LOTTERI
NTRODUZ
AL CALCO
SUBLIME

LEZIONI

DI

INTRODUZIONE AL CALCOLO SUBLIME

AD USO

DELLE REGIE UNIVERSITA'

DEL REGNO D' ITALIA

DI

ANGELO LOTTERI

PAVIA

DALLA TIPOGRAFIA BOLZANI

MDCCCIX.

L' AUTORE

A CHI LEGGE.

Spiegar la teoria generale delle equazioni di tutti i gradi, quella delle serie, delle funzioni circolari e logaritmiche; insegnare l' applicazione dell' Algebra alla Geometria, dar gli elementi della Trigonometria sferica, ed aggiungere tutte quelle teorie, che guidano all' intelligenza del calcolo sublime: ecco il soggetto prescritto nel Piano degli studj del 1803 *per la scuola* d' Introduzione al Calcolo Sublime, *contemporaneamente eretta nelle Università del Regno d' Italia, ed a me per la prima volta da quel Governo affidata in quella di Pavia. Mancava però un libro opportuno a servir di testo alle lezioni giornaliere; ed i Corsi fin qui adoperati dei celebri nostri Italiani Sig.* Paoli, *e Sig. Ab.* Venini, *non essendo fatti per questa sola scuola, avevano l' inconveniente di non esser per una parte sufficienti alle lezioni annuali, mentre per l' altra ridondavano di trattati estranei alla scuola medesima. Giunsero opportunamente in soccorso nel* 1806 *le belle* Lezioni di Geometria Analitica a due coordinate *del Sig.* Collalto *ora Professore della suddetta Facoltà nella R. Università di Padova; ma esaurita presto l' edizione, ed altronde abbisognando un altro volume che i trattati analitici abbracciasse, si concertò fra me e lui di comune accordo, ch' egli riproducesse la parte geometrica, io la parte analitica compilassi del nostro Corso; e la Direzione Generale dell' Istru-*

zione Pubblica ci incoraggì nel nostro impegno. Liberiamo ormai ciascuno la nostra fede, il Sig. Collalto *pubblicando, siccome testè ha fatto, la nuova sua* Geometria Analitica a due e tre coordinate, *contenente la teoria analitica delle linee e delle superficie di tutti gli ordini: io con queste mie* Lezioni: *ed abbiamo di già la compiacenza di vedere per parte della sullodata Direzione Generale prescritto l' uso dell' un libro e dell' altro per le tre Università del Regno.*

Oltre del Sig. Paoli, *che mi somministrò presso a poco il piano e gran parte delle dottrine, e da cui non mi scordo di aver avuto su di questa Università medesima la mia prima matematica istruzione, ho approfittato di un gran numero di Scrittori italiani ed esteri; e parrebbemi un' affettazione il nominarli ad uno ad uno, essendo io contento che ciascheduno vi riconosca il suo, ne resti poi o no del mio. Le citazioni, e le cose che spettano all' erudizione algebrica saranno supplite a voce nella scuola: io non doveva aver di mira che di unire le teorie preparatorie al Calcolo sublime, e le più essenziali per quegli Allievi specialmente che son destinati alla professione dell' Ingegnere. Forse un' altr' Opera, che ho già quasi in pronto, svilupperà con maggior estensione e profondità le stesse dottrine, ed altre ne conterrà che non potevano trovar luogo in questa, la quale non doveva formare che il testo di circa la metà delle lezioni annuali.*

Che se poi malgrado le mie fatiche nel raccogliere le dottrine, nello svilupparle, e nel dirigerne la stampa, vi si troveranno tuttavia delle cose oscure od inesatte, si risovvenga il Lettor discreto delle difficoltà inerenti a simili materie, e della facilità con cui si sono talvolta ingannati gli uomini del più distinto merito.

CAPO I.

Delle funzioni in generale.

§. 1. Si dice *funzione* di una o più quantità un'espressione analitica, in cui queste entrano in qualsiasi modo per mezzo delle operazioni elementari o sublimi dell'Analisi. Queste quantità, che a preferenza di altre si contemplano nella funzione, ne formano in certo modo il carattere, e perciò si posson chiamare quantità *principali* a differenza di tutte l'altre che vi possono ugualmente comprendersi in qualunque numero e forma, e che potremo chiamar *secondarie*. Così i coefficienti di un binomio innalzato alla potenza m sono tante funzioni dell' esponente m; le radici delle equazioni non son mai altro che funzioni de' loro coefficienti; e le equazioni medesime sono funzioni dell' incognita che vi si contiene, sebbene vi entrino dappertutto anche delle quantità cognite. L'espressione a^2+bx+x^2 è una funzione di a, b, ed x, ma si dice soltanto di a, o di b, ovvero di x secondo che a, b, ovvero x è la quantità principale.

§. 2. Distinguiamo le funzioni nelle seguenti classi:

1.° Funzioni *determinate* di quantità *determinate*;

2.° Funzioni *determinate* di quantità *indeterminate*;

3.° Funzioni *indeterminate* di quantità *determinate*;

4.° Funzioni *indeterminate* di quantità *indeterminate*.

Nella prima classe comprendiamo tutte le espressioni analitiche conosciute sì di forma che di valore, come sono

$$a^2+bc\,;\quad \frac{3a^2-b^2}{c^3}\,;\quad \sqrt{\left(a^m-\frac{b^n}{c^r}\right)}\,;\ \text{ec.}$$

dove le lettere impiegate sono tutte di valor noto, come la forma delle frasi algebriche che le racchiudono.

Nella seconda classe comprendiamo tutte le espressioni analitiche conosciute bensì di forma ma inviluppate di quantità incognite ovvero indeterminate, le quali tutte sogliónsi rappresentare colle lettere x, y, z, ec. Tali sarebbero le espressioni

$$a^2-x^2;\ \sqrt{\frac{ax+x^2y}{b-x}};\ (ax+by)^m;\ \text{ec.}$$

Alla terza classe riferiamo quelle funzioni, le quali sebbene non dipendano che da quantità note e determinate come a, b, c, ec., pure o non si conosce la forma sotto cui debbono presentarsi, o possono presentarsi sotto infinite forme. Si sa per es. che il valore di un' incognita, ossia la radice di un'equazione qualunque, non può dipendere che dai coefficienti di essa; ma in quelle superiori al quarto grado non sapendosi sotto qual forma abbiano ad introdursi i coefficienti stessi, la radice rimane tuttavia incognita, e non può rappresentarsi che per mezzo de' simboli generici, come sarebbe $F(A)(B)(C)\ldots$, in cui la lettera F significa funzione, ed A, B, C, ec. sono i coefficienti noti dell' equazione. Parimenti se si cercano i coefficienti de' termini, che debbono rappresentare lo sviluppo del binomio $(1+x)^m$, si sa che questi non possono essere che funzioni di m, ma finchè non si conosce il loro valore, ciascuno di essi potrà rappresentarsi col simbolo indeterminato $F(m)$, il quale riceverà poi tanti valori particolari quanti saranno i coefficienti che si anderanno determinando, e se m sarà rotto o negativo, $F(m)$ avrà infiniti valori. Così pure la periferia d' un cerchio di raggio r è una funzione di r, ma non avendo noi un' espressione finita con cui rappresentarla, non possiamo che indicarla con un' espressione simbolica e generale come sarebbe $F(r)$, o altra qualunque che si volesse adottare.

Alla quarta classe finalmente spettano tutte quelle espressioni, la forma delle quali è ignota, o può variarsi in infiniti modi, e nelle quali siano involte delle quantità incognite o indeterminate e variabili. Indicando quest' ultime con x, y, z, ec. le funzioni di cui parliamo si potranno esprimere con $F(x)$, $f(x)(y)$, ec., ovvero, come si pratica da molti oggidì nella sublime Analisi, con Z_x, $Z_{x,y}$, $Z_{x,y,z}$, ec., i quali modi tutti significano delle funzioni di forma indeterminata di quantità parimenti indeterminate.

§. 3. Fermandoci particolarmente su le funzioni della seconda classe, le distingueremo in diverse specie secondo i diversi rapporti sotto cui possono contemplarsi.

Prima di tutto divideremo le funzioni in *algebraiche* e *trascendenti*. Le prime derivano la loro forma dalle sole sei operazioni elementari dell' Algebra, e possono rappresentarsi con un numero finito di termini; le seconde nascono da operazioni proprie dell' Algebra sublime, e non possono rappresentarsi in termini finiti colle operazioni elementari. A queste ultime apparterrebbe per es. il valore della superficie o periferia circolare per mezzo del raggio; lo spazio ellittico o iperbolico per mezzo di dati quadrati o rettangoli; ec.

Le funzioni algebraiche si suddividono inoltre in *razionali* ed *irrazionali*. Nelle prime le quantità *principali* non sono affette nè da radicali, nè da esponenti frazionarj; nelle seconde hanno luogo tali segni od esponenti.

Fra le funzioni algebraiche, e razionali si distinguono le *intiere* dalle *frazionarie*: in quelle la quantità principale non si trova nel denominatore e non ha esponenti negativi; in queste succede il contrario. La forma generale di una funzione intiera e razionale dell' indeterminata x è la seguente

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots+hx^m$$

dove a, b, c, ec. sono quantità note o determinate, ed m è un numero intiero e positivo. Per simil ragione la forma delle funzioni razionali e frazionarie della stessa indeterminata x sarà

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots+hx^m}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots\ldots+h'x^n}$$

in cui il numeratore e il denominatore presi a parte sono funzioni razionali intiere.

Finalmente le funzioni sì algebraiche che trascendenti si distinguono in *uniformi* e *multiformi*. Le uniformi son quelle, le quali, se all'indeterminata si attribuisce un certo valore, acquistano un solo ed unico valore determinato; ma se per un sol valore, che si dia all'indeterminata, la funzione ne riceva più di uno, allora questa è multiforme. Tutte le funzioni razionali intiere o fratte sono frazioni uniformi, le irrazionali sono multiformi. Ciò è evidente se si riflette che ogni quantità radicale ha tanti valori diversi quante sono le unità nel di lei esponente. Quindi la funzione

$\sqrt{ax-x^2}$ avrà un valor biforme,

$\sqrt[3]{a^3-x^3}$ avrà un valor triforme,

$\sqrt[n]{a+bx+cx^2}$ avrà un valore n^{forme}.

Tra le funzioni trascendenti cos. x per es. ha un sol valore corrispondente all'arco x, ma l'arco, il cui coseno sia y, è una funzione infinitiforme, perchè infiniti sono gli archi dotati del medesimo coseno y.

Abbisognando nuove distinzioni le daremo ne' rispettivi luoghi nel progresso dell'Opera.

CAPO II.

Delle Permutazioni, Combinazioni, e Funzioni simmetriche.

Art. I.

Permutazioni.

§. 4. Così si chiamano le disposizioni o cangiamenti di sito che si possono dare a più cose senza variare nè il loro numero, nè quello de' luoghi che esse debbono occupare, e senza aver riguardo alla loro grandezza. Le cose da collocarsi possono essere in numero uguale, maggiore, e minore de' luoghi ne' quali vengono disposte; onde ne nascono tre distinti casi da considerarsi.

Fingiamo per es. esserci dodici sedie, e dodici persone destinate ad occuparle: in quanti differenti modi potranno queste distribuirvisi? Ecco una quistione relativa al primo caso.

Sopra le stesse dodici sedie abbian diritto a collocarsi venti persone: in quante maniere si potrà collocarne una per sedia? Ecco una quistione relativa al caso secondo.

Finalmente le dodici sedie siano a richiesta di otto sole persone: in quanti modi esse potranno occuparle? Questa sarà una quistione spettante al terzo caso.

§. 5. *Proposizione.* Se le cose da collocarsi sono tante quanti sono i luoghi, e il numero delle prime sia m, il numero delle permutazioni possibili è

$$1.2.3 \ldots \ldots m.$$

Siano primieramente due luoghi marcati rispettivamente (1), (2), e le due cose da collocarvi siano a, b. E' chiaro che volendo porre a in (1), dovrà collocarsi b in

(2); e volendo collocare b in (1) non potrà collocarsi a che in (2). Le permutazioni saranno pertanto in numero 1.2.

Siano ora per le tre cose a, b, c i tre luoghi (1), (2), (3). Pongasi a in (1), e le altre due b, c potranno pel caso precedente disporsi in due maniere ne' luoghi (2) e (3). Mettasi b in (1) e rimarranno due permutazioni per a e c ne' luoghi (2) e (3). Si ponga finalmente c nel luogo (1), e si avranno altre due permutazioni ne' luoghi (2) e (3) per le cose a, b. Dunque raccogliendo tutte queste permutazioni, il loro numero sarà tre volte due, ossia 1.2.3.

Potendosi poscia disporre quattro cose a, b, c, d ne' quattro luoghi (1), (2), (3), (4) in modo che il luogo (1) sia prima concesso ad a, poi a b, indi a c, e per ultimo a d, ed avendosi ogni volta, come abbiam veduto poc' anzi, sei permutazioni, è facile a vedersi che tutte le permutazioni del caso presente saranno quattro volte sei, ossia 1.2.3.4.

Continuando a piacere quest' induzione si scorgerà facilmente, che le permutazioni per cinque cose in altrettanti luoghi saranno 1.2.3.4.5.; per sei cose 1.2.3.4.5.6; ec., e finalmente quelle che spettano ad m cose saranno, come abbiam proposto, in numero

$$1.2.3.4\ldots.m.$$

Dunque dodici persone sedute sopra dodici sedie se le potranno scambiare in modi $1.2.3\ldots.11.12 = 479001600$ numero enorme. Parimenti le 52 carte del giuoco della bassetta possono cangiar di luogo le une rispetto alle altre col mischiare il mazzo in modi $1.2.3\ldots.51.52$, numero risultante da 68 cifre, per cui si può asserire che se questo giuoco avesse la sua origine comune col mondo, non sarebbero ancora esaurite tutte le permutazioni possibili quand' anco l'uso di esso fosse assai più frequente nella società di quello che è al presente.

§. 6. *Osservazione*. Quando alcune fra le cose da collocarsi diventino identiche, o debbano come tali considerarsi, dovranno pure diventare identiche alcune delle disposizioni; ma non volendo noi tener conto che delle disposizioni differenti, queste dovranno ridursi a minor numero, ed ecco in qual modo. Ripigliamo l'induzione precedente, e supponiamo in primo luogo che le due cose a, b disponibili ne' due luoghi (1) e (2) diventino identiche, cioè b si cangi in a, allora resta lo stesso sia che l'una o l'altra occupi l'uno o l'altro de' due luoghi; quindi i due modi, che prima si avevano per disporle, si riducono ad un solo, e perciò le permutazioni non saranno che $\frac{1.2}{2} = 1$.

Se poi di tre cose a, b, c disponibili in tre luoghi due si faranno identiche, così che esse diventino a, a, c, allora fra le sei permutazioni assegnate di sopra tre diventeranno identiche colle altre tre, e quindi le permutazioni dissimili che prima erano, siccome veduto abbiamo, $1.2.3$, diventeranno $\frac{1.2.3}{2} = 3$.

Dove le cose siano quattro, e due si facciano identiche, di 24 permutazioni dodici si confonderanno rispettivamente colle altre dodici, onde le permutazioni dissimili non saranno più che $\frac{1.2.3.4}{2}$. Proseguendo questo discorso si vede in generale che se di m cose due si faranno identiche, le permutazioni primitive si ridurranno a

$$\frac{1.2.3.\,.\,.\,.\,.m}{2}.$$

Così pure se tre fra quattro cose diventeranno identiche, le permutazioni di prima si faranno identiche a sei a sei, onde si ridurranno alla sesta parte, cioè a $\frac{1.2.3.4}{2.3}$. E se invece di quattro cose ve ne fossero cinque, sei, e in generale m, sempre si ridurrebbero alla sesta parte, cioè a

$$\frac{1.2.3.\ldots.m}{2.3}.$$

Ma se fra m cose quattro saranno identiche, allora le permutazioni primitive si faranno identiche a ventiquattro a ventiquattro, e perciò le dissimili si ridurranno a sole

$$\frac{1.2.3.4.\ldots.m}{2.3.4}.$$

Spingendo avanti quanto si vuole questo ragionamento si vede, che quando di m cose se ne considerino r identiche, il numero delle permutazioni di prima si ridurrà a

$$\frac{1.2.3.4.\ldots.m}{2.3.4.\ldots.r};$$

cioè al numero delle permutazioni totali diviso per quello delle permutazioni competenti al numero delle cose identiche, se queste fossero diverse tra loro.

§. 7. Che se fra le m cose $a, b, c, d \ldots$ alcune si faranno uguali tra loro, ed altre parimenti uguali fra loro ma non colle prime, allora il numero delle permutazioni primitive dovrà dividersi pel numero delle permutazioni identiche che si ottengono in ciascun caso, cioè prima per $2.3.4\ldots$ fino al numero *inclusive* delle prime cose identiche; poi di nuovo per $2.3.4.\ldots$ fino al numero delle altre cose separatamente identiche; e se vi fosse un terzo aggregato di cose di nuovo identiche separatamente, si dividerebbe ancora per $2.3.4.\ldots$ fino al numero di queste; e così di seguito.

Se si cerca per es. il numero delle permutazioni delle nove lettere a, b, c, d, e, f, g, h, i, questo sarebbe $= 1.2.3.4.5.6.7.8.9$. Ma se facciamo $a = b = c = d$, esso si riduce a $\frac{1.2.3\ldots 9}{2.3.4}$. Se inoltre volessimo supporre $e = f = g$, le precedenti permutazioni diventerebbero $\frac{1.2.3\ldots 9}{2.3.4 \times 2.3}$. E se le altre due lettere h, i diventassero anch' esse identiche, il numero di cui si tratta sarebbe $\frac{1.2.3\ldots 9}{2.3.4 \times 2.3 \times 2}$.

§. 8. *Prop.* Se il numero m delle cose da distribuirsi supera il numero n de' luoghi, il numero delle permutazioni è

$$m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)$$

Difatti supponiamo da prima tre cose e due luoghi, e si vedrà facilmente che quelle si potranno distribuire in sei maniere, ossia che le permutazioni saranno 3.2. Per due luoghi e quattro cose le permutazioni si troveranno dodici, ossia 4.3. Per due luoghi e cinque cose si troverà 5.4; ec.; onde per m cose e due luoghi le permutazioni saranno $m(m-1)$.

Siano ora quattro cose e tre luoghi, e le permutazioni totali saranno 24, ossia 4.3.2. Ma per tre luoghi e cinque cose, esse saranno 60, ovvero 5.4.3; e proseguendo quest' induzione si troverà che per tre luoghi ed m cose le permutazioni sono $m(m-1)(m-2)$.

Per quattro luoghi e cinque cose si hanno permutazioni 5.4.3. Per 4 luoghi e sei cose 6.5.4; ec.; e per 4 luoghi ed m cose $m(m-1)(m-2)(m-3)$ permutazioni.

Si vede pertanto che la formola esprimente le permutazioni è un prodotto di tanti fattori in progressione aritmetica quanti sono i luoghi, ed il primo di essi è il numero delle cose, e la differenza l'unità; onde per m cose ed n luoghi si avranno, come si è proposto, permutazioni

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

§. 9. Ciò che abbiamo asserito nel §. precedente si renderà più chiaro se si rappresenteranno in un picciolo quadro tutte le possibili distribuzioni che si possono fare di date cose in dati luoghi. Per esempio le quattro cose a, b, c, d siano da distribuirsi in tre luoghi: s'incominci a dar loro le seguenti distribuzioni.

(1)	(2)	(3)
a	b	c
a	b	d
a	c	d
b	c	d

Osservando poi che a ciascuna di queste convengono sei distinte permutazioni (§. 5), si vede manifestamente che il numero totale di esse sarà 4.6, ossia 4.3.2. In simil modo si verificheranno tutti gli altri risultati.

Se dunque si cercan le maniere con cui collocare 20 persone sopra 12 sedie, queste verranno indicate dal prodotto

$$20.19.18.\ldots.9.$$

§. 10. *Prop.* Se il numero m delle cose da collocarsi sarà minore del numero n de' luoghi, il numero delle permutazioni sarà

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Potremmo qui pure servirci dell' induzione simile alla precedente per dimostrare questa verità, ma possiamo anche ricavare la dimostrazione dalla proposizione del §. 5 nel seguente modo. Giacchè si ha $m<n$ aggiungiamo ad m un altro numero p di cose, che lo renda uguale ad n, onde si abbia $m+p=n$. Distribuiamo ora

$m+p$ ossia n cose in n luoghi, e riteniamo come identiche le p cose aggiunte; è chiaro che le permutazioni dissimili saranno quelle che nascono dalle m cose date, e le simili quelle che nascono dalle p cose aggiunte. Ora le permutazioni totali sarebbero in numero $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ (§. 5), e togliendo le identiche si avrebbe $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(p-1)p}$. Se ora si cambia p in $n-m$, quest'ultimo numero si riduce visibilmente a $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2.3.4\ldots(n-m-1)(n-m)}$, o finalmente a

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

che è il proposto.

Se per es. otto persone hanno dodici sedie a loro comodo, potranno collocarvisi in maniere

$$12.11.10\ldots 5.$$

§. 11. Anche alle due proposizioni de' §§. 8,10 conviene per intiero l'osservazione del §. 6 per rapporto alle cose che si debbano considerare come identiche.

Per es. Se si domanda in quante maniere si possano disporre su i quadrati dello scacchiere ottanta monete, delle quali 20 sono d'un conio, 50 d'un altro, e 10 di un terzo, come sarebbero scudi, doppie, e sovrani, si prenderebbe la formola del §. 8, e si farebbe $m=80$ $n=64$, e si avrebbe per risposta

$$\frac{80.79.78\ldots 17}{2.3\ldots 20\times 2.3\ldots 50\times 2.3\ldots 10}.$$

Ma se invece si domandasse il numero delle permutazioni di 24 pezzi o pedine su i trentadue quadrati neri dello stesso scacchiere, delle quali pedine dodici son bianche e dodici nere come nel giuoco della dama, la risposta si avrebbe dal §. 10, facendo $m=24$, $n=32$, e quindi sarebbero le permutazioni richieste

$$\frac{32.31.30\ldots.9}{2.3\ldots.12\times2.3\ldots.12}.$$

Se poi si volessero escludere tutte quelle che non sono consentanee alle leggi di questo giuoco, il numero si sarebbe assai minore.

§. 12. Fermandoci all'ipotesi di $m>n$ possiamo osservare che il permutare m cose in n luoghi torna allo stesso come il distribuirle ad n ad n, ossia come unirle in numero n in tutti i modi possibili. Quindi dalla formola del §. 8 abbiamo le permutazioni di m cose

a due a due . . . . . $m(m-1)$,

a tre a tre . . . . . . $m(m-1)(m-2)$,

a quattro a quattro . $m(m-1)(m-2)(m-3)$,

ec.

a p a p . . . . $m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)$,

dove si dee ritenere che in ciascheduna di queste unioni non si replica mai la stessa cosa. Così per tre cose a, b, c si hanno le sei permutazioni ab, ba, ac, ca, bc, cb, ma non si trova mai nè aa, nè bb, nè cc. Così dicasi di tutte le altre.

Ci faremo strada a trovare le permutazioni di più cose, quando si ammettano le ripetizioni di esse, colla seguente

§. 13. *Prop.* La somma de' coefficienti del binomio $(a+b)^n$ è 2^n; la somma de' coefficienti del trinomio $(a+b+c)^n$ è 3^n; quella de' coefficienti del quadrinomio $(a+b+c+d)^n$ è 4^n; ec., e in generale la somma de' coefficienti del polinomio $(a+b+c+.+..)^n$ di m termini è m^n.

Nel binomio la somma de' coefficienti è

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}+\text{ec.},$$

la quale non è altro che lo sviluppo del binomio $(1+1)^n=2^n$; dunque ec.

Nel trinomio se si considera $b+c$ come un monomio, si ha lo sviluppo

$$a^n+na^{n-1}(b+c)+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(b+c^2)+$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}(b+c)^3+\text{ ec.}$$

Ma nelle potenze $(b+c)^1$, $(b+c)^2$, $(b+c)^3$, ec. la somma de' coefficienti è 2, 2^2, 2^3, ec. per ciò che ora abbiamo dimostrato; dunque nello sviluppo del trinomio $(a+b+c)^n$ la somma de' coefficienti di tutti i termini sarà

$$1+n.2+\frac{n(n-1)}{2}.2^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.2^3+\ldots+2^n,$$

cioè $(1+2)^n$, ovvero, come si è proposto, 3^n.

Per gli altri polinomj successivi si potrebbe ragionar similmente, ma basterà di porre tutti i termini successivi a, b, c, $\ldots=1$, con che il polinomio di termini m diventerà $(1+1+1+1+\ldots)^n$, e la somma de' coefficienti di questo essendo visibilmente la stessa che quella del polinomio $(a+b+c+\ldots)^n$, ne segue che nell' uno e nell' altro essa sarà m^n, come si è asserito in ultimo luogo.

§. 14. *Prop.* Se si hanno n luoghi da occupare con cose di due specie, le permutazioni saranno 2^n;
con cose di tre specie, le permutazioni saranno 3^n;
con cose di quattro specie, le permutazioni saranno 4^n;
ec., e se le cose saranno di m specie, le permutazioni saranno m^n.

Siano in primo luogo a, b due specie di cose, per es. due mucchi di sassolini, bianchi gli uni, neri gli altri, e siano dati n luoghi da occuparsi ciascuno da un sassolino o bianco o nero. Per vedere in quanti modi si possa ciò eseguire, nello sviluppo del binomio

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} a^{n-3} b^3 + \text{ ec.}$$

si sostituiscano alle potenze a^n, a^{n-1}, ec., b, b^2, b^3, ec. i prodotti equivalenti $aaa\ldots$, b, bb, bbb, ec., onde si abbia

$aaaa\ldots\ldots a$	invece di	a^n
$aaaa\ldots\ldots ab$	di	$a^{n-1}b$
$aaaa\ldots abb$	di	$a^{n-2}b^2$
$aaa\ldots abbb$	di	$a^{n-3}b^3$
ec.		

Tutti i termini insieme della prima colonna formano tante unioni ad n ad n quanti sono i termini del binomio, ed ognuno di questi termini è un prodotto di n fattori. Ora se questi fossero tutti diversi fra loro, ciascuno ammetterebbe un numero di permutazioni espresso da $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ (§. 5); ma essendo nel primo prodotto identici tutti i fattori, le permutazioni si riducono ad $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{2.3\ldots n}$, cioè ad una sola. Nel 2.º prodotto essendoci $n-1$ fattori identici, le permutazioni si riducono a $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(n-1)} = n$; nel 3.º prodotto; i fattori identici sono $n-2$ negli a, e 2 nei b, quindi le permutazioni sono $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(n-2)\times 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
Similmente nel 4.º termine vi sono $n-3$ fattori a, 3 fattori b identici, e perciò le loro permutazioni sono di numero $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(n-3)\times 2.3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$; ec. Quindi si vede che ciascun termine dello sviluppo del binomio porta con se nel proprio coefficiente il numero delle per-

mutazioni che gli competono. Il numero totale di queste dovrà pertanto desumersi dalla somma di tutti i coefficienti; e siccome questa è appunto (§. 13) $= 2^n$, perciò tale sarà il numero delle permutazioni competenti a due specie di cose disponibili in n luoghi.

Per es. ritenendo il segno + innanzi del primo termine d'un' equazione generica

$$x^n \pm Ax^{n-1} \mp Bx^{n-2} \pm \text{ec.} = 0,$$

tutti i segni dopo il primo termine potranno permutarsi in maniere 2^n, giacchè, escluso il primo, il numero de' termini restanti è $= n$.

Siano ora tre specie di cose a, b, c, ed n sia di nuovo il numero de' luoghi. Tutte le unioni possibili saranno rappresentate dai termini di un trinomio sviluppato, purchè in luogo delle potenze di a, b, c si sostituiscano le lettere replicate quanto basta. Quindi si scriverà

$aaa \ldots\ldots a$	invece di	a^n
$aaa \ldots\ldots ab$		$a^{n-1}b$
$aaa \ldots\ldots abb$		$a^{n-2}b^2$
$aaa \ldots\ldots acc$		$a^{n-2}c^2$
$aaa \ldots\ldots abc$		$a^{n-2}bc$
$aaa \ldots\ldots abbb$		$a^{n-3}b^3$
$aaa \ldots\ldots abbc$		$a^{n-3}b^2c$
$aaa \ldots\ldots abcc$		$a^{n-3}bc^2$
ec.		ec.

e raccogliendo tutte le permutazioni competenti a ciascun prodotto si troverà che pel 1.º termine $a^n = aaa \ldots a$ non si ha che una sola permutazione;

pel 2.º se ne hanno $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(n-1)}$, ossia n;

pel 3.º $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2.3\ldots(n-2)\times 2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$;

pel 4.° $\frac{n(n-1)}{2}$; pel 5.° $\frac{n(n-1)\ldots.3.2.1}{2.3\ldots.(n-2)} = n(n-1)$;
pel 6.° $\frac{n(n-1)\ldots.3.2.1}{2.3\ldots(n-3)\times 2.3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$; ec.; ma questi sono appunto i coefficienti de' termini medesimi del trinomio, come chiunque può accertarsene collo sviluppo attuale di $(a+b+c)^n$; dunque il numero totale delle permutazioni sarà la somma de' coefficienti del trinomio stesso, che abbiam veduto essere 3^n.

Operando similmente su i termini dello sviluppo di un quadrinomio si troverebbe che le permutazioni relative a quattro specie di cose sono appunto in numero 4^n. E se si spingerà questo discorso innanzi quanto si vuole, si vedrà che le permutazioni relative ad m specie di cose ed n luoghi saranno in numero m^n, come fu proposto.

§. 15. *Prop.* Assegnare il numero delle permutazioni di più cose, quando nelle unioni sono concesse le ripetizioni delle medesime.

La presente quistione si riduce intieramente alla precedente. Siano difatti da unirsi a due a due in tutti i modi possibili le tre lettere a, b, c comprese le repliche: tutti questi modi sono

$$aa, ab, ba, ac, ca, bb, bc, cb, \text{ec.}$$

Ora questo è lo stesso che occupare due luoghi con tre specie di cose a, b, c, ciò che abbiam veduto farsi in modi 3^2.

Similmente se si avessero ad unire quattro cose a tre a tre, ciò sarebbe lo stesso che occupar tre luoghi con quattro specie di cose, e perciò le permutazioni sarebbero 4^3; e così di seguito; onde è facile di conchiudere, così proseguendo, che per unire secondo l'attual supposizione m lettere o cose a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec., si avranno rispettivamente maniere m^2, m^3, m^4;

e per unirle ad n ad n si avranno m^n maniere, che formano altrettante permutazioni.

§. 16. *Prop.* Se il luogo (1) non potrà esser occupato che dalle cose $a', a'', a''', \ldots a^{(p)}$, il luogo (2) dalle cose $b', b'', \ldots b^{(q)}$, il luogo (3) delle cose $c', c'', c''', \ldots c^{(r)}$, ec., il numero delle permutazioni sarà $pqr\ldots$

Supponiamo prima i due soli luoghi (1), (2), e che si metta a' in (1), indi in (2) successivamente tutti i b, le permutazioni saranno evidentemente in numero q. Cangiando poi a' in a'', in a''', ec. si avranno altre q permutazioni ogni volta, onde il numero totale sarà pq.

Se i luoghi saranno tre, è chiaro che le pq permutazioni del caso precedente combinandosi con ciascuna delle r permutazioni delle cose c', c'', c''', ec., il numero totale sarà pqr. Un simil ragionamento avrà luogo per un maggior numero di classi di cose, onde in generale il numero delle permutazioni sarà il prodotto de' numeri delle cose disponibili in ciascun luogo.

Abbiasi a cagion d' esempio la funzione $x+y$, ovvero xy, e si sappia altronde che x ha p valori diversi come $x', x'', x''' \ldots x^{(p)}$, e y altri q diversi valori come $y', y'', y''' \ldots y^{(q)}$, le precedenti funzioni avranno ciascuna pq valori. Nello stesso modo le funzioni $x+y+z$, xyz, nelle quali oltre i valori precedenti anche z ha r differenti valori, avranno ciascuna pqr valori.

Art. II.

Combinazioni.

§. 17. Se più cose si uniscono secondo un certo numero, come sarebbe a due a due, a tre a tre, ec., ciò si chiama *combinarle.* In queste unioni non si ha verun riguardo all'ordine con cui si prendono le cose, ma soltanto al numero secondo cui esse si uniscono, e questo si chiama *l'esponente* della combinazione. Perciò prendendo alcune cose ad una ad una l'esponente è l'unità; prendendole a due a due l'esponente è il 2, ec.; e prendendole a p a p l'esponente sarà il numero p. Le cose prese ad una ad una da taluni si chiamano *gli unioni*; prese a due a due si dicono *ambi* o *binarj* o ancora *binioni*; a tre a tre *terni*, *ternarj*, o *ternioni*; ec.; noi chiameremo in generale p^{narj} l'accozzamento di più cose a p a p.

§. 18. *Prop.* Il numero de' binarj di m cose è $\dfrac{m(m-1)}{2}$;

quello de' terni è $\dfrac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}$;

quello de' quaterni è $\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}$;

ec.;

e quello de' p^{narj} è $\dfrac{m(m-1)(m-2)\,\ldots\,(m-p+1)}{2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,p}$.

In primo luogo essendo $m(m-1)$ le permutazioni di m cose a, b, c .... in due luoghi (§. 8, 12), ed altronde trovandosi fra queste tanto ab quanto ba, tanto ac quanto ca, ec., si vede che le permutazioni di più cose a due a due saranno il doppio delle loro combinazioni, quindi il numero di queste sarà, come si è asserito, $\dfrac{m(m-1)}{2}$.

Secondariamente le permutazioni di m cose a tre a tre si sono trovate in numero $m(m-1)(m-2)$. Ora tre di queste cose, come a, b, c somministrano sempre sei distinte permutazioni, che sono

abc, acb, bac, bca, cab, cba, le quali si debbono considerare come identiche nella dottrina delle combinazioni, e perciò si riducono alla sesta parte; e ciò valendo di altre tre cose qualunque, si vede che le combinazioni di più cose a tre a tre, cioè il numero de' terni, sarà $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}$, come si è proposto.

In 3° luogo le $m(m-1)(m-2)(m-3)$ permutazioni di m cose a quattro a quattro si ridurranno alla ventiquattresima parte soltanto, atteso che quattro cose qualunque come a, b, c, d presentano ventiquattro distinte permutazioni, le quali, parlando di combinazioni, diventano tutte identiche. Quindi le combinazioni di m cose a quattro a quattro saranno $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}$, come parimenti si è asserito.

In virtù pertanto di quest' induzione, che non ha limite, siamo condotti a conchiudere a diritto, che combinando m cose a p a p si avrà il numero de' p^{nari} espresso da $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots p}$, cioè uguale al numero delle permutazioni di m cose distribuite in p luoghi diviso pel numero delle permutazioni di p cose in p luoghi (§. 5, 8).

§. 19. *Osservazione.* Si è veduto (§. 15) che m^2, m^3, ..., m^n sono le permutazioni di m cose a due a due, a tre a tre, ..., ad n ad n, comprese le ripetizioni delle medesime cose; ma se si cangiano queste potenze rispettivamente ne' prodotti

$$m(m-1),\quad m(m-1)(m-2),\ \ldots,$$
$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

si hanno le permutazioni di m cose escluse le ripetizioni; e se questi ultimi prodotti si dividono rispettivamente pe' numeri $2, 2.3, \ldots\ldots, 2.3\ldots n$, si hanno le semplici combinazioni secondo gli esponenti $2, 3, \ldots\ldots n$. Quindi viceversa dalle semplici combinazioni si potrebbe far passaggio alle permutazioni semplici, e da queste alle permutazioni con replica per mezzo delle operazioni inverse;

Art. III.

Funzioni invariabili, o simmetriche.

§. 20. Se una espressione algebrica, in cui entra un numero m di lettere, è tale che rimanga identicamente la stessa col permutare le lettere medesime fra loro in tutti i modi possibili, essa dicesi una *funzione invariabile*, ovvero *simmetrica*.

Tali sarebbero le quantità

$$ab + ac + bc, \quad abc + abd + acd + bcd,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}; \ \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}; \ \sqrt{a^2 + ab + b^2}; \text{ ec.}$$

Adotteremo alcuni simboli opportuni a rappresentare queste espressioni relativamente alle diverse forme che possono avere, e perciò rappresenteremo con $S^{(1)}$ la somma di due o più lettere, quando queste non contengono nel loro esponente che l'unità. Così sarà

$$S^{(1)} = a + b + c + \ldots.$$

Similmente $S^{(2)}$ significherà la somma di più lettere, quando ciascuna di esse abbia per esponente il 2, e sarà perciò

$$S^{(2)} = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots.$$

In generale sarà

$$S^{(r)} = a^r + b^r + c^r + \ldots.$$

Indicheremo con $S^{(m,n)}$ la somma di tutti i prodotti possibili, che si posson fare con due delle lettere $a, b, c \ldots$ in modo che mentre l'una ha per espo-

nente m, l'altra abbia per esponente n, e viceversa; e sarà
$S^{(m,n)} = a^m b^n + a^n b^m + \ldots\ldots + b^m c^n + b^n c^m + \ldots\ldots$

Parimenti $S^{(m,n,p)}$, $S^{(m,n,p,q)}$, ec. saranno simboli, che rappresenteranno tutti i prodotti possibili di date lettere a tre a tre, ovvero a quattro a quattro, ovvero ec., quando le lettere di ciascun prodotto abbiano per loro rispettivi esponenti i numeri m, n, p, ec. permutati in tutti i modi, e sarà quindi

$S^{(m,n,p)} = a^m b^n c^p + a^n b^m c^p + a^p b^m c^n + \ldots\ldots$

$S^{(m,n,p,q)} = a^m b^n c^p d^q + a^n b^m c^p d^q + \ldots\ldots$

Se ciascuno degli esponenti m, n, p, q, ec. si farà $= 1$, allora $S^{(1,1)}$, $S^{(1,1,1)}$, $S^{(1,1,1,1)}$, ec. significheranno rispettivamente le somme degli ambi, de' terni, de' quaterni, ec., che si fanno colle date lettere semplici.

Il numero scritto sopra le S e compreso fra le parentesi si chiama l'*indice* della somma, e questo è *semplice*, *doppio*, *triplo*, ec. secondo che consta di uno, due o più numeri tutti separati con virgole.

§. 21. Vediamo adesso come le funzioni invariabili di indice composto possano esprimersi per mezzo delle funzioni di indice semplice, cioè come si possa esprimere $S^{(m,n,p,q,ec.)}$ per mezzo di sole funzioni della forma $S^{(r)}$.

Si moltiplichino fra loro le due seguenti eguaglianze membro per membro:

$$S^{(m)} = a^m + b^m + c^m + \ldots\ldots$$
$$S^{(n)} = a^n + b^n + c^n + \ldots\ldots$$

e il prodotto sarà

$$\begin{aligned} S^{(m)} S^{(n)} = \; & a^{m+n} + a^m b^n \\ & + b^{m+n} + a^n b^m \\ & + c^{m+n} + a^m c^n \\ & \;\;.\qquad\;\; + a^n c^m \\ & \;\;.\qquad\;\; + b^m c^n \\ & \;\;.\qquad\;\; + b^n c^m \end{aligned}$$

La prima fila verticale contiene tutti i termini della forma $S^{(m+n)}$, la quale è d'indice semplice come $S^{(r)}$; e la seconda contiene tutti quelli che noi abbiamo rappresentato con $S^{(m,n)}$, onde il precedente prodotto potrà tradursi in

$$S^{(m)}S^{(n)} = S^{(m+n)} + S^{(m,n)}.$$

da cui si ricava la formola

(1) $\quad S^{(m,n)} = S^{(m)}S^{(n)} - S^{(m+n)}$.

Moltiplichiamo similmente fra di loro le uguaglianze

$$S^{(m,n)} = a^m b^n + a^n b^m + \ldots + b^m c^n + b^n c^m + \ldots\ldots$$
$$S^{(p)} = a^p + b^p + c^p + \ldots\ldots$$

ed avremo il prodotto

$$\begin{array}{rllll}
S^{(m,n)}S^{(p)} = & a^{m+p}b^n & + a^{n+p}b^m & + a^p b^m c^n & \ldots\ldots \\
+ & b^{m+p}a^n & + b^{n+p}a^m & + a^p b^n c^m & \ldots\ldots \\
+ & c^{m+p}b^n & + c^{n+p}b^m & + a^m b^n c^p & \ldots\ldots \\
 & . & . & + a^n b^m c^p & \ldots\ldots \\
 & . & . & . & \\
 & . & . & . & \\
 & . & . & . & \\
 & . & . & . &
\end{array}$$

La prima fila verticale non è altro che $S^{(m+p,n)}$, la seconda $S^{(n+p,m)}$, e la terza $S^{(m,n,p)}$. Dunque s'avrà l'uguaglianza

$$S^{(m,n)}S^{(p)} = S^{(m+p,n)} + S^{(n+p,m)} + S^{(m,n,p)},$$

e di quì ricaveremo la formola

(2) $\quad S^{(m,n,p)} = S^{(p)}S^{(m,n)} - S^{(m+p,n)} - S^{(n+p,m)}$.

Nella stessa maniera moltiplicando fra di loro le due uguaglianze

$$S^{(m,n,p)} = a^m b^n c^p + a^n b^m c^p + \ldots + b^m c^n d^p + b^n c^m d^p + \ldots$$
$$S^{(q)} = a^q + b^q + c^q + d^q + \ldots\ldots$$

avremo per prodotto la seguente

$$S^{(q)}S^{(m,n,p)} = S^{(m+q,n,p)} + S^{(n+q,m,p)} + S^{(p+q,m,n)} + S^{(m,n,p,q)},$$

dalla quale ricaveremo la formola

(3) $\quad S^{(m,n,p,q)} = S^{(q)}S^{(m,n,p)} - S^{(m+q,n,p)} - S^{(n+q,m,p)} - S^{(p+q,m,n)}$.

Queste formole, che si possono continuare senza fine, soddisfanno a quanto si è proposto, siccome è chiaro.

§ 22. *Osservazione*. Le formole (1), (2), (3), ec. sono esatte finchè gli esponenti m, n, p, q, ec. sono diversi l'un dall'altro; ma per vedere come debbano modificarsi nel caso che alcuni fra questi o tutti ancora diventino uguali, bisogna riflettere che se per es si ha $m=n$, i prodotti $a^m b^n$, $a^n b^m$ diventano identici, e quindi che raccogliendo nelle somme i soli termini dissimili, il numero di questi si riduce alla metà. Così li sei ternarj $a^m b^n c^p + a^n b^m c^p + a^p b^n c^m + a^m b^p c^n + a^p b^m c^n + a^n b^p c^m$, che nascerebbero dal permutare li tre esponenti m, n, p sopra le tre lettere a, b, c, si riducono a tre soli nel caso di $m=n$, cioè ad $a^m b^n c^p + a^m b^p c^m + a^p b^m c^m$. Bisognerà dunque nel caso di due numeri uguali nell'indice della somma dividere il valore somministrato dalle precedenti formole per 2. E se sarà separatamente $m=n, p=q$, si dovrà per ugual ragione dividere il valor medesimo due volte per 2, cioè per 4. Se poi degli esponenti delle quantità a, b, c, ec. ossia dei numeri degli indici se ne uguaglieranno tre, e fosse per conseguenza $m=n=p$, allora i prodotti formati colle lettere a, b, c, ec. e con gli esponenti m, n, p, ec. si ridurrebbero alla sesta parte, e perciò in questo caso bisognerà dividere i valori dati dalle formole precedenti per 6, ossia per 2.3. Così si dovranno dividere i valori medesimi per 2.3.4 nel caso di $m=n=p=q$: e così di seguito.

Sarà perciò dalla formola (1)

$$S(2,2) = \frac{S(2)\,S(2) - S(4)}{2};$$

$$S(3,3) = \frac{S(3)\,S(3) - S(6)}{2};$$

ec.

dalla formola (2)

$$S^{(2,2,1)} = \frac{S^{(1)}S^{(2,2)} - 2\,S^{(3,2)}}{2};$$

$$S^{(1,1,2)} = \frac{S^{(1)}S^{(1,1)} - 2\,S^{(3,1)}}{2};$$

$$S^{(2,2,2)} = \frac{S^{(2)}S^{(2,2)} - 2\,S^{(4,2)}}{2\,.\,3};$$

ec.

dalla formola (3)

$$S^{(2,2,1,1)} = \frac{S^{(1)}S^{(2,2,1)} - 2\,S^{(1,2,3)} - S^{(2,2,2)}}{2\,.\,2};$$

$$S^{(2,2,2,1)} = \frac{S^{(1)}S^{(2,2,2)} - 3\,S^{(3,2,2)}}{2\,.\,3};$$

ec.

Indi sarebbe

$$S^{(2,2,2,2)} = \frac{S^{(2)}S^{(2,2,2)} - 3\,S^{(4,2,2)}}{2\,.\,3\,.\,4};$$

ec.

In questi e somiglianti casi bisogna attentamente avvertire di non porre nelle formole susseguenti i valori delle precedenti quando siano già stati divisi, ma di riserbare una sola divisione nell'ultima formola a cui si vuole arrivare. Così nell'ultimo esempio $S^{(2,2,2,2)}$ dipende da $S^{(2,2,2)}$, e da $S^{(4,2,2)}$, ma non si porrebbero i valori di queste ultime dopo essere stati divisi la prima per 2.3, la 2.ª per 2, come dovrebbe farsi se si considerassero isolatamente.

Vedremo quanto prima l'uso di queste formole nella teoria delle equazioni.

CAPO III.

Proprietà generali delle equazioni.

Art. I.

Definizioni, e proprietà delle radici.

§. 23. Tutti i valori che può avere l'incognita di una equazione si chiamano *radici*. Ciascuna radice ha la proprietà di rendere un membro dell' equazione identico coll' altro, qualora venga sostituita invece dell' incognita. Qualunque quantità dotata di questa proprietà è una nuova radice, e *soddisfà* all' equazione. La seguente

$$x^3+3x^2=8x+4$$

è soddisfatta dal valore $x=2$, perchè sostituito questo numero invece di x si ottiene

$$8+12=16+4\text{, ossia } 20=20\text{ ;}$$

perciò 2 è una radice della medesima. Similmente l'equazione

$$6x^4+10=9x+9x^2-10x^3$$

ha per una delle sue radici la frazione $-\frac{5}{3}$, perchè sostituita questa invece di x si riduce a

$$\frac{1520}{27}=\frac{1520}{27}$$

cioè identica.

§. 24. Le radici di un' equazione hanno diversi nomi secondo i diversi aspetti sotto cui si contemplano. Si distinguono quindi

1.° in *reali* ed *immaginarie*;

2.° in *razionali* ed *irrazionali*;

3.° in *positive* e *negative*;

4.° in *uguali* e *disuguali*.

Ciascuna di queste specie porta seco nel proprio nome anche la rispettiva definizione.

§. 25. Un' equazione dicesi *ordinata*, quando posti tutti i termini in un sol membro questi siano poi scritti in modo che il primo contenga la potenza più alta dell' incognita, indi gli altri che contengono gli esponenti gradatamente minori, e per ultimo il termine tutto cognito, e nel secondo membro non vi sia scritto che lo zero. Quindi un' equazione ordinata non può contenere l' incognita nel denominatore di nessun termine, e perciò deve esser ridotta alla forma delle funzioni intiere e razionali (§. 3). Deve inoltre la massima potenza dell' incognita non avere altro coefficiente che l' unità positiva: mancando qualcheduna di queste condizioni bisognerà operare convenevolmente affinchè l' equazione proposta sia ridotta alla forma prescritta. Così l' equazione

$$-2x^3+5x=x^2-\frac{3}{x}$$

si ridurrà alla forma

$$x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}=0$$

1.° col trasportare tutti i termini dal 2.° nel 1.° membro;
2.° col moltiplicare tutti i termini pel denominatore x;
3.° col dividerli tutti per 2;
4.° col cambiare tutti i segni.

Un' equazione del grado generico m, per ciò che si è detto, potrà sempre ridursi alla forma

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Sx+T=0,$$

in cui $A, B, C \ldots S, T$ sono quantità tutte cognite, positive o negative.

Alcune volte, affinchè si conosca il posto, che ciascun coefficiente occupa nell' equazione, ci serviremo de' coefficienti numerizzati $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$, ed allora l' equazione generica sarà

$$x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots\ldots$$
$$+A_rx^{m-r}\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m=0,$$

Occorrendo di trovare un coefficiente marcato collo zero, come sarebbe A_0, questo non sarà che l'unità, cioè il coefficiente di x^m; e se si trovasse A senza numero, questo sarebbe lo stesso che A_1.

Se l'equazione non è *completa*, cioè se vi mancano uno o più termini, si marca talvolta la mancanza col segno ✻ messo nel loro luogo. Quindi l'equazione incompleta

$$x^5 + 6x^3 + 2 = 0$$

si scriverebbe

$$x^5 \ * \ + 6x^3 \ * \ * \ + 2 = 0.$$

§. 26. *Prop.* Siano $a, b, c, \ldots$ tante radici dell'equazione

$$(E) \quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + T = 0,$$

essa potrà esattamente dividersi per $x - a$, per $x - b$, per $x - c$, ec.

Prendiamo la radice a, e perciò dividiamo la (E) per $x - a$, e sia il quoziente

$$(F) \quad x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \ldots + S'$$

ed inoltre siavi, se è possibile, un residuo r: è chiaro che sussisterà l'uguaglianza

$$E = (x - a)F + r.$$

Ma per ipotesi E si annulla al cangiarsi di x in a (§. 23), e si annulla nel tempo stesso anche il prodotto $(x - a)F$; perciò la precedente uguaglianza si riduce a

$$r = 0,$$

da cui impariamo che E, cioè l'equazione proposta è esattamente divisibile per $x - a$.

Si replichi ora lo stesso discorso su le radici b, c, ec. e si troverà che la proposta è divisibile similmente per $x - b$, $x - c$, ec.; dunque ec. Quindi è chiaro che un' equazione qualunque potrà sempre rappresentarsi col prodotto de' fattori lineari come segue:

$$(x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots (x - t) = 0.$$

§. 27. *Prop.* Se non si vorranno contemplare che le radici reali dell' equazione proposta, questa si potrà decomporre colla divisione in tanti fattori lineari quante sono le radici reali; e se il numero di queste sarà minore del grado dell' equazione, vi sarà di più un fattore che non diventerà mai negativo per qualsivoglia valore si dia all' incognita, e che sarà di grado pari coll' ultimo termine positivo.

La prima parte dipende immediatamente dalla proposizione precedente: per dimostrar la 2.ª parte supponiamo che dopo aver tolto dalla proposta tutti i fattori lineari provenienti da n radici reali non rimanga che il polinomio

$$x^{m-n} + ax^{m-n-1} + \text{ec.}$$

Se fosse possibile che un valor reale di x per es. p rendesse questo polinomio $= -K$, cioè una quantità negativa, è facile a vedersi che ce ne sarebbe sempre un altro q che potrebbe farlo tornar positivo; e per q si potrà prendere o l' infinito, o una quantità tale che renda il termine x^{m-n} maggiore della somma di tutti gli altri. Ciò posto: prima che x cresca dallo stato p con cui ha dato il risultato $-K$ allo stato q con cui dà il risultato positivo H, dovrà passare per uno stato o valore reale intermedio, in cui si avrà un risultato $=0$. Sia f questo valore; ed il polinomio $x^{m-n} +$ ec. sarà di nuovo divisibile per $x-f$, cioè avrà un altro fattore lineare e reale contro l' ipotesi.

Che poi l' ultimo termine di questo polinomio debba essere di grado pari coll' ultimo termine positivo ne saremo convinti riflettendo che se egli fosse di grado impari, ci sarebbe qualche quantità negativa che sostituita invece di x darebbe un risultato negativo, che abbiamo di già escluso. E se l' ultimo termine fosse negativo, la supposizione di $x=0$ ridurrebbe il polinomio ad un risultato nuovamente negativo. Dunque ec.

§. 28. *Osservazione.* Dall' essere poi un polinomio in x di grado pari, ed irreducibile ad un risultato negativo non ne discende di necessaria conseguenza che non possa avere altri fattori lineari e reali: egli difatti potrebbe contenere un numero qualunque di fattori uguali della forma $(x \pm g)^{2r}$. Quindi conchiuderemo che se un polinomio in x non ha fattori lineari e reali, 1.° esso sarà di grado pari; 2.° avrà l'ultimo termine positivo; 3.° non ci sarà alcun valor reale di x che il renda negativo: ma se un tal polinomio avrà queste ultime tre condizioni, o avrà nessun fattore reale di primo grado, o conterrà un numero pari di tali fattori.

§. 29. *Prop.* Se un' equazione avrà tutte le sue radici reali e positive, avrà altresì tutti i segni alternativamente positivi e negativi; e se avrà tutte le sue radici reali e negative, avrà tutti i segni positivi.

Nel 1.° caso i fattori lineari saranno $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec., e perciò l'equazione sarà della forma

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-t)=0$$

prodotto che sviluppato ha appunto i segni alternativi, com' è noto dalla natura della moltiplicazione. Nel 2.° caso la forma dell' equazione sarà

$$(x+a)(x+b)(x+c) \ldots (x+t)=0,$$

la quale sviluppata ha evidentemente tutti i segni positivi.

§. 30. *Prop.* Se un' equazione ha tutti i segni alternativi, non potrà avere nessuna radice reale negativa; e se ha tutti i segni positivi, non potrà avere nessuna radice reale positiva.

Nel primo caso, se fosse possibile che ci fosse una radice reale negativa, questa sostituita nella proposta renderebbe i termini o tutti positivi o tutti negativi, secondo che l'esponente massimo di x fosse pari o dispari, e perciò non potrebbero distruggersi. Nel 2.° sostituita la quantità positiva invece di x si avrebbe un risultato positivo, il quale di nuovo non potrebbe annichilarsi. Dunque ec.

§. 31. Prima di passare ad esporre il seguente teorema dovuto a *Cartesio*, è d'uopo sapere che si chiamano *variazioni di segno* i passaggi dal segno $+$ al segno $-$, ovvero dal segno $-$ al $+$ in due termini consecutivi di un'equazione ordinata; e che si dicono *permanenze di segno* i passaggi da un segno ad un altro della medesima natura, come da $+$ in $+$, ovvero da $-$ in $-$. Amendue questi accidenti si possono chiamare con nome comune *successioni di segno*. E' poi facile a vedersi che il numero di queste successioni in un'equazione completa del grado m è appunto $= m$; e se l'equazione è incompleta, il numero delle successioni sarà ancora il medesimo, purchè si suppliscano i termini mancanti col segno $\pm$ e col coefficiente o.

Prop. In un'equazione qualunque il numero delle radici positive non può eccedere il numero delle variazioni di segno, e quello delle negative non può eccedere il numero delle permanenze. E se le radici sono tutte reali, le positive saranno precisamente tante quante le variazioni, e le negative quante le permanenze.

Supponiamo per fissar le idee che si abbia l'equazione

$$x^6 + Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F = 0$$

la quale contenga di già sei radici o tutte reali o tutte immaginarie, ovvero in parte reali ed in parte immaginarie d'un'equazione, che deve ascendere al grado m. Sia a una nuova radice, ed il fattore $x - a$ sia un fattor lineare che deve comporre la medesima. Eseguendo la moltiplica si formeranno i due prodotti parziali

$$\left.\begin{array}{l} x^7 + Ax^6 - Bx^5 - Cx^4 + Dx^3 - Ex^2 + Fx \\ \quad - ax^6 - aAx^5 + aBx^4 + aCx^3 - aDx^2 + aEx - aF \end{array}\right\} = 0;$$

dove nella linea superiore si veggono gli stessi segni che nell' equazione proposta, e nell' inferiore i contrarj. Ora nel raccogliere la somma de' termini che si corrispondono verticalmente, dove questi sono di segno contrario, tanto può aver luogo il segno della linea superiore, quanto quello dell' inferiore, giacchè non supponiamo alcun rapporto particolare fra i coefficienti A, B, C, ec., e la radice a. Finchè dunque staremo nella linea superiore, noi trasporteremo nel prodotto le medesime successioni della proposta; ma se discenderemo nell' inferiore per raccogliere il segno relativo a' due termini verticali, allora una permanenza si cambierà in variazione. Per es. se nella seconda colonna $\begin{matrix} +Ax^6 \\ -ax^6 \end{matrix}$ si dovrà prendere il segno inferiore, allora la permanenza $+x^7+Ax^6$ sarà cangiata in una variazione. Discesi poi che saremo nell' inferiore vi ci avremo da fermare finchè i segni delle colonne verticali saranno simili, ed in tal caso continueranno le medesime successioni della proposta; ma tornando questi ad esser dissimili, potrà accadere tanto di tornare alla linea superiore, quanto di rimanere ancora nell' inferiore. Se si torna alla superiore, o una variazione si cambia in permanenza, o una permanenza in variazione, giacchè ciò non può accadere che per un accidente simile ai due seguenti

$$\begin{matrix} -Bx^5-Cx^4 \\ -aAx^5+aBx^4 \end{matrix}\quad,\qquad \begin{matrix} +Bx^5+Cx^4 \\ -aAx^5-aBx^4 \end{matrix}$$

Nel primo se dal termine aAx^5 dovremo passare al termine Cx^4 per raccogliere il segno, vi ha visibilmente un cangiamento di variazione in permanenza, e nel secondo un cangiamento di permanenza in variazione. Se poi avremo a rimanere nella linea inferiore, proseguirà l' ordine delle successioni come nell' equazione proposta: Può danque accadere indistintamente di passare più volte dalla linea superiore all' inferiore, e da questa alla superiore; ma da quest' ultima si dovrà necessariamente discendere almeno una volta per raccogliere il segno dell' ultimo termine aF, e questo passaggio produrrà sempre una variazione di più che nella proposta. Dunque coll' introdurre nella proposta una radice positiva il numero delle variazioni può crescere più dell' unità; e valendo questo discorso per qualunque altra radice positiva b, c, ec., ne viene che il numero delle variazioni di segno potrà esser maggiore del numero delle radici positive, ma viceversa queste non potranno mai superare il numero delle variazioni.

Se ora la stessa equazione

$$x^6 + Ax^5 - Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

si moltiplicherà per un fattore $x + b$ proveniente da una nuova radice negativa $-b$, si proverà collo stesso discorso, che si aumenterà almeno di un' unità il numero delle permanenze, e quindi che se le radici negative saranno più di una, il numero loro non potrà mai superare il numero delle permanenze, con che resta dimostrata la prima parte.

Se poi le radici saranno tutte reali, siccome si avrà tanto il numero delle successioni, quanto il numero delle radici medesime $= m$, se si dirà

il numero delle radici positive $= h$,
quello delle radici negative $= k$,
il numero delle variazioni $= v$,
quello delle permanenze $= p$,

sarà $h + k = v + p$; e non potendo essere $h > v$, nè $k > p$, dovrà essere $h = v$, $k = p$, cioè il numero delle radici positive uguale al numero delle variazioni, e quello delle negative uguale al numero delle permanenze, come si era proposto in secondo luogo.

§. 32. Se l'equazione sarà incompleta, siccome vi si debbono interpolare i termini che mancano col segno doppio $\pm$, e col coefficiente o, possono accadere due casi, cioè che si abbiano le medesime variazioni e permanenze tanto prendendo il segno superiore come l'inferiore, ovvero che ne risulti un numero diverso. Nel primo caso non si potrà conchiudere altro che ciò che è stato or ora dimostrato nella presente proposizione; ma nel secondo, siccome si ricaverebbero delle conseguenze discordanti sul numero delle radici positive e negative, perciò ve ne saranno di sicuro di immaginarie.

Si osservi che tutte le volte che si supplisce un termine fra due di segno diverso, non possono aver luogo che le due disposizioni seguenti di segni, cioè

$$+ \pm - \quad ; \quad - \pm +,$$

nelle quali si ha sempre una variazione ed una permanenza; ma se i termini collaterali a quello che manca hanno i medesimi segni, allora le disposizioni possibili essendo

$$+ \pm + \quad , \quad - \pm -,$$

si vede manifestamente, che prendendo nella prima il segno superiore si hanno due permanenze, e prendendo l'inferiore si hanno due variazioni, risultati fra loro discordi: lo stesso vale per la seconda disposizione. Dunque nel caso che in un'equazione manchi un qualche termine, ed i collaterali di questo abbiano i medesimi segni, saremo sicuri che essa avrà delle radici immaginarie; e vedremo ben presto che queste non possono essere meno di due.

Art. II.

Relazioni fra i coefficienti, e le radici.

§. 33. *Prop.* Nell' equazione generica, ed ordinata (E) $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Hx^{m-r} \ldots + T = 0$
1.° il coefficiente di x^{m-1} preso col segno contrario si uguaglia alla somma di tutte le radici;
2.° il coefficiente di x^{m-2} si uguaglia alla somma de' binarj, che si posson fare con le radici medesime;
3.° il coefficiente di x^{m-3} preso col segno contrario si uguaglia alla somma de' ternarj che si posson fare colle radici; ec. In generale il coefficiente di x^{m-r} si uguaglia alla somma de' prodotti che si posson fare combinando ad r ad r le radici della proposta, prendendolo però col proprio segno o col contrario secondo che r è pari o dispari. Finalmente l'ultimo termine T s'uguaglia al prodotto di tutte le radici o col proprio segno o col contrario secondo che m è pari o dispari.

