

ROY  
ALGER

T. H.

**COMPLEMENTO**  
**DEGLI**  
**ELEMENTI D'ALGEBRA**

**DEL SIGNORE**

**S. F. LACROIX**

*PRIMA EDIZIONE ITALIANA*

**TOMO II.**

---

**FIRENZE**  
**PRESSO GUGLIELMO PIATTI**  
**1810.**



# COMPLEMENTO .

## DEGLI

### ELEMENTI D'ALGEBRA

---

*Delle funzioni simmetriche delle radici  
dell'equazioni.*

1. **S**i chiama *funzione* d'una, o di più quantità, qualunque espressione composta di queste quantità, ovvero il cui valore dipende dalle medesime:  $x^n$ ,  $\frac{1}{x^m}$  son funzioni di  $x$ ;  $ax + b$ ,  $\frac{ax^n + b}{cx^m + d}$ , ec. son parimente funzioni di  $x$ , allorchè si riguardano come determinate o cognite le quantità  $a$ , e  $b$ ,  $c$ , e  $d$ . L'espressione  $axy - by^2$ , considerata per rapporto alle sole quantità  $x$ , e  $y$ , è una funzione di  $x$ , e  $y$ ; le radici d'un'equazione, dipendendo dai suoi coefficienti, e dal suo esponente, sono, per tal ragione, funzioni di queste quantità.

Benchè non si possano in generale ottenere le radici d'un'equazione se non che per approssimazione, o con dei radicali, esistono tuttavia delle quantità, le quali dipendono da queste radici, e s'esprimono sotto una forma razionale per mezzo dei coefficienti dell'equazion proposta. Le quantità, di cui parlo son quelle, le quali contengono tutte le radici combinate similmente tanto tra

loro, tanto coll'altre quantità, e che per questa ragione le chiamerò *funzioni simmetriche*. La somma delle radici, quella dei loro prodotti due a due, tre a tre, ec., date rispettivamente dai coefficienti del secondo, del terzo, del quarto, ec. termini dell'Equazioni, son funzioni *simmetriche*.

Si riconosce in generale una funzione *simmetrica* da questo, che dessa non cangia valore per qualunque permutazione che facciasi tralle quantità, da cui la detta funzione dipende.

La ragione di ciò si trova in una proprietà ragguardevolissima dell'Analisi, la quale è una conseguenza necessaria della sua generalità; ed è che l'equazione, dalla quale dipende la determinazione d'una *funzione* qualunque, contien sempre tutti i valori, dei quali questa *funzione* è suscettibile cangiando l'une nell'altre le quantità, sull'ordine, e valor delle quali le convenzioni del Problema nulla abbiano stabilito di particolare.

I Problemi seguenti, benchè semplicissimi, spargeranno molta luce sopra questo soggetto.

2. Se ci proponghiamo primieramente di *trovar due quantità, la cui somma sia p, ed il prodotto sia q.*

Rappresentate per  $x$ , e  $y$  queste due quantità, avremo

$$\left. \begin{array}{l} x+y=p \\ xy=q \end{array} \right\}, \text{ dalle quali ricaveremo } \begin{cases} x^2-px+q=0, \\ y^2-py+q=0. \end{cases}$$

Le due incognite  $x$ , e  $y$  saranno le radici d'una medesima equazione, perchè desse entrano ambedue della stessa maniera nelle condizioni del Problema.

Suppongo adesso che, in vece di cercare immediatamente le quantità  $x$ , e  $y$ , ci limitiamo a dimandare il valore della lor differenza  $x-y$ :

l' otterrem senza pena, poichè, in virtù dell' equazioni proposte, avremo

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2, 4xy = 4q;$$

togliendo il secondo risultato dal primo, verrà

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = p^2 - 4q,$$

dalla quale

$$x - y = \pm \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Era facile prevedere che la funzione  $x - y$  avrebbe avuto due valori, e che in conseguenza essa dipenderebbe da un' equazione di secondo grado; imperocchè tanto nell' enunciato del Problema, quanto nella maniera di risolverlo, niente indicava se si cercasse  $x - y$ , ovvero  $y - x$ . La funzione  $x^2 + y^2$ , al contrario, nella quale è indifferente il cangiare  $x$  in  $y$ , e reciprocamente, non essendo suscettibile che d' un solo valore, non dipenderà che da un' equazione di primo grado. Infatti, se dall' equazione  $x^2 + 2xy + y^2 = p^2$ , si toglie la seguente  $2xy = 2q$ , ne risulterà

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2q.$$

Queste osservazioni saranno tantopiù ben comprese, quanto più saremo abituati nei metodi dell' Analisi.

3. È facil vedere che se  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ , e  $\varepsilon$  indicano le radici d' un' equazione di quinto grado, le quantità

$$\begin{aligned} & \alpha + \epsilon + \gamma + \delta + \varepsilon \\ & \alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2, \\ & \alpha^3 + \epsilon^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3, \\ & \text{ec.} \end{aligned}$$

saranno delle funzioni *simmetriche* di queste radici. Sarebbe lo stesso delle potenze simili delle radici d' un' equazione di grado qualunque. *Newton*

ha dato delle formole elegantissime per calcolarle senza che vi sia bisogno di risolvere l'equazione proposta. Queste formole, ch'ei non dimostra, sono della maggiore importanza nella Teoria dell'equazioni: io vi perverrò in una maniera semplice per mezzo della formula trovata nel n.º 180. degli *Elementi*.

4. Sia  $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \dots + Tx + U = 0$  l'equazione proposta; avremo, mediante il risultato della divisione del primo membro di quest'equazione per  $x - a$ , ordinato per rapporto a  $x$ ,

$$\begin{array}{cccc} x^{m-1} + a & | & x^{m-2} + a^2 & | & x^{m-3} + a^3 & | & x^{m-4} \dots & + a^{m-1} \\ + P & | & + aP & | & + a^2 P & | & & + a^{m-2} P \\ & & + Q & | & + a Q & | & & + a^{m-3} Q \\ & & & & + R & | & & + a^{m-4} R \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & + T \end{array}$$

È evidente che, se il primo membro dell'equazione proposta dividasi ancora per  $x - \epsilon$ , avremo

$$\begin{array}{cccc} x^{m-1} + \epsilon & | & x^{m-2} + \epsilon^2 & | & x^{m-3} + \epsilon^3 & | & x^{m-4} \dots & + \epsilon^{m-1} \\ + P & | & + \epsilon P & | & + \epsilon^2 P & | & & + \epsilon^{m-2} P \\ & & + Q & | & + \epsilon Q & | & & + \epsilon^{m-3} Q \\ & & & & + R & | & & + \epsilon^{m-4} R \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & + T. \end{array}$$

Parimente, dividendolo per  $x - \gamma$ , otterremo

$$\begin{array}{cccc} x^{m-1} + \gamma & | & x^{m-2} + \gamma^2 & | & x^{m-3} + \gamma^3 & | & x^{m-4} \dots & + \gamma^{m-1} \\ + P & | & + \gamma P & | & + \gamma^2 P & | & & + \gamma^{m-2} P \\ & & + Q & | & + \gamma Q & | & & + \gamma^{m-3} Q \\ & & & & + R & | & & + \gamma^{m-4} R \\ & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & + T. \end{array}$$

E continuando nello stesso modo, s'otterrebbero tanti quozienti quante son le radici. Affin di

sommarli insieme, rappresenteremo per  $S_1$  la somma delle prime potenze delle radici, per  $S_2$  quella delle loro seconde potenze, per  $S_3$  quella delle loro terze potenze, finalmente per  $S_m$  la somma delle potenze del grado  $m$ : così avremo

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha + \zeta + \gamma + \delta + \varepsilon, \\ S_2 &= \alpha^2 + \zeta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2, \\ S_3 &= \alpha^3 + \zeta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_m &= \alpha^m + \zeta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m. \end{aligned}$$

Col mezzo di questi simboli troveremo per la somma di tutti i quozienti dati qui sopra l'espressione seguente

$$\left. \begin{array}{l} mx^{m-1} + S_1 \\ -mP \end{array} \middle| \begin{array}{l} x^{m-2} + S_2 \\ -PS_1 \\ -mQ \end{array} \middle| \begin{array}{l} x^{m-3} + S_3 \\ -PS_2 \\ -QS_1 \\ -mR \end{array} \middle| \begin{array}{l} x^{m-4} \dots + S_{m-1} \\ -PS_{m-2} \\ -QS_{m-3} \\ -RS_{m-4} \\ \dots\dots\dots \\ +mT. \end{array} \right\} (A)$$

Osservo adesso che ciascun quoziente particolare è il prodotto di tutti i fattori della proposta, eccetto quello, pel quale abbiamo diviso. Il primo di questi quozienti, per esempio, contiene tutti i fattori, eccetto  $x - \alpha$ ; il coefficiente del suo secondo termine sarà dunque la somma di tutte le radici, eccetto  $\alpha$ , prese con segni contrarj; quello del suo terzo termine la somma di tutti i loro prodotti due a due, eccetto quelli, nei quali v'entra la lettera  $\alpha$  combinata con ciascuna dell'altre; il coefficiente del quarto termine conterrà parimente tutti i loro prodotti a tre a tre, all'eccezione di quelli, che resulterebbero dalla lettera  $\alpha$  combinata con due altre qualunque; e così dei coefficienti consecutivi. Ciò, che abbiám detto in pro-

posito del primo quoziente, e della lettera  $\alpha$ , avrà luogo egualmente per rapporto al secondo, ed alla lettera  $\zeta$ , al terzo, ed alla lettera  $\gamma$ , ec.

Resulta da ciò che il coefficiente del secondo termine nella somma dei quozienti, ovvero nella funzione (A), è eguale a  $(m - 1)$  volte la somma delle radici prese con un segno contrario; poichè, se tutte le lettere si trovassero in ciascun quoziente, avremmo  $m$  volte questa somma; ma siccome ciascuna lettera manca una volta, dietro al già detto di sopra, esse non troverannosi tutte ripetute che  $(m - 1)$  volte. Avrem dunque  $(m - 1) P$  per il coefficiente del secondo termine di (A), ed in conseguenza

$$S_1 + m P = (m - 1) P.$$

Il coefficiente del terzo termine della funzione (A) conterrà più volte i diversi prodotti delle radici  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ , ec. combinati due a due, ma ciascuno di questi prodotti mancherà in due quozienti;  $\alpha \zeta$ , per esempio, non si troverà nè nel primo, nè nel secondo: tutti questi prodotti dunque non saran ripetuti che  $m - 2$  volte; e siccome la loro somma è espressa da Q nella proposta, avremo  $(m - 2) Q$  per il coefficiente del terzo termine della funzione (A); da che ne risulterà

$$S_2 + PS_1 + m Q = (m - 2) Q.$$

Il coefficiente del quarto termine della funzione (A) sarà formato dai prodotti delle radici prese con segni contrarj, e combinate tre a tre; ma ciascuno di questi prodotti mancherà in tre quozienti;  $-\alpha \zeta \gamma$ , per esempio, non si troverà nè nel primo, nè nel secondo, nè tampoco nel terzo; dunque ciascun prodotto non sarà ripetuto che  $(m - 3)$  volte; la loro somma essendo R nella pro-

posta,  $(m - 3) R$  sarà il coefficiente cercato, ed avremo in conseguenza

$$S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m - 3)R.$$

Possiamo spingere questi ragionamenti tant'oltre quanto vorrassi, e concluderemo

$$\left. \begin{array}{l} S_1 + mP = (m - 1)P \\ S_2 + PS_1 + mQ = (m - 2)Q \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + mR = (m - 3)R \\ \text{ec.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{di} \\ \text{dove} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} S_1 + P = 0 \\ S_2 + PS_1 + 2Q = 0 \\ S_3 + PS_2 + QS_1 + 3R = 0 \\ \text{ec.} \end{array} \right.$$

5. Otterremo per mezzo di queste formole la somma delle potenze delle radici ogni qualvolta l'esponente di queste potenze sarà minore di  $m$ ; ma non v'è cosa più facile che trovarla passato eziandio questo termine. Infatti basta per questo, come l'ha osservato *Euler*, di moltiplicar l'equazione proposta per  $x^n$ , e verrà

$$x^{m+n} + Px^{m+n-1} + Qx^{m+n-2} + Rx^{m+n-3} \dots + Tx^{n+1} + Ux^n = 0;$$

ponendo successivamente  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ , ec. in luogo di  $x$ , avremo

$$\begin{aligned} \alpha^{m+n} + P\alpha^{m+n-1} + Q\alpha^{m+n-2} + R\alpha^{m+n-3} \dots + T\alpha^{n+1} + U\alpha^n &= 0, \\ \epsilon^{m+n} + P\epsilon^{m+n-1} + Q\epsilon^{m+n-2} + R\epsilon^{m+n-3} \dots + T\epsilon^{n+1} + U\epsilon^n &= 0, \\ \text{ec.;} \end{aligned}$$

sommando tra loro questi risultati, concluderemo in virtù delli adottati simboli

$$S_{m+n} + PS_{m+n-1} + QS_{m+n-2} + RS_{m+n-3} \dots + TS_{n+1} + US_n = 0.$$

Quest'equazione collegasi perfettamente e con le precedenti; poichè, facendo  $n = 0$ , si ha

$$S_n = S_0 = \alpha^0 + \epsilon^0 + \gamma^0 + \delta^0 + \text{ec.};$$

e siccome  $\alpha^0 = 1, \epsilon^0 = 1, \gamma^0 = 1, \delta^0 = 1$  ec., segue da ciò che  $S_0$  è eguale all'unità ripetuta tante volte quante son le radici; ovvero è eguale a  $m$ .

Per mezzo di quest'osservazione l'equazione di sopra diviene

$$S_m + PS_{m-1} + QS_{m-2} + RS_{m-3} \dots + TS_1 + mU = 0; \quad \star$$

resultato, la cui forma corrisponde a quella dell'ultima equazione del num.<sup>o</sup> precedente, la quale sarebbe

$$S_{m-1} + PS_{m-2} + QS_{m-3} + RS_{m-4} \dots + (m-1)T = 0.$$

Quest'equazioni, la cui legge è facile a rintracciarsi, contengono il Teorema, che *Newton* ha enunciato nella sua *Aritmetica Universale*, e ch'esso ha applicato all'equazione

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0:$$

in questo caso particolare, ove  $P = -1$ ,  $Q = -19$ ,  $R = +49$ ,  $S = -30$ , ha trovato

$$S_1 = 1, S_2 = 39, S_3 = -89, S_4 = 723.$$

Troverebbesi parimente

$$S_5 = -2849.$$

È visibile che, se si moltiplicasse l'equazione

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0$$

pel fattore  $x^{-n}$ , e che nel prodotto

$$x^{-n+m} + Px^{-n+m-1} + Qx^{-n+m-2} \dots + Tx^{-n+1} + Ux^{-n} = 0$$

si sostituissero successivamente, in luogo di  $x$ , i suoi valori  $\alpha$ ,  $\zeta$ , ec., e che poi si aggiungessero tra di loro i risultati diversi, s'avrebbero le relazioni delle somme delle potenze negative. Designando per  $S_{-n}$  la quantità  $\alpha^{-n} + \zeta^{-n} + \text{ec.}$ , otterrebbesi

$$S_{m-n} + PS_{m-1-n} \dots + TS_{1-n} + US_{-n} = 0.$$

6. Col soccorso dei risultati del numero precedente, qualunque sia funzione algebrica razionale, e *simmetrica* delle radici d'un'equazione qualunque potrà esprimersi per mezzo dei coefficienti di quest'equazione: l'esempio, che segue, benchè particolare, mostrerà sufficientemente in qual maniera la cosa debba in generale eseguirsi.

Sieno  $\alpha$ ,  $\zeta$ , e  $\gamma$  le radici d' un' equazione di terzo grado; se si moltiplican l' una per l' altra le quantità  $\alpha^n + \zeta^n + \gamma^n = S_n$ , e  $\alpha^p + \zeta^p + \gamma^p = S_p$ , ne risulterà

$$\left. \begin{aligned} &\alpha^{n+p} + \zeta^{n+p} + \gamma^{n+p} \\ &+ \alpha^n \zeta^p + \alpha^p \zeta^n + \alpha^n \gamma^p + \alpha^p \gamma^n + \zeta^n \gamma^p + \zeta^p \gamma^n \end{aligned} \right\} = S_n S_p;$$

ma la prima linea del primo membro è eguale a  $S_{n+p}$ , e la seconda è una funzione *simmetrica* delle radici  $\alpha$ ,  $\zeta$ , e  $\gamma$ , formata combinuandole due a due, e permutando a vicenda in ciascuna delle due l' esponente  $n$ , e l' esponente  $p$ : avrem dunque

$$\alpha^n \zeta^p + \alpha^p \zeta^n + \alpha^n \gamma^p + \alpha^p \gamma^n + \zeta^n \gamma^p + \zeta^p \gamma^n = S_n S_p - S_{n+p}.$$

È facil vedere che, in qualunque numero che sieno le radici  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , ec., il valor d' una funzione *simmetrica* della forma  $\alpha^n \zeta^p +$  ec. sarà sempre  $S_n S_p - S_{n+p}$ , le somme  $S_n S_p$ , e  $S_{n+p}$  essendo calcolate pel numero delle radici, che si considerano.

Moltiplicando per  $\alpha^q + \zeta^q + \gamma^q = S_q$  l' equazione precedente, avremo

$$\begin{aligned} &\alpha^{n+q} \zeta^p + \alpha^p \zeta^{n+q} + \alpha^{n+q} \gamma^p + \alpha^p \gamma^{n+q} + \zeta^{n+q} \gamma^p + \zeta^p \gamma^{n+q} \\ &+ \alpha^{p+q} \zeta^n + \alpha^n \zeta^{p+q} + \alpha^{p+q} \gamma^n + \alpha^n \gamma^{p+q} + \zeta^{p+q} \gamma^n + \zeta^n \gamma^{p+q} \\ &+ \alpha^n \zeta^p \gamma^q + \alpha^n \zeta^q \gamma^p + \alpha^p \zeta^n \gamma^q + \alpha^p \zeta^q \gamma^n + \alpha^q \zeta^n \gamma^p + \alpha^q \zeta^p \gamma^n \\ &= S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q. \end{aligned}$$

Le due prime linee del primo membro di quest' equazione essendo funzioni *simmetriche* formate dai prodotti di due lettere, saranno, dietro a ciò, che precede, espresse rispettivamente da

$$S_{n+q} S_p - S_{n+p+q}, \text{ e } S_{p+q} S_n - S_{n+p+q};$$

d' onde concluderemo che la terza linea, la qual' è una funzione *simmetrica* formata dai prodotti di tre lettere, sarà eguale a

$$S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2S_{n+p+q}.$$

S' avrebbe ancor qui, come nel caso precedente, un risultato della stessa forma, qualunque fosse il numero delle radici; di tal maniera che l'espressione di sopra è quella di qualunque funzione *simmetrica* composta de' prodotti di tre radici.

I metodi, dei quali ho fatt' uso per iscoprir le due formole precedenti, son generali, e, continuando le moltiplicazioni, arriveremo ad esprimere una funzione *simmetrica* qualunque, la quale non può mai offerire se non che una serie di termini tali che  $\alpha^n \zeta^p \gamma^q \delta^r$  ec., e nei quali ciascuna delle lettere  $\alpha, \zeta, \gamma$ , ec. trovasi affetta successivamente da tutti gli esponenti.

La formula data di sopra per l'espressione della funzione *simmetrica*  $\alpha^n \zeta^p \gamma^q +$  ec. debb' esser modificata allorchè alcuni degli esponenti  $n, p, q$  divengono eguali. Per fissare l'idea, supporrò che non s' abbiano che le radici  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ .

La funzione  $\alpha^n \zeta^p \gamma^q +$  ec. composta di tutte le disposizioni possibili degli esponenti  $n, p, q$  sulle lettere  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ , prese tre a tre, contiene in generale ventiquattro termini distinti; ma allorchè due di questi esponenti divengono eguali, come nella funzione  $\alpha^2 \zeta \gamma + \alpha^2 \zeta \delta +$  ec., essa non contien più che dodici termini differenti, ripetuti ciascuno due volte, ed il valore, che dà, in questo caso, l'espressione qui sopra, è doppio di quello, che debb' avere l'insieme dei dodici termini diseguali. Se i tre esponenti  $n, p, q$  divenissero eguali tra loro, la funzione  $\alpha^n \zeta^p \gamma^q +$  ec. non conterrebbe altro che quattro termini differenti, ripetuti ciascuno sei volte; ed in quest'ipotesi, bisognerà prendere pel valore di questi quattro termini il sesto della sua espression generale.

Tutte le funzioni *simmetriche* son suscettibili di simili riduzioni allorchè v'è eguaglianza tra qualcheduno de' loro esponenti; paragonando la

lor forma ridotta col loro generale sviluppo, vedrem facilmente per qual numero bisogna dividere l'espressione, che dà, rispetto alla generalità della formula, il metodo esposto di sopra.

Le funzioni frazionarie non debbon fare un articolo a parte: poichè, quand'esse sono *simmetriche*, ne resulta, dopo che abbiain dato ad esse il medesimo denominatore, una frazione, di cui i due termini son funzioni *simmetriche*, e intere. La funzione.....

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\xi}{\gamma} + \frac{\alpha}{\xi} + \frac{\gamma}{\xi} + \frac{\xi}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha},$$

per esempio, conduce a

$$\frac{\alpha^2 \xi + \alpha \xi^2 + \alpha^2 \gamma + \alpha \gamma^2 + \xi^2 \gamma + \xi \gamma^2}{\alpha \xi \gamma};$$

resultato, il cui numeratore, e denominatore son funzioni *simmetriche*. Più Geometri scnosì specialmente occupati di queste ricerche, e *Vandermonde*, in particolare, ha immaginato una specie di segno, ovvero un *algoritmo*, per mezzo del quale esso ha costrutte delle formule generali, che danno immediatamente l'espressione d'una funzione *simmetrica* qualunque siasi. Quelli che saranno curiosi di conoscere queste formule, potranno consultare la sua Memoria (*Accad. delle Scienze, anno 1771*).

7. Se si avesse una funzione, nella quale non entrasser che alcune delle radici dell'equazione proposta, potrebbesi ancora, per mezzo di ciò che precede, arrivare a formar la nuova equazione, dalla quale debb'essa dipendere. Che si tratti, per esempio, di determinare la somma di due qualunque delle radici dell'equazion generale del terzo grado; siccome non'evvi alcuna ragione, onde rappresentar questa somma per  $\alpha + \xi$

piuttosto che per  $\alpha + \gamma$ , ovvero per  $\xi + \gamma$ , queste tre espressioni debbon essere riguardate come tanti valori, dei quali detta somma è suscettibile: dessa in conseguenza dipenderà da un'equazione di terzo grado, che avrà per radici  $\alpha + \xi$ ,  $\alpha + \gamma$ ,  $\xi + \gamma$ , e si formerà eguagliando a zero il prodotto de' fattori

$$z - (\alpha + \xi), \quad z - (\alpha + \gamma), \quad z - (\xi + \gamma).$$

Effettuando il calcolo, troveremo

$$\left. \begin{aligned} z^3 - 2(\alpha + \xi + \gamma)z^2 + (\alpha^2 + \xi^2 + \gamma^2 + 3\alpha\xi + 3\alpha\gamma + 3\xi\gamma)z \\ - (\alpha^2\xi + \alpha\xi^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \xi^2\gamma + \xi\gamma^2) - 2\alpha\xi\gamma \end{aligned} \right\} = 0;$$

i coefficienti delle diverse potenze di  $z$  in questo risultato son funzioni *simmetriche*, delle quali troverem facilmente l'espressione; ed i valori dell'incognita  $z$  saranno quelli della funzione cercata.

L'equazion generale del terzo grado essendo rappresentata da  $x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$ , si avrà

$$\begin{aligned} \alpha + \xi + \gamma &= -P \\ \alpha^2 + \xi^2 + \gamma^2 + 3\alpha\xi + 3\alpha\gamma + 3\xi\gamma &= P^2 + Q, \\ \text{e } \alpha^2\xi + \alpha\xi^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \xi^2\gamma + \xi\gamma^2 &= S, S_1 - S_2: \end{aligned}$$

ma abbiamo, per mezzo dell'equazioni del n.º 4.,  
 $S_1 = -P$ ,  $S_2 = P^2 - 2Q$ ,  $S_3 = -P^3 + 3PQ - 3R$ ,  
 e di più

$$- \alpha\xi\gamma = R;$$

conseguiremo dunque

$$- (\alpha^2\xi + \alpha\xi^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \xi^2\gamma + \xi\gamma^2) - 2\alpha\xi\gamma = PQ - R,$$

ed in ultimo risultato

$$z^3 + 2Pz^2 + (P^2 + Q)z + PQ - R = 0.$$

Quest' esempio dimostra che per trovar l'equazione, dalla quale dipende una funzione qualunque delle radici della proposta, bisogna fare in questa

funzione tutte le permutazioni possibili tra le lettere  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ , ec., e designando per  $\alpha', \zeta', \gamma', \delta'$ , ec. i differenti risultati così ottenuti, eguaglieremo a zero il prodotto dei fattori  $z - \alpha', z - \zeta', z - \gamma', z - \delta'$ , ec. I coefficienti delle potenze di  $z$  nell'equazione, alla quale arriveremo, essendo delle funzioni *simmetriche* delle quantità  $\alpha', \zeta', \gamma', \delta'$ , ec., le quali contengono tra loro tutte le combinazioni, che si possono formare con le quantità  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$  ec. nella funzione cercata, saranno pure delle funzioni *simmetriche* di quest'ultime, e potranno in conseguenza esprimersi sotto una forma razionale per mezzo dei coefficienti della data equazione. Difatto è facil vedere che alcuna delle funzioni *simmetriche* di  $\alpha', \zeta', \gamma', \delta'$ , ec. non può cangiar di valore in qualunque maniera si permutino tra di loro le lettere  $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$ , ec., e questa invariabilità è, come l'abbiam veduto più alto, il carattere essenziale delle funzioni *simmetriche*.

8. Rovesciando l'espressioni di  $S_1, S_2, S_3$ , ec., date nel num.° 4, si ottengono le seguenti

$$P = -S_1,$$

$$Q = -\frac{PS_1 + S_2}{2},$$

$$R = \frac{QS_1 + PS_2 + S_3}{3}$$

ec.,

per mezzo delle quali si possono trovar i coefficienti  $P, Q, R$ , ec. d'un'equazione  $x^m + Px^{m-1} + \dots = 0$ , allorchè conosceremo le somme  $S_1, S_2, S_3$ , ec. delle potenze delle sue radici.

Queste formule sono comode per formar l'equazione concernente i quadrati delle differenze delle radici d'un'equazione data (*Elementi* §. 208.).

Sia, per esempio, l'equazione  $x^3 - 7x + 7 = 0$ ; designando per  $\alpha, \epsilon, \gamma$  le radici della proposta, conseguiremo

$$[z - (\alpha - \epsilon)^2][z - (\alpha - \gamma)^2][z - (\epsilon - \gamma)^2] = 0 \text{ (D).}$$

La somma delle radici di quest'ultima è

$$\begin{aligned} & (\alpha - \epsilon)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + (\epsilon - \gamma)^2 = \\ & 2(\alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\epsilon + \alpha\gamma + \epsilon\gamma) = 2S_2 - 2Q; \end{aligned}$$

quella dei loro quadrati

$$\begin{aligned} & (\alpha - \epsilon)^4 + (\alpha - \gamma)^4 + (\epsilon - \gamma)^4 = \\ & 2(\alpha^4 + \epsilon^4 + \gamma^4) - 4(\alpha^3\epsilon + \alpha\epsilon^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \epsilon^3\gamma + \epsilon\gamma^3) \\ & + 6(\alpha^2\epsilon^2 + \alpha^2\gamma^2 + \epsilon^2\gamma^2) = 3S_4 - 4S_3S_1 + 3S_2^2; \end{aligned}$$

quella dei loro cubi.

$$\begin{aligned} & (\alpha - \epsilon)^6 + (\alpha - \gamma)^6 + (\epsilon - \gamma)^6 = \\ & 2(\alpha^6 + \epsilon^6 + \gamma^6) - 6(\alpha^5\epsilon + \alpha\epsilon^5 + \alpha^5\gamma + \alpha\gamma^5 + \epsilon^5\gamma + \epsilon\gamma^5) \\ & + 15(\alpha^4\epsilon^2 + \alpha^2\epsilon^4 + \alpha^4\gamma^2 + \alpha^2\gamma^4 + \epsilon^4\gamma^2 + \epsilon^2\gamma^4) \\ & - 20(\alpha^3\epsilon^3 + \alpha^3\gamma^3 + \epsilon^3\gamma^3) = 3S_6 - 6S_5S_1 + 15S_4S_2 - 10S_3^2. \end{aligned}$$

Ma troveremo, per le formule del num.<sup>o</sup> 4.,

$$S_1 = 0, S_2 = 14, S_3 = -21, S_4 = 98, S_5 = -245, S_6 = 833;$$

chiamando dunque  $f_1, f_2, f_3$  le somme riportate qui sopra, avremo

$$f_1 = 42, f_2 = 882, f_3 = 18669;$$

e siccome esistono tra  $f_1, f_2, f_3$ , e i coefficienti  $p, q, r$  le medesime relazioni che tra  $S_1, S_2, S_3$ , ec., ed i coefficienti  $P, Q, R$ , ec., avremo ancora, per le formule sopraccitate,

$$p = -f_1 = -42,$$

$$q = \frac{-p.f_1 - f_2}{2} = \frac{1}{2} 441,$$

$$r = \frac{-q.f_1 - p.f_2 - f_3}{3} = -49;$$

e per conseguenza l'equazione (D) diverrà

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0,$$

come nel n.º 208. degli *Elementi*.

9. La Teoria dell'eliminazione, nell'equazioni a due incognite, deriva in una maniera assai semplice da quella delle funzioni *simmetriche* esposta negli articoli precedenti.

Sieno le due equazioni

$$x^m + P x^{m-1} + Q x^{m-2} + R x^{m-3} \dots + T x + U = 0 \dots (1),$$

$$x^n + P' x^{n-1} + Q' x^{n-2} + R' x^{n-3} \dots + Y' x + Z' = 0 \dots (2);$$

il metodo, che presentasi il primo per eliminar  $x$  da quest'equazioni, consiste nel prendere da una di esse il valore di  $x$ , per sostituirlo successivamente nell'altra. Supponghiamo dunque che l'equazione (1) sia risolta, e che si siano ottenuti i diversi valori  $x = \alpha$ ,  $x = \epsilon$ ,  $x = \gamma$ ,  $x = \delta$ , ec.: siccome questi appartengon tutti al Problema proposto, essi debbon essere sostituiti indistintamente nell'equazione (2), e produrranno così altrettanti risultati, che non conterranno  $x$ , quante radici ha l'equazione (1): avrem separatamente

$$\left. \begin{aligned} \alpha^n + P' \alpha^{n-1} + Q' \alpha^{n-2} + R' \alpha^{n-3} \dots + Y' \alpha + Z' &= 0 \\ \epsilon^n + P' \epsilon^{n-1} + Q' \epsilon^{n-2} + R' \epsilon^{n-3} \dots + Y' \epsilon + Z' &= 0 \\ \gamma^n + P' \gamma^{n-1} + Q' \gamma^{n-2} + R' \gamma^{n-3} \dots + Y' \gamma + Z' &= 0 \\ \delta^n + P' \delta^{n-1} + Q' \delta^{n-2} + R' \delta^{n-3} \dots + Y' \delta + Z' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ec.

Nessuna di queste equazioni, considerata in particolare, non può essere la resultante cercata; ma quest'ultima dee comprenderle tutte, ed aver luogo nel medesimo tempo che ciascuna di loro; condizione, alla quale sodisfaremo moltiplicandole tutte insieme, ed eguagliando il prodotto a zero; poichè questo prodotto diverrà identicamente nullo quando svanirà uno qualunque de' suoi fattori. Si

vede inoltre ch'esso non cangerà per qualunque permutazione, che si facesse nell'ordine delle quantità  $\alpha, \xi, \gamma, \delta$ , ec., le quali concorron tutte nella stessa maniera alla sua formazione; non conterrà dunque che delle funzioni *simmetriche* di queste quantità, e potrà in conseguenza esprimersi razionalmente per mezzo dei coefficienti dell'equazione (1).

Se l'equazioni (1), e (2) non contengono che due incognite  $x, y$ , e sian del medesimo grado tanto per rapporto all'una che all'altra, l'equazione finale in  $y$  non si alzerà al di sopra del grado  $m n$ . Infatti la somma degli esponenti di  $x$ , e  $y$  non potendo sorpassar  $m$  in ciascun termine dell'equazione (1),  $y$  non si troverà che al primo grado in P, al secondo in Q, al terzo in R... al  $(m-1)^{mo}$  in T, e finalmente al  $m^{mo}$  in U. Esaminando la composizione dell'equazioni, che danno  $S_1, S_2, S_3$ , ec. (4), vedremo che  $S_1$  non potrà essere che di primo grado in  $y$ ,  $S_2$  del secondo ec. Per mezzo di queste osservazioni concepirem facilmente che l'esponente di  $y$  in una funzione *simmetrica* qualunque  $\alpha^n \xi^p \gamma^q \delta^r$  ec. (6) non sorpasserà il numero  $n + p + q + r +$  ec., che indica il grado di questa funzione: potremo dunque riguardar le diverse potenze di  $\alpha, \xi, \gamma, \delta$ , ec. come funzioni di  $y$  del grado indicato dall'esponente, dal quale esse sono affette. Ma nell'equazione (2) la somma degli esponenti di  $x$ , e  $Y'$  non essendo mai maggiore di  $n$ ,  $P'$  sarà del primo grado in  $y$ ,  $Q'$  del secondo,  $R'$  del terzo,  $Y'$  del  $(n-1)^{mo}$ , e finalmente  $Z'$  del  $n^{mo}$ ; tutti i termini dell'equazioni (3) potranno dunque esser parimente riguardati come funzioni di  $y$  del grado  $n$  al più. Adesso, se facciamo attenzione che ciascun termine del prodotto dell'equazioni (3) avrà per fattori un nu-

mero  $m$  di termini di queste equazioni, saremo convinti che  $y$  non potrà trovarsi affetto da un esponente superiore a  $mn$ .

Quelli, che avran qualche pena a comprendere i precedenti ragionamenti, a motivo della loro gran generalità, faranno bene a sviluppare il prodotto dell'equazioni in qualche caso particolare.

10. Per dilucidar ciò, che precede, vado a farne l'applicazione alle due equazioni

$$x^2 + Px + Q = 0, \quad x^2 + P'x + Q' = 0 \text{ (Elem. 188);}$$

$\alpha$ , e  $\epsilon$  essendo le radici della prima, avremo, sostituendole nella seconda,

$$\alpha^2 + P'\alpha + Q' = 0, \quad \epsilon^2 + P'\epsilon + Q' = 0.$$

Il prodotto di queste due equazioni sarà

$$\alpha^2 \epsilon^2 + P(\alpha \epsilon^2 + \alpha^2 \epsilon) + P'^2 \alpha \epsilon + Q'(\alpha^2 + \epsilon^2) + P'Q'(\alpha + \epsilon) + Q'^2 = 0.$$

$$\text{ma } \alpha^2 \epsilon^2 = Q^2, \quad \alpha \epsilon^2 + \alpha^2 \epsilon = \alpha \epsilon (\alpha + \epsilon) = -PQ$$

$$\alpha^2 + \epsilon^2 = P^2 - 2Q \quad \alpha + \epsilon = -P.$$

Per mezzo dunque di questi valori il risultato qui sopra diventa

$$Q^2 - 2QQ' + Q'^2 + P^2 Q' - P'PQ \left. \begin{array}{l} \\ + P'^2 Q - PP'Q' \end{array} \right\} = 0,$$

ovvero, come nel num.<sup>o</sup> citato degli *Elementi*,

$$(Q - Q')^2 + (PQ' - P'Q)(P - P') = 0.$$

Sostituendo alle lettere  $P$ , e  $P'$ ,  $Q$ , e  $Q'$  le quantità, ch'esse rappresentano, avremo l'equazione finale in  $y$ .

11. La Teoria delle funzioni *simmetriche* trova ancora la sua applicazione nei Problemi a più incognite. Sien, per esempio, due equazioni contenenti le incognite  $x$ , e  $y$ ; se  $s$  indicano i valori di  $x$  con

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \text{ ec. ,}$$

quelli di  $y$  con

$$\alpha', \epsilon', \gamma', \delta', \text{ ec. ,}$$

di maniera che  $\alpha'$  corrisponda ad  $\alpha$ ,  $\zeta'$  a  $\zeta$ , e così di seguito, qualunque funzione di queste quantità, la quale resti la stessa allorchè vi si cangia un gruppo di valori in un altro, e reciprocamente, come, per esempio,  $\alpha$ , e  $\alpha'$  in  $\zeta$ , e  $\zeta'$ , poi  $\zeta$ , e  $\zeta'$  in  $\alpha$ , e  $\alpha'$ , è *simmetrica*, e può ottenersi razionalmente per mezzo dei coefficienti dell'equazioni proposte. Tale è la funzione

$$\alpha^p \alpha'^{p'} + \zeta^p \zeta'^{p'} + \gamma^p \gamma'^{p'} + \delta^p \delta'^{p'},$$

non supponendo che quattro valori a ciascuna dell'incognite.

*Waring* aveva indicato già da gran tempo, per ottenere queste funzioni, un mezzo, il qual si offre d'altronde per se medesimo: questo era di fare  $x^p y^{p'} = t$ , e d'eliminare  $x$ , e  $y$  tra quest'ultima equazione, e le proposte. La resultante in  $t$  avendo per radici le diverse combinazioni

$$\alpha^p \alpha'^{p'}, \zeta^p \zeta'^{p'}, \gamma^p \gamma'^{p'}, \text{ec.},$$

il coefficiente del suo secondo termine sarebbe un numero equivalente a

$$-(\alpha^p \alpha'^{p'} + \zeta^p \zeta'^{p'} + \gamma^p \gamma'^{p'} + \text{ec.}).$$

Questo metodo esigendo che con l'equazioni proposte se ne combini un'altra ove le incognite  $x$ , e  $y$  passano il primo grado, getta negli imbarazzi dell'eliminazione tra tre equazioni, e tre incognite, allorchè si tratta d'equazioni, le quali non ne contengon che due. *M. Poisson*, Professor d'Analisi alla Scuola Politecnica, ha immaginato un artificio, che toglie questa difficoltà.

Esso fa  $t = x + Ay$ ,  $A$  essendo un coefficiente *indeterminato*. Se prendiamo da quest'equazione il valor di  $x$ , o di  $y$ , quello di  $x$ , per esempio, il quale è  $t - Ay$ , per sostituirlo nelle due equazioni proposte, i risultati in  $t$ , e  $y$  saranno

sempre del medesimo grado; e se s'elimina  $y$ , l'equazion finale in  $t$  avrà per radici i diversi valori, che prende la funzione  $x + A y$  allorchè si sostituiscono alle incognite ciascun gruppo dei loro valori corrispondenti, cioè,

$$\alpha + A\alpha', \zeta + A\zeta', \gamma + A\gamma', \delta + A\delta', \text{ ec.}$$

La somma delle potenze simili di queste radici, ovvero la funzione

$(\alpha + A\alpha')^r + (\zeta + A\zeta')^r + (\gamma + A\gamma')^r + (\delta + A\delta')^r + \text{ec.}$ , sarà espressa da una funzione razionale de' coefficienti dell'equazione in  $t$ , i quali non conteranno che quelli delle proposte, e la lettera  $A$ ; ma la prima di queste funzioni si sviluppa nel modo, che segue

$$\begin{array}{l} \alpha^r + \alpha^{r-1} \alpha' \left| rA + \alpha^{r-2} \alpha'^2 \right| \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} A^2 + \text{ec.} \\ + \zeta^r + \zeta^{r-1} \zeta' \left| \phantom{rA} + \zeta^{r-2} \zeta'^2 \right| \\ + \gamma^r + \gamma^{r-1} \gamma' \left| \phantom{rA} + \gamma^{r-2} \gamma'^2 \right| \\ + \text{ec.} \end{array}$$

e non contiene se non che un numero limitato di potenze intere, e positive di  $A$ , moltiplicate per dei coefficienti, i quali sono indipendenti da questa lettera, che d'altronde resta *indeterminata*: bisogna dunque che il valore della stessa funzione possa svilupparsi nella forma seguente

$$a + b A + c A^2 + \text{ec.},$$

$a, b, c$  indicando delle quantità cognite, e che abbiassi separatamente

$$\alpha^r + \zeta^r + \gamma^r + \text{ec.} = a,$$

$$r(\alpha^{r-1} \alpha' + \zeta^{r-1} \zeta' + \gamma^{r-1} \gamma' + \text{ec.}) = b,$$

$$\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} (\alpha^{r-2} \alpha'^2 + \zeta^{r-2} \zeta'^2 + \gamma^{r-2} \gamma'^2 + \text{ec.}) = c,$$

ec.;

equazioni, che faranno conoscere le funzioni *simmetriche* della forma

$$\alpha^p \alpha'^{p'} + \epsilon^p \epsilon'^{p'} + \text{ec.},$$

nelle quali  $p + p' = r$ .

Se si moltiplica la precedente per

$$\alpha^q \alpha'^{q'} + \epsilon^q \epsilon'^{q'} + \text{ec.},$$

il prodotto

$$\alpha^{p+q} \alpha'^{p'+q'} + \epsilon^{p+q} \epsilon'^{p'+q'} + \text{ec.}$$

$$\alpha^p \alpha'^{p'} \epsilon^q \epsilon'^{q'} + \alpha^q \alpha'^{q'} \epsilon^p \epsilon'^{p'} + \text{ec.}$$

comprenderà due funzioni *simmetriche*, la prima delle quali si dedurrà da  $\alpha^p \alpha'^{p'} + \text{ec.}$  cangiando  $p$  in  $p+q$ , e  $p'$  in  $p'+q'$ ; determineremo dunque la seconda, e procedendo così, come l'abbiamo indicato a riguardo dell'equazioni a una sola incognita nel n.º 6., otterremo i valori delle funzioni *simmetriche* i più generali. Si può vedere la legge della lor formazione nelle *Meditationes Algebraicae* di *Waring* (pag. 225).

12. È facile estender ciò, che abbiám detto, a un numero qualunque d'equazioni, che contengano un simil numero d'incognite.

Per tre equazioni in  $x, y, z$ , per esempio, prenderemo

$$t = x + A y + B z,$$

e sostituendo a  $x$  la quantità  $t - A y - B z$ ,  $A$ , e  $B$  essendo dei numeri qualunque, elimineremo  $y$ , e  $z$  dalle resultanti; ciò che condurrà ad un'equazione in  $t$ , le cui radici saranno

$$\alpha + A \alpha' + B \alpha'', \epsilon + A \epsilon' + B \epsilon'', \text{ec.},$$

se si esprimon per

$$\alpha \quad \epsilon, \gamma, \delta, \text{ec.},$$

$$\alpha' \quad \epsilon', \gamma', \delta', \text{ec.},$$

$$\alpha'' \quad \epsilon'', \gamma'', \delta'', \text{ec.},$$

i valori corrispondenti all'incognite  $x$ ,  $y$ , e  $z$ .

La somma delle potenze  $r$  di queste radici, che rappresenterò per  $\dot{S}_r (\alpha + A\alpha' + B\alpha'')$ , esprimendosi in una forma razionale per mezzo de' coefficienti dell'equazione in  $t$ , se la sviluppiamo, come il suo valore, secondo le potenze, e i prodotti delle lettere  $A$ , e  $B$ , le quali debbon restare *indeterminate*, il paragone de' termini simili per rapporto a queste lettere darà le funzioni della forma

$$\alpha^r + \xi^r + \gamma^r + \text{ec.},$$

$$\alpha^{r-1}\alpha' + \xi^{r-1}\xi' + \gamma^{r-1}\gamma' + \text{ec.}$$

.....

$$\alpha^p\alpha'^{p'}\alpha''^{p''} + \xi^p\xi'^{p'}\xi''^{p''} + \gamma^p\gamma'^{p'}\gamma''^{p''} + \text{ec.},$$

nelle quali abbiamo  $p + p' + p'' = r$ .

Colla moltiplicazione di queste comporrerem quelle della forma

$$\alpha^p\alpha'^{p'}\alpha''^{p''}\xi^q\xi'^{q'}\xi''^{q''} + \text{ec.}$$

13. Per mezzo di ciò, che precede, arriveremo all'equazione, dalla quale dipende una funzione data dell'incognite  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , formando in questa funzione tutte le combinazioni possibili de' valori corrispondenti dell'incognite, come nel n.º 7. Ma l'oggetto principale di queste ricerche si è quello d'estendere all'eliminazione tra un numero qualunque d'equazioni il metodo del n.º 7., e concluderne la dimostrazion generale, enunciata nel n.º 196. degli *Elementi*.

Per questo, sieno 4 equazioni complete, di grado qualunque, contenenti le incognite  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , e  $u$ : se dalle tre prime si eliminano alternativamente  $y$ , e  $z$ ,  $x$ , e  $z$ ,  $x$ , e  $y$ , avremo tre risultati in

$$x, \text{ e } u, \quad y, \text{ e } u, \quad z, \text{ e } u.$$

Quest' ultime equazioni saranno in general tutte tre del medesimo grado; poichè l'equazioni proposte essendo complete, ciascuna dell'incognite v'entra nella stessa maniera che l'altre: designando per  $n$  il grado delle nuove equazioni, e immaginando ch'esse sien risolte, ricaverem dalla prima, per  $x$ ,  $n$  valori

$$\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \text{ec.};$$

dalla seconda, per  $y$ ,  $n$  valori corrispondenti a

$$\alpha', \epsilon', \gamma', \delta', \text{ec.};$$

dalla terza, per  $z$ ,  $n$  valori corrispondenti a

$$\alpha'', \epsilon'', \gamma'', \delta'', \text{ec.}$$

E sostituendo questi valori nella quarta equazione proposta, che rappresenterò per

$$(x, y, z, u)^m = 0,$$

$m$  essendo l'esponente del di lei grado, formerem l'equazioni

$$(\alpha, \alpha', \alpha'', u)^m = 0,$$

$$(\epsilon, \epsilon', \epsilon'', u)^m = 0,$$

$$(\gamma, \gamma', \gamma'', u)^m = 0,$$

ec.,

il numero delle quali sarà  $n$ , ed a cui debbono soddisfare i diversi valori di  $u$ : concluderemo da ciò, come nel n.º 12., che l'equazione finale in  $u$  risulta dal prodotto

$$(\alpha, \alpha', \alpha'', u)^m (\epsilon, \epsilon', \epsilon'', u)^m (\gamma, \gamma', \gamma'', u)^m \text{ec.} = 0,$$

che comprende  $n$  fattori.

Questo non contien che funzioni *simmetriche* de' valori dell'incognite  $x, y, z$ ; poichè cangiano un gruppo di questi valori in qualunque altro non si fa che cangiar l'ordine de' fattori. Possiam dunque esprimere questo prodotto in una forma razionale per mezzo dei coefficienti delle tre prime equazioni proposte.

Osserveremo primieramente che ciascun di questi fattori ha per primo termine  $u^m$ , e che in conseguenza il primo termine del prodotto sarà  $u^{mn}$ . In tutti gli altri termini l'esponente di  $u$  non può alzarsi al di là di  $mn$ ; poichè la somma degli esponenti delle lettere  $x, y, z$ , e  $u$ , nell'equazione  $(x, y, z, u)^m = 0$ , non potendo passare il grado  $m$ , quella degli esponenti delle lettere  $\alpha, \alpha', \text{ec.}, \zeta, \zeta', \text{ec.}, \gamma, \gamma', \text{ec.}$ , e  $u$  non potrà sorpassare  $mn$  nel prodotto, e l'espressione delle funzioni *simmetriche*, che compongono i differenti termini, non può alzarsi al di là del lor grado. Infatti, l'equazione in  $t$  del n.º antecedente non può salire più alto che al grado il più elevato dell'equazioni tra una qualunque delle lettere  $x, y, z$ , e la lettera  $u$ ; e, se la rappresentiamo per

$$t^n + Pt^{n-1} + Qt^{n-2} \dots + U = 0,$$

$u$  non passerà il primo grado in  $P$ ,

il secondo in  $Q$ ,

.....

il grado  $n^{\text{mo}}$  in  $U$ .

Le funzioni della forma  $S_r(\alpha + A\alpha' + B\alpha'')$  non comprenderanno in conseguenza alcun termine ove l'esponente di  $u$  sorpassi  $r$ , poichè la loro espressione sarà quella della funzione  $S_r$  nel n.º 4. Segue da ciò che qualunque funzione della forma

$$\alpha^p \alpha'^{p'} \alpha''^{p''} + \zeta^p \zeta'^{p'} \zeta''^{p''} + \text{ec.}$$

non potrà alzarsi al di sopra del grado  $p + p' + p''$ , e che in tutte le altre funzioni *simmetriche* dedotte dalla moltiplicazion di quest'ultime l'esponente della lettera  $u$  non passerà quello, ch'esprime il lor grado, come già l'abbiamo affermato qui addietro.

Non vi sarà dunque finalmente nel prodotto  $(a, a', a'', u)^m (\xi, \xi', \xi'', u)^m (\gamma, \gamma', \gamma'', u)^m$  ec. alcun termine ove la lettera  $u$  oltrepassi il grado  $mn$ .

Questi ragionamenti posson essere facilmente appropriati ad un numero qualunque d'equazioni; e siccome abbiamo digià veduto per due equazioni a due incognite, una del grado  $m$ , l'altra del grado  $n$ , che l'equazione finale non passa al di sopra del grado  $mn$ , risulta conseguentemente da ciò, ch'è stato provato, che per tre equazioni a tre incognite, i cui gradi rispettivi fossero  $m, n, p$ , l'equazione finale non passerebbe il grado  $mn \times p$ , e così in seguito; dunque finalmente: *il grado dell'equazione finale risultante dall'eliminazione tra un numero qualunque d'equazioni complete contenenti un egual numero d'incognite, e di gradi qualunque, è eguale al prodotto degli esponenti, ch'esprimono i gradi di queste equazioni.*

A riguardo dell'equazioni particolari, le quali non hanno tutti i termini compresi nell'equazioni complete, potrebbe solamente mancar qualche termine anco nell'equazione finale, che perciò si troverebbe abbassata, il che non cangia in niun modo l'enunciato del Teorema.

### *Della risoluzione generale dell'equazioni.*

14. Abbiamo veduto (*Elem.* 183. *Nota*) che la ricerca immediata delle radici d'un'equazione per mezzo delle loro relazioni co' suoi coefficienti fa sempre ricader sulla soluzione dell'equazione proposta; ma non succederebbe lo stesso se si cercassero altre funzioni delle radici, e se si potesser trovare funzioni tali, che dipendessero da equazioni d'un grado men elevato della proposta: allora ne resulterebbe un mezzo da poter resolver

quest'ultima, come adesso vedremo per i gradi 2.<sup>o</sup>, 3.<sup>o</sup>, e 4.<sup>o</sup>

Sia primieramente l'equazione di secondo grado

$$x^2 + px + q = 0;$$

$a$ , e  $b$  rappresentano le sue due radici; avremo

$$a + b = -p, \quad ab = q \text{ (Elem. 183.)}.$$

Cercando di determinare  $a$ , e  $b$  per mezzo di queste due equazioni, si troverebbe in  $a$ , o in  $b$  un'equazione simile alla proposta; ma, se per un mezzo, qualunque si fosse, s'arrivasse a ottenere tra le radici  $a$ , e  $b$ , ed i coefficienti  $p$ , e  $q$  una seconda equazione di primo grado, averebbersi senza pena i valori delle radici. Bisogna dunque che la funzione delle radici, la qual comporrà quest'equazione, sia della forma  $la + mb$ ; di maniera che s'abbia  $la + mb = z$ ;  $l$ ,  $m$ , e  $z$  essendo quantità *indeterminate*.

Questa funzione  $la + mb$  è suscettibile di due combinazioni differenti, cangiandovi  $a$  in  $b$ , e reciprocamente; poichè si forman per questo mezzo le due combinazioni  $la + mb$ , e  $lb + ma$ . Segue da questo, e da ciò che abbiám veduto nel n.<sup>o</sup> 7., che la funzione  $la + mb$ , ovvero  $z$  dipende da un'equazione di secondo grado, eccettuato il caso ove  $m = l$ , poichè allora essa diviene  $l(a + b)$ , e non dà che la somma delle radici, la quale di già è conosciuta.

Dunque, poichè la funzione cercata dipende necessariamente dal secondo grado, bisogna, disponendo convenevolmente delle quantità *indeterminate*  $m$ , e  $n$ , fare in modo che quest'equazione sia solamente a due termini, affinchè dessa possa risolversi per mezzo d'una semplice estrazione della radice. Ora, in un'equazione di secondo

grado a due termini, la quale non contiene in conseguenza che il quadrato dell'incognita, le due radici son necessariamente eguali, e di segni contrarj; bisogna dunque che tra le quantità  $la + mb$ , e  $lb + ma$ , le quali son le radici di quella, che cerchiamo, abbiasi la relazione

$$la + mb = -lb - ma,$$

dalla quale ricavasi

$$l(a + b) = -m(a + b),$$

e dividendo tutto per  $a + b$ ,

$$l = -m.$$

Questa condizione essendo la sola, alla quale bisogna soddisfare per adempir l'oggetto proposto, prenderò, per maggiore semplicità,  $l = -m = 1$ ; la funzione cercata sarà dunque  $a - b$ , e seguendo ciò, che abbiám veduto nel num.<sup>o</sup> citato, dessa dipenderà dall'equazione seguente:

$$[z - (a - b)] [z - (b - a)] = 0,$$

ovvero sviluppando,

$$z^2 - a^2 - b^2 + 2ab = 0:$$

ora, abbiám

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 4ab = p^2 - 4q;$$

sostituendo nell'equazion precedente, viene

$$z^2 = p^2 - 4q,$$

dalla quale ricavasi

$$z = \pm \sqrt{p^2 - 4q}.$$

Ponendo per  $z$  il suo valore  $a - b$ , e combinando quest'equazione con la seguente

$$a + b = -p,$$

ricaveremo per  $a$ , e  $b$  i valori seguenti:

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

i quali sono gli stessi di quelli, che s'ottengono col metodo ordinario.

15. Prima d'andar più avanti, sarà utile far conoscere alcune proprietà delle radici dell'equazione  $y^n - 1 = 0$ , la quale abbiamo considerata negli *Elementi* al n.º 159.

Sia, per esempio, il caso particolare  $y^5 - 1 = 0$ , le cui cinque radici saranno indicate per  $1, \alpha, \epsilon, \gamma$ , e  $\delta$ . Paragonandolo all'equazione

$$y^5 + Py^4 + Qy^3 + Ry^2 + Sy + T = 0,$$

troveremo

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0, \quad T = -1,$$

ed in conseguenza di questi valori le formole del n.º 4. daranno

$$S_1 = 1 + \alpha + \epsilon + \gamma + \delta = 0,$$

$$S_2 = 1 + \alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0,$$

$$S_3 = 1 + \alpha^3 + \epsilon^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

$$S_4 = 1 + \alpha^4 + \epsilon^4 + \gamma^4 + \delta^4 = 0,$$

$$S_5 = 1 + \alpha^5 + \epsilon^5 + \gamma^5 + \delta^5 = 5.$$

Proseguendo troverebbesi

$S_6 = 0, S_7 = 0, S_8 = 0, S_9 = 0, S_{10} = 5, S_{11} = 0,$   
e così in seguito.

Ponendo quindi  $y = \frac{1}{z}$ , l'equazione  $y^5 - 1 = 0$

si cangia in  $\frac{1}{z^5} - 1 = 0$ , ovvero  $z^5 - 1 = 0$ , e le ra-

dici di quest'ultima sono  $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ; queste e-

spressioni hanno in conseguenza le medesime proprietà che  $1, \alpha, \epsilon, \gamma$ , e  $\delta$ , poichè desse appar-

tengono ad un'equazione interamente simile a  $y^5 - 1 = 0$ : abbiám dunque ancora

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 0,$$

.....

$$1 + \frac{1}{\alpha^5} + \frac{1}{\epsilon^5} + \frac{1}{\gamma^5} + \frac{1}{\delta^5} = 5,$$

ec.

È facil vedere che le radici di tutte l'equazioni della forma  $y^n - 1 = 0$  godono di proprietà analoghe a quelle, che abbiamo esposte per l'equazione  $y^5 - 1 = 0$ , e che si proverebbero nella stessa maniera: così  $1, \alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \varepsilon$ , ec. essendo le radici dell'equazione  $y^n - 1 = 0$ , avremo

$S_m = 1 + \alpha^m + \epsilon^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \text{ec.} = 0$ ,  
se  $m$  non è un multiplo di  $n$ ; e la medesima quantità diverrà eguale a  $n$  allorchè  $m$  sarà un multiplo di  $n$ .

La quantità inversa

$$1 + \frac{1}{\alpha^m} + \frac{1}{\epsilon^m} + \frac{1}{\gamma^m} + \frac{1}{\delta^m} + \frac{1}{\varepsilon^m} + \text{ec.}$$

avrà gli stessi valori nelle medesime circostanze:

Finalmente le radici  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \varepsilon$ , ec. possono dedursi tutte da una qualunque di loro; ed ecco in qual maniera:  $\alpha$ , per esempio, essendo una radice di  $y^n - 1 = 0$ , si dee avere

$$\alpha^n - 1 = 0, \text{ ovvero } \alpha^n = 1;$$

ed alzando successivamente quest'equazione alla seconda, alla terza, alla quarta potenza ec., verrà

$$\alpha^{2n} = 1, \alpha^{3n} = 1, \alpha^{4n} = 1, \alpha^{5n} = 1, \text{ ec.};$$

equazioni, le quali equivalgono alle seguenti

$$(\alpha^2)^n - 1 = 0, (\alpha^3)^n - 1 = 0, (\alpha^4)^n - 1 = 0, (\alpha^5)^n - 1 = 0, \text{ ec.};$$

dal che si fa manifesto che  $\alpha$  essendo una delle radici dell'equazione  $y^n - 1 = 0$ , diversa dall'unità,  $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ , ec. saranno pure radici della stessa equazione.

Non bisogna credere, dopo ciò ch'è stato detto, che il numero delle radici dell'equazione  $y^n - 1 = 0$  sia indefinito; troverebbesi in vero che anco

$$\alpha^n, \alpha^{n+1}, \alpha^{n+2}, \alpha^{n+3}, \text{ ec.}$$

sodisfanno a quest'equazione; ma

$$\alpha^n = 1, \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha = \alpha, \alpha^{n+2} = \alpha^n \cdot \alpha^2 = \alpha^2, \text{ ec. :}$$

allorchè dunque nell'elevazioni indicate qui sopra avremo passata la potenza  $n$ , i medesimi risultati ritorneranno, e nel medesim'ordine che per l'avanti.

Segue da ciò che prendendo per  $\alpha$  una qualunque delle radici di  $y^n - 1 = 0$ , diversa dall'unità, le radici di quest'equazione saranno

$$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots \alpha^{n-1};$$

e poichè

$$\alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \alpha^{n-2} = \frac{\alpha^n}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \dots \alpha = \frac{\alpha^n}{\alpha^{n-1}} = \frac{1}{\alpha^{n-1}},$$

ne concluderemo che  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3} \dots \frac{1}{\alpha^{n-1}}$  sono, in

un ordine inverso del primo, l'espressioni di  $n-1$  radici differenti dall'unità.

Finalmente, ponendo questi valori in quelli di  $S_m$ , e del suo inverso, riportati qui sopra, avremo

$$1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \alpha^{3m} \dots + \alpha^{(n-1)m} = 0, \text{ ovvero } = n,$$

$$1 + \frac{1}{\alpha^m} + \frac{1}{\alpha^{2m}} + \frac{1}{\alpha^{3m}} \dots + \frac{1}{\alpha^{(n-1)m}} = 0, \text{ ovvero } = n,$$

secondo che  $m$  sarà, o non sarà multiplo di  $n$ .

16. Per applicar con maggiore semplicità il metodo del n.º 14. all'equazion generale del terzo grado, si suppone questa priva del suo secondo termine, il che le dà la seguente forma

$$x^3 + px + q = 0;$$

e con dei ragionamenti analoghi a quelli del n.º 14. si cerca *a priori* una funzione delle radici, la qual non dipenda che da un'equazione di secondo grado, e che le determini facilmente. La forma la più semplice, che dar si possa a questa funzione, è  $la + mb + nc$ ; cangiando tra loro le radici  $a, b, c$ , essa offre sei combinazioni differenti, cioè,

$$\begin{array}{ll} la + mb + nc, & la + mc + nb, \\ lb + ma + nc, & lb + mc + na, \\ lc + ma + nb, & lc + mb + na; \end{array}$$

così l'equazione, dalla quale essa funzione dipende, è del sesto grado. Per far uso di questa equazione, bisogna ch'essa sia risolubile col metodo di quelle del secondo, e che abbia in conseguenza la forma  $z^6 + Az^3 + B = 0$ . In quest'ipotesi dedurremo

$$z^3 = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B},$$

e facendo, per abbreviare,

$$-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} = z'^3, \quad -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} = z''^3,$$

le tre radici cubiche dell'unità essendo  $1, \alpha, \alpha^2$  (15), i sei valori di  $z$  saranno

$$z', \alpha z', \alpha^2 z', z'', \alpha z'', \alpha^2 z''.$$

Se adesso si prendon due dei valori della funzione  $la + mb + nc$  per le quantità  $z'$ , e  $z''$ ,

cosicchè suppongasi, per esempio,

$$la + mb + nc = z', \quad lb + ma + nc = z'',$$

assoggetteremo gli altri quattro valori alle medesime relazioni dei diversi valori di  $z$ , ponendo l'equazioni

$$lc + ma + nb = \alpha (la + mb + nc),$$

$$lc + mb + na = \alpha (lb + ma + nc),$$

$$lb + mc + na = \alpha^2 (la + mb + nc),$$

$$la + mc + nb = \alpha^2 (lb + ma + nc),$$

le quali si formano paragonando due combinazioni, in cui alcuna delle lettere  $a, b, c$  non ha lo stesso coefficiente, e dalle quali ricavasi, trasponendo,

$$(l - \alpha n)c + (m - \alpha l)a + (n - \alpha m)b = 0,$$

$$(l - \alpha n)c + (m - \alpha l)b + (n - \alpha m)a = 0,$$

$$(l - \alpha^2 m)b + (m - \alpha^2 n)c + (n - \alpha^2 l)a = 0,$$

$$(l - \alpha^2 m)a + (m - \alpha^2 n)c + (n - \alpha^2 l)b = 0.$$

Siccome quest'equazioni debbon verificarsi indipendentemente dai valori particolari di  $a, b, c$ , eguaglieremo separatamente a zero i coefficienti di queste diverse quantità, il che darà tra le incognite  $l, m, n$  l'equazioni seguenti:

$$l - \alpha n = 0, \quad m - \alpha l = 0, \quad n - \alpha m = 0,$$

$$l - \alpha^2 m = 0, \quad m - \alpha^2 n = 0, \quad n - \alpha^2 l = 0.$$

Se si determinano  $l, n, m$  per mezzo delle tre prime, troveremo

$$l = \alpha n, \quad m = \alpha^2 n, \quad n = \alpha^3 n;$$

e, se ci rammentiamo che  $\alpha^3 = 1$ , vedremo che questi valori di  $l$ , e  $m$  soddisfanno alle tre equazioni della seconda linea; di maniera che il coefficiente  $n$  resta indeterminato. Supponendolo, per

maggior semplicità, eguale a 1, si avranno i valori

$$l = \alpha, \quad m = \alpha^2, \quad n = 1,$$

e vale a dire che i coefficienti  $l, m, n$  saranno le radici cubiche dell'unità: i valori di  $z'$ , e  $z''$  saranno in conseguenza

$$z' = \alpha a + \alpha^2 b + c, \quad z'' = \alpha^2 a + \alpha b + c,$$

e rappresentando per  $z$  la funzione  $l a + m b + n c$ , il cui cubo non debb' avere che i due valori  $z'^3$ , e  $z''^3$ , verrà (7)

$$[z^3 - (\alpha a + \alpha^2 b + c)^3] [z^3 - (\alpha^2 a + \alpha b + c)^3] = 0.$$

Questo prodotto è facile a esprimersi per mezzo dei coefficienti dell'equazione  $x^3 + p x + q = 0$ ; poichè, dopo averne eliminata la quantità  $\alpha$  per mezzo delle relazioni riportate nel n.° 15, desso non conterrà altro che delle funzioni *simmetriche* delle radici  $a, b, c$ . Non isviluppando per ora i secondi termini di ciascun fattore, si trova

$$z^6 - (\alpha a + \alpha^2 b + c)^3 \left\{ \begin{array}{l} z^3 + (\alpha a + \alpha^2 b + c)^3 (\alpha^2 a + \alpha b + c)^3 \\ - (\alpha^2 a + \alpha b + c)^3 \end{array} \right\} = 0;$$

ma

$$(\alpha a + \alpha^2 b + c)^3 (\alpha^2 a + \alpha b + c)^3 = [(\alpha a + \alpha^2 b + c)(\alpha^2 a + \alpha b + c)]^3;$$

sviluppando adesso il prodotto

$$[(\alpha a + \alpha^2 b + c)(\alpha^2 a + \alpha b + c)]^3$$

con l'avvertenza di sostituire 1 in luogo di  $\alpha^3$ , — 1 in luogo di  $\alpha + \alpha^2$ , e di  $\alpha^2 + \alpha^4$  (15), verrà

$$a^2 + b^2 + c^2 - ac - ab - bc;$$

quantità equivalente a

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ - 3ab - 3ac - 3bc \end{array} \right\} = (a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc) \\ = -3p,$$

poichè l'equazione proposta essendo senza secondo termine, si debb' avere

$$a + b + c = 0,$$

e da ciò ricavasi

$$(\alpha a + \alpha^2 b + c)^3 (\alpha^2 a + \alpha b + c)^3 = -27 p^3.$$

Facendo dipoi il cubo di  $\alpha a + \alpha^2 b + c$ , come pure quello di  $\alpha^2 a + \alpha b + c$ , prendendo la somma dei risultati, e ponendo 1 per  $\alpha^3$  e per  $\alpha^6$ , -1 per  $\alpha + \alpha^2$ ,  $\alpha^2 + \alpha^4$ , e  $\alpha^4 + \alpha^5$  (15), verrà

$$\left. \begin{aligned} &2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 12abc \\ &- 3a^2c - 3ac^2 - 3a^2b - 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 \end{aligned} \right\};$$

espressione, la quale, non contenendo che delle funzioni *simmetriche*, può essere determinata per mezzo delle formole del n.º 6. Con un poco d'attenzione vedesi ancora ch'essa è equivalente a

$$\begin{aligned} &2(a + b + c)^3 - 9[ac(a + b + c) - abc] \\ &\quad - 9[ab(a + b + c) - abc] \\ &\quad - 9[bc(a + b + c) - abc] \\ &= -27q. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque in ultimo

$$z^6 + 27qz^3 - 27p^3 = 0,$$

equazione, le cui radici, indicate di sopra per  $z'$ , e  $z''$ , sono

$$3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}, \quad 3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}.$$

Ma l'equazioni

$$z' = \alpha a + \alpha^2 b + c, \quad z'' = \alpha^2 a + \alpha b + c,$$

unite all'equazione  $a + b + c = 0$ , risultante dall'eliminazione del secondo termine della proposta, e per mezzo delle riduzioni indicate nel num.º 15., danno

$$c = \frac{z' + z''}{3}, \quad b = \frac{\alpha z' + \alpha^2 z''}{3}, \quad a = \frac{\alpha^2 z' + \alpha z''}{3};$$

laonde, se si pongono per le quantità  $z'$ ,  $z''$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  i loro valori, troveremo

$$c = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}},$$

$$b = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$

$$- \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$

$$- \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}.$$

Di queste tre radici la prima sola sembra *reale*, le due altre sono sotto una forma *immaginaria*.

Ritornero in seguito sopra queste formole per far conoscere le circostanze diverse, che appresenta la risoluzione dell'equazioni di terzo grado; per adesso mi limiterò ad osservare che le quantità  $z'$ , e  $z''$  avendo ciascuna tre valori, poichè desse indicano delle radici cubiche, potrebbero risultare dall'impiego successivo di questi valori tre sistemi di radici  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; ma quello, che io ho riportato qui sopra, è il solo, che soddisfaccia all'equazione.

$$x^3 + px + q = 0.$$

I due altri offriranno rispettivamente le radici dell'equazioni  $x^3 + \alpha px + q = 0$ ,  $x^3 + \alpha^2 px + q = 0$ , legate colla proposta in modo da formar con

essa, per mezzo della moltiplicazione, un'equazione razionale del nono grado, e che condurrebbero egualmente all'equazione in  $z$  ottenuta di sopra, perchè quest'ultima non contiene che il cubo di  $p$ , ch'è quello altresì di  $\alpha p$ , e di  $\alpha^2 p$ .

Per distinguere il sistema delle radici, che bisogna impiegare, serve il far saggio di esso, e vedere se renda la funzione  $ab + ac + bc$  eguale al coefficiente di  $x$  nell'equazione proposta: ora, i valori trovati di sopra danno

$$ab + ac + bc = -\frac{1}{3} z' z'',$$

ed abbiamo d'altronde

$$z' z'' = -3p.$$

17. Passo al quarto grado denotando per  $a, b, c, d$  le radici dell'equazione senza secondo termine

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0:$$

procurasi ancora qui di trovare una funzione di queste radici, la quale sia della forma  $ka + lb + mc + nd$ , e dipenda da un'equazione men elevata, o meno difficile a risolversi della proposta. In una tal funzione le lettere  $a, b, c, d$  posson essere combinate in ventiquattro differenti maniere, e per conseguenza essa dee dipendere da un'equazione del ventiquattresimo grado; ma si può, con stabilir delle relazioni tra i coefficienti indeterminati  $k, l, m, n$ , ridurre a meno il numero delle dette combinazioni. Supponendo primieramente  $k = l$ , non restan altro che dodici cangiamenti possibili nella distribuzione delle lettere  $a, b, c, d$ , e questi cangiamenti si ridurranno a sei se s'abbia  $m = n$ ; la funzione di sopra diverrà allora

$$l(a + b) + m(c + d),$$

suscettibile di altri cinque cangiamenti

$$l(a + c) + m(b + d)$$

$$l(a + d) + m(b + c)$$

$$l(b + c) + m(a + d)$$

$$l(b + d) + m(a + c)$$

$$l(c + d) + m(a + b).$$

Non si può diminuire di più il numero di queste combinazioni senza renderle tutte identiche; ma ponendo  $l = -m$ , avremo le sei quantità

$$l(a + b - c - d), \quad l(c + d - a - b)$$

$$l(a + c - b - d), \quad l(b + d - a - c)$$

$$l(a + d - b - c), \quad l(b + c - a - d).$$

Le due, che sono sopr' una medesima linea, non differiscono che per il segno; di maniera che l'equazione del sesto grado, da cui desse dipendono, debb' aver tre radici positive, ed altrettante negative rispettivamente eguali a ciascuna delle prime. Questa equazione sarà dunque della forma

$$z^6 + Az^4 + Bz^2 + C = 0 \text{ (Elem. 208.)},$$

e riducibile al terzo grado, prendendo  $z^2$  per l'incognita. Ma, se in vece delle quantità

$$l(a + b - c - d), \text{ ec.}$$

si prendono i loro quadrati, non avremo che tre funzioni differenti, poichè

$$l^2(a + b - c - d)^2 = l^2(c + d - a - b)^2,$$

e così dell'altre; e facendo  $l = 1$  in quest'ultime funzioni, l'equazione, che dee darle, sarà il prodotto dei tre fattori.

$$z - (a + b - c - d)^2,$$

$$z - (a + c - b - d)^2,$$

$$z - (a + d - b - c)^2.$$

Ora,

$$\begin{aligned} & (a + b - c - d)^2 = \\ & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd + 2cd \\ & = (a + b + c + d)^2 - 4ac - 4ad - 4bc - 4bd; \end{aligned}$$

e siccome l'equazione proposta manca del secondo termine, si ha

$$a + b + c + d = 0,$$

ed in conseguenza

$$(a + b - c - d)^2 = -4ac - 4ad - 4bc - 4bd:$$

ma poichè, secondo la composizione dell'equazioni,

$$p = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

ne risulterà

$$-4ac - 4ad - 4bc - 4bd = -4p + 4ab + 4cd:$$

dunque finalmente

$$(a + b - c - d)^2 = -4p + 4ab + 4cd.$$

Troverem parimente

$$(a + c - b - d)^2 = -4p + 4ac + 4bd$$

$$(a + d - b - c)^2 = -4p + 4ad + 4bc.$$

Per maggior semplicità si prende l'incognita  $z$  eguale a  $\frac{1}{4}$  delle funzioni  $(a + c - b - d)^2$ , ec.; l'equazione in  $z$  diviene allora il prodotto de' tre fattori

$$z + p - (ab + cd)$$

$$z + p - (ac + bd)$$

$$z + p - (ad + bc).$$

D'altro adesso non trattasi se non che di sviluppare questo prodotto, ed esprimere in  $p$ ,  $q$ , e  $r$  le funzioni *simmetriche* di  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ , che vi si trovano contenute.

Per effettuare il calcolo, con maggiore semplicità, porremo

$$z + p = u,$$

il che darà i tre fattori

$$u - (ab + cd), \quad u - (ac + bd), \quad u - (ad + bc).$$

Il coefficiente del secondo termine dell'equazione in  $u$  sarà eguale a

$$-(ab + ac + ad + bc + bd + cd),$$

ovvero, ch'è la stessa cosa, a  $-p$ ; quello del terzo sarà

$$\begin{aligned} & a^2 b c + a^2 b d + a^2 c d \\ & + a b^2 c + a b^2 d + b^2 c d \\ & + a b c^2 + a c^2 d + b c^2 d \\ & + a b d^2 + a c d^2 + b c d^2. \end{aligned}$$

Questa funzione è *simmetrica*; imperocchè essa non cangia per qualunque permutazione, che faccia-si tra le quantità  $a, b, c, d$ , ed essa non è che un caso particolare della funzione  $a^n b^p c^q + \text{ec.}$ , la cui espressione è

$$S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2S_{n+p+q} \quad (6).$$

Per averne il valore, si fa  $n = 2, p = 1, q = 1$  nella formula superiore, della quale non se ne prende che la metà a causa di  $p = q$ , e si ottiene

$$\frac{1}{2}(S_2 S_1^2 - 2S_3 S_1 - S_2^2 + 2S_4):$$

dipoi, cercando i valori di  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , ed osservando che il secondo termine manca nell'equazione proposta, si trova  $-4r$  per risultato.

Si perviene immediatamente a questo risultato osservando che la funzione  $a^2 b c + \text{ec.}$  è equivalente ad

$$\left. \begin{aligned} & a(abc + abd + acd + bcd) - abcd \\ & + b(abc + abd + acd + bcd) - abcd \\ & + c(abc + abd + acd + bcd) - abcd \\ & + d(abc + abd + acd + bcd) - abcd \end{aligned} \right\} =$$

$$(a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) - 4abcd,$$

e si riduce in conseguenza a  $-4abcd$ , poichè

$$a + b + c + d = 0.$$

L'ultimo termine dell'equazione in  $u$  essendo eguale a

$$-(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc),$$

ha per suo sviluppo

$$-\left\{ \begin{aligned} & a^3bcd + ab^3cd + abc^3d + abcd^3 \\ & + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \end{aligned} \right\}.$$

Il valore della prima linea dedurrebbesi dall'espression generale delle funzioni della forma  $a^n b^p c^q d^r + \text{ec.}$ , facendovi  $n = 3, p = q = r = 1$ ; ma si vede assai facilmente non esser essa altra cosa che

$$abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = rS_2 = -2pr.$$

La seconda linea avrà per espressione, secondo ciò che peccede,

$$\frac{1}{6}(S_2^3 - 3S_4S_2 + 2S_6) = -2pr + q^2;$$

riunendo queste due parti, e cangiando i lor segni, troveremo  $+4pr - q^2$  per l'ultimo termine dell'equazione cercata, la quale sarà in conseguenza

$$u^3 - pu^2 - 4ru + 4pr - q^2 = 0:$$

ponendo  $z + p$  in vece di  $u$ , otterremo

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Sieno adesso  $z', z'', z'''$  le tre radici di questa equazione, avremo

$$\left. \begin{aligned} (a+b-c-d)^2 &= 4z' \\ (a+c-b-d)^2 &= 4z'' \\ (a+d-b-c)^2 &= 4z''' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{di} \\ \text{dove} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a+b-c-d = \pm 2\sqrt{z'} \\ a+c-b-d = \pm 2\sqrt{z''} \\ a+d-b-c = \pm 2\sqrt{z'''} \end{array} \right.$$

Le tre ultime equazioni trattate unitamente all'equazione  $a+b+c+d=0$ , la quale risulta dalla mancanza del secondo termine, danno, prendendo i segni superiori dei radicali,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ b &= \frac{1}{2} (\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ c &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ d &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}); \end{aligned}$$

e prendendo i segni inferiori,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ b &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ c &= \frac{1}{2} (\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ d &= \frac{1}{2} (\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}). \end{aligned}$$

I primi valori son relativi al caso dove il prodotto  $\sqrt{z'} \cdot \sqrt{z''} \cdot \sqrt{z'''}$  debb' essere positivo; ed i secondi appartengono al caso, dove la medesima quantità è negativa. Questa specie d'ambiguità dipende dal non avere immediatamente determinate le funzioni  $a+b-c-d$ , ec., ma il loro quadrato, il quale resta lo stesso benchè ciascuna di esse sia positiva, o negativa, e qualunque sia il segno, che abbia il coefficiente  $q$ ; poichè l'equazione in  $z$  non contien che il quadrato di questo coefficiente. Segue da ciò che le radici trovate debbono egualmente soddisfare al caso ove  $q$  è negativo, come a quella ov' egli è positivo; dimodochè questi otto valori riuniti son le radici

dell'equazione risultante dal prodotto delle due seguenti.

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ,  $x^4 + px^2 - qx + r = 0$ ,  
le quali non differiscono che per il segno di  $q$ .

Quello de' due sistemi di valori, che corrisponde alla prima equazione, dee dunque dare la somma dei prodotti delle radici, prese tre a tre col segno contrario, eguale ad una quantità positiva; e l'altro dee condurre, nella medesima circostanza, ad un risultato negativo.

Ora, se s'effettua questo calcolo, vedremo che il secondo sistema sodisfà alla prima condizione, e che il primo sodisfà alla seconda; poichè uno dà per questo prodotto

$$+ \sqrt{z'} \cdot \sqrt{z''} \cdot \sqrt{z'''} ,$$

e l'altro

$$- \sqrt{z'} \cdot \sqrt{z''} \cdot \sqrt{z'''} .$$

Si può ancora arrivare alla medesima conclusione moltiplicando tra loro le tre equazioni

$$\begin{aligned} a + b - c - d &= 2 \sqrt{z'} , \\ a + c - b - d &= 2 \sqrt{z''} , \\ a + d - b - c &= 2 \sqrt{z'''} ; \end{aligned}$$

poichè, riducendo le funzioni *simmetriche*, che si trovan nel primo membro del risultato, si ottiene

$$-q = \sqrt{z'} \cdot \sqrt{z''} \cdot \sqrt{z'''} ;$$

il che dimostra che i segni de' radicali debbon essere tali che i lor prodotti sieno d'un segno contrario a quello di  $q$ , e che in conseguenza il secondo sistema corrisponde al caso dove  $q$  è positivo, ed il primo a quello dov'egli è negativo.

18. La forma delle funzioni impiegate di sopra per risolvere l'equazioni di secondo, di

terzo, e di quarto grado non è la sola, che possa esser dicevole a quest'oggetto. *Lagrange*, che ha presentata il primo la Teoria della risoluzione generale dell'equazioni sotto il punto di vista, secondo il quale l'ho esposta (*Mem. dell'Accad. delle Scienze di Berlino per gli anni 1770, e 1771*), ha fatto vedere come si potrebb'er trovare le funzioni appropriate a dar l'espressione delle radici d'un'equazione proposta, e determinare il grado dell'equazioni, dalle quali queste funzioni dipendono; ma non s'è potuto fino al presente formarne per il quinto grado, le quali dipendessero da un grado meno elevato. Nelle Memorie, che ho già citate, *Lagrange* non si è limitato a presentare una nuova maniera di risolvere l'equazioni: esso ha esaminato altresì i metodi proposti dagli Analisti, i quali lo han preceduto in questa carriera. Non potendo sviluppare in un'Opera di questa natura tutti i particolari d'un soggetto così importante, ho seguito, per darne un'idea, il metodo tracciato da *Laplace* nel Giornale delle sedute della Scuola normale (*Lezioni T. II., pag. 302. della prima edizione*).

*Osservazioni sopra l'espressioni delle radici dell'equazioni del terzo, e del quarto grado.*

19. Allorchè l'equazione del terzo grado è della forma  $x^3 + px + q = 0$ , e vale a dire che il coefficiente  $p$  è positivo, delle tre radici, ch'essa comporta, due sono *immaginarie*, una sola è *reale* (16); ma, se  $p$  è negativo, ovvero se si ha

$$x^3 - px + q = 0,$$

il radicale quadrato  $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ , il quale entra nell'espressