporzione della freccia.

Dell' azione del vento su' ponti sospesi e delle oscillazioni orizzontali prodotte nelle catene.

752. Le nozioni ancora imperfette sull' urto e la resistenza de' fluidi non permettono di calcolare con esattezza l' azione del vento su' ponti sospesi. Ed essendo inoltre impossibile, privi de' lumi delle osservazioni e delle sperienze, sottoporre a considerazioni esatte l' azione tumultuaria de' colpi di vento, ci limiteremo a supporre un vento uniforme, orizzontale e perpendicolare all' asse del ponte.

Sia un filo perfettamente flessibile e inestensibile AOB (Fig. 21 tav. agg.) attaccato ai due punti fissi A e B, e carico del peso p sopra ogni unità di lunghezza dell' intervallo AB. Sotto l' azione di questa carica esso avrà tutti i punti in uno stesso piano verticale, e la curva di equilibrio sarà la parabola ordinaria (n° 682). Allorchè è investito dal vento in una direzione orizzontale, perpendicolare al piano nel quale è contenuto, tutti i suoi punti si eleveranno un poco, uscendo da questo piano in modo che AO'B ed $ao'b$ ne saranno le projezioni verticale e orizzontale. Si conoscerà il nuovo stato di equilibrio del filo dietro il principio conosciuto che le projezioni sopra tre piani ortogonali di un sistema flessibile in equilibrio debbono esser ciascuna in equilibrio;

alle quali condizioni si unirà l' altra, che la lunghezza del filo non ha variato.

L' azione del vento può esser assimilata a quella di forze orizzontali uniformemente ripartite sopra ab, il cui valore per l' unità di lunghezza sia q. Questa quantità, come si sa, dev' esser proporzionale al quadrato della velocità dell' aria, alla sua densità e all' area della superficie percossa. Trovandosi tutti i punti animati da forze verticali e orizzontali uniformemente ripartite su di AB, aventi per valore sull' unità di lunghezza rispettivamente p e q, si potranno considerare come animati da forze inclinate e parallele pure uniformemente distribuite su di AB, e il cui valore per l' unità di lunghezza è $\sqrt{p^2+q^2}$. La curva dunque non cesserà di esser piana, solamente si troverà contenuta in un piano formante colla verticale un angolo che ha per seno $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Facendo $AC = 2a$, $CO = b$, $CO' = b_1$, $oo' = b_2$, e chiamando Q''' la tensione orizzontale, si avrà

$$b_1 = b\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad b_2 = b\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad Q''' = \frac{a^2\sqrt{p^2+q^2}}{2b}; \quad (1)$$

equazioni per mezzo delle quali si determina il nuovo stato del filo.

Dunque, poste le altre cose eguali, b_1 e b_2 sono proporzionali a b, e l' aumento della tensione orizzontale è proporzionale ad $\frac{a^2}{b}$.

753. Se q è piccolissimo rispetto a p, le equazioni precedenti si riducono presso a poco a

$$b_1 = b\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right),\ b_2 = b\frac{q}{p}\left(1-\frac{q^2}{2p^2}\right),\ Q''' = \frac{pa^2}{2b}\left(1+\frac{q^2}{2p^2}\right); \quad (2)$$

d' onde si ricava che lo spostamento verticale e l' au-

mento della tensione sono estremamente piccoli rispetto allo spostamento orizzontale.

754. Allorchè il piano delle catene è stato inclinato per l' azione del vento, questo oscilla intorno alla linea AB a guisa di un pendolo; e la durata delle oscillazioni, prescindendo dalla resistenza dell' aria, è proporzionale a $\sqrt{b}$, e indipendente dalla lunghezza a.

755. L' azione del vento produce sulla faccia laterale del palco una pressione orizzontale che si trova uniformemente ripartita su tutta la sua lunghezza. Se questo cedesse sotto l'azione di queste forze, potrebbe esser assimilato a un solido incastrato alle due estremità e caricato di pesi uniformemente distribuiti sulla sua lunghezza, e lo spostamento orizzontale del punto medio, chiamando l la larghezza orizzontale del palco, sarebbe proporzionale ad $\frac{a^3}{l}$ (n° 90). Ora dalle osservazioni su' ponti costrutti risulta che anche i palchi più leggieri non piegano sotto l' azione del vento il più forte; si può dunque riguardar come nullo o insensibile l' incurvamento nel senso orizzontale del palco per l' azione del vento.

756. Il moto intanto che il vento imprime alle catene si trasmette al tavolato per mezzo delle aste di sospensione, e attesochè questo non s' incurva sensibilmente, deve sollevarsi un poco per succedere lo spostamento delle catene. Non potendo dunque le catene essere spostate senza che sia vinta la resistenza prodotta dal peso del tavolato, si vede che le ondulazioni di cui si tratta non possono prender una grande estensione, e debbono esser contenute fra limiti ristrettisimi, come l' osservazione ha confermato.

Dell' equilibrio de' ponti sospesi, avendo riguardo alla differenza di carica proveniente dal peso delle catene e delle aste di sospensione.

757. In tutte le ricerche precedenti abbiamo supposta la carica uniformemente distribuita sopra una linea orizzontale. Nel fatto poi il solo peso del tavolato è quello che si può considerare come uniformemente ripartito sulla orizzontale, giacchè il peso proveniente dalle catene e dalle aste di sospensione varia in modo che delle parti eguali di questa linea si trovano tanto più caricate quanto più distanti sono dal mezzo. Ma questa ipotesi, oltre al pregio della semplicità, pochissimo si scosta dal vero per le ragioni addotte nel n° 681, sicchè i risultamenti precedenti possono esser ammessi con confidenza. È però utile di conoscere il piccolo cangiamento che riceverà la figura della catena, che si era supposta parabolica, allorchè la costruzione è abbandonata a sè stessa.

758. L' equazione differenziale di secondo ordine che esprime l' equilibrio in un filo flessibile caricato di forze verticali è

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{Q}, \qquad (1)$$

essendo p dato in funzione di x, e Q una costante rappresentante la tensione orizzontale.

La funzione p è composta di tre parti, una costante, relativa al peso del palco e che forma la più gran parte del valore; le altre due variabili, dovute rispettivamente al peso delle aste di sospensione e al peso delle catene.

Si chiami ϖ il peso costante del tavolato per l'unità di lunghezza. Sapendosi che la curva deve pochissimo

differire da una parabola, per valutare le altre due parti della funzione p supporremo la curva esser effettivamente una parabola. Sia dunque AOB (Fig. 22, tav. agg.) la parabola di cui si tratta, la quale, contandosi le coordinate orizzontali e verticali dal punto O, avrà per equazione

$$y = \frac{bx^2}{a^2}. \qquad (2)$$

Sia τ il peso totale delle aste di sospensione situate nelle metà della curva, ossia nell' intervallo OP. Queste aste saranno delle ordinate come pm, poste a date distanze. Ma è chiaro che non si cambierebbe sensibilmente la figura della curva se senza far variare il peso totale si rendessero più numerose, situandole vicinissime fra loro. Si può dunque riguardare la carica proveniente dalle aste di sospensione come distribuita su tutti i punti della retta OP; il peso in un punto p sarà proporzionale all' ordinata mp e potrà esser rappresentato per Ax^2. Ora il peso corrispondente all' elemento dx essendo Ax^2dx, si deve avere $A\int_0^a x^2dx = \tau$, d' onde $A = \frac{3\tau}{a^3}$; e perciò la funzione di x relativa al peso delle aste sarà $\frac{3\tau x^3}{a^3}$.

Chiamando σ il peso dell' unità di lunghezza della catena, il peso di un elemento sarà $\sigma.dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, ovvero $\sigma.dx\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}$; e quindi la porzione di detto peso relativa all' unità di lunghezza della x, ossia la parte della funzione p sarà $\sigma\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}$.

759. Si avrà dunque

$$p = \varpi + \tau\frac{3x^2}{a^3} + \sigma\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}. \qquad (3)$$

Sostituendo questa espressione in (1), coll' avvertenza di cambiare il segno del secondo membro perchè si contano le ordinate da O verso C, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{Q}\left(\varpi + \tau\frac{3x^2}{a^3} + \sigma\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4}}\right).$$

Sviluppando il radicale, e integrando due volte, si ha l' equazione della curva. Non vi è bisogno di costanti, perchè al punto O in cui è $x = 0$ si ha $\frac{dy}{dx} = 0, y = 0$.

760. Nelle applicazioni possiamo limitarci ai soli due primi termini della serie data dal radicale, e si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q}\left[(\varpi+\sigma)x+\left(\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}\right)\frac{x^3}{a^3}\right], \qquad (4)$$

$$y = \frac{1}{2Q}\left[(\varpi+\sigma)x^2+\left(\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}\right)\frac{x^4}{2a^3}\right]. \qquad (5)$$

Chiamando b' l' ordinata AP o la freccia Co, si ha

$$b' = \frac{1}{2Q}\left[(\varpi+\sigma)a^2+\frac{\tau a}{2}+\frac{\sigma b^2}{3}\right], \qquad (6)$$

da cui si ricava

$$Q = \frac{1}{2b'}\left[(\varpi+\sigma)a^2+\frac{\tau a}{2}+\frac{\sigma b^2}{3}\right]. \qquad (7)$$

Chiamando α l' angolo fatto dalla curva al punto A coll' orizzonte, dall' equazione (4) si avrà

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{Q}\left[(\varpi+\sigma)a+\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}\right],$$

ovvero

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{2b'}{a}\cdot\frac{(\varpi+\sigma)a+\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}}{(\varpi+\sigma)a+\frac{\tau}{2}+\frac{\sigma b^2}{3a}}. \qquad (8)$$

*

761. Chiamando c' la semilunghezza della curva, si ha con molta approsimazione

$$c' = \int_0^a dx \left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right);$$

e quindi

$$c' = a + \frac{1}{2Q^2}\left[(\varpi+\sigma)^2\frac{a^3}{3} + 2(\varpi+\sigma)\left(\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}\right)\frac{a^2}{5} + \left(\tau+\frac{2\sigma b^2}{3a}\right)^2 a\right].$$

Sostituendo in questa espressione il valore di Q, e facendo la divisione si ha presso a poco

$$c' = a\left\{1 + \frac{2b'^2}{3a^2}\left(1 + \frac{3\tau a + 2\sigma b^2}{15(\varpi+\sigma)a^2}\right)\right\} \qquad (9)$$

762. Se si suppone $b' = b$, si avrà

$$c' = a\left\{1 + \frac{2b^2}{3a^2}\left(1 + \frac{3\tau a + 2\sigma b^2}{15(\varpi+\sigma)a^2}\right)\right\};$$

nel qual caso la lunghezza della catena è maggiore di quella che risulta dalla figura parabolica, in cui si ha (n° 683) $c = a\left(1 + \frac{2b^2}{3a^2}\right)$.

Ma se si è calcolata la lunghezza della catena nella supposizione della curva parabolica ammessa nelle precedenti ricerche, allorchè la costruzione sarà abbandonata a sè stessa, questa figura si modificherà elevandosi il punto medio del palco e discendendo le parti verso le estremità. L' elevazione del mezzo del palco si avrà mettendo

$$1 + \frac{2b^2}{3a^2} = 1 + \frac{2b'^2}{3a^2}\left(1 + \frac{3\tau a + 2\sigma b^2}{15(\varpi+\sigma)a^2}\right);$$

da cui si ricava presso a poco

$$b' = b\left(1 - \frac{3\tau a + 2\sigma b^2}{30(\varpi+\sigma)a^2}\right). \qquad (10)$$

763. L' equazione (2) appartenente alla parabola, e l' equazione (5) della curva modificata sieno per brevità rappresentate rispettivamente per

$$y = Ax^2,$$

$$y = Bx^2 + Cx^4.$$

Prendendo per origine delle coordinate il punto C(Fig. 23, tav. agg.) medio dell' orizzontale che passa pel punto fisso A, le equazioni stesse diveranno

$$y = A(a^2 - x^2),$$

$$y = B(a^2 - x^2) + C(a^4 - x^4).$$

I punti d' incontro delle due curve si ottengono facendo

$$(A - B)(a^2 - x^2) - C(a^4 - x^4) = 0$$

da cui si ricava $x = \pm a$, $x = \pm \sqrt{\frac{A-B}{C} - a^2}$. La massima differenza fra le ordinate delle due curve corrisponde alle ascisse $x = 0$, $x = \pm \sqrt{\frac{A-B}{2C}}$.

Potendo considerare come retta la porzione di catena compresa tra il punto di attacco e la prima asta di sospensione, nel disegnare la curva si otterrà maggiore esattezza supponendo che a sia la distanza tra il punto medio C e la prima asta. Dovendo allora la curva modificata passare pel punto fisso R basterà spostarla parallelamente a se stessa della quantità R'R. Chiamando α e α' gli angoli RAN, R'AN che le tangenti alle due curve nel punto A fanno coll' orizzonte, e chiamando h la distanza AN sarà $R'R = h\,(\text{tang.}\,\alpha' - \text{tang.}\,\alpha) = 2ah(A - B + C\alpha^2)$. La linea O''R rappresenterà esattamente la figura della curva. Calcolando la lunghezza delle aste di sospensione sopra questa curva, non si

avrà a temere dopo la costruzione alcun cambiamento, salvo quelli prodotti dall' allungamento delle catene e dalle variazioni di temperatura. Ma queste modificazioni affettano la curva di una maniera regolare e progressiva dalle estremità sino al mezzo, facendo solamente variare la lunghezza delle ordinate che son sempre rappresentate dall' equazione (5).

Limite della corda degli archi.

764. Supponiamo il peso distribuito uniformemente sopra una linea orizzontale. Rappresenti ϖ il peso del palco e delle aste di sospensione; σ il peso dell' unità di volume e ω la sezione trasversale delle catene. Mettendo nel valore (6) di T del n° 684 il valore di tang.α e di Q, il più grande valore di T nelle catene sarà espresso da $(\varpi+\sigma\omega)\frac{a\sqrt{a+4b^2}}{2b}$. Quindi per determinare la sezione delle catene dovrà aversi (n° 474)

$$R' = \frac{\varpi+\sigma\omega}{\omega} \cdot \frac{a\sqrt{a^2+4b^2}}{2b},$$

d' onde

$$\omega = \frac{\varpi a\sqrt{a^2+4b^2}}{R'2b-\sigma a\sqrt{a^2+4b^2}}. \qquad (1)$$

Quando si è liberi di dare ai sostegni qualunque altezza, si vede che per quanto grande sia a, si potrà sempre dare a b un valore tale che sia $R'.2b > \sigma a\sqrt{a^2+4b^2}$; per la qual cosa la corda degli archi si potrà portare a quella grandezza che si vuole.

765. Se però il rapporto $\frac{b}{a}$ deve aver un valore de-

rminato, facendo nell' equazione (1) $b = ka$, si ha

$$\omega = \frac{\varpi a\sqrt{1+4k^2}}{R'.2k - \sigma a\sqrt{1+4k^2}},$$

il limite de' valori di a sarà

$$a = \frac{R'}{\sigma} \cdot \frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}. \qquad (2)$$

Dando ad R' e a σ i valori che convengono al ferro da fucina, cioè $R' = 7\,000\,000$, $\sigma = 7788^{ch}$, e supponendo $k = \frac{2}{11}$, si trova che la corda di un ponte a catene di ferro dev' esser minore di 460^m. Per un ponte a catene di legname di quercia, facendo $R' = 800\,000$, $\sigma = 857^{ch.}$, risulta la corda $2a$ minore di 480^m.

Nota alla pag. 465.

Nel rifare i calcoli relativi al n° 610 si è trovato erroneo
valore di α, dovendo esser $\alpha = a\sqrt{0,35568} = 0,5964\,a$; sicc
la distanza ove bisogna mettere il peso 2Π per produrre la ma
sima flessione nel punto di sospensione non dev'esser già un po
più grande del terzo della distanza AM, come si dice nel test
ma i $\frac{6}{10}$ circa di detta distanza.

Fig. 1.

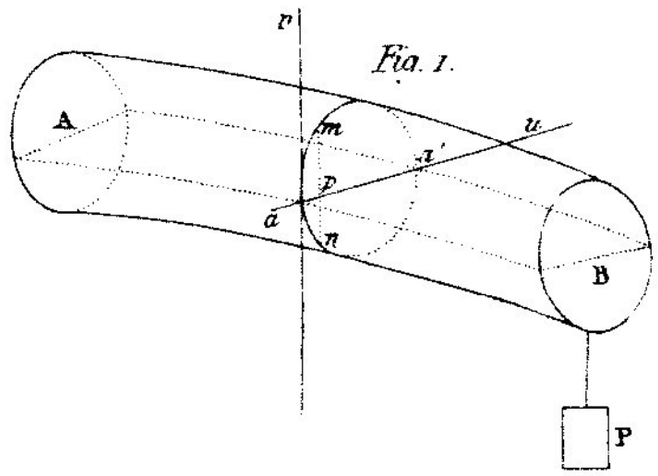

Fig. 2.

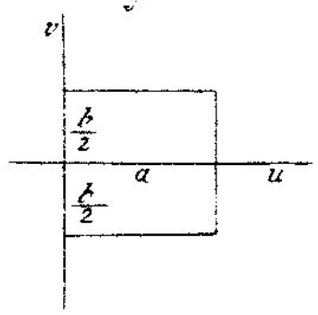

Fig. 3.

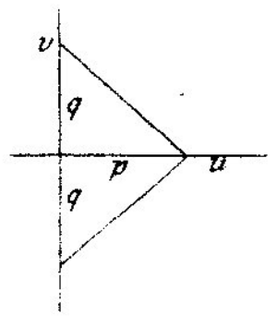

Fig. 4.

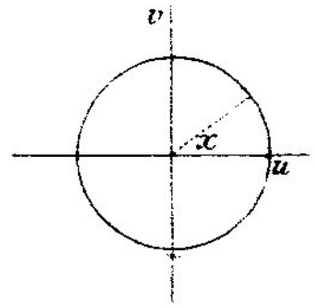

Fig. 5.

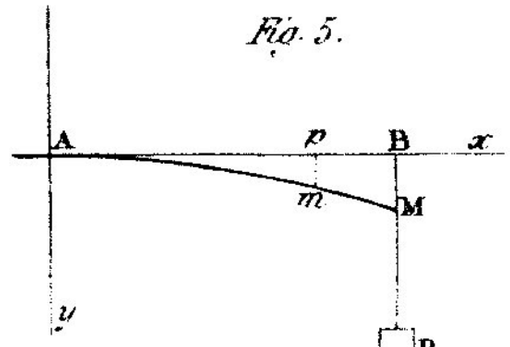

Fig. 6.

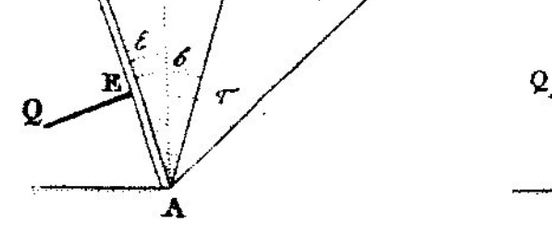

Fig. 7.

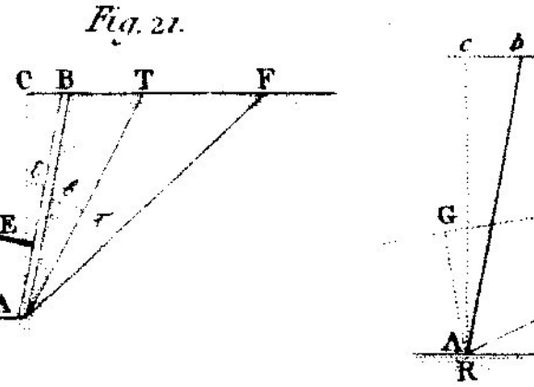

Fig. 8.



Fig. 9.

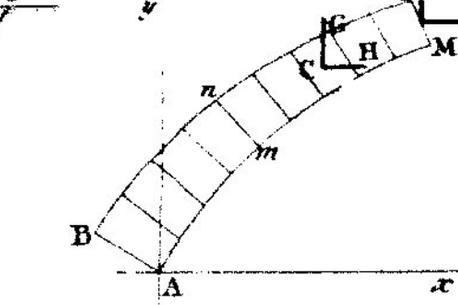

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 25.

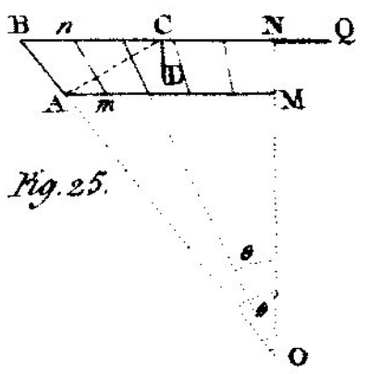

Fig. 26.

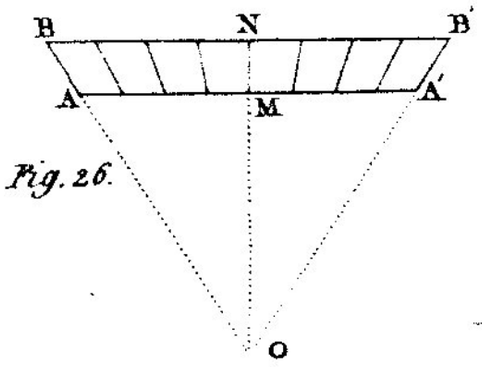

Fig. 27.

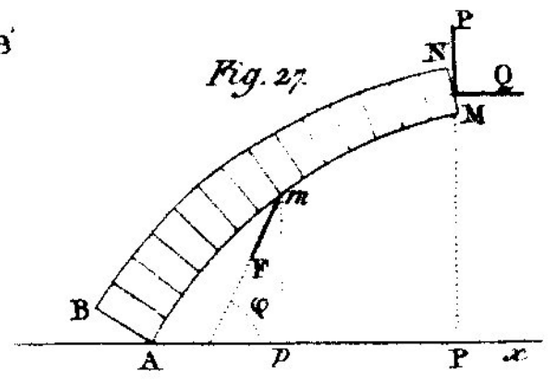

Fig. 28.

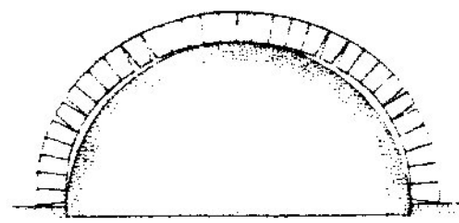

Fig. 29.

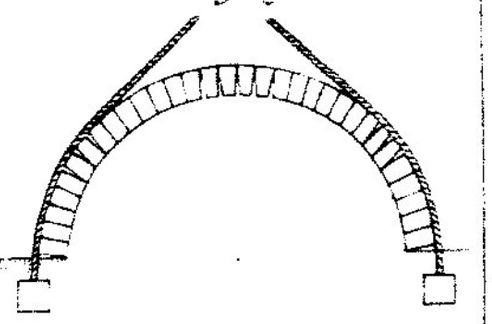

Fig. 30.

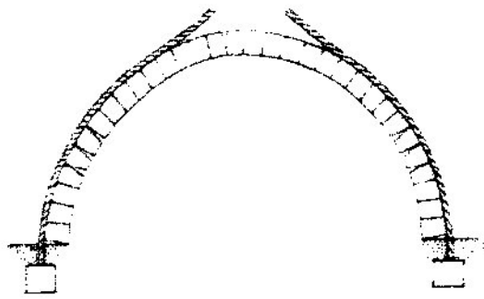

Fig. 31.

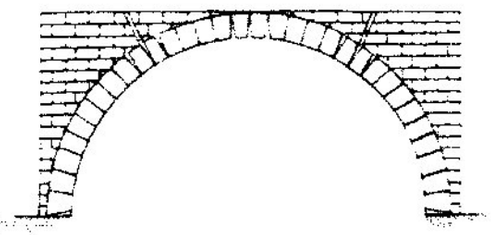

Fig. 32.

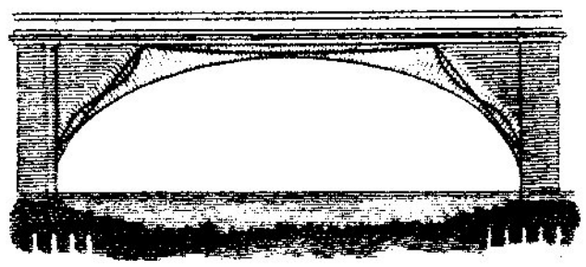

Fig. 33.

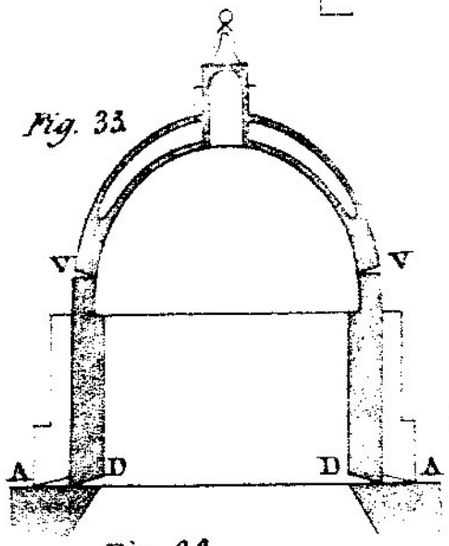

Fig. 34.

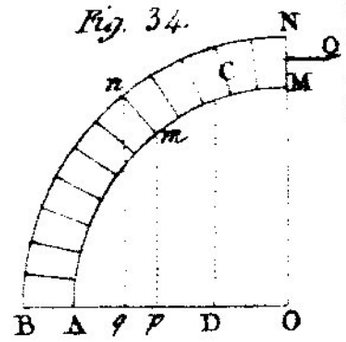

Fig. 35.

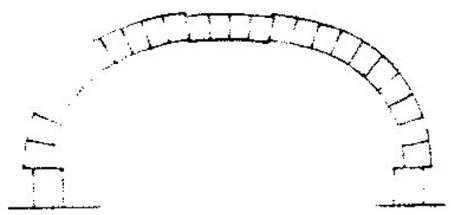

Fig. 36.

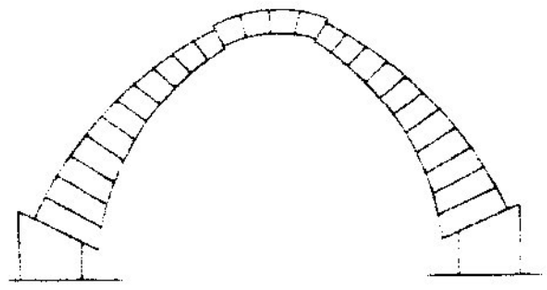

Fig. 37.

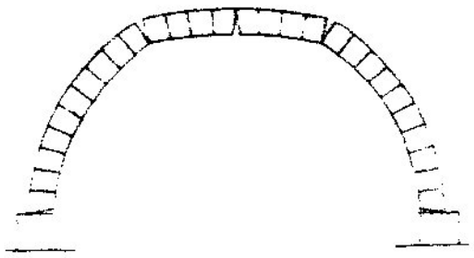

Fig. 38.

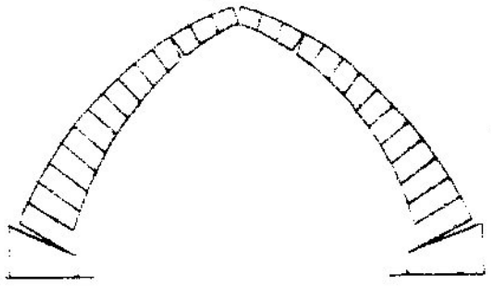

Fig. 39.

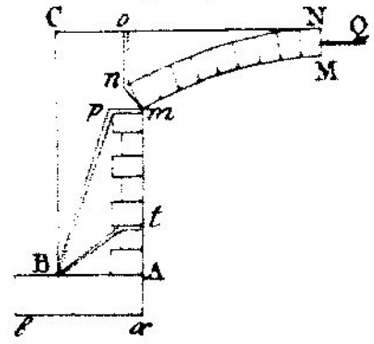

Fig. 40.

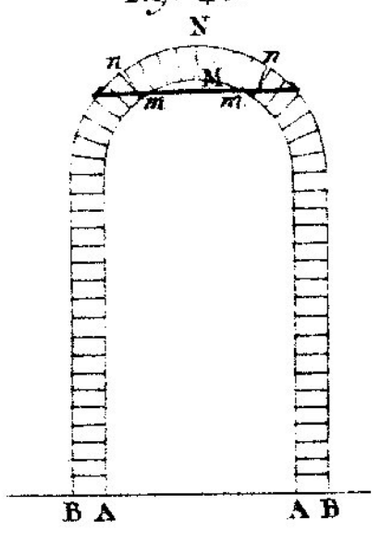

Fig. 41.

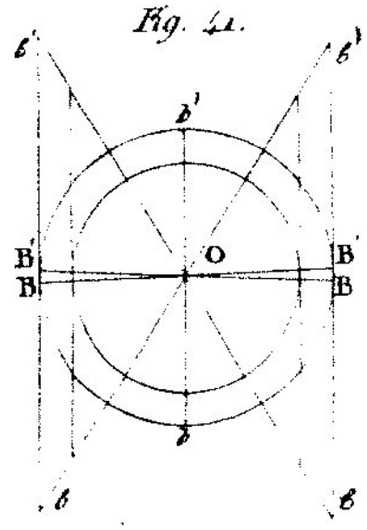

Fig. 42.

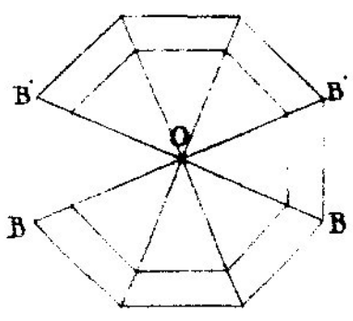

Fig. 43.

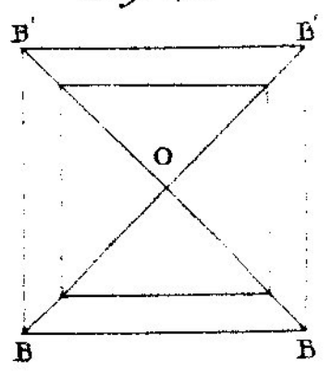

Fig. 44.

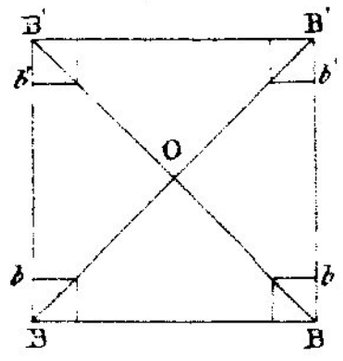

Fig. 45.

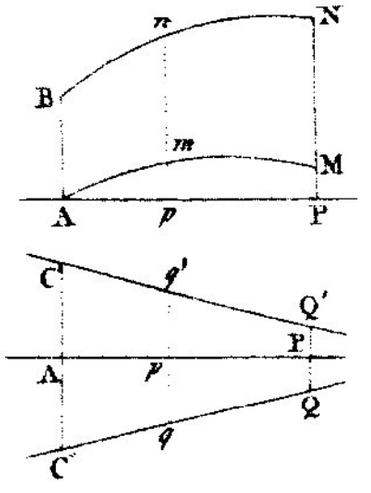

Fig. 46.

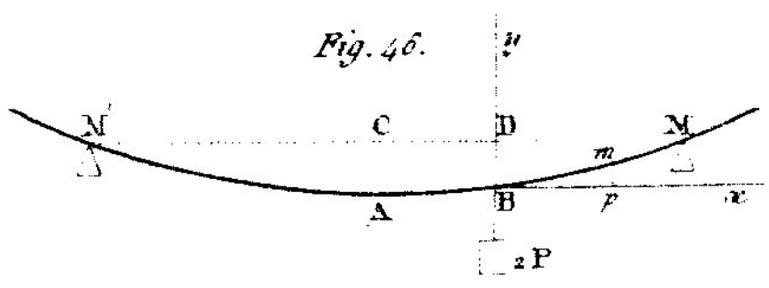

Fig. 47.

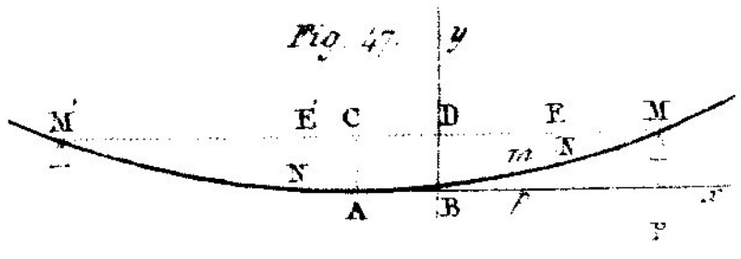

Fig. 48.

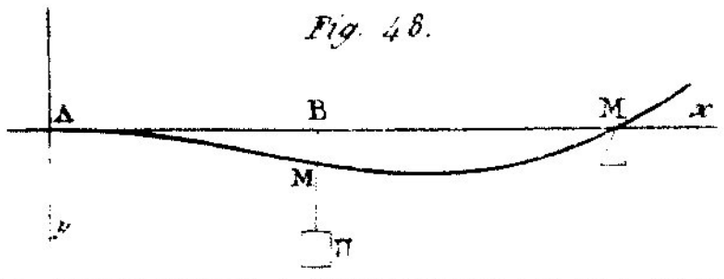

Fig. 49.

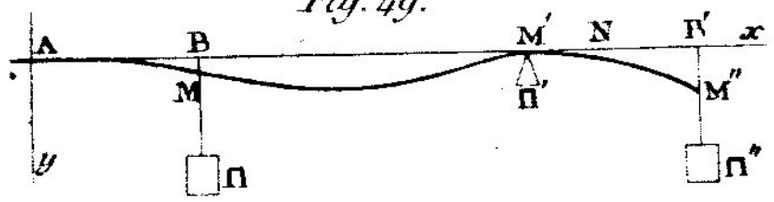

Fig. 50.

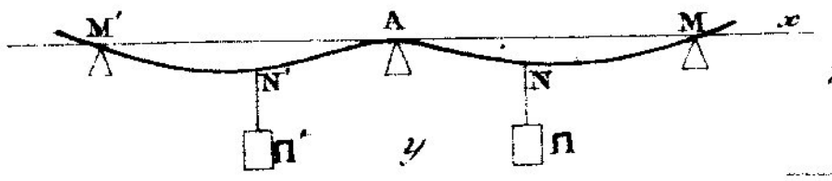

Fig. 51.

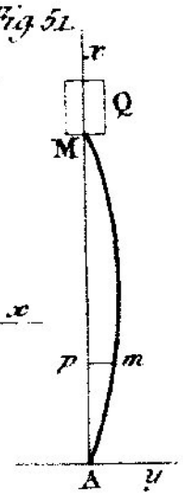

Fig. 52.

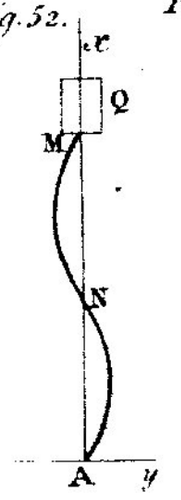

Fig. 53.

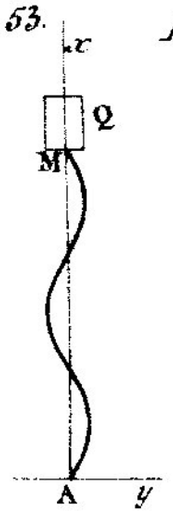

Fig. 54.



Fig. 55.

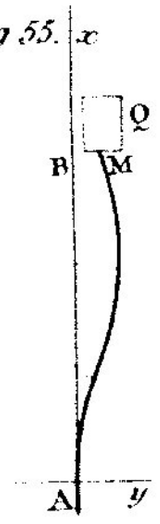

Fig. 56.

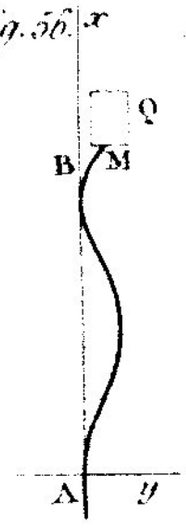

Fig. 57.

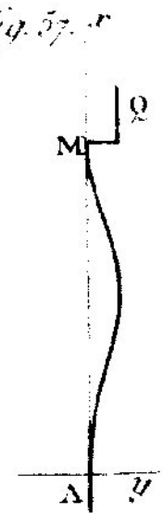

Fig. 58.

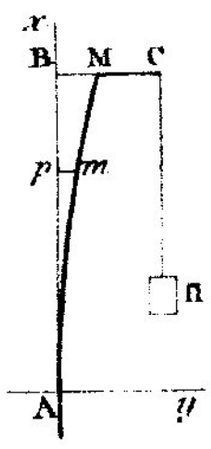

Fig. 59.

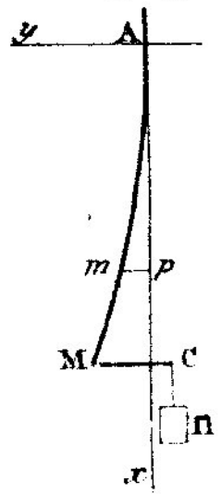

Fig. 60.

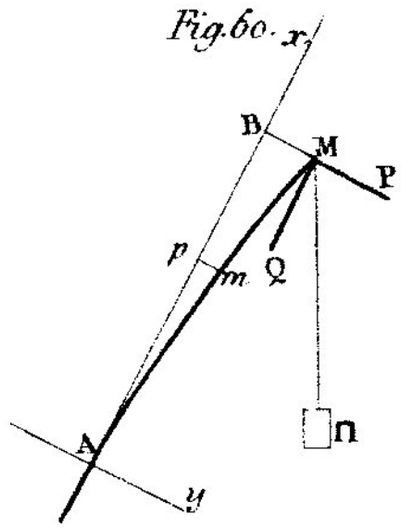

Fig. 61.

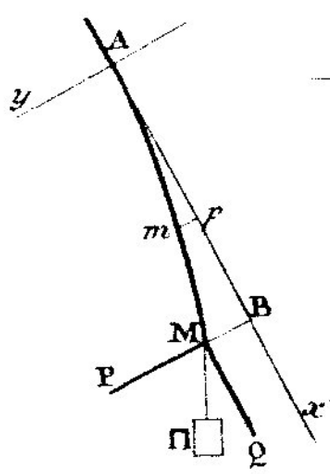

Fig. 62.



Fig. 63.

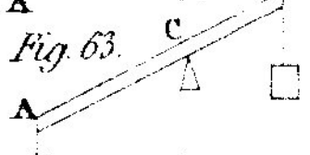

Fig. 64.

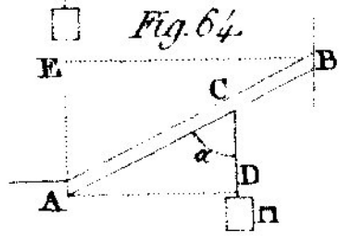

Fig. 65.

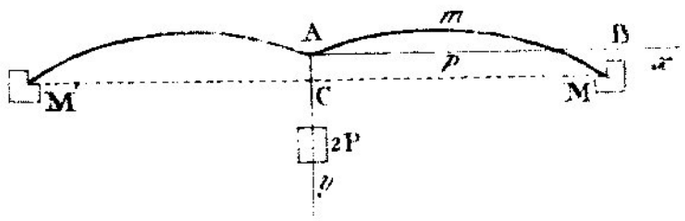

Fig. 66.

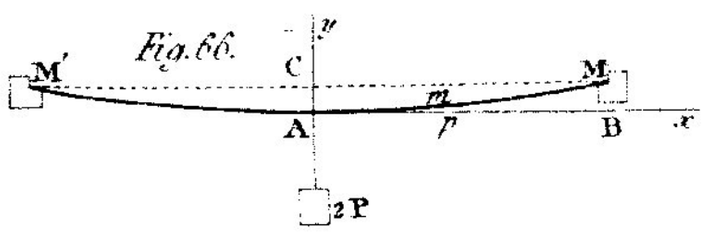

Fig. 67.

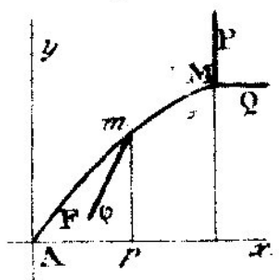

Fig. 68.

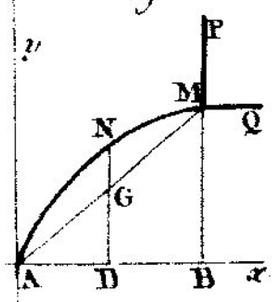

Fig. 69.

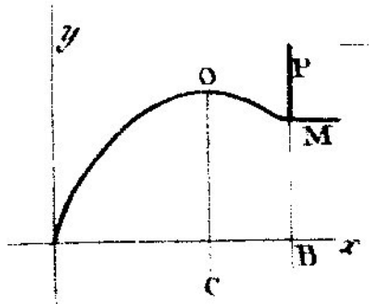

Fig. 70.

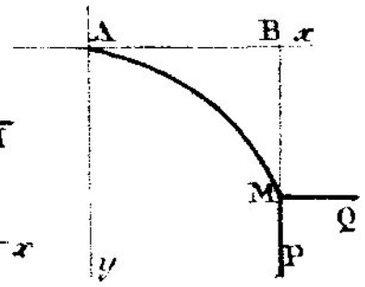

Fig. 71.

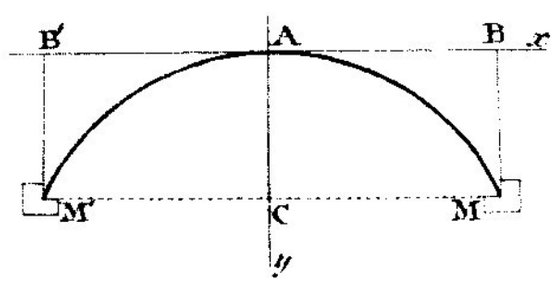

Fig. 72.

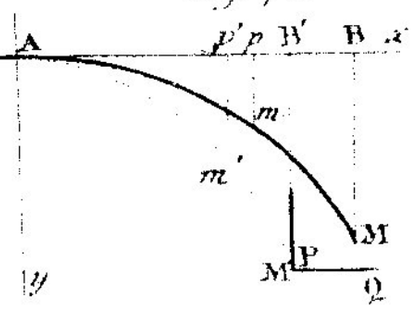

Fig. 73.

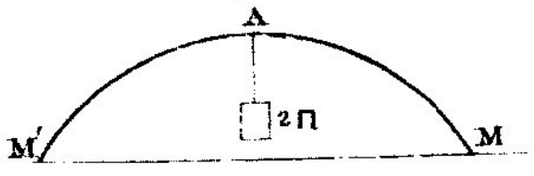

Fig. 74.

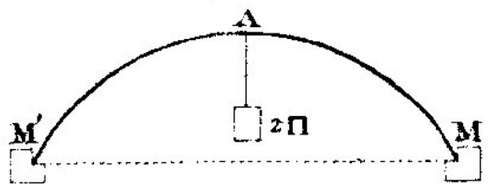

Fig. 75.

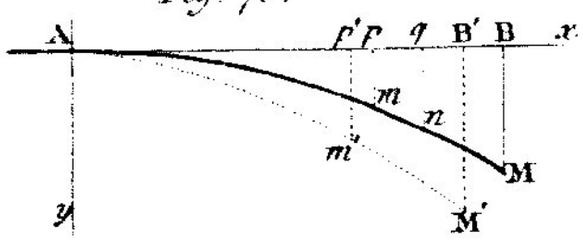

Fig. 76.

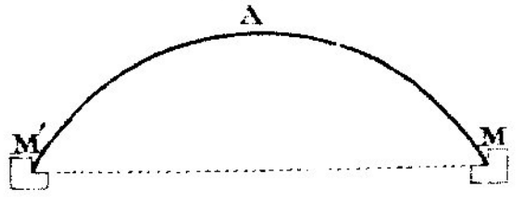

Fig. 77.



Fig. 78.



Fig. 79.

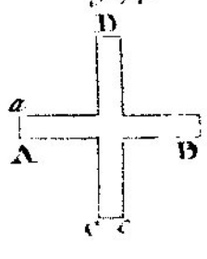

Fig. 80.

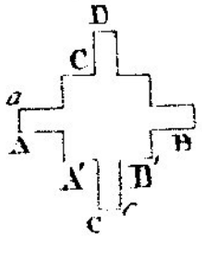

Fig. 81.

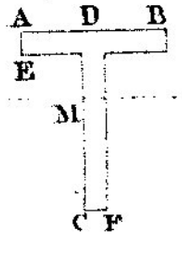

Fig. 82.

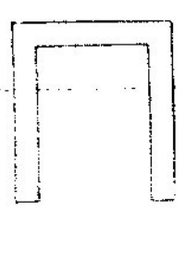

Fig. 83.

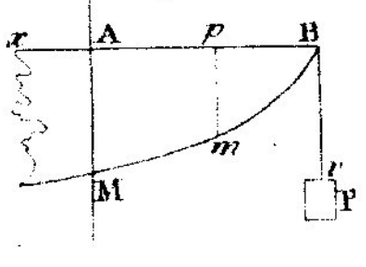

Fig. 84.

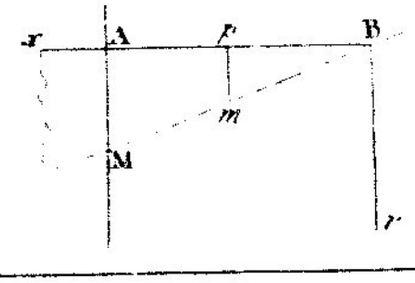

Fig. 85.

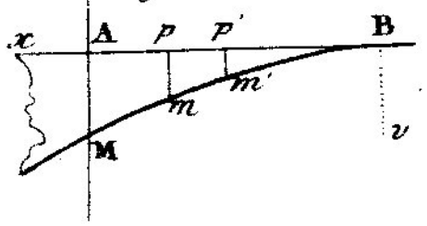

Fig. 86.

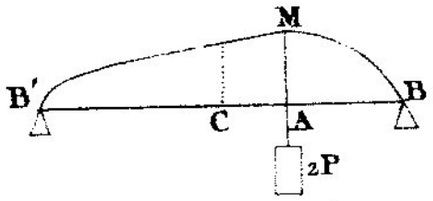

Fig. 87.

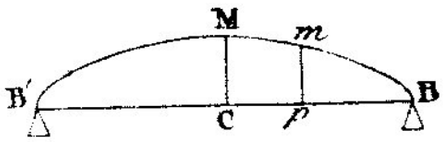

Fig. 88.

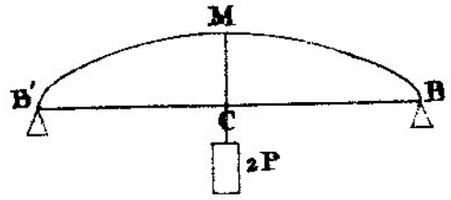

Fig. 89.

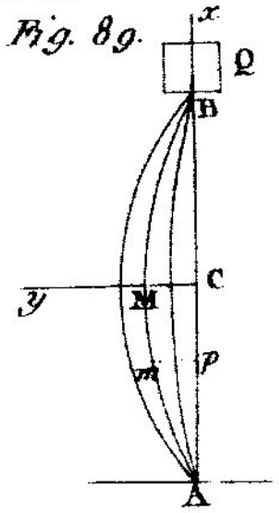

Fig 90.



Fig. 91.



Fig. 92.

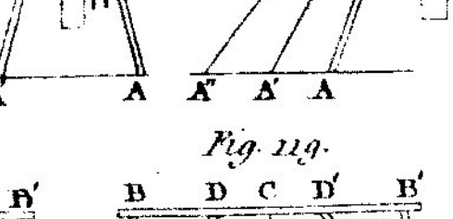

Fig. 93.

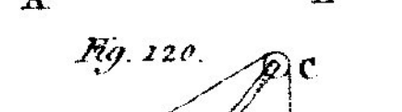

Fig. 94.

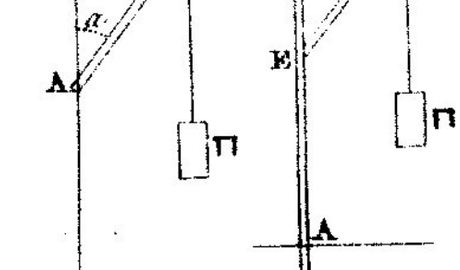

Fig. 95.

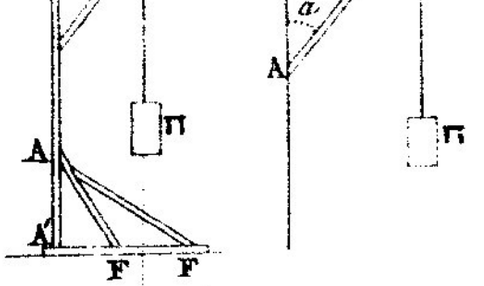

Fig. 96.

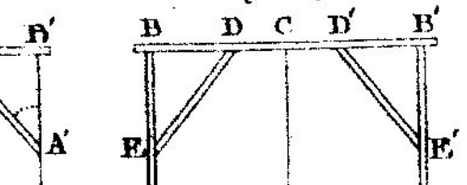

Fig. 97.

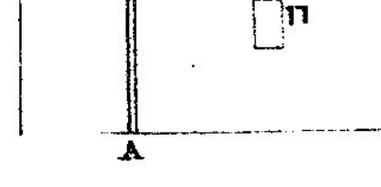

Fig. 98.



Fig. 99.

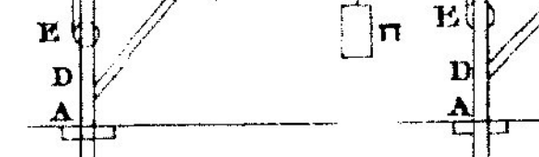

Fig. 100.



Fig. 101.

Fig. 102.

Fig. 103.

Fig. 104.

Fig. 105.

Fig. 106.

Fig. 107.

Fig. 108.

Fig. 109.

Fig. 110.

Fig. 111.

Fig. 112.

Fig. 112.

Fig. 113.

Fig. 114.

Fig. 115.

Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 118.

Fig. 119.

Fig. 120.

Fig. 121.

Fig. 122.

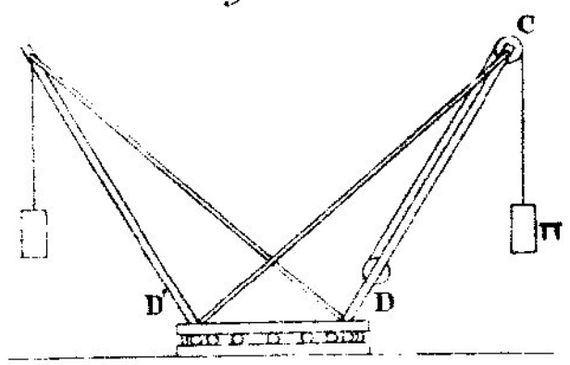

Fig. 123.

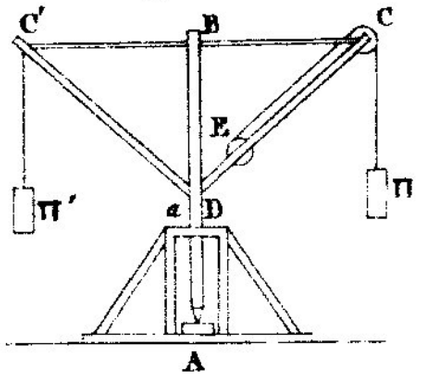

Fig. 124.

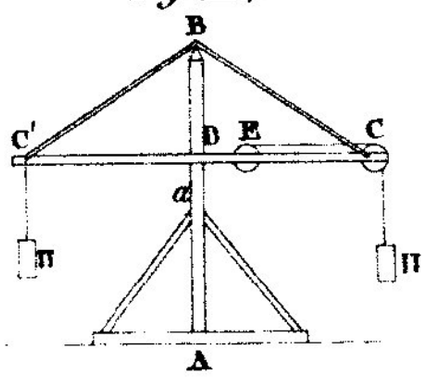

Fig. 125.

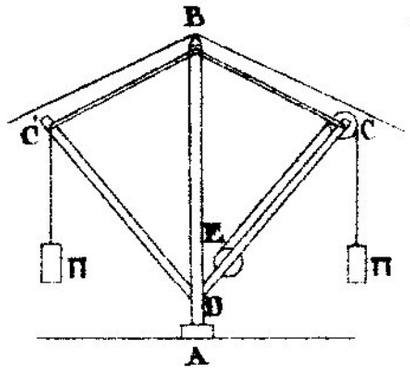

Fig. 126.

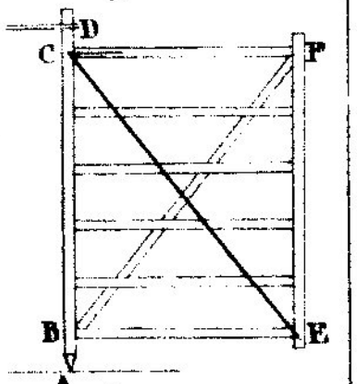

Fig. 127.

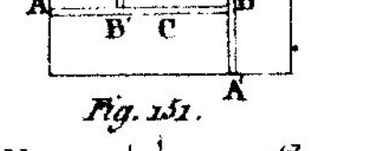

Fig. 128.

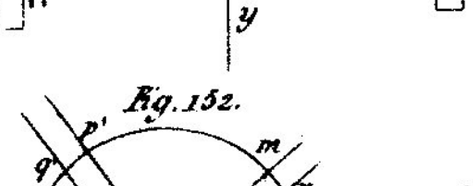

Fig. 129.

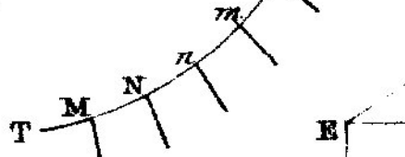

Fig. 130.



Fig. 131.

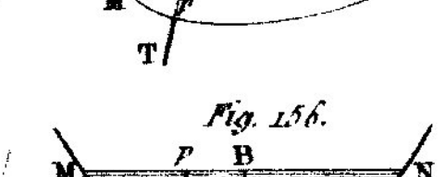

Fig. 132.

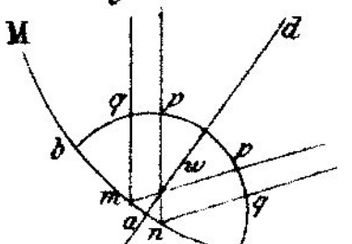

Fig. 133.

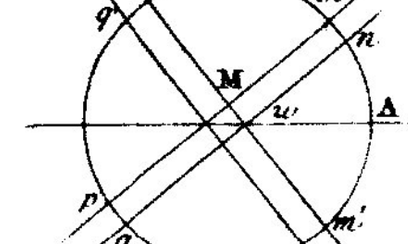

Fig. 134.

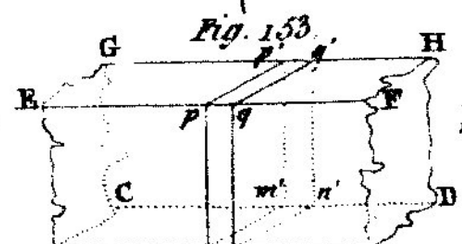

Fig. 135.

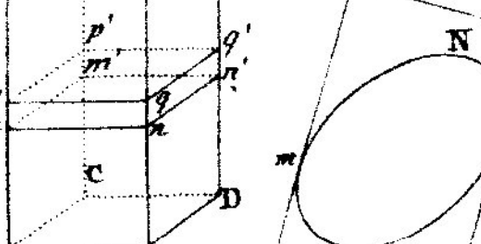

Fig. 136.

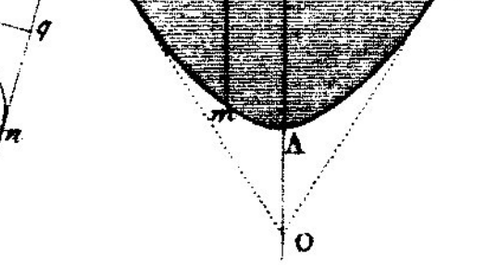

Fig. 137.

Fig. 138.

Fig. 139.

Fig. 140.

Fig. 141.

Fig. 142.

Fig. 143.

Fig. 144.

Fig. 145.

Fig. 146.

Fig. 147.

Fig. 148.

Fig. 149.

Fig. 150.

Fig. 151.

Fig. 152.

Fig. 153.

Fig. 154.

Fig. 155.

Fig. 156.

Fig. 1



Fig. 2.



Fig. 3.

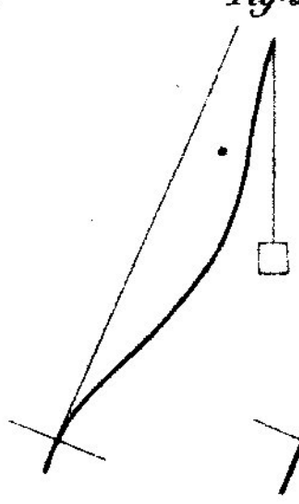

Fig. 4.

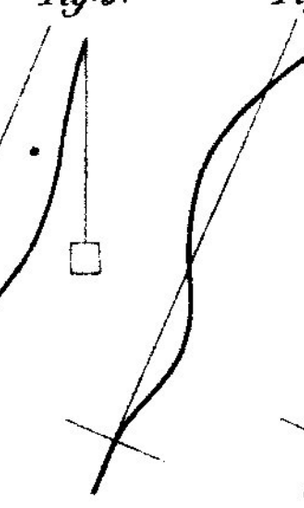

Fig. 5.

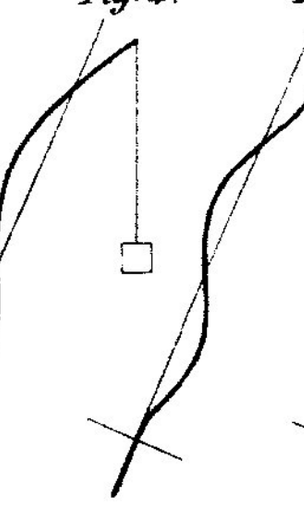

Fig. 6.

Fig. 7.

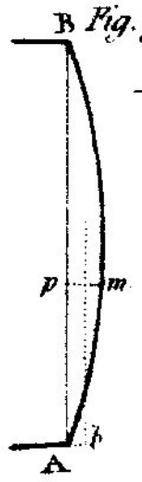

Fig. 8.

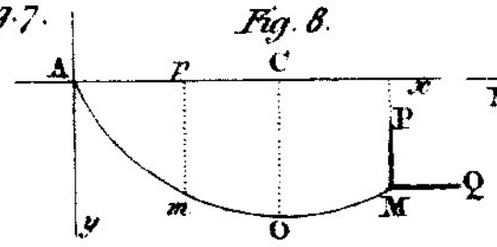

Fig. 9.

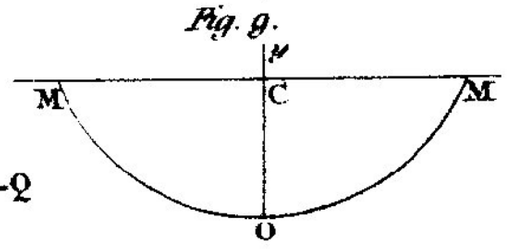

Fig. 10.

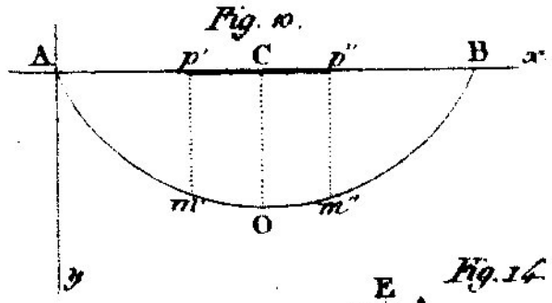

Fig. 11.

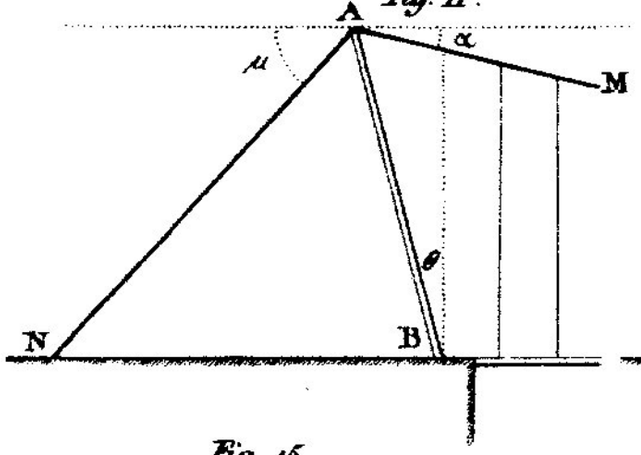

Fig. 12.

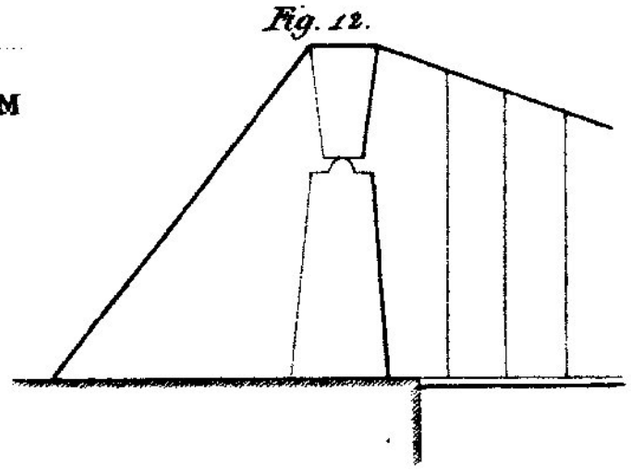

Fig. 13.

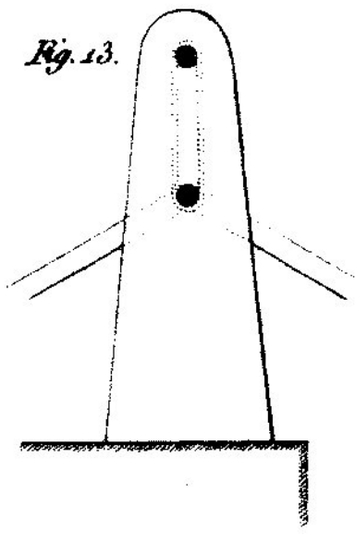

Fig. 14.

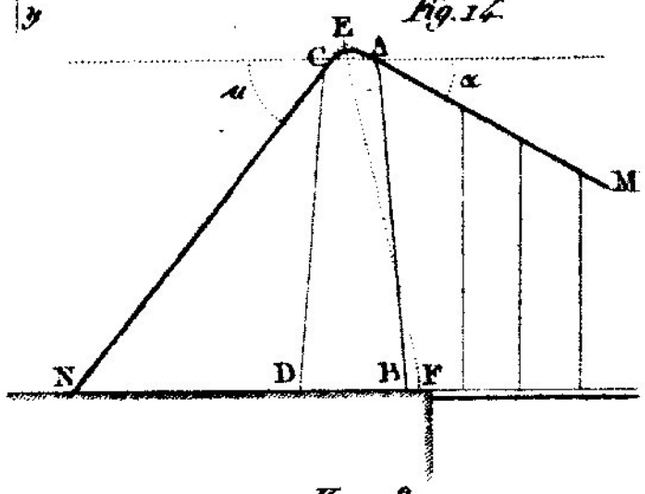

Fig. 15.

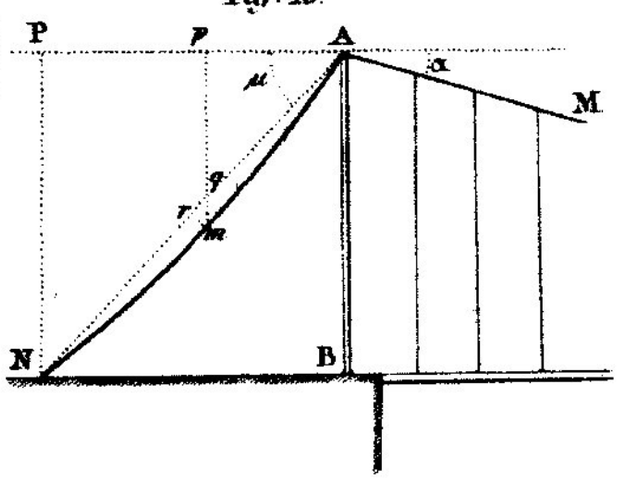

Fig. 16.

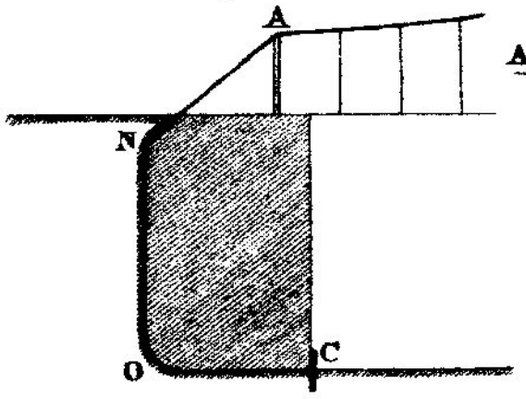

Fig. 17.

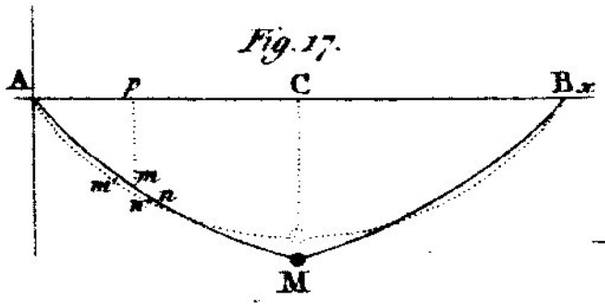

Fig. 18.

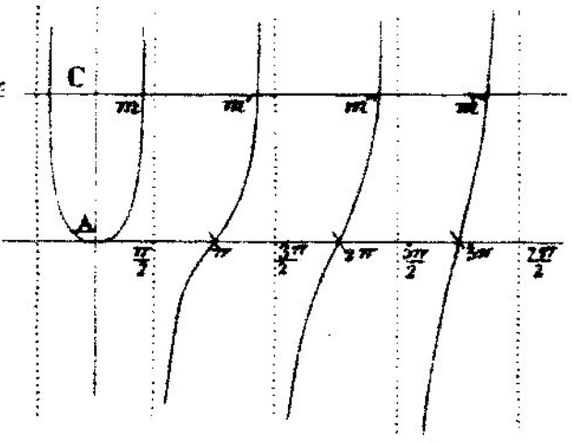

Fig. 19.



Fig. 20.

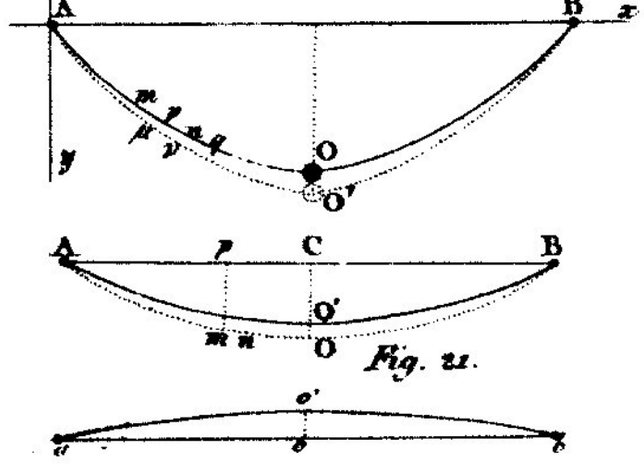

Fig. 21.

Fig. 22.

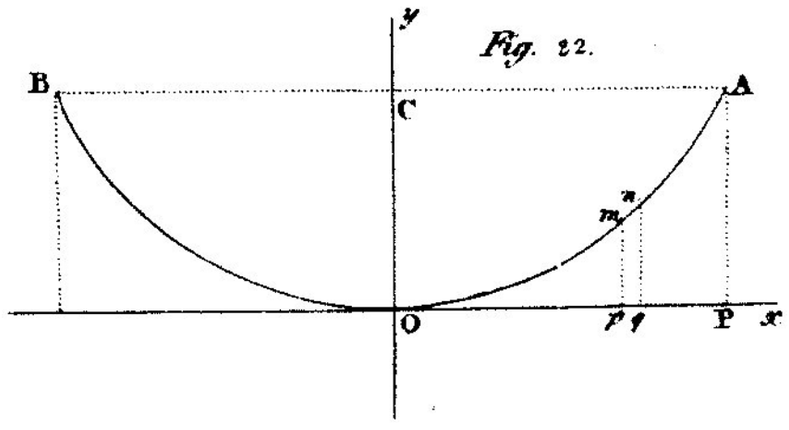

Fig. 23.