Supponiamo vera la proposizione per l'equazione del grado m, essa dovrà verificarsi per l'equazione di grado $m+1$. Siano dunque le radici della prima $a, b, c \ldots p$; e sarà per supposizione

$$-A = a + b + c \quad \ldots + p$$
$$B = ab + ac \ldots + bc + bd \ldots$$
$$-C = abc + abd \ldots + bcd \ldots$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\pm T = abc \ldots p.$$

Si moltiplichi la (E) pel nuovo fattore $x - q$, e sia il prodotto

$$(F) \quad x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} \ldots + V' = 0.$$

Ora è chiaro che i coefficienti di questa non sono altro che

$$A' = A - q$$
$$B' = B - Aq$$
$$C' = C - Bq$$
ec.
$$V' = -Tq$$

cioè, rimettendo i valori di $A, B, C \ldots T$, e lasciando i secondi membri sotto forma positiva, si avrà

$$-A' = a + b + c \ldots\ldots + p + q$$
$$B' = ab + ac \ldots\ldots + bc + bd \ldots\ldots aq + bq \ldots\ldots + pq$$
$$-C' = abc + abd \ldots\ldots + bcd \ldots\ldots + abq \ldots\ldots + npq$$
ec.
$$\mp V' = abc \ldots pq,$$

cioè i coefficienti di (F) seguono la legge dei coefficienti di (E). Ora la legge proposta si verifica nelle equazioni di 2.° grado, com'è facilissimo a vedersi, dunque si verifica in quelle del 3.°, 4.°, ec. grado, ed in tutte quelle de' gradi superiori.

Mancando in un'equazione il 2.° termine, sarebbe

$$a + b + c + \ldots = 0,$$

ed allora la somma delle radici positive si uguaglierebbe alla somma delle radici negative. Quindi un'equazione mancante del 2.° termine non può aver tutte le radici reali e positive. Così se mancherà il terzo termine, le radici avranno una tal relazione fra loro, che la somma di tutti i binarj positivi si uguaglierà alla somma di tutti i binarj negativi; e così dicasi degli altri coefficienti. In generale la mancanza di un qualunque termine è un indizio sicuro, che la proposta equazione non può avere tutte le sue radici reali, e positive.

Sia per es. l'equazione

$$x^3 * -2x^2 + 16x - 15 = 0,$$

i cui coefficienti paragonati con quelli della (E) danno

$$A = 0\,,\ B = -2\,,\ C = 16\,,\ D = -15.$$

Questa risoluta co' noti metodi ci somministra le quattro radici

$$x = 1\,,\ x = -3\,,\ x = 1 + 2\sqrt{-1}\,,\ x = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

Sommando queste radici prese ad una ad una, a due a due, a tre a tre, e per fine a quattro a quattro, si ha

$$1 - 3 + 1 + 2\sqrt{-1} + 1 - 2\sqrt{-1} = 0\,;$$

$$-1.3 + 1(1+2\sqrt{-1}) + 1(1-2\sqrt{-1}) - 3(1+2\sqrt{-1}) - 3(1-2\sqrt{-1}) + (1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = -2\,;$$

$$-1.3(1+2\sqrt{-1}) - 1.3(1-2\sqrt{-1}) + 1(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) - 3(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = -16\,;$$

$$-1.3(1+2\sqrt{-1})(1-2\sqrt{-1}) = -15.$$

§. 34. *Prop.* Assegnare il valore de' coefficienti di una data equazione, quando questa si decompone colla divisione per alcuno de' suoi fattori lineari.

Cangiamo nella proposta (E) x nella radice in a, e si avrà il risultato

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \ldots + T = 0.$$

Sottraggasi questo dalla (E), e si avrà un residuo, che si potrà mettere sotto la forma

$$x^m - a^m + A(x^{m-1} - a^{m-1}) + B(x^{m-2} - a^{m-2}) + C(x^{m-3} - a^{m-3}) \ldots + S(x - a) = 0\,;$$

ovvero dividendo per $x - a$, ed ordinando i termini in file verticali

$$\left.\begin{array}{llllll}
x^{m-1} + ax^{m-2} & + a^2x^{m-3} & + a^3x^{m-4} & + \ldots\ldots & + a^{m-1} \\
\phantom{x^{m-1}} + Ax^{m-2} & + Aax^{m-3} & + Aa^2x^{m-4} & + \ldots\ldots & + Aa^{m-2} \\
 & + Bx^{m-3} & + Bax^{m-4} & + \ldots\ldots & + Ba^{m-3} \\
 & & + Cx^{m-4} & + \ldots\ldots & + Ca^{m-4} \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & + Ra \\
 & & & & + S
\end{array}\right\} = 0.$$

Questo si riduce alla nuova forma

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + C'x^{m-4} \dots + S = 0$$

ponendo

$$A' = a + A$$
$$B' = a^2 + aA + B$$
$$C' = a^3 + a^2A + aB + C$$
$$\vdots$$
$$S' = a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \dots + Ra + S.$$

Tali sono i valori domandati; e questi si sarebbero ottenuti anche dividendo immediatamente la (E) per $x - a$.

E' inutile di far osservare che se la proposta si spogliasse del fattore $x - b$ invece di $x - a$, i coefficienti precedenti involgerebbero la radice b in luogo di a.

§. 35. *Prop.* Se nell' equazione (E), che rappresenteremo coi coefficienti numerizzati come segue

$$x^m + Ax^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \dots + A_rx^{m-r} \dots + A_m = 0,$$

supporremo $= 0$ una alla volta tutte le radici $a, b, c, \dots t$, e che siano $A_r^{(a)}$, $A_r^{(b)}$, $A_r^{(c)}$, ec. i valori particolari, che in tali supposizioni riceve un coefficiente qualunque A_r, si avrà l' eguaglianza

$$A_r^{(a)} + A_r^{(b)} + A_r^{(c)} + \dots + A_r^{(t)} = \pm (m - r) A_r$$

valendo il $+$ per r pari, ed il $-$ per r è dispari.

Non essendo A_r altro che la somma di tutti i prodotti possibili, che risultano combinando ad r ad r le radici della proposta (§. 33), ogni termine del valore di A_r deve contenere un numero r di tali radici tutte fra loro diverse (facendosi qui astrazione dal caso che la proposta contenga delle radici uguali). Perciò ognuno di questi termini svanirà all' annullarsi di qualunque delle r radici che contiene, ma sussisterà all' annullarsi delle altre $m - r$ radici che non contiene. Dunque nella somma de' risultati $A_r^{(a)} + A_r^{(b)} +$ ec. ogni termine del coefficiente A_r sarà ripetuto $m - r$ volte, e quindi si verificherà l'uguaglianza che abbiam proposto.

Prendiamo per esempio l'equazione del 5.° grado
$$x^5 + Ax^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5 = 0,$$
le cui radici siano a, b, c, d, e. Consideriamo il coefficiente A_3, che sappiamo essere pel §. 33 =
$$-(abc + abd + acd + bcd + abe + ace + bce + ade + bde + cde).$$

Se supponiamo, si avrà

$a = 0$ . . . . . $A_3^{(a)} = -(bcd + bce + bde + cde)$

$b = 0$ . . . . . $A_3^{(b)} = -(acd + ace + ade + cde)$

$c = 0$ . . . . . $A_3^{(c)} = -(abd + abe + ade + bde)$

$d = 0$ . . . . . $A_3^{(d)} = -(abc + abe + ace + bce)$

$e = 0$ . . . . . $A_3^{(e)} = -(abc + abd + acd + bcd)$,

e perciò sommando tutti questi risultati parziali, sarà
$$A_3^{(a)} + A_3^{(b)} + A_3^{(c)} + A_3^{(d)} + A_3^{(e)} =$$
$$-2(abc + abd + acd + \ldots + cde) = -(5-3)A_3.$$

Si vede poi facilmente che l'equazione, a cui si riduce la proposta col porre uguale a zero una delle sue radici, come a, deve essere identica con quella che si otterrebbe, se la proposta si dividesse per $x - a$; mentre nell'uno e nell'altro modo si deve ottenere un'altra equazione depressa di un grado, priva della radice a, e contenente tutte le altre b, c, d, ec., i coefficienti della quale debbono essere indipendenti da a.

§. 36. Assumiamo i simboli $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}$, ec., come al §. 20, per indicare le somme delle quantità semplici $a, b, c, \ldots t$, de' loro quadrati, de' loro cubi, ec., e se queste saranno le radici dell'equazione

$$(E) \quad x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - A_3x^{m-3} \ldots \pm A_m = 0$$

varrà l'eguaglianza

$S^{(r)} = A_1 S^{(r-1)} - A_2 S^{(r-2)} + A_3 S^{(r-3)} - A_4 S^{(r-4)} \ldots \mp r A_r$
dove r è sempre un numero intiero positivo non maggiore di m, e nell'ultimo termine vale il segno superiore se r è pari, e l'inferiore se r è dispari.

Dividiamo la (E) per $x-a$, poi la stessa per $x-b$, indi per $x-c$, ec., e per ultimo per $x-t$, e supponiamo

$$\frac{E}{x-a} = x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1} = 0$$
$$\frac{E}{x-b} = x^{m-1} + C_1 x^{m-2} + C_2 x^{m-3} + \ldots + C_{m-1} = 0$$
$$\frac{E}{x-c} = x^{m-1} + D_1 x^{m-2} + D_2 x^{m-3} + \ldots + D_{m-1} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{E}{x-t} = x^{m-1} + S_1 x^{m-2} + S_2 x^{m-3} + \ldots + S_{m-1} = 0.$$

Sommando tutti i quozienti ne nascerebbe

$$\begin{aligned} m x^{m-1} &+ (B_1 + C_1 + D_1 + \ldots + S_1) x^{m-2} \\ &+ (B_2 + C_2 + D_2 + \ldots + S_2) x^{m-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ B_{m-1} + C_{m-1} + D_{m-1} + \ldots + S_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Ma B_1, B_2, B_3, ec.; C_1, C_2, ec. non sono altro che ciò che diventano A_1, A_2, A_3, ec., cioè i coefficienti della (E) quando si annullano una alla volta le radici a, b, c, ec.; dunque per la proposizione precedente sarà

$$\begin{aligned} B_1 + C_1 + D_1 + \ldots + S_1 &= -(m-1) A_1 \\ B_2 + C_2 + D_2 + \ldots + S_2 &= (m-2) A_2 \\ B_3 + C_3 + D_3 + \ldots + S_3 &= -(m-3) A_3 \\ &\vdots \\ B_{m-1} + C_{m-1} + D_{m-1} + \ldots + S_{m-1} &= \pm A_{m-1} \end{aligned}$$

Inoltre avendosi in virtù del §. 34 le uguaglianze

$$\begin{aligned}
B_1 &= a - A_1\\
C_1 &= b - A_1\\
D_1 &= c - A_1\\
&\vdots\\
S_1 &= t - A_1\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= a^2 - aA_1 + A_2\\
C_2 &= b^2 - bA_1 + A_2\\
D_2 &= c^2 - cA_1 + A_2\\
&\vdots\\
S_2 &= t_2 - tA_1 + A_2\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= a^3 - a^2A_1 + aA_2 - A_3\\
C_3 &= b^3 - b^2A_1 + bA_2 - A_3\\
D_3 &= c^3 - c^2A_1 + cA_2 - A_3\\
&\vdots\\
S_3 &= t^3 - t^2A_1 + tA_2 - A_3\,;
\end{aligned}$$

ec.,

se sommeremo in ciascuna classe le file verticali, e sostituiremo nel tempo stesso alle somme i valori già assegnati, introducendo i simboli convenuti, avremo le nuove uguaglianze

$$\begin{aligned}
-(m-1)A_1 &= S^{(1)} - mA_1\\
(m-2)A_2 &= S^{(2)} - S^{(1)}A_1 + mA_2\\
-(m-3)A_3 &= S^{(3)} - S^{(2)}A_1 + S^{(1)}A_2 - mA_3
\end{aligned}$$

ec.,

dalle quali si ricava

$$
H \begin{cases} S^{(1)} = A_1 \\ S^{(2)} = A_1 S^{(1)} - 2A_2 \\ S^{(3)} = A_1 S^{(2)} - A_2 S^{(1)} + 3A_3 \\ \text{ec.} \\ S^{(r)} = A_1 S^{(r-1)} - A_2 S^{(r-2)} + A_3 S^{(r-3)} \ldots \mp rA_r \end{cases}
$$

formola che si doveva dimostrare.

Nel caso di $r = m$ si avrebbe

$$S^{(m)} = A_1 S^{(m-1)} - A_2 S^{(m-2)} + A_3 S^{(m-3)} \ldots\ldots \mp mA_m.$$

Per estendere questa formola al caso di $r > m$, moltiplichiamo la proposta per x^n, sicchè ne nasca la nuova equazione

$$x^{m+n} - Ax^{m+n-1} + A_2 x^{m+n-2} - A_3 x^{m+n-3} \ldots \pm A_m x^n = 0.$$

Mutando successivamente x nelle radici a, b, c, ec. nasceranno le seguenti:

$$a^{m+n} - Aa^{m+n-1} + A_2 a^{m+n-2} - A_3 a^{m+n-3} \ldots \pm A_m a^n = 0$$

$$b^{m+n} - Ab^{m+n-1} + A_2 b^{m+n-2} - A_3 b^{m+n-3} \ldots \pm A_m b^n = 0$$

$$\vdots$$

$$t^{m+n} - At^{m+n-1} + A_2 t^{m+n-2} - A_3 t^{m+n-3} \ldots \pm A_m t^n = 0$$

Sommandole tutte insieme, ed introducendo i simboli già usati, avremo

$$S^{(m+n)} - AS^{(m+n-1)} + A_2 S^{(m+n-2)} - A_3 S^{(m+n-3)} \ldots \pm A_m S^{(m)} = 0;$$

e se in questa porremo successivamente $n = 1, 2, 3$, ec., otterremo una serie di formole particolari

$$S^{(m+1)} = AS^{(m)} - A_2 S^{(m-1)} + A_3 S^{(m-2)} \ldots\ldots \mp A_m S^{(1)}$$

$$S^{(m+2)} = AS^{(m+1)} - A_2 S^{(m)} + A_3 S^{(m-1)} \ldots\ldots \mp A_m S^{(2)}$$

ec.

le quali entrano nella formola proposta.

Questo teorema è di *Newton*.

§. 37. Siccome dati i coefficienti A_1, A_2, A_3, ec., abbiam sempre in nostro potere i valori di $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec.

per ciò che ora abbiam dimostrato; così dati questi ultimi valori potremo viceversa determinare i coefficienti dell' equazione a cui appartengono. Infatti niente di più facile che il ricavare dalle formole H del §. precedente

$$K \begin{cases} A = S^{(1)} \\ A_2 = \dfrac{A_1 S^{(1)} - S^{(2)}}{2} \\ A_3 = \dfrac{A_2 S^{(1)} - A_1 S^{(2)} + S^{(3)}}{3} \\ A_4 = \dfrac{A_3 S^{(1)} - A_2 S^{(2)} + A_1 S^{(3)} - S^{(4)}}{4} \\ \text{ec.} \end{cases}$$

§. 38. Vogliansi a cagion d' esempio le somme delle potenze delle radici dalla prima fino alla sesta almeno nell' equazione

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0.$$

Fatto il paragone de' coefficienti di questa colla generale del §. 36 si ha $A_1 = 2$, $A_2 = -1$, $A_3 = -4$, e perciò si troverà per mezzo delle formole H

$S^{(1)} = 2$
$S^{(2)} = 6$
$S^{(3)} = 2$
$S^{(4)} = 2$
$S^{(5)} = -18$
$S^{(6)} = -42$
ec.

Siano invece date le somme
$S^{(1)} = 32$; $S^{(2)} = 336$, $S^{(3)} = 3680$, $S^{(4)} = 41024$; $S^{(5)} = 463232$; $S^{(6)} = 5280000$, e si cerchino i coefficienti da A_1 fino ad A_6: si troverà colle formole K del §. precedente

$$A_1 = 32 \quad , \quad A_2 = 344 \quad , \quad A_3 = 1312$$
$$A_4 = 784 \quad , \quad A_5 = 128 \quad , \quad A_6 = 0;$$

onde l'equazione dotata delle somme proposte sarebbe

$$x^6 - 32x^5 + 344x^4 - 1312x^3 + 784x^2 - 128x = 0.$$

§. 39. Sarà ora facile di esprimere mediante i coefficienti dell'equazione le somme simmetriche de' prodotti delle sue radici, che al §. 20 abbiamo indicato per mezzo de' simboli $S^{(m,n)}$, $S^{(m,n,p)}$, ec. Vogliasi per es. la somma $S^{(1,2,3)}$ nell'equazione di sopra

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0.$$

Richiamando dal §. 21 la formola (2), e posto in essa $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, si avrà in primo luogo

$$S^{(1,2,3)} = S^{(3)} S^{(1,2)} - S^{(4,2)} - S^{(5,1)}.$$

Inoltre usando della formola (1) dello stesso §. si troverà

$$S^{(1,2)} = S^{(1)} S^{(2)} - S^{(3)} = 10$$
$$S^{(4,2)} = S^{(4)} S^{(2)} - S^{(6)} = 54$$
$$S^{(5,1)} = S^{(5)} S^{(1)} - S^{(6)} = 6,$$

e perciò sarà, dopo eseguite le sostituzioni di questi valori,

$$S^{(1,2,3)} = 2.10 - 54 - 6 = -40.$$

§. 40. *Prop.* Assegnare la somma delle potenze reciproche delle radici di un'equazione.

Una quantità si chiama *reciproca*, quando essa forma il denominatore di una frazione, il cui numeratore è l'unità: così $\frac{1}{a}$ è la quantità reciproca di a; $\frac{1}{a^2 + b^2}$ è la reciproca di $a^2 + b^2$, ec. Inoltre si chiama *reciproca* un'equazione, le cui radici sono reciproche di quelle di un'altra equazione. Così se saranno a, b, c, ec. le radici di una data equazione, quelle della reciproca saranno $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, ec. Quest'ultima ha la proprietà, che la massima radice della proposta per lei diventa la minima, e viceversa.

Ciò posto si cangi x in $\frac{1}{y}$ nella proposta

$$(E)\qquad x^m - Ax^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots \pm A_m = 0,$$

e dopo aver moltiplicati tutti i termini per y^m, si otterrà l'equazione in y della forma

$$A_m y^m - A_{m-1} y^{m-1} + A_{m-2} y^{m-2} - A_{m-3} y^{m-3} \ldots + A_2 y^2 + Ay + 1 = 0$$

che è la reciproca di (E).

Indichiamo per un momento con $s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}$, ec. le somme delle potenze positive delle radici di quest'ultima, ed avremo dalle formole H del §. 36

$$s^{(1)} = \frac{A_{m-1}}{A_m},\ \text{ovvero, togliendo la frazione}$$

$$A_m s^{(1)} = A_{m-1};$$

e similmente

$$A_m s^{(2)} = A_{m-1} s^{(1)} - 2A_{m-2}$$
$$A_m s^{(3)} = A_{m-1} s^{(2)} - A_{m-2} s^{(1)} + 3A_{m-3}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$A_m s^{(r)} = A_{m-1} s^{(r-1)} - A_{m-2} s^{(r-2)} + A_{m-3} s^{(r-3)} \ldots$$

Ma dall'essere $x = \frac{1}{y}$, ovvero $y = \frac{1}{x}$ ne segue che se dinoteremo le somme delle potenze reciproche della proposta co' segni d'indice negativo $S^{(-1)}, S^{(-2)}, S^{(-3)}$, ec., potremo sostituire questi ultimi ai precedenti $s^{(1)}, s^{(2)}$, ec. Avremo perciò le formole domandate nelle seguenti

$$L\ \left\{\begin{array}{l} A_m S^{(-1)} = A_{m-1} \\ A_m S^{(-2)} = A_{m-1} S^{(-1)} - 2A_{m-2} \\ A_m S^{(-3)} = A_{m-1} S^{(-2)} - A_{m-2} S^{(-1)} + 3A_{m-3}; \\ \text{e in generale} \\ A_m S^{(-r)} = A_{m-1} S^{(-r+1)} - A_{m-2} S^{(-r+2)} + \\ \qquad A_{m-3} S^{(-r+3)} \ldots \mp rA_{m-r}, \end{array}\right.$$

dove sempre vale il segno superiore nel caso di r pari.

Se si volessero le somme delle potenze reciproche delle radici dell'equazione precedente

$$x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0,$$

in cui si ha $m = 3$, $A_m = 4$, $A_{m-1} = 1$, $A_{m-2} = -2$, $A_{m-3} = -1$, $A_{m-4} = 0$, ec., si troverebbe

$$S^{(-1)} = \frac{1}{4}; \; S^{(-2)} = \frac{17}{4^2}; \; S^{(-3)} = -\frac{23}{4^3}; \; S^{(-4)} = \frac{97}{4^4};$$

ec.

Art. III.

Alcuni caratteri delle radici reali, immaginarie, ed irrazionali.

§. 41. *Prop.* Se un' equazione ha l' ultimo termine positivo, ed altronde abbia delle radici reali, avrà un numero pari di radici positive; e se ha l' ultimo termine negativo, avrà di sicuro un numero dispari di radici reali parimenti positive.

La proposta sia in primo luogo

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + T = 0,$$

in cui i coefficienti A, B, C, ec. siano positivi o negativi, e l' ultimo T sia positivo. Suppongasi questa nata dal prodotto di altre due, la prima delle quali non abbia che radici reali $a, b, c \ldots h$ in numero n, e la seconda non ne contenga più alcuna, e perciò sia di grado pari con l' ultimo termine positivo (§. 27). Potremo dunque supporre l' uguaglianza

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + T =$$
$$(x^n + ax^{n-1} + \ldots + q)(x^{m-n} + a'x^{m-n-1} + \ldots + q');$$

e dovendo il secondo membro, sviluppato che sia, diventare identico col primo, si avrà $T = qq'$; e siccome si è supposto T positivo, e tale pure deve essere q', perciò anche q sarà positivo. Ma perchè q sia positivo bisogna distinguere il caso di n pari da quello di n dispari. Nel primo q occupa un posto dispari nel polinomio $x^n + ax^{n-1} + \ldots$, e perciò preso col suo segno (§. 33) uguaglierà il prodotto di tutte le radici, onde sarà $q = abc \ldots h$. Sarà dunque positivo questo prodotto, e quindi o tutte le radici $a, b, c, \ldots h$ saranno positive, o lo saranno a due a due. Nel caso dunque di n pari il numero delle radici reali e positive sarà pari. Nel caso poi di n dispari trovandosi q in luogo pari si uguaglierà col segno mutato al prodotto delle n radici, e quindi sarà $q = -abc \ldots h$. Ma dovendo q essere positivo, tale dovrà essere anche il prodotto $-abc \ldots h$; e non potendosi ciò verificare senza che una o tre o cinque ec. siano le radici negative, resteranno le positive in numero di due, o di quattro, o di sei ec., cioè sempre in numero pari.

Sia in secondo luogo negativo l'ultimo termine T della proposta, e questa si supponga nata dal prodotto de' due polinomj

$$(x^n + ax^{n-1} \ldots - q)(x^{m-n} + a'x^{m-n-1} \ldots + q') = 0.$$

E' chiaro che dovrà reggere l'uguaglianza $-T = -qq'$; ma siccome se n è pari q si trova in sede dispari, quindi sarà $-q = abc \ldots h$, prodotto che non può essere negativo senza che una o tre o cinque ec. delle radici $a, b, c \ldots$ siano negative, e quindi in numero dispari quelle che restano. Nel caso finalmente di n dispari sarebbe $+q = abc \ldots h$, prodotto che per essere positivo non può ammettere fattori negativi che in numero pari, e perciò in numero dispari i positivi. Quindi nel caso di T negativo le radici reali e positive della proposta non potranno essere che in numero dispari, come si è proposto.

§. 42. *Prop.* Se R, r rappresenteranno delle quantità qualunque reali, ed I, i delle quantità immaginarie di qualunque valore e forma; ed inoltre l'equazione

$$(E) \qquad x^m + Ax^{m-1} \ldots \pm T = 0$$

si supponga avere per sua radice $x = R + I$, essa avrà sempre anche la sua *conjugata* $x = R - I$.

Siccome dalla prima di queste radici si forma il fattor lineare $x - R - I$, così sarà dimostrata la proposizione se faremo vedere che l'equazione (E) è divisibile anche per $x - R + I$.

Divisa la (E) pel fattore $x - R - I$ suppongasi $r + i$ il quoziente, onde abbia luogo l'uguaglianza

$$E = (r + i)(x - R - I).$$

Eseguendo questo prodotto si avrà

$$\left.\begin{matrix} (x - R)\, r + (x - R)\, i \\ - Ii \qquad - \quad Ir \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ora è evidente 1.° che il prodotto di una quantità reale per un' altra immaginaria non può essere che immaginario; 2.° che dovendo annullarsi l'equazione, nè potendo i termini reali venir distrutti dagli immaginarj, bisogna che questi si distruggano fra loro, affinchè non restino che i termini di forma tutta reale; 3.° il termine Ii, che comprende il prodotto di due parti tutte immaginarie, deve essere tutto reale, altrimenti al distruggersi dei termini immaginarj non rimarrebbe di reale che $(x - R)\, r = 0$, da cui si conchiuderebbe essere $x - R$ il fattore della proposta, cioè tutto reale contro l'ipotesi. Dovrà quindi essere

$$(x - R)\, i - Ir = 0;$$

e siccome da questa si ottiene

$$r = \frac{(x - R)\, i}{I},$$

sostituendo questo valore nel quoto $r + i$, esso diverrà

$$\frac{(x - R)i}{I} + i, \text{ ovvero } \frac{(x - R + I)\, i}{I},$$

e siccome questo è manifestamente divisibile per $x - R + I$, resta perciò dimostrato quanto fu proposto.

Se poi sarà $I=S\sqrt{-1}$, e quindi $R+I=R+S\sqrt{-1}$, cioè della forma competente a tutte almeno le funzioni algebriche immaginarie, l'equazione proposta, oltre il fattore $x-R-S\sqrt{-1}$, ammetterebbe necessariamente anche il suo conjugato $x-R+S\sqrt{-1}$, e quindi ancora il fattor reale di 2.° grado $x^2-2Rx+R^2+S^2$, che risulta dal loro prodotto, e che si può rappresentare sotto la forma $$x^2+px+q.$$

§. 43. Da queste due ultime proposizioni ne segue:
1.° che un' equazione qualunque dotata dell' ultimo termine negativo ha almeno una radice reale positiva;
2.° un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine negativo ha almeno due radici reali, l' una positiva, e l' altra negativa;
3.° un' equazione di grado dispari ha almeno una radice reale positiva o negativa secondo che il suo ultimo termine è negativo o positivo.

§. 44. *Prop.* Se un' equazione è dotata del fattore irrazionale $x-a-\sqrt{b}$, lo sarà ancora del fattore $x-a+\sqrt{b}$.

E' chiaro in primo luogo che se si ha un' uguaglianza fra quantità miste di razionali e di irrazionali, debbono uguagliarsi fra di loro le une e le altre separatamente. Se infatti si avesse
$$A+\sqrt{B}=F+\sqrt{G},$$
questa non potrebbe sussistere a meno che non fosse nel tempo stesso
$$A=F \quad , \quad \sqrt{B}=\sqrt{G};$$
avvegnachè se così non fosse, si avrebbe
$$A-F=\sqrt{G}-\sqrt{B},$$
cioè una quantità razionale uguale ad una irrazionale, lo che è impossibile.

Ciò posto si ponga nella (E) $a+\sqrt{b}$ invece di x, e si avrà un risultato, che potrà rappresentarsi sotto la forma

$$P + Q\sqrt{b} = o,$$

in cui P è l' aggregato di tutti i termini razionali, Q quello de' termini affetti dal fattor irrazionale $\sqrt{b}$. Dovendo pertanto essere a parte

$$P = o \quad , \quad Q\sqrt{b} = o,$$

se sottrarremo la seconda equazione dalla prima, avremo

$$P - Q\sqrt{b} = o;$$

e siccome questo non è che il risultato proveniente dal porre $a - \sqrt{b}$ invece di x nella (E), perciò essa sarà ugualmente soddisfatta anche dal valore $x = a - \sqrt{b}$; e quindi sarà divisibile tanto pel fattore lineare $x - a - \sqrt{b}$, quanto per $x - a + \sqrt{b}$; e quindi ancora pel fattore di secondo grado tutto razionale $x^2 - 2ax + a^2 - b$.

CAPO IV.

Eliminazione delle incognite dalle equazioni de' gradi superiori.

§. 45. Il grado di un' equazione contenente più incognite si valuta dal massimo esponente che ha una di esse quando si trovi sola in un termine, o dalla massima somma che vien formata dagli esponenti di due o più incognite, quando queste si trovino moltiplicate insieme in qualche termine. Due equazioni a due incognite potranno rappresentarsi sotto la forma

$$(A) \quad y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \ldots + T = o$$

$$(B) \quad y^n + A'y^{n-1} + B'y^{n-2} \ldots + T' = o,$$

purchè i coefficienti siano delle forme seguenti, cioè

$$A = a + bx$$
$$B = c + dx + ex^2$$
$$C = f + gx + hx^2 + kx^3$$
$$\vdots$$
$$T = p + qx + rx^2 \dots + tx^m$$

$$A' = a' + b'x$$
$$B' = c' + d'x^2$$
$$C' = f' + g'x^2 + h'x^2 + k'x^3$$
$$\vdots$$
$$T' = p' + q'x + r'x^2 \dots + t'x^n.$$

Queste equazioni saranno poi *complete* o *incomplete* secondo che i loro coefficienti conterranno o no tutti i termini, che abbiamo loro qui assegnato.

Qui parleremo specialmente di due equazioni a due incognite; e l'equazione che generalmente si ottiene dall'eliminazione, e che non comprende che una sola incognita, sarà da noi chiamata la *finale* o *risultante*.

§. 46. *Prop.* Assegnare le condizioni ed il grado che deve avere la risultante delle due equazioni (A), e (B).

Fingiamo che queste due equazioni siano di già risolute per rapporto all'incognita y, e che perciò siansi già ottenuti dalla (A) gli m valori di y, i quali saranno altrettante funzioni di x, che chiameremo rispettivamente a', a'', a''', ec. . . . $a^{(m)}$, e dalla (B) altri n valori della medesima y, cioè b', b'', . . . $b^{(m)}$, tutti in funzioni di x. Potremo rappresentare le due proposte con

$$(A) \quad (y - a')(y - a'')(y - a''') \dots (y - a^{(m)}) = 0$$
$$(B) \quad (y - b')(y - b'')(y - b''') \dots (y - b^{(n)}) = 0.$$

Ora è chiaro che non potranno aver luogo queste equazioni nel tempo stesso, se uno almeno de' valori di y, che soddisfà alla prima, non soddisfaccia anche alla seconda. Sia a' questo valore, e si sostituisca nella 2.ª, onde ne nasca la

$$(C)\quad (a'-b')(a'-b'')(a'-b''')\ldots(a'-b^{(n)})=0,$$

e questa verrà soddisfatta all'annullarsi di un qualunque de' suoi fattori. Ora ciò che vale rapporto alla radice a' dee valere rapporto a qualunque altra radice della (A), onde avranno luogo ancora tutte le seguenti equazioni:

$$(D)\quad (a''-b')(a''-b'')\ldots(a''-b^{(n)})=0$$

$$(E)\quad (a'''-b')(a'''-b'')\ldots(a'''-b^{(n)})=0$$

.

.

.

$$(O)\quad (a^{(m)}-b')(a^{(m)}-b'')\ldots(a^{(m)}-b^{(n)})=0.$$

In questo modo avendosi tante equazioni (C), (D), ec., quante sono le radici di (A), cioè in numero m, nessuna di queste a parte potrà essere la risultante domandata, ma lo sarà bensì il prodotto di tutte, al quale unicamente compete la proprietà di andare a zero con qualunque de' fattori $a'-b'$, $a''-b'$, ec. Perciò la risultante di due equazioni a due incognite sarà il prodotto di tutte le equazioni particolari, che si possono ottenere col risolvere una di esse rapporto ad una delle incognite, e sostituendo successivamente tutte le radici trovate in luogo della stessa incognita nella seconda equazione.

Dopo queste considerazioni sarà facile di indovinare il grado a cui, generalmente parlando, dovrà ascendere la risultante. Imperciocchè essendo essa il prodotto delle m equazioni (C), (D), ec., ciascuna delle quali ha n radici, il numero di queste sarà in generale $=mn$, cioè al prodotto de' numeri esprimenti il grado rispettivo delle due equazioni proposte. Ma passiamo ad indicare alcuno de' metodi, con cui si possa eseguire l'eliminazione ne' casi particolari. In questo Compendio non faremo conoscere che quello di *Bézout*.

§. 47. *Prop.* Trovar la risultante di due equazioni a due incognite.

Incominciamo dalle due del 2.° grado

(1) $Ay^2 + By + C = 0$,

(2) $A'y^2 + B'y + C' = 0$.

Moltiplichiamo la prima per A', e la seconda per A, e sottraendo il secondo prodotto dal primo avremo per residuo

(3) $(A'B - AB')y + A'C - AC' = 0$

equazione di primo grado rispetto ad y.

Sottraendo di nuovo dalla (1) moltiplicata per $A'y + B'$ la (2) moltiplicata per $Ay + B$ avremo un altro residuo di primo grado in y

(4) $(A'C - AC')y + B'C - BC' = 0$.

Moltiplicando finalmente l'equazioni (3) e (4) pe' coefficienti alterni di y, e sottraendole, avremo per residuo

(4) $(A'C - AC')^2 - (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$,

la quale è la risultante richiesta.

§. 48. Siano adesso due equazioni del 3.° grado in y:

(1) $Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$

(2) $A'y^3 + B'y^2 + C'y + D' = 0$.

In 1.° luogo dalla (1) moltiplicata per A' sottratta la (2) moltiplicata per A rimane la

(3) $(A'B - AB')y^2 + (A'C - AC')y + A'D - AD' = 0$.

In 2.° luogo dalla (1) moltiplicata per $A'y + B'$ sottratta la (2) moltiplicata per $Ay + B$, rimarrà la

(4) $(A'C - AC')y^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')y$
$+ B'D - BD' = 0$.

In 3.° luogo dalla (1) moltiplicata per $A'y^2 + B'y + C'$

sottratta la (2) moltiplicata per $Ay^2 + By + C$ resterà la

(5) $(A'D - AD')y^2 + (B'D - BD')y + C'D - CD' = 0.$

Facciasi ora per compendio

$$A'D - AD' = G$$
$$A'B - AB' = H$$
$$B'D - BD' = K$$
$$A'C - AC' = L$$
$$B'C - BC' = M$$
$$C'D - CD' = N,$$

e le equazioni (3), (4), e (5) diventeranno

(3) $Hy^2 + Ly + G = 0$

(4) $Ly^2 + (G + M)y + K = 0$

(5) $Gy^2 + Ky + N = 0.$

Da queste combinate a due a due col moltiplicarle pe' coefficienti alterni di y^2 e col sottrarre i prodotti, si avranno le tre seguenti di primo grado in y, cioè

(a) $[L^2 - H(G + M)]y - HK + GL = 0$

(b) $(GL - HK)y + G^2 - HN = 0$

(c) $[G(G + M) - KL]y + GK - LN = 0,$

dalle quali ricavansi le tre espressioni di y, cioè

$$1.^a \; y = \frac{HK - GL}{L^2 - GH - HM};$$

$$2.^a \; y = \frac{HN - G^2}{GL - HK};$$

$$3.^a \; y = \frac{LN - GK}{G^2 + GM - KL}.$$

Paragonando ora la 1.ª colla 2.ª, poi la 1.ª colla 3.ª, e per ultimo la 2.ª colla 3.ª, si avranno le tre seguenti risultanti:

$$[G^3 + MG^2 - (HN + 2KL)G + (K^2 - MN)H + L^2N]H = 0$$
$$[G^3 + MG^2 - (HN + 2KL)G + (K^2 - MN)H + L^2N]L = 0$$
$$[G^3 + MG^2 - (HN + 2KL)G + (K^2 - MN)H + L^2N]G = 0.$$

Tutte e tre queste risultanti sono identiche in tutto fuorchè nel fattore fuori delle parentesi, che ne altera il giusto grado, e che deve togliersi colla divisione; giacchè nessuna delle tre equazioni

$$H = 0 \ , \ L = 0 \ , \ G = 0$$

può esser la vera risultante, non contenendo queste che dei rapporti fra alcuni soltanto dei coefficienti delle due proposte. Tolti perciò questi fattori inutili, la risultante domandata sarà

$$(P) \quad G^3 + MG^2 - (HN + 2KL)G + (K^2 - MN)H + L^2 N = 0.$$

§. 49. Siccome ne' casi particolari sarebbe difficile a discernere i fattori inutili, che nel corso di molte operazioni da praticarsi si potrebbero insinuare, quindi sarà vantaggioso di dedurre immediatamente l'equazione finale dalla generale (P) col sostituire alle specie G, H, ec. i valori dedotti dai casi particolari. Vediamone un esempio.

Siano date le due

$$(1) \quad xy^3 - 6y^2 - xy + 6 = 0$$

$$(2) \quad 2y^3 - 3xy^2 - 2x^2y + 3x^3 = 0.$$

Paragonati i coefficienti con quelli delle due generali si troverebbe

$A = x$	$A' = 2$
$B = -6$	$B' = -3x$
$C = -x$	$C' = -2x^2$
$D = 6$	$D' = 3x^3$.

Da questi con somma facilità si deduce

$$G = 3(4 - x^4), \qquad L = 2x(x^2 - 1),$$
$$H = 3(x^2 - 4), \qquad M = -9x^2,$$
$$K = 18x(x^2 - 1), \qquad N = 3x^2(x^2 - 4),$$

e finalmente la risultante

$$27(4 - x^4)^3 - 81x^2(4 - x^4)^2 - 3(4 - x^4)[9x^2(x^2 - 4)^2 + 72x^2(x^2 - 1)^2] + 3(x^2 - 4)[324x^2(x^2 - 1)^2 + 27x^4(x^2 - 4)] + 12x^4(x^2 - 1)^2(x^2 - 4) = 0,$$

che è del 12.° grado, come dev' essere, poichè le date sono l' una del 4.°, e l' altra del 3.° grado (§. 46).

Il metodo presente si può applicare anche alle equazioni di più alto grado, ma bisogna confessare che i calcoli necessarj per trovar l' equazione finale vanno sempre più complicandosi fino a diventare impraticabili.

§. 50. *Prop.* Trovare la risultante di tre equazioni di grado superiore al primo, e a tre incognite.

Siano rappresentate le tre equazioni dalle tre formole
(1) $E_{x,y,z}=0$; (2) $E'_{x,y,z}=0$; (3) $E''_{x,y,z}=0$.
Si elimini col metodo precedente la z dalle (1) e (2), e ne risulterà un' equazione fra x e y, che rappresenteremo con $e_{x,y}=0$. Eliminisi ancora la z dalle (1) e (3), ed avrassi un' altra equazione $e'_{x,y}=0$. Si cerchi ormai con gli stessi metodi la risultante delle equazioni

$$e_{x,y}=0\,;\ e'_{x,y}=0\,,$$

e questa sarà la domandata. Ciò basti per vedere come si possa procedere nel caso di un maggior numero d' incognite.

§. 51. Alle volte accade che avendosi un numero d' incognite uguale a quello delle equazioni, non si possono ciò non pertanto determinare, ma solo si arriva ad una relazione fra le quantità cognite, che vi sono contenute. Un esempio ci viene somministrato dalle tre equazioni
(1) $xy=a-bxz$, (2) $xy=a'-b'xz$, (3) $xy=a''-b''xz$,
dalle quali comunque maneggiate non si ricaveranno mai i valori di x, y, z. Infatti si ha

per mezzo della 1ª e 2ª $\quad xz=\dfrac{a-a'}{b-b'}$,

per mezzo della 1ª e 3ª $\quad xz=\dfrac{a-a''}{b-b''}$;

e per mezzo della 2ª e 3ª $\quad xz=\dfrac{a'-a''}{b'-b''}$.

Paragonando di nuovo a due a due questi valori di xz, con lo stesso ordine, si otterranno le tre relazioni fra le quantità cognite a, a', a'', b, b', b'':

$$(a-a')(b-b'') = (a-a'')(b-b')$$
$$(a-a')(b'-b'') = (a'-a'')(b-b')$$
$$(a-a'')(b'-b'') = (a'-a'')(b-b'').$$

Se si riflette che facendo il prodotto $xz = u$, le incognite si riducono alle due sole y ed u, si vede che la quistione si riduce alla classe dei problemi più che determinati, ne' quali sempre ha luogo una simile relazione fra le quantità cognite, acciò essi siano possibili.

§. 52. *Prop.* Eliminare i termini irrazionali da un' equazione.

Il presente problema si scioglie d' ordinario più speditamente col formare ne' membri dell' equazione quelle potenze che sono atte a distruggere i radicali. che a caso contenesse. Ciò non ostante si può far uso della dottrina dell' eliminazione, ed eccone un esempio.

Sia l' equazione $\quad y = \sqrt[3]{t} - \sqrt{x}.$

Poniamo $\quad \sqrt[3]{t} = z, \ \sqrt{x} = u;$

e da queste formeremo subito le equazioni razionali

(1) $t = z^3$, $\quad$ (2) $x = u^2$;

quindi la proposta diventerà

$$y = z - u, \text{ ovvero } y + u = z.$$

Sostituito questo valore di z nella (1) ne nasce la

$$t = (y+u)^3, \text{ ossia } t = y^3 + 3y^2u + 3yu^2 + u^3;$$

da cui per essere $u^2 = x$ ricaviamo

$$t - y^3 - 3xy = (3y^2 + x)u,$$

e da questa $u = \dfrac{t - y^3 - 3xy}{3y^2 + x}$,

e quadrando $u^2 = x = \dfrac{(t - y^3 - 3xy)^2}{(3y^2 + x)^2}$, e finalmente l' equazione tutta razionale

$$x(3y^2+x)^2=(t-y^3-3xy)^2.$$

CAPO V.

Trasformazioni delle equazioni.

§. 53. Chiamasi *trasformazione* di un' equazione quella operazione analitica, per mezzo della quale da un' equazione data e determinata se ne ricava un' altra, le cui radici hanno con quelle della prima delle date relazioni. Così data l' equazione

$$(E) \qquad x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+T=0$$

si cercano il grado ed i coefficienti della

$$(F) \qquad y^n+A'y^{n-1}+B'y^{n-2}\ldots=0,$$

nel supposto che fra x ed y passi un rapporto qualunque espresso da un' equazione, che si chiama *di relazione*. Noi non parleremo che delle trasformazioni più semplici e più utili insieme.

§. 54. *Prop.* Trasformare l' equazione (E) in un' altra (F), sicchè le radici di questa si uguaglino a quelle della prima moltiplicate per la data quantità h.

L' equazione di relazione sarà

$$y=hx,$$

da cui avendosi $x=\frac{y}{h}$, potremo sostituire questo valore ad x, ed otterremo

$$\frac{y^m}{h^m}+\frac{Ay^{m-1}}{h^{m-1}}+\frac{By^{m-2}}{h^{m-2}}+\ldots\pm T=0,$$

e moltiplicando tutti i termini per h^m, si avrà la domandata

$$(F) \qquad y^m+Ahy^{m-1}+Bh^2y^{m-2}\ldots\pm Th^m=0.$$

Osservando i coefficienti di questa, troviamo che non sono altro che quelli di (E) moltiplicati rispettivamente pe' termini della progression geometrica

$$1\,,\;h\,,\;h^2\,,\;h^3\,\ldots\,h^m.$$

§. 55. Questa trasformazione è utilissima per liberare una data equazione dalle frazioni che per avventura contenesse, senza che il primo termine acquisti perciò un coefficiente diverso dall' unità. Si ponga infatti $x = \frac{y}{fgl\ldots}$; rappresentando f, g, l, ec. i denominatori che si trovassero ne' coefficienti dell' equazione; e la nuova equazione in y sarà la domandata.

Così nell' equazione

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = 0\,,$$

posta $x = \frac{y}{2\,.\,3\,.\,5}$, si avrà dopo tutte le riduzioni la trasformata

$$y^3 - 45y^2 + 600y + 5400 = 0$$

in cui nè v' ha coefficiente fratto, nè si è cangiato quello del primo termine.

Parimenti per liberare del denominatore 5 l' equazione

$$x^4 - 2x^3 - \frac{3}{5}x^2 + x - 7 = 0$$

si porrebbe $x = \frac{y}{5}$, e si procederebbe come dianzi; ma sarà più semplice il formare la progressione

$$1\,,\quad 5\,,\quad 25\,,\quad 125\,,\quad 625\,,$$

e moltiplicare per ordine i termini della proposta per li corrispondenti di questa, onde si avrà subito la trasformata

$$y^4 - 10y^3 - 15y \;\; + 125y - 4375 = 0.$$

§. 56. *Prop.* Fare che le radici positive di un' equazione diventino negative, e viceversa.

Facciasi $x = -y$; e la trasformata dell' equazione (E)

dopo aver cangiati tutti i segni, se fa d'uopo, affine di render positivo il 1.° termine, sarà

$(F)\quad y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} \ldots \pm T = 0,$

la quale non differisce dalla (E) che ne' segni de' termini posti ne' luoghi pari. Si potrebbe dunque ritenere la stessa incognita x, e mutar soltanto i segni de' termini anzidetti.

Così l'equazione

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

si cangerà in un'altra a radici di segno contrario scrivendo

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Similmente se invece di

$$x^4 + 2x^2 + 10x - 7 = 0$$

si scrivesse

$$x^4 + 2x^2 - 10x - 7 = 0,$$

quest'ultima avrebbe positive le radici, che nella prima sono negative, e viceversa. E qui è da avvertirsi che mancando uno o più termini il cangiamento di segno dee farsi come se quegli esistessero, ed avessero lo zero per loro coefficiente.

§. 57. *Prop.* Trasformare l'equazione (E) in un'altra, sicchè le radici di questa siano quelle di (E) diminuite della data quantità h.

L'equazione di relazione sarà

$$y = x - h;$$

onde se si prenderà da questa il valore di x, cioè $y + h$, e si sostituirà in (E), si avrà

$(F)\quad (y+h)^m + A(y+h)^{m-1} + B(y+h)^{m-2} \ldots + T = 0.$

Questi binomj si possono sviluppare ed ordinare secondo le potenze ascendenti o discendenti di y: ciascun modo ci fornirà delle utili osservazioni. Incominciamo dal primo.

Sviluppati i precedenti binomj, e raccolti a parte i coefficienti di y^0, y^1, y^2, ec., si troverà la trasformata

$$(F)\quad \left.\begin{aligned} &h^m + Ah^{m-1} + Bh^{m-2} + Ch^{m-3} \ldots + T \\ &+\left(mh^{m-1} + (m-1)Ah^{m-2} + (m-2)Bh^{m-3} \ldots + S\right)y \\ &+\left(\frac{m(m-1)}{2}h^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ah^{m-3} \ldots + R\right)y^2 \\ &+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}h^{m-3} \ldots + Q\right)y^3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &+ y^m \end{aligned}\right\} = 0.$$

Chiamiamo per brevità A', B', C', ec. i coefficienti rispettivi di y^0, y^1, y^2, ec., onde la trasformata si possa rappresentare più succintamente sotto la forma

$$(F)\quad A' + B'y + C'y^2 + \ldots + y^m = 0.$$

Se ora paragoneremo fra di loro i valori di questi coefficienti successivi, vedremo che fra di essi regna una certa legge o dipendenza, per cui gli uni si possono ricavare dagli altri, la qual operazione si chiama *derivazione*.

Difatti A', ossia il polinomio senz' y, non è altro che il 1.° membro dell' equazione (F), cangiatavi la x in h. B', ossia il coefficiente della y, si vede facilmente che *deriva* da A' col moltiplicare ciascun termine di A' per l' esponente di h, col dividerlo per h, e col sopprimere il termine tutto cognito T, in cui l' esponente di h è zero. C' *deriva* da B' colla stessa legge con cui B' deriva da A', ma di più ciascun termine si trova diviso per 2. D' *deriva* da C' ancora colla stessa legge, ma ciascun termine vien diviso per 2.3; e così degli altri.

E' inutile di far osservare, che se h fosse negativa, bisognerebbe cangiar di segno tutte le potenze impari di h ne' valori di questi coefficienti.

§. 58. Vogliasi per es. la trasformata dell' equazione

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$$

secondo le condizioni esposte nella presente proposizione.

I coefficienti A', B', C', ec., saranno i seguenti

$$A' = h^4 - 2h^3 + 3h^2 - 4h + 5$$

$$B' = 4h^3 - 3.2h^2 + 2.3h - 4 = 4h^3 - 6h^2 + 6h - 4$$

$$C' = \frac{3.4h^2}{2} - \frac{2.3.2\,h}{2} + \frac{2.3}{2} = 6h^2 - 6h + 3$$

$$D' = \frac{2.3.4\,h}{2.3} - \frac{2.3.2}{2.3} \qquad = 4h - 2$$

$$E' = \frac{1.2.3.4}{2.3.4} = 1\,;$$

e volendo porre $h = 1$, la trasformata

$$3 \quad * \quad + \quad 3y^2 \quad + \quad 2y^3 \quad + \quad y^4 \quad = 0$$

sarebbe quella, le cui radici uguaglierebbero quelle della proposta in x scemate dell' unità.

§. 59. Se nel computo de' coefficienti A', B', C', ec., che non sono che l' ultimo, il penultimo, ec. della trasformata, quando sia scritta secondo l' ordine naturale e non inverso, che quì abbiamo adottato, si trovasse $A' = 0$, allora h sarebbe radice della proposta, e la trasformata divisa per y si abbasserebbe di un grado.

Se poi oltre aver trovato $A' = 0$ si trovasse ancora $B' = 0$, la proposta avrebbe due radici $= h$, e la trasformata in y divisa per y^2 si abbasserebbe di due gradi; ec.

§. 60. Se nella trasformata del §. 57 cangeremo l' ordine delle potenze di y, e l' ordineremo secondo le potenze discendenti della medesima, essa diventerà

$$(G) \quad y^m + (mh + A)\,y^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)h^2}{2} + (m-1)Ah + B\right]y^{m-2}$$

$$+ \left[\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2\,.\,3} + \frac{(m-1)\,(m-2)\,Ah^2}{2} + \right.$$

$$\left. (m-2)Bh + C\right]y^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Questa nuova forma ci somministra le condizioni che possono aver luogo, acciocchè una trasformata manchi del 2.° termine, o del 3.°, o di un' altro qualunque più rimoto dal primo. Difatti mancherà il 2.° termine, se sarà

$$mh + A = 0\,,\ \text{ovvero}\ h = -\frac{A}{m};$$

cioè si toglierà da una data equazione il 2.° termine, se in luogo di x si porrà $y - \frac{A}{m}$; ovvero se si accrescerà y del coefficiente A preso col segno opposto, e diviso pel grado m della data in x.

Mancherà similmente nella trasformata (G) il 3.° termine, se sarà

$$\frac{m(m-1)h^2}{2} + (m-1)Ah + B = 0\,,$$

cioè se nella proposta in x si porrà

$$x = y - \frac{A}{m} \pm \sqrt{\frac{A^2}{m^2} - \frac{2B}{m(m-1)}}\,.$$

In maniera somigliante si trasformerebbe la (E) in un' altra mancante del 4.°, 5.°, ec. termine. Ma questo d'ordinario è inutile, e la mancanza solamente del 2.° termine è, generalmente parlando, assai comoda.

§. 61. *Osservazione.* Per togliere il 2° termine abbiam risoluto un' equazione di primo grado in h; per togliere il 3.° ne abbiamo risoluto una di 2.° grado: una del 3.° grado bisognerebbe risolvere a fine di annullare il 4.° termine, e così in progresso; quindi per togliere dalla (E) il termine $(m+1)^{\text{simo}}$ ossia l'ultimo, sarebbe d'uopo di risolvere un' equazione del grado m^{simo} in h, che sarebbe la proposta medesima cangiata la x in h, onde non se ne potrebbe trarre nessun partito per la risoluzione della medesima. Ma passiamo ad altri usi della trasformazione di cui trattiamo.

§. 62. *Prop.* Trasformare l'equazione

(E) $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots - Mx^{m-r} \ldots \pm T = 0$, in cui $-M$ è il massimo coefficiente negativo, in un'altra i di cui termini sian tutti positivi, ovvero alternativamente positivi, e negativi.

Alla prima domanda sarà soddisfatto ponendo

$$x = M + 1 + y.$$

Alla seconda se si porrà

$$x = M + 1 - y.$$

Rapporto alla prima, siccome la trasformata che ne nasce dee essere della forma

$$A' + B'y + C'y^2 + \ldots + y^m = 0,$$

in cui sia (§. 57).

$$A' = (M+1)^m + A(M+1)^{m-1} + B(M+1)^{m-2} \ldots \pm T$$

$$B' = m(M+1)^{m-1} + (m-1)A(M+1)^{m-2} + \ldots\ldots$$

$$C' = \frac{m(m-1)}{2}(M+1)^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}A(M+1)^{m-3}\ldots$$

ec.,

perciò se proveremo che tutti questi coefficienti sono necessariamente positivi, qualunque sieno i segni di A, B, C, ec., sarà giustificata la soluzione addotta. Ma per provarlo dimostreremo la seguente.

§. 63. *Prop.* Se m è un intiero qualunque positivo, varrà sempre la formola

(O) $$(p+1)^m = p(p+1)^{m-1} + p(p+1)^{m-2} + p(p+1)^{m-3} + \ldots + p + 1.$$

Difatti si ha sempre

$$(p+1)^m = (p+1)(p+1)^{m-1} = p(p+1)^{m-1} + (p+1)^{m-1}.$$

Ma per questa stessa formola dee ancora essere

$$(p+1)^{m-1} = p(p+1)^{m-2} + (p+1)^{m-2},$$

e similmente

$$(p+1)^{m-2}=p(p+1)^{m-3}+(p+1)^{m-3},$$

e così di seguito. Dunque continuando sempre a sviluppare il secondo termine dell' ultima formola finchè l' esponente si riduca a zero, e sostituendo sempre nelle precedenti, arriveremo finalmente all' equazione

$$(p+1)^m=p(p+1)^{m-1}+p(p+1)^{m-2}+p(p+1)^{m-3}+\ldots$$
$$+p(p+1)^0+(p+1)^0,$$

in cui due ultimi termini, com' è noto, si riducono a $p+1$.

Torniamo ora ai coefficienti A', B', C', ec. del §. precedente. Se nel primo termine del valore di A' sostituiremo al binomio $(M+1)^m$ il suo sviluppo tratto dalla formola (O), avremo

$$A'=M(M+1)^{m-1}+M(M+1)^{m-2}+M(M+1)^{m-3}\ldots$$
$$+A(M+1)^{m-1}+B(M+1)^{m-2}+C(M+1)^{m-3}\ldots$$

ma essendo per supposizione M maggiore di qualunque altro coefficiente negativo, si vede chiaramente che tutti i termini, i quali si corrispondono verticalmente, non daranno dopo la riduzione che dei risultati positivi, qualunque poi sia il segno di A, B, C, ec.

Sviluppando similmente per mezzo di (O) il primo termine del valore di B', si avrà

$$B'=mM(M+1)^{m-2}+mM(M+1)^{m-3}+\ldots\ldots$$
$$+(m-1)A(M+1)^{m-2}+(m-2)B(M+1)^{m-3}+\ldots$$

in cui di nuovo i termini verticalmente scritti danno una somma sempre positiva. Così si proseguirebbe a ragionare pei valori di C', D', ec.; e perciò si troverebbero tutti positivi.

Se dunque in un' equazione proposta si cangerà x in una nuova incognita y accresciuta del massimo coefficiente negativo preso positivamente e dell' unità, la trasformata avrà di sicuro tutti i segni positivi, e quindi nessuna radice reale positiva (§. 30). Vedremo in appresso che molte volte si ottiene lo stesso intento con de' numeri minori di $M+1$.

Rapporto alla seconda parte, in cui si sostituisce $M+1-y$ invece di x, si vede facilmente, che ritenuta la precedente dimostrazione della prima, non si cangeranno di segno che i termini contenenti le potenze dispari di y, e però che i segni de' coefficienti A', B', C', ec. saranno necessariamente positivi e negativi a vicenda.

Sia per esempio l' equazione

$$x^4+2x^3-5x^2-3x+7=0.$$

Per eseguire la prima trasformazione si porrà $x=y+6$, e si avrà la trasformata

$$y^4+26y^3+247y^2+1017y+1527=0$$

a segni tutti positivi.

Per eseguir la seconda si porrà $x=6-y$, e si otterrà

$$y^4-26y^3+247y^2-1017y+1527=0$$

a segni alternativi.

§. 64. *Prop.* Trasformare l' equazione

$$(E) \qquad x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}\ \ldots\ \pm A_m=0$$

in un' altra, le radici della quale s' uguaglino ai quadrati delle differenze fra le radici della proposta.

Siano $a, b, c, \ldots t$ le radici della proposta; quelle della trasformata dovranno per ipotesi essere

$$\begin{array}{l}(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ \ldots\ (a-t)^2\\ (b-a)^2,\ (b-c)^2,\ \ldots\ (b-t)^2\\ (c-a)^2,\ (c-b)^2,\ \ldots\ (c-t)^2\\ \cdot\\ \cdot\\ (t-a)^2,\ (t'-b)^2,\ \ldots\ (t-s)^2\end{array}$$

Ora queste sono visibilmente in numero $m(m-1)$; ma inoltre essendo $(a-b)^2$ lo stesso che $(b-a)^2$, e ciò valendo per qualunque altro binario di radici, il numero di questi si ridurrà ad $\frac{m(m-1)}{2}$, e tale sarà in conseguenza il grado della trasformata in y. Facciamo ora $\frac{m(m-1)}{2}=n$, e la medesima si potrà rappresentare coll' equazione

$$(F) \quad y^n - B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} - B_3 y^{n-3} + \ldots \pm B_n = 0$$

in cui non restano a trovarsi che i coefficienti.

Siano $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$, ec. le somme delle potenze prime, seconde, terze, ec. delle radici di (F), cioè sia

$$\Sigma^{(1)} = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \ldots + (b-c)^2 + \ldots$$
$$\Sigma^{(2)} = (a-b)^4 + (a-c)^4 + \ldots + (b-c)^4 + \ldots$$
$$\Sigma^{(3)} = (a-b)^6 + (a-c)^6 + \ldots + (b-c)^6 + \ldots$$

.

.

$$\Sigma^{(r)} = (a-b)^{2r} + (a-c)^{2r} + \ldots + (b-c)^{2r} + \ldots$$

e siano inoltre le somme delle potenze delle radici a, b, c, ec. della proposta rappresentate al solito co' segni $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec. come al §. 36: vediamo ora come si possano determinare le Σ per mezzo delle S. Assumiamo con *la Grange* la somma de' seguenti binomj, che svilupperemo nel tempo stesso col canone newtoniano:

$$(x-a)^{2r} + (x-b)^{2r} + (x-c)^{2r} + \ldots + (x-t)^{2r} =$$

$$x^{2r} - 2rax^{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{2}a^2x^{2r-2} \ldots - 2ra^{2r-1}x + a^{2r}$$

$$x^{2r} - 2rbx^{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{2}b^2x^{2r-2} \ldots - 2rb^{2r-1}x + b^{2r}$$

$$x^{2r} - 2rcx^{2r-1} + \frac{2r(2r-1)}{2}c^2x^{2r-2} \ldots - 2rc^{2r-1}x + c^{2r}$$

Sommando i termini delle file verticali, e introducendo i simboli $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ec., avremo

$$(x-a)^{2r}+(x-b)^{2r}\ldots+(x-t)^{2r}=$$

$$mx^{2r}-2rx^{2r-1}S^{(1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}x^{2r-2}S^{(2)}-$$

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2\,.\,3}x^{2r-3}S^{(3)}\ldots-2rxS^{(2r-1)}+S^{(2r)}.$$

Cambiando successivamente x in a, in b, in c, ec., e sommando tutti i risultati coll' avvertenza che trovandosi nel 1.° membro tanto $(a-b)^{2r}$, che $(b-a)^{2r}$ si vengono a duplicare tutti i termini, si avrà

$$2\Sigma^{(r)}=mS^{(2r)}-2rS^{(1)}S^{(2r-1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}S^{(2)}S^{(2r-2)}-$$

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2\,.\,3}S^{(3)}S^{(2r-3)}\ldots-2rS^{(1)}S^{(2r-1)}+mS^{(2r)}.$$

In questa serie sono identici i termini equidistanti dagli estremi, e per essere $2r$ un numero pari non vi ha che un termine medio irreducibile con altri; onde facendo la riduzione, e dividendo l' un e l' altro membro per 2, si avrà finalmente

$$\Sigma^{(r)}=mS^{(2r)}-2rS^{(1)}S^{(2r-1)}+\frac{2r(2r-1)}{2}S^{(2)}S^{(2r-2)}-$$

$$\frac{2r(2r-1)(2r-2)}{2\,.\,3}S^{(3)}S^{(2r-3)}\ldots\pm\frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{2\,.\,3\ldots r}\cdot\frac{S^{(r)}S^{(r)}}{2},$$

valendo nell' ultimo termine il segno superiore se r sarà pari, e l' inferiore se r sarà dispari. Non resterà pertanto che di dare ad r i valori particolari 1, 2, 3, ec. per ricavarne i valori di $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$, ec. dati per mezzo delle $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ec., le quali si avranno per mezzo de' coefficienti della proposta, come si è insegnato al §. 36. Trovate queste somme si cercheranno i coefficienti B_1, B_2, B_3, ec. per mezzo delle formole K del §. 37.

Si dee riflettere che se la proposta avesse delle radici uguali, la trasformata avrebbe tanti valori di $y=0$ quanti sono i binarj che si posson fare con le radici fra loro uguali; onde mancheranno tanti termini finali quanti saranno questi binarj medesimi.

§. 65. Sia per primo esempio l' equazione

$$x^3 - 2x + 5 = 0.$$

Essendo in questa $m=3$, sarà $n=\dfrac{m(m-1)}{2}=3$, e perciò la trasformata sarà

$$y^3 - B_1 y^2 + B_2 y - B_3 = 0.$$

Inoltre sarà (paragonando la proposta colla generica (E))

$$A_1 = 0,\ A_2 = -2,\ A_3 = -5,$$

e quindi

$$\left.\begin{array}{l} S^{(1)} = 0 \\ S^{(2)} = 4 \\ S^{(3)} = -15 \\ S^{(4)} = 8 \\ S^{(5)} = -50 \\ S^{(6)} = 91 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{l} \Sigma^{(1)} = 12 \\ \Sigma^{(2)} = 72 \\ \Sigma^{(3)} = -1497 \end{array}\right\};\quad \begin{array}{l} B_1 = 12 \\ B_2 = 36 \\ B_3 = -643. \end{array}$$

Onde la trasformata sarà

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0,$$

e questa avrà per radici i quadrati delle differenze fra le radici della proposta.

Sia ora per secondo esempio l' equazione di 4.° grado

$$x^4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Essendo $m=4$, $n=\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$, ed inoltre

$A_1=0$, $A_2=-4$, $A_3=-4$, $A_4=-1$, si troverà

$S^{(1)}=0$, $S^{(2)}=8$, $S^{(3)}=-12$, $S^{(4)}=36$,

$S^{(5)}=-80$, $S^{(6)}=200$, $S^{(7)}=-476$, $S^{(8)}=1156$,

$S^{(9)}=-2784$, $S^{(10)}=6728$, $S^{(11)}=-16236$, $S^{(12)}=39204$,

$\Sigma^{(1)}=32$, $\Sigma^{(2)}=336$, $\Sigma^{(3)}=3680$,

$\Sigma^{(4)}=41024$, $\Sigma^{(5)}=463232$, $\Sigma^{(6)}=5280000$,

$$B_1 = 32\,,\; B_2 = 344\,,\; B_3 = 1312\,,$$
$$B_4 = 784\,,\; B_5 = 128\,,\; B_6 = 0\,,$$

onde la trasformata sarà

$$y^6 - 32y^5 + 344y^4 - 1312y^3 + 784y^2 - 128y = 0$$

§. 66. *Prop.* Trasformare la stessa equazione generica (E) in modo che le radici della trasformata siano quelle della proposta sommate a due a due.

Il grado della trasformata sarà evidentemente $= \frac{m(m-1)}{2}$, e chiamando n questo numero, non resterà che a determinare i coefficienti dell' equazione

$$y^n - B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} - B_3 y^{n-3} \ldots \pm B_n = 0.$$

Qui pure chiamando $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, ec., e in generale $\Sigma^{(r)}$ le somme delle potenze analoghe delle radici della trasformata, le determineremo col seguente artifizio simile al precedente. Assumasi la serie de' binomj

$$(x+a)^r + (x+b)^r + (x+c)^r + \ldots + (x+t)^r.$$

Dallo sviluppo di ciascuno ne nascerà

$$x^r + rax^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} a^2 x^{r-2} + \ldots\ldots + ra^{r-1} x + a^r$$

$$x^r + rbx^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} b^2 x^{r-2} + \ldots\ldots + rb^{r-1} x + b^r$$

.

.

.

$$x^r + rtx^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2} t^2 x^{r-2} + \ldots\ldots + rt^{r-1} x + t^r.$$

Sommando le file verticali si avrà

$$(x+a)^r + (x+b)^r + \ldots\ldots + (x+t)^r =$$

$$mx^r + rx^{r-1} S^{(1)} + \frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} S^{(2)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2} x^2 S^{(r-2)} + rx S^{(r-1)} + S^{(r)}.$$

Cangiando successivamente x in $a, b, \ldots t$, si avranno le seguenti uguaglianze

$$(2a)^r + (a+b)^r + \ldots + (a+t)^r = ma^r + ra^{r-1}S^{(1)} + \frac{r(r-1)}{2}a^{r-2}S^{(2)} + \ldots + raS^{(r-1)} + S^{(r)}$$

$$(b+a)^r + (2b)^r + \ldots + (b+t)^r = mb^r + rb^{r-1}S^{(1)} + \frac{r(r-1)}{2}b^{r-2}S^{(2)} + \ldots + rbS^{(r-1)} + S^{(r)}$$

.

.

.

$$(t+a)^r + (t+b)^r + \ldots + (2t)^r = mt^r + rt^{r-1}S^{(1)} + \frac{r(r-1)}{2}t^{r-2}S^{(2)} + \ldots + rtS^{(r-1)} + S^{(r)},$$

e facendo di nuovo la somma di tutti i primi membri e di tutti i secondi, avremo

$$(2a)^r + (2b)^r + \ldots + (2t)^r + 2\Sigma^{(r)} = mS^{(r)} + rS^{(1)}S^{(r-1)} + \frac{r(r-1)}{2}S^{(1)}S^{(r-2)} + \ldots + rS^{(1)}S^{(r-1)} + mS^{(r)}$$

Rappresentando la somma de' termini del primo membro col noto simbolo, e sommando nel secondo i termini equidistanti dagli estremi, che sono identici, si avrà

$$2^r S^{(r)} + 2\Sigma^{(r)} =$$

$$2mS^{(r)} + 2rS^{(1)}S^{(r-1)} + \frac{2r(r-1)}{2}S^{(2)}S^{(r-2)} \ldots + \begin{cases} \dfrac{2r(r-1)\ldots\frac{1}{2}(r+2)}{2\,.\,3\ldots\frac{1}{2}r}S^{(\frac{1}{2}r)}S^{(\frac{1}{2}r)} & (\text{se } r \text{ pari}) \\[2ex] \dfrac{2r(r-1)\ldots\frac{1}{2}(r+3)}{2\,.\,3\ldots\frac{1}{2}(r-1)}S^{\frac{1}{2}(r-1)}S^{\frac{1}{2}(r+1)} & (\text{se } r \text{ dispari}) \end{cases}$$

Quindi si avrà finalmente dividendo per 2

$$\Sigma^{(r)} = (m-2^{r-1})\,S^{(r)} + rS^{(1)}S^{(r-1)} + \frac{r(r-1)}{2}S^{(2)}S^{(r-2)}\text{ec.},$$

e l'ultimo termine di questa serie sarà

$$\frac{r(r-1)\ldots\frac{1}{2}(r+2)}{2.3\ldots\frac{1}{2}r}\cdot\frac{S^{(\frac{1}{2}r)}S^{(\frac{1}{2}r)}}{2}\quad\text{se } r \text{ è pari},$$

ovvero

$$\frac{r(r-1)\ldots\frac{1}{2}(r+3)}{2.3\ldots\frac{1}{2}(r-1)}\,S^{\frac{1}{2}(r-1)}\,S^{\frac{1}{2}(r+1)}\quad\text{se } r \text{ sarà dispari.}$$

Facendo poi in questa formola $r=1,2,3$, ec. si avranno tutte le somme Σ per mezzo delle S, e quindi i coefficienti B_1, B_2, B_3, ec. della trasformata.

Es. L'equazione cubica

$$x^3-9x^2+23x-15=0$$

paragonata colla generica

$$x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}\ldots=0$$

dà $A_1=9$, $A_2=23$, $A_3=15$, e quindi

$S^{(1)}=9$	$\Sigma^{(1)}=18$	$B_1=18$
$S^{(2)}=35$	$\Sigma^{(2)}=116$	$B_2=104$
$S^{(3)}=153$	$\Sigma^{(3)}=792$	$B_3=192$

onde la trasformata sarà

$$y^3-18y^2+104y-192=0.$$

Chi volesse verificare il presente risultato, basta che osservi che l'equazione cubica

$$x^3-9x^2+23x-15=0$$

non è altro che il prodotto de' tre fattori razionali

$$(x-1)(x-3)(x-5)=0,$$

e per conseguenza le tre radici 1, 3, 5 combinate per via di somma a due a due danno 4, 6, 8, che sono appunto quelle della trasformata, come chiunque può accertarsene.

§. 67. *Prop.* Trovare un' equazione che abbia per radici quelle di una data, combinate a due a due per mezzo di prodotto.

Il grado della trasformata sarà di nuovo n, o sia $\frac{m(m-1)}{2}$. Per trovare i coefficienti B_1, B_2, B_3, ec. si osserverà essere

$$\Sigma^{(1)} = ab + ac + bc + \ldots$$

$$\Sigma^{(2)} = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + \ldots$$

$$\Sigma^{(3)} = (ab)^3 + (ac)^3 + (bc)^3 + \ldots,$$

e sostituendo a queste funzioni invariabili i loro valori rappresentati per mezzo delle S, si avrà

$$\Sigma^{(1)} = A_2 \quad (\S.\ 33)$$

$$\Sigma^{(2)} = S^{(2,2)} = \frac{S^{(2)}S^{(2)} - S^{(4)}}{2}$$

$$\Sigma^{(3)} = S^{(3,3)} = \frac{S^{(3)}S^{(3)} - S^{(6)}}{2}$$

ec.,

dalle quali formole si ricaveranno finalmente i coefficienti domandati della trasformata

$$y^n - B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} \ldots = 0.$$

Es. Nell' equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

si ha

$S^{(1)} = 0$	$\Sigma^{(1)} = -7$	$B_1 = -7$
$S^{(2)} = 14$		
$S^{(3)} = -21$	$\Sigma^{(2)} = 49$	$B_2 = 0$
$S^{(4)} = 98$		
$S^{(5)} = -245$	$\Sigma^{(3)} = -196$	$B_3 = 49$
$S^{(6)} = 833$		

onde la trasformata richiesta è

$$y^3 + 7y^2 - 49 = 0$$

CAPO VI.

Dei divisori delle equazioni in generale, dei divisori razionali di primo e secondo grado, e delle radici multiple.

ART. I

Dei divisori in genere delle equazioni.

§. 68. I divisori di primo grado di un'equazione, cioè della forma $x - p$, sono tanti quante sono le di lei radici: ciò è manifesto; ma se i divisori sono di secondo grado, o sia della forma $x^2 - px + q$, siccome questi possono risultare dal prodotto di due qualunque del primo, saranno sempre tanti quanti sono i binarj che si posson fare colle m radici della proposta, cioè $\frac{m(m-1)}{2}$ (§. 18). Similmente i divisori del 3.° grado risultando dal prodotto di tre del primo, si formeranno in tante maniere, quante sono le combinazioni di quelli del primo a tre a tre, cioè $\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$. Quelli del 4.° grado saranno $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$; e così di seguito; e in generale i divisori di grado n^{simo} di un' equazione del grado m saranno sempre in numero

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.3.4\ldots\ldots n}.$$

Noi però ci limiteremo ai divisori delle equazioni che non superano il 2.° grado.

§. 69. *Prop.* Un' equazione qualunque si può sempre considerare come un prodotto di fattori reali di primo o di secondo grado.

Se l'equazione sarà di grado dispari, si potrà sempre ridurre al grado pari dividendola per uno o tre o cinque ec. fattori reali di primo grado, che essa può contenere (§. 26). Fatta questa riduzione, se m esprimerà il grado della ridotta, si tratta di dimostrare che essa avrà sempre qualche fattore della forma

$$x^2 - px + q$$

in cui i coefficienti p, e q saranno reali.

Dovendo questo fattore essere uno degli $\frac{m(m-1)}{2}$ fattori possibili (§. precedente), ed altronde dovendo p esprimere la somma di quelle due stesse radici, delle quali q è il prodotto, si vede che i valori dell' uno e dell' altro coefficiente dipenderanno da un' equazione del grado $\frac{m(m-1)}{2}$. Poniamo questo numero $= r$, e le due equazioni in p, e q saranno

$$(P) \quad p^r + A' p^{r-1} + B' p^{r-2} + \ldots + T' = 0,$$
$$(Q) \quad q^r + a' p^{r-1} + b' q^{r-2} + \ldots + t' = 0.$$

La prima non è che la trasformata, che ha per radici quelle della proposta sommate a due a due; e la seconda contiene le medesime radici moltiplicate a due a due: e noi abbiamo insegnato (§§. 66.67) a calcolare l'una e l'altra. Ma le equazioni (P) e (Q) hanno di sicuro qualche radice reale; ed inoltre quella radice della seconda è reale che corrisponde alla stessa radice reale della prima, o sia che corrisponde al medesimo binario della prima. Difatti se si combinano due radici della proposta tutte reali, la cosa è evidente; e se si combinano due immaginarie, siccome fra le combinazioni vi deve entrare ancor quella, in cui una radice immaginaria $R + I$ si combina colla sua conjugata $R - I$ (§. 42); si vede che in questo caso la combinazione per via di somma, cioè uno dei valori di p, sarebbe $2R$, quantità tutta reale; e la combinazione per via di prodotto, o sia uno de' valori di q, sarebbe $(R + I)(R - I)$, ovvero $R^2 - I^2$, quantità di nuovo tutta reale (§. citato). Dunque vi ha sempre un valore reale per p e q, come si è asserito.

Se dunque divideremo la proposta ridotta al grado pari pel fattore tutto reale $x^2 - px + q$, si avrà un quoto di grado pari, e perciò anche questo ammetterà un nuovo fattore reale di secondo grado, col quale fatta la divisione la proposta si abbasserà di due gradi ancora; e replicando sopra del nuovo quoziente il discorso medesimo, ridurremo finalmente l'equazione al solo secondo grado. Risalendo pertanto da quest' ultima alle precedenti del grado 4°, 6°, 8°, ec., si vede che un' equazione di grado pari è sempre risolubile almeno in fattori reali del secondo grado, e un' equazione di grado dispari in fattori reali o di primo o di secondo grado. Si deve però ritenere, che questo discorso si aggira bensì su la possibilità de' fattori di cui si tratta, ma non già sul metodo di ottenerli, il quale, generalmente parlando, suppone la risoluzione delle equazioni de' gradi superiori.

§. 70. Ecco però una conseguenza assai importante della proposizione presente: siccome ogni equazione di secondo grado, che non sia risolubile in fattori reali del primo, ha una radice immaginaria della forma $A + B\sqrt{-1}$, e l'altra della forma analoga $A - B\sqrt{-1}$, come si sa dalle dottrine elementari, e come risulta dal §. 42, quindi anche le radici immaginarie delle equazioni de' gradi superiori avranno la stessa forma, e perciò avrà luogo per intiero quanto abbiamo asserito sul fine del §. citato.

Art. II

Fattori di primo grado, ossia radici razionali.

§. 71. Il cercare i fattori di primo grado in generale di una data equazione è lo stesso che andare incontro a tutte le difficoltà che dipendono dalla risoluzione di essa; ma se questi fattori avranno da essere razionali, vi sono de' metodi sicuri per iscoprirne l'esistenza. Noi ci limiteremo a quello di *Newton*, ma prima dimostreremo la seguente proprietà delle equazioni.

Prop. Nessuna equazione a coefficienti intieri della forma

$$(E) \quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + T = 0$$

può avere delle radici razionali frazionarie.

Sia infatti, se è possibile, $\frac{a}{n}$ una radice della proposta, e sia già ridotta a' minimi termini, cioè sia a primo con n; dovrà pel §. 23 verificarsi l'uguaglianza

$$\frac{a^m}{n^m} + A\frac{a^{m-1}}{n^{m-1}} + B\frac{a^{m-2}}{n^{m-2}} \ldots + T = 0,$$

e per conseguenza anche l'altra

$$\frac{a^m}{n^m} = -\left(\frac{Aa^{m-1} + Bna^{m-2} + \ldots Tn^{m-1}}{n^{m-1}}\right),$$

ovvero moltiplicando per n^{m-1} l'uno e l'altro membro,

$$\frac{a^m}{n} = -\left(Aa^{m-1} + Bna^{m-2} \ldots + Tn^{m-1}\right).$$

Ora il 1.° membro sarebbe una vera frazione, mentre il 2.° è una quantità intiera, ciò che è visibilmente assurdo; dunque la frazione $\frac{a}{n}$ non può esser radice di un'equazione a coefficienti intieri.

§. 72. Per conoscere quando un'equazione abbia delle radici razionali, e quindi dei fattori lineari in x di primo grado, bisogna in primo luogo che essa sia ridotta a coefficienti tutti intieri: se alcuni di questi fossero frazionarj, si ridurrebero a forma intiera ponendo, come si è insegnato (§. 55), $x = \frac{y}{Q}$, essendo Q il prodotto di tutti i denominatori che si trovassero nella proposta. Secondariamente bisogna che la radice razionale, di cui si tratta, si trovi fra i divisori dell'ultimo termine, il quale non è che il prodotto di tutte le radici (§. 33). Quindi se cercheremo tutti questi divisori, e li sostituiremo tanto in più quanto in meno nella proposta invece di x, questa dovrà esser soddisfatta tante volte, quante saranno le radici razionali che conterrà. Se nessuno di tali divisori soddisfarà all'equazione, essa non conterrà nessuna radice razionale. Ma se alcuni vi soddisfaranno, come sarebbero a, b, c, ec., essa sarà divisibile pei fattori lineari $x - a$, $x - b$, $x - c$, ec.

Per esempio l'equazione cubica

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

trattata colla formola cardaniana urta nel caso irreducibile; ma osservando che i divisori dell'ultimo termine 6 sono

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6,$$

fra i quali $+1$, $+2$, -3 la verificano, l'equazione è risoluta, ed è equivalente al prodotto

$$(x-1)(x-2)(x+3) = 0.$$

Questo metodo però diventa o troppo laborioso o inutile, se alquanto grande sia il numero de' divisori dell'ultimo termine. In questo caso gioverà servirci del seguente criterio, con cui potremo anticipatamente rigettare dai divisori dell'ultimo termine tutti quelli che sono inutili.

§. 73. *Prop.* Assegnare fra tutti i divisori dell'ultimo termine di un' equazione quali possano essere di lei radici, e quali no.

Abbia la proposta $(E)=0$ una radice intiera a, essa conterrà il fattore lineare $x-a$, e però potrà mettersi sotto la forma

$$(x-a)F_x=0$$

dove F_x è il polinomio in x che resta dopo aver diviso la proposta per $x-a$. Questa nuova equazione si trasformi in un' altra, le cui radici siano quelle della (E) scemate dell' unità; e se y sarà la nuova incognita, avremo $x=y+1$, e la trasformata sarà

$$(y+1-a)F_{y+1}=0,$$

dove il fattor fuori della parentesi è il risultato della sostituzione di $y+1$ invece di x nel polinomio F_x. Se dunque la proposta ha per sua radice a, quest' ultima avrà per sua radice $a-1$, onde l' ultimo suo termine sarà divisibile per $a-1$. L' ultimo termine poi non è altro che la proposta in cui si sia cangiata x in 1 (§. 57).

Cerchisi una seconda trasformata, la cui incognita sia $z=x+1$, e quindi $x=z-1$; e la proposta diventerà

$$(z-a-1)F_{z-1}=0,$$

e fra i divisori dell' ultimo termine di questa ci dovrà essere $a+1$, se a era una radice di (E); e quest' ultimo termine si ottiene col cangiare x in -1 nella (E) medesima.

Si vede pertanto che se a è una radice di (E), la trasformata in $x-1$ avrà per radice $a-1$, come la trasformata in $x+1$ avrà $a+1$. Ciò torna allo stesso come dire, che l' ultimo termine di ciascuna equazione in $x-1$, in x, in $x+1$ deve esser rispettivamente divisibile per $a-1$, per a, per $a+1$. Quindi ne deriva la seguente semplicissima regola:

1.° Pongasi nel 1.° membro della proposta successivamente $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$; ed i risultati rispettivi siano Q, R, S.

2.° Si cerchino tutti i divisori di questi numeri, e si scrivano a fianco di ciascun risultato.

3.° Non si ritengano tra i divisori di R che quelli che scemati dell'unità si trovano in Q, e accresciuti dell'unità si trovano in S; e viceversa. Tutti gli altri divisori di R si rigettino come inutili.

4.° I divisori dotati della suddetta proprietà si sostituiscano invece di x nella proposta; e se o tutti o alcuni soltanto vi soddisfanno, questi saranno altrettante radici razionali; in caso diverso la proposta non avrà radici di questa natura.

Importa molto di osservare che se a sarà una radice positiva, disposte le supposizioni ed i risultati come segue:

$$\begin{array}{rr|c|l} x = & 1 & Q & \ldots\ldots\ldots \\ x = & 0 & R & \ldots\ldots\ldots \\ x = & -1 & S & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(dove in luogo de' punti si debbono mettere tutti i divisori di Q, R, S rispettivamente), tra questi divisori ve ne saranno alcuni che formeranno la progressione crescente $a-1$, a, $a+1$; ma se a sarà negativa, allora i divisori corrispondenti ne' tre risultati saranno in progressione aritmetica decrescente $a+1$, a, $a-1$; e per conseguenza que' numeri che cresceranno di un' unità venendo dall' alto al basso potranno nel medio contenere una radice positiva; e quelli che cresceranno dell' unità dal basso all' alto indicheranno una radice negativa nel termine di mezzo. L' una e l' altra però si dovrà verificare sostituendola in luogo di x.

§. 74. Cerchinsi le radici razionali dell' equazione

$$x^4 - 2x^3 - 29x^2 + 94x - 120 = 0.$$

Alle supposizioni	corrispondono i risultati.	I divisori rispettivi sono
$x = 1$	$Q = -56$	1,2,4,7,8,14,28,56
$x = 0$	$R = -120$	1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24, 30,40,60,120
$x = -1$	$S = -240$	1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20, 24,30,40,48,60,80,120,240

Ora tra i divisori crescenti dall' alto al basso troviamo

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 14 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \\ 3 & 4 & 6 & 16 \end{array} \quad \text{e dal basso all' alto} \quad \begin{array}{c|c} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ 2 & 5. \end{array}$$

Dunque 2, 3, 5, e 15 potrebbero essere radici positive; 3 e 6 negative, rimanendo inutili tutti gli altri divisori di R. Ma fatte le sostituzioni dei primi positivamente, e de' secondi negativamente, si trova che la proposta è soddisfatta solamente da $+5$ e da -6; quindi questi soli numeri sono vere radici razionali della proposta, la quale in conseguenza si può dividere pel prodotto

$$(x-5)(x+6),$$

ed ottenersi per quoziente l'equazione

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

la cui soluzione non ha più difficoltà.

Sia per 2.° esempio l'equazione

$$x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{2}x + 3 = 0.$$

Si tolgano prima le frazioni col porre $x = \frac{y}{6}$, e si avrà la trasformata

$$y^3 + 5y^2 - 198y + 648 = 0.$$

Supposizioni	Risultati	Divisori
$y = 1$	$Q = 456$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 19, 24, ec.
$y = 0$	$R = 648$	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, ec.
$y = -1$	$S = 850$	1, 2, 5, 10, 17, 25, 34, 50, ec.

Tra le radici positive ci potranno essere 4 e 9, e fra le negative -2, -3, e -18; ma non soddisfacendo alla trasformata che 4, 9, e -18, queste sole sono vere radici, onde sarà $y=4$, $y=9$, $y=-18$, e per conseguenza $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=-3$ sarannno tutte radici della proposta.

E' inutile di avvertire che se alle supposizioni di $x=1$, ovvero $x=-1$ corrispondessero per risultati $Q=0$, $S=0$, ciò sarebbe segno che 1, ovvero -1 sarebbe una radice della proposta, onde tolta questa colla divisione per $x-1$, ovvero per $x+1$ si opererebbe da capo su l' equazione di quoto.

Art. III.

Divisori di secondo grado.

§. 75. *Prop.* Trovare i divisori di secondo grado d' una data equazione.

Si divida la proposta per x^2-px+q, e si spinga la divisione fino a tanto che si arrivi ad un residuo non più divisibile per x^2, cioè della forma

$$Px+Q,$$

in cui P, e Q sono funzioni solamente di p e q, e de' coefficienti della data. Se il trinomio assunto è un divisore esatto dell' equazione, il residuo dee annullarsi indipendentemente da qualunque valor particolare di x. Ora non potrebbe aver luogo l' equazione

$$Px+Q=0,$$

se non fosse nel tempo stesso

$$P=0\quad,\quad Q=0;$$

dunque in queste due equazioni sono contenute le condizioni, che debbono aver luogo, acciocchè x^2-px+q sia un divisore della proposta.

Per avere poi i valori de' coefficienti p e q, bisognerà eliminarne uno dalle due equazioni $P=0$, $Q=0$, ed ottenere una risultante (R) o tutta in p, o tutta in q: e se per qualunque siasi strada potremo trovare una radice reale di questa, avremo trovato uno de' coefficienti in quistione, per mezzo del quale si potrà determinare anche l'altro.

§. 76. *Esempio.* Abbiasi l'equazione

$$x^4+2x^3+4x^2+3x+1=0.$$

Fatta la divisione per x^2-px+q si arriva al residuo $[p^3+2p^2+4p-2(p+1)q+3]x+q^2-(p^2+2p+4-q)q+1$. Uguagliando a zero le due parti di questo avremo le due equazioni separate

$(P)\qquad p^3+2p^2+4p-2(p+1)q+3=0,$

$(Q)\qquad q^2-(p^2+2p+4)q+1=0.$

Ora parrebbe che trovandosi q in (P) tutto lineare, si dovesse prenderne il valore

$$q=\frac{p^3+2p^2+4p+3}{2(p+1)},$$

e collocarlo in (Q), con che si avrebbe la risultante

$(R)\quad p^6+6p^5+20p^4+40p^3+50p^2+36p+11=0.$

Ma questa manifestando due radici razionali ed uguali fra loro, $p=-1$, $p=-1$, darebbe $q=\frac{0}{0}$, cioè indeterminato. In questo scoglio si urterà ogni volta che ad un solo valore di p ne debbano corrispondere due di q; avvegnachè è evidente che q dovrà dipendere da un' equazione di secondo grado. E se ad un solo valore di p ne dovessero corrispondere tre o quattro di q, quest' ultimo coefficiente dipenderebbe da un'equazione di terzo o di quarto grado; e così di seguito. Viceversa se ad un valore di q ne dovessero corrispondere due o più di p, non si potrebbe determinare p che per mezzo di un' equazione superiore al primo grado. Ritornando ora al nostro esempio, prendiamo il valore $p = -1$, e collocatolo nella (Q) otterremo l'equazione di secondo grado

$$q^2 - 3q + 1 = 0,$$

la quale ci dà i due valori di q, cioè

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

onde la proposta avrà i due fattori di secondo grado

$$x^2 + x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x^2 + x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

§. 77. Se tra i divisori di 2.° grado non si vorranno che quelli che sono di forma tutta razionale, si cercheranno dalla risultante (R) i valori razionali di p (§. 73), e tutti quelli, ai quali corrisponderà un valore parimenti razionale di q, soddisfaranno a quanto si cerca.

Es. Domandansi i fattori razionali di 2.° grado dell'equazione

$$x^4 - 19x^2 - 100x - 91 = 0.$$

Dividendo questa per $x^2 - px + q$ si arriva al residuo

$(p^3 - 19p - 2pq - 100)x + q^2 + 19q - p^2q - 91$,

il quale posto $= 0$, e paragonato col generico $Px + Q$ dà le due equazioni

$$(P) \qquad p^3 - 19p - 2pq - 100 = 0,$$

$$(Q) \qquad q^2 + 19q - p^2q - 91 = 0.$$

La prima di queste dà il valor lineare di

$$q = \frac{p^3 - 19p - 100}{2p},$$

e questo sostituito in (Q) dopo tutte le riduzioni dà la risultante

$$p^6 - 38p^4 + 725p^2 - 100^2 = 0,$$

la quale non contenendo che le potenze pari di p ci insegna, che non si dovranno cercare fra i divisori dell'ultimo termine che i soli numeri quadrati, acciò p possa esser razionale. Tali divisori sono

$$1, 4, 16, 25, 100, 400, 625, 10000,$$

tra i quali non v'ha che il 25 che soddisfaccia. Sarà dunque $p^2 = 25$, ossia $p = \pm 5$. Preso questo valore positivamente, e messolo in quello di q che abbiamo sopra trovato, si trova $q = -7$, e presolo negativamente si trova $q = 13$, onde avremo due sistemi di valori razionali corrispondenti, cioè

$$p = \quad 5, \; q = -7$$

$$p = -5, \; q = \quad 13.$$

Quindi la proposta risulta dal prodotto

$$(x^2 - 5x - 7)(x^2 + 5x + 13) = 0,$$

e quindi è ridotta a dipendere dalla risoluzione di due equazioni di 2.° grado.

§. 78. *Prop.* Scoprire e determinare in una data equazione i fattori di 2.° grado della forma $x^2 - a^2$, ossia le radici uguali e di segno contrario.

Siccome il fattore $x^2 - a^2$ è di tal indole che rimane invariabile al cangiarsi di x in $-x$, quindi se la proposta contiene qualche coppia di radici, di cui qui si tratta, dovrà sussistere ugualmente cangiandovi le radici positive in negative e viceversa, ciò che si fa col cangiar di segno i termini posti ne' luoghi pari (§. 56). Se dunque rappresenteremo la proposta col binomio

$$M + Nx = 0,$$

in cui M è la somma di tutti i termini, ne' quali x ha l'esponente pari, Nx la somma delle potenze impari, fatto il cangiamento essa prenderà la forma

$$M - Nx = 0;$$

onde nel supposto che siavi qualche fattore della forma $x^2 - a^2$, dovranno sussistere insieme queste due equazioni. Ma se queste si sommano insieme, indi si sottraggono l'una dall'altra, ne nascono le due

$$M = 0 \; , \; N = 0 \; ;$$

e siccome queste per poter sussistere insieme debbono avere qualche radice comune, e perciò un qualche divisor comune, ne ricaviamo la regola seguente.

Si separino nell'equazione due polinomj, de' quali l'uno contenga le sole potestà pari di x (comprendendo fra queste anche x^0, ossia il termine tutto cognito), l'altro le sole impari e che poi si divida per x. Si cerchi il massimo comun divisore di questi due polinomj, e postolo $= 0$ si avrà l'equazione che conterrà i fattori della forma domandata.

Es. Siano da trovarsi i fattori della forma $x^2 - a^2$ nell'equazione

$$x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 4x + 12 = 0.$$

Abbiamo in questo caso

$$M = 3x^6 - 9x^4 + 12 \; ; \quad N = x^6 - 3x^4 + 4.$$

Il massimo comun divisore di questi due polinomj si scorge ad occhio essere $x^6 - 3x^4 + 4$. Posto dunque

$$x^6 - 3x^4 + 4 = 0 \; ,$$

e cangiata x^2 in y avremo l'equazione cubica

$$y^3 - 3y^2 + 4 = 0 \; ,$$

la quale avendo le tre radici razionali $-1 \; , +2 \; , +2$ si può rappresentare col prodotto

$$(y+1)(y-2)(y-2) = 0 \; ,$$

e perciò la proposta avrà i fattori della forma richiesta

$$x^2 + 1 \; , \; x^2 - 2 \; , \; x^2 - 2$$

tolti i quali colla divisione essa sarà ridotta al primo grado.

Art. IV.

Radici multiple.

§. 79. *Prop.* Scoprire in un' equazione l'esistenza e la grandezza delle radici uguali, che vi possono esser contenute.

Se la proposta

$(E) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + T = 0$

ha una radice sola $= a$, divisa per $x - a$ darebbe un quoto

$(F) \qquad x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} + \ldots + S' = 0$

che non sarebbe più divisibile pel fattor medesimo $x - a$. Ma se (E) ha più d'una radice $= a$, è chiaro che il quoto (F) deve essere nuovamente soddisfatto cangiando x in a. Facciamo questa sostituzione, e mettiamo invece di A', B', C', ec. i loro valori tratti dal §. 34, cioè

$$\begin{aligned}
A' &= a + A \\
B' &= a^2 + Aa + B \\
C' &= a^3 + Aa^2 + Ba + C \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
S' &= a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \ldots + Ra + S,
\end{aligned}$$

ed ordinando i termini per rapporto ad a avremo

$$\left.\begin{array}{l}
a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + Ca^{m-4} \ldots + S \\
a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \ldots \\
a^{m-1} + Aa^{m-2} + \ldots \\
a^{m-1} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot
\end{array}\right\} = 0.$$

Sommando tutte le file verticali, e ponendo mente al numero de' termini di ciascheduna, sarà

$$(G)\quad ma^{m-1}+(m-1)Aa^{m-2}+(m-2)Ba^{m-3}\ldots+S=0.$$

E se oltre alla radice multipla a la proposta avesse un' altra radice multipla b, sussisterebbe similmente l'equazione

$$(H)\quad mb^{m-1}+(m-1)Ab^{m-2}+(m-2)Bb^{m-3}\ldots+S=0;$$

e così si direbbe di qualunque altra radice multipla c che per avventura fosse contenuta nella proposta. Ora tutte le equazioni (G), (H), ec. non sono altro che l'equazione

$$(E')\quad mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}\ldots+S=0,$$

in cui sia cangiata x in a, ovvero in b, ovvero ec. L'equazione (E') poi non è altro che la *derivata* di (E) secondo la legge di derivazione esposta al §. 57. Conchiudiamo adunque che se un' equazione (E) ha una o più radici multiple, dovrà sussistere con essa anche la sua derivata (E'), che è quanto dire che le equazioni

$$(E)=0\quad,\quad(E')=0$$

avranno almeno una radice comune. Se dunque si cercherà il massimo loro comun divisore, questo sarà un polinomio in x, che posto $=0$ conterrà le radici che sono multiple nella proposta.

Per definire poi il grado di multiplicità di ciascuna radice, si ricaveranno dalla (E), oltre la derivata prima $(E')=0$, le successive $(E'')=0$, $(E''')=0$, ec., e quante saranno le equazioni, compresa la proposta, che verranno soddisfatte da ciascuna radice trovata, tanto sarà il grado di loro multiplicità. Quindi se una radice non soddisfà che alle $(E)=0$, $(E')=0$ essa sarà doppia; se verranno soddisfatte le tre

$$(E)=0\ ,\ (E')=0\ ,\ (E'')=0$$

la radice sarà tripla; e così di seguito.

§. 80. *Es.* Siano da trovarsi le radici multiple dell' equazione

(E) $x^7-7x^6+10x^5+38x^4-155x^3+221x^2-144x+36=0.$

L' equazione derivata è

(E') $7x^6-42x^5+50x^4+152x^3-465x^2+442x-144=0.$

Il massimo comun divisore di (E) ed (E') si trova $=$

$$x^3-4x^2+5x-2.$$

Se questo si pone $=0$, e si cercano le radici di questa nuova equazione, esse non sono che le seguenti

$$x=1,\ x=1,\ x=2.$$

Ora la radice 1 soddisfacendo a tre equazioni

$$(E)=0,\ (E')=0,\ (E'')=0,$$

com' è facile a vedersi, sarà tripla nella proposta; ma la radice 2 non soddisfacendo che ad $(E)=0$, $(E')=0$, sarà solamente doppia.

CAPO VII.

Delle equazioni reciproche o convertibili.

§. 81. Così si chiamano quelle equazioni le quali se sono soddisfatte per esempio da una radice $=a$, lo sono ugualmente dalla radice reciproca $\frac{1}{a}$. Un' equazione pertanto dotata di questa proprietà deve rimanere la stessa quando vi si cangi x in $\frac{1}{x}$.

Prop. Assegnare la relazione fra i coefficienti dell' equazione di grado pari

$$(E)\ x^{2p}+Ax^{2p-1}+Bx^{2p-2}+Cx^{2p-3}+\ldots+Hx^p+\ldots$$
$$+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0,$$

acciocchè essa sia reciproca.

Sostituiamo $\frac{1}{x}$ invece di x; e fatta dopo la sostituzione la moltiplica pel denominatore x^{2p} e la divisione per T, avremo la trasformata

$$(F)\quad x^{2p}+\frac{S}{T}x^{2p-1}+\frac{R}{T}x^{2p-2}+\frac{Q}{T}x^{2p-3}\ldots\ldots+\frac{H}{T}x^{p}\ldots\ldots+\frac{C}{T}x^{3}+\frac{B}{T}x^{2}+\frac{A}{T}x+\frac{1}{T}=0.$$

Dovendo ora per l' indole di queste equazioni rimanere identiche (E), (F), fatto il paragone de' coefficienti, si avrà:

$$AT=S,\ BT=R,\ CT=Q,\ldots,HT=H,\ldots,QT=C,$$
$$RT=B,\ ST=A,\ T^2=1.$$

Da quest' ultima abbiamo $T=\pm 1$, onde prendendo da prima il segno superiore, si avrà

$A=S$, $B=R$, $C=Q$, ec., $H=H$;

dai quali valori impariamo che dovranno essere identici i coefficienti de' termini equidistanti dal medio Hx^p, e però la forma di (E) dovrà essere in questo caso

$$(M)\quad x^{2p}+Ax^{2p-1}+Bx^{2p-2}+Cx^{2p-3}\ldots+Hx^{p}\ldots+Cx^{3}+Bx^{2}+Ax+1=0.$$

Prendendo poi $T=-1$, sarà

$S=-A$, $R=-B$, $Q=-C$, ec., $H=-H$, o sia $H=0$,

e la forma di (E) sarà

$$(N)\quad x^{2p}+Ax^{2p-1}+Bx^{2p-2}+Cx^{2p-3}\ldots+Gx^{p+1}-Gx^{p-1}\ldots-Cx^{3}-Bx^{2}-Ax-1=0,$$

in cui manca il termine medio, e ritornano con ordine retrogrado i coefficienti che lo precedono ma con segno contrario.

Potrebbe però sì la (M) che la (N) avere una forma un po' diversa, come sarebbe

$$(O)\quad x^{2p}+Acx^{2p-1}+Bc^{2}x^{2p-2}\ldots\ldots\pm Bc^{2p-2}x^{2}\pm Ac^{2p-1}x\pm c^{2p}=0.$$

Questa nuova forma, quando si verifichi in qualche equazione, le fa prendere il nome di equazione *omogenea*. Ma se si pone $x = cz$, la trasformata in z sarà ridotta ad una delle due precedenti forme, com' è facile a vedersi. Prima però di insegnare come debbano trattarsi le due (M) ed (N) è necessario di premettere la seguente

§. 82. *Prop.* Supposto che fra le quantità x ed y vi sia un rapporto espresso dall' equazione

$$(G) \quad x + \frac{1}{x} = y$$

trovare il valore del binomio $x^r + \frac{1}{x^r}$ tutto espresso per y.

Fatta la potenza r in ciascun membro della (G), e sviluppata al solito, si avrà

$$x^r + rx^{r-2} + \frac{r(r-1)}{2}x^{r-4} + \frac{r(r-1)(r-2)}{2\,.\,3}x^{r-6} + \ldots$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{2\,.\,3}\frac{1}{x^{r-6}} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{1}{x^{r-4}} + \frac{r}{x^{r-2}} + \frac{1}{x^r} = y^r.$$

Isolando nel primo membro il primo ed ultimo termine di questa serie, ed unendo a due a due tutti quelli che sono equidistanti dagli estremi e perciò di ugual coefficiente, avremo

$$(A) \quad x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - r\left(x^{r-2} + \frac{1}{x^{r-2}}\right) - \frac{r(r-1)}{2}\left(x^{r-4} + \frac{1}{x^{r-4}}\right)$$
$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{2\,.\,3}\left(x^{r-6} + \frac{1}{x^{r-6}}\right) - \text{ec.}$$

Ritenuta questa come una formola potremo in essa cambiare successivamente r in $r-2$, $r-4$, $r-6$, ec.; ma per maggior facilità faremo queste sostituzioni in ordine inverso, e quindi troveremo

$$1.^{\circ} \quad x^{r-6} + \frac{1}{x^{r-6}} = y^{r-6} - \text{ec.}$$

4° $x^{r-4} + \frac{1}{x^{r-4}} = y^{r-4} - (r-4)\left(x^{r-6} + \frac{1}{x^{r-6}}\right) - \text{ec.}$

$= y^{r-4} - (r-4) y^{r-6} + \text{ec.}$

3° $x^{r-2} + \frac{1}{x^{r-2}} = y^{r-2} - (r-2)\left(x^{r-4} + \frac{1}{x^{r-4}}\right) -$

$\frac{(r-2)(r-3)}{2}\left(x^{r-6} + \frac{1}{x^{r-6}}\right) - \text{ec.}$

$= y^{r-2} - (r-2) y^{r-4} + \frac{(r-2)(r-5)}{2} y^{r-6} - \text{ec.}$

ec.

Sostituiti ormai questi valori nella (A), si avrà dopo le convenienti riduzioni la formola domandata

$$(B) \quad x^r + \frac{1}{x^r} = y^r - r y^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} y^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{2\,.\,3} y^{r-6} + \frac{r(r-5)(r-6)(r-7)}{2\,.\,3\,.\,4} y^{r-8} - \text{ec.};$$

ed il termine generico di questa è

$$\pm \frac{r(r-k-1)\ldots(r-2k+2)(r-2k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots k} y^{r-2k},$$

in cui vale il segno superiore se k è pari, e l'inferiore se k è dispari, ed in cui il numero de' fattori del numeratore e del denominatore, compresa l'unità, è sempre $= k$.

Vedremo a suo luogo a qual funzione trigonometrica corrisponda questa serie. Intanto è necessario di avvertire che il numero r deve essere un intiero e positivo, e che la serie si dee troncare là dove le potenze di y incominciano a diventar negative.

§. 83. *Prop.* Ridurre al grado p le equazioni reciproche comprese nella forma generale

$$(M) \quad \begin{matrix} x^{2p} + Ax^{2p-1} + Bx^{2p-2} + Cx^{2p-3} \ldots \\ + 1 + Ax \quad + Bx^2 \quad + Cx^3 \ldots \end{matrix} + Hx^p = 0;$$

Dividendo quest' equazione per x^p si potrà mettere sotto la forma

$$x^p + \frac{1}{x^p} + A\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}}\right) + B\left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}\right) + \dots$$
$$+ H = 0\,;$$

ponendo in questa $x + \frac{1}{x} = y$ si avrà per mezzo della formola (B) una trasformata in y del solo grado p; onde se per avventura questa non oltrepasserà il 4.º grado, o sarà risolubile per qualsivoglia altra strada, sarà risoluta anche la proposta (M).

Trovate le p radici della trasformata in y si ricaveranno i valori di x mediante l'equazione di relazione

$$x + \frac{1}{x} = y\,, \quad \text{ovvero} \quad x^2 - xy + 1 = 0\,,$$

da cui si ha

$$x = \frac{y \pm \sqrt{(y^2 - 4)}}{2}\,;$$

onde ad ogni valore di y corrispondendone due di x, questi saranno in numero $2p$, siccome dev'essere.

§. 84. *Prop.* Ridurre al grado p l'equazione

$$(N)\quad \left.\begin{array}{l} x^{2p} + Ax^{2p-1} + Bx^{2p-2} + Cx^{2p-3} \dots + Gx^{p+1} \\ -1 \quad - Ax \quad - Bx^2 \quad - Cx^3 \dots\dots - Gx^{p-1} \end{array}\right\} = 0.$$

Questa si ponga sotto la forma equivalente

$$(x^{2p} - 1) + Ax(x^{2p-2} - 1) + Bx^2(x^{2p-4} - 1) +$$
$$Cx^3(x^{2p-6} - 1) \dots + Gx^{p-1}(x^2 - 1) = 0\,,$$

e fatta la divisione pel fattor comune $x^2 - 1$, il quoto diventerà

$$\left.\begin{array}{l} x^{2p-2} + Ax^{2p-3} + (1+B)^{2p-4} + (A+C)x^{2p-5} \dots + Gx^{p-1} \\ +1 \quad + Ax \quad + (1+B)x^2 + (A+C)x^3 \dots \end{array}\right\} = 0,$$

cioè sarà della forma della (M), e perciò riducibile col medesimo artifizio ad un' equazione in y del solo grado $p-1$, da cui si avranno ne' casi, che si sapranno trattare, $p-1$ valori di y, dai quali si ricaveranno come sopra $2p-2$ valori di x, ed aggiunte a questi le due radici $1, -1$ provenienti dal fattore x^2-1 impiegato precedentemente, si avranno le $2p$ radici della proposta (N).

§. 85. *Prop.* Ridurre al grado p l'equazione di grado dispari

$$x^{2p+1}+Ax^{2p}+Bx^{2p-1}\ldots+Hx^{p+1}+Hx^{p}\ldots+Bx^2+Ax+1=0.$$

Si incominci dall'ordinarla nel modo seguente:

$$(x^{2p+1}+1)+Ax(x^{2p-1}+1)+Bx^2(^{2p-2}+1)\ldots+Hx^p(x+1)=0;$$

ed essendo questa manifestamente divisibile per $x+1$, fatta la divisione diventerà

$$\left.\begin{array}{r} x^p+x^{2p-1}+x^{2p-2}+x^{2p-3}\ldots+1 \\ +Ax(x^{2p-2}+x^{2p-3}+x^{2p-4}\ldots+1) \\ +Bx^2(x^{2p-4}+x^{2p-5}\ldots+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +Hx^p \end{array}\right\}=0,$$

ovvero ordinando relativamente alle potenze di x:

$$x^{2p}+(1+A)x^{2p-1}+(1+A+B)x^{2p-2}+\ldots+Hx^p\ (1+A+B)x^2+(1+A)x+1=0,$$

la quale è visibilmente ridotta alla forma (M) del §. 81, e perciò riducibile collo stesso artifizio al grado p.

Se la medesima equazione fosse della forma (N), raccolti i termini equidistanti, e divisi tutti per $x-1$, si tornerebbe ad un'equazione della forma (M).

§. 86. *Prop.* Risolvere le equazioni della forma generica

$$x^n-1=0.$$

Sia in primo luogo $n=3$, e l'equazione a risolversi sarà $x^3-1=0$. Divisa questa pel fattore $x-1$, che visibilmente vi è contenuto, avremo il quoto

$$x^2+x+1=0,$$

che si sa risolvere col metodo ordinario. Chiamiamo a, b le radici di quest' ultima, e le radici di

$$x^3 - 1 = 0$$

saranno

$$x = 1 \; ; \; x = a = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \; ; \; x = b = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Questi tre valori si chiamano le radici cubiche dell' unità.

Ma prendiamo la cosa più generalmente. Noi sapremo risolvere l'equazione $x^n - 1 = 0$, in cui n sia un numero composto, ogniqualvolta sappiamo risolvere le equazioni della medesima forma, il cui grado sia qualunque de' numeri primi componenti n. Supponiamo infatti $n = pq$; la risoluzione della proposta dipenderà da quella di altre due come sarebbe

$$y^p - 1 = 0 \; , \; t^q - 1 = 0.$$

Imperciocchè ponendo $x^q = y$, fatta la potenza p si avrà $x^{pq} = x^n = y^p$, e perciò $y^p - 1 = 0$. Supponiamo risoluta quest' ultima, ed a una qualunque delle sue radici, sarà

$$x^q - a = 0.$$

Ma questa colla pura estrazione della radice q^{sima} dà

$$x = \sqrt[q]{a}.$$

Facendo pertanto $x = t\sqrt[q]{a}$ (affine di rappresentare tutte le radici dell' equazione $x^q - a = 0$), e ripassando alla potestà q^{sima} avremo

$$x^q = at^q = a,$$

da cui finalmente $t^q - 1 = 0$. Siano ora le radici di $y^p - 1 = 0$ le seguenti:
a', a'', a''', ... $a^{(p)}$, e quelle di $t^q - 1 = 0$ siano t', t'', t''', ... $t^{(q)}$. Se nell' equazione $x = t\sqrt[q]{a}$

combineremo tutti questi valori di t con tutti quelli di a in tutti i modi possibili, e chiaro (§. 16) che avremo pq permutazioni, cioè n valori di x, come deve essere.

§. 87. Consideriamo specialmente il caso di n dispari, ossia occupiamoci dell' equazione

$$x^{2p+1}-1=0.$$

Divisa questa per $x-1$ si ottiene il quoziente di grado pari

$$x^{2p}+x^{2p-1}+x^{2p-2}\ldots\ldots+x^2+x+1=0,$$

ed applicando a questa il metodo del §. 83 si ridurrà alla seguente in y

$$y^p+y^{p-1}-(p-1)y^{p-2}-(p-2)y^{p-3}\ldots\ldots+1=0$$

del solo grado p. Se dunque si saprà risolvere quest' ultima, si avranno p valori di y: e siccome dall' equazione $x+\frac{1}{x}=y$ ne deriva la quadratica

$$x^2-xy+1=0,$$

si avranno due valori di x, ciascuno de' quali dipende da y, onde si viene così ad avere $2p$ valori di x, ai quali aggiungendo il valore $x=1$ trovato da principio, si avranno tutti li $2p+1$ valori di x competenti alla proposta $x^{2p+1}-1=0$.

In tal maniera si potranno risolvere le equazioni

$$x^2-1=0\ ;\ x^3-1=0\ ;\ x^5-1=0$$

colla sola estrazione della radice quadrata; e conseguentemente si potrà risolvere altresì ogni equazione $x^n-1=0$, allorquando n non contenga altri fattori semplici che 2, 3, e 5, cioè che sia della forma $2^\lambda \,.\, 3^\mu \,.\, 5^\nu$, dove λ, μ, ν sono intieri e positivi.

Volendo poi far uso anche della risoluzione delle equazioni del 3º grado si potrà risolvere eziandio l'equazione $x^7-1=0$, e per conseguenza qualunque equazione $x^n-1=0$, quando n sia della forma $2^\lambda \,.\, 3^\mu \,.\, 5^\nu \,.\, 7^\pi$.

Ma non si può con questo metodo andar più oltre, poichè il numero primo che succede al 7 essendo l'11, bisognerebbe poter risolvere l'equazione $x^{11}-1=0$, ciò che richiede la risoluzione dell' equazione del 5.° grado

$$y^5+y^4-4y^3-3y^2-3y+1=0$$

che non si sa risolvere.

§. 88. Se l'equazione non fosse $x^n-1=0$, ma bensì $x^n-a^n=0$, allora estratta la radice n^{sima} da a^n che è a, si moltiplicherebbero tutte le radici di $x^n-1=0$ per a, ed i prodotti sarebbero le radici di $x^n-a^n=0$.

Se poi l'equazione fosse $x^n+1=0$, ovvero $x^n+a^n=0$, nel caso di n pari tutte le radici sarebbero immaginarie; e nel caso di n dispari ve ne sarebbe sempre una reale e negativa (§. 43), e tutte le altre immaginarie.

Le radici dell' equazione generica $x^n-1=0$, si chiamano le radici dell' unità. Se n è pari, due di queste saranno reali, l'una positiva e l'altra negativa (§. 43), e tutte le altre immaginarie; e se n è dispari, non vi sarà che una sola radice reale e positiva, e tutte le altre $n-1$ radici saranno immaginarie.

§. 89. Siano a, b, c, ec. le radici della proposta $x^n-1=0$, e poniamo una di queste come a invece di x, e ne nascerà l'equazione identica $a^n=1$. Ma questa medesima, formando le potenze successive di a, si trasforma nelle seguenti

$$a^{2n}=1\ ,\ a^{3n}=1\ ,\ a^{4n}=1\ ,\ \ldots\ldots\ a^{nn}=1\ ,$$

e ciascuna di queste di nuovo coll' estrazione della radice n^{sima} nelle corrispondenti

$$a^2=1\ ,\ a^3=1\ ,\ a^4=1\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ a^n=1\ ;$$

e siccome tutti questi valori soddisfanno ugualmente all' equazione $x^n-1=0$, perciò ne saranno le di lei radici: onde in generale se una radice di questa è a, le altre saranno a^2, a^3, a^4, ..., a^n, l'ultima delle quali è sempre $=1$. Le altre radici pertanto b, c, d, ec. dovendo coincidere con qualcheduna delle potenze di a, possiamo supporre per es. $b=a^2$, e per conseguenza tutte le radici dell' equazione medesima si potranno altresì rappresentare colle potenze successive di b, ovvero di a^2 (eccettuata però l' ultima $=1$), cioè con a^4, a^6, a^8, ec., e divise queste quante volte si può per a^n (che è sempre $=1$) si ridurranno alle primitive a, a^2, a^3, ec.

Per es. nel caso di $n=3$ le radici sarebbero a, b, c, ovvero a, a^2, a^3 $(=1)$, onde se si prende la seconda di queste, cioè a^2 invece della prima a, le tre radici sarebbero a^2, a^4, a^6; ma a cagione di $a^3=1$, si trova $a^4=a$, $a^6=a^3$, e però le radici ritornano a^2, a, a^3, cioè le stesse di prima. Parimenti se $n=5$, le radici saranno a, a^2, a^3, a^4, a^5, e se si prende la radice a^2 invece di a, ne nasceranno le altre a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, le quali a motivo di $a^5=1$ diventano a^2, a^4, a, a^3, a^5. Che se invece si prendesse a^3, le cinque radici dell' unità sarebbero a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}, e sottratto dagli esponenti il 5 quante volte si può, le radici medesime sarebbero a^3, a, a^4, a^2, a^5 $(=1)$. Prendendo finalmente a^4, si troverebbero le radici a^4, a^3, a^2, a, a^5, cioè sempre le medesime ma in ordine diverso.

Inoltre in quel modo che possiamo rappresentare le radici dell' equazione $x^n-1=0$ con a, a^2, a^3, ... a^n (essendo $a^n=1$) si potranno altresì rappresentare con $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ .... $\frac{1}{a^n}$, giacchè l' uguaglianza $a^n=1$ si può dividere per a, per a^2, ec., e quindi sarà

$$a^{n-1}=\frac{1}{a},\ a^{n-2}=\frac{1}{a^2},\ \text{ec.}$$

Di più: nel caso di n numero primo, in cui non v'ha nell' equazione di cui si tratta che la sola radice reale $=1$, restando tutte le altre immaginarie, se una di queste come a si rappresenterà con $p+q\sqrt{-1}$, vi dovrà essere la sua conjugata $p-q\sqrt{-1}$. Dovendo dunque valere tanto $(p+q\sqrt{-1})^n=1$, quanto $(p-q\sqrt{-1})^n=1$, varrà eziandio il prodotto $(p+q\sqrt{-1})^n(p-q\sqrt{-1})^n=1$, ossia $(p^2+q^2)^n=1$, ed estraendo la radice n^{sima} avremo tanto $(p+q\sqrt{-1})(p-q\sqrt{-1})=1$, quanto $p^2+q^2=1$. Da qui ricaviamo $p-q\sqrt{-1}=\dfrac{1}{p+q\sqrt{-1}}$, onde se a è una radice, la sua conjugata sarà $\dfrac{1}{a}$, ossia a^{n-1}; e se invece si prenderà a^2, la conjugata di questa sarà a^{n-2}, e così delle altre.

§. 90. *Prop.* Risolvere le equazioni comprese nella formola

$$(Q)\quad y^r-ry^{r-2}+\frac{r(r-3)}{2}y^{r-4}-\frac{r(r-4)(r-5)}{2\,.\,3}y^{r-6}\ldots=c^r,$$

la quale nel primo membro cammina colla medesima legge della formola (B) del §. 82.

Se si pone $y=x+\dfrac{1}{x}$, è chiaro dal calcolo già fatto nel luogo citato, che il primo membro di (Q) si ridurrà ad $x^r+\dfrac{1}{x^r}$, e perciò che l'equazione medesima si ridurrà alla semplicissima forma

$$x^r+\frac{1}{x^r}=c^r,\ \text{ovvero}\ x^{2r}-c^rx^r+1=0.$$

Se la proposta (Q) avesse la forma omogenea

$$z^r-ra^2z^{r-2}+\frac{r(r-3)}{2}a^4z^{r-4}\ldots=g^r,$$

si ridurrebbe tosto alla precedente ponendo $z=ay$, dividendo dopo la sostituzione tutta la trasformata per a^r, e cangiando $\frac{g^r}{a^r}$ in c^r.

Passando adesso a risolvere l'equazione

$$x^{2r} - c^r x^r + 1 = 0,$$

la quale, come si vede, è una derivativa del 2.° grado, si ha dalle note formole

$$x^r = \frac{c^r \pm \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}.$$

Ma per trovare tutte le $2r$ radici porremo

$$h^r = \frac{c^r + \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}, \quad k^r = \frac{c^r - \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2},$$

onde avremo le due equazioni

$$x^r = h^r, \quad x^r = k^r.$$

Se dunque chiameremo $a, a^2, a^3, \ldots a^{r-1}$ (§. prec.) le r radici dell'unità diverse da 1, quelle dell'equazione $x^r = h^r$ saranno

$$x = h, ah, a^2 h, a^3 h, \ldots a^{r-1} h;$$

e quelle dell'equazione $x^r = k^r$ saranno similmente

$$x = k, ak, a^2 k, a^3 k, \ldots a^{r-1} k.$$

Quindi i valori di $x + \frac{1}{x}$, ossia di y, presi nella prima serie, saranno

$$h + \frac{1}{h}, ah + \frac{1}{ah}, a^2 h + \frac{1}{a^2 h}, \ldots, a^{r-1} h + \frac{1}{a^{r-1} h},$$

e presi nella seconda serie, saranno

$$k + \frac{1}{k}, ak + \frac{1}{ak}, a^2 k + \frac{1}{a^2 k}, \ldots, a^{r-1} k + \frac{1}{a^{r-1} k}.$$

Ma i valori di y non possono essere che in numero r, mentre qui compariscono in numero $2r$; bisogna dunque che questi si riducano alla metà uguagliandosi a due a due, ed ecco come. Se si moltiplicano insieme membro per membro i due valori

$$h = \sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}}, \quad k = \sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}};$$

si trova il prodotto $hk = 1$, da cui si ha tanto $h = \frac{1}{k}$, quanto $k = \frac{1}{h}$, e ancora $ah = \frac{a}{k}$, $ak = \frac{a}{h}$. Inoltre moltiplicando il 2.° membro di queste due ultime uguaglianze per a^{r-1} sott' e sopra, si ha, in grazia di $a^r = 1$, $ah = \frac{1}{a^{r-1}k}$, $ak = \frac{1}{a^{r-1}h}$. Con uguale artifizio si troverà $a^2 h = \frac{1}{a^{r-2}k}$, $a^2 k = \frac{1}{a^{r-2}h}$, ec., e per ultimo $a^{r-1}h = \frac{1}{ak}$, $a^{r-1}k = \frac{1}{ah}$. Sostituendo ormai nella prima serie de' valori precedenti di y ai termini frazionarj i valori intieri dati per k, e nella seconda i valori dati per h, si avranno le due nuove serie di valori di y

$$h + k, \; ah + a^{r-1}k, \; a^2h + a^{r-2}k, \; a^3h + a^{r-3}k, \ldots a^{r-1}h + ak,$$

$$h + k, \; ak + a^{r-1}h, \; a^2k + a^{r-2}h, \; a^3k + a^{r-3}h, \ldots a^{r-1}k + ah,$$

dove si vede che nella prima serie sono contenuti tutti i valori medesimi della seconda, e che perciò il numero vero de' valori disuguali di y si riduce ad r.

Restituendo pertanto nelle prime di queste due serie ad h e k i loro valori, avremo li seguenti r valori di y, cioè

$$1.° \quad y = \sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}} + \sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}},$$

$$2.° \quad y = a\sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}} + a^{r-1}\sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r} - 4)}}{2}},$$

$$3^\circ\; y = a^2 \sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}} + a^{r-2} \sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}},$$

$$4^\circ\; y = a^3 \sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}} + a^{r-3} \sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}},$$

.

.

$$r^{mo}\; y = a^{r-1} \sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}} + a \sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}}.$$

Siccome poi questi valori sono di forma affatto somigliante alle tre radici di un' equazione cubica, quali si trovano col metodo di *Cardano*, perciò l'equazione (Q), a cui si riferiscono, si chiama *l'equazione a radici di forma cardaniana*.

§. 91. Si vede che in questa classe di equazioni, come nelle cubiche, si dovrà incontrare *un caso irreducibile* tutte le volte che essendo r dispari sia poi $c^{2r} < 4$, ossia $c^r < 2$. Imperciocchè avendo la (Q) in questo caso almeno una radice reale (§. 43), questa non potrà esser rappresentata da nessuno de' precedenti valori di y, i quali non sapendosi sbarazzare dagli immaginarj con artifizj puramente algebrici, diventano affatto inutili.

Ma v'ha di più: nelle condizioni premesse le radici della (Q) sono tutte reali e disuguali. Imperciocchè supposto che possa ridursi la quantità immaginaria

$$\sqrt[r]{\frac{c^r + \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}} = A + B\sqrt{-1},$$

è facile a provarsi che sarà

$$\sqrt[r]{\frac{c^r - \sqrt{(c^{2r}-4)}}{2}} = A - B\sqrt{-1},$$

dove A e B sono quantità reali o algebriche o trascendenti. Il primo dunque de' valori di y sarà $= 2A$, cioè tutto reale. Rapporto agli altri $r-1$ valori, si dee osservare che trovandosi i precedenti radicali moltiplicati rispettivamente per a ed a^{r-1}, per a^2 ed a^{r-2}, ec., che sono altrettante radici dell' equazione $x^r - 1 = 0$, se una di queste (per es. a) si porrà $= p + q\sqrt{-1}$, sarà (§. 89) $a^{r-1} = p - q\sqrt{-1}$, e perciò il 2º valore di y si potrà mettere sotto la forma

$$(p+q\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1}) + (p-q\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})$$
$$= 2Ap - 2Bq,$$

cioè tutta reale. Lo stesso vale di tutti gli altri valori.

Sia per es. l' equazione

$$y^5 - 5y^3 + 5y = 1,$$

che è compresa nella (Q), ed a cui corrisponde $r = 5$, $c^{2r} = 1$, $c^r = 1$. Preso dalle formole del §. prec. il primo valore di y si avrebbe

$$y = \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}},$$

il qual valore, come tutti i seguenti, essendo infetto di immaginarietà nulla ci fa conoscere. In questo ed altri simili casi volendo far uso di principj puramente algebraici non abbiamo che due partiti, cioè o di cercare i fattori razionali, quando ve ne siano, o di risolvere l' equazione proposta con qualche metodo di approssimazione, come insegneremo in appresso. Nel caso presente si troverebbe la radice razionale $y = 1$, e divisa la proposta per $y - 1$ si otterrebbe per quoto

$$y^4 + y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

di cui non è difficile di trovare i due fattori incommensurabili

$$y^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y - \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad y^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}y - \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

i quali uguagliati a zero danno quattro distinti valori di y tutti reali; onde comprendendo la prima radice 1, si hanno tutte le radici della proposta.

§. 92. Rapporto all' equazione di forma più generica

$$x^{2r} - ax^r + b = 0$$

nel caso di $a^2 < 4b$ si ponga $x = b^{\frac{1}{2r}} z$, onde sia $x^{2r} = bz^{2r}$, $x^r = z^r \sqrt{b}$, e ne nascerà la trasformata

$$bz^{2r} - az^r \sqrt{b} + b = 0,$$

che divisa per b diventerà

$$z^{2r} - \frac{a}{\sqrt{b}} z^r + 1 = 0.$$

Posta quest' ultima sotto la nuova forma

$$z^r + \frac{1}{z^r} = \frac{a}{\sqrt{b}},$$

e fatto $z + \frac{1}{z} = y$, ne nascerà in virtù della formola (B) la nuova equazione

$$y^r - ry^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} y^{r-4} - \frac{r(r-4)(r-5)}{2 \cdot 3} y^{r-6} \dots$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Di questa si cercheranno i fattori razionali, ovvero le radici approssimate, e trovatele con qualcheduno di questi modi se ne conchiuderà il valore di z per mezzo dell' equazione

$$z^2 - zy + 1 = 0,$$

che dà $z = \frac{y \pm \sqrt{(y^2 - 4)}}{2}$, indi dal valore di z se ne formerà quello di x per mezzo dell' equazione $x = b^{\frac{1}{2r}} z$.

CAPO VIII.

Delle radici immaginarie.

§. 93. Non è il minimo de' vantaggi dell' Algebra quello di avvisare il calcolatore per mezzo delle radici immaginarie, che s' incontrano nella risoluzione delle equazioni, che le quistioni, da cui queste derivano, contengono delle contraddizioni nel loro enunciato. Ma v' ha di più: queste quantità assurde e ripugnanti combinate colle operazioni dell' analisi producono delle quantità reali e legittime; ed oltre di ciò sono di grand' uso nell' analisi così elemente e come sublime per discoprire e dimostrare molte interessanti verità.

Prop. Trovare il numero e la grandezza delle radici immaginarie di un' equazione.

Si sostituisca nell' equazione proposta

$(E)\quad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + T = 0$

$a + b\sqrt{-1}$ invece di x. Questa sostituzione produrrà una trasformata della forma $M + N\sqrt{-1} = 0$, comprendendo in M tutti i termini reali, e in $N\sqrt{-1}$ tutti gli immaginarj. Ora questa non può sussistere, se non sia separatamente

$$M = 0\,,\quad N = 0\,;$$

giacchè è impossibile che le quantità reali possano venir distrutte dalle immaginarie. Formando pertanto co' termini tutti reali, poscia co' termini affetti da $\sqrt{-1}$ due distinte equazioni, e dividendo quest' ultima per $\sqrt{-1}$, si avranno le seguenti

$$(H)\quad \begin{array}{l} a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \ldots = 0 \\ ma^{m-1} + pa^{m-2} + qa^{m-3} + \ldots = 0\,; \end{array}$$

in cui i coefficienti P, Q, ec., p, q, ec. non dipendono che da b, e dai coefficienti della proposta, ed in cui b non eccede la potenza m^{sima}.

Dovendo adesso eliminare l'una o l'altra delle indeterminate a, b, elimineremo a, e la risultante in b non eccederà il grado $m(m-1)$ (§. 46). Questa risultante poi dovendo rimaner la stessa se vi si cangerà b in $-b$ (giacchè deve essere indifferente di sostituire nella proposta piuttosto $a+b\sqrt{-1}$ che $a-b\sqrt{-1}$, dovrà mancare di tutte le potenze dispari di b, e però sarà riducibile alla forma

$$(R)\ (b^2)^{\frac{m(m-1)}{2}} + M(b^2)^{\frac{m(m-1)}{2}-1} + N(b^2)^{\frac{m(m-1)}{2}-2} \ldots = 0,$$

da cui si avranno tanti valori di b^2 quante sono le unità in $\frac{m(m-1)}{2}$, e ciò o colle formole note o con i metodi d'approssimazione, che esporremo in appresso.

Per trovare a non si avrà che a sostituire nelle equazioni *(H)* ad uno ad uno i valori trovati di b^2, con che si avranno ogni volta due equazioni in a, le quali avranno sempre qualche fattor comune. Si cercherà pertanto il loro massimo comun divisore, e postolo $=0$ si avrà l'equazione, da cui si ricaverà il valore di a corrispondente a quel valore di b^2 che si sarà impiegato. Estraendo poi da b^2 la radice quadrata si avranno le due radici immaginarie conjugate

$$a+b\sqrt{-1}\ ,\quad a-b\sqrt{-1}\,.$$

§. 94. *Osserv.* Importa molto di rimarcare diversi casi che possono occorrere sì nella soluzione dell' equazione *(R)*, da cui si hanno i valori di b^2, come nella ricerca del valore di a corrispondente a quello di b^2.

1.° Dai valori immaginarj, che potrebbe avere b^2, non si può raccogliere nessun valore nè di b nè di

a, giacchè per ipotesi queste quantità debbono esser reali.

2.º Se b^2 avrà dei valori reali e positivi, allora la proposta potrà avere tante coppie di radici immaginarie quanti saranno i valori positivi e disuguali di b^2.

3.º Se tutti i valori di b^2 saranno negativi, come $-k$, e quindi fosse $b=\pm\sqrt{-k}$, allora la proposta non potrà avere radici immaginarie.

4.º Acciocchè dai valori reali e positivi di b^2 si possa conchiudere con sicurezza l'esistenza di radici immaginarie nella proposta, bisogna che a ciascun valore reale e positivo di b^2 corrisponda almeno un valor reale di a. Se mancasse questa condizione non potrebbe la proposta aver radici immaginarie.

5.º Se tra i valori reali e positivi di b^2 ve ne fossero due o più uguali e reali, allora i sistemi di radici immaginarie corrispondenti avrebbero commune la parte immaginaria, e sarebbero perciò delle seguenti forme:

$$\begin{matrix} a+b\sqrt{-1} \\ a-b\sqrt{-1} \end{matrix};\quad \begin{matrix} a'+b\sqrt{-1} \\ a'-b\sqrt{-1} \end{matrix};\quad \begin{matrix} a''+b\sqrt{-1} \\ a''-b\sqrt{-1} \end{matrix};\ \text{ec.}$$

6.º Se b^2 avesse uno o più valori $=0$ (ciò che si raccoglierà dal mancare nella (R) o l'ultimo termine, o gli ultimi due, o ec.), la proposta avrebbe due o più radici reali ed uguali.

7.º Finalmente se il massimo comun divisore delle equazioni (H) sarà di primo grado rapporto ad a, allora ad un solo valore di b^2 corrisponderà un solo valore di a. Ma se questo divisore sarà di 2.º grado, allora al medesimo valore di b^2 corrisponderanno due distinti valori di a, e si avranno per conseguenza due sistemi di radici immaginarie, come sarebbe

$$\begin{matrix} a+b\sqrt{-1} \\ a-b\sqrt{-1} \end{matrix},\quad \begin{matrix} a'+b\sqrt{-1} \\ a'-b\sqrt{-1} \end{matrix}.$$

E se lo stesso comun divisore fosse di 3.° grado o d'altro più elevato, si avrebbero tre o più valori di a, che indicherebbero altrettanti sistemi di radici, in cui la parte immaginaria sarebbe comune.

§. 95. Prima di passare agli esempj ci prepareremo le prime potenze del binomio immaginario $a + b\sqrt{-1}$, per averle pronte da sostituire nelle equazioni che ci proporremo da esaminare:

$$x = a + b\sqrt{-1}$$
$$x^2 = a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}$$
$$x^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2 - b^2)\, b\sqrt{-1}$$
$$x^4 = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3 - 4ab^2)\, b\sqrt{-1}$$
$$x^5 = a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 + (5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)\, b\sqrt{-1}$$
$$x^6 = a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6 + (6a^5 - 20a^3b^2 + 6ab^4)\, b\sqrt{-1}$$

ec.

Es. 1.° Sia in primo luogo l'equazione cubica

$$x^3 - 2x + 5 = 0.$$

Coll' ajuto della precedente tabella questa si trasformerà nelle due equazioni

$$(H) \quad \begin{array}{ll} 1.^a & a^3 - (3b^2 + 2)a + 5 = 0 \\ 2.^a & 3a^2 - b^2 - 2 = 0. \end{array}$$

Eliminiamo a; e perciò dalla 1.ª moltiplicata per 3 sottratta la 2.ª moltiplicata per a avremo per residuo

$$(3) \quad -(8b^2 + 4)a + 15 = 0.$$

Preso da questa il valore di $a = \dfrac{15}{8b^2 + 4}$, e sostituitolo nella 2.ª si avrà per risultante la

$$(4) \quad 64b^6 + 192b^4 + 144b^2 - 643 = 0,$$

la quale avendo l'ultimo termine negativo ha di sicuro una radice reale e positiva (§. 43), ossia un valor reale e positivo di b^2, che è l'unico che possa soddisfare, mentre la proposta non può avere più di un sistema di radici immaginarie.

Suppongasi adesso risoluta l'equazione (4) considerando b^2 come l'incognita, ossia deducendo la soluzione da quelle del 3.° grado. Sostituiscasi il valor trovato di b^2 nella (3), la quale finalmente non è altro che il massimo comun divisore fra la 1.ª e la 2.ª, e avremo come sopra

$$a = \frac{15}{8b^2 + 4},$$

e però sarà trovata anche la parte a della radice

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Es. 2.° Sia l'altra equazione cubica

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Fatta la sostituzione del binomio immaginario si avranno le due equazioni

$$a^3 - (3b^2 + 7)a + 7 = 0$$
$$3a^2 - b^2 - 7 = 0,$$

ed eseguita l'eliminazione di a come nell'esempio precedente si arriverà alla risultante

$$64b^6 + 672b^4 + 1764b^2 + 49 = 0,$$

la quale avendo tutti i segni positivi non può avere nessuna radice reale positiva (§. 30), onde i valori di b saranno immaginarj, e però la proposta non avrà che radici reali e disuguali.

Es. 3.° Sia l'equazione di 4.° grado

$$x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 65 = 0.$$

Le equazioni provenienti dalla prescritta sostituzione sono

$$(H)\quad \begin{cases} a^4 - 8a^3 + (30 - 6b^2)a^2 - (56 - 24b^2)a + \\ \qquad b^4 - 30b^2 + 65 = 0 \\ a^3 - 6a^2 - (b^2 - 15)a + 2b^2 - 14 = 0. \end{cases}$$

Eseguita l'eliminazione di a si avrà una risultante, che si potrà mettere sotto la forma

$$(b^4-3b^2-4)^2(b^4-6b^2+25)=0.$$

Questa potrebbe verificarsi tanto per essere

$$b^4-3b^2-4=0$$

quanto

$$b^4-6b^2+25=0.$$

Quest' ultima avendo tutti i valori di b^2 immaginarj non ci può dare le radici che cerchiamo; la prima invece avendo i due valori

$$b^2=4\quad,\quad b^2=-1,$$

de' quali il secondo negativo è di nuovo inutile, ci mostra che il solo valore che possa soddisfare è il 4. Posto pertanto $b^2=4$ nelle due equazioni *(II)*, queste diventano

$$a^4-8a^3+6a^2+40a-39=0$$
$$a^3-6a^2+11a-6=0$$

il cui massimo comun divisore essendo a^2-4a+3, ci fornisce l' equazione

$$a^2-4a+3=0,$$

da cui abbiamo due valori di a, cioè $a=1$, $a=3$. Dunque corrispondendo all' unico valore di $b^2=4$ due diversi valori reali di a, la proposta avrà due sistemi di radici immaginarie, che saranno

$$\begin{matrix}1+2\sqrt{-1} & & 3+2\sqrt{-1}\\ 1-2\sqrt{-1} & ; & 3-2\sqrt{-1}.\end{matrix}$$

§. 96. *Osserv.* L' equazione in b^2 ottenuta nel modo che abbiamo esposto ricade nell' equazione alle differenze, che abbiamo insegnato a calcolare al §. 64, purchè si ponga $-4b^2=y$. Infatti chiamando u la differenza fra due qualunque delle radici della proposta, e ponendo $u^2=y$, ed osservando inoltre che la differenza fra due radici conjugate $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ è $2b\sqrt{-1}$, ed il suo quadrato $=-4b^2$, vediam tosto, come questo valore debba essere una delle radici dell' equazione alle differenze, cioè uno de' valori di y.

Quindi si vede che una data equazione avrà tante paja di radici immaginarie, quante saranno le radici negative nell' equazione delle differenze. Inoltre che se questa avrà tutti i segni alternativi, non avrà radici negative (§. 30), e perciò la proposta non avrà radici immaginarie.

Se nell' equazione (4) del 1° esempio precedente porremo $-4b^2 = y$, avremo la trasformata

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0$$

che è l' equazione alle differenze già trovata al §. 65; e siccome questa ha una radice negativa, perciò l' equazione $x^3 - 2x + 5 = 0$ avrà di sicuro un paja di radici immaginarie.

Nell' equazione del secondo esempio la sostituzione di $-4b^2 = y$ conduce all' equazione

$$y^3 - 42y^2 + 441y - 49 = 0$$

che è la medesima che si troverebbe col metodo del §. 64, e che non avendo radici negative ci insegna che la proposta $x^3 - 7x + 7 = 0$ ha tutte le sue radici reali.

CAPO IX.

Dei limiti delle radici delle equazioni in generale, e specialmente delle equazioni numeriche.

§. 97. Due quantità, delle quali una sia maggiore e l' altra minore di una qualunque delle radici di un' equazione, in senso largo si chiamano *limiti* di quella radice. Ma perchè l' eccesso ovvero il difetto di questi numeri per rapporto alla radice medesima può essere indefinito, noi chiameremo *limiti veri* o *proprj* due numeri che non differiscano fra di loro più dell' unità, e che nel tempo stesso non comprendano più di una radice: il più delle volte questi numeri sono due intieri consecutivi.

Chiamasi poi *limite delle radici positive* il minimo numero intiero che supera tutte le radici positive di un' equazione; e similmente *limite delle radici negative* il minimo intiero che, rispetto alla pura grandezza, supera la radice negativa rappresentata dal numero più grande. Fra questi due limiti giacciono tutte le radici reali sì positive che negative di un' equazione qualunque. Vi ha inoltre il *limite minore* delle radici sì positive che negative, e questo si è l' intiero immediatamente minore delle une e delle altre, avuto riguardo alla sola grandezza.

Si è veduto (§. 62, 63) che se $-M$ è il coefficiente massimo negativo di un' equazione in x, fatta $x = y + M + 1$ si ottiene una trasformata a termini tutti positivi, la quale non può avere che dei valori di y negativi; onde dovendo pure essere $x - (M+1)$ una quantità negativa, ne risulta $M+1 > x$, cioè $M+1$ maggiore di qualunque radice positiva dell' equazione proposta. Attesa questa proprietà il numero $M+1$ fu da molti chiamato il limite delle radici positive; ma ben si vede che questo non può essere che un limite improprio, giacchè potrebbe eccedere la massima radice dell' equazione di qualsivoglia differenza. *Newton* suggerì un metodo, con cui si trova il limite proprio nelle equazioni numeriche, e sebbene esso esiga alcuni tentativi prima di trovarlo, ha però il vantaggio di esser sicuro, e di non dare un limite maggiore di quel che si cerca, ogni qualvolta le radici della proposta siano tutte reali.

Eccolo nella seguente

§. 98. *Prop.* Trovare il limite delle radici positive di una data equazione.

In primo luogo dalla proposta

$$(E) \quad x^n + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + C^{m-3} \ldots + Sx + T = 0$$

si deducano colla legge di derivazione esposta al §. 57 le seguenti

$$(E') \quad mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + (m-3)Cx^{m-4} + \ldots + S$$

$$(E'') \quad \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Bx^{m-4} + \ldots + R$$

$$(E''') \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3}Ax^{m-4} + \ldots + Q$$

e si continui la serie di queste derivate finchè si giunga a quella, in cui x non abbia che una sola dimensione.

In secondo luogo si cerchi il minimo numero fra la serie

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, M+1,$$

che sostituito invece di x in tutte le derivate (incominciando dall' ultima) e nella proposta ancora, produca de' risultati tutti positivi: questo sarà il limite domandato.

Sia difatti l questo numero: se invece di x si porrà in (E) $y+l$, ne nascerà come al §. 57 la trasformata

$$A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + \ldots + y^m = 0,$$

in cui sarà

$$A' = l^m + Al^{m-1} + Bl^{m-2} + Cl^{m-3} + \ldots + Sl + T$$

$$B' = ml^{m-1} + (m-1)Al^{m-2} + (m-2)Bl^{m-3} + \ldots + S$$

$$C' = \frac{m(m-1)}{2}l^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Al^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Bl^{m-4} + \ldots + R$$

$$p' = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3} l^{m-3} + \text{ec.}$$

Ora questi coefficienti corrispondono perfettamente nella forma e nel numero all'equazione (E) ed alle sue derivate (E'), (E''), (E'''), ec. colla sola differenza di contenere l invece di x; e siccome per ipotesi essi sono tutti positivi, y o sia $x - l$ non potrà avere che de' valori negativi, e perciò sarà $l > x$, cioè maggiore di qualunque radice positiva.

Si deve però avvertire che se tutte le radici fossero reali, chiamando L, L' i limiti fra' quali giacciono tutte le radici sì positive che negative, la massima radice positiva sarebbe compresa fra L ed $L - 1$, e la minima negativa, cioè quella espressa dal numero più grande, fra $-L'$ e $-L' + 1$. Ma se non saranno tutte reali le radici, questa conseguenza non ha luogo, parlando in generale, ed il limite delle radici positive potrebbe essere assai discosto dalla massima radice positiva, come quello delle negative dalla minima negativa.

Es. Trovare il limite delle radici positive nell' equazione

$$(E) \qquad x^4 - 60x^2 + 56x + 592 = 0.$$

Le derivate sono

$$(E') \qquad 4x^3 - 120x + 56$$

$$(E'') \qquad 6x^2 - 60$$

$$(E''') \qquad 4x.$$

Ponendo $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ non si hanno risultati tutti positivi, ma ciò ottenendosi col porre $x = 6$, ne conchiudiamo essere questo il limite delle radici positive.

§. 99. Il limite minore delle radici positive si trova collo stesso metodo: basta perciò di cangiar la proposta equazione nella sua reciproca ponendo $x = \frac{1}{y}$, indi cercare in questa il limite maggiore col metodo precedente: questo inversamente preso sarà il limite minore delle radici positive della proposta; e se è frazionario, come il più delle volte accade, basta di prendere in sua vece l' intiero immediatamente minore. Questo metodo però, bisogna confessarlo, lascia spesso un intervallo troppo largo fra il limite e la minima radice positiva, ciò che non accade cercando il limite maggiore, almeno quando le radici della data sono tutte reali.

Es. L' equazione precedente

$$x^3 - 60x^2 + 56x + 592 = 0$$

colla supposizione di $x = \frac{1}{y}$ diventa

$$y^3 + \frac{56}{592}y^3 - \frac{60}{592}y^2 \quad * \quad + \frac{1}{592} = 0,$$

ed operando su questa e su le sue derivate si trova che il minimo intiero, che rende positivi i risultati di tutte, si è l' unità; quindi sarà $1 > y$, e per conseguenza $x > 1$, cioè sarebbe l' unità il limite minore di qualunque radice positiva della proposta. Ma altronde da altri metodi, che a momenti insegneremo, si sa che quest' equazione ha due radici reali e positive, delle quali una è compresa fra 4 e 5, e l' altra fra 5 e 6, onde il limite minore delle radici positive debb' essere il 4.

Rapporto ai limiti maggiore e minore delle radici negative basterà di cangiarle in positive (§. 56), indi operare come precedentemente.

§. 100. *Prop.* Se col porre due quantità h, k invece di x in un' equazione si ottengono due risultati H, K di segno contrario, essa avrà un numero dispari di radici reali comprese fra h e k. E se colle medesime sostituzioni si ottengono i due risultati H, K del medesimo segno, e non vi sarà alcuna radice reale compresa fra h e k, o ve ne sarà un numero pari.

Siano le radici reali a, b, c ... della proposta schierate per ordine di grandezza decrescente, ed essa si rappresenti col prodotto

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots . F_x = 0$$

dove F_x è un fattore che resta sempre positivo per qualsivoglia valore di x, ed in cui sono per conseguenza comprese tutte le radici immaginarie, se ce ne sono (§. 28). Sostituendo h, k i risultati saranno

$$(H)\quad (h-a)(h-b)(h-c)(h-d)\ldots . F_h$$

$$(K)\quad (k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\ldots . F_k.$$

Supponiamo in primo luogo $h > k$; in secondo luogo H, K di segno diverso, e H negativo.

E' chiaro che non può essere H negativo se non sono negativi o uno o tre o cinque ec. de' suoi fattori presi per ordine, e che il prodotto K non può similmente restar positivo, se non è pari il numero de' fattori negativi quando ve ne siano. Sia pertanto in H $h < a$, e sarà in K almeno $k < a$, e $k < b$. In questo caso la radice b cadrà fra h e k. Ma potrebbe nel tempo stesso essere $k < a$, $k < b$, $k < c$, $k < d$, ed allora fra h e k cadrebbero le tre radici b, c, d; e così di seguito. Se poi in H vi fossero tre fattori negativi, cioè fosse nel medesimo tempo $h < a$, $< b$, $< c$, allora in K vi sarebbero almeno i primi quattro fattori negativi, e perciò la radice d sarebbe posta fra h e k; ma se questi fossero sei, vi sarebbero tre radici, come d, e, f fra h e k. Continuando così a discorrere vedremo che non potrà essere H negativo e positivo K senza che fra h e k non cada un numero dispari di radici reali.

Se poi dei risultati H, K fosse positivo il primo e negativo il secondo, si vede tosto che se H avrà dei fattori negativi, questi saranno in numero pari, e viceversa in K in numero dispari. Se dunque sarà $h>a$ in H, allora in K o sarà solamente $k<a$, ovvero $k<a$, $<b$, $<c$, ovvero ec., cioè fra h e k o cadrà una sola radice, o tre, o cinque, ec. Se poi in H sarà congiuntamente $h<a$, $h<b$, allora sarà in K o $k<a$, $<b$, $<c$, ovvero $k<a$, $<b$, $<c$, $<d$, $<e$, ovvero ec., onde fra h e k o cadrà la sola radice c, o cadranno le tre c, d, e, o le cinque c, d, e, f, g, ec. Questo discorso si può spingere quanto si vuole, onde resta provata la prima parte della proposizione.

Si osservi intanto di passaggio che se fra h e k non cadrà che una sola radice, in K non vi sarà che un solo fattor negativo di più che in H, e viceversa.

Siano ora H, K entrambi positivi, nel qual caso non potrà nè l'uno nè l'altro ammettere fattori negativi che in numero pari. Supponendo tutti positivi i fattori di H, quelli di K o lo saranno similmente, o non lo saranno che in numero pari. Nel primo caso h e k non comprenderanno veruna radice, nel secondo ne comprenderanno un numero pari. Se poi in H supporremo due fattori negativi, come $h-a$, $h-b$, i numeri h, k non racchiuderanno nessuna radice, a meno che non vi siano in K almeno quattro fattori parimenti negativi. In questo caso i suddetti numeri racchiuderanno due radici come c, d. Se poi fossero sei i fattori negativi di K, le radici contenute sarebbero quattro c, d, e, f; e così in progresso.

Se in H vi saranno quattro fattori negativi, sei almeno ve ne dovranno essere in K, acciocchè h, k comprendano due radici. Seguitando questo ragionamento vedremo che fra h e k saranno contenute due radici, se in K vi saranno due fattori negativi di più che in H; ma se il numero de' fattori negativi sarà il medesimo nell' uno e nell' altro di questi prodotti, non vi sarà alcuna radice fra h e k.

La considerazione di H, K amendue negativi ci condurrebbe alla medesima conclusione, com' è facile di accertarsene con somigliante discorso.

E' poi chiaro che il fattore F_x, il quale rimane sempre positivo per qualunque valore si dia ad x, non turba nè punto nè poco quanto si è fin quì dimostrato. Inoltre la supposizione di $k > h$ invece di $h > k$, che abbiamo premesso, lascia evidentemente la nostra dimostrazione nella sua forza.

§. 101. Se pertanto due quantità qualunque reali, positive o negative sostituite nell' equazione proposta invece dell' incognita produrranno due risultati di segno contrario, vi sarà per lo meno una radice reale compresa fra quelle quantità come suoi limiti.

Quindi se si sostituiranno nell' equazione ad uno ad uno i termini della progressione de' numeri naturali

$$0, 1, 2, 3, 4, \text{ ec.},$$

ad ogni cangiamento di segno, che accadrà nella serie de' risultati corrispondenti, si avrà un indizio sicuro almeno di una radice reale compresa fra que' due numeri da cui essi derivano. Ma dall' essere due risultati vicini identici nel segno non si può argomentare con sicurezza che fra i numeri corrispondenti vi sia nessuna radice, mentre ve ne potrebbe cadere un numero pari qualunque.

§. 102. *Prop.* Rappresentino $a, b, c, \ldots t$ le radici reali sì positive che negative d' un' equazione (E), e siano queste disposte in ordine di grandezza decrescente, di modo che l' ultima delle negative sia rappresentata dal numero più grande. Siano similmente $a', b', c', \ldots s'$ le radici dell' equazione (E') che si forma ponendo $= 0$ la prima funzione derivata da (E) colla legge del §. 57, e queste radici siano parimenti disposte nell' ordine medesimo. Le radici reali della proposta (E) saranno i limiti delle radici reali della derivata (E'), ossia si avranno le relazioni simultanee

$$a' < a\,,\; a' > b\,;$$

$$b' < b\,,\; b' > c\,;$$

$$c' < c\,,\; c' > d\,,$$

ec.

$$s' < s\,,\; s' > t.$$

Se nella proposta (E) della solita forma si cangia x in $x+a$, la trasformata diventerà

(E_{x+a}) ossia $A' + B'x + C'x^2 + \ldots + x^m = 0$,

dove sarà

$A' = a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots + T = 0$

$B' = ma^{m-1} + (m-1)Aa^{m-2} + \ldots + S$

$$C' = \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Aa^{m-3} \ldots + R$$

ec.

ovvero volendo adottare de' simboli più espressivi, potremo porre

$A' = E_a = 0$; $B' = E'_a$; $C' = E''_a$; ec.

Ma appunto per essere $A' = 0$, la trasformata medesima divisa per x diventerà

(M) $\quad E'_a + E_a'' x + E_a''' x^2 \ldots + x^{m-1} = 0.$

Altronde rappresentando la (E) col prodotto de' suoi fattori, abbiamo

$(E) = (x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-t)F_x = 0$

dove F_x è un fattore sempre positivo, che potrebbe trovarsi nella proposta; onde se anche in questo prodotto poniamo $x+a$ in luogo di x, avremo dopo la divisione per x

$(N) = (x+a-b)(x+a-c) \ldots (x+a-t)F_{x+a} = 0.$

Ma siccome l'ultimo termine di questo prodotto, sviluppato che fosse, sarebbe (§. 33)

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots.(a-t)F_a,$$

perciò paragonando questo termine col corrispondente E'_a dell' equazione (M) sarebbe

$$E'_a = (a-b)(a-c)(a-d)\ldots.(a-t)F_a.$$

Se ora nella proposta (E) si cangiasse x in $x+b$, poi in $x+c$, ec. e finalmente in $x+t$, collo stesso processo si avrebbero i successivi risultati

$$E'_b = (b-a)(b-c)(b-d)\ldots.(b-t)F_b$$
$$E'_c = (c-a)(c-b)(c-d)\ldots.(c-t)F_c$$

.

.

.

$$E'_t = (t-a)(t-b)(t-c)\ldots.(t-s)F_t;$$

dove essendo i fattori F_a, F_b, F_c, ec. sempre positivi, ed essendo inoltre per supposizione $a>b>c>d$ ec., sarà

$$E'_a>0,\ E'_b<0,\ E'_c>0,\ E'_d<0;\ \text{ec.};$$

cioè alternativamente positivi e negativi. Ma questi valori non essendo altro che i risultati parziali, che si otterrebbero se nella prima derivata E' si cangiasse x in a, b, c, ec. successivamente, si vede che le radici a', b', c', ec. della derivata avranno per loro limiti le radici della proposta, cioè che sarà

$$a'<a,\ a'>b,\ b'<b,\ b'>c,\ \text{ec.}$$

come si è proposto.

§. 103. Dunque se le radici a, b, c, ec. della proposta sono tutte reali, anche le a', b', c', ec. della derivata E' saranno tutte reali. Rinnovando poi su le derivate successive E', E'', E''', ec. il discorso medesimo che abbiam fatto su le due E, E', conchiuderemo similmente, che se E' avrà reali tutte le sue radici, tali saranno ancora quelle di E''; e se E^{V} avrà reali essa pure tutte le sue radici, tali saranno anche quelle di E'''; e così di seguito. Conchiuderemo perciò che un' equazione qualunque non potrà aver reali tutte le sue radici, se reali non saranno tutte quelle delle sue successive derivate. Bisogna però guardarsi dal conchiudere che per esser tutte reali le radici delle singole derivate, debbano esser tali anche quelle della proposta, mentre questa potrebbe averle o tutte o in parte immaginarie. Ma vediamo ormai come si possano trovare i limiti proprj di ciascuna radice reale e positiva.

§. 104. *Prop.* Se in un' equazione dotata di una o più radici reali e disuguali si sostituiscono in luogo dell' incognita due numeri h, k, l'uno maggiore, l'altro minore di qualcheduna di esse, e che nel tempo stesso non differiscano fra loro che di una quantità minore della differenza fra questa radice ed un' altra qualunque delle reali della stessa equazione, queste due sostituzioni produrranno due risultati di segno contrario.

Sia a la radice di cui si tratta, e perciò suppongasi
$$h > a\,,\; k < a\,,\; h - k < \delta\,,$$
indicando con δ qualunque delle differenze $a - b$, $a - c$, $b - c$, ec. Fatte le sostituzioni nell' equazione
$$(x - a)(x - b)(x - c)\,\ldots\, F_x = 0\,,$$
si avranno i due seguenti risultati
$$(H) \qquad (h - a)(h - b)(h - c)\,\ldots\, F_h\,,$$
$$(K) \qquad (k - a)(k - b)(k - c)\,\ldots\, F_k\,.$$
Ora per ipotesi $h - a$, $k - a$ sono di segno contrario: inoltre gli altri fattori corrispondenti, come $h - b$, $k - b$, ovvero $h - c$, $k - c$, ec. sono tutti del medesimo segno. Avvegnachè se un sistema di questi fosse di segno contrario, per esempio $h - b$, $k - b$, allora sarebbe b compresa fra h e k come la radice a. Quindi sarebbe

$h-k>a-b$ contro le condizioni premesse. Si vede perciò che i risultati H, K dovranno esser di segno contrario, come si è asserito.

§. 105. Dunque se in un' equazione invece dell' incognita si sostituiranno ad uno ad uno i termini della progressione aritmetica

$$0\,,\;\delta\,,\;2\delta\,,\;3\delta\,,\;4\delta\,,\;\text{ec.}\,,$$

e δ sia la minima delle differenze fra le radici della data, ovvero una quantità minore di essa, è sicuro che i successivi risultati formeranno una nuova serie, in cui tante saranno le variazioni de' segni quante sono le radici reali positive e disuguali dell' equazione medesima. Tutto dunque si riduce a trovare δ, ed a questo fine stabiliremo la seguente

§. 106. *Prop.* Trovare un numero che sia minore di qualunque delle differenze fra le radici di una data equazione.

Si calcoli la trasformata ai quadrati delle differenze (§. 64). Questa sarà della forma

$$(D)\qquad A'+B'y+C'y+\ldots\ldots+y^r=0\,,$$

in cui $y=u^2$, ed u esprime qualunque delle differenze $a-b$, $a-c$, $b-c$, ec. fra le radici a, b, c, ec. della proposta; inoltre l' esponente r equivale a $\frac{m(m-1)}{2}$ se la proposta non ha radici uguali, ma in caso diverso r esprimerà l'eccesso del numero $\frac{m(m-1)}{2}$ sopra il numero delle radici uguali, che supponiamo tolte dalla proposta per mezzo della divisione (§. 79).

Mutisi y in $\frac{1}{z}$ e l' equazione (D) prenderà la forma

$$A'z^r+B'z^{r-1}+C'z^{r-2}+\ldots+1=0.$$

Cerchisi il limite maggiore delle radici positive di questa

(§. 98), e suppongasi $= l$. Sarà l maggiore di qualunque valor positivo di z, e perciò $l > \frac{1}{y}$; ovvero $l > \frac{1}{u^2}$, e ancora $u > \frac{1}{\sqrt{l}}$. Sarà per conseguenza $\frac{1}{\sqrt{l}}$ minore di qualunque valore di u, cioè di qualunque differenza fra le radici della proposta.

§. 107. Se sarà $\frac{1}{\sqrt{l}} >$, ovvero $= 1$, saremo sicuri che le radici della proposta differiranno più che dell'unità, e potremo con sicurezza nella serie del §. 105 porre $\delta = 1$, ossia far uso della serie

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{ec.}$$

Ma se sarà $\frac{1}{\sqrt{l}} < 1$, allora potendo alcune fra le differenze, di cui si tratta, esser minori dell'unità, si porrà $\delta =$, ovvero $< \frac{1}{\sqrt{l}}$ secondo che $\sqrt{l}$ sarà razionale o irrazionale: in questo secondo caso si potrà prendere invece di $\sqrt{l}$ l'intiero k immediatamente maggiore, onde la serie da sostituirsi invece di x sarà

$$0,\ \frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \frac{3}{k},\ \frac{4}{k},\ \text{ec.};$$

ed i risultati di queste sostituzioni formeranno un'altra serie, in cui tante di sicuro saranno le variazioni di segno, quante le radici reali positive e disuguali della proposta. Dunque se i risultati de' due numeri contigui $\frac{h}{k}$, $\frac{h+1}{k}$ saranno di segno diverso, vi sarà una radice, i di cui limiti proprj saranno questi numeri medesimi.

Ma per evitare le sostituzioni de' numeri frazionarj, che riescono assai incomode, trovato che sarà il valor intiero k prossimo di $\sqrt{l}$, si potrà trasformare la proposta in un' altra a radici moltiplicate dal numero k (§. 54), mutando x in $\frac{x}{k}$, ossia moltiplicando i di lei termini per quelli della progressione

$$1, k, k^2, k^3 \ldots k^m.$$

Nella trasformata che ne nasce, se si porrà $x = 0, 1, 2, 3$, ec., si avranno i limiti delle di lei radici, e questi divisi per k saranno quelli della proposta.

§. 108. *Osserv.* Col metodo precedente sempre si troveranno i limiti di qualunque radice reale e positiva, ma esigendo questo che si calcoli l' equazione alle differenze, sarebbe cosa troppo laboriosa se non si potesse almeno in molti casi dispensarsene. Perciò osserveremo che si potrà usurpare immediatamente la serie

$$0, 1, 2, 3, 4, \text{ec.}$$

1.° Quando l' equazione proposta non abbia che una sola radice reale e positiva. In questo caso essa non avrà che una sola variazione di segni, e però sarà della forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Hx^{m-r} - Kx^{m-r-1} \ldots - Sx - T = 0,$$

in cui tutti i termini dopo Hx^{m-r} sono negativi.

2.° Quando si sappia preventivamente che le radici reali e positive, qualunque sia il loro numero, differiscano fra di loro non meno dell' unità.

3.° Quando parimenti si sappia preventivamente che le radici medesime non giacciano fra gli stessi numeri intieri, quantunque la loro differenza sii minore dell' unità. Così se una radice fosse 5, 95, ed un' altra 6, 51, sebbene la loro differenza 0, 56 sii minore di 1, pure trovandosi la prima compresa fra 5 e 6, e la seconda fra 6 e 7, ciascuna si manifesterà colla sostituzione de' numeri naturali.

Il solo caso adunque, in cui dalle successive sostituzioni di questi numeri non si otterranno tante variazioni di segno ne' risultati quante sono le radici reali e positive, sarà quello in cui due o più radici sono comprese fra gli stessi due numeri intieri. Ma anche in questo caso non è sempre necessario di ricorrere all' equazione delle differenze per trovare i limiti proprj di ciascuna radice; e basterà il più delle volte di trasformare la proposta in un' altra a radici doppie o triple, ec. o al più decuple, ciò che si ottiene con somma facilità moltiplicando i termini della proposta per li corrispondenti di qualcheduna delle seguenti progressioni

1, 2, 4, 8, ec.,
1, 3, 9, 27, ec.,
.
.
1, 10, 100, 1000, ec.,

e con questo mezzo si arriverà d'ordinario dopo pochi tentativi ad una trasformata, le cui radici non saranno più comprese fra gli istessi intieri contigui, ma si staccheranno in modo, che avranno per limiti proprj due diversi numeri intieri, e però si manifesteranno colla sostituzione successiva de' numeri naturali.

Qui non abbiam parlato che di radici positive, ma ognuno vede che varrà lo stesso delle reali negative, qualora siano cangiate in positive mutando il segno a' termini de' luoghi pari dell' equazione.

Passiamo agli esempj.

§. 109. *Es.* 1.° L' equazione cubica

$$x^3 - 5x + 1 = 0$$

non può avere più di due radici reali positive, ed una negativa, come si può raccogliere dai §§. 32 e 41.

Ora sostituendo in luogo di x la serie de' numeri naturali, troveremo che

alle supposizioni	corrispondono i risultati
$x=0$	$+\ 1$
$x=1$	$-\ 3$
$x=2$	$-\ 1$
$x=3$	$+\ 13$,

onde si vede subito che la minore delle radici positive giace fra 0 ed 1, e la maggiore fra 2 e 3.

Rinnovando le medesime sostituzioni su l'equazione

$$x^3-5x-1=0$$

che contiene le stesse radici di prima, ma mutate di segno, si troverà che l'unica radice positiva è contenuta fra 2 e 3, e quindi che le tre radici della proposta giacciono rispettivamente fra i limiti

$$0,\ 1\ ;\quad 2,\ 3\ ;\quad -2,\ -3.$$

In questo esempio la serie de' numeri naturali è bastata a scoprire tutte le radici.

§. 110. *Es.* 2.° L'equazione

$$x^3-7x+7=0$$

potrebbe avere o una radice reale o tutte e tre. In questo secondo caso ne avrebbe due positive ed una negativa pe' §§. 31, 33. Ponendo però $x=0, 1, 2, 3$, ec. abbiamo perpetuamente de' risultati positivi, onde nè possiamo accertarci delle due radici reali positive, nè trovare i loro limiti. Ma dall'equazione alle differenze

$$y^3-42y^2+441y-49=0$$

siamo assicurati che tutte le radici sono reali e disuguali (§. 96); e la reciproca di questa è (§. 106)

$$z^3-9z^2+\frac{42}{49}z-\frac{1}{49}=0.$$

Il limite maggiore delle radici positive di quest' ultima è il 9. Sarà perciò $\frac{1}{y}<9, y>\frac{1}{9}$, cioè (per essere $y=u^2$) $u>\frac{1}{3}$. Potremmo dunque nella progressione indeterminata

$$0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ 4\delta,\ \text{ec.}$$

porre $\delta=\frac{1}{3}$, cioè sostituire invece di x i termini

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \text{ec.};$$

ma per facilitare le operazioni cangeremo nella proposta x in $\frac{x}{3}$, ossia moltiplicheremo i suoi termini

$$\begin{array}{lcccc} & x^3 + & 0\,x^2 & -\,7x & +\,7 \\ \text{pei corrispondenti} & 1, & 3, & 9, & 27, \end{array}$$

ed avremo la trasformata

$$x^3-63x+189=0,$$

le cui radici saranno triple di quelle della proposta. Sostituendo in quest' ultima 0, 1, 2, 3, ec. invece di x avremo i primi sette risultati corrispondenti coi segni $+, +, +, +, +, -, +$, con che veniamo a scoprire due radici positive, l' una interposta fra 4 e 5, l' altra fra 5 e 6. Quindi concludiamo che anche la proposta ne avrà altrettante, delle quali una cadrà fra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$, l' altra fra $\frac{5}{3}$ e $\frac{6}{3}$, ossia entrambe fra 1 e 2. E' facile poi a vedersi che la negativa è compresa fra -3 e -4.

Volendo evitare il calcolo dell' equazione alle differenze s' incomincerebbe dal cercar la trasformata a radici doppie di quelle della proposta, e questa si troverebbe

$$x^3-28x+56=0.$$

Ponendo in questa $x = 0, 1, 2, 3$, ec. si vedrà che i risultati corrispondenti camminano co' segni $+$, $+$, $+$, $-$, $+$, ossia che delle due radici positive di quest' ultima la minore giace fra 2 e 3, e la maggiore fra 3 e 4, e quindi quelle della proposta fra $\frac{2}{2}$ e $\frac{3}{2}$ l'una, l'altra fra $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{2}$, ovvero ambedue fra 1 e 2 come trovammo dianzi.

§. 111. L'equazione di quarto grado

$$x^4 - 15x^2 + 7x + 37 = 0$$

se ha radici reali e positive, non ne può avere più di due, come non ne può avere più di due negative. Per trovar le prime senza ricorrere all' equazione delle differenze, osserveremo che le supposizioni di $x = 0, 1, 2, 3$, ec. danno i risultati tutti positivi, onde nulla si può argomentare su le radici in quistione. Cangiamo pertanto la proposta in un' altra a radici doppie, e questa sarà

$$x^4 - 60x^2 + 56x + 592 = 0,$$

e rinnovando su di questa le stesse supposizioni di x, troveremo che alle supposizioni di $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ corrispondono i risultati co' segni $+$, $+$, $+$, $+$, $+$, $-$, $+$, onde v' ha di sicuro una radice fra 4 e 5, ed un' altra fra 5 e 6. Dunque nella proposta vi saranno due radici reali e positive giacenti rispettivamente fra i numeri $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, e $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, cioè amendue fra 2 e 3.

Le negative si troveranno immediatamente fra -1 e -2 l'una, e l'altra fra -3 e -4, convertendole prima in positive. Vedansi gli esempj addotti superiormente ai §§. 98 e 99.

CAPO X.

Risoluzione approssimata delle equazioni.

§. 112. L'impossibilità di una soluzione generale nelle equazioni superiori al 4.° grado, e la complicazione delle formole relative al 3.° e 4.° grado esigono che si cerchi una risoluzione approssimata di quelle equazioni, delle quali o non si può avere la risoluzione esatta, o se questa è possibile, sia poi troppo ingombrata da quantità radicali. Noi supporremo che l'equazione, di cui si tratta, sia già ridotta *alla propria sede.* Questa riduzione consiste nel privarla co' metodi esposti delle radici uguali, se ne avesse, e dei fattori razionali di primo o secondo grado ne' casi in cui ciò è possibile. Dopo questo si dee cercare il numero delle radici reali ed immaginarie, e ciò per mezzo de' segni dell' equazione alle differenze, o per mezzo delle dottrine esposte nel Cap. VIII. Si distingueranno in seguito le reali in positive e negative, assegnandone il numero rispettivo giusta la regola cartesiana del §. 31. Per ultimo si determineranno i limiti proprj di ciascuna radice positiva, indi delle negative dopo che saranno state cangiate in positive per mezzo del §. 56.

Rapporto alle radici immaginarie, che sappiamo essere generalmente rappresentate dalla formola $a + b\sqrt{-1}$, cercheremo l'equazione tutta in b^2 (come al §. 93), indi ponendo $4b^2 = t$ otterremo una trasformata in t, la quale se non sarà risolubile co' noti metodi, dovrà sottoporsi anch' essa ai metodi di approssimazione, e perciò trattarsi come la proposta in x. Ma se per questa fosse già calcolata l'equazione alle differenze in y, basterà di cangiare in quest' ultima y in $-t$ a fine di convertire le radici positive in negative, indi cercheremo prossimamente i valori di t, e quindi quelli di b^2, e per mezzo di questi quelli di a (§. 93).

I limiti, che ci sono prefissi in quest' opera, non ci permettono di far conoscere che il metodo più celebre di approssimazione, quello del Sig. *Lagrange*.

§. 113. Siano a, b, c, d, ... le radici reali e positive, disposte, se vogliamo, in ordine di grandezza crescente, dell' equazione generica

$$(A) \quad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + T = 0$$

e siano inoltre p, q, r, s, ec. i limiti proprj minori di ciascuna di esse. Incominciamo dal cercare la minima radice a. Si faccia perciò $x = p + \frac{1}{y}$, e moltiplicati nella trasformata, che ne nasce, tutti i termini per y^m, ed ordinati a dovere si avrà la

$$(Y) \quad A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \ldots + T' = 0.$$

Questa, per essere $\frac{1}{y}$ una vera frazione, avrà di sicuro una radice reale maggiore dell' unità, che sarà necessariamente unica. Imperciocchè se l' equazione (Y) avesse per esempio due radici maggiori dell' unità, come sarebbe y', y'', si avrebbe tanto $x = p + \frac{1}{y'}$, quanto $x = p + \frac{1}{y''}$, e perciò p sarebbe il limite vero minore di due radici alla volta contro la supposizione. Lo stesso discorso si applicherà alle trasformate successive, che si andranno formando.

Cerchisi il limite p' della radice positiva della (Y), indi si ponga $y = p' + \frac{1}{z}$. Questa sostituzione produrrà la trasformata

(Z) $A'' z^m - B'' z^{m-1} + C'' z^{m-2} \ldots + T'' = 0$,

e cercato anche in questa il limite minore p'' dell' unica radice maggiore dell' unità, si porrà $z = p'' + \frac{1}{u}$ a fine di trarne una nuova trasformata

(U) $A''' u^m + B''' u^{m-1} + C''' u^{m-2} \ldots + T''' = 0$,

la quale si tratterà come le precedenti, e così potremo continuare quanto ci piace.

Acc d ndo che alcuno de' numeri p, p', p'', ec. fosse una radice esatta, allora siccome sarebbe o $x = p$, o $y = p'$, o $z = p''$, ec., l'operazione sarebbe finita, e si avrebbe per x un valor razionale. Fuori di questo caso la radice cercata sarà incommensurabile.

Quanto si è fin qui detto per la ricerca della radice a, il cui limite si è supposto $= p$, si dovrà replicare per intiero ad una seconda radice b, il cui limite sia q; indi per una terza radice c di limite r, e così di tutte le radici reali e positive. Trasformate poi le negative in positive, si tornerà da capo per ciascheduna di esse, come si è fatto per le positive.

§. 114. Dalle successive trasformate, da cui si saranno ricavati i limiti successivi p, p', p'', p''', ec., si ricaveranno ancora i valori sempre più approssimanti della radice a, e si avrà dall' equazione (X), cioè dalla proposta, $x = p$;

dalla (Y) $x = p + \cfrac{1}{p'}$;

dalla (Z) $x = p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p''}}$;

dalla (U) $x = p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cfrac{1}{p'''}}}$

ec.

Questi successivi valori di x, ossia della radice a, sono espressi sotto forma di frazioni *continue*, e non resta che di ridurle alla forma di frazioni ordinarie. Ora è facile colle operazioni comuni delle frazioni di convertire i precedenti valori negli equivalenti che sieguono:

$$x = \frac{p}{1}; \; = x \frac{pp' + 1}{p'}; \; = x \frac{pp'p'' + p + p''}{p'p'' + 1};$$

$$x = \frac{pp'p''p''' + pp' + pp''' + p''p''' + 1}{p'p''p''' + p' + p'''}; \text{ ec.}$$

Ma per poter rappresentare in modo più facile e più regolare questi valori sempre più approssimanti al valor giusto di a, porremo

$\alpha = p$	$\alpha' = 1$
$\beta = p'\alpha + 1$	$\beta' = p'\alpha'$
$\gamma = p''\beta + \alpha$	$\gamma' = p''\beta' + \alpha'$
$\delta = p'''\gamma + \beta$	$\delta' = p'''\gamma' + \beta'$
$\varepsilon = p^{\text{IV}}\delta + \gamma$	$\varepsilon' = p^{\text{IV}}\delta' + \gamma'$
ec.	ec.

e mediante queste sostituzioni, che si possono continuare a piacere, mentre la legge de' termini è manifesta, si avranno i seguenti valori della radice in quistione:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha'}, \; x = \frac{\beta}{\beta'}, \; x = \frac{\gamma}{\gamma'}, \; x = \frac{\delta}{\delta'}, \; x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}; \text{ ec.},$$

de' quali il primo, il 3.°, il 5.°, ec. sono minori del vero; il 2.°, 4.°, 6.°, ec. maggiori del vero, in modo però che ciascuno di essi è sempre più prossimo al vero che qualunque di quelli che lo precedono. Questa verità dipende dalla dottrina delle *frazioni continue*, che esporremo a suo luogo.

Passiamo agli esempj.

§. 115. *Es.* 1.° Sia l'equazione di *Newton*

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

per cui vale l'equazione medesima alle differenze che abbiamo calcolato per l'equazione $x^3 - 2x + 5 = 0$ ai §§. 65, 96, cioè

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0.$$

Dall'inspezione di quest'ultima, la quale non ha i segni tutti alternativi, si raccoglie (§. 96) che la proposta ha delle radici immaginarie, che non possono essere nè più nè meno di due; inoltre essa ha una radice reale, il di cui limite proprio minore è il 2. Poniamo dunque $p = 2$.

Facendo ora $x = 2 + \frac{1}{y}$, avremo la prima trasformata

$$(Y) \quad y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0.$$

Il limite della radice positiva di questa è il 10, onde sarà $p' = 10$, e ponendo $y = 10 + \frac{1}{z}$, si avrà la

$$(Z) \quad 61z^3 - 94z^2 - 20z - 1 = 0.$$

Questa ci dà $p'' = 1$, e perciò $z = 1 + \frac{1}{u}$, da cui si ha

$$(U) \quad 54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$

a cui corrisponde il limite $p''' = 1$, e quindi $u = 1 + \frac{1}{v}$, e

$$(V) \quad 71v^3 - 123v^2 - 187v - 54 = 0.$$

Questa dà $p^{\text{IV}} = 2$, e perciò $v = 2 + \frac{1}{w}$, onde ne nasce la

$$(W) \quad 352w^3 - 173w^2 - 303w - 71 = 0,$$

che ha per limite $p^{\text{V}} = 1$, ec. Continuando queste operazioni si troveranno i limiti successivi

$$p^{\text{VI}} = 3, \; p^{\text{VII}} = 1, \; p^{\text{VIII}} = 1, \; p^{\text{IX}} = 12, \text{ ec.},$$

i quali valori posti nelle formole del §. 114 ci daranno

$$\alpha = 2, \beta = 21, \gamma = 23, \delta = 44, \varepsilon = 111, \zeta = 155,$$
$$\vartheta = 576, \theta = 731, \iota = 1307, \varkappa = 16415, \text{ ec.}$$
$$\alpha' = 1, \beta' = 10, \gamma' = 11, \delta' = 21, \varepsilon' = 53, \zeta' = 74,$$
$$\vartheta' = 275, \theta' = 349, \iota' = 624, \varkappa' = 7837, \text{ ec.},$$

onde la radice reale della proposta sarà rappresentata dai seguenti valori

$$2\,;\ \frac{21}{10}\,;\ \frac{23}{11}\,,\ \frac{44}{20}\,,\ \frac{111}{53}\,;\ \frac{155}{74}\,,\ \frac{576}{275}\,,\ \frac{731}{349}\,,\ \frac{1307}{624}\,,\ \frac{16415}{7837}\,,\ \text{ec.}$$

i quali vanno sempre più accostandosi al valor vero di x; e l'ultimo de' quali espresso in cifre decimali ci dà

$$x = 2{,}09455148.$$

Volendo ora calcolare le radici immaginarie della stessa equazione $\quad x^3 - 2x - 5 = 0$

richiamiamo dal §. 95 l'equazione

$$64\,b^6 + 192\,b^4 + 144\,b^2 - 643 = 0\,;$$

e posto $4b^2 = t$ avremo

$$t^3 + 12\,t^2 + 36\,t - 643 = 0\,;$$

e questa non potendo avere più di una radice reale e positiva, potremo trovarne il limite senza difficoltà, impiegando la serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. in luogo di t. Con questa difatti troviamo ne' risultati il cangiamento di segno nel passaggio dal valore di $t = 5$ al valore $t = 6$, onde sarà il primo limite $p = 5$.

Ponendo pertanto $\quad t = 5 + \frac{1}{x} \quad$ si avrà

$$38\,x^3 - 231\,x^2 - 27\,x - 1 = 0\,,\quad p' = 6\,,$$

$$x = 6 + \frac{1}{y}$$

$$271\,y^3 - 1305\,y^2 - 453\,y - 38 = 0\,,\quad p'' = 5\,,$$

$$y = 5 + \frac{1}{z}$$

$$1053\,z^3 - 6822\,z^2 - 2760\,z - 271 = 0\,,\quad p''' = 6\,,$$

$$z = 6 + \frac{1}{u}$$

$$34975\,u^3 - 29100\,u^2 - 5310\,u - 1053 = 0\,,\quad p^{\text{IV}} = 1\,,$$

$$u = 1 + \frac{1}{v}$$

ec.;

onde i valori di t, coll' ajuto delle formole del §. 114, si troveranno

$$5\,,\ \frac{31}{6}\,,\ \frac{160}{31}\,,\ \frac{991}{192}\,,\ \frac{1151}{223}\,,\ \text{ec.}$$

L'ultimo di questi, che è il più approssimante al giusto, si troverà equivalente alla frazione

$$5\,,\,1614349.$$

Avendo poi $b = \frac{1}{2}\sqrt{t}$, facendo l'estrazione della radice sarà $b = 1\,,\,13594$ in circa.

Usando di questo valore si troverà in primo luogo (§ 95)

$$8b^2 = 10\,,\,3228698\,;$$

in secondo luogo $a = -\dfrac{15}{8b^2+4} = -1\,,\,04727$ ec.

Perciò le due radici immaginarie dell' equazione

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

sono

$$-1\,,\,04727\ldots + (1\,,\,13594\ldots)\sqrt{-1}$$
$$-1\,,\,04727\ldots - (1\,,\,13594\ldots)\sqrt{-1}$$

con che essa è pienamente risolta.

§. 116. *Es.* 2.° Invece dell' equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$, risoluta da *Lagrange* e ricopiata in tutti i libri, prenderemo la seguente, che si trova nelle stesse circostanze

$$x^3 - 21x + 37 = 0.$$

Calcolata l'equazione alle differenze, che è

$$y^3 - 126y^2 + 3969y - 81 = 0\,,$$

si vede 1.° che questa non essendo divisibile per y, la proposta non può aver radici uguali (§. 64); 2.° che avendo questa i segni alternativi, la proposta ha tutte le sue radici reali, delle quali due sono positive, ed una negativa, come si vede e dal §. 96 e dalla regola cartesiana del §. 31. Per cercare poi i limiti delle due radici positive, se impiegheremo in luogo di x la serie 0, 1, 2, 3, ec., non troveremo che risultati positivi. Altronde il limite delle radici positive è il 3, quindi siamo avvertiti che le radici domandate sono entrambe comprese fra 2 e 3 (§. 98). Per trovare il limite proprio minore di ciascheduna, trasformiamo l' equazione delle differenze nella reciproca ponendo, giusta il §. 106, $y = \frac{1}{z}$, e si otterrà la

$$(Z) \qquad z^3 - 49z^2 + \left(1 + \frac{45}{81}\right)z - \frac{1}{81} = 0,$$

e formate le derivate

$$1.^a \quad 3z^2 - 98z + 1 + \frac{45}{81}$$

$$2.^a \quad 3z - 49;$$

con un po' di attenzione ci accorgeremo essere il 49 il minimo numero intiero che rende positivi questi tre polinomj, e che sarà perciò $z < 49$, e quindi ancora $u^2 (= y) > \frac{1}{49}$, e finalmente $u > \frac{1}{7}$, cioè la minima delle differenze fra le radici della proposta $> \frac{1}{7}$. Potremmo adunque trasformarla in un' altra a radici sette volte più grandi col sostituire $\frac{x}{7}$ in vece di x, e la trasformata colla sostituzione della serie 0, 1, 2, 3, ec. manifesterebbe di sicuro colla mutazione de' segni ne' risultati i limiti delle radici di essa. La trasformata sarebbe difatti

$$x^3 - 1029x + 12691 = 0,$$

la quale ai valori di $x = 18, 19, 20$ somministra i risultati $+1, -1, +111$, lo che è indizio di due radici contenute l' una fra 18 e 19, l' altra fra 19 e 20. Potremmo pertanto cercare queste radici, ponendo per l' una $p = 18$, e $p = 19$ per l' altra, indi calcolando le frazioni continue col metodo poco sopra esposto. Ma ci spediremo più presto, se (come si è detto al §. 108) duplicheremo le radici della proposta cangiando x in $\frac{x}{2}$, con che avremo l'equazione

$$(A) \qquad x^3 - 84x + 296 = 0:$$

e siccome anche in questa dalla sostituzione de' numeri naturali non si ottengono che risultati positivi, cangeremo di nuovo nella proposta x in $\frac{x}{3}$, ed otterremo un' altra trasformata

$$(B) \qquad x^3 - 189x + 999 = 0,$$

la quale alle supposizioni di $x = 7, 8, 9$ dà i risultati $+19, -1, +27$. Dunque le radici di (B) cadono l'una fra 7 e 8, l'altra fra 8 e 9, e quindi quelle della proposta l'una fra $\frac{7}{3}$ e $\frac{8}{3}$, e la seconda fra $\frac{8}{3}$ e $\frac{9}{3}$. Cercheremo dunque le radici positive di (B) quanto più si potrà prossime al vero, e trovatele le divideremo per 3, e queste saranno le due positive della proposta. Ecco il quadro delle operazioni.

Incominciamo dalla radice minore. Avendosi $p = 7$ si porrà $x = 7 + \frac{1}{y}$, indi si avrà

$$19y^3 - 42y^2 + 21y + 1 = 0, \quad p' = 1, \quad y = 1 + \frac{1}{z}$$

$$z^3 + 6z^2 - 15z - 19 = 0, \quad p'' = 2, \quad z = 2 + \frac{1}{u}$$

$$17u^3 - 21u^2 - 12u - 1 = 0, \quad p''' = 1, \quad u = 1 + \frac{1}{v}$$

$$17v^3 + 3v^2 - 30v - 17 = 0, \quad p^{\text{IV}} = 1, \quad v = 1 + \frac{1}{w}$$

$$27w^3 - 27w^2 - 54w - 17 = 0, \quad p^{\text{V}} = 2, \quad w = 2 + \frac{1}{t}$$

$$17t^3 - 162t^2 - 135t - 27 = 0, \quad p^{VI} = 10, \quad t = 10 + \frac{1}{q}$$

$$577q^3 - 1725q^2 - 348q - 17 = 0, \quad p^{VII} = 3, \text{ ec.},$$

dai valori trovati di p, p', p'', ec. ne concluderemo i seguenti:

$\alpha = 7$	$\alpha' = 1$
$\beta = 8$	$\beta' = 1$
$\gamma = 23$	$\gamma' = 3$
$\delta = 31$	$\delta' = 4$
$\varepsilon = 54$	$\varepsilon = 7$
$\zeta = 139$	$\zeta' = 18$
$\vartheta = 1444$	$\vartheta' = 187$
$\theta = 4471$	$\theta' = 579$
ec.	ec.,

onde i valori convergenti verso la radice cercata saranno

$$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{23}{3}, \frac{31}{4}, \frac{54}{7}, \frac{139}{18}, \frac{1444}{187}, \frac{4471}{579}, \text{ ec.},$$

l'ultimo de' quali (siccome il più prossimo) convertito in decimali diventa

$$7,7219436,$$

e diviso per 3 affine di ottenere la minore delle due radici positive della proposta, dà

$$x = 2,5739781,$$

valore esatto fino alla quinta decimale.

Ritorniamo all'equazione (B), e cerchiamo la seconda radice positiva. Sarà

$$p = 8, \quad x = 8 + \frac{1}{y}$$

$$y^3 - 3y^2 - 24y - 1 = 0, \quad p' = 6, \quad y = 6 + \frac{1}{z}$$

$$37z^3 - 48z^2 - 15z - 1 = 0, \quad p'' = 1, \quad z = 1 + \frac{1}{u}$$

$$27u^3 \quad * \quad -63u-37=0\,;\ p'''=1\,,\quad u=1+\frac{1}{v}$$

$$73v^3-18v^2-81v-27=0\,;\ p^{\text{IV}}=1\,,\quad v=1+\frac{1}{w}$$

$$53w^3-102w^2-201w-73=0\,,\ p^{\text{V}}=3\,,\quad w=3+\frac{1}{t}$$

$$163t^3-618t^2-375t-53=0\,,\ p^{\text{VI}}=4\,,\quad t=4+\frac{1}{q}$$

$$1009q^3-2505q^2-1338q-163=0\,,\ p^{\text{VII}}=2\,,\ \text{ec.}$$

Avremo pertanto

$\alpha = 8$	$\alpha' = 1$
$\beta = 49$	$\beta' = 6$
$\gamma = 57$	$\gamma' = 7$
$\delta = 106$	$\delta' = 13$
$\varepsilon = 163$	$\varepsilon' = 20$
$\zeta = 595$	$\zeta' = 73$
$\vartheta = 2543$	$\vartheta' = 312$
$\theta = 5681$	$\theta' = 697$
ec.	ec.

onde i valori convergenti verso la radice, di cui si tratta, saranno

$$\frac{8}{1}\,,\ \frac{49}{6}\,,\ \frac{57}{7}\,,\ \frac{106}{13}\,,\ \frac{163}{20}\,,\ \frac{595}{73}\,,\ \frac{2543}{312}\,,\ \frac{5681}{697}\,,\ \text{ec.}$$

e convertendo l'ultimo in decimali, si avrà

$$8\,,\,15064562.$$

Dividendo quest' ultimo per 3 si avrà la seconda radice positiva della proposta, cioè

$$x = 2\,,\,7168819.$$

Sarebbe ora inutile un nuovo calcolo per la radice negativa dell' equazione medesima, sapendosi che per la mancanza del 2.° termine essa deve uguagliarsi alla somma delle due positive già calcolate. Ma siccome questo calcolo oltre all' esercizio pei principianti può servire di prova ai due precedenti, perciò ne esporremo brevemente il prospetto.

Prima cangeremo nella proposta x in $-x$, ed essa diventerà

$$x^3-21x-37=0,$$

di cui l'unica radice positiva si manifesta fra 5 e 6 colla sostituzione de' numeri naturali. Sarà perciò

$$p=5,\ x=5+\frac{1}{y}$$

$$17y^3-54y^2-15y-1=0,\ p'=3,\ y=3+\frac{1}{z}$$

$$73z^3-120z^2-99z-17=0,\ p''=2,\ z=2+\frac{1}{u}$$

$$111u^3-297u^2-318u-73=0,\ p'''=3,\ u=3+\frac{1}{v}$$

$$703v^3-897v^2-702v-111=0,\ p^{\text{iv}}=1,\ v=1+\frac{1}{w}$$

$$1007w^3+387w^2-1212w-703=0,\ p^{\text{v}}=1,\ w=1+\frac{1}{t}$$

$$521t^3-2583t^2-3408t-1007=0,\ p^{\text{vi}}=6,\ t=6+\frac{1}{q}$$

$$1907q^3-21864q^2-6795q-521=0,\ p^{\text{vii}}=11,\ \text{ec.}$$

Quindi

$\alpha=5$	$\alpha'=1$
$\beta=16$	$\beta'=3$
$\gamma=37$	$\gamma'=7$
$\delta=127$	$\delta'=24$
$\varepsilon=164$	$\varepsilon'=31$
$\zeta=291$	$\zeta'=55$
$\vartheta=1910$	$\vartheta'=361$
$\theta=21301$	$\theta'=4026$
ec.	ec.

onde la frazione più convergente verso il vero sarà

$$\frac{21301}{4026} = 5,2908589$$

la quale sufficientemente s' accorda colla somma delle due radici positive già calcolate di sopra; e s' accorderebbe di più, se si fosse raccolto un maggior numero di trasformate nel calcolo sì di questa che delle due radici precedenti.

§. 117. *Es.* 3º Proponiamo per esercizio l' equazione di 4º grado

$$x^4 - 15x^2 + 7x + 37 = 0.$$

L' equazione alle differenze si troverà essere

$$y^6 - 120y^5 + 5246y^4 - 102106y^3 + 871817y^2 - 2500722y + 190561 = 0.$$

Quindi le radici della data sono tutte reali e disuguali, e fra queste due positive e due negative. Il limite delle radici positive è il 3, ma non manifestandosi queste colla sostituzione de' numeri naturali, faremo passaggio alla trasformata a radici doppie (§. 108), che sarà

$$x^4 - 60x^2 + 56x + 592 = 0.$$

Questa colla sostituzione suddetta palesa le due radici positive l' una fra 4 e 5, e l' altra fra 5 e 6.
La prima di queste si trova $= 4,9375\ldots$;
la seconda . . . . $= 5.4989\ldots$;
onde le radici positive della proposta sono

$$x = 2,4687\ldots$$
$$x = 2,7494\ldots$$

Le negative, dopo che saranno cangiate in positive, si trovano immediatamente colla serie de' numeri naturali, l' una fra 1 e 2, l' altra fra 3 e 4, ed eseguendo le opportune operazioni si ha pel loro valore prossimo

$$x = -(1,42857\ldots);\quad x = -(3,75000\ldots).$$

Oltre questo metodo, che è fra tutti il più perfetto, ve ne sono molti altri immaginati da *Newton*, da *Eulero*, da *Simpson*, ec., oltre il più recente di tutti, quello di *M. Budan*, il cui principal merito consiste nel trovare con un meccanismo semplicissimo di calcolo i limiti delle radici reali, ed a scoprire l'esistenza delle immaginarie. Ma noi abbiamo già occupato per la teoria delle equazioni uno spazio forse troppo esteso in vista de' confini che ci sono prescritti, onde rimandiamo i nostri allievi alle opere originali de' menzionati Scrittori, qualora bramassero una più ampia istruzione.

CAPO XI.

De' problemi indeterminati di secondo grado.

§. 118. Dovendo noi supporre i nostri lettori istrutti de' metodi, con cui si risolvono le equazioni indeterminate di primo grado, non parleremo che di quelle del secondo grado, limitandoci a quelle che contengono due sole incognite, per le quali soltanto si possono dare delle regole generali.

Prop. Risolvere in numeri razionali l'equazione generale

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0.$$

Se questa si risolve per rapporto ad y colle note formole, si avrà

$$2y + ax + c = \sqrt{[(a^2 - 4b)x^2 + 2(ac - 2d)x + c^2 - 4e]}.$$

Pongasi la quantità radicale $= t$, e nel tempo medesimo si faccia

$$a^2 - 4b = A$$
$$ac - 2d = g$$
$$c^2 - 4e = h,$$

e si avrà $$2y + ax + c = t$$
$$Ax^2 + 2gx + h = t^2.$$

Moltiplichiamo quest' ultima per A, e risolvendo di nuovo l' equazione

$$A^2x^2 + 2gAx + A(h - t^2) = 0$$

avremo

$$Ax + g = \sqrt{(g^2 - Ah + At^2)},$$

e facendo

$$Ax + g = z\,,\ g^2 - Ah = B\,,$$

e quadrando ciascun membro, avremo finalmente l'equazione

$$z^2 = At^2 + B.$$

La quistione è dunque ridotta a risolvere in numeri razionali quest' ultima. Difatti trovati i valori di t e di z si avranno quelli di x e di y per mezzo de' valori

$$x = \frac{z - g}{A}\,,\ y = \frac{t - ax - c}{2}.$$

Se poi oltre all' essere x ed y razionali si volesse che fossero intieri, bisognerebbe che quelli di t e di z fosser tali, che sostituiti ne' valori di x e di y li rendessero intieri.

Ciò premesso l' equazione

$$z^2 = At^2 + B$$

è risolubile in numeri razionali ne' seguenti casi:

1.° se A sia un quadrato;

2.° se B sia un quadrato;

3.° se $At^2 + B$ sia un prodotto della forma

$$(at + b)(ct + d);$$

4.° se $At^2 + B$ sia della forma $p^2 + qr$, e p, q, r siano ciascuna della forma $at + b$.

Caso 1.° Fatto $A = a^2$ l' equazione a risolversi sarà

$$z^2 = a^2t^2 + B.$$

Pongasi $a^2t^2 + B = (at + m)^2$

e sarà, sopprimendo di quà e di là il termine $a^2 t^2$:

$$t = \frac{B - 2m}{2am}.$$

Prendasi ora per m qualunque numero razionale, positivo, negativo, intiero, o rotto, e trovato per di lui mezzo il valore di t, questo darà per z un valor razionale. Questo è evidente per essere $z = at + m$, dove il secondo membro è tutto razionale.

Caso 2.º Posto $B = b^2$, l'equazione da sciogliersi sarà

$$z^2 = At^2 + b^2.$$

Posto il 2.º membro $= (mt + b)^2$, fatto lo sviluppo e le riduzioni, avremo

$$t = \frac{2mb}{A - m^2}.$$

Messo questo valore nell'equazione, si avrà

$$z = \sqrt{(At^2 + b^2)} = mt + b$$

cioè z tutto espresso razionalmente.

Caso 3.º L'equazione sarà

$$z^2 = (at + b)(ct + d).$$

Facciasi qui pure il 2.º membro $= m^2(at + b)^2$, e tolti i fattori comuni da ambidue i membri, rimarrà

$$ct + d = m^2(at + b),$$

da cui abbiamo

$$t = \frac{m^2 b - d}{c - m^2 a}.$$

Questo valore renderà razionale la formola proposta, qualunque sia il valore di m^2, purchè sia razionale.

Caso 4.º La forma dell'equazione essendo

$$z^2 = (a + bt)^2 + (c + dt)(e + ft),$$

in cui i coefficienti a, b, c, ec. sono differenti da quelli dell'equazione generale, si ponga il 2.º membro

$$= [a + bt + m(c + dt)]^2,$$

e togliendo da ambe le parti il quadrato comune

$(a + bt)^2$, e dividendo per $c + dt$, rimarrà

$$e + ft = 2m(a + bt) + m^2(c + dt),$$

d' onde si ricava

$$t = \frac{e - 2ma - m^2 c}{2mb + m^2 d - f},$$

valore che sostituito nell' equazione precedente somministrerá per z de' valori tutti razionali.

§. 119. *Osserv.* Se in virtù de' casi esposti, ovvero per azzardo si conoscerà un qualche valore di t, che sodisfaccia razionalmente all' equazione

$$z^2 = At^2 + B,$$

se ne potranno per mezzo di esso conoscere altri infiniti. Sia difatti p questo valore, e q il corrispondente di z, sicchè l' equazione diventi

$$q^2 = Ap^2 + B.$$

Sottratta questa dalla precedente si avrà

$$z^2 - q^2 = A(t^2 - p^2),$$

ovvero

$$z^2 = q^2 + A(t^2 - p^2).$$

Questa nuova forma è evidentemente compresa nel 4.° caso; onde ponendo

$$q^2 + A(t^2 - p^2) = [q + m(t - p)]^2$$

si ricaverà

$$t = \frac{(A + m^2)p - 2mq}{m^2 - A}.$$

§. 120. *Es.* 1.° Trovar de' numeri tali che sottraendo il 2 dal doppio del loro quadrato, il residuo sia un nuovo quadrato.

Se t è uno di tali numeri, dovrà sussistere l' equazione

$$z^2 = 2t^2 - 2,$$

la quale messa sotto la forma

$$z^2 = 2(t + 1)(t - 1)$$

appartiene al 3.° caso. Ponendo pertanto

$$2(t+1)(t-1)=m^2(t-1)^2,$$

indi dividendo per $t-1$ si troverà

$$t=\frac{m+2}{m-2}.$$

Se ora daremo ad m dei valori positivi o negativi, come

$$m=\quad 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\text{ ec.}$$

avremo

$$t=-1,\ -3,\quad 3,\quad \frac{11}{7},\ \frac{9}{7},\text{ ec.}$$

$$z^2=\quad 0,\quad 16,\ 16,\ \frac{144}{49},\ \frac{64}{49},\text{ ec.}$$

e dando dei valori frazionarj ad m si avrebbero altri infiniti valori di t e di z.

Es. 2.° Quali sono i numeri, il cui doppio quadrato ecceda di una sola unità un altro quadrato?

Sia t uno de' numeri cercati, e z^2 un quadrato: dovrà essere

$$2t^2=z^2+1$$

ovvero

$$z^2=2t^2-1.$$

Quest' equazione nello stato, in cui si trova, non si riferisce a nessuno de' quattro casi precedenti; ma si riferirà al 4.°, se si porrà sotto la forma

$$z^2=t^2+(t+1)(t-1).$$

Pertanto ponendo il 2.° membro $=[t+m(t+1)]^2$, dopo le dovute riduzioni si troverà

$$t=\frac{m^2+1}{1-2m-m^2}.$$

Quindi ai valori positivi di

$$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\text{ ec.}$$

corrispondono i seguenti

$$t = 1, \quad -1, \quad -\frac{5}{7}, \quad -\frac{6}{7}, \quad -\frac{17}{23}, \text{ ec.}$$

$$z^2 = 1, \quad 1, \quad \frac{1}{49}, \quad \frac{1}{49}, \quad \frac{49}{529}, \text{ ec.}$$

Prendendo poi

$$m = -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \text{ ec.}$$

si avrebbe

$$t = \quad 1, \quad 5, \quad -5, \quad -\frac{17}{7}, \text{ ec.}$$

$$z^2 = \quad 1, \quad 49, \quad 49, \quad \frac{529}{49}, \text{ ec.}$$

Noi qui non abbiamo esposto che i principj, che servono alla risoluzione delle quistioni così dette di *Diofanto*, ed abbiamo in conseguenza indicato gli artifizj più ovvj per render razionale una formola irrazionale di secondo grado, artifizj che sono di grand' uso nel *Calcolo integrale.* Chi bramasse conoscere la risoluzione generale dell' equazione $z^2 = At^2 + B$, la potrà leggere negli Atti di Berlino per l' anno 1767, nelle *Aggiunte* al 2.° Tomo dell' Algebra di *Eulero* fatte da *Lagrange*, ed in diversi Trattati di Algebra sì italiani che esteri.

CAPO XII.

Dell' estrazione delle radici dai binomj irrazionali.

§. 121. Accade non di rado di dovere estrarre da un binomio irrazionale, come $a + \sqrt{b}$, la radice quadrata o cubica, o di altro qualsivoglia grado: ciò ha luogo particolarmente nella soluzione delle equazioni derivative del 2.° grado. Con tutto che queste radici, generalmente parlando, siano doppiamente irrazionali, v' hanno però molti casi, ne' quali esse si possono effettivamente estrarre, ed ecco un saggio del metodo da adoprarsi.

Prima di tutto osserveremo che elevando un binomio della forma

$$x+\sqrt{y}$$

alla potenza m, e rappresentando con x, y due quantità di loro natura razionali, sia che m sia pari, ovvero dispari, si arriva sempre ad un polinomio della forma

$$P+Q\sqrt{y},$$

in cui P e Q sono quantità razionali dipendenti da x, y, e da m.

In 2.° luogo se si innalzerà il binomio

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ad una potestà pari, i termini dello sviluppo saranno di nuovo della forma

$$P+Q\sqrt{y};$$

ma se la potestà sarà di esponente dispari, i termini della potenza di questo binomio saranno tutti irrazionali, e perciò non riducibili alla forma precedente.

Inoltre il binomio $x+\sqrt{y}$, ovvero $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ potrebbe avere un fattore irrazionale $\sqrt[m]{k}$, che sparisce colla formazione della potenza m, ed allora sarebbe

$$\left[(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}\right]^m, \text{ ovvero } \left[(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}\right]^m$$

$$= \quad kP+kQ\sqrt{y}$$

cioè della forma precedente.

§. 122. *Prop.* Dalla formola $a+\sqrt{b}$, in cui a e b possono esser quantità sì positive che negative, estrarre la radice di grado m.

Pongasi

$$\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} = (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$$

e fatta la potenza m di ciascun membro, avremo

$$a+\sqrt{b}=k\left[x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\ldots\ldots\right]$$

$$+k\left[mx^{m-1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}x^{m-3}y+\ldots\right]\sqrt{y}\,.$$

Uguagliando fra loro separatamente le quantità razionali ed irrazionali, e non ritenendo che le prime, di cui abbiam bisogno, avremo l'equazione

$$(A)\qquad a=k\left[x^m+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y+\ldots\ldots\right].$$

Ma se si pone

$$\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})} \quad = \quad (x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}$$

dee ancora essere

$$\sqrt[m]{(a-\sqrt{b})} \quad = \quad (x-\sqrt{y})\sqrt[m]{k},$$

giacchè fatta la podestà m della seconda, si ricaverebbero le medesime equazioni ottenute colla prima. Ora moltiplicando fra loro queste due, si ha

$$\sqrt[m]{(a^2-b)} \quad = \quad (x^2-y)\sqrt[m]{k^2},$$

e perciò

$$\sqrt[m]{\frac{a^2-b}{k^2}} \quad = \quad x^2-y.$$

Il 2.° membro di quest'ultima essendo tutto razionale, bisogna che lo sia anche il primo, onde è necessario che $\frac{a^2-b}{k^2}$ sia una potenza m^{sima}. E siccome non vi ha d'arbitrario che la quantità k, bisognerà dare a questa un valore idoneo a soddisfare a questa condizione. Qualora non se ne presenti altro più semplice, si potrà sempre dare a k un valor tale, che sia

$$k^2=(a^2-b)^{\pm m+1}$$

e posto poi $\frac{a^2-b}{k^2}=c^m$, avremo $x^2-y=c$.

Sostituiti questi valori di k e di y nell' equazione (A) essa diventerà

$$(B)\quad a = k\left[x^m + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(x^2-c) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^{m-4}(x^2-c)^2 + \text{ec.}\right].$$

Se da quest' equazione si avranno dei valori razionali di x, la radice, di cui si tratta, sarà possibile, e sarà della forma

$$(x+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}.$$

Se questa non conterrà che potenze pari di x, in modo che posta $z = x^2$, la trasformata in z abbia di nuovo delle radici razionali, l' estrazione della radice cercata sarà di nuovo possibile, ma questa sarà della forma

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt[m]{k}.$$

Qualche volta però può accadere che la radice torni della forma precedente: basta per ciò che y ossia $x^2 - c$ sia un quadrato, mentre allora $\sqrt{y}$ sarà razionale.

Se nè x nè x^2 avranno valori razionali, l' estrazione della proposta radice sarà impossibile, almeno sotto la forma binomiale, che noi abbiamo considerato.

Es. 1.º Si debba estrar la radice quadrata dal binomio immaginario

$$1 + 4\sqrt{-3}.$$

Fatto il paragone della formola $\sqrt{(1+4\sqrt{-3})}$ con la generica $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}$ si ha $m = 2$, $a = 1$, $b = -48$, $a^2 - b = 49$, onde prendendo $k = 1$ sarà

$$\sqrt{\frac{a^2-b}{k^2}} = c = 7, \quad y = x^2 - 7.$$

Posti questi valori nell' equazione (B) si ha

$$1 = x^2 + x^2 - 7\,, \quad \text{ovvero} \quad x^2 = 4\,;$$

da cui si hanno i valori razionali $x = 2$, $x = -2$. Prendendo il primo, sarà $y = -3$, e la radice domandata del binomio sarà $2 + \sqrt{-3}$; e prendendo il secondo, sarà ancora $y = -3$, e la radice sarà $-2 + \sqrt{-3}$: che corrisponde al binomio $1 - 4\sqrt{-3}$, che va sempre congiunto al proposto.

Es. 2.° Cerchisi il valore di

$$\sqrt[3]{\left(\frac{139}{54} + \frac{19}{12}\sqrt{3}\right)}.$$

Essendo $m = 3$, $a = \frac{139}{54}$, $b = \frac{1805}{144}$, sarà

$$a^2 = \frac{19321}{2916}\,,\; a^2 - b = -\frac{68921}{11664}\,, = -\frac{41^3}{(2\,.\,6\,.\,9)^2}\,,$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{k^2}} = -\frac{41}{\sqrt[3]{(2\,.\,6\,.\,9)^2\,k^2}}.$$ Il denominatore diventa un cubo perfetto, se si pone $k = 2$; difatti egli prende la forma $\sqrt[3]{(4\cdot 9)^3}$, la cui radice cubica è $4 \cdot 9$ ossia 36. Sarà dunque $c = -\frac{41}{36}$. Ponendo questi valori di a, di k, e di c nella equazione (B), si ottiene

$$\frac{139}{54} = 2\left[x^3 + 3x\left(x^2 + \frac{41}{36}\right)\right],$$

e fatte le riduzioni, l'equazione cubica

$$432\,x^3 + 369\,x - 139 = 0\,,$$

la quale, trattata secondo che si è insegnato ai §§. 72 e 73, manifesta la radice razionale $x = \frac{1}{3}$, e perciò $y = \frac{1}{9} + \frac{41}{36} = \frac{5}{4}$. Dunque sarà finalmente

$$\sqrt[3]{\left(\frac{139}{54}+\frac{19}{12}\sqrt{5}\right)}=(x+\sqrt{y})\sqrt[3]{k}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{2}.$$

Es. 3° Cerchisi

$$\sqrt[4]{(920-200\sqrt{21})}$$

Il paragone colla formola generale $\sqrt[m]{(a+\sqrt{b})}$ ci dà

$m=4$,
$a=920$
$a^2=846400$
$b=840000$
$a^2-b=6400=80^2$

$$\sqrt[4]{\frac{a^2-b}{k^2}}=c=\sqrt{\frac{80}{k}}.$$

Se si fa $k=5$, si troverà $c=\sqrt{16}=4$, $y=x^2-4$. Posti questi valori in (B) si ha

$$920=5[x^4+6x^2(x^2-4)+(x^2-4)^2],$$

e fatte le riduzioni

$$x^4-4x^2-21=0.$$

Facendo $x^2=z$, si ha la trasformata

$$z^2-4z-21=0,$$

che ammette due radici razionali 7 e -3. Dal primo valore si ottiene $x=\pm\sqrt{7}$, $y=3$, onde la radice richiesta avrà la forma $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt[4]{k}$, e sarà $=$

$(\sqrt{3}\pm\sqrt{7})\sqrt[4]{5}$, e per la formola proposta si prenderà il segno inferiore. Volendo adoprare il valore di $x=\sqrt{-3}$, si avrebbe la stessa radice espressa sotto la forma immaginaria

$$(\sqrt{-3}+\sqrt{-7})\sqrt[4]{5},\ \text{ovvero}\ (\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt[4]{5}\ \sqrt{-1}.$$

Es. 4.° Sia finalmente proposto di trovare il valore di

$$\sqrt[4]{(14+8\sqrt{3})}.$$

Avremo

$$m=4$$
$$a=14$$
$$a^2=196$$
$$b=192$$
$$a^2-b=4$$

$$\sqrt[4]{\frac{a^2-b}{k^2}}\ (\text{facendo } k=\tfrac{1}{2})=2=c\,;$$

onde dall' equazione (B), si avrà

$$14=\tfrac{1}{2}[x\quad+6x^2(x^2-2)+(x^2-2)^2]\,;$$

che si riduce a

$$x^4-2x^2-3=0,$$

e fatta $x^2=z$,

$$z^2-2z-3=0,$$

dove vi sono due radici razionali 3, -1, onde sarà

$$x=\sqrt{3}\,,\ \text{ovvero}\ x=\sqrt{-1}.$$

Col primo valore sarà $y=1$, e la radice domandata $=$

$$(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.$$

Col secondo valore sarà $y=-3$, e perciò la radice richiesta $=$

$$(\sqrt{-1}+\sqrt{-3})\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}=(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\,\sqrt{-1}.$$

CAPO XIII.

Proprietà delle funzioni algebraiche.

§. 123. Oltre le nozioni su le funzioni in genere, che abbiamo premesso nel principio di quest' opera, vi sono delle proprietà più intime, le quali debbono esser conosciute, e che dipendono in gran parte dalla natura delle equazioni. Le quantità indeterminate, che caratterizzano una funzione, e che si chiamano anche *variabili*, possono entrare in qualunque numero nella funzione medesima. Sotto questo rapporto le funzioni prendono il nome di funzione di una, di due, di tre variabili, ec., ed a queste competono le stesse divisioni accennate al §. 3 per le funzioni in genere.

§. 124. *Prop.* Una funzione intiera e razionale di una sola variabile x si può sempre rappresentare col prodotto di tanti fattori lineari della forma $p+qx$ quante sono le unità nel massimo esponente della stessa x.

Sia $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + T$ la funzione proposta. Questa si divida per A e si ponga $=0$. Dell' equazione, che ne nasce, siano a, b, c, d, ... le radici, e ne verrà l' identità

$$x^m + \frac{B}{A}x^{m-1} + \frac{C}{A}x^{m-2} \dots + \frac{T}{A} =$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \dots,$$

e moltiplicando di nuovo per A, si avrà

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + T =$$
$$A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \dots$$

Quest' uguaglianza sussiste evidentemente, ancorchè il primo membro cessi di essere $=0$, cioè non sia un' equazione ma solamente una funzione. Dunque ec.

Si può dare un' altra forma al precedente prodotto col cangiar di segno tutti i fattori, con che esso diventerà

$$\pm A(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)\ldots.$$

dove vale il segno superiore nel caso di m pari, e l' inferiore nel caso di m dispari. Osservando poi che nell' equazione $x^m + \frac{B}{A}x^{m-1} + \ldots = 0$ si ha $\frac{T}{A} = \pm abcd\ldots$, e quindi $A = \pm \frac{T}{abcd\ldots}$, sarà ancora

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + T =$$

$$\frac{T(a-x)}{a}\,\frac{(b-x)}{b}\,\frac{(c-x)}{c}\,\frac{(d-x)}{d}\ldots.$$

$$= T\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{d}\right)\ldots.$$

Se fra le radici $a, b, c, d\ldots$ ve ne saranno di immaginarie, siccome due conjugate qualunque somministrano il fattor reale di secondo grado $x^2 + fx + g$ (§. 69), quindi anche la funzione proposta risulterà dal prodotto di fattori reali di primo o di secondo grado.

§. 125. Fra le funzioni a più variabili si distinguono specialmente le *omogenee* dalle *eterogenee*. In quelle le variabili hanno in ciascun termine un medesimo numero di dimensioni non avuto riguardo ai coefficienti costanti che vi sono compresi; non così in queste. Perciò le funzioni seguenti

$$2abxz - z^2,\ \sqrt{[bx^3 - 2xzu + cxz^2 - u^3]},$$

$$\sqrt[3]{\frac{ax^5 - bx^2z^3 + c^2xz}{x^3 - f^3z^2}},\ \text{ec.}$$

sono tutte omogenee; dove si dee por mente che nelle funzioni razionali e fratte il numero delle dimensioni si desume dal numero delle dimensioni del numeratore diminuito di quello delle dimensioni del denominatore;

ma nelle irrazionali si deve inoltre dividere il numero delle dimensioni dei termini sotto del radicale per l'esponente di questo. Così nell'ultima delle formole precedenti il numero delle dimensioni, ossia il grado della funzione, se non ci fosse il radical cubico, sarebbe $5-2$ ossia 3, ma considerato il radicale, sarà $\frac{3}{3}=1$. Così dicasi delle altre.

§. 126. *Prop.* Le funzioni intiere ed omogenee a due variabili x, y ammettono sempre tanti fattori lineari della forma $py+qx$ quante sono le loro dimensioni.

Tutte le funzioni intiere razionali ed omogenee a due variabili sono contenute nella formola generale

$$Ax^m + Byx^{m-1} + Cy^2x^{m-2} + Dy^3x^{m-3} \ldots + Ty^m.$$

Si ponga $x=yu$, ed essa si cangerà in

$$y^m(Au^m + Bu^{m-1} + Cu^{m-2} \ldots + T).$$

Ora il fattore fra le parentesi, essendo ridotto alla sola variabile u, ammette (§. 123) m fattori lineari della forma $p+qu$. Di più il fattore y^m si smembra in m fattori uguali y, y, y, ec. Se dunque si moltiplicherà ciascun fattore $p+qu$ per y e si rimetterà x invece di yu, avremo la funzione proposta rappresentata da m fattori tutti della forma $py+qx$, come si è asserito.

§. 127. Se la funzione tuttochè omogenea contenesse più di due variabili, non si può, generalmente parlando, applicarle la stessa proprietà; come se essa contenesse le tre variabili x, y, z, non si potrebbe asserire ch'essa contenesse i fattori della forma $py+qx+rz$. Ciò non ostante in alcuni casi particolari si possono determinare i fattori di questa forma. Eccone un esempio:

Sia la funzione omogenea a tre variabili

$$ay^4 + bx^4 + cz^4 + ey^2x^2 + fy^2z^2 + gx^2z^2.$$

Per vedere se questa ammetta de' fattori semplici della forma $py + qx + ru$, pongasi $py + qx + ru = 0$, onde traggasi $y = -\frac{q}{p}x - \frac{r}{q}u$, e sostituendo nella proposta funzione questo valore invece di y, indi moltiplicando tutti i termini per p^4, ed uguagliando tutto a zero si avrà

$$(aq^4 + bp^4 + ep^2q^2)x^4 + (4aq^3r + 2ep^2qr)x^3u + (6aq^2r^2 + ep^2r^2 + fp^2q^2 + gp^4)x^2u^2 + (4aqr^3 + 2fp^2qr)xu^3 + (ar^4 + cp^4 + fp^2r^2)u^4 = 0.$$

Siccome i coefficienti a, b, c ec., p, q, r debbono essere indipendenti da x, y, u, così quest' equazione non può aver luogo a meno che non si distruggano fra loro tutti i coefficienti di x^4, di x^3u, ec., onde si avranno le seguenti equazioni

$$aq^4 + bp^4 + ep^2q^2 = 0$$
$$4aq^3r + 2ep^2qr = 0$$
$$6aq^2r^2 + ep^2r^2 + fp^2q^2 + gp^4 = 0$$
$$4aqr^3 + 2fp^2qr = 0$$
$$ar^4 + cp^4 + fp^2r^2 = 0.$$

Queste cinque equazioni serviranno a determinare cinque delle sei quantità a, b, c, e, f, g, delle quali una rimarrà indeterminata, e questa sia la prima a. Avremo pertanto

$$b = \frac{aq^4}{p^4};\quad c = \frac{ar^4}{p^4};\quad e = -\frac{2ap^2q^2}{p^4};\quad f = -\frac{2ap^2r^2}{p^4};$$
$$g = -\frac{2aq^2r^2}{p^4};$$

onde la funzione proposta si trasformerà in

$$\frac{a}{p^4}\Big(p^4y^4 + q^4x^4 + r^4u^4 - 2p^2q^2y^2x^2 - 2p^2r^2y^2u^2 - 2q^2r^2x^2u^2\Big);$$

e questa avrà quattro divisori della forma $py + qx + ru$. Per trovarli facciamo astrazione dal fattor costante fuori della parentesi, e poniamo per brevità

$$p^2y^2 = h\,,\quad q^2x^2 = k\,,\quad r^2u^2 = l\,,$$

e la funzione precedente uguagliata a zero diventerà

$$h^2 + k^2 + l^2 - 2hk - 2hl - 2kl = 0.$$

Risolvendo quest' equazione relativamente ad una delle tre indeterminate h, k, l, per es. ad h avremo

$$h = k + l \pm \sqrt{[(k+l)^2 - (k^2 + l^2 - 2kl)]}$$

ovvero

$$h = k + l \pm \sqrt{[(k+l)^2 - (k-l)^2]}$$

e ancora

$$h - k - l = \pm \sqrt{4kl}\,;$$

quindi si avranno immediatamente due fattori lineari della precedente equazione; cioè

$$h - k - l - \sqrt{4kl}\,,\quad h - k - l + \sqrt{4kl}\,,$$

e restituendo i valori in x, y, u, si avranno i due fattori di secondo grado

$$p^2y^2 - q^2x^2 - r^2u^2 - 2qrxu = p^2y^2 - (qx + ru)^2$$

$$p^2y^2 - q^2r^2 - r^2u^2 + 2qrxu = p^2y^2 - (qx - ru)^2\,,$$

e questi ultimi decomposti ne' loro fattori lineari danno finalmente la funzione proposta equivalente alla seguente

$$\frac{a}{p^4}(py+qx+ru)(py-qx-ru)(py+qx-ru)(py-qx+ru)\,.$$

CAPO XIV.

Frazioni continue.

§. 128. Sia x una quantità qualunque che non possa esprimersi in numeri intieri, e sia α una quantità intiera, trovata per qualunque siasi strada, che differisca da x meno dell' unità, e sia $x' = \frac{1}{x - \alpha}$: è chiaro che si avrà

$$x = \alpha + \frac{1}{x'}.$$

Sia di nuovo α' un intiero che differisca da x' meno dell' unità, e chiamando similmente x'' la quantità $\frac{1}{x - \alpha'}$, sarà del pari $x' = \alpha' + \frac{1}{\alpha''}$. Sostituendo pertanto questo valore di x' in quello di x si ha

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{x''}}.$$

Sia ancora α'' l' intiero più prossimo ad x'', e sarà di nuovo

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \cfrac{1}{x'''}}}; \text{ ec.}$$

Questa sorta d' espressioni, in cui ciascun denominatore è composto d' un intiero e d' una frazione, si chiamano *frazioni continue*. Una frazione continua sarà finita o infinita nel progresso de' suoi termini secondo che x sarà una quantità razionale o irrazionale. Le quantità α, α', α'', ec. possono essere sì positive che negative, ma noi non avremo occasione di considerarle se non se positive;

queste però, come si vede, servono a sciogliere in frazione continua una quantità qualunque x.

Sia per es. $x = \frac{M}{N}$, cioè si debba sciogliere in frazione continua una frazione ordinaria: ciò si otterrà coll'operazione medesima che insegna l'aritmetica per la ricerca del massimo comun divisore, ed i quozienti successivi corrisponderanno in questo caso alle quantità α, α', α'', ec.

Prendasi la frazione spuria $\frac{23}{5}$; e dividendo 23 per 5, indi ciascun resto pel divisor precedente, si avrà la frazione proposta

$$\frac{23}{5} = 4 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.$$

Se invece si volesse sviluppare $\frac{5}{23}$,

si troverebbe $\frac{5}{23} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

Nel primo caso sarebbe $\alpha = 4$, $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 1$, $\alpha''' = 2$, e nel secondo $\alpha = 0$, $\alpha' = 4$, $\alpha'' = 1$, $\alpha''' = 1$, $\alpha^{\text{IV}} = 2$.

Le quantità α, α', x'', ec. possono perciò chiamarsi *quozienti successivi*, e le quantità x', x'', x''', ec. superiormente adoperate, con cui termina una frazione continua, e che restano ancora a svilupparsi, *quozienti completi*; in questi sono contenuti tutti i quozienti ulteriori, qualora si seguitasse lo sviluppo della frazione.

Se x sarà il valore di una frazione continua sviluppata fino al quoziente $\alpha^{(n)}$ inclusivamente, ed in questa invece di $\alpha^{(n)}$ si sostituisca il quoziente completo corrispondente $x^{(n)}$, il risultato sarà il valor esatto di x, e sarà sempre a tutto rigore

$$x = \alpha + \frac{1}{x'};\quad x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{x''}};$$

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \cfrac{1}{x'''}}};$$

ec.

Quindi si vede che per mezzo di ciascun quoziente completo si può sempre riprodurre il valore intiero ed esatto della quantità sviluppata, qualunque sia il numero de' passi pe' quali ha progredito lo sviluppo.

§. 129. *Prop.* Ridurre in frazione ordinaria una frazione continua.

Ciò si ottiene osservando la legge che sieguono i risultati che si ottengono prendendo successivamente un termine, due termini, tre termini ec. della frazione proposta. Sia la frazione proposta

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \cfrac{1}{\alpha''' + \cfrac{1}{\alpha^{\text{IV}} + \text{ec.}}}}}$$

Interrompendo questa dopo un denominatore, indi dopo due, poi dopo tre, ec., ed incominciando dal termine α di forma tutta intiera si avranno i valori

$$\alpha = \frac{\alpha}{1};\quad \alpha + \frac{1}{\alpha'} = \frac{\alpha\alpha' + 1}{\alpha'};$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha''}} = \frac{(\alpha\alpha' + 1)\alpha'' + \alpha}{\alpha'\alpha'' + 1};$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \cfrac{1}{\alpha'''}}} = \frac{(\alpha\alpha'\alpha'' + \alpha'' + \alpha)\alpha''' + \alpha\alpha' + 1}{(\alpha'\alpha'' + 1)\alpha''' + \alpha'};$$

ec.

Ora facendo

$$\begin{array}{ll|ll}
p & = \alpha & q & = 1 \\
p' & = p\alpha' + 1 & q' & = q\alpha' \\
p'' & = p'\alpha'' + p & q'' & = q'\alpha'' + q \\
p''' & = p''\alpha''' + p' & q''' & = q''\alpha''' + q' \\
p^{\mathrm{IV}} & = p'''\alpha^{\mathrm{IV}} + p'' & q^{\mathrm{IV}} & = q'''\alpha^{\mathrm{IV}} + q'' \\
. & & . & \\
. & & . & \\
. & & . & \\
p^{(n)} & = p^{(n-1)}\alpha^{(n)} + p^{(n-2)} & q^{(n)} & = q^{(n-1)}\alpha^{(n)} + q^{(n-2)}
\end{array}$$

le precedenti frazioni si potranno rappresentare con

$$\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'''}{q'''},\ \ldots\ \frac{p^{(n)}}{q^{(n)}} \text{ ec. };$$

ed è da rimarcarsi che essendo α, α', α'', ec. tutti numeri intieri e positivi, si avrà

$$p < p' < p'' < p''' < \text{ec.},$$

e similmente

$$q < q' < q'' < q''' < \text{ec.}$$

La legge poi di queste frazioni è costante. Avvegnachè se prendiamo per es. la frazione $\frac{p'''}{q'''} = \frac{p''\alpha''' + p'}{q''\alpha''' + q'}$, è chiaro che cangiando α''' in $\alpha''' + \frac{1}{\alpha^{\mathrm{IV}}}$ ne dovrà nascere $\frac{p^{\mathrm{IV}}}{q^{\mathrm{IV}}}$, ossia $\frac{p'''\alpha^{\mathrm{IV}} + p''}{q'''\alpha^{\mathrm{IV}} + q''}$. Ora ciò accade realmente, giacchè $p''\left(\alpha''' + \frac{1}{\alpha^{\mathrm{IV}}}\right) + p' = p''\alpha''' + p' + \frac{p''}{\alpha^{\mathrm{IV}}} = \frac{p'''\alpha^{\mathrm{IV}} + p''}{\alpha^{\mathrm{IV}}}$; e similmente $q''\left(\alpha''' + \frac{1}{\alpha^{\mathrm{IV}}}\right) + q' = \frac{q'''\alpha^{\mathrm{IV}} + q''}{\alpha^{\mathrm{IV}}}$, onde dividendo l'uno per l'altro questi valori, e sopprimendo il divisor comune α^{IV}, si ha

$\frac{p''' \alpha^{\text{IV}} + p''}{q''' \alpha^{\text{IV}} + q''} = \frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}}$. E ciò valendo per qualunque frazione $\frac{p^{(n)}}{q^{(n)}}$, si vede che una qualunque di queste ricade nella seguente $\frac{p^{(n+1)}}{q^{(n+1)}}$ col porre $\alpha^{(n)} + \frac{1}{\alpha^{(n+1)}}$ invece di $\alpha^{(n)}$. Dunque la legge è costante.

§. 130. *Prop.* Se due frazioni contigue $\frac{p^{(r)}}{q^{(r)}}$, $\frac{p^{(r+1)}}{q^{(r+1)}}$, si riducono allo stesso denominatore, indi si sottraggono, la differenza fra i numeratori sarà sempre uguale all' unità positiva o negativa.

Siano difatti le due frazioni contigue $\frac{p^{(r)}}{q^{(r)}}$, $\frac{p^{(r+1)}}{q^{(r+1)}}$, e sottraendo la prima dalla seconda si avrà

$$\frac{p^{(r+1)} q^{(r)} - p^{r} q^{(r+1)}}{q^{(r)} q^{(r+1)}}.$$

Ora dico che il numeratore di questa frazione non è altro che l' unità positiva o negativa. Imperciocchè supponiamo $\alpha^{(r+1)}$ il quoziente corrispondente a $p^{(r+1)}$, onde sia

$$p^{(r+1)} = p^{(r)} \alpha^{(r+1)} + p^{(r-1)}$$
$$q^{(r+1)} = q^{(r)} \alpha^{(r+1)} + q^{(r-1)}.$$

Moltiplicando la prima di queste due equazioni per $q^{(r)}$, e sottraendola dalla seconda moltiplicata per $p^{(r)}$ si avrà dopo le riduzioni

$$p^{(r+1)} q^{(r)} - p^{(r)} q^{(r+1)} = -[p^{(r)} q^{(r-1)} - p^{(r-1)} q^{(r)}].$$

Ma quest' ultima collo stesso discorso si trasforma in

$$-[p^{(r-1)} q^{(r-2)} - p^{(r-2)} q^{(r-1)}],$$

e questa in altra sempre mancante di un nuovo accento, ec.; dunque ripassando a formule di indice sempre minore si arriverà finalmente a $p'q - pq'$; e siccome questa non è altro che 1, quindi sarà $p''q' - p'q'' = -1$, e rimontando agli indici più alti si troveranno tutte le formole successive uguali all' unità, la quale sarà positiva, se l'indice più alto di p sarà dispari, e negativa se l'indice medesimo sarà pari. Perciò sarà per es.

$$p^{\text{VI}} q^{\text{V}} - p^{\text{V}} q^{\text{VI}} = -1$$
$$p^{\text{IX}} q^{\text{VIII}} - p^{\text{VIII}} q^{\text{IX}} = +1.$$

Quindi le differenze fra le frazioni

$$\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \frac{p'''}{q'''}, \text{ ec.},$$

sottraendo sempre la precedente dalla susseguente, saranno

$$\frac{1}{qq'}, -\frac{1}{q'q''}, +\frac{1}{q''q'''}, \text{ ec.}$$

§. 131. *Prop.* La differenza fra la quantità vera x, ed una frazione $\frac{p^{(r)}}{q^{(r)}}$ è tanto più picciola quanto maggiore è l'indice r, ossia quanto più la frazione medesima è più rimota dal principio della serie

$$\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \text{ ec.}$$

Siccome si ha a tutto rigore (§. 128)

$$x = \alpha + \frac{1}{x'}, = \frac{px' + 1}{qx'} = \frac{p}{q} + \frac{1}{qx'};$$

$$x = \alpha + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{x''} = \frac{p'x'' + p}{q'x'' + q} =$$

(effettuando la divisione)

$$\frac{p'}{q'} - \frac{(p'q - pq')}{q'(q'x'' + q)} = \frac{p'}{q'} - \frac{1}{q'(q'x'' + q)};$$

$$x = \alpha + \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{x'''} = \frac{p''x''' + p'}{q''x''' + q'} =$$

$$\frac{p''}{q''} + \frac{1}{q''(q''x''' + q')}; \text{ ec.}$$

Quindi si avrà

$$x - \frac{p}{q} = \frac{1}{qx'}$$

$$x - \frac{p'}{q'} = - \frac{1}{q'(q'x'' + q)}$$

$$x - \frac{p''}{q''} = \frac{1}{q''(q''x''' + q')},$$

ec.

Se ora si riflette che abbiamo (§. cit.)

$x' > \alpha'$, $x'' > \alpha''$, $x''' > \alpha'''$, ec.,

vedremo che sarà ancora

$x' > q'$, $q'x'' + q > q'\alpha'' + q > q''$,

$q''x''' + q' > q''\alpha''' + q' > q'''$, ec.;

onde mettendo ne' denominatori di queste frazioni q' invece di x', q'' invece $q'x'' + q$, ec., ne nascerà

$$x - \frac{p}{q} < \frac{1}{qq'}$$

$$x - \frac{p'}{q'} < - \frac{1}{q'q''}$$

$$x - \frac{p''}{q''} < \frac{1}{q''q'''}$$

ec.

Altronde abbiamo

$x' < \alpha' + 1$, $x'' < \alpha'' + 1$, $x''' < \alpha''' + 1$, ec.;

perciò dalla prima di queste ineguaglianze si ricava visibilmente $x' < q' + q$. Moltiplicando poi i termini della seconda per q', ed aggiungendo dall' una e dall' altra parte la quantità q, si avrà

$$q'x'' + q < q'\alpha'' + q' + q,$$

ovvero

$$q'x'' + q < q'' + q'.$$

In simil guisa si troverà

$q''x''' + q' < q''' + q''$; $q'''x^{\text{IV}} + q'' < q^{\text{IV}} + q'''$; ec.;

onde ne verrà

$$x-\frac{p}{q} > \frac{1}{q(q+q')}$$

$$x-\frac{p'}{q'} > -\frac{1}{q'(q'+q'')}$$

$$x-\frac{p''}{q''} > \frac{1}{q''(q''+q''')}$$

$$x-\frac{p'''}{q'''} > -\frac{1}{q'''(q'''+q^{\text{IV}})}$$

ec.

Dunque le differenze fra il valor vero e ciascheduna delle frazioni sono successivamente minori (astraendo da' segni) delle quantità

$$\frac{1}{qq'},\ \frac{1}{q'q''},\ \frac{1}{q''q'''},\ \text{ec.},$$

e successivamente maggiori delle quantità

$$\frac{1}{q(q+q')},\ \frac{1}{q'(q'+q'')},\ \frac{1}{q''(q''+q''')},\ \text{ec.}$$

in cui essendo i numeratori costanti, ed i fattori dei denominatori tutti numeri intieri tanto maggiori quanto maggiore è il numero de' loro accenti, si vede che esse vanno sempre scemando a misura che la frazione sarà dotata di un maggior numero di accenti, o sia che sarà più rimota dalla prima. Questa proprietà rende utilissime le frazioni continue per rappresentare il valore di quelle quantità, che non si possono esprimere razionalmente, ed ha fatto loro dare da alcuni scrittori il nome di *frazioni convergenti*.

§. 132. *Prop.* Fra due frazioni contigue della serie

$$\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \text{ec.}$$

non può caderne un' altra, il cui denominatore sia più picciolo di quello delle frazioni medesime.

Prendansi difatti due frazioni come sarebbe $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$, la cui differenza è $\frac{1}{q''q'''}$, e supponiamo, se è possibile, che vi sia un' altra frazione $\frac{m}{n}$ intermedia a queste, ed in cui il denominatore sia tale che si abbia

$$n < q'' \text{ , ovvero } n < q'''.$$

Bisognerà che la differenza fra $\frac{p''}{q''}$ ed $\frac{m}{n}$ sia minore della differenza fra $\frac{p''}{q''}$ e $\frac{p'''}{q'''}$, cioè dovrà sussistere la relazione

$$\frac{mq''-np''}{nq''} < \frac{1}{q''q'''}$$

(per essere $p'''q''-p''q'''=1$).

Ora per essere il numerator della prima non mai minore di 1, bisogna, perchè si verifichi la relazione, che sia $nq'' > q''q'''$, cioè che sia $n > q'''$. Non può dunque essere $n < q'''$. Similmente prendendo la differenza fra il rotto supposto e la frazione $\frac{p'''}{q'''}$ dovrà sussistere la relazione

$$\frac{np'''-mq'''}{nq'''} < \frac{1}{q''q'''};$$

e questa non potendo esser soddisfatta a meno che non sia $n > q''$, si vede essere impossibile che sia, come si era assunto, $n < q''$. Dunque ec.

§. 133. *Esempio*. Secondo *Lacaille* l'anno solare è di 365g. 5or. 48′ 49″, e per conseguenza eccede l'anno comune, che è di 365g, di 5or. 48′ 49″. Se questo eccesso fosse esattamente di 6 ore produrrebbe un giorno intiero a capo di quattro anni comuni; ma se si vuol sapere esattamente ogni quant' anni comuni questo eccesso può produrre un certo numero di giorni, bisogna cercare il rapporto fra 24^{ore} e 5$^{or.}$ 48′ 49″, e questo rapporto si trova $= \frac{86400}{20929}$, di modo che si può dire che a capo di 86400 anni comuni bisognerebbe intercalare 20929 giorni per ridurli ad anni tropici. Ora siccome il rapporto di 86400 a 20929 è espresso in numeri assai grandi, si cerca di esprimere questo stesso rapporto in numeri più piccioli di questi, ed approssimanti a loro quanto è possibile.

Si ridurrà pertanto la frazione $\frac{86400}{20929}$ in frazione continua per mezzo dell' operazione del massimo comun divisore (§. 128), e si avrà

$$
\begin{array}{l}
20929|86400|4\ (=\alpha)\\
\quad 2684|20929|7\ (=\alpha^{\text{I}})\\
\quad\quad 2141|2684|1\ (=\alpha^{\text{II}})\\
\quad\quad\quad 543|2141|3\ (=\alpha^{\text{III}})\\
\quad\quad\quad\quad 512|543|1\ (=\alpha^{\text{IV}})\\
\quad\quad\quad\quad\quad 31|512|16\ (=\alpha^{\text{V}})\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 16|31|1\ (=\alpha^{\text{VI}})\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 15|16|1\ (=\alpha^{\text{VII}})\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1|15|15\ (=\alpha^{\text{VIII}}).\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Conoscendo così i quoti α, α', α'', ec. si formerà facilmente la serie delle frazioni convergenti $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, ec. per mezzo delle formole del §. 129, e saranno

$$\frac{4}{1},\ \frac{29}{7},\ \frac{33}{8},\ \frac{128}{31},\ \frac{161}{39},\ \frac{2704}{655},\ \frac{2865}{694},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{86400}{20929}$$

dove l' ultima frazione coincide colla proposta.

Ora si vede bensì dalle frazioni qui trovate che l' intercalazione più semplice è quella di un giorno ogni quattr' anni comuni, come fu stabilito nel calendario giuliano; ma che si approssimerebbe di più all' esattezza coll' intercalare 7 giorni ogni 29 anni, ovvero otto giorni ogni 33 anni, e così di seguito.

CAPO XV.

Del metodo de' coefficienti indeterminati, e dello sviluppo in serie.

ART. I.

Coefficienti indeterminati.

§. 134. Se una funzione di forma conosciuta di un' indeterminata x è rappresentata da un polinomio ordinato secondo le potenze positive di x e di un numero finito di termini, essa sarà algebraica ed intiera, ma se il numero de' termini sarà infinito, allora quest' infinitinomio prende il nome di *serie*, e la funzione da esso rappresentata sarà o frazionaria, o irrazionale, o trascendente.

Se poi o nel trasformare la funzione proposta, o nel cercarne qualche proprietà si arriverà ad un' equazione come sarebbe

$$(A)\ a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ec.},$$

fra due polinomj, o fra due infinitinomj, o fra un polinomio ed un infinitinomio, in cui a, b, c, ec., α, β, γ, ec. sono quantità parte note e parte ignote, ma indipendenti da x, allora dovranno uguagliarsi nel tempo stesso tutti i coefficienti delle potestà corrispondenti di x, e perciò sussistere le equazioni simultanee

$$a = \alpha\,,\ b = \beta\,,\ c = \gamma\,,\ d = \delta\,,\ \text{ec.}$$

Imperciocchè posti tutti i termini in un sol membro, si avrebbe

$$\left.\begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 \\ -\alpha - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^2 \end{array}\right\} \text{ec.} = 0.$$

Ora questa equazione dovendo sussistere qualunque sia il valore di x, non dee verificarsi in virtù di valori particolari, che questa possa avere; ma bisogna che tutti i termini si distruggano da se, e perciò che sia

$$a - \alpha = 0\,,\ b - \beta = 0\,,\ c - \gamma = 0\,,\ \text{ec.},$$

equazioni che ricadono nelle precedenti.

Si può confermare questa verità anche col seguente discorso. Suppongasi $x = 0$, e l'equazione (A) si ridurrà soltanto ad $a = \alpha$. Si tolgano dunque da essa questi termini, e divisi gli altri per x, si avrà

$$b + cx + dx^2 + \text{ec.} = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{ec.}$$

Si faccia di nuovo in questa $x = 0$, e si avrà $b = \beta$. Cancellate pertanto queste quantità nell' ultima equazione, e divisi i termini restanti di nuovo per x, poi fatta $x = 0$, si concluderà $c = \gamma$; e così di seguito.

Ora se le relazioni

$$a = \alpha\,,\ b = \beta\,,\ c = \gamma\,,\ \text{ec.}$$

sussistono nel supposto di $x = 0$, dovranno similmente sussistere nel supposto che x abbia qualunque altro valore finito o infinito, altrimenti le costanti a, b, c, ec. α, β, γ, ec. cangerebbero di valore insieme colla x, ciò che ripugna.

Questo è il famoso principio de' *Coefficienti indeterminati*, adoprato la prima volta da *Cartesio* nella risoluzione delle equazioni biquadratiche, uno de' più preziosi dell' Analisi, e di cui tacitamente noi ne abbiamo già fatt' uso nelle cose precedenti, e molto più ne faremo nelle seguenti.

Art. II.

Sviluppo in serie delle funzioni algebraiche.

§. 135. Questo sviluppo consiste nel determinare la forma ed i coefficienti di una serie infinita, ordinata secondo le potenze crescenti o decrescenti della variabile contemplata nella funzione che si vuole sviluppare. In questa ricerca noi non faremo uso che di particolari artifizj aderenti alla natura delle funzioni che ci proporremo, e lasceremo all' Analisi sublime di presentare nel sol principio generale delle *Funzioni analitiche* il modo di convertire in serie qualunque funzione algebraica o trascendente.

Prop. Sviluppare la formola binomiale $(1+x)^m$ in serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x.

Qui si suppone l' esponente m qualunque, giacchè il caso di m intiero e positivo lo supponiamo già contemplato nel Corso dell' Algebra elementare.

Fingasi perciò l' uguaglianza

$$(X)\quad (1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

in cui abbiam posto l' unità nel primo termine del 2.º membro, acciocchè nel caso di $x=0$ i due membri divengano identici, e dove non inchiudiamo veruna podestà frazionaria o negativa di x, perchè se ci fosse una podestà come $x^{\frac{q}{p}}$, siccome questa avrebbe (com' è noto dai §§. 86 e segg.) p valori, quindi anche il primo membro avrebbe tanti valori quante sarebbero le combinazioni de' termini razionali coi valori irrazionali. E se ci fosse qualche potenza negativa, siccome questa all' annullarsi della x acquisterebbe un valor infinito nel mentre che il primo membro si ridurrebbe alla sola unità, quindi si avrebbe $1 = \infty$, assurdo troppo manifesto; dunque alla serie che nasce dallo sviluppo del binomio $(1+x)^m$ non possono competere che termini della forma assunta. Non restano ormai a determinarsi che i coefficienti A, B, C, D, ec.

Assumendo per vera l'equazione (X) dovrà parimenti sussistere anche la

$(Y)\quad (1+y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{ec.}$

e sottraendo questa dalla prima, si avrà

$$(1+x)^m - (1+y)^m = A(x-y) + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + D(x^4-y^4) + \text{ec.}$$

Dividendo il 2.° membro per $x-y$, ed il primo per la quantità equivalente $(1+x)-(1+y)$, si avrà

$$\frac{(1+x)^m-(1+y)^m}{(1+x)-(1+y)} =$$

$$\frac{A + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + D(x^4-y^4)}{x-y} + \text{ec.}$$

Ma per essere generalmente

$$\frac{p^m-q^m}{p-q} = p^{m-1} + p^{m-2}q + p^{m-3}q^2 + \ldots + q^{m-1},$$

effettuando la divisione indicata in ciascun membro, si avrà per quoto

$$(1+x)^{m-1} + (1+x)^{m-2}(1+y) + (1+x)^{m-3}(1+y)^2 + \ldots + (1+y)^{m-1} =$$

$$A + B(x+y) + C(x^2+xy+y^2) + D(x^3+x^2y + xy^2+y^3) + \text{ec.}$$

Ponendo poi, com'è in nostro arbitrio, $x=y$, quest'equazione diventerà

$$m(1+x)^{m-1} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec.}$$

Moltiplicando ciascun membro per $1+x$, sarà

$$m(1+x)^m = (1+x)(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec.})$$

e rimettendo nel primo membro in luogo di $(1+x)^m$ il suo valore tolto dall'equazione (X) e facendo il prodotto indicato nel secondo, si avrà l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & m + mAx + mBx^2 + mCx^3 + \text{ec.} = \\ & A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ec.} \\ & \quad + Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + \ldots \end{aligned}$$

Quindi paragonando i coefficienti omologi di ciascun membro si avranno le seguenti equazioni determinatrici dei coefficienti, cioè

$$\begin{aligned} A &= m \\ 2B &= (m-1)A \\ 3C &= (m-2)B \\ 4D &= (m-3)C \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

che danno

$$\begin{aligned} A &= m \\ B &= \frac{m(m-1)}{2} \\ C &= \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3} \\ D &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4} \\ &\text{ec.}; \end{aligned}$$

onde la serie rappresentatrice della potenza binomiale $(1+x)^m$ avrà i coefficienti delle potenze ascendenti di x come si sono ora trovati, cioè sarà

$$(1+x)^m = 1 + mx +$$

$$\frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}x^3 + \text{ec.},$$

e questa serie non si romperà che nel caso di m intiero e positivo, com'è noto anche dall'Algebra elementare. Si vede poi che ponendo $x = \frac{b}{a}$, sarà

$$(1+x)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m = \frac{(a+b)^m}{a^m};$$

onde se sostituiremo nell' equazione trovata $\frac{b}{a}$ invece di x, e moltiplicheremo ciascun membro per a^m, avremo

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \, . \, 3}a^{m-3}b^3 + \text{ec.}$$

che è la formola comune del binomio newtoniano.

Questa dimostrazione dovuta a *Landen*, non supponendo per m nessun valore o forma particolare, è affatto generale qualunque sia m, cioè frazionario, irrazionale, o trascendente. Vedremo in seguito come si possa sviluppare la stessa formola binomiale secondo le potenze ascendenti di m.

§. 136. Si può rappresentare un binomio di esponente negativo per mezzo di una serie che si rompa dopo alcuni termini. Facciasi difatti $b = -\frac{ay}{a+y}$, e sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si avrà

$$\left(a - \frac{ay}{a+y}\right)^m = \frac{a^{2m}}{(a+y)^m} = a^m - ma^m\frac{y}{a+y} + \frac{m(m-1)}{2}a^m\frac{y^2}{(a+y)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \, . \, 3}a^m\frac{y^3}{(a+y)^3} + \text{ec.}$$

e dividendo dall' una, e dall' altra parte per a^{2m}, si avrà

$$(a+y)^{-m} = a^{-m}\left(1 - m\frac{y}{a+y} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{y^2}{(a+y)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \, . \, 3}\frac{y^3}{(a+y)^3} + \text{ec.}\right),$$

serie la quale visibilmente si rompe dopo alcuni termini.

Viceversa si può sviluppare un binomio di esponente positivo in una serie infinita: basta che nell' ultima equazione si cangi $-m$ in n, e si avrà

$$(a+y)^n = a^n\left(1 + n\frac{y}{a+y} + \frac{n(n+1)}{2}\frac{y^2}{(a+y)^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2\,.\,3}\frac{y^3}{(a+y)^3} + \text{ec.}\right),$$

serie che progredisce all' infinito.

Quest' ultima si può applicare con vantaggio all' estrazione delle radici dai numeri. Si cangi n in $\frac{1}{2}$, ed a in c^2, e si avrà

$$\sqrt{(c^2+y)} = c\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y}{c^2+y} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{y^2}{(c^2+y)^2} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{y^3}{(c^2+y)^3} + \text{ec.}\right).$$

Cangiando n in $\frac{1}{3}$, ed a in c^3 avremo similmente

$$\sqrt[3]{(c^3+y)} = c\left(1 + \frac{1}{3}\frac{y}{c^3+y} + \frac{1\,.\,4}{3\,.\,6}\frac{y^2}{(c^3+y)^2} + \frac{1\,.\,4\,.\,7}{3\,.\,6\,.\,9}\frac{y^3}{(c^3+y)^3} + \text{ec.}\right);$$

e per ugual ragione

$$\sqrt[4]{(c^4+y)} = c\left(1 + \frac{1}{4}\frac{y}{c^4+y} + \frac{1\,.\,5}{4\,.\,8}\frac{y^2}{(c^4+y)^2} + \frac{1\,.\,5\,.\,9}{4\,.\,8\,.\,12}\frac{y^3}{(c^4+y)^3} + \text{ec.}\right)$$

Chiunque può continuar queste formole, e farne delle applicazioni alle radici de' numeri.

§. 137. *Prop.* Sviluppare in serie secondo le potenze ascendenti di x i due binomj irrazionali

$$[1+\sqrt{(1-x^2)}]^m,\ [1-\sqrt{(1-x^2)}]^m.$$

Giacchè ciascuna di queste formole rimane la medesima al cangiarsi di x in $-x$, si vede che dovranno mancare nello sviluppo le potestà impari di x. Pongasi pertanto

$$[1+\sqrt{(1-x^2)}]^m = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \text{ec.}$$

A fine di trovare i coefficienti A, B, C, ec. si osservi che se si cambia x in $\sqrt{(2x-x^2)}$, ossia x^2 in $2x-x^2$, e quindi $\sqrt{(1-x^2)}$ in $1-x$, la precedente equazione diventerà tutta razionale, cioè

$$(2-x)^m = A + B(2x-x^2) + C(2x-x^2)^2 + D(2x-x^2)^3 + E(2x-x^2)^4 + \text{ec.};$$

e sviluppando le potenze del secondo membro

$$\begin{aligned}(2-x)^m = A + 2Bx - Bx^2 - 4Cx^3 + Cx^4 + \ldots \\ + 4Cx^2 + 8Dx^3 - 12Dx^4 + \ldots \\ + 16Ex^4 - \ldots\end{aligned}$$

Altronde sviluppando il primo membro colla formola newtoniana si ha

$$\begin{aligned}(2-x)^m = 2^m - m\,.\,2^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}2^{m-2}x^2 - \\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}2^{m-3}x^3 + \\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}2^{m-4}x^4 - \text{ec.};\end{aligned}$$

onde paragonando i termini omologi, si avrà

$$\begin{aligned}A &= 2^m \\ 2B &= -m\,.\,2^{m-1} \\ -B + 4C &= \frac{m(m-1)}{2}2^{m-2} \\ -4C + 8D &= -\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}2^{m-3} \\ C - 12D + 16E &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}2^{m-4}\end{aligned}$$

ec.;

e da queste

$$A = 2^m$$

$$B = -m\,.\,2^{m-2}$$

$$C = \frac{m(m-3)}{2}\,2^{m-4}$$

$$D = -\frac{m(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}\,2^{m-6}$$

$$E = \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\,.\,3\,.\,4}\,2^{m-8}$$

ec.,

onde sarà

$$[1+\surd(1-x^2)]^m = 2^m - m\,.\,2^{m-2}x^2 + \frac{m(m-3)}{2}\,2^{m-4}x^4 - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}\,2^{m-6}x^6 + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\,.\,3\,.\,4}\,2^{m-8}x^8 - \text{ec.}$$

Per trovare lo sviluppo del binomio $[1-\surd(1-x^2)]^m$ si osservi che essendo

$$[1+\surd(1-x^2)]^m\,[1-\surd(1-x^2)]^m = x^{2m},$$

sarà

$$[1-\surd(1-x^2)]^m = x^{2m}[1+\surd(1-x^2)]^{-m},$$

e quindi cangiando nella precedente m in $-m$, sarà

$$[1-\surd(1-x^2)]^m = x^{2m}\Big(2^{-m} + m2^{-m-2}x^2 + \frac{m(m+3)}{2}\,2^{-m-4}x^4 + \frac{m(m+4)(m+5)}{2\,.\,3}\,2^{-m-6}x^6 + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{2\,.\,3\,.\,4}\,2^{-m-8}x^8 + \text{ec.}\Big)$$

Facciamo adesso $x = \frac{1}{p}$, e quindi

$$\surd(1-x^2) = \frac{1}{p}\surd(p^2-1),$$

e sarà

$$[1+\sqrt{(1-x^2)}]^m = \frac{[p+\sqrt{(p^2-1)}]^m}{p^m},$$

$$[1-\sqrt{(1-x^2)}]^m = \frac{[p-\sqrt{(p^2-1)}]^n}{p^m}.$$

Togliendo poi il denominatore p^m avremo

$$(M) \quad [p+\sqrt{(p^2-1)}]^m = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \,.\, 3}(2p)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}(2p)^{m-8} - \text{ec.}$$

$$(N) \quad [p-\sqrt{(p^2-1)}]^m = (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2 \,.\, 3}(2p)^{-m-6} + \frac{m(m+5)(m+6)(m+7)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}(2p)^{-m-8} + \text{ec.}$$

Le formole (M), (N) ci saranno utili in seguito.

§. 138. *Prop.* Sviluppare in serie il prodotto $(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)(1+a^4x)\ldots(1+a^nx)$.

Pongasi

$$P = (1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots(1+a^nx) = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots+Tx^n.$$

Cangisi x in ax nell' uno e nell' altro membro, e si avrà il nuovo prodotto

$$Q = (1+a^2x)(1+a^3x)(1+a^4x)\ldots(1+a^{n+1}x) = 1+Aax+Ba^2x^2+Ca^3x^3+Da^4x^4+\text{ec.}$$

Ora si vede che se si dà al prodotto P il fattore $1+a^{n+1}x$, e al prodotto Q il fattore $1+ax$, dovrà essere

$$P(1+a^{n+1}x) = Q(1+ax).$$

Se adesso in luogo di P e di Q scriveremo le serie che li rappresentano, e faremo i prodotti indicati, avremo l'equazione identica

$$\left.\begin{array}{l} 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ + a^{n+1}x + Aa^{n+1}x^2 + Ba^{n+1}x^3 + Ca^{n+1}x^4 + \ldots \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} 1 + Aax + Ba^2x^2 + Ca^3x^3 + Da^4x^4 + \ldots \\ + ax + Aa\,x^2 + Ba^3x^3 + Ca^4x^4 + \ldots \end{array}\right\};$$

quindi dal paragone de' coefficienti omologi avremo i valori seguenti; cioè

$$A = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = a\,\frac{(a^n - 1)}{a - 1}$$

$$B = A\,\frac{(a^{n+1} - a^2)}{a^2 - 1} = a^3\,\frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)}$$

$$C = B\,\frac{(a^{n+1} - a\ )}{a^3 - 1} = a^6\,\frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1)(a^{n-2} - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)(a^3 - 1)}$$

$$D = C\,\frac{(a^{n+1} - a^4)}{a\ - 1} =$$

$$a^{10}\,\frac{(a^n - 1)((a^{n-1} - 1)(a^{n-2} - 1)\ (a^{n-3} - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1)(a^3 - 1)(a^4 - 1)}$$

ec.,

onde la serie è determinata, e nella forma, e ne' coefficienti. Si vede poi che questa sarà finita o infinita nel numero de' termini secondo che n sarà finito o infinito.

§. 139. Se nell' equazione (P) precedente si porrà $a = 1$, il primo membro diventerà visibilmente $(1 + x)^n$; ma nel secondo i valori di A, B, C, ec. diventeranno ciascuno $= \frac{0}{0}$ valore insignificante ed indeterminato. Per evitare questo scoglio osserveremo in generale che una formola come sarebbe

$$\frac{p^k - 1}{p^h - 1}$$

potendosi trasformare colla divisione sott' e sopra per $p - 1$ nell' equivalente

$$\frac{p^{k-1} + p^{k-2} + p^{k-3} \ldots + 1}{p^{h-1} + p^{h-2} + p^{h-3} \ldots + 1},$$

facendo $p = 1$, si riduce a $\frac{h}{h}$; quindi i coefficienti di sopra diventeranno rispettivamente

$$A = n$$

$$B = A\frac{(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C = B\frac{(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}$$

$$D = C\frac{(n-4)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}$$

ec.,

che sono i coefficienti medesimi del binomio newtoniano trovati superiormente. In questa dimostrazione però n si suppone soltanto intiero e positivo.

§. 140. *Prop.* Sviluppare in serie il prodotto

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\ldots\ldots(x+n-1).$$

Pongasi questo $= P$ e facciasi

$$(P)\quad (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\ldots(x+n-1) = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + Cx^{n-4}\ldots\ldots + T.$$

Cambiando x in $x+1$ si trasformerà il prodotto in

$$(Q)\quad (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)\ldots(x+n) = (x+1)^{n-1} + A(x+1)^{n-2} + B(x+1)^{n-3} + C(x+1)^{n-4}\ldots\ldots + T.$$

Ma essendo visibilmente

$$P(x+n) = Q(x+1),$$

se moltiplicheremo la serie che rappresenta il valore di P per $x+n$, e quella che rappresenta il valore di Q per $x+1$, ed inoltre svilupperemo in quest' ultima tutte le potenze indicate del binomio $x+1$ avremo l' equazione identica

$$\left.\begin{array}{l} x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots \\ \quad + n x^{n-1} + nAx^{n-2} + \ldots + nT \end{array}\right\} =$$

$$\begin{array}{l} x^n + (n-1)x^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} x^{n-2} + \ldots \\ \quad + Ax^{n-1} + (n-2)Ax^{n-2} + \ldots \\ \qquad\qquad + Bx^{n-2} + \ldots \\ \qquad\qquad\quad \text{ec.} \\ \quad + x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 1 \\ \qquad\qquad + A x^{n-2} + \ldots + A \\ \qquad\qquad\quad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + T; \end{array}$$

e dal paragone de' coefficienti omologi (fatte alcune riduzioni in quelli del 2.° membro) si avranno le equazioni

$$n + A = n + A$$

$$nA + B = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)A + B$$

$$nB + C = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A + (n-2)B + C$$

ec.

$$nT \quad = 1 + A + B + C + \ldots\ldots + T.$$

Dalla seconda e dalle seguenti si ricava

$$A = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$2B = \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}A$$

$$3C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3}A + \frac{(n-2)(n-3)}{2}B$$

ec.

$$(n-1)T = 1 + A + B + C + \ldots\ldots + S.$$

I coefficienti A, B, $C \ldots T$, per la teoria delle equazioni, sono le somme rispettive dei numeri 1, 2, 3, 4, ..., $n-1$, dei loro binarj, dei loro ternarj, ec., e finalmente T è il prodotto di tutti; onde A, B, C, ec. sono tutti numeri intieri. Inoltre, se n è un numero primo, essendo A divisibile per n lo sarà anche B, come si vede se si mette nella seconda delle equazioni precedenti il valore di A; e se lo è B lo sarà anche C per la stessa ragione, e così discorrendo i coefficienti da A fino ad S inclusivamente saranno tutti divisibili per n. E' poi chiaro che se n non fosse un numero primo questo discorso non varrebbe, giacchè se fosse per esempio $n = pq$, siccome questi stessi fattori p, q cadrebbero anche ne' denominatori dei valori di A, B, C, ec., perciò eliderebbero n nel numeratore, che non resterebbe più divisibile per n. Ma l' ultimo T non lo sarà se non dopo che sarà aumentato dell' unità. Difatti avendosi dall' ultima equazione

$$T + 1 = nT - A - B - C \ldots - S$$

si vede che essendo il 2.º membro divisibile per n, lo dovrà essere anche il primo. Ma si è detto essere $T =$ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)$; dunque se n è numero primo, il numero

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) + 1$$

dovrà sempre esser divisibile per n.

Questo è il teorema di *Gio. Wilson* annunziato da *Waring*, e dimostrato da *Lagrange*, che contiene un criterio per distinguere i numeri primi, ma poco utile in pratica pel rapido ingrandimento che riceve il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$.

§. 141. Ritenendo sempre n numero primo, ed x un numero tale che non sia nè zero, nè della forma $\mu n + \rho$, essendo ρ un numero qualunque intiero minore di n; ed

essendo altronde il primo membro dell' uguaglianza
$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n-1) = x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3}\ldots + T$$
sempre divisibile per n (giacchè lo dev' essere necessariamente qualcheduno dei fattori $x+1$, $x+2$, ec.), si vede che anche il secondo membro dovrà esser divisibile per n. Ma A, B, C, ec. fino al penultimo S sono tutti divisibili per n; e sostituendo invece di T il valore equivalente $-1+nT-A-B-C\ldots-S$, in cui tutti i termini, fuorchè l' unità, sono divisibili per n, si vede che la precedente uguaglianza diventando
$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n-1) = x^{n-1} - 1 + Ax^{n-2} + Bx^{n-3}\ldots + Sx + nT - A - B - C\ldots - S$$
dovrà anche $x^{n-1}-1$ esser divisibile per n.

Questo è il famoso teorema di *Fermat*.

Resterebbe ora a sviluppare in serie le frazioni razionali, ma di queste parleremo a parte trattando delle serie ricorrenti.

Art. III.

Regresso delle serie.

§. 142. *Prop.* Data l' equazione

(1) $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.}$

in cui l' indeterminata y è rappresentata per mezzo di una serie di potenze della x, trovare x per mezzo di una serie di potenze di y.

Questo è il principal problema, su di cui si fonda il regresso delle serie: egli potrebbe concepirsi sotto un significato più esteso, ma noi ci limitiamo a questo solo.

Fingasi

(2) $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{ec.}$

Facendo le successive potenze di ciascun membro di questa nuova equazione, si avrà

$$\begin{array}{llll}
x^2 = & A^2y^2 + 2ABy^3 + & 2ACy^4 & + \text{ec.} \\
 & & + \ B^2y^4 & \\
x^3 = & A^3y^3 + & 3A^2By^4 & + \text{ec.} \\
x^4 = & & A^4y^4 & + \text{ec.} \\
\text{ec.} & & \text{ec.} &
\end{array}$$

Sostituite queste nell' equazione (1), essa diventerà

$$y = Aay \begin{matrix} + Ba \\ \\ + A^2b \end{matrix} \Bigg\} y^2 \begin{matrix} + Ca \\ + 2ABb \\ + A^3c \end{matrix} \Bigg\} y^3 \begin{matrix} + Da \\ + 2ACb \\ + B^2b \\ + 3A^2Bc \\ + A^4d \end{matrix} \Bigg\} y^4 + \text{ec.}$$

Paragonando i coefficienti omologi avremo

$Aa = 1$, $Ba + A^2b = 0$, $Ca + 2ABb + A^3c = 0$,
$Da + 2ACb + B^2b + 3A^2Bc + A^4d = 0$, ec.,

e da queste

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{2b^2 - ac}{a^5};$$

$$D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7},$$

e similmente si troverebbe continuando il calcolo

$$E = \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}; \text{ ec.}$$

i quali valori posti nell' equazione (2) risolvono il problema.

Esempio. Abbiam poco sopra trovato lo sviluppo del binomio

$(1+x)^m = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.}$,

dove i coefficienti sono

$$a = m$$

$$b = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$c = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \,.\, 3}$$

$$d = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

ec.

Se dunque faremo $(1+x)^m - 1 = y$, avremo

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.};$$

e per esprimere x per mezzo di y, non avremo che a porre ne' precedenti valori di A, B, C, ec. quelli di a, b, c, ec., con che avremo

$$A = \frac{1}{m}$$

$$B = -\frac{(m-1)}{2m^2}$$

$$C = \frac{(m-1)(2m-1)}{2 \,.\, 3m^3}$$

$$D = -\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4m^4}$$

ec.,

e perciò

$$x = \frac{y}{m} - \frac{(m-1)}{2m^2}y^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{2 \,.\, 3m^3}y^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4m^4}y^4 + \text{ec.},$$

serie che si rompe se m ha alcuno de' valori 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ec.

L' equazione $(1+x)^m - 1 = y$, ridotta alla forma

$$x = -1 + (1+y)^{\frac{1}{m}}$$

fatto lo sviluppo ci avrebbe condotto allo stesso risultato.

CAPO XVI.

Delle funzioni logaritmiche ed esponenziali.

ART. I.

Alcune nozioni su i Logaritmi.

§. 143. Un numero qualunque y può esser rappresentato dalla formola *esponenziale* a^x, in cui a è una quantità arbitraria, ma invariabile dopo che se n' è fissato il valore, e che si chiama *base*: l' esponente x è una variabile, che può prendere tutti i valori sì positivi che negativi dallo zero fino all' infinito, affinchè a^x possa rappresentare tutti i numeri possibili. Se dunque nell' equazione

$$y = a^x$$

daremo al numero y un valor determinato b, anche x dovrà acquistare un valore particolare m che renda

$$b = a^m.$$

Questo valore di m si chiama il *logaritmo* del numero b; ed in generale l' esponente x della potestà generica a^x è il logaritmo del numero y rappresentato dalla potestà medesima. Diamo ad x successivamente i valori compresi nella progressione aritmetica de' numeri naturali estesa indefinitamente a destra ed a sinistra

$$\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

ed i valori corrispondenti di y saranno

$$\ldots\ldots a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots$$

dove si vede che qualunque sia il valore di a, si avrà sempre 1.° il logaritmo della base $=1$; 2.° il logaritmo dell'unità $=0$; 3.° i logaritmi delle potestà positive della base tutti positivi, e negativi quelli che corrispondono alle potestà negative, o sia alle potestà inverse della base

come $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, ec.

§. 144. Siccome a è una quantità arbitraria, perciò al cangiarsi di questa si cangerebbe il *sistema logaritmico*, ed infiniti sarebbero i sistemi possibili. Fra questi però i soli usitati sono due, cioè il sistema di *Enrico Briggs*, in cui si pone $a=10$, e quello di *Neper*, in cui a ha il valore 2,7182818.... I logaritmi del primo sistema si chiamano *tavolari*, *comuni*, o *briggiani*; quelli del secondo si dicono *naturali*, *iperbolici*, o *neperiani*. Ciascuno di questi sistemi ha i suoi vantaggi particolari: il sistema di *Briggs* è il più comodo pel calcolo pratico e per la costruzione delle tavole; quello di *Neper* pel calcolo algebrico, e massime per l'Analisi sublime.

Il passaggio da un logaritmo preso in un sistema al logaritmo dello stesso numero relativamente ad un altro sistema è una cosa di tutta la facilità. Sia a la base di un sistema, e quella di un altro: sia n un numero qualunque, di cui si cerca il logaritmo in entrambi i sistemi: si avranno le due equazioni

$$n=a^x,\quad n=e^z$$

e quindi ancora $a^x=e^z$. Cavando la radice di grado z, si avrà $a^{\frac{x}{z}}=e$, e cavando invece la radice di grado x, si ottiene $a=e^{\frac{z}{x}}$. Indichiamo colla sillaba *log.* il logaritmo di base a, e colla sillaba *Log.* quello di base e, ed avremo in vigore delle definizioni

$$\frac{x}{z} = log.\,e \quad ; \quad \frac{z}{x} = Log.\,a\,,$$

ovvero

$$\frac{log.\,n}{Log.\,n} = log.\,e \quad ; \quad \frac{Log.\,n}{log.\,n} = Log.\,a\,.$$

Dalla prima abbiamo

$$log.\,n = log.\,e\,.\,Log.\,n\,,$$

e dalla seconda

$$Log.\,n = Log.\,a\,.\,log.\,n\,.$$

Sì l' una che l' altra c' insegnano che il logaritmo di un numero preso in un sistema si uguaglia al logaritmo del medesimo preso nel secondo sistema, moltiplicato pel logaritmo della base del secondo preso nel primo sistema. Di più adoperando tutte e due queste equazioni, si trova

$$Log.\,a = \frac{1}{Log.\,e}\,,$$

onde si ha

$$log.\,n = log.\,e\,.\,Log.\,n$$

$$Log.\,n = \frac{1}{log.\,e}\,.\,log.\,n\,.$$

Così ponendo $a = 10$, $e = 2,7182818$, e trovandosi per mezzo delle tavole comuni $log.\,e = 0,4342945$, e quindi $\frac{1}{log.\,e} = 2,3025851 = Log.\,10$, si ottiene

$$log.\,n = (0,4342945)\,Log.\,n$$

$$Log.\,n = (2,3025851)\,log.\,n\,.$$

Colla prima di queste si trova il logaritmo tavolare per mezzo dell' iperbolico; colla seconda l' iperbolico per mezzo del tavolare.

Art. II.

Sviluppo in serie delle funzioni logaritmiche.

§. 145. *Prop.* Sviluppare in serie secondo le potenze ascendenti di x il logaritmo del binomio $1+x$ per un sistema qualunque.

Pongasi

$$(a)\quad log(1+x)=$$
$$Ax+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+A_5x^5+\ldots$$

dove omettiamo il termine senz' x, perchè nel caso di $x=0$ riducendosi il primo membro a $log.1$, che in ogni sistema è $=0$ (§. 143), quello si troverebbe $=0$. Se cangiamo x in $-x$, avremo

$$(b)\quad log.(1-x)=$$
$$-Ax-A_2x^2-A_3x^3-A_4x^4-A_5x^5-\ldots,$$

e sottraendo questa dalla precedente serie otterremo

$$(c)\quad log.(1+x)-log.(1-x)=$$
$$log.\frac{1+x}{1-x}=log.\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=$$
$$2Ax+2A_3x^3+2A_5x^5+\ldots$$

Ma altronde è chiaro che se nella (a) si cangia x in $\frac{2x}{1-x}$, si dovrà ottenere ancora

$$log.\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=\frac{2Ax}{1-x}+\frac{4A_2x^2}{(1-x)^2}+\frac{8A_3x^3}{(1-x)^3}+$$
$$\frac{16A_4x^4}{(1-x)^4}+\frac{32A_5x^5}{(1-x)^5}+\ldots;$$

e sviluppando in serie tutti i denominatori, ed ordinando opportunamente i termini, avremo

$$log.\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)=$$

$$\begin{array}{l} 2Ax + 2Ax^2 + 2Ax^3 + 2Ax^4 + 2Ax^5 + \ldots \\ \quad + 4A_2x^2 + 8A_2x^3 + 12A_2x^4 + 16A_2x^5 + \ldots \\ \quad\quad + 8A_3x^3 + 24A_3x^4 + 48A_3x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad + 16A_4x^4 + 64A_4x^5 + \ldots \\ \quad\quad\quad\quad + 32A_5x^5 + \ldots, \end{array}$$

Uguagliando pertanto i due valori di $log.\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)$ avremo le equazioni

$$2A = 2A$$
$$2A + 4A_2 = 0$$
$$2A + 8A_2 + 8A_3 = 2A_3$$
$$2A + 12A_2 + 24A_3 + 16A_4 = 0$$
$$2A + 16A_2 + 48A_3 + 64A_4 + 32A_5 = 2A_5$$

e in genere

$$2A_1 + 2^2 . mA_2 + 2^3 . \frac{m(m-1)}{2} A_3 + 2^4 . \frac{m(m-1)(m-2)}{2 . 3} A_4 + 2^5 . \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 . 3 . 4} A_5$$
$$+ \ldots + 2^{m+1} . A_{m+1} = \begin{array}{l} 2A_{m+1}, \text{ se } m \text{ pari}, \\ 0 \quad, \text{ se } m \text{ dispari}. \end{array}$$

Da queste si ricava

$$A_2 = -\frac{A}{2}$$
$$A_3 = \frac{A}{3}$$
$$A_4 = -\frac{A}{4}$$

e in genere

$$A_m = \pm \frac{A}{m},$$

dove vale il $+$ per m dispari, ed il $-$ per m pari.

Sostituendo questi valori nelle serie (a), (b), e (c), si avranno le corrispondenti

(1) $log.(1+x) =$

$$A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ec.}\right)$$

(2) $log.(1-x) =$

$$-A\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \text{ec.}\right)$$

(3) $log.\frac{1+x}{1-x} =$

$$2A\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ec.}\right),$$

l'ultima delle quali, attesa la mancanza delle potenze pari di x, nel supposto di $x < 1$, è più convergente, e perciò più utile delle precedenti.

Il coefficiente A, che opportunamente ci è rimasto indeterminato e che dipende dal nostro arbitrio, si chiama il *modulo* del sistema de' logaritmi, che si vorrà adottare. Nel sistema di *Neper* si fa $A=1$, e le serie precedenti diventano più semplici.

Per trovare il modulo d'un altro sistema di base a, si faccia nella serie (3) $\frac{1+x}{1-x}=a$, e quindi $x=\frac{a-1}{a+1}$, ed essa, in grazia di $log.a=1$, diventerà

$$1 = 2A\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{ec.}\right),$$

da cui colla somma di alcuni termini si avrà il valor prossimo di A per mezzo di quello di a. Se dunque faremo, come ne' logaritmi di *Briggs*, $a=10$, avremo

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \text{ec.}\right)} = 0,4342945$$

che coincide perfettamente col valore di *log.e* trovato di sopra (§. 144). Tal è dunque il modulo de' logaritmi briggiani.

§. 146. *Osserv.* Le tre serie (1), (2), (3) per essar convergenti suppongono $x < 1$: se mancasse questa condizione, esse sarebber divergenti, e non rappresenterebbero più ciò che debbono rappresentare. Per render convergente la prima anche in questo caso, poniamo

$$x = -\frac{y}{1+y},$$

e sarà

$$1 + x = \frac{1}{1+y},$$

onde la serie (1) diventerà

$$\log.\frac{1}{1+y} = -\log.(1+y) =$$

$$A\left(-\frac{y}{1+y} - \frac{y^2}{2(1+y)^2} - \frac{y^3}{3(1+y)^3} - \frac{y^4}{4(1+y)^4} - \text{ec.}\right);$$

onde cambiando di nuovo y in x ed i segni di ciascun membro, si avrà

(4) $\log.(1+x) =$

$$A\left(\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \frac{x^4}{4(1+x)^4} + \text{ec.}\right)$$

serie evidentemente convergente.

Se si vorrà rappresentare per mezzo della serie (1) il logaritmo di un binomio qualunque $p + q$, questo si porrà sotto la forma $\left(1 + \frac{q}{p}\right)p$, ovvero $\left(1 + \frac{p}{q}\right)q$ secondo che sarà $p >$ ovvero $< q$, e prendendo il logaritmo si avrà nel primo caso

$$\log.(p+q) = \log.\left(1 + \frac{q}{p}\right) + \log.p,$$

e nel secondo

$$log.(p+q) = log.\left(1+\frac{p}{q}\right) + log.q\,;$$

onde si avrà dalla serie (1)

$$log.(p+q) =$$

$$log.p + A\left(\frac{q}{p} - \frac{q^2}{2p^2} + \frac{q^3}{3p^3} - \frac{q^4}{4p^4} + \text{ec.}\right)$$

ovvero

$$log.(p+q) =$$

$$log.q + A\left(\frac{p}{q} - \frac{p^2}{2q^2} + \frac{p^3}{3q^3} - \frac{p^4}{4q^4} + \text{ec.}\right).$$

Impiegando poi la serie (4) avremo altre due formole, cioè

$$log.(p+q) = log.p +$$

$$A\left(\frac{q}{p+q} + \frac{q^2}{2(p+q)^2} + \frac{q^3}{3(p+q)^3} + \frac{q^4}{4(p+q)^4} + \text{ec.}\right)$$

ovvero

$$log.(p+q) = log.q +$$

$$A\left(\frac{p}{p+q} + \frac{p^2}{2(p+q)^2} + \frac{p^3}{3(p+q)^3} + \frac{p^4}{4(p+q)^4} + \text{ec.}\right)$$

delle quali formole sempre convergenti sarà più vantaggiosa la prima o la seconda a norma che sarà q minore ovvero maggiore di p.

§. 147. *Prop.* Rendere più convergente la serie (3), e quindi più atta alla formazione delle tavole logaritmiche.

Primo modo. Si ponga $\frac{1+x}{1-x} = \frac{(n-1)^2\,(n+2)}{(n+1)^2\,(n-2)}$, e dopo lo sviluppo e le riduzioni si avrà $x = \frac{2}{n^3-3n}$. Posti questi valori nell' equazione (3) ne nascerà

$$log.\frac{(n-1)^2\,(n+2)}{(n+1)^2\,(n-2)} =$$

$$2A\left\{\frac{2}{n^3-3n} + \frac{2^3}{3(n^3-3n)^3} + \frac{2^5}{5(n^3-3n)^5} + \text{ec.}\right\}$$

Se si riflette che ponendo per n un numero qualunque intiero e positivo, $n^3 - 3n$ è sempre un numero pari, si comprende che usciranno dalla serie tutte le potenze 2, 2^3, 2^5, ec., che si trovano ne' numeratori, e quindi che tanto per la forma de' termini quanto per la rapida convergenza questa serie, immaginata da *M. Borda*, è comodissima al calcolo numerico. Si vede poi che prendendo i fattori del prodotto compreso nel primo membro, ed indicando con S la serie del secondo si avrà

$$log.(n+2) =$$

$$2\,log.(n+1) + log.(n-2) - 2\,log.(n-1) + 2AS,$$

onde conosciuti i logaritmi di $n+1$, $n-2$, $n-1$ si potrà ottenere per mezzo di questi e della somma della serie quello di $n+2$. Si dee però avvertire che nella somma della serie non si dovranno prendere che quei termini iniziali, che possono influire sul numero delle cifre decimali, che si vorranno dare al logaritmo cercato, trascurando gli altri. Inoltre il valore di n non potrà essere nè $=$, nè < 0, altrimenti o si urterebbe contro $log.\,0$, che è l'infinito negativo, o in logaritmi di quantità negative, che si hanno comunemente per impossibili.

Secondo modo. Si ponga $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{(n^2-a^2)(n^2-b^2)}{n^2(n^2-c^2)}$,

e troveremo $x = \dfrac{(n^2-a^2)(n^2-b^2) - n^2(n^2-c^2)}{n^2(n^2-c^2) + (n^2-a^2)(n^2-b^2)}$.

Questo valore si semplifica notabilmente, se dopo eseguiti i prodotti si fa $c^2 = a^2 + b^2$, com'è in nostro arbitrio; e con ciò si avrà $x = \dfrac{a^2 b^2}{2n^4 - 2c^2 n^2 + a^2 b^2}$.

Prendendo poi $a=3$, $b=4$, e quindi $c=5$, che sono i valori intieri e razionali più semplici che soddisfanno all' equazione $c^2 = a^2 + b^2$, avremo finalmente

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{(n^2-9)(n^2-16)}{n^2(n^2-25)},\ x=\frac{72}{n^4-25n^2+72},$$

posti i quali valori nell' equazione (3) si avrà

$$log.\frac{(n^2-9)(n^2-16)}{n^2(n^2-25)}=$$

$$2A\left\{\frac{72}{n^4-25n^2+72}+\frac{(72)^3}{3(n^4-25n^2+72)^3}+\right.$$
$$\left.\frac{(72)^5}{5(n^4-25n^2+72)^5}+\frac{(72)^7}{7(n^4-25n^2+72)^7}+\text{ec.}\right\}$$

che è la celebre formola di *M.' Haros*. In questa pure sviluppando i logaritmi involti nel primo membro, e chiamando S la serie contenuta nel secondo, si avrà

$$log.(n+5)=log.(n+4)+log.(n+3)+log.(n-3)$$
$$+log.(n-4)-2\,log.n-log.(n-5)-2AS,$$

in cui per la ragione superiormente addotta dovrà prendersi $n>5$.

§. 148. *Osserv.* Se nell' equazione del §. 143

$$y=a^x,\ \text{ovvero}\ x=log.y$$

porremo $y=\infty$, avremo $x=\infty$, e perciò

$$log.\ \infty=\infty.$$

Ma se porremo $y=0$, siccome ai numeri minori dell' unità corrispondono logaritmi negativi, sarà $x=-\infty$, e perciò

$$log.\,0=-\infty,$$

come abbiamo asserito nel §. precedente.

Se dunque nell' equazione (2) faremo $x=1$, $A=1$, e cangeremo i segni dall' una e dall' altra parte, troveremo

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{ec.}=-log.\,0=\infty;$$

e se si ponesse $x=1$ nella serie (1), si avrebbe invece

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{ec.}=log.\,2.$$

Art. II.

Funzioni ed equazioni esponenziali.

§. 149. Oltre le quantità a^x, y^z, ec., nelle quali gli esponenti x, z sono quantità variabili semplici, e che si chiamano *esponenziali* di prim' ordine, ve ne sono di quelle in cui l' esponente è una quantità esponenziale egli stesso. Tali sarebbero le espressioni a^{x^u}, y^{b^t}, ec., che sono esponenziali dell' ordine secondo. In simil guisa accrescendosi la scala degli esponenti senza limite, gli ordini della quantità esponenziali saranno infiniti.

Si chiama poi *equazione esponenziale* quella, in cui entrano quantità esponenziali di qualunque sorta. Non si hanno in generale delle regole per risolvere simili equazioni, onde accenneremo soltanto de' casi particolari, ne' quali la risoluzione è possibile.

Data l' equazione $y = a^x$, ovvero $b^y = a^x$, è in nostro arbitrio di prendere i logaritmi di ciascun membro, e di ottenere le equazioni $log. y = x \, log. a$, $y \, log. b = x \, log. a$. Quest' operazione si chiama il passaggio dai numeri ai logaritmi. Ma se da queste ultime coll' operazione inversa si passa alle prime, ciò è passare dai logaritmi ai numeri. Per mezzo di queste operazioni si avrà la risoluzione delle seguenti equazioni:

1.° Se si avrà $a^x = b$, passando ai logaritmi si avrà

$$x \, log. a = log. b;$$

e quindi

$$x = \frac{log. b}{log. a}.$$

2.° Da $\quad a^{mx} b = b^{nx} c$,

si ha $m x \, log. a + log. b = n x \, log. b + log. c$, e quindi

$$x = \frac{\log. c - \log. b}{m \log. a - n \log. b} = \frac{\log. \frac{c}{b}}{\log. \frac{a^m}{b^n}}.$$

3.° Da $\quad a^x c^{qx} = b^{mx-n}$,

si ha $x \log. a + qx \log. c = (mx - n) \log. b$;

ed $x = \dfrac{n \log. b}{m \log. b - \log. a - q \log. c} = \dfrac{\log. b^n}{\log. \frac{b^m}{ac^q}}.$

4.° Sia $\;Aa^x + Ba^{x+m} + Ca^{x+n} + \ldots = b.$

Questa posta sotto la forma

$$a^x(A + Ba^m + Ca^n + \ldots) = b$$

ci dà senza difficoltà

$$x = \frac{\log. b - \log.(A + Ba^m + Ca^n + \ldots)}{\log. a}.$$

5.° Sia finalmente l' equazione

$$Aa^{\frac{mx}{n}} + Ba^{\frac{rx}{s}} = b.$$

Questa equivale a

$$a^{\frac{mx}{n}}\left(A + Ba^{\frac{rx}{s} - \frac{mx}{n}}\right) = b,$$

ovvero, fatto $\dfrac{r}{s} - \dfrac{m}{n} = p$, ad

$$a^{\frac{mx}{n}}\left(A + Ba^{px}\right) = b.$$

Pongasi $A + Ba^{px} = y$, e sarà

$$x \log. a = \frac{\log.(y - A) - \log. B}{p}.$$

Inoltre avendosi $a^{\frac{mx}{n}} y = b$, ne ricaveremo

$$x \log. a = \frac{n}{m}(\log. b - \log. y).$$

Paragonando questi valori avremo l'equazione tutta in y

$$m[\log.(y-A)-\log.B]=np[\log.b-\log.y]$$

e facendo $y=Az$, avremo $np\log.z+m\log.(z-1)=$

$$np\log.b+m\log.B-(np+m)\log.A.$$

Quest' ultima non si saprebbe risolvere che per mezzo di false posizioni. Ma potendosi essa, ripassando ai numeri, eliminando p, e facendo la potenza s^{ma}, ridurre alla forma $\quad z^{nr-ms}(z-1)^{ms}=B^{ms}b^{nr-ms}A^{-nr}$

si vede che dipenderà dalla risoluzione di un' equazione del grado nr.

§. 150. *Prop.* Sviluppare in serie la funzione esponenziale c^z.

Giacchè abbiamo dalla serie (1) del §. 145

$$y=\log.(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right),$$

in cui è $y=0$ quando $x=0$, fingiamo giusta il §. 142

$$x=by+cy^2+dy^3+fy^4+\ldots\ldots,$$

e sarà

$$\begin{aligned}
x^2 &= b^2y^2+2bcy^3+2bdy^4+\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\;\; +\;\; c^2y^4+\ldots\ldots\\
x^3 &= \qquad\quad b^3y^3+3b^2cy^4+\ldots\ldots\\
x^4 &= \qquad\qquad\qquad\quad b^4y^4+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ec.,

onde si avrà

$$\begin{aligned}
y = Aby+Acy^2&+Ady^3+Afy^4+\ldots\ldots\\
-\frac{Ab^2}{2}y^2&-Abcy^3-Abdy^4+\ldots\ldots\\
&+\frac{Ab^3}{3}y^3-\frac{Ac^2}{2}y^4+\ldots\ldots\\
&\qquad\quad +Ab^2cy^4+\ldots\ldots\\
&\qquad\quad -\frac{Ab^4}{4}y^4+\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

e da qui le equazioni, dalle quali si ha

$$Ab = 1 \qquad b = \frac{1}{A}$$

$$A\left(c - \frac{b^2}{2}\right) = 0 \qquad c = \frac{1}{2A^2}$$

$$A\left(d - bc + \frac{b^3}{3}\right) = 0 \qquad d = \frac{1}{2.3A^3}$$

$$A\left(f - bd - \frac{c^2}{2} + b^2c - \frac{b^4}{4}\right) = 0 \qquad f = \frac{1}{2.3.4A^4}$$

ec. ec.

onde ponendo questi valori in luogo delle indeterminate b, c, d, ec., e $log.(1+x)$ invece di y, ed aggiungendo l'unità dall'una e dall'altra parte, avremo

$$(5) \quad 1 + x = 1 + \frac{log.(1+x)}{A} + \frac{log.^2(1+x)}{2A^2} + \frac{log.^3(1+x)}{2.3A^3} + \frac{log.^4(1+x)}{2.3.4A^4} + \text{ec.}$$

Ponendo poi il numero $1 + x = c^z$, e quindi $log.(1+x) = z\,log.c$, si otterrà

$$(6) \quad c^z = 1 + \frac{z\,log\,c}{A} + \frac{z^2\,log.^2\,c}{2A^2} + \frac{z^3\,log.^3\,c}{2.3A^3} + \frac{z^4\,log.^4\,c}{2.3.4A^4} + \text{ec.},$$

che è lo sviluppo domandato della formola esponenziale c^z.

§. 151. Se c sarà la base del sistema logaritmico, che indicheremo con a, sarà $log.c = log.a = 1$, e quindi

$$a^z = 1 + \frac{z}{A} + \frac{z^2}{2A} + \frac{z^3}{2.3A^3} + \frac{z^4}{2.3.4A^4} + \text{ec.},$$

e facendo $z = 1$,

$$a = 1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2.3A^3} + \frac{1}{2.3.4A^4} + \text{ec.},$$

equazione da cui dato il modulo A si ricava la base a.

Pei logaritmi di base e, cioè pei neperiani, si avrà l'equazione

$$(7)\quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \text{ec.},$$

e nel caso di $z = 1$,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{ec.}$$

serie di moltissima convergenza e facilissima a sommarsi, da cui si ricava

$e = 2,7182818$ in circa,

che è appunto la base de' logaritmi neperiani, da noi usurpata al §. 144.

Se cangeremo z in $-z$ avremo del pari

$$(8)\quad e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \text{ec.}$$

§. 152. Se si hanno due quantità esponenziali b^x, c^x di diversa base, prendendo per l'una e per l'altra il modulo neperiano $= 1$, si avrà congiuntamente

$$b^x = 1 + x\,log.\,b + \frac{x^2}{2}\,log.^2 b + \frac{x^3}{2.3}\,log.^3 b + \frac{x^4}{2.3.4}\,log.^4 b + \text{ec.}$$

$$c^x = 1 + x\,log.\,c + \frac{x^2}{2}\,log.^2 c + \frac{x^3}{2.3}\,log.^3 c + \frac{x^4}{2.3.4}\,log.^4 c + \text{ec.}$$

e sottraendo l'una dall'altra queste equazioni

$$(9)\quad b^x - c^x = x(log.\,b - log.\,c) + \frac{x^2}{2}(log.^2 b - log.^2 c) + \frac{x^3}{2.3}(log.^3 b - log.^3 c) + \frac{x^4}{2.3.4}(log.^4 b - log.^4 c) + \text{ec.}$$

formola di molta utilità nel Calcolo Integrale.

Se nella serie (5) porremo $1 + x = n$, avremo la

$$(10)\quad n = 1 + \frac{log.\,n}{A} + \frac{log.^2 n}{2A^2} + \frac{log.^3 n}{2.3\,A^3} + \frac{log.^4 n}{2.3.4\,A^4} + \text{ec.}$$

equazione che scioglie il problema: dato il logaritmo di un numero, ed il modulo del sistema, trovare il numero corrispondente.

Finalmente se nella serie (6) porremo $1+x$ invece di c, m invece di z, e prenderemo $A=1$, avremo

$$(11)\quad (1+x)^m = 1 + m\,log.(1+x) + \frac{m^2}{2}log.^2(1+x) + \frac{m^3}{2.3}log.^3(1+x) + \text{ec.};$$

e se si ponesse $x=\frac{b}{a}$, poi si moltiplicasse dall' una e dall' altra parte per a^m, si otterrebbe

$$(12)\quad (a+b)^m = a^m\left[1 + m\,log.\left(1+\frac{b}{a}\right) + \frac{m^2}{2}log.^2\left(1+\frac{b}{a}\right) + \frac{m^3}{2.3}log.^3\left(1+\frac{b}{a}\right) + \text{ec.}\right];$$

che è lo sviluppo del binomio, ordinato secondo le potenze ascendenti dell' esponente (§ 135).

CAPO XVII.

Delle funzioni circolari.

Art. I.

Formole trigonometriche.

§. 153. Dovendo noi supporre i nostri lettori bastantemente istrutti di tutto ciò che concerne la Trigonometria elementare, ed essendo altronde necessario che essi abbiano sott' occhio le principali formole, delle quali è tanto frequente l'uso nell' Analisi superiore, abbiam creduto di radunarle in un sol quadro, lasciando poi che ognun ne deduca la dimostrazione dalle dottrine elementari, ovvero la cerchi nei trattati di Trigonometria, di cui abbondiamo, sopra tutto in quello del Sig. *Cagnoli.* In queste noi supponiamo sempre il raggio $= 1$, π la semiperiferia circolare, x, y due archi contigui.

1 $sen.^2 x + cos.^2 x = 1$, $tang. x = \frac{sen. x}{cos. x}$, $cot. x = \frac{cos. x}{sen. x} = \frac{1}{tang. x}$, $sec. x = \frac{1}{cos. x}$, $cosec. x = \frac{1}{sen. x}$

2 $sen. - x = - sen. x$, $cos. - x = cos. x$,
$tang. - x = - tang. x$, $cot. - x = - cot. x$

3 $sen.(x \pm y) = sen. x \, cos. y \pm cos. x \, sen. y$

4 $cos.(x \pm y) = cos. x \, cos. y \mp sen. x \, sen. y$

5 $sen. 2x = 2 \, sen. x \, cos. x$

6 $cos. 2x = cos.^2 x - sen.^2 x = 2 \, cos.^2 x - 1 = 1 - 2 \, sen.^2 x$

7 $sen. \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - cos. x}{2}} = \frac{\sqrt{(1 + sen. x)} - \sqrt{(1 - sen. x)}}{2}$

8 $\cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\cos.x}{2}} = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sen}.x)}+\sqrt{(1-\operatorname{sen}.x)}}{2}$

9 $\operatorname{tang}.(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang}.x \pm \operatorname{tang}.y}{1 \mp \operatorname{tang}.x \operatorname{tang}.y}$

10 $\operatorname{tang}.2x = \frac{2\operatorname{tang}.x}{1-\operatorname{tang}.^2 x}$

11 $\operatorname{tang}.\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos.x}{\operatorname{sen}.x} = \frac{\operatorname{sen}.x}{1+\cos.x} =$

$\frac{\operatorname{tang}.x}{1+\sqrt{(1+\operatorname{tang}.^2 x)}} = \sqrt{\frac{1-\cos.x}{1+\cos.x}}$

12 $\cot.x = \frac{\cot.\frac{1}{2}x - \operatorname{tang}.\frac{1}{2}x}{2}$

13 $\cot.(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{tang}.x \operatorname{tang}.y}{\operatorname{tang}.x \pm \operatorname{tang}.y} = \frac{-1 \pm \cot.x \cot.y}{\cot.x \pm \cot.y}$

14 $\cot.2x = \frac{1-\operatorname{tang}.^2 x}{2\operatorname{tang}.x} = \frac{-1+\cot.^2 x}{2\cot.x}$

15 $\cot.\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos.x}{\operatorname{sen}.x} = \frac{\operatorname{sen}.x}{1-\cos.x}$

16 $\sec.(x \pm y) = \frac{\sec.x \sec.y}{1 \mp \operatorname{tang}.x \operatorname{tang}.y} = \frac{1}{\cos.(x \pm y)}$

17 $\sec.2x = \frac{1}{\cos.2x} = \frac{\sec.^2 x}{2-\sec.^2 x} = \frac{1+\operatorname{tang}.^2 x}{1-\operatorname{tang}.^2 x}$

18 $\sec.\frac{1}{2}x = \frac{1}{\cos.\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{2}{1+\cos.x}} =$

$\sqrt{\frac{2\sec.x}{1+\sec.x}}$

19 $\operatorname{cosec}.(x \pm y) = \frac{\sec.x \sec.y}{\operatorname{tang}.x \pm \operatorname{tang}.y}$

20 $\operatorname{cosec}.2x = \frac{\sec.^2 x}{2\operatorname{tang}.x} = \frac{1}{\operatorname{sen}.2x} = \frac{1}{2\operatorname{sen}.x \cos.x}$

21 $cosec.\frac{1}{2}x \quad = \frac{1}{sen.\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{2}{1-cos.x}} =$

$\sqrt{\frac{2\,sec.x}{sec.x-1}}$

22 $sen.x\,cos.y \quad = \frac{1}{2}sen.(x-y) + \frac{1}{2}sen.(x+y)$

23 $cos.x\,cos.y \quad = \frac{1}{2}cos.(x-y) + \frac{1}{2}cos.(x+y)$

24 $sen.x\,sen.y \quad = \frac{1}{2}cos.(x-y) - \frac{1}{2}cos\,(x+y)$

25 $sen.x + sen.y = 2\,sen.\frac{x+y}{2}\,cos.\frac{x-y}{2}$

26 $sen.x - sen.y = 2\,sen.\frac{x-y}{2}\,cos.\frac{x+y}{2}$

27 $cos.x + cos.y = 2\,cos.\frac{x+y}{2}\,cos.\frac{x-y}{2}$

28 $cos.x - cos.y = -2\,sen.\frac{x+y}{2}\,sen.\frac{x-y}{2}$

29 $sen.^2x - sen.^2y = sen.(x+y)\,sen.(x-y)$

30 $cos.^2x - cos.^2y = -sen.(x+y)\,sen.(x-y)$

31 $1 + sen.x = 2\,sen.^2(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$

32 $1 - sen.x = 2\,sen.^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x)$

33 $1 + cos.x = 2\,cos.^2\frac{1}{2}x$

34 $1 - cos.x = 2\,sen.^2\frac{1}{2}x$

35 $\frac{1+sen.x}{cos.x} = \frac{1+tang.\frac{1}{2}x}{1-tang.\frac{1}{2}x} = tang.(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$.

36 $sen.\frac{1}{2}x + cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{(1+sen.x)}$

37 $sen.\frac{1}{2}x - cos.\frac{1}{2}x = -\sqrt{(1-sen.x)}$

38 $sec.\frac{1}{2}x\,cosec.\frac{1}{2}x = \frac{2}{sen.x}$

39 $sen.x\,cos.x\,tang.x\,cot.x\,sec.x\,cosec.x = 1$.

40 $\frac{sen.\,x + sen.\,y}{sen.\,x - sen.\,y} = \frac{tang.\frac{x+y}{2}}{tang.\frac{x-y}{2}}$

41 $\frac{sen.\,x \pm sen.\,y}{cos.\,x + cos.\,y} = tang.\frac{x \pm y}{2}$

42 $\frac{sen.\,x + sen.\,y}{cos.\,x - cos.\,y} = -\,cot.\frac{x-y}{2}$

43 $\frac{cos.\,x + cos.\,y}{cos.\,x - cos.\,y} = -\,cot.\frac{x+y}{2}\,cot.\frac{x-y}{2}$

ART. II.

Sviluppo in serie delle principali funzioni trigonometriche.

§. 154. *Prop.* Sviluppare le funzioni $sen.\,x$, $cos.\,x$. Assumiamo le due serie

$$sen.\,x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{ec.}$$
$$cos.\,x = 1 + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \text{ec.}$$

dove omettiamo nella prima il termine senz' x, perchè si dee annullare il seno coll' arco, e le potenze pari, acciocchè se x diventa $-x$, possano ambidue i membri diventar negativi. Nella seconda il termine senz' x si è posto $=1$, perchè all' annullarsi dell' arco il coseno si uguaglia al raggio; e si sono omesse le potenze impari, perchè il coseno rimane positivo quand' anche l' arco diventi negativo.

Ciò premesso, se aggiungeremo i quadrati dell' una e dell' altra serie, avremo

$$\begin{aligned} sen.^2 x + cos.^2 x = 1 = &+ A^2x^2 + 2ABx^4 + B^2x^6 \\ &1 + 2ax^2 + a^2x^4 + 2ACx^6 \\ &\qquad\quad + 2bx^4 + 2cx^6 \\ &\qquad\qquad\qquad + 2abx^6 \end{aligned} + \text{ec.}$$

e paragonando i coefficienti omologi, avremo le equazioni

$$A^2 + 2a = 0$$
$$2AB + a^2 + 2b = 0$$
$$B^2 + 2AC + 2c + 2ab = 0$$

ec.

In secondo luogo, prendendo il doppio prodotto delle due serie, si avrà

$$2\,sen.x\,cos.x = sen.2x =$$
$$\begin{aligned} 2Ax + 2Bx^3 &+ 2Cx^5 + 2Dx^7 \\ &+ 2aAx^3 + 2aBx^5 + 2aCx^7 \\ &\qquad + 2bAx^5 + 2bBx^7 \quad + \text{ec.} \\ &\qquad\qquad + 2cAx^7 \end{aligned}$$

ma cambiando nella prima x in $2x$ si avrebbe ancora $sen.2x = 2Ax + 8Bx^3 + 32Cx^5 + 128Dx^7 + \text{ec.}$, onde dal paragone de' due valori di $sen.2x$ si avranno le altre equazioni

$$2A = 2A$$
$$2B + 2aA = 8B$$
$$2C + 2aB + 2bA = 32C$$
$$2D + 2aC + 2bB + 2cA = 128D$$

ec.,

e siccome dall'equazione $2A = 2A$ non possiamo determinare A, perciò riterremo A indeterminata per un istante, ed intanto determineremo tutti gli altri coefficienti per mezzo di A, e troveremo

$a = -\dfrac{A^2}{2}$	$B = -\dfrac{A^3}{2.3}$
$b = \dfrac{A^4}{2.3.4}$	$C = \dfrac{A^5}{2.3.4.5}$
$c = -\dfrac{A^6}{2.3.4.5.6}$	$D = -\dfrac{A^7}{2.3.4.5.6.7}$
ec.	ec.,

onde le due serie, che abbiamo di sopra assunte, diventeranno rispettivamente

$$sen.\,x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7x^7}{2.3\ldots7} + \text{ec.}$$

$$cos.\,x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \frac{A^6x^6}{2.3\ldots6} + \text{ec.}$$

Affine di determinare il coefficiente A si divida la prima serie per x, onde si abbia

$$\frac{sen.\,x}{x} = A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{ec.}$$

Ora è facile a comprendersi che il rapporto espresso dal 1.° membro, a misura che l'arco x diminuisce, tende a diventare un rapporto d'uguaglianza, cioè l'unità. Ma durante la diminuzione di x il valore di tutto il 2.° membro tende esso pure ad uguagliarsi col solo suo primo termine A come suo limite; e dovendo inoltre uguagliarsi fra loro i limiti di ciascun membro presi nelle medesime circostanze; dovrà essere

$$1 = A,$$

onde sarà determinato il coefficiente che ci restava.

Si potrebbe fors' anco ragionar così: essendo espresso $sen.\,x$ per mezzo delle potenze della quantità Ax, questa dovrebbe rappresentare in generale tutti gli archi corrispondenti a $sen.\,x$, che sono

$$x,\ 2\pi + x,\ 4\pi + x,\ 6\pi + x,\ \text{ec.}$$

Ma altronde noi abbiam supposto che s'annullasse il seno coll'arco x, quindi l'arco generico Ax dovrà coincidere col minimo x di questi valori, e perciò sarà

$$A = 1.$$

Avremo dunque le due serie domandate

$$(1)\quad sen.\,x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} + \text{ec.}$$

$$(2)\quad cos.x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3\ldots6} + \text{ec.}$$

§. 155. Se adesso nelle serie (7), e (8) del §. 151 cangeremo z in $x\sqrt{-1}$, avremo

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{ec.}$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{ec.}$$

dalle quali sommate e sottratte si ottiene

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{ec.} = cos.x$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{ec.} = sen.x.$$

Se ora nelle due equazioni

$$(M)\ \left\{\begin{aligned} cos.x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ sen.x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right.$$

metteremo mx invece di x, ne nasceranno altre due, cioè

$$(N)\ \left\{\begin{aligned} cos.mx &= \frac{e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}}{2} \\ sen.mx &= \frac{e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right.$$

Quindi avremo sommando e sottraendo le equazioni (M)

$$(O)\ \left\{\begin{aligned} cos.x + \sqrt{-1}.sen.x &= e^{x\sqrt{-1}} \\ cos.x - \sqrt{-1}.sen.x &= e^{-x\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right.$$

e similmente dalle equazioni (N) ricaveremo

$$(P)\ \left\{\begin{aligned} cos.mx + \sqrt{-1}.sen.mx &= e^{mx\sqrt{-1}} = (cos.x + \sqrt{-1}.sen.x)^m \\ cos.mx - \sqrt{-1}.sen.mx &= e^{-mx\sqrt{-1}} = (cos.x - \sqrt{-1}.sen.x)^m \end{aligned}\right.$$

d'onde si ricava

(Q) $(cos. x \pm \sqrt{-1} . sen. x)^m = cos. mx \pm \sqrt{-1} . sen. mx$
equazione che racchiude una proprietà singolare degli angoli. Inoltre avremo ancora le espressioni seguenti

(R) $cos. mx =$
$$\tfrac{1}{2}(cos. x + \sqrt{-1} . sen. x)^m + \tfrac{1}{2}(cos. x - \sqrt{-1} . sen. x)^m$$

$$(S)\ sen. mx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(cos. x - \sqrt{-1} . sen. x)^m$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}}(cos. x - \sqrt{-1} . sen. x)^m,$$

le quali hanno luogo qualunque sia il valore di m.

§. 156. Unendo in una sola le equazioni (O), si avrà
$$cos. x \pm \sqrt{-1} . sen. x = e^{\pm x\sqrt{-1}},$$
e passando ai logaritmi
$$log.(cos. x \pm \sqrt{-1} . sen. x) = \pm x \sqrt{-1}.$$
Supponiamo $sen. x = 0$, $cos. x = 1$, ed osservando che in questa supposizione l' arco x dee prendere il valor infinitiforme $2k\pi$, avremo
$$log. 1 = \pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$
Chiamisi adesso A il logaritmo di una quantità positiva a; e siccome si ha $a = a \times 1$, presi i logaritmi, si avrà
$$log. a = A + log. 1 = A \pm 2k\pi\sqrt{-1}.$$
Similmente ponendo $sen. x = 0$, $cos. x = -1$, e perciò $x = (2k+1)\pi$, sarà
$$log. -1 = \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$
in cui facendo $k = 0$, se ne ricava la bella analogía di *Gio. Bernoulli*
$$1 : \pi :: \sqrt{-1} : log. -1.$$
Sarà perciò
$$log. -a = A + log. -1 = A \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$
Dunque le quantità positive hanno infiniti logaritmi tutti presi nel medesimo sistema, de' quali però un solo è reale, cioè quello che corrisponde alla supposizione di

$k = 0$; e le quantità negative hanno similmente infiniti logaritmi, ma tutti immaginarj.

Con questi teoremi *Eulero* ha creduto di metter fine alla famosa controversia su l'esistenza o impossibilità de' logaritmi delle quantità negative.

Se poi si innalza alla potenza $\sqrt{-1}$ l'equazione di sopra, si avrà

$$(cos.\, x \pm \sqrt{-1}\, .\, sen.\, x)^{\sqrt{-1}} = e^{\mp x},$$

e nelle supposizioni di $cos.\, x = 1$, $sen.\, x = 0$, $x = 2k\pi$, si avrà

$$1^{\sqrt{-1}} = e^{\pm 2k\pi},$$

valor reale ed infinitiforme; il primo de' quali, che corrisponde alla supposizione di $k = 0$, è l'unità.

Ponendo poi $cos.\, x = 0$, $sen.\, x = 1$, e quindi $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$, sarà altresì

$$(\pm \sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2k+\frac{1}{2})\pi},$$

valor di nuovo tutto reale, ed infinitiforme.

§. 157. *Prop.* Sviluppare in serie la funzione $tang.\, x$.

Facciasi

$$tang.\, x = Ax + A_3 x^3 + A_5 x^5 + A_7 x^7 + \text{ec.}$$

dove omettiamo i termini contenenti le potenze pari di x ed il termine costante per le ragioni addotte al §. 154.

Essendo pertanto $tang.\, x = \frac{sen.\, x}{cos.\, x}$, sarà ancora

$$tang.\, x\, cos.\, x = sen\, x;$$

onde mettendo in luogo di queste funzioni le serie che le rappresentano, potremo determinare i coefficienti della serie assunta. Ma per meglio vedere la dipendenza de' coefficienti l'uno dall'altro, supporremo che nelle serie (1) e (2) in luogo de' coefficienti numerici si pongano rispettivamente

$$a,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \text{ec.}$$
$$1,\ b_2,\ b_4,\ b_6,\ \text{ec.}$$

Con ciò si avrà

$$(Ax - A_3x^3 + A_5x^5 - A_7x^7 + \text{ec.}) \times$$
$$(1 - b_2x^2 + b_4x^4 - b_6x^6 + \text{ec.})$$
$$= ax - a_3x^3 + a_5x^5 - a_7x^7 + \text{ec.}$$

Fatto il prodotto, ordinati i termini rapporto ad x, e paragonati i coefficienti omologi, si avranno le equazioni

$$A = a$$
$$A_3 - Ab_2 = -a_3$$
$$A_5 - A_3b_2 + Ab_4 = a_5$$
$$A_7 - A_5b_2 + A_3b_4 - Ab_6 = -a_7$$

ec.,

e in generale

$$A_m - A_{m-2}b_2 + A_{m-4}b_4 - A_{m-6}b_6 + \ldots \pm Ab_{m-1} = \pm a_m$$

dove vale il segno superiore se m sarà un numero della forma $4n+1$, e l'inferiore se tal forma non avrà luogo.

Rimessi poi i valori numerici degli a e dei b, si avrà

$$A = 1,\ A_3 = \frac{1}{3},\ A_5 = \frac{2}{3.5},\ A_7 = \frac{17}{3.5.7.3},\ \text{ec.},$$

e la serie domandata sarà finalmente

(3) $\quad tang.\, x =$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \frac{62x^9}{3.5.7.9.3} + \text{ec.}$$

Per la convergenza sì di questa che delle precedenti serie (1) e (2) è necessario che sia l'arco x minore del raggio 1.

§. 158. *Prop.* Sviluppare l'arco in potenze ascendenti del suo seno.

Sia $sen.\, x = y$, e pongasi

$$x = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \text{ec.}$$

Cangiando x in $2x$ anche $sen.\, x$ si cangerà in

$$sen.\, 2x = 2\, sen.\, x \cos.\, x,$$

e quindi $\qquad y$ in $2y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Dunque sostituendo si avrà

$$2x = 2Ay(1-y^2)^{\frac{1}{2}} + 8By^3(1-y^2)^{\frac{3}{2}} + 32Cy^5(1-y^2)^{\frac{5}{2}}$$
$$+ 128Dy^7(1-y^2)^{\frac{7}{2}} + \text{ec.}$$

Altronde dal canone newtoniano si ha

$$(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,2^2}y^4 - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,3\,.\,2^3}y^6 - \text{ec.}$$

$$(1-y^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3\,.\,1}{2\,.\,2^2}y^4 + \text{ec.}$$

$$(1-y^2)^{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{5}{2}y^2 + \text{ec.}$$

$$(1-y^2)^{\frac{7}{2}} = 1 - \text{ec.}$$

Sostituendo questi sviluppi nell' ultima equazione, ne nasce

$$2x = 2Ay - Ay^3 - \frac{A}{4}y^5 - \frac{A}{8}y^7 - \text{ec.}$$
$$+ 8By^3 - 12By^5 + 3By^7 - \text{ec.}$$
$$+ 32Cy^5 - 80Cy^7 + \text{ec.}$$
$$+ 128Dy^7 - \text{ec.}$$

Da un' altra parte è chiaro che si dee avere

$$2x = 2Ay + 2By^3 + 2Cy^5 + 2Dy^7 + \text{ec.}$$

Quindi paragonando i due valori di $2x$, avremo le relazioni seguenti fra i coefficienti,

$$2A = 2A$$

$$-A + 8B = 2B$$

$$-\frac{A}{4} - 12B + 32C = 2C$$

$$-\frac{A}{8} + 3B - 80C + 128D = 2D$$

ec.

dalle quali si ha

$$A = A$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{3}$$

$$C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{A}{5}$$

$$D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{A}{7}$$

$$E = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{A}{9}$$

ec.

e ritenendo, pel ragionamento fatto al §. 154, $A = 1$, avremo finalmente

$$(4) \quad x = Arc.\,sen.\,y = y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^9}{9} + \text{ec.}$$

Se in questa porremo $x = \frac{\pi}{6}$ (chiamando π la semicirconferenza), sarà $y = sen.\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, e perciò

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \text{ec.},$$

serie da cui colla somma di pochi termini si può avere un valore abbastanza prossimo di π, ossia del rapporto generale della semicirconferenza al raggio.

§. 159. *Prop.* Esprimere l'angolo x per mezzo delle potenze della sua tangente t.

Fra i diversi artifizj, che si potrebbero impiegare a quest'oggetto, somiglianti ai precedenti, o dedotti dal regresso delle serie, noi sceglieremo il seguente.

Dividendo l'una per l'altra le equazioni (O) del §. 155 si ha

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{cos.\,x+\sqrt{-1}\,.\,sen.\,x}{cos.\,x-\sqrt{-1}\,.\,sen.\,x}=\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}\,.$$

Prendendo i logaritmi di ciascun membro, e dividendo per $2\sqrt{-1}$

$$x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,log.\,\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}\,.$$

Sviluppando il logaritmo del 2.º membro per mezzo della formola (3) del §. 145, cioè cangiando x in $t\sqrt{-1}$, e prendendo i logaritmi iperbolici, si avrà

$$log.\,\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}=2\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\text{ec.}\right)\sqrt{-1}\,,$$

e perciò

$$(5)\quad x=Arc.\,tang.\,t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\text{ec.}$$

serie elegantissima.

Se si pone $x=\frac{\pi}{4}$, e perciò $t=1$, sarà

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ec.},$$

ovvero

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ec.}\right)$$

che è la famosa serie, con cui *Leibnitz* rappresentò la semiperiferia circolare.

Ponendo poi $\frac{\pi}{6}$ invece di x, ed osservando essere

$tang.\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; si avrà

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\text{ec.}\right)$$

serie, per mezzo di cui *Lagny* calcolò il rapporto approssimato della circonferenza al diametro con 127 cifre decimali, di cui prendendo le prime si ha $\pi = 3,14159265$ ec.

§. 160. *Prop.* Esprimere il coseno dell' arco multiplo mx per mezzo d'una serie, che contenga le potenze discendenti del coseno dell' arco semplice x.

Dalla formola (R) del §. 155 abbiamo

$$2\,cos.\,mx = (cos.\,x + \sqrt{-1}\,.\,sen.\,x)^m + (cos.\,x - \sqrt{-1}\,.\,sen.\,x)^m.$$

Poniamo $cos.\,x = p$, onde sia ancora $sen.\,x = \sqrt{(1-p^2)}$, e sostituiti questi valori avremo

$$2\,cos.\,mx = [p + \sqrt{(p^2-1)}]^m + [p - \sqrt{(p^2-1)}]^m.$$

Ripigliamo ora le due equazioni (M), (N) del §. 137, ed aggiungendole fra loro, troveremo

$$2\,cos.\,mx =$$

$$(2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}(2p)^{m-6} + \text{ec.}$$

$$+ (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+2)}{2}(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2\,.\,3}(2p)^{-m-6} + \text{ec.},$$

equazione nella quale non manca che di scrivere $cos.\,x$ invece di p, e di dividere per 2, affinchè sia soddisfatto a quanto fu richiesto.

§. 161. *Osserv.* Quest' equazione sussiste per qualsivoglia valore di m, ma nel caso che questo sia un intiero, il secondo membro si riduce ad un' espressione finita, giacchè i termini della serie inferiore distruggono le potenze negative, che nascerebbero dalla prima continuandola senza fine. Quindi nel supposto di m intiero positivo o negativo si avrà semplicemente

$$2\,cos.\,mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\,.\,3}(2p)^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\,.\,3\,.\,4}(2p)^{m-8}\ \text{ec.}$$

e la serie dovrà troncarsi là, dove le potenze di p incominciano a diventar negative. Ciò è affatto conforme alla natura dei coseni.

Ponendo poi $2p = 2\cos.x = y$, avremo nel caso di m intiero

(6) $2\cos.mx =$

$$y^m - my^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}y^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}y^{m-6} + ec.,$$

cioè la serie (B) del §. 82.

Se nel cerchio $ABGE$ (Fig. 1.ª) il punto B separerà un dato arco ADB dal suo supplemento BGE, e saranno tirate le corde BA, BE, ed inoltre il raggio CD al punto di mezzo dell' arco ADB, anche la corda BA sarà tagliata per mezzo in F; ciò è evidente. Ora dalla proporzione $AE : AC :: BE : CF$, in cui è $AE = 2AC$, ne viene ancora $BE = 2CF$, e perciò $BE = 2\cos.\frac{1}{2}ADB$. Se pertanto chiameremo $ADB = 2x$, $BE = y$, sarà $2\cos.x = y$. Ma se x si cangia in mx, quest' equazione ricade nella (6); dunque il secondo membro dell' equazione (6) non è che l' espressione analitica della corda supplementare di un arco m.plo di quello, la cui corda di supplemento è y.

Moltissime sono le serie spettanti alla Trigonometria, che si potrebbero dedurre con metodi somiglianti ai precedenti, l' uso e l' eleganza delle quali sono insigni; ma nella necessità in cui siamo di limitarci, ripetiamo ai nostri Allievi di consultare fra tutte le altre la Trigonometria del Sig. *Cagnoli*, in cui la ricchezza delle cose gareggia colla semplicità de' metodi.

CAPO XVIII.

Risoluzione trigonometrica delle equazioni

$x^n \pm 1 = 0$, $x^{2n} - A x^n + B = 0$.

Art. I.

Equazioni a due termini.

§. 162. *Prop.* Risolvere le equazioni della forma

$$x^n - 1 = 0.$$

Se n è dispari vi sarà una radice reale positiva $= 1$, e perciò l'equazione sarà divisibile per $x - 1$: se n sarà pari vi saranno due radici reali $+1$, -1, e la proposta sarà divisibile per $x^2 - 1$. Tolti colla divisione questi fattori, le altre radici saranno immaginarie. Rappresenti pertanto $a \pm b\sqrt{-1}$ una coppia di queste, e la proposta conterrà dei fattori della forma trinomiale

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

in numero $\frac{n-1}{2}$ se n è dispari, ovvero $\frac{n-2}{2}$ se n sarà pari. Cerchiamo tutti i valori competenti ad a e b, acciò possan rappresentare tutte le radici, di cui si tratta. Abbiamo di già accennato al §. 89 che se $a + b\sqrt{-1}$ è una radice immaginaria dell' unità, si ha sempre fra a e b l'equazione $a^2 + b^2 = 1$, la quale, per essere nel primo membro composta di due quadrati, non può verificarsi a meno che non sia tanto a quanto $b < 1$. Possiamo perciò porre con sicurezza $a = cos.\,\varphi$, essendo φ un angolo che fra poco determineremo, e per conseguenza $b = \sqrt{(1 - cos.^2\,\varphi)} = \pm\, sen.\,\varphi$. Quindi i due valori conjugati di x saranno rappresentati dalla formola

$$x = \cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\varphi.$$

Sostituendo quest' espressione invece di x nell' equazione

$$x^n = 1$$

avremo $\quad (\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\varphi)^n = 1,$

o sia per la formola (Q) del §. 155

$$\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.n\varphi = 1.$$

Ma perchè quest' equazione sussista, bisogna (§. 42) che l'angolo $n\varphi$ sia tale che si abbia nel tempo stesso

$$\cos.n\varphi = 1\,,\ \mathrm{sen}.n\varphi = 0\,,$$

e siccome queste condizioni non convengono che alla periferia 2π, ed a' suoi multipli $2k\pi$, avremo perciò

$$n\varphi = 2k\pi\,,\quad \varphi = \frac{2k\pi}{n},$$

ed il valore di x, sarà

$$x = \cos.\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{2k\pi}{n},$$

onde il fattor generico di secondo grado sarà

$$x^2 - 2x\cos.\frac{2k\pi}{n} + 1$$

dove il numero $2k$ potrà avere tutti i valori pari $0, 2, 4$, ec. fino ad n inclusivamente se n è pari, o fino ad $n-1$ solamente se n è dispari; giacchè dando a $2k$ de' valori maggiori di questi ritornerebbero i medesimi seni e coseni già computati.

Quindi l'equazione

$x^n - 1 = 0$, ovvero la funzione $x^n - 1$,

se n è dispari risulterà dal prodotto de' fattori

$$(x-1)\left(x^2-2x\cos.\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos.\frac{4\pi}{n}+1\right)\times$$
$$\left(x^2-2x\cos.\frac{6\pi}{n}+1\right)\ldots\left(x^2-2x\cos.\frac{n-1}{n}\pi+1\right);$$

e se n è pari dal prodotto

$$(x-1)(x^2-2x\cos.\frac{2\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos.\frac{4\pi}{n}+1)\times$$

$$(x^2-2x\cos.\frac{6\pi}{n}+1)\ldots(x^2-2x\cos.\frac{n-2}{n}\pi+1)(x+1),$$

in cui il primo fattore $x-1$ nasce dal porre $2k=0$ nel fattor generico, e col prendere il fattor semplice in luogo del doppio $(x-1)^2$ che ne nascerebbe, e l'ultimo fattore $x+1$ dal porre nel generico $2k=n$, e prendendo similmente il fattor semplice in luogo del doppio $(x+1)^2$.

§. 163. Alla stessa conclusione saremmo giunti anche per altra via più analoga a quella che abbiamo tenuto al §. 86. Ridotta difatti la proposta $x^n-1=0$ alla forma

$$x^r+\frac{1}{x^r}+x^{r-1}+\frac{1}{x^{r-1}}+\ldots+x+\frac{1}{x}+1=0$$

col dividerla per $x-1$ se n è dispari, o per x^2-1 se n è pari, e col dividere in seguito tutti i termini del quoto per x^r, potremo porre

$$x+\frac{1}{x}=y=2\cos.\varphi,$$

e ne nascerà l'equazione

$$(A)\quad x^2-2x\cos.\varphi+1=0.$$

Ma se x diventa x^r, abbiam veduto (§. 161), che y diventa

$$y^r-ry^{r-2}+\frac{r(r-3)}{2}y^{r-4}-\text{ec.}=2\cos.r\varphi;$$

onde sarà

$$x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos.r\varphi,$$

e quindi l'equazione

$$(B)\quad x^{2r}-2x^r\cos.r\varphi+1=0,$$

le quali equazioni (A) e (B) dovendo sussistere simultaneamente, richiedono che la prima sia un divisore della seconda.

Per determinare il valore dell' angolo φ, osserveremo che risoluta la *(B)* alla foggia delle quadratiche abbiamo

$$x^r = cos.r\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.r\varphi,$$

e quindi $x^{2r} = cos.2r\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.2r\varphi$ (§. 155);

e risolvendo la *(A)*

$$x = cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.\varphi;$$

onde nel caso di n dispari $= 2r + 1$, moltiplicando fra loro queste ultime, avremo

$$x^{2r+1} = (cos.2r\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.2r\varphi) \times (cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.\varphi);$$

o sia riducendo a dovere i termini del prodotto:

$$x^n = cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.n\varphi = 1;$$

e nel caso di n pari $= 2r + 2$, si avrebbe similmente

$$x^2 = cos.2\varphi + \sqrt{-1}.sen.2\varphi,$$

e perciò

$$x^{2r+2} = (cos.2\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.2\varphi) \times (cos.2r\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.2r\varphi),$$

ovvero

$$x^n = cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.n\varphi = 1,$$

come prima. Ma perchè l'equazione sia soddisfatta, bisogna di nuovo che sia

$$cos.n\varphi = 1, \quad sen.n\varphi = 0,$$

onde siamo condotti come precedentemente ai medesimi valori di φ.

§. 164. *Prop.* Risolvere l'equazione tutta positiva

$$x^n + 1 = 0.$$

Questa ha una sola radice reale e negativa $= -1$ nel caso di n dispari, e nel caso di n pari tutte le radici sono immaginarie. Per trovarle supponiamo una di queste $= a + b\sqrt{-1}$, e sarà (come al §. 162) $a^2 + b^2 = 1$, e quindi si potrà supporre $a = cos.\varphi$, $b = \pm sen.\varphi$.

Posti questi valori nell' equazione

$$x^n = -1,$$

si avrà

$$(cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.\varphi)^n = -1$$

ossia

$$cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.sen.n\varphi = -1,$$

dalla quale abbiamo congiuntamente

$$cos.n\varphi = -1, \quad sen.n\varphi = 0.$$

Ora gli angoli corrispondenti a queste condizioni sono la semiperiferia π ed i suoi multipli dispari; sarà dunque

$$n\varphi = (2k+1)\pi, \quad e \quad \varphi = \frac{2k+1}{n}\pi.$$

Tutti i valori di x saranno quindi compresi nella formola

$$x = cos.\frac{2k+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}.sen.\frac{2k+1}{n}\pi,$$

ed i fattori di 2.° grado della proposta saranno tutti rappresentati da

$$x^2 - 2x\,cos.\frac{2k+1}{n}\pi + 1,$$

in cui il numero $2k+1$ potrà prendere tutti i valori $1, 3, 5, 7$, ec. fino ad $n-1$ inclusive nel caso di n pari, o fino ad n nel caso di n dispari. In quest' ultimo caso fra i fattori di secondo grado vi sarebbe ancora $(x+1)^2$ corrispondente al valore di $2k+1=n$, ma non si prenderà che il semplice $x+1$. Perciò l' equazione $x^n+1=0$, o semplicemente la funzione x^n+1 equivarrà al prodotto

$$(x^2-2x\,cos.\frac{\pi}{n}+1)(x^2-2x\,cos.\frac{3\pi}{n}+1)(x^2-2x\,cos.\frac{5\pi}{n}+1)$$

$$(x^2-2x\,cos.\frac{7\pi}{n}+1)\ldots(x^2-2x\,cos.\frac{n-1}{n}\pi+1), \text{ se } n \text{ è pari}$$

$$(x^2-2x\cos.\frac{\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos.\frac{3\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos.\frac{5\pi}{n}+1)$$

$$(x^2-2x\cos.\frac{7\pi}{n}+1)\ldots(x^2-2x\cos.\frac{n-2}{n}\pi+1)(x+1),$$

se n è dispari.

Noi siamo giunti col soccorso delle formole trigonometriche alla soluzione completa dell' equazione $x^n \pm 1 = 0$, e quindi ancora dell' equazione omogenea $x^n \pm r^n = 0$, qualora si rendano omogenei i fattori di secondo grado che la compongono, cioè scrivendo invece del fattor generico $x^2 - 2x\cos.\frac{m\pi}{n}+1$, $x^2 - 2rx\cos.\frac{m\pi}{n}+r^2$. La risoluzione generale e puramente analitica di siffatte equazioni, che al Capo VII. abbiam veduto, parlando di gradi espressi da un numero primo, esser limitata al grado 7.°, è stata da poco tempo scoperta dal Sig. *Gauss*, indi semplificata dal Sig. *Lagrange*. Noi non potremmo farla conoscere ai nostri Allievi senza oltrepassare di troppo i confini a noi prefissi.

§. 165. *Prop.* Se si dividerà la semicirconferenza d'un cerchio in n parti uguali (Fig. 2.ª) Aa, aB, Bb, bC, Cc, ec.; e da un punto O preso su la direzione del diametro AS si tireranno a tutti i punti di divisione le rette Oa, OB, Ob, OC, Oc, ec., si avrà

1.° $\overline{Oa}^2 . \overline{Ob}^2 . \overline{Oc}^2 . \overline{Od}^2 \ldots = \overline{KO}^n + \overline{KA}^n$

2.° $OA . \overline{OB}^2 . \overline{OC}^2 . \overline{OD}^2 \ldots = \overline{KO}^n - \overline{KA}^n$.

Prima di tutto osserveremo che preso un punto qualunque M (Fig. 3.ª) su la circonferenza, e di là condotto il raggio MK, la retta MO, ed il perpendicolo MP sul diametro, indi chiamato ω l'angolo AKM misurato dall'arco ANM, x la retta KO, r il raggio, si ha

$$\overline{MO}^2 = \overline{MP}^2 + (KO - KP)^2 =$$
$$r^2 \, sen.^2 \omega + (x - r\cos.\omega)^2,$$

e fatte le debite riduzioni

$$\overline{MO}^2 = x^2 - 2rx\cos.\omega + r^2.$$

Facciasi ora successivamente $\omega = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}$, ec., ed $\overline{MO}^2$ si cangerà ne' valori corrispondenti $\overline{Oa}^2$, $\overline{OB}^2$, $\overline{Ob}^2$, $\overline{OC}^2$, ec. della Fig. 1.ª; onde separando i valori, ne' quali entrano i multipli pari di π da quelli, in cui entrano i multipli dispari, avremo le due serie di equazioni

$$\overline{Oa}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{\pi}{n} + r^2$$

$$\overline{Ob}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{3\pi}{n} + r^2$$

$$\overline{Oc}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{5\pi}{n} + r^2$$

$$\overline{Od}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{7\pi}{n} + r^2$$

ec.

$$OA = x - r$$

$$\overline{OB}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{2\pi}{n} + r^2$$

$$\overline{OC}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{4\pi}{n} + r^2$$

$$\overline{OD}^2 = x^2 - 2rx\cos.\frac{6\pi}{n} + r^2$$

ec.

Fatti poi i prodotti delle prime equazioni a parte, e delle seconde, ed osservando che nella prima serie i secondi membri sono i fattori di $x^n + r^n$, e nella seconda quelli di $x^n - r^n$, avremo

$$\overline{Oa}^2 \,.\, \overline{Ob}^2 \,.\, \overline{Oc}^2 \,.\, \overline{Od}^2 \ldots\ldots = x^n + r^n = \overline{KO}^n + \overline{KA}^n$$

$$OA \,.\, \overline{OB}^2 \,.\, \overline{OC}^2 \,.\, \overline{OD}^2 \ldots\ldots = x^n - r^n = \overline{KO}^n - \overline{KA}^n,$$

come abbiam proposto.

Questa è la famosa proprietà del cerchio, conosciuta sotto il nome di teorema di *Cotes*, che ne fu l'inventore.

§. 166. *Osserv.* Noi abbiam preso il punto O fuori del cerchio, ma se lo prenderemo al di dentro, rimarrà invariabile la 1.ª parte della proposizione, ma nella 2.ª il segmento OA prendendo una direzione contraria alla precedente, dovrà considerarsi per negativo. Quindi cangiando i segni in ciascun membro, si avrà

$$OA \,.\, \overline{OB}^2 \,.\, \overline{OC}^2 \,.\, \overline{OD}^2 \ldots\ldots = r^n - x^n = \overline{KA}^n - \overline{KO}^n.$$

Art. II.

Equazioni a tre termini.

§. 167. *Prop.* Risolvere per mezzo di formole trigonometriche le equazioni contenute nella forma generale

$$x^{2n} - 2Ax^n + B = 0.$$

Trattandola a modo delle derivative del 2.° grado, avremo

$$x^n = A \pm \sqrt{(A^2 - B)}\,, \quad x = \sqrt[n]{[A \pm \sqrt{(A^2 - B)}]}.$$

Sia in 1.° luogo $A^2 > B$, e la proposta avrà due radici reali, e tutte le altre immaginarie. Per trovar le une e le altre con espressioni trigonometriche osserviamo che per supposizione si ha $\frac{\sqrt{B}}{A} < 1$, onde potremo porre a ragione $\frac{\sqrt{B}}{A} = cos.\,\phi$, e quindi $A\,cos.\,\phi = \sqrt{B}$. Facciasi ancora $A = a^n$ a fine di dare alla proposta la forma omogenea

$$x^{2n} - 2a^n x^n + a^{2n} \cos.^2 \varphi = 0,$$

e posti questi valori in quello di x^n, e di x, si otterrà

$$x^n = a^n (1 \pm sen.\varphi) \quad , \quad x = a\sqrt[n]{(1 \pm sen.\varphi)}.$$

Chiamiamo

$$a\sqrt[n]{(1 + sen.\varphi)} = p \;,\; a\sqrt[n]{(1 - sen.\varphi)} = q\;,$$

ed avremo le due equazioni

$$x^n - p^n = 0 \quad , \quad x^n - q^n = 0.$$

Queste per l'articolo precedente ammettono i fattori trinomiali compresi nelle formole rispettive

$$x^2 - 2px\cos.\frac{2k\pi}{n} + p^2,$$

$$x^2 - 2qx\cos.\frac{2k\pi}{n} + q^2;$$

onde si potranno ricavare tutte le radici della proposta.

Sia in 2.° luogo $A^2 < B$, e tutti i valori di x saranno evidentemente immaginarj. Per trovarli rifletteremo che avendosi $\frac{A}{\sqrt{B}} < 1$, si potrà fare $\frac{A}{\sqrt{B}} = \cos.\varphi$, e posto $B = a^{2n}$, sarà $A = a^n \cos.\varphi$, e questi valori collocati nella proposta ci daranno risolvendola

$$x^n = a^n(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,sen.\varphi),$$

$$x = a\sqrt[n]{(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\,sen.\varphi)} =$$

$$a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,sen.\frac{\varphi}{n}\right).$$

Ma gli angoli dotati del coseno $\frac{A}{\sqrt{B}}$, e quindi del seno $\sqrt{\frac{B - A^2}{B}}$ sono gli infiniti seguenti:

$$\varphi\,,\ 2\pi \pm \varphi\,,\ 4\pi \pm \varphi\,,\ 6\pi \pm \varphi\,,\ \ldots,\ 2k\pi \pm \varphi,$$

nella qual serie φ è il minimo; e $2k$ può esprimere tutti i numeri pari da zero fino all' infinito. Sostituendo pertanto nel valor di x tutti questi angoli ad uno ad uno, si avrebbe la serie di valori

$$x = a\left(\cos.\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$x = a\left(\cos.\frac{2\pi \pm \varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{2\pi \pm \varphi}{n}\right)$$

$$x = a\left(\cos.\frac{4\pi \pm \varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{4\pi \pm \varphi}{n}\right)$$

ec.

Ma osservando che se si dà a $2k$ un valor più grande di n ritornano i valori di già ottenuti, si vedrà che l'ultimo termine di questa serie sarà

$$x = a\left(\cos.\frac{n\pi \pm \varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{n\pi \pm \varphi}{n}\right),$$

se n è pari;

$$x = a\left(\cos.\frac{(n-1)\pi \pm \varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{(n-1)\pi \pm \varphi}{n}\right),$$

se n è dispari.

Nell' un caso e nell' altro è facile a vedersi che il numero totale de' valori di x è $2n$ nè più nè meno.

Riprendiamo il primo valore di x, in cui φ è un angolo generico, e formiamo i due fattori lineari

$$x - a\cos.\frac{\varphi}{n} - a\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{\varphi}{n}$$

$$x - a\cos.\frac{\varphi}{n} + a\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{sen}.\frac{\varphi}{n}$$

ed otterremo col loro prodotto il fattore generico di 2.° grado

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi}{n} + a^2$$

in cui se a φ daremo tutti i valori precedenti, avremo i fattori

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi}{n} + a^2$$

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi \pm \varphi}{n} + a^2$$

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{4\pi \pm \varphi}{n} + a^2$$

ec.

fermandoci al fattore

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{n\pi \pm \varphi}{n} + a^2 = x^2 + 2ax\cos.\frac{\varphi}{n} + a^2;$$

se n è pari,

ovvero a

$$x^2 - 2ax\cos.\frac{(n-1)\pi \pm \varphi}{n} + a^2, \text{ se } n \text{ è dispari}.$$

Es. Così i fattori di 2.º grado della formola

$$x^6 - 2a^3x^3\cos.\varphi + a^6$$

sarebbero, in grazia di $n = 3$, ed $n - 1 = 2$

$$\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi}{3} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi + \varphi}{3} + a^2\right)\times$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi - \varphi}{3} + a^2\right).$$

Similmente quelli della formola

$$x^8 - 2a^4x^4\cos.\varphi + a^8$$

saranno

$$\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi}{4} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi + \varphi}{4} + a^2\right)\times$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi - \varphi}{4} + a^2\right)\left(x^2 + 2ax\cos.\frac{\varphi}{4} + a^2\right);$$

e così di seguito.

§. 168. *Prop.* Se nella circonferenza d'un circolo (Fig. 4.ª) si prende un arco $AL = \varphi$, e l'arco $AB = \frac{\varphi}{n}$; indi incominciando dal punto B si divida la circonferenza in n parti uguali BC, CD, DE, ec., Bc, cd, de, ec.: poi preso un punto O fuori o dentro del cerchio sul diametro che passa per A, si guidino le rette OB, OC, OD, ec., Oc, Od, Oe, ec., sarà

$$\overline{OB}^2 . \overline{OC}^2 . \overline{OD}^2 \ldots\ldots \overline{Oc}^2 . \overline{Od}^2 . \overline{Oe}^2 \ldots\ldots$$

$$= \overline{KO}^{2n} - 2\overline{KA}^n . \overline{KO}^n \cos. \varphi + \overline{KA}^{2n}.$$

Imperciocchè preso un punto qualunque M su la periferia (Fig. 3.ª), e chiamando $KO = x$, $KA = a$, ω l'angolo misurato dall'arco ANM, sarà come al §. 165
$\overline{MO}^2 = x^2 - 2ax\cos.\omega + a^2$
Cangiando ω in φ, $2\pi + \varphi$, $4\pi + \varphi$, $6\pi + \varphi$, ec., ed osservando essere

$$AB = \frac{\varphi}{n},$$

$$AC = AB + BC = \frac{\varphi + 2\pi}{n},$$

$$AD = AB + 2BC = \frac{\varphi + 4\pi}{n},$$

ec.

$$Ac = AB - Bc = \frac{\varphi - 2\pi}{n},$$

$$Ad = AB - 2Bc = \frac{\varphi - 4\pi}{n},$$

ec.,

si avrà

$$\overline{OB}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{\varphi}{n} + a^2$$

$$\overline{OC}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi + \varphi}{n} + a^2$$

$$\overline{OD}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{4\pi + \varphi}{n} + a^2$$

ec.

$$\overline{Oc}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{2\pi - \varphi}{n} + a^2$$

$$\overline{Od}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{4\pi - \varphi}{n} + a^2$$

ec.

onde moltiplicando tutte queste equazioni si avrà nel 2.° membro il prodotto di tutti i fattori contenuti nella formola $x^{2n} - 2a^n x^n \cos.\varphi + a^{2n}$, che tradotta in linee forma appunto il 2.° membro dell' uguaglianza che si è proposto, e che sussisterà senza nessuna variazione ancorchè il punto O si trovasse dentro del cerchio.

Questo teorema, in cui è incluso il precedente di *Cotes*, è di *Moivre*.

CAPO XIX.

Dello spezzamento delle frazioni razionali composte in altre più semplici.

§. 169. *Prop.* Una frazione razionale della forma

$$\frac{a + bx + cx^2 \ldots\ldots + hx^{n-1}}{a' + b'x + c'x^2 \ldots\ldots + l'x^n},$$

in cui la massima potestà della indeterminata x nel numeratore manca almeno d' un' unità dalla massima del denominatore, si può sempre spezzare in tante frazioni parziali, quanti sono i fattori razionali del denominatore.

La frazione proposta si rappresenti con $\frac{M}{N}$, ritenendo N del grado n, ed M del grado $n - 1$: suppongasi inoltre essere $N = PQ$, cioè essere il prodotto di due polinomj razionali P, Q, de' quali P sia del grado p, e quindi Q del grado $n - p$. Facciasi

$$\frac{M}{N} = \frac{F}{P} + \frac{G}{Q},$$

in cui F sia del grado $p - 1$, e G del grado $n - p - 1$, ed amendue da determinarsi se è possibile. Avremo dopo tolte le frazioni

$$M = FQ + GP$$

equazione che sarà vera se lo sarà la precedente. Ma FQ è un prodotto di grado $p - 1 + n - p = n - 1$, e similmente GP del grado $p + n - p - 1 = n - 1$; dunque essendo anche M del grado $n - 1$, l'equazione

$$M = FQ + GP$$

è legittima, e con essa la precedente. Di più essendo M un polinomio di n termini, avrà n coefficienti già determinati, ed essendo del pari $FQ + GP$ altro polinomio di n termini avrà anch' esso n coefficienti, che si potranno determinare col paragone di quelli del primo membro.

Sia ora $N = PQR$, cioè siano tre i fattori del denominatore della data frazione, e sia P di grado p, Q di grado q, ed R del grado $n - p - q$, e sussisterà l' equazione

$$\frac{M}{N} = \frac{F}{P} + \frac{G}{Q} + \frac{H}{R},$$

in cui F, G, H sono polinomj a coefficienti indeterminati di dimensioni $p - 1$, $q - 1$, $n - p - q - 1$ rispettivamente. Da questa si ricava

$$M = FQR + GPR + HPQ,$$

in cui il primo prodotto è del grado

$$p - 1 + q + n - p - q = n - 1;$$

il secondo del grado

$$q - 1 + p + n - p - q = n - 1;$$

e finalmente il terzo del grado

$$n - p - q - 1 + p + q = n - 1.$$

Dunque essendo ambidue i membri di ugual grado avranno ugual numero di termini, e perciò i coefficienti indeterminati del secondo membro potranno determinarsi tutti per mezzo di quelli del primo che sono dati.

Se i fattori del denominatore M fossero in maggior numero, si seguiterebbe a ragionare nello stesso modo. Dunque la data frazione si potrà spezzare in tante frazioni parziali quanti saranno i fattori razionali del denominatore, come si è proposto.

§. 170. Abbiam supposto che il grado del numeratore fosse minore di quello del denominatore almeno di un' unità: se questa condizione mancasse, vi si supplirebbe col dividere il numeratore pel denominatore, e spingere la divisione finchè si ottenesse un quoziente, in cui, oltre alcuni termini intieri, vi fosse un residuo dotato della richiesta qualità. Così il rotto $\frac{1+x^4}{1+x^2}$, fatta la divisione per rapporto ad x^2, diventerebbe

$$x^2 - 1 + \frac{2}{1+x^2},$$

la cui parte frazionaria ha la condizione prescritta.

Ciò premesso, per decomporre una frazione razionale nelle sue parziali si cercheranno i fattori del denominatore, trattando questo come un' equazione. Questi fattori possono essere di quattro qualità, cioè

1.° reali disuguali;
2.° reali uguali;
3.° immaginarj disuguali;
4.° immaginarj uguali.

Questi quattro casi debbono essere contemplati distintamente.

§. 171. *Prop.* Decomporre una data frazione $\frac{M}{N}$ nelle sue parziali, quand' essa non contenga che fattori reali e disuguali.

Suppongansi $p+qx$, $p'+q'x$, $p''+q''x$, ec. gli n fattori del denominatore N. Pongasi la frazione proposta uguale ad n frazioni aventi ciascuna per denominatore uno di tali fattori, e per numeratore una delle costanti indeterminate A, B, C, ec.; quindi la frazione generica

$$\frac{a+bx+cx^2\ldots+hx^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2\ldots+l'x^n},$$

si porrà $=\frac{A}{p+qx}+\frac{B}{p'+q'x}+\ldots+\frac{H}{p^{(n-1)}+q^{(n-1)}x}$,

e non resterà che da determinare i numeratori A, B, ..., H.

Riducasi pertanto l' uno e l' altro membro al comun denominatore $(p+qx)(p'+q'x)\ldots(p^{(n-1)}+q^{(n-1)}x)$, che per ipotesi si uguaglia ad $a'+b'x+\ldots+l'x^n$, e cancellato questo da ciascun membro rimarrà l' uguaglianza fra i soli numeratori. Trasportando in un sol membro tutti i termini ordinati per x, ed uguagliando a zero ad uno ad uno i coefficienti delle podestà di x, si avranno tante equazioni quante sono le indeterminate A, B, ec., e perciò potremo determinarle tutte, con che saranno trovate le frazioni che si domandavano.

Es. Sia la frazione $\dfrac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}$.

Cerchinsi i fattori del denominatore ponendolo $=0$, e trattandolo a guisa di equazione, e si troverà che questo ha tre fattori tutti razionali $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+3)$. Pongasi pertanto

$$\frac{1-3x-x^2}{6-7x+x^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

e ridotto il 2.° membro al denom.e $(x-1)(x-2)(x+3)$, rimarrà fra i numeratori l' uguaglianza

$$1-3x-x^2=$$
$$A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2),$$

e sviluppando i prodotti, e trasportando i termini dal 1.° membro nel secondo, si avrà

$$\left.\begin{array}{rl} & Ax^2+Ax-6A \\ + & Bx^2+2Bx-3B \\ + & Cx^2-3Cx+2C \\ + & x^2+3x-1 \end{array}\right\}=0;$$

dalla quale uguaglianza si ricavano le seguenti

$$A+B+C+1=0,\quad A+2B-3C+3=0,$$
$$6A+3B-2C+1=0,$$

le quali maneggiate a dovere ci danno

$$A = \frac{15}{20}, \; B = -\frac{36}{20}, \; C = \frac{1}{20};$$

onde il rotto proposto equivarrà alle tre frazioni

$$\frac{15}{20(x-1)} - \frac{36}{20(x-2)} + \frac{1}{20(x+3)}.$$

§. 172. Si potrebbe compendiare questo metodo ponendo nell' eguaglianza

$$1-3x-x^2 =$$
$$A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

uguale a zero uno per volta ciascheduno de' fattori $x-1$, $x-2$, $x+3$. Ponendo difatti $x-1=0$, ossia $x=1$, e sostituendo questo valore invece di x, l'uguaglianza precedente diventa

$$-3 = A \times -1.4, \text{ da cui si ha } A = \frac{3}{4} = \frac{15}{20}.$$

Ponendo $x-2=0$, si ha

$$-9 = B.1.5, \text{ e } B = -\frac{9}{5} = -\frac{36}{20}.$$

Facendo finalmente $x+3=0$, ossia $x=-3$, si ottiene

$$1 = C \times -4 \times -5, \text{ ossia } C = \frac{1}{20},$$

appunto come dianzi.

Chiunque può di leggieri accorgersi che questo metodo si può estendere a qualunque frazione razionale, il cui denominatore abbia tutti i fattori reali e disuguali.

Eulero nella sua *Introduzione* ha insegnato lo spezzamento delle frazioni con un altro metodo più elegante e luminoso. A noi però basta di far conoscere nell' argomento di cui si tratta, e che è di tant' uso nel Calcolo Integrale, il metodo di *Gio. Bernoulli*.

§. 173. *Prop.* Trovar le frazioni parziali di una data, quando questa contenga nel denominatore de' fattori immaginarj.

Prima osserveremo che volendo ritenere nelle frazioni parziali i fattori lineari tuttochè immaginarj (come talvolta si fa), basterà applicare a questo caso il metodo della proposizione precedente. In questo modo la frazione per es. $\frac{1}{x^2+1}$, che ha nel suo denominatore i fattori $x+\sqrt{-1}$, $x-\sqrt{-1}$, si spezzerebbe nelle due

$$\frac{A}{x+\sqrt{-1}}+\frac{B}{x-\sqrt{-1}},$$

e si troverebbe

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}, \quad B=\frac{1}{2\sqrt{-1}},$$

onde sarebbe

$$\frac{1}{x^2+1}=-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{x+\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-\sqrt{-1}}\right].$$

Ma siccome d'ordinario si cerca di schivare ne' risultati le espressioni immaginarie, perciò ci ricorderemo che se un'equazione, e quindi ancora una formola ha un fattore $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, ne ha sempre un altro $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ conjugato col primo, in modo che il loro prodotto è sempre reale (§. 42). Pertanto quando il denominatore della frazione proposta abbia di siffatti fattori, ne riterremo il loro prodotto tutto reale, e la frazione proveniente da questo fattore di secondo grado sarà della forma $\frac{Ax+B}{p+qx+rx^2}$, cioè di numeratore tale che sia un polinomio in x di una dimensione di meno del denominatore.

I coefficienti A, B si determineranno collo stesso metodo della proposizione precedente, riducendo amendue i membri al comun denominatore, e paragonando fra loro i soli numeratori, Così per esempio la frazione

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^4 - 19x^2 - 100x - 91}$$

avendo il denominatore che risulta dal prodotto de' due fattori razionali di 2.° grado $(x^2+5x+13)(x^2-5x-7)$ (§. 77) si potrà risolvere nelle sue componenti, ponendo

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{x^4 - 19x^2 - 100x - 91} = \frac{Ax+B}{x^2+5x+13} + \frac{Cx+D}{x^2-5x-7}.$$

Togliendo i denominatori, ed ordinando i termini de' prodotti si formeranno le seguenti colonne

$$\left.\begin{array}{l} Ax^3 - 5Ax^2 - 7Ax \\ \quad + Bx^2 - 5Bx - 7B \\ +Cx^3 + 5Cx^2 + 13Cx \\ \quad + Dx^2 + 5Dx + 13D \\ - x^3 + 3x^2 + 2x - 1 \end{array}\right\} = 0.$$

Annullando poi ciascuna colonna separatamente si avrà

$$\begin{array}{l} A + C - 1 = 0 \\ -5A + B + 5C + D + 3 = 0 \\ -7A - 5B + 13C + 5D + 2 = 0 \\ -7B + 13D - 1 = 0, \end{array}$$

dalle quali si ricava facilmente

$$A = \frac{37}{70},\ B = \frac{146}{70},\ C = \frac{33}{70},\ D = \frac{84}{70};$$

e quindi

$$\frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^4-19x^2-100x-91} = \frac{37x+146}{70(x^2+5x+13)} + \frac{33x+84}{70(x^2-5x-7)}.$$

Siccome poi quest' ultima frazione ha un denominatore, i di cui fattori lineari sono reali sebbene irrazionali, così questa si potrebbe spezzare in altre due frazioni di denominator lineare.

§. 174. *Prop.* Una frazione della forma $\frac{M}{(p-qx)^n}$, in cui M è un polinomio di $n-1$ dimensioni al più, si può sempre spezzare in tante frazioni come

$$\frac{A}{(p-qx)^n}+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}+\ldots+\frac{H}{p-qx}$$

a numerator costante, quante sono le unità in n.

Essendo M della forma $a+bx+cx^2\ldots+hx^{n-1}$, se ridurremo l'un e l'altro membro allo stesso denominatore, si avrà fra i numeratori l'uguaglianza

$$a+bx+cx^2\ldots+hx^{n-1}=$$
$$A+B(p-qx)+C(p-qx)^2+\ldots+H(p-qx)^{n-1}.$$

E siccome da questa col paragone de' coefficienti omologi si possono determinare tutti i numeratori A, B, C, ec., perciò sarà sempre possibile lo spezzamento proposto.

Questa proposizione inchiude il metodo con cui si debbono trattare le frazioni di questa natura. Passiamo agli esempj.

Sia proposto il rotto $\frac{2-x^2}{(3-x)^3}$.

Pongasi $\frac{2-x^2}{(3-x)^3}=\frac{A}{(3-x)^3}+\frac{B}{(3-x)^2}+\frac{C}{3-x}$.

Ridotto il 2.° membro al denominatore del primo, si avrà l'uguaglianza

$$2-x^2=A+B(3-x)+C(3-x)^2,$$

e sviluppati i prodotti e trasportati tutti i termini in un sol membro

$$\left.\begin{array}{lll} A & -\;Bx & +\;Cx^2 \\ +\,3B & & \\ +\,9C & -\;6Cx & +\;\;x^2 \\ -\,2 & & \end{array}\right\}=0$$

e ponendo $=0$ ciascuna fila verticale si avranno le equazioni

$$A + 3B + 9C - 2 = 0,\ B + 6C = 0,\ C + 1 = 0$$

dalle quali si ricava

$$A = -7,\ B = 6,\ C = -1,$$

onde sarà

$$\frac{2 - x^2}{(3 - x)^3} = -\frac{7}{(3 - x)^3} + \frac{6}{(3 - x)^2} - \frac{1}{3 - x}.$$

§. 175. Qualora il denominatore del rotto oltre un numero di fattori lineari uguali contenesse dei fattori ineguali, o immaginarj, non si avrebbe che a combinare le regole delle proposizioni precedenti con la presente, e si determinerebbero i coefficienti al solito.

Così il rotto $\frac{1 - x + 2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}$, si porrebbe

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C+Dx}{1+x+x^2} + \frac{E}{(1-x)^2} + \frac{F}{1-x},$$

e fatta la riduzione al comun denominatore, si avrebbe

$$1 - x + 2x^2 =$$

$$A(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2 + Bx(1+x+x^2)(1-x)^2$$

$$+(C+Dx)x(1+x)(1-x)^2 + Ex(1+x)(1+x+x^2)$$

$$+Fx(1+x)(1-x)(1+x+x^2)$$

svolti i quali prodotti si troverebbero le seguenti equazioni per determinare i coefficienti, cioè

$$A = 1,$$

$$B + C + E + F = -1,$$

$$-A - B - C + D + 2E + F = 2,$$

$$-A - C - D + 2E = 0,$$

$$-B + C - D + E - F = 0,$$

$$A + B + D - F = 0,$$

dalle quali si ricaverebbe

$$A = 1,\ B = -1,\ C = -\frac{2}{3},\ D = E = F = \frac{1}{3}.$$

Sarà dunque il rotto proposto

$$\frac{1-x+2x^2}{x(1+x)(1+x+x^2)(1-x)^2}=$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\,\frac{(2-x)}{1+x+x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)}.$$

§. 176. *Prop.* Decomporre una frazione nelle sue parziali quando il di lei denominatore contenga dei fattori immaginarj multipli.

Siccome il prodotto di due fattori immaginarj è sempre della forma trinomiale $p+qx+rx^2$, cioè tutta reale, così se i medesimi fattori saranno contenuti due, tre, e in generale k volte nel denominator della frazione, questi si ridurranno alla forma

$(p+qx+rx^2)^2$, $(p+qx+rx^2)^3$, ec., $(p+qx+rx^2)^k$. Ora per trovar la frazione oriunda dal fattore generico $(p+qx+rx^2)^k$ si dee osservare che una frazione, come

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots+hx^{2k-1}}{(p+qx+rx^2)^k},$$

si può svolgere nelle seguenti, cioè

$$\frac{A+Bx}{(p+qx+rx^2)^k}+\frac{C+Dx}{(p+qx+rx^2)^{k-1}}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{M+Nx}{p+qx+rx^2}$$

tante di numero quante sono le unità in k. Ciò è evidente se si riflette che ridotte tutte queste frazioni al denominator comune $(p+qx+rx^2)^k$, il numeratore diventa un polinomio del grado $2k-1$ appunto come quello del primo membro, e perciò si hanno tante equazioni fra i coefficienti quanti sono i coefficienti medesimi A, B, $C \ldots M$, N da determinarsi.

Così si porrebbe il rotto

$$\frac{1-x^3}{(1-x+x^2)^2}=\frac{A+Bx}{(1-x+x^2)^2}+\frac{C+Dx}{1-x+x^2},$$

e riducendo la seconda frazione al denominator dell' altra, ed uguagliando i numeratori, si avrebbe l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} \quad A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\ + C - Cx - Dx^2 + \quad x^3 \\ - 1 + Dx \end{array}\right\} = 0 ,$$

da cui si ottiene

$A + C - 1 = 0$, $B - C + D = 0$, $C - D = 0$, $D + 1 = 0$

e finalmente

$A = 2$, $B = 0$, $D = C = -1$,

e quindi il rotto proposto

$$\frac{1 - x^3}{1 - x + x^2} = \frac{2}{(1 - x + x^2)^2} - \frac{1 + x}{1 - x + x^2} .$$

Sia per 2.° esempio il rotto $\dfrac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)}$. In questo il fattor $(1 + x^2)^4$ del denominatore contiene quattro fattori di secondo grado tutti uguali, ed irresolubili in fattori lineari reali; il fattore $1 + x^4$ ci somministrerà delle altre frazioni che potremo calcolare in seguito. Intanto porremo

$$\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)} = \frac{A + Bx}{(1 + x^2)^4} + \frac{C + Dx}{(1 + x^2)^3} +$$

$$\frac{E + Fx}{(1 + x^2)^2} + \frac{G + Hx}{1 + x^2} + \frac{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3}{1 + x^4} .$$

Riducendo amendue i membri al comun denominatore, ed ordinati tutti i termini in un sol membro, si avranno le equazioni

$$\begin{array}{l} A + C + E + G + A' = 0 \\ B + D + F + H + B' - 1 = 0 \\ C + 2E + 3G + 4A' + C' = 0 \\ D + 2F + 3H + 4B' + D' + 1 = 0 \\ A + C' + 2E + 4G + 4C' + 6A' = 0 \\ B + D + 2F + 4H + 4D' + 6B' = 0 \end{array}$$

$$C + 2E + 4G + 4A' + 6C' = 0$$
$$D + 2F + 4H + 4B' + 6D' = 0$$
$$E + 3G + A' + 4C' = 0$$
$$F + 3H + B' + 4D' = 0$$
$$G + C' = 0$$
$$H + D' = 0.$$

Queste equazioni opportunamente maneggiate somministrano

$A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$, $H = -\frac{1}{4}$, $A' = 0$, $B' = -\frac{1}{4}$, $C' = 0$, $D' = \frac{1}{4}$, e perciò sarà

$$\frac{x - x^3}{(1 + x^2)^4 (1 + x^4)} =$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^4} + \frac{\frac{1}{2}x}{(1+x^2)^3} - \frac{\frac{1}{4}x}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^3}{1 + x^4}.$$

Se adesso si volesse sciogliere anche l' ultima di queste frazioni nelle sue componenti, bisognerebbe trovare i fattori di secondo grado del denominatore $1 + x^4$. Applicando pertanto a questo denominatore il metodo impiegato al §. 75, cioè dividendo la formola $x^4 + 1$ pel trinomio $x^2 - px + q$, si arriverà al residuo

$$(p^3 - 2pq)x - (p^2 q - q^2) + 1$$

che non essendo più divisibile per x^2 dovrà porsi uguale a zero indipendentemente da x, di modo che si avrà separatamente

$$p^3 - 2pq = 0\,;\ -p^2 q + q^2 + 1 = 0.$$

La prima darebbe invero $p = 0$, $p^2 = 2q$, ma il primo di questi valori sostituito nella seconda darebbe $q^2 + 1 = 0$, ovvero $q = \pm\sqrt{-1}$ valore immaginario, che ci insegna unicamente che $1 + x^4$ si può riguardare come il prodotto dei due fattori immaginarj

$$(x^2 + \sqrt{-1})(x^2 - \sqrt{-1})\,;$$

ma il secondo posto nella seconda equazione ci dà $q = 1$, onde si ha anche $p^2 = 2$, e $p = \pm\sqrt{2}$. Dunque sarà

$$1 + x^4 = (1 + x\sqrt{2} + x^2)(1 - x\sqrt{2} + x^2).$$

Trovati così i fattori di questo denominatore, la frazione potrebbe risolversi in altre due, aventi ciascuna uno di questi fattori per denominatore pel §. 171.

CAPO XX.

Nozioni generali su le serie, ed origine delle serie ricorrenti in particolare.

§. 177. Chiamasi *serie* un aggregato di quantità che vanno succedendosi per mezzo de' segni $+$ e $-$, ed il cui numero può accrescersi indefinitamente, ed anche andare all' infinito. Acciocchè una serie sia sottoposta al calcolo, i suoi termini debbono esser regolati da una qualche legge analitica conosciuta, o almeno se ne deve conoscere qualche proprietà per mezzo di cui si possa scoprire la relazione fra i termini.

Nelle serie si debbono considerare questi quattro elementi; 1.° *l' indice*; 2.° *l' equazione di relazione*; 3.° *il termine generale*; 4.° *il termine sommatorio*.

L' indice è un numero che indica il posto che occupa un tal termine in una serie: così l' unità è l' indice del 1.° termine; il 2 l' indice del 2.°, ec., r l' indice del r^{simo}.

L' equazione di relazione è l' espressione analitica della legge con cui un termine della serie deriva da uno o più di quelli che lo precedono. Così in una progressione geometrica

$$1 + px + p^2 x^2 + p^2 x^3 + p^4 x^4 + \text{ec.}$$

un termine qualunque uguaglia il suo precedente moltiplicato per px, onde se chiameremo Q il coefficiente della potestà x^r, sarà

$$Qx^r = Px^{r-1}.px, \text{ e però } Q = Pp.$$

Il termine generale è una funzione dell' indice generico r, la quale somministra un qualsivoglia termine della serie, qualora si cangi r nell' indice particolare di quel termine. Così $r^2 + r$ è il termine generale della serie 2, 6, 12, 20, 30, ec., perchè dando ad r il valore 1, si ha il primo termine 2; dando ad r il valore 2 ne nasce il secondo 6; dando il 3 ne nasce il terzo 12; ec.

Il termine sommatorio, che si dice ancora *somma generale*, è un' altra funzione dello stesso indice r, la quale somministra la somma di tanti termini della serie quante sono le unità nell' indice medesimo. Ponendo pertanto nel termine sommatorio $r = 1$, non si prenderà che un termine della serie; se si porrà $r = 2$, si avrà la somma di due termini; e posto $r = 100$ si avrebbe la somma de' primi cento termini della serie; ec.

§. 178. Se l' equazione di relazione è indipendente dall' indice r, cioè un termine qualunque derivi da alcuni che lo precedono moltiplicati per quantità costanti, la serie allora prende il nome di *ricorrente*. Tali serie nascono dallo sviluppo di frazioni razionali. Le serie ricorrenti si dividono in ordini: se un coefficiente dipende da un solo de' coefficienti precedenti, la serie si dice ricorrente del 1.º ordine; se dipende da due, si dice ricorrente dell' ordine secondo; e del terzo se dipenderà da tre; e così di seguito.

§. 179. *Prop.* Dato un rotto proprio e razionale, che sia una funzione dell' indeterminata x, svilupparlo in serie, e trovare l' equazione di relazione.

Sia da prima il denominatore del rotto una formola lineare in x, onde esso possa rappresentarsi con $\frac{\alpha}{a+bx}$. Fingiamo perciò

$$\frac{\alpha}{a+bx} =$$
$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_r x^r + \text{ec.}$$

dove invece de' coefficienti A, B, C, ec. abbiam preso piuttosto la lettera A col suo indice al piede per indicar più facilmente il loro rango. Per determinare tutti questi coefficienti moltiplichiamo pel denominatore, ed otterremo l'equazione identica

$$\left.\begin{array}{l} aA_0 + aA_1 x + aA_2 x^2 + \ldots + aA_r x^r \quad + \ldots \\ -\alpha \quad + bA_0 x + bA_1 x^2 + \ldots + bA_{r-1} x^r + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Da questa si ricava prima di tutto l'equazione

$$aA_0 - \alpha = 0,$$

la quale serve a determinare il primo coefficiente A_0 per mezzo di α; indi si ha

$$aA_1 + bB_0 = 0,\ aA_2 + bA_1 = 0, \ldots, aA_r + bA_{r-1} = 0.$$

L'ultima dà $A_r = -\frac{b}{a} A_{r-1}$, ed in questa sono evidentemente comprese tutte le precedenti. Un coefficiente pertanto della serie ottenuta deriva dal suo precedente con moltiplicar questo per la quantità costante $-\frac{b}{a}$. Quindi sarà

$$A_1 = -\frac{b}{a} A_0 = -\frac{b\alpha}{a^2},\ A_2 = \frac{b^2\alpha}{a^3},\ A_3 = \frac{b^3\alpha}{a^4}, \text{ ec.}$$

onde è trovata la serie oriunda dallo sviluppo della frazione proposta, ed essa è riccorrente del 1.° ordine.

Se si metteranno i valori de' coefficienti trovati, si avrà

$$\frac{\alpha}{a+bx} = \frac{\alpha}{a} - \alpha \frac{b}{a^2} x + \alpha \frac{b^2}{a^3} x^2 - \ldots \pm \alpha \frac{b^r}{a^{r+1}} x^r \mp \text{ec.}$$

dove vale il segno superiore per r pari, e l'inferiore per r dispari. Dunque il coefficiente generico della potenza x^r è trovato, e si ha $A_r = \pm \alpha \frac{b^r}{a^{r+1}}$. Questa stessa serie si ottiene ancora colla semplice divisione, come ognun può vedere. Inoltre essa non è altro che una progressione geometrica di forma affatto generale; dunque qualunque progressione geometrica è una serie ricorrente del 1.° ordine.

§. 180. Sia adesso un rotto, il cui denominatore sia una formola in x di secondo grado, come $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$. A fine di poterlo sviluppare fingeremo qui pure

$$\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots + A_r x^r + \text{ec.}$$

Moltiplicando al solito pel denominatore, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} aA_0 + aA_1 x + aA_2 x^2 + aA_3 x^3 \ldots + aA_r x^r + \ldots \\ -\alpha + bA_0 x + bA_1 x^2 + bA_2 x^3 \ldots + bA_{r-1} x^r + \ldots \\ \quad - \beta x + cA_0 x^2 + cA_1 x^3 \ldots + cA_{r-2} x^r + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Le due prime file verticali somministrano le due equazioni

$$aA_0 - \alpha = 0 \quad , \quad aA_1 + bA_0 - \beta = 0$$

che servono a determinare i due primi coefficienti A_0, A_1 della serie; le altre somministrano

$$aA_2 + bA_1 + cA_0 = 0$$
$$aA_3 + bA_2 + cA_1 = 0$$
ec.
$$aA_r + bA_{r-1} + cA_{r-2} = 0,$$

le quali mostrano ad evidenza che un termine qualunque dipende da due che lo precedono, giacchè si ha in genere

$$A_r = -\frac{b}{a} A_{r-1} - \frac{c}{a} A_{r-2}.$$

I coefficienti costanti $-\dfrac{b}{a}$, $-\dfrac{c}{a}$ si chiamano i termini della scala di relazione, e la serie è ricorrente del second' ordine.

§. 181. Un rotto razionale di terzo grado darebbe l' equazione

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3} =$$
$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 \ldots + A_r x^r + \ldots$$

e collo stesso processo, dopo avere ottenute le tre prime equazioni che servono a determinare i primi tre coefficienti A_0, A_1, A_2 per mezzo delle costanti α, β, γ, e che sarebbero

$$A_0 - \alpha = 0,\ aA_1 + bA_0 - \beta = 0,$$
$$aA_2 + bA_1 + cA_0 - \gamma = 0,$$

si otterrebbe l' equazione di relazione

$$aA_r + bA_{r-1} + cA_{r-2} + dA_{r-3} = 0,$$

da cui si avrebbe

$$A_r = -\frac{b}{a} A_{r-1} - \frac{c}{a} A_{r-2} - \frac{d}{a} A_{r-3},$$

cioè un termine qualunque per mezzo di tre che lo precedono, moltiplicati rispettivamente pe' coefficienti

$$-\frac{b}{a},\ -\frac{c}{a},\ -\frac{d}{a},$$

che sono i termini della scala di relazione; e la serie sarà ricorrente del terz' ordine.

In generale per un rotto il cui denominatore sia un polinomio razionale in x del grado m, si avranno m equazioni dipendenti dagli m coefficienti del numeratore, indi si avrà l' equazione di relazione fra gli altri coefficienti della forma

$$(P) \quad aA_r + bA_{r-1} + cA_{r-2} + \ldots + tA_{r-m} = 0,$$

e la serie sarà ricorrente dell' ordine m^{esimo}.

Nel caso che nel numeratore fosser nulli tutti i termini eccettuato il primo α, ed i coefficienti del denominatore avesser fra loro una tal relazione per cui si avesse

a^m invece di a,

$ma^{m-1}b$ invece di b,

$\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2$ invece di c,

ec.

b^m invece di t,

cioè fosser quelli del binomio newtoniano, allora avendosi altronde, com' è noto,

$$\frac{\alpha}{(a+bx)^m} = \alpha(a+bx)^{-m} =$$

$$\alpha\left(\frac{1}{a^m} - \frac{mb}{a^{m+1}}x + \frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}}x^2 - \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\pm\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+r-1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots r}\cdot\frac{b^r}{a^{m+r}}x^r \text{ ec.}\right),$$

e dovendo questa serie coincidere termine per termine con la

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots\ldots + A_r x^r + \text{ec.}$$

si vede che dovranno coincidere i due coefficienti di x^r nell' una e nell' altra, ossia che si dovrà avere

$$A_r = \pm\,\alpha\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+r-1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots r}\cdot\frac{b^r}{a^{m+r}}.$$

Così si ha il termine generale indipendentemente dai termini precedenti.

§. 182. *Prop.* Data l'equazione di relazione fra i coefficienti de' termini di una data serie ricorrente trovare la frazione generatrice.

Si paragonerà l'equazione data colla (P) §. prec.^{e}, e dal paragone si ricaveranno i valori particolari delle costanti a, b, c, ec., onde sarà trovato il denominatore $a+bx+cx^2+$ ec. Per trovare il numeratore, questo si assumerà della forma $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ ec. fino al grado, a cui arriva x nel denominatore, scemato dell'unità, indi posta questa frazione uguale alla serie data, e moltiplicando l'una e l'altra pel denominator trovato, e paragonando in fine i termini omologi di qua e di là, si avranno tante equazioni quante basteranno a determinare i coefficienti α, β, γ, ec. per mezzo di A_0, A_1, A_2, ec. della serie medesima.

Es. La serie $5 + 4x + 9x^2 + 13x^3 +$ ec. ha per equazione di relazione $A_r - A_{r-1} - A_{r-2} = 0$. Paragonata questa colla generale (P) si trova

$$a = 1 \,,\; b = -1 \,,\; c = -1 \,,\; m = 2 \,,$$

onde il denominatore della frazione che si cerca sarà $1 - x - x^2$. Pongasi pertanto

$$5 + 4x + 9x^2 + 13x^3 + \text{ec.} = \frac{\alpha + \beta x}{1 - x - x^2},$$

e tolta la frazione si avrà

$$\left.\begin{array}{l} 5 + 4x + 9x^2 + 13x^3 + \ldots \\ \quad - 5x - 4x^2 - \;\, 9x^3 - \ldots \\ \qquad\quad\; - 5x^2 - \;\, 4x^3 - \ldots \end{array}\right\} = \alpha + \beta x,$$

onde paragonando i termini omologi si avrà

$$\alpha = 5 \,,\; \beta = -1 \,,$$

e però la frazione generatrice della serie proposta

$$= \frac{5 - x}{1 - x - x^2}.$$

In simil guisa si troverà che la serie

$$3 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \text{ec.},$$

la cui equazione di relazione è

$$3A_r - 2A_{r-1} - 2A_{r-2} - 4A_{r-3} = 0,$$

ha per denominatore del rotto genitore il quadrinomio $3 - 2x - 2x^2 - 4x^3$. Posto poi

$$3+3x+6x^2+10x^3+\text{ec.}=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{3-2x-2x^2-4x^3},$$

tolto il denominatore si avrà

$$\left.\begin{array}{r} 9+9x+18x^2+30x^3+\ldots \\ -6x-\ 6x^2-12x^3-\ldots \\ -\ 6x^2-\ 6x^3-\ldots \\ -12x^3-\ldots \end{array}\right\}=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

da cui col solito paragone de' termini omologi si ha

$$\alpha=9,\ \beta=3,\ \gamma=6,$$

onde il rotto cercato sarà

$$\frac{9+3x+6x^2}{3-2x-2x^2-4x^3}.$$

§. 183. *Osservazione* 1.ª Abbiamo fin qui supposto la serie ricorrente della forma $A+A_1x+A_2x^2+$ ec., cioè ordinata secondo le potenze ascendenti della x: con ciò si è tacitamente supposto che x non possa avere che un valore idoneo a render convergente la serie, cioè a rendere sempre minori i termini più discosti dal principio di essa. Questo valore è sempre minore dell' unità; ma nel caso che la variabile x non potesse prendere un valore frazionario, allora saremmo costretti ad ordinare la serie secondo le potenze negative di x. Ecco come si opererebbe nel caso di un rotto di 3.º grado; e lo stesso metodo si applicherà facilmente ai rotti dei gradi più elevati.

Trasformisi il rotto $\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}$ con dividerlo sopra per x^2 e sotto per x^3 nell' equivalente

$$\frac{x^2\left(\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}\right)}{x^3\left(d+\frac{c}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{a}{x^3}\right)}.\ \text{Si ponga}\ \frac{\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}}{d+\frac{c}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{a}{x^3}}$$

$$=A_0+A_1x^{-1}+A_2x^{-2}+A_3x^{-3}\ldots+A_rx^{-r}+\text{ec.},$$

e tolta la frazione e paragonati i primi tre termini, si avranno le equazioni

$dA_0 = \gamma$, $dA_1 + cA_0 = \beta$, $dA_2 + cA_1 + bA_0 = \alpha$,

indi l'equazione di relazione

$$dA_r + cA_{r-1} + bA_{r-2} + aA_{r-3} = 0,$$

la quale differisce dalla forma dell' equazione (P) del §. 181 in ciò soltanto che le costanti a, b, c, d sono applicate ai coefficienti A_r, A_{r-1}, ec. in ordine contrario di prima. Sarà pertanto il rotto proposto

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3} =$$

$$A_0 x^{-1} + A_1 x^{-2} + A_2 x^{-3} + A_3 x^{-4} + \ldots + A_r x^{-r-1} + \text{ec.}$$

Allo stesso risultato si poteva giugnere cambiando nel rotto proposto x in $\frac{1}{y}$.

§. 184. *Osservazione* 2.ª Se nel denominatore $a + bx + cx^2 +$ ec. del rotto proposto mancasse in qualche caso particolare o il primo termine a, o i primi due $a + bx$, o ec., il metodo superiormente esposto per trovar la serie corrispondente sarebbe in difetto, e tutti i termini sarebbero infiniti. Difatti il primo coefficiente A_0 determinandosi dall' equazione $aA_0 = \alpha$ darebbe $A_0 = \frac{\alpha}{0} = \infty$, e quindi infiniti sarebbero anche gli altri. Ma dando al rotto la forma

$$\frac{\alpha + \beta x + \text{ec.}}{x(b + cx + dx^2 + \text{ec.})};$$

e messo da parte per un momento il fattore x del denominatore, si svolgerebbe in serie col metodo esposto il rotto $\frac{\alpha + \beta x + \text{ec.}}{b + cx + dx^2 + \text{ec.}}$, e trovata la serie $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 +$ ec., sarebbe poi visibilmente

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ec.}}{bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}} =$$

$$\frac{A_0}{x} + A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \text{ec.}$$

Quando nel rotto proposto mancassero i due primi termini $a + bx$, si metterebbe sotto la forma

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ec.}}{x^2(c + dx + ex^2 + \text{ec.})},$$

e messo da parte il fattore x^2 del denominatore, finchè si sia trovata la serie oriunda dallo sviluppo della frazione restante, se ne dividerebbero poscia i termini di questa per x^2, onde si avrebbe

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ec.}}{cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ec.}} =$$

$$\frac{A_0}{x^2} + \frac{A_1}{x} + A_2 + A_3 x + A_4 x^2 + \text{ec.}$$

Così si opererebbe nel caso che il denominatore incominciasse dalla potenza x^3, ovvero x^4, o ec.

§. 183. *Prop.* Dato il rotto genitore trovare il termine generale della serie generata.

E' chiaro che se nella serie

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_r x^r + \text{ec.}$$

si saprà determinare il coefficiente generico A_r, la quistione sarà sciolta, giacchè moltiplicato questo per x^r si avrà il termine generale domandato. Supporremo pertanto per facilitar questa ricerca che per mezzo o della divisione o della formola binomiale di *Newton* si siano già trovati i termini generali delle serie derivative dallo sviluppo delle seguenti frazioni delle più semplici forme.

Frazione generatrice; — Coefficiente di x^r

1.° $\frac{\alpha}{a+bx}$, ... $A_r = \pm \frac{\alpha}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^r$

dove vale $+$ se r è pari, $-$ se r è dispari;

2.° $\frac{\alpha}{(a+bx)^k}$, . . . $A_r = \pm \alpha \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+r-1)}{2\,.\,3\,.\,4\ldots r \quad a^k}\left(\frac{b}{a}\right)^r$

dove vale $+$ se r è pari, $-$ se r è dispari;

3.° $\frac{\alpha}{a+cx^2}$, ... $A_r = \pm \frac{1}{a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}r}$

dove vale $+$ se $\frac{1}{2}r$ è pari, $-$ se $\frac{1}{2}r$ è dispari, e se r dispari, $A_r = 0$;

4.° $\frac{\beta x}{a+cx^2}$, ... $A_r = \pm \frac{\beta}{a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{r-1}{2}}$

dove vale $+$ se $\frac{r-1}{2}$ è pari, $-$ se $\frac{r-1}{2}$ è dispari, e $A_r = 0$, se r è pari;

5.° $\frac{\alpha}{(a+cx^2)^k}$, . . $A_r = \alpha \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+\frac{1}{2}r-1)}{2\,.\,3\ldots\frac{1}{2}r \quad a^k}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}r}$

dove vale $+$ se $\frac{1}{2}r$ è pari, $-$ se $\frac{1}{2}r$ è dispari; e se r è dispari, $A_r = 0$.

§. 186. *Osserv.* Tutte queste formole sono a denominator binomiale di primo o secondo grado, semplice ovvero composto di più fattori uguali. Ora quando il denominatore è semplice, il valore di A_r non contiene l'indice r che negli esponenti di a, b, c; ma quando esso è elevato a qualche dignità, il valore di A_r contiene l'indice r anche nel coefficiente. Così ponendo nella seconda formola $k=2$, sarebbe $A_r = \pm \alpha \frac{(r+1)}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^r$, e ponendo $k=3$ nella medesima, sarebbe

$$A_r = \pm \alpha \frac{(r+1)(r+2)}{2\,a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^r;$$

e facendo $k=4$,

$$A_r = \pm \alpha \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{2\,.\,3\;a^4}\left(\frac{b}{a}\right)^r;\ \text{ec.}$$

Nel caso pertanto di — il termine generale si può ridurre alla forma

$k=1$ . . . . BK^r;

$k=2$ . . . . $(B+Cr)K^r$

$k=3$ . . . . $(B+Cr+Dr^2)K^r$

$k=4$ . . . . $(B+Cr+Dr^2+Er^3)K^r$;

e così di seguito. Quest' osservazione ci potrà esser utile in progresso.

§. 187. Per trovare ormai il termine generale d'una serie ricorrente, che nascerebbe dallo sviluppo del dato rotto, questo si decomporrà nelle sue frazioni parziali, i cui denominatori si riducano a qualcheduna delle formole precedenti, e se il denominatore del rotto proposto contenesse uno o più fattori trinomiali, come $f+gx+hx^2$, questi si spezzeranno ciascuno in due lineari quantunque immaginarj, e con ciò tutte le frazioni parziali potranno appartenere a qualcheduna delle precedenti formole. Il termine generale, che si domanda, non sarà che la somma de' termini generali delle serie particolari che nascerebbero dallo sviluppo delle singole frazioni parziali; e quand' anche alcune di queste avessero de' fattori semplici immaginarj, non ostante la somma di tutti questi termini generali sarà reale. Quanto prima queste due asserzioni saranno rigorosamente dimostrate.

Se dunque chiameremo, com' abbiam fatto fin qui, A_r il coefficiente della potestà x^r nella serie nata dalla frazione proposta, e B_r, C_r, D_r, ec. i coefficienti di x^r nelle rispettive serie nate dalle frazioni componenti, sarà
$A_r = B_r + C_r + D_r + E_r +$ ec.

Es. 1.° Si domanda il valore di A_r per la serie che nascerebbe dallo sviluppo della frazione $\frac{1-x}{2+x-x^2}$.

Sciolta la frazione nelle sue parziali, queste sono $\frac{\frac{2}{3}}{1+x} - \frac{\frac{1}{3}}{2-x}$, ciascuna delle quali si riferisce alla prima delle formole del §. 185. Paragonando pertanto con essa la prima di queste si ha $\alpha = \frac{2}{3}$, $a=1$, $b=1$, e quindi sarà $B_r = \pm \frac{2}{3}$. Paragonata la seconda si ottiene $\alpha = -\frac{1}{3}$, $a = 2$, $b = -1$, onde $C_r = \mp \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{-1}{2}\right)^r = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^r}$; quindi il coefficiente generale A_r sarà $= B_r + C_r = \pm \frac{2}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^r}$, dove per l'ambiguità del segno $\pm$ vale il $+$ per r pari, e il $-$ per r dispari.

Es. 2.° Sia ora da trovarsi A_r per la serie derivativa dalla frazione $\frac{x}{(1+x)(2-x)^2}$. Siccome questa equivale a $-\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2-x}$, o piuttosto a $\frac{1}{9}\left[\frac{6}{(2-x)^2} - \frac{1}{2-x} - \frac{1}{1+x}\right]$; perciò riferendosi la prima di queste alla seconda formola, darà $B_r = \frac{6(r+1)}{4 \cdot 2^r}$; la seconda riferendosi alla formola prima darà $C_r = -\frac{1}{2 \cdot 2^r}$; e similmente la terza darà $D_r = \mp 1$. Sarà dunque $A_r = B_r + C_r + D_r =$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{6(r+1)}{4\,.\,2^r}-\frac{1}{2\,.\,2^r}\mp 1\right].$$

Es. 3.° Sia la frazione generatrice

$$\frac{x}{(1+x)(1+x^2)},$$

che si risolve nell' equivalente

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+x}+\frac{1+x}{1+x^2}\right].$$

La prima di queste componenti somministra $B_r = \mp 1$; la seconda spezzandosi di nuovo nelle due

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2},$$

delle quali la prima spetta alla formola terza, e la seconda alla quarta, somministra i due termini parziali $C_r = \pm 1$, $D_r = \pm 1$, de' quali il primo non ha luogo se r è dispari, ed il secondo se r è pari: inoltre pel primo vale il segno $+$ se $\frac{1}{2}r$ è pari, e nel secondo se $\frac{r-1}{2}$ è pari. Perciò il cercato valore di A_r sarebbe $\frac{1}{2}(\mp 1 \pm 1)$. Se a cagion d'esempio si volesse il coefficiente di x^6 cioè A_6, siccome r è pari e $\frac{r}{2}$ dispari, così sarà $A_6 = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$; e se invece si volesse A_{13}, siccome sarebbe $\frac{r-1}{2}$ pari, così si avrebbe $A_{13} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. E se di nuovo si volesse A_{15}, per essere $\frac{r-1}{2}$ dispari, sarebbe $A_{15} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$.

Es. 4° La frazione $\frac{1+x}{2+2x+x^2}$ ha il denominatore non risolubile in fattori lineari reali: per trovarne il coefficiente generale si cerchino i fattori immaginarj, e si troverà

$$\frac{1+x}{2+2x+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{-1}+x}+\frac{1}{1+\sqrt{-1}+x}\right).$$

E siccome ciascuna delle frazioni componenti può paragonarsi colla prima delle precedenti formole, quindi incominciando dalla prima troveremo

$$\alpha=1,\ a=1-\sqrt{-1},\ b=1,$$

onde sarà

$$B_r=\pm\frac{1}{(1-\sqrt{-1})^{r+1}}.$$

Similmente mettendo a paragone la seconda troveremo

$$C_r=\pm\frac{1}{(1+\sqrt{-1})^{r+1}}.$$

Dunque sarà

$$A_r=B_r+C_r=\pm\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\sqrt{-1})^{r+1}}+\frac{1}{(1+\sqrt{-1})^{r+1}}\right]$$

e riducendo le due frazioni allo stesso denominatore

$$A_r=\pm\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\sqrt{-1})^{r+1}+(1-\sqrt{-1})^{r+1}}{2^{r+1}}\right]$$

espressione tutta reale per la mutua elisione degli immaginarj nello sviluppo de' binomj. Ma dimostriamo ormai le proposizioni annunziate.

§. 188. *Prop.* Il termine generale di una serie generata dallo sviluppo immediato di qualsivoglia frazion razionale si uguaglia alla somma de' termini generali delle serie, che nascono dallo sviluppo di ciascheduna frazione parziale.

Supponiamo $A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_rx^r+$ec. la serie nascente dallo sviluppo immediato, e siano

$B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\ldots+B_rx^r+\ldots\ldots$

$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots+C_rx^r+\ldots\ldots$

$D_0+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\ldots+D_rx^r+\ldots\ldots$

ec.

quelle che nascono dalle frazioni parziali. E' chiaro che dovendo la prima uguagliarsi colla somma di tutte le seconde, dovranno coincidere i termini che contengono le potenze omologhe di x, cioè dovrà essere

$A_0=B_0+C_0+D_0+$ ec.

$A_1=B_1+C_1+D_1+$ ec.

e finalmente

$A_r=B_r+C_r+D_r+$ ec.

come si è proposto.

§. 189. *Prop.* Se una frazione razionale si spezzerà in due di denominator lineare ed immaginario della forma

$$\frac{A}{x+M+N\sqrt{-1}}+\frac{B}{x+M-N\sqrt{-1}}$$

la somma de' coefficienti della potestà x^r nelle rispettive serie generate da queste due frazioni sarà tutta reale.

Supponiamo la data frazione essere $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$, e $a+bx+cx^2=(x+M+N\sqrt{-1})(x+M-N\sqrt{-1})$. Determinando i numeratori A, e B delle due frazioni parziali si troverà

$$A=\frac{-\alpha+\beta(M+N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}},\ B=\frac{\alpha-\beta(M-N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}}.$$

Si avrà dunque l' uguaglianza

$$\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}=$$

$$\frac{-[\alpha-\beta(M+N\sqrt{-1})]}{2N\sqrt{-1}.(x+M+N\sqrt{-1})}+\frac{[\alpha-\beta(M-N\sqrt{-1})]}{2N\sqrt{-1}.(x+M-N\sqrt{-1})}.$$

Riferendosi pertanto ciascuna di queste frazioni alla prima formola del §. 185, il coefficiente generale della prima (non prendendo per maggior semplicità che il segno superiore) sarà $\frac{-\alpha+\beta(M+N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}.(M+N\sqrt{-1})^{r+1}}$; e quello che spetta alla seconda sarà $\frac{\alpha-\beta(M-N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}.(M-N\sqrt{-1})^{r+1}}$.

Sarà dunque

$$A_r = \frac{-\alpha+\beta(M+N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}.(M+N\sqrt{-1})^{r+1}} + \frac{\alpha-\beta(M-N\sqrt{-1})}{2N\sqrt{-1}.(M-N\sqrt{-1})^{r+1}},$$

e riducendo al comun denominatore

$$A_r = \frac{\begin{array}{l}-\alpha(M-N\sqrt{-1})^{r+1}+\beta(M+N\sqrt{-1})(M-N\sqrt{-1})^{r+1}\\ +\alpha(M+N\sqrt{-1})^{r+1}-\beta(M-N\sqrt{-1})(M+N\sqrt{-1})^{r+1}\end{array}}{2N\sqrt{-1}\quad(M^2+N^2)^{r+1}} =$$

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha[(M+N\sqrt{-1})^{r+1}-(M-N\sqrt{-1})^{r+1}]+\\ \beta(M^2+N^2)[(M-N\sqrt{-1})^r-(M+N\sqrt{-1})^r]\end{array}}{2N(M^2+N^2)^{r+1}\sqrt{-1}}.$$

Ora è facile a vedersi che spiegando in serie i binomj immaginarj di quest' ultimo numeratore, si distruggeranno tutti i termini reali, e non resteranno che quelli che sono moltiplicati per $\sqrt{-1}$; quindi rappresentando con $P\sqrt{-1}$ l' aggregato de' termini moltiplicati per α, e con $Q\sqrt{-1}$ quelli moltiplicati per β, potremo esprimere A_r per mezzo della frazione

$$\frac{\alpha P\sqrt{-1}+\beta(M^2+N^2)Q\sqrt{-1}}{2N(M^2+N^2)^{r+1}\sqrt{-1}}.$$

ossia di

$$\frac{\alpha P+\beta(M^2+N^2)Q}{2N(M^2+N^2)^{r+1}},$$

cioè per mezzo di una quantità tutta reale.

§. 190. ***Prop.*** Trovare il termine generale di una serie proveniente da una frazione, il cui denominatore sia di secondo grado, ed irresolubile in fattori reali, senza introdurre quantità immaginarie.

Ricavandosi dall' equazione

$$\frac{\alpha + \beta x}{a + bx + cx^2} =$$

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots + A_r x^r + \text{ec}$$

oltre alle equazioni

$$aA_0 = \alpha \,;\; aA_1 + bA_0 = \beta \,,$$

le equazioni

$$aA_2 + bA_1 + cA_0 = 0$$

$$aA_3 + bA_2 + cA_1 = 0$$

$$aA_4 + bA_3 + cA_2 = 0$$

ec.

$$aA_r + bA_{r-1} + cA_{r-2} = 0 \,,$$

si avrà in primo luogo $A_2 = -\frac{b}{a} A_1 - \frac{c}{a} A_0$, e sostituendo questo valore nella seconda si avrà

$$A_3 = \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right) A_1 + \frac{bc}{a^2} A_0 .$$

Questo nuovo valore sostituito nella terza darà

$$A_4 = \left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{2bc}{a^2}\right) A_1 - \left(\frac{b^2 c}{a^3} - \frac{c^2}{a^2}\right) A_0 .$$

Seguitando a sostituire nelle equazioni posteriori i valori trovati nelle precedenti si ricava la formola generale

$$A_r =$$

$$\mp A_1 \left[\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}} - (r-2)\frac{b^{r-3}c}{a^{r-2}} + \frac{(r-3)(r-4)}{2}\frac{b^{r-5}c^2}{a^{r-3}} - \frac{(r-4)(r-5)(r-6)}{2\,.\,3}\frac{b^{r-7}c^3}{a^{r-4}} + \text{ec.}\right]$$

$$\mp A_0 \left[\frac{b^{r-2}c}{a^{r-1}} - (r-3)\frac{b^{r-4}c^2}{a^{r-2}} + \frac{(r-4)(r-5)}{2}\frac{b^{r-6}c^3}{a^{r-3}} - \frac{(r-5)(r-6)\,r-7)}{2\,.\,3}\frac{b^{r-8}c^4}{a^{r-4}} + \text{ec}\right]$$

in cui nel doppio segno vale il superiore per r pari, e l'inferiore per r dispari, ed in cui non si debbono computare che i termini di esponente positivo, omettendo tutti gli altri. La legge de' termini di questa serie è facile da comprendersi, e non resta che di porvi i valori di A_1, e di A_0. Qui non ci entrano immaginarj di sorte alcuna, onde ec.

Così nell' esempio quarto del precedente §. 187 per la frazione $\frac{1+x}{2+2x+x^2}$ si troverebbe $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = 0$, ed $A_r = \mp \frac{1}{2}\Big[\frac{2^{r-2}}{2^{r-1}} - (r-3)\frac{2^{r-4}}{2^{r-2}} +$

$$\frac{(r-4)(r-5)}{2} \cdot \frac{2^{r-6}}{2^{r-3}} - \frac{(r-5)(r-6)(r-7)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^{r-8}}{2^{r-4}} + \text{ec.}\Big]$$

§. 191. *Prop.* Trovare il termine sommatorio di una serie ricorrente.

Sia prima proposta una serie del primo ordine, cioè proveniente dalla frazione $\frac{\alpha}{a+bx}$, e sia questa al solito

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots + A_r x^r + \text{ec.}$$

Ordiniamo in colonne verticali le equazioni di relazione assegnate al §. 179

$aA_1 + bA_0 = 0$

$aA_2 + bA_1 = 0$

$aA_3 + bA_2 = 0$

ec.

$aA_r + bA_{r-1} = 0.$

Moltiplichiamo la prima equazione per x, la seconda per x^2, ec., e l'ultima per x^r, e si avrà

$aA_1 x + bA_0 x = 0$

$aA_2 x^2 + bA_1 x^2 = 0$

$aA_3 x^3 + bA_2 x^3 = 0$

ec.

$aA_r x^r + bA_{r-1} x^r = 0.$

Sommiamo le due file verticali de' termini, e chiamiamo

Σ la somma della serie proposta da A_0 fino ad $A_r x^r$ inclusivamente, ed avremo visibilmente

$$aA_1 x + aA_2 x^2 + aA_3 x^3 \ldots + aA_r x^r = a(\Sigma - A_0)$$
$$bA_0 x + bA_1 x^2 + bA_2 x^3 \ldots + bA_{r-1} x^r = bx(\Sigma - A_r),$$

onde sommando queste due uguaglianze fra loro si avrà

$$a(\Sigma - A\ \ ) + bx(\Sigma - A_r) = 0;$$

e quindi

$$\Sigma = \frac{aA_0 + bA_r x}{a + bx}.$$

Volendo eliminare A_0, ed A_r richiameremo i loro valori già trovati, cioè

$$A_0 = \frac{\alpha}{a}, \quad A_r = \pm \frac{\alpha b^r}{a^{r+1}},$$

ed avremo

$$\Sigma = \frac{\alpha}{a + bx}\left(\frac{a^{r+1} \pm b^{r+1} x}{a^{r+1}}\right),$$

dove vale il segno $+$ per r pari, ed il $-$ per r dispari. Questa contiene la somma di $r+1$ termini della proposta.

Es. Sia da sommarsi la progressione geometrica

$1, 2, 4, 8, 16, 32$, ec.

Fingiamo questa moltiplicata per ordine pe' termini della progressione

x, x^1, x^2, x^3, ec.,

onde ne nasca l'altra

$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 +$ ec.

L'equazione di relazione per questa serie è visibilmente

$$A_r - 2A_{r-1} = 0,$$

onde paragonandola colla generica $aA_r + bA_{r-1} = 0$, abbiamo $a = 1$, $b = -2$. Inoltre essendo $A_0 = 1$, si ha $\alpha = 1$, e quindi la frazione generatrice è $\frac{1}{1 - 2x}$.

Ponendo dunque nel valor precedente di Σ i valori trovati di a, b, α avremo

$$\Sigma = \frac{1-2^{r+1}x^{r+1}}{1-2x}.$$

E ponendo in questa $x=1$, risulterà la proposta serie

$$1+2+4+8+16+\ldots+2^r=2^{r+1}-1.$$

Se i termini da sommarsi fossero per esempio nove, allora sarebbe $r+1=9$, e quindi $\Sigma=2^9-1=511$, com'è facile a verificarsi.

§. 192. *Prop.* Trovare il termine sommatorio delle serie ricorrenti del secondo ordine.

La relazione fra i coefficienti ci dà in questo caso tutte le seguenti equazioni

	Si moltiplichi
$aA_2 + bA_1 + cA_0 = 0$	la prima per x^2,
$aA_3 + bA_2 + cA_1 = 0$	la seconda per x^3,
$aA_4 + bA_3 + cA_2 = 0$	la terza per x^4,
.	.
.	.
.	.
$aA_r + bA_{r-1} + cA_{r-2} = 0.$	l'ultima per x^r,

e si otterranno le

$$\begin{aligned}
&aA_2x^2 + bA_1x^2 + cA_0x^2 = 0\\
&aA_3x^3 + bA_2x^3 + cA_1x^3 = 0\\
&aA_4x^4 + bA_3x^4 + cA_2x^4 = 0\\
&.\\
&.\\
&.\\
&aA_rx^r + bA_{r-1}x^r + cA_{r-2}x^r = 0.
\end{aligned}$$

Sommando tutte le file verticali, e qui pure chiamando Σ la somma de' primi $r+1$ termini della serie

$$A_0 + A_1x^2 + \ldots + A_rx^r + \text{ec.}$$

Si troverà la prima fila $= a\,(\Sigma - A_0 - A_1 x)$;
la seconda fila $= bx\,(\Sigma - A_0 - A_r x^r)$,
la terza fila $= cx^2(\Sigma - A_{r-1}x^{r-1} - A_r x^r)$;
onde dovrà essere sommando

$$a(\Sigma - A_0 - A_1 x) + bx(\Sigma - A_0 - A_r x^r) + cx^2(\Sigma - A_{r-1}x^{r-1} - A_r x^r) = 0,$$

e di qui

$$\Sigma = \frac{aA_0 + (aA_1 + bA_0)x + (bA_r + cA_{r-1})x^{r+1} + cA_r x^{r+2}}{a + bx + cx^2},$$

ovvero in grazia di

$$aA_0 = \alpha,\; aA_1 + bA_0 = \beta,\; bA_r + cA_{r-1} = -aA_{r+1}$$

$$\Sigma = \frac{\alpha + \beta x - aA_{r+1}x^{r+1} + cA_r x^{r+2}}{a + bx + cx^2}.$$

Se per esempio la serie da sommarsi fosse (§. 182)

$$5 + 4x + 9x^2 + 13x^3 + \text{ec.},$$

in cui l'equazione di relazione è $A_r - A_{r-1} - A_{r-2} = 0$; essendo $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, ed inoltre $\alpha = 5$, $\beta = -1$, si troverebbe

$$\Sigma = \frac{5 - x - A_{r+1}x^{r+1} - A_r x^{r+2}}{1 - x - x^2}.$$

Se non si volesse che la somma di sette termini, siccome sarebbe $r + 1 = 7$, $A_r = 57$, $A_{r+1} = 92$, così si avrebbe

$$\Sigma = \frac{5 - x - 92x^7 - 57x^8}{1 - x - x^2};$$

e facendo $x = 1$ si avrebbe la somma de' termini

$$5 + 4 + 9 + 13 + 22 + 35 + 57 = \frac{5 - 1 - 92 - 57}{-1} = 145.$$

L' estendere questo metodo dell' Inglese *Tommaso Simpson* alle serie ricorrenti del terzo ordine e degli altri più elevati non ha altra difficoltà che la maggior lunghezza di calcolo.

CAPO XXI.

Delle serie algebraiche.

ART. I.

Divisione delle serie; differenze di tutti gli ordini; termine generale e sommatorio delle serie aritmetiche.

§. 193. Le serie algebraiche si dividono in *aritmetiche* e *geometriche*: sì le une che le altre derivano la loro denominazione dall' analogía che hanno colle progressioni rispettive dello stesso nome. Nelle prime sì il termine generale che sommatorio è una funzione intiera e razionale dell' indice r, che insegneremo a trovare fra poco. Nelle seconde l' indice r entra ancora negli esponenti delle quantità costanti, da cui dipendono i termini generale e sommatorio.

Se da ciascun termine di una serie qualunque si sottrae il suo precedente, si ottiene una nuova serie di termini, che si chiamano *differenze prime* della serie data. Se si sottrae di nuovo da ogni termine di questa il suo precedente, si ottiene la serie delle *differenze seconde* della data: sottraendo similmente fra loro i termini contigui di quest' ultima con lo stesso ordine, si ottengono le *differenze terze*; e così di seguito.

Le serie aritmetiche si dividono in ordini denominati dal massimo esponente dell' indice r nell' espressione del termine generale. Perciò

Se il termine generale è della forma,	la serie è dell' ordine
$a+br$	1.°
$a+br+cr^2$	2.°
$a+br+cr^2+dr^3$	3.°
ec.	ec.
$a+br+cr^2+\ldots+pr^m$	m^{sime}.

§. 194. *Prop.* Nelle serie aritmetiche vi ha sempre un qualche ordine di differenze costanti, e questo è quello che corrisponde all' esponente massimo dell' indice r nel termine generale. Reciprocamente: se in una serie si arriva ad ottenere un qualche ordine di differenze costanti, questa sarà aritmetica.

Nella serie aritmetica del primo ordine

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots,\ a+rb$$

è chiaro che le differenze fra i termini vicini sono tutte $=b$, e perciò costanti. Quindi le serie, il termine generale delle quali è della forma $a+br$, sono tutte progressioni aritmetiche. Tutte le differenze poi degli ordini superiori come le seconde, terze, ec. saranno $=0$.

Sia la serie del secondo ordine

$$a,\ a+b+c,\ a+2b+4c,\ a+3b+9c,\ \ldots,\ a+br+cr^2.$$

Le differenze prime sono

$$b+c,\ b+3c,\ b+5c,\ b+7c,\ \ldots,\ b+(2r-1)c.$$

Le differenze seconde

$$2c,\ 2c,\ 2c,\ \ldots,\ 2c,\ \text{cioè costanti}.$$

Le differenze terze, e seguenti tutte $=0$.

Nelle serie del terzo ordine

$$a,\ a+b+c+d,\ a+2b+4c+8d,\ \ldots,\ a+br+cr^2+dr^3$$

si hanno le differenze prime

$$b+c+d,\ b+3c+7d,\ b+5c+19d,\ \ldots$$
$$b+(2r-1)c+(3r^2-3r+1)d,$$

le differenze seconde

$2c + 6d$, $2c + 12d$, $2c + 18d$, ..., $2c + 6(r-1)d$,

le differenze terze

$6d$, $6d$, $6d$, ec. costanti,

le differenze quarte, ed ulteriori $= 0$.

Ciascun vede che quest' induzione si può applicare a tutti gli ordini delle serie, di cui si tratta, onde in quelle dell' ordine m saranno costanti le differenze m^{sime}. Con ciò resta dimostrata la prima parte.

Rapporto alla seconda supponiamo per un momento che il termine generale non abbia la forma delle funzioni intiere e razionali dell' indeterminata r, ma un' altra qualunque: se formeremo con questa i termini della serie, e ne cercheremo le differenze successive di qualunque ordine, non le troveremo mai costanti contro la supposizione. Dunque il termine generale non potrà essere che una funzione intiera e razionale di r, ossia la serie sarà aritmetica.

§. 195. *Prop.* Qualunque sia la natura della serie

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ..., A_r, ec.

se si prenderanno le differenze prime, che chiameremo

B_1, B_2, B_3, ec.,

indi le differenze seconde

C_1, C_2, C_3, ec.,

poscia le terze

D_1, D_2, D_3, ec.,

varrà sempre l' equazione

$$A_r = A_1 + (r-1)B_1 + \frac{(r-1)(r-2)}{2}C_1 + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3}D_1 + \text{ec.}$$

Formisi il seguente quadro

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 & , & A_2 & , & A_3 & , & A_4 & , & A_5 & , & A_6 \ , \text{ ec} \\
& B_1 & & B_2 & & B_3 & & B_4 & & B_5 & \\
& & C_1 & & C_2 & & C_3 & & C_4 & & \\
& & & D_1 & & D_2 & & D_3 & & & \\
& & & & E_1 & & E_2 & & & & \\
& & & & & F_1 & & & & &
\end{array}$$

in cui per le definizioni si avrà la serie di uguaglianze

$$\begin{array}{l|l}
A_2 - A_1 = B_1 & C_2 - C_1 = D_1 \\
A_3 - A_2 = B_2 & C_3 - C_2 = D_2 \\
A_4 - A_3 = B_3 & C_4 - C_3 = D_3 \\
\text{ec.} & \text{ec.} \\
A_r - A_{r-1} = B_{r-1} & C_{r-2} - C_{r-3} = D_{r-3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
B_2 - B_1 = C_1 & D_2 - D_1 = E_1 \\
B_3 - B_2 = C_2 & D_3 - D_2 = E_2 \\
B_4 - B_3 = C_3 & D_4 - D_3 = E_3 \\
\text{ec.} & \text{ec.} \\
B_{r-1} - B_{r-2} = C_{r-2} & D_{r-3} - D_{r-4} = E_{r-4} \\
& \text{ec.}
\end{array}$$

Ora da queste si ha in primo luogo

$$A_2 = A_1 + B_1 ,$$

inoltre

$$A_3 = A_2 + B_2 = A_1 + B_1 + B_2 ,$$

e sostituendo il valore di

$$B_2 = B_1 + C_1$$

sarà

$$A_3 = A_1 + 2B_1 + C_1 .$$

Parimenti essendo

$A_4 = A_3 + B_3$, e $B_3 = B_2 + C_2 = B_1 + 2C_1 + D_1$,

sostituendo i valori di A_3, e di B_3, si avrà

$A_4 = A_1 + 3B_1 + 3C_1 + D_1$.

In simil guisa ponendo nell' equazione

$$A_5 = A_4 + B_4$$

il valor precedente di A_4, e quello di $B_4 = B_3 + C_3 = B_2 + C_2 + C_3 = B_1 + C_1 + C_1 + D_1 + C_2 + D_2 = B_1 + 2C_1 + D_1 + C_1 + D_1 + D_1 + E_1 = B_1 + 3C_1 + 3D_1 + E_1$,
si troverà

$$A_5 = A_1 + 4B_1 + 6C_1 + 4D_1 + E_1 .$$

E seguitando in questo modo, ed osservando che pel termine generico A_r i coefficienti numerici de' singoli termini sono quelli del binomio newtoniano corrispondenti all' esponente $r-1$, se ne ricaverà la formola proposta.

Quindi se un qualche ordine di differenze sarà costante, come accade nelle serie aritmetiche, il termine generale sarà espresso da una funzione finita di r: in caso diverso l' espressione sarà infinitinomia, e perciò la serie corrispondente non sarà aritmetica.

§. 196. *Prop.* In quelle serie, il cui termine generale A_r è rappresentato come nella proposizione precedente, il termine sommatorio Σ_r ha per espressione

$$\Sigma_r = rA_1 + \frac{r(r-1)}{2} B_1 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} C_1 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} D_1 + \text{ec.}$$

Prima di tutto si dee osservare che se Σ_r esprime la somma de' termini $A_1 + A_2 + A_3 +$ ec. fino al termine A_r inclusivamente, e Σ_{r-1} esprima quella de' termini medesimi fino ad A_{r-1} solamente, sarà $\Sigma_r - \Sigma_{r-1} = A_r$.

Se dunque il valor proposto di Σ_r è vero, cangiando r in $r-1$, ne dovrà nascere quello di Σ_{r-1}, e sarà

$$\Sigma_{r-1} = (r-1)A_1 + \frac{(r-1)(r-2)}{2} B_1 + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3} C_1 + \text{ec.}$$

e sottratto il valore di Σ_{r-1} da quello di Σ_r, ne dovrà risultare quello di A_r. Ora è appunto

$$\Sigma_r - \Sigma_{r-1} = A_1 + (r-1)B_1 + \frac{(r-1)(r-2)}{2}C_1 +$$
$$\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2\,.\,3}D_1 + \text{ec.} = A_r\,.$$

Dunque il valore proposto di Σ_r è vero e genuino.

§. 197. *Es.* 1.° Si vuole il termine generale e sommatorio della serie

$$1\,,\,4\,,\,9\,,\,16\,,\,25\,,\,\text{ec.},$$

cioè dei quadrati de' numeri naturali.

In primo luogo prese le differenze, troveremo

Differenze 1.e $3\,,\,5\,,\,7\,,\,9\,,$ ec.

Differenze 2.e $2\,,\,2\,,\,2\,,$ ec.

Paragonando ora gli elementi di questa serie colle specie generali, avremo

$$A_1 = 1\,,\; B_1 = 3\,,\; C_1 = 2\,,\; D_1 = 0\,,$$

e quindi il termine generale domandato sarà

$$A_r = 1 + (r-1)3 + \frac{(r-1)\,(r-2)}{2}2 = r^2\,,$$

siccome doveva aspettarsi. Sarà in secondo luogo

$$\Sigma_r = r + \frac{r(r-1)}{2}3 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2\,.\,3}2 =$$
$$\frac{2r^3+3r^2+r}{2\,.\,3} = \frac{r(r+1)(2r+1)}{2\,.\,3}\,.$$

Se pertanto si volesse la somma de' primi dieci quadrati de' numeri naturali, cioè da 1 fino a 10^2 *inclusive*, a cagione di $r=10$, si avrebbe $\Sigma_{10} = 385$.

Es. 2.° Sia proposta la serie

$$1\,,\,-1\,,\,0\,,\,8\,,\,27\,,\,61\,,\,114\,,\,190\,,\,\text{ec.}$$

Prese le differenze successive troveremo

Diff.e 1.e $-2\,,\,1\,,\,8\,,\,19\,,\,34\,,\,53\,,\,76\,.$ ec.

Diff.e 2.e $3\,,\,7\,,\,11\,,\,15\,,\,19\,,\,23\,,$ ec.

Diff.e 3.e $4\,,\,4\,,\,4\,,\,4\,,\,4\,,$ ec.

Dunque avremo

$A_1 = 1$, $B_1 = -2$, $C_1 = 3$, $D_1 = 4$, $E_1 = 0$, e perciò la serie è aritmetica dell' ordine terzo. Troveremo pertanto, fatte le riduzioni,

$$A_r = \frac{4r^3 - 15r^2 + 5r + 12}{2 \cdot 3};$$

$$\Sigma_r = \frac{r(r+2)(r-2)(r-3)}{2 \cdot 3}.$$

§. 198. *Prop.* Una serie aritmetica del primo ordine è ricorrente del secondo; una serie aritmetica del secondo ordine è ricorrente del terzo; e in generale una serie aritmetica dell' ordine n^{simo} è ricorrente dell' ordine $(n+1)^{\text{simo}}$.

Sia la serie aritmetica espressa dai termini

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots, A_r, \text{ ec.};$$

e siccome in quelle del primo ordine le differenze

$$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_{r-1}$$

sono costanti, si avrà la relazione

$$B_{r-1} = B_{r-2},$$

ossia

$$A_r - A_{r-1} = A_{r-1} - A_{r-2},$$

e quindi

$$A_r - 2A_{r-1} + A_{r-2} = 0,$$

la quale è un' equazione di relazione, che spetta alle serie ricorrenti del secondo ordine, e da cui si forma la frazione generatrice (§. 182)

$$\frac{\alpha + \beta x}{1 - 2x + x^2}, \text{ ossia } \frac{\alpha + \beta x}{(1-x)^2}.$$

Nelle serie aritmetiche del secondo ordine, essendo costanti le differenze C_1, C_2, ..., C_{r-2}, sarà

$$C_{r-2} = C_{r-3},$$

e perciò $\quad B_{r-1} - B_{r-2} = B_{r-2} - B_{r-3}$,

ovvero $\quad B_{r-1} - 2B_{r-2} + B_{r-3} = 0$,

e finalmente $\quad A_r - 3A_{r-1} + 3A_{r-2} - A_{r-3} = 0$.

equazione che, contenendo il rapporto fra quattro coefficienti contigui della serie, mostra esser questa ricorrente del terzo ordine, e proveniente dalla frazione

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1-3x+3x^2-x^3}, \text{ ossia } \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(1-x)^3}.$$

In simil guisa si troverà per le serie aritmetiche del terzo ordine l'equazione di relazione

$$A_r - 4A_{r-1} + 6A_{r-2} - 4A_{r-3} + A_{r-4} = 0,$$

da cui si raccoglie che esse sono ricorrenti del quarto ordine, ed oriunde dalla frazione

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^5}{(1-x)^4};$$

e così di seguito.

Si vede inoltre con questo stesso discorso, che nelle serie dell'ordine n^{simo} le differenze prime formano una serie ricorrente dell'ordine n^{simo}; le differenze seconde una dell'ordine $(n-1)^{\text{simo}}$; le terze una dell'ordine $(n-2)^{\text{simo}}$, ec., sinchè si arriva alle differenze n^{sime}, che sono costanti.

Art. II.

Numeri figurati.

§. 199. Così si chiamano certi numeri, i quali considerati come aggregati di tanti punti si possono disporre secondo una qualche figura geometrica, come in triangolo, in quadrato, in pentagono, ec., ovvero in cubo, in piramide, ec. Noi però non consideriamo fra questi che i numeri formati ne' modi seguenti, e che distingueremo in ordini.

Chiamiamo numeri del primo ordine una successione di tante unità, come 1, 1, 1, 1, ec. Il termine generale di questa serie è costante, ossia è l'unità medesima; il termine sommatorio è lo stesso indice r, il quale esprime un numero qualunque di queste unità.

I numeri del secondo ordine si formano col sommare uno, poi due, poi tre, poi ec. di quelli del prim' ordine, e perciò sono compresi nella serie

$$1, 2, 3, 4, 5, \text{ec.},$$

che si dicono numeri *naturali*.

Quelli del terzo nascono colla somma successiva di uno, di due, di tre, ec., del secondo e sono compresi nella serie

$$1, 3, 6, 10, 15, \text{ec.}$$

Essi si chiamano anche *triangolari*.

I numeri 1, 4, 10, 20, ec. che nascono col sommare successivamente quelli del terzo sono dell' ordine quarto, e si chiamano *piramidali primi*.

I numeri 1, 5, 15, 35, 70, ec. similmente generati con quelli del quarto ordine appartengono al quinto, e son chiamati *piramidali secondi*.

In generale i numeri dell' ordine n^{simo} nascono dalla somma di uno, di due, di tre, ec., numeri dell' ordine $(n-1)^{\text{simo}}$.

§. 200. *Prop.* Assegnare il termine generale e sommatorio pe' numeri figurati di tutti gli ordini.

Quantunque si possa ottenere quanto ci proponiamo col metodo dell' Art. precedente, pure seguiteremo un' altra strada a fine di giungere più presto all' intento.

Prima ricaveremo col canone newtoniano le seguenti serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{ec.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ec.}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \text{ec.}$$

ec.

$$\frac{1}{(1-x)^r} = 1 + rx + \frac{r(r+1)}{2}x^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{2\cdot3}x^3 + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{2\cdot3\cdot4}x^4 + \text{ec.}$$

Gettando poscia un' occhiata su le file verticali de' termini di queste serie, si vede che nella prima vi sono tutte le unità, cioè i numeri di prim' ordine; nella seconda i numeri naturali ovvero di second' ordine; nella terza quelli del terz' ordine, ec. Quindi l' ultimo coefficiente di ciascuna fila verticale è il termine generale de' numeri in essa compresi.

Dunque all' ordine	corrisponde il termine generale
1.°	1
2.°	r
3.°	$\frac{r(r+1)}{2}$
4.°	$\frac{r(r+1)(r+2)}{2\,.\,3}$
ec.	ec.
n^{simo}	$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-2)}{2\,.\,3\ldots(n-1)}$

Per trovare il termine sommatorio si sommino tutte le superiori equazioni: la somma de' primi membri costituisce una progressione geometrica, e perciò per le dottrine elementari equivale a

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{(1-x)^r} - 1\right);$$

e se si spiega di nuovo la potenza $\frac{1}{(1-x)^r}$ in serie continuata fino alla potenza x^n, la somma anzidetta diventerà

$$\frac{1}{x}\left(rx + \frac{r(r+1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{2.3\ldots n}x^n\right):$$

ossia

$$r + \frac{r(r+1)}{2}x + \frac{r(r+1)(r+2)}{2.3}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{2.3\ldots n}x^{n-1} + \text{ec.},$$

onde paragonando i coefficienti di questa serie con gli omologi di quella che si ottiene sommando i secondi membri dell' equazioni di sopra, si vedrà che le serie degli ordini successivi avranno

il termine generale		, il termine sommatorio
1.°	1	r
2.°	r	$\frac{r(r+1)}{2}$
3.°	$\frac{r(r+1)}{2}$	$\frac{r(r+1)(r+2)}{2.3}$
4.°	$\frac{r(r+1)(r+2)}{2.3}$	$\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{2.3.4}$
ec.		ec.
n^{simo}	$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-2)}{2.3\ldots(n-1)}$	$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}{2.3\ldots n}$

dove si vede che il termine generale di un ordine è lo stesso che il termine sommatorio dell' ordine precedente.

§. 201. Rapporto alle serie geometriche, delle quali ci resterebbe a trattare, si dicono del prim' ordine quelle, il cui termine generale è della forma monomia BK^r; del 2.° ordine, se quello sia della forma binomiale BK^r+CH^r, e in generale dell' ordine n^{simo} quelle, il cui termine generale risulta da n parti tutte simili alle precedenti. Il primo ordine viene formato dalle progressioni geometriche ordinarie; ed abbiamo dall' Algebra elementare l' espressione del loro termine generale e sommatorio. Per quelle poi dell' ordine secondo o di altro più elevato, siccome risultano dall' aggregato di due o più del prim' ordine, così si avrà il loro termine generale e sommatorio coll' addizione di quelli, che spettano alle serie parziali che le compongono.

Dalla combinazione poi delle serie aritmetiche colle geometriche ne nasce una terza specie di serie *artimetico-geometriche*, il termine generale delle quali è della forma $(B + Cr)K^n$, ovvero $(B + Cr + Dr^2)K^n$, ec. Ma noi non potremmo parlarne senza estenderci più di quel che ci è permesso.

Art. III.

Interruzione, ed interpolazione delle serie.

§. 202. Se di una data serie se ne vuole formare un' altra co' termini medesimi presi a dati intervalli, o sia saltandone sempre un dato numero, la serie così formata si chiama *l' interrotta* della proposta.

Ma se per lo contrario fra i termini vicini di una serie si vuole inserire uno o più termini, di modo che quella che ne nasce sia regolata colla medesima legge, ciò si chiama *interpolare* la serie proposta. In senso più generale l' interpolazione di una serie consiste nell' assegnare i termini corrispondenti agli indici fratti o irrazionali.

Se si ha il termine generale in termini finiti, ambidue questi problemi sono di facil soluzione, come ora vedremo; ma se non si ha l' espressione finita di esso, allora bisogna ricorrere alle approssimazioni, per le quali vi hanno de' metodi assai ingegnosi. Noi non possiamo far conoscere ai nostri Allievi che la parte più elementare di questa importante dottrina.

§. 203. *Prop.* Dato il valore di A_r nella serie

$(M)\quad A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots, A_r,$ ec.

trovar quello della sua interrotta per un dato intervallo fra i suoi termini.

Sia p il numero de' termini che si saltano ogni volta nella (M) per formare quelli dell' interrotta, che chiameremo (N). Prima di tutto si dee osservare che la serie (N) può aver per primo suo termine tanto A_1, quanto A_2, e in generale A_m, essendo m un numero qualunque intiero, positivo o negativo, preso nella serie degli indici 1, 2, 3, 4, ec., la quale si può continuare tanto a destra quanto a sinistra ad arbitrio. Supponiamo dunque A_m il primo termine dell' interrotta; il secondo dovrà essere A_{m+p+1}, acciocchè vi sia compreso nella (M) un numero p di termini. Dunque gli indici della (N) progrediranno colla differenza $p+1$, e perciò essa sarà rappresentata da

$(N)\quad A_m, A_{m+p+1}, A_{m+2(p+1)}, A_{m+3(p+1)}, \ldots, A_{m+(r-1)(p+1)},$

l' ultimo de' quali termini rappresenta appunto il termine generale che si domandava.

Pertanto laddove nella (M) il termine generale o r^{simo} ha per indice lo stesso numero r, nella (N) invece il termine r^{simo} avrà per indice il numero

$$m+(r-1)(p+1), \text{ ossia } (p+1)r+m-p-1.$$

Basterà dunque di cangiare nel termine generale della (M) r in $(p+1)r+m-p-1$, e si avrà quello della (N).

§. 204. *Osserv.* Siccome tanto r quanto $(p+1)r+m-p-1$ sono funzioni lineari della stessa r, perciò il termine generale non cangerà dimensioni, e la serie (N) conserverà ancora l'ordine a cui appartiene la (M).

Inoltre essendo m un numero arbitrario, se si vorrà che l'interrotta incominci dal primo termine A_1 della proposta, si dovrà fare $m=1$, e quindi il simbolo del termine generale sarà $A_{(p+1)r-p}$. Se si vorrà per primo termine dell'interrotta il secondo della proposta, si farà $m=2$, e si avrà $A_{(p+1)r-p+1}$ per termine generale; e così in progresso.

§. 205. *Es.* Sia proposta la serie de' numeri triangolari

$$1\,,\ 3\,,\ 6\,,\ 10\,,\ 15\,,\ 21\,,\ 28\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{r(r+1)}{2}.$$

Il termine generale dell' interrotta sarà

$$\frac{[(p+1)r+m-p-1][(p+1)r+m-p]}{2}.$$

Supponiamo che nella proposta si saltino sempre due termini; sarà $p=2$; e perciò il termine generale diventerà

$$\frac{(3r+m-3)(3r+m-2)}{2}.$$

Quindi ponendo , la serie interrotta sarà

$m=1$	$1\,,\ 10\,,\ 28\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{(3r-2)(3r-1)}{2}$
$m=2$	$3\,,\ 15\,,\ 36\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{(3r-1)3r}{2}$
$m=3$	$6\,,\ 21\,,\ 45\,,\ \ldots\ldots,\ \frac{3r(3r+1)}{2}$
ec.	ec.

Si potrebbero dare ad m anche i valori $0\,,\,-1\,,\,-2$, ec. e si avrebbe un' altra fila di serie, che sarebbero altrettante interrotte della proposta.

§. 206. *Prop.* Interpolare una data serie, quando si abbia il suo termine generale.

Siccome questo problema è l' inverso del precedente, così dovrà sciogliersi coll' operazione inversa. Se dunque per passare dalla serie data all' interrotta abbiamo cangiato r in $(p+1)r+m-p-1$, ora dovremo cangiare $(p+1)r+m-p-1$ in r, o piuttosto r in $\frac{r-m+p+1}{p+1}$, e facendo per maggior semplicità e comodo $m=1$, si cangerà r in $\frac{r+p}{p+1}$. Il termine generale della serie proposta con questo mezzo esprimerà la serie stessa, in cui si inseriscano p termini fra due qualunque vicini.

Es. 1.° Se si vorrà interpolare la progressione aritmetica

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots,\ a+(r-1)d,$$

col cangiamento prescritto si troverà per termine generale dell' interpolata $a+\frac{(r-1)d}{p+1}$.

Se dunque si vorrà inserire un sol termine fra ciascuno della proposta, si calcoleranno i termini dell' interpolata col termine generale $a+\frac{(r-1)d}{2}$; e se occorresse di inserirvene due, tre, ec., basterà porre $p=2, 3$, ec.

Nel caso che si volessero i termini d' una progressione di cui 3, e 120 fosser gli estremi, e risultasse da quattordici termini in tutto, si porrebbe $a=3, d=117, p=12$, e il termine generale della serie generata dall' interpolazione sarebbe $3+(r-1)\frac{117}{13}$, ossia $9r-6$, onde essa è subito formata.

Es. 2.° Per una progressione geometrica

$$a,\ ah,\ ah^2,\ ah^3,\ \ldots,\ ah^{r-1}$$

si avrà coll' interpolazione il termine generale $ah^{\frac{r-1}{p+1}}$.

Volendo inserire pertanto fra i termini della progressione

$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{r-1}$

due nuovi termini, si farebbe $p=2$, e si calcolerebbe l'interpolata col termine generale $2^{\frac{r-1}{3}}$, e sarebbe

$1, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}}, 2, 2^{\frac{4}{3}}, 2^{\frac{5}{3}}, 2^2$, ec.

Es. 3.º Se nella serie

$$1, 10, 28, 55, \ldots, \frac{(3r-2)(3r-1)}{2}$$

trovata precedentemente al §. 205 si vorranno inserire due termini fra ciascun intervallo, troveremo per termine generale $\frac{r(r+1)}{2}$, da cui abbiamo la serie completa de' numeri triangolari $1, 3, 6, 10, 15$, ec., che ci dovevamo aspettare.

§. 207. Mancando l'espressione finita del termine generale, il precedente metodo non può più adoperarsi, ed abbiamo già avvertito che bisogna ricorrere alle approssimazioni. *Newton* nel suo *Methodus Differentialis* ha ridotto la quistione di interpolare alcuni termini fra quelli di una serie a trovare una curva di genere parabolico, che passi per le estremità di alcune ordinate date ed equidistanti. Per curva di genere parabolico egli intese quella, una di cui ordinata sia espressa da una funzione intiera e razionale dell' ascissa. Chiamando dunque y l'ordinata, x l'ascissa, l'equazione di qualunque curva di genere parabolico potrà riferirsi ad una delle seguenti forme

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ec.}$$
$$y = A + Bx + Cx(x-a) + Dx(x-a)(x-b) + \text{ec.}$$

Sian dunque su l'asse AZ (Fig. 5.ª) erette le ordinate Aa, Bb, Cc, Dd, ec. tutte equidistanti fra loro, e si immagini la curva $abcd$ ec. che passi per le loro estremità. Se prendendo le differenze fra le ordinate consecutive, indi le differenze fra le differenze si arriverà ad un qualche ordine di differenze costanti, l'equazione sarà finita, e perciò sarebbe l'espressione vera del termine generale della serie formata dalle ordinate, la quale sarebbe esattamente interpolabile col metodo precedente; ma se, come avviene nel caso di cui parliamo, non si arriva mai ad un ordine di differenze costanti, allora l'equazione sarà infinitinomia, e la curva passerà bensì per le estremità di tutte le ordinate date, ma non passerebbe nè per quelle che si trovano al di là di esse, nè per quelle che fossero innalzate tra mezzo di loro. Chiunque può facilmente comprendere che le ordinate Aa, Bb, Cc, ec. rappresentano i termini della serie proposta ad interpolarsi, e le Pp, Qq, ec. intermedie i termini interpolati. Inoltre l'ascissa x corrisponde all'indice generico r adoperato precedentemente, ed y al termine generale A_r. Quanto più grande poi sarà il numero delle ordinate, che corrisponderanno ad un dato segmento dell'asse, tanto più le ordinate interpolate s'approssimeranno alle vere ordinate della curva.

§. 208. *Prop.* Data una serie α, β, γ, δ, ε, ec. di ordinate, trovare prossimamente la curva che passa per le loro estremità.

Diamo per maggior comodo e brevità di calcolo all'equazione della curva, che si cerca, la forma

$$y = A - Bx + \frac{Cx(x-1)}{2} - \frac{Dx(x-1)(x-2)}{2\,.\,3} + \frac{Ex(x-1)(x-2)(x-3)}{2\,.\,3\,.\,4} - \text{ec.},$$

in cui i coefficienti A, B, C, ec. debbono essere funzioni di α, β, γ, ec. da determinarsi. Supponiamo inoltre che le ordinate date siano equidistanti fra di loro e che corrispondano alle ascisse 0, 1, 2, 3, 4, ec. rispettivamente. Ponendo questi valori invece di x nell' equazione assunta, avremo le equazioni particolari

$$\begin{aligned}
\alpha &= A \\
\beta &= A - B \\
\gamma &= A - 2B + C \\
\delta &= A - 3B + 3C - D \\
\varepsilon &= A - 4B + 6C - 4D + E
\end{aligned}$$

ec.

e da queste avremo facilmente i seguenti valori

$$\begin{aligned}
A &= \alpha \\
B &= \alpha - \beta \\
C &= \alpha - 2\beta + \gamma \\
D &= \alpha - 3\beta + 3\gamma - \delta \\
E &= \alpha - 4\beta + 6\gamma - 4\delta + \varepsilon
\end{aligned}$$

ec.

Per vedere poi come nascano questi valori, si dispongano le quantità date le une dopo le altre, e se ne cerchino le differenze prime, seconde, terze, ec., come segue:

	α,	β,	γ,	δ,	ε
Diff.^{e} 1.^{e}	$-\alpha+\beta$,	$-\beta+\gamma$,	$-\gamma+\delta$,	$-\delta+\varepsilon$	
Diff.^{e} 2.^{e}	$\alpha-2\beta+\gamma$,	$\beta-2\gamma+\delta$,	$\gamma-2\delta+\varepsilon$		
Diff.^{e} 3.^{e}	$-\alpha+3\beta-3\gamma+\delta$,	$-\beta+3\gamma-3\delta+\varepsilon$			
Diff.^{e} 4.^{e}	$\alpha-4\beta+6\gamma-4\delta+\varepsilon$				
ec.	ec.				

e si vedrà che il primo termine di ciascuna classe di differenze ci somministra i valori di A, B, C, ec., avuto riguardo al segno, che loro si è attribuito nell' equazione generica. I coefficienti numerici di questi valori non sono che quelli d'un binomio come $1-z$ elevato alle potenze successive $0, 1, 2, 3$, ec.

§. 209. *Es.* 1.° Siano dati i primi sei termini della serie

$$1\,,\quad \frac{1}{2}\,,\quad \frac{3}{8}\,,\quad \frac{5}{16}\,,\quad \frac{35}{128}\,,\quad \frac{63}{256}$$

Diff.e 1.e $\quad -\frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{8}\,,\ -\frac{1}{16}\,,\ -\frac{5}{128}\,,\ -\frac{7}{256}$

Diff.e 2.e $\quad \frac{3}{8}\,,\ \frac{1}{16}\,,\ \frac{3}{128}\,,\ \frac{3}{256}$

Diff.e 3.e $\quad -\frac{5}{16}\,,\ -\frac{5}{128}\,,\ -\frac{3}{256}$

Diff.e 4.e $\quad \frac{35}{128}\,,\ \frac{7}{256}$

Diff.e 5.e $\quad -\frac{63}{256}$.

Dunque avremo

$$A=1\,,\ B=\frac{1}{2}\,,\ C=\frac{3}{8}\,,\ D=\frac{5}{16}\,,\ E=\frac{35}{128}\,;\ F=\frac{63}{256}\,;$$

e perciò

$$y=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}\,\frac{x(x-1)}{2}-\frac{5}{16}\,\frac{x(x-1)(x-2)}{2\,.\,3}+$$

$$\frac{35}{128}\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2\,.\,3\,.\,4}-\frac{63}{256}\,\frac{x(x-1)\ldots(x-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.$$

Vogliasi ora interpolare un termine equidistante fra i due primi 1 e $\frac{1}{2}$ della serie data. Siccome si dee riguardare il primo termine 1 come l'ordinata corrispondente all'ascissa $=0$, ed il secondo come l'ordinata dell'ascissa $=1$; perciò per ottenere l'ordinata media, si farà $x=\frac{1}{2}$, e si otterrà

$$y = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{64} - \frac{5}{256} - \frac{175}{16384} - \frac{441}{65530} = 0,\ 66618 \text{ in circa}$$

Facendo poi $x = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, si avrebbero con calcolo somigliante i termini intermedj fra i restanti della serie data.

Es. 2.º M. *Bossut* volendo scoprire per mezzo dell'esperienza il rapporto che passa fra i volumi d'acqua erogati da un recipiente, e la lunghezza de' tubi orizzontali, che ne permettono l'uscita, osservò che dando all'acqua del recipiente un piede parigino d'altezza, e facendola uscire per un tubo orizzontale di sedici linee di diametro, al variarsi della lunghezza di questo secondo il numero de' piedi espressi dalla serie

0 , 30 , 60 , 90 , 120 , 150 , 180

corrispondevano i numeri de' piedi cubici di acqua

6330 , 2778 , 1957 , 1587 , 1351 , 1178 , 1052.

Con questi dati si vuole cercare la legge analitica che esprima prossimamente il rapporto della quantità d'acqua colla lunghezza del tubo. Dicasi y l'acqua corrispondente alla lunghezza variabile x del tubo: si prenda la lunghezza di 30 piedi $= 1$, e le lunghezze precedenti potranno rappresentarsi colle ascisse

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

Si cerchino le differenze successive fra i numeri dati che esprimono i valori diversi di y, come segue

	6330	2778	1957	1587	1351	1178	1052
Diff.e 1.e	−3552	−821	−370	−236	−173	−126	
Diff.e 2.e	2731	451	134	63	47		
Diff.e 3.e	−2280	−317	−71	−16			
Diff.e 4.e	1963	246	55				
Diff.e 5.e	−1717	−191					
Diff.e 6.e	1526						

onde si avrà

$A = 6330$, $B = 3552$, $C = 2731$, $D = 2280$,

$E = 1963$, $F = 1717$, $G = 1526$,

e quindi il rapporto cercato sarà contenuto nell' equazione

$$y =$$

$$6330 - 3552\,x + 2731\,\frac{x(x-1)}{2} - 2280\,\frac{x(x-1)(x-2)}{2\,.\,3} +$$

$$1963\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2\,.\,3\,.\,4} - 1717\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}$$

$$+ 1526\,\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}.$$

Se si volesse per es. l' acqua erogata da un tubo di 100 piedi, siccome questa lunghezza corrisponderebbe all' ascissa $\frac{10}{3}$, basterebbe di dare ad x questo valore per avere il corrispondente di y. Dando ad x altri valori si troverebbero similmente gli altri di y abbastanza approssimanti al vero per ciò che si può richiedere in pratica.

§. 210. La dottrina delle interpolazioni, di cui noi non abbiam dato che i principj più elementari, è il segreto di riserva del Geometra, ogni qual volta gli mancano i dati per connettere con continuità analitica certe funzioni di variabili con altre; ovvero, parlando in altri termini, certi effetti conosciuti colla scala destinata a misurarli. L' ultimo esempio superiormente recato mostra ch' essa non è riservata alla sola analisi pura, ma si estende per tutti i rami delle matematiche miste, e dovunque i fatti si rapportano a misure. Se per esempio si volesse la figura di una sezione verticale di un fiume, perpendicolare alla direzione del corso dell' acqua, fissata una linea retta radente la superficie di essa, e divisa in varie parti uguali, si scandaglierebbe la profondità dell' alveo ne' punti di divisione, e la curva che passerebbe per le estremità di tutte le altezze misurate sarebbe prossimamente quella che si cerca. L' Astronomo dopo aver osservato diversi luoghi di un pianeta, che corrispondono a dati momenti di tempo, ne sa assegnare mediante le interpolazioni il luogo per un altro momento di tempo intermedio ai precedenti. M. *Prony* nel secondo volume della Scuola Politecnica ha applicato questa stessa dottrina alla dilatazione de' fluidi elastici, come l' aria atmosferica, ed i gas più conosciuti, ed alla forza espansiva de' vapori dell' acqua e dell' alkool. La sua formola, che si appoggia ad un principio ricavato dalle serie ricorrenti, ha il vantaggio sopra la nostra e sopra le altre conosciute di non contenere nel valor di y, o sia dell' effetto che si vuol calcolare dietro gli altri osservati, che un numero di termini uguale alla metà al più del numero delle osservazioni; ma noi non possiamo che rimandare i nostri Lettori al citato Volume.

Del resto questa dottrina è pressochè tutta moderna: *Briggs* ne conosceva sicuramente il principio, quando calcolò le prime sue tavole logaritmiche, e *Wallis* quando trovò la sua espressione approssimata della misura del cerchio. Il metodo insegnato da *Newton* fu notabilmente illustrato dal *Walmesley*, indi ampliato da *Stirling*, che l' applicò a diversi problemi, i quali senza di esso sarebbero stati di assai difficile soluzione. *Federico Mayer*, *Lacaille*, *Lalande* insegnarono altre formole assai utili alla pratica; *Lagrange* e *Charles* hanno dato alle interpolazioni una più vasta generalità.

FINE

INDICE

Fig. 1.

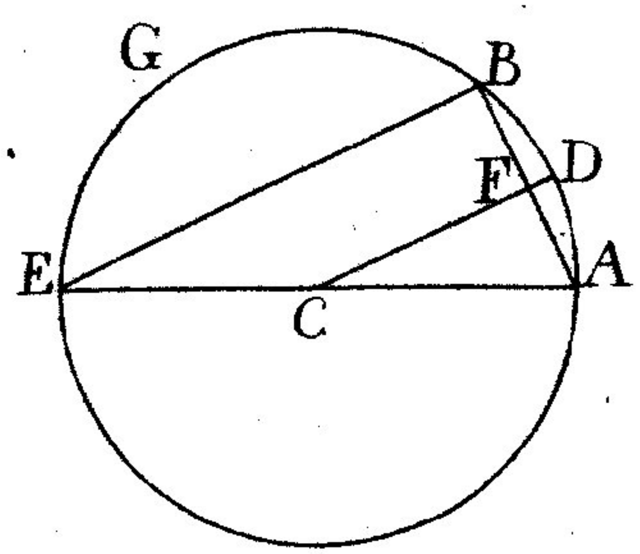

Fig. 2.

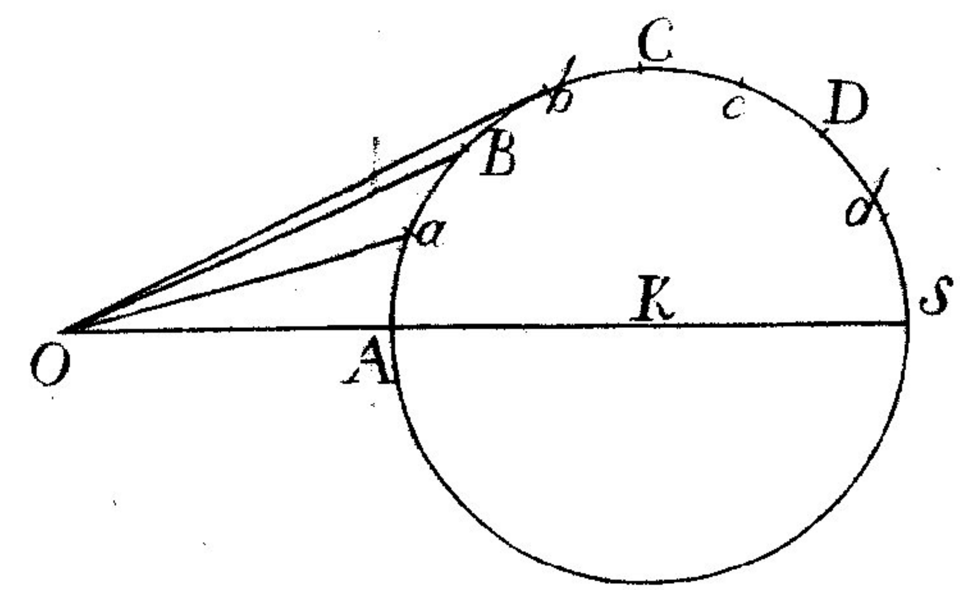

Fig. 3.

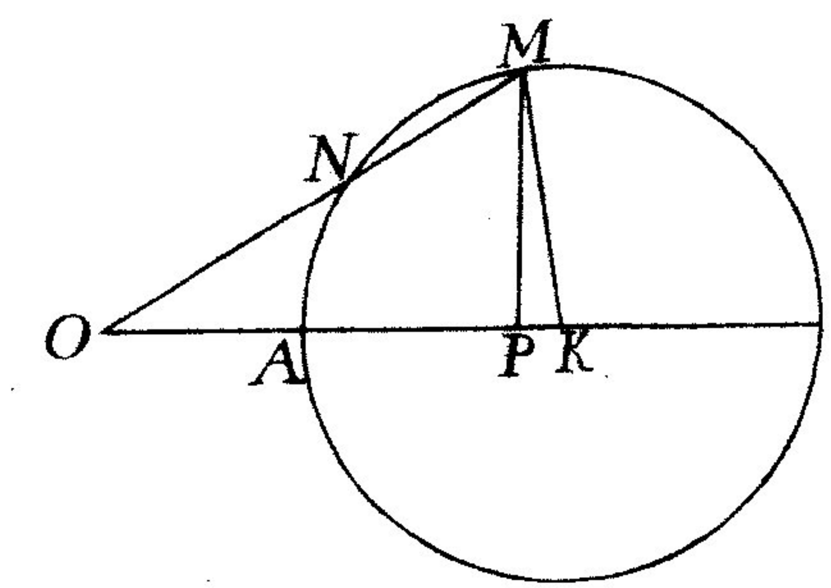

Fig. 4.

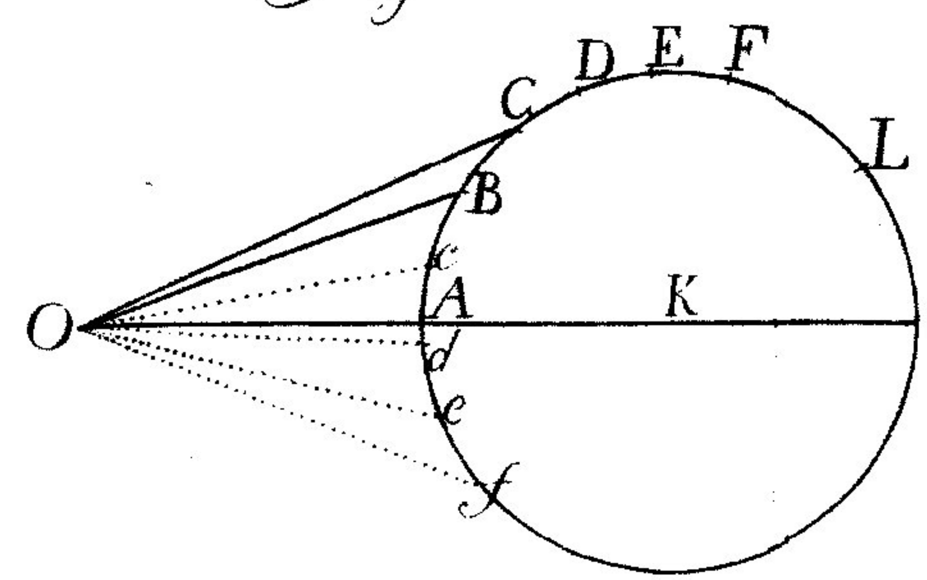

Fig. 5.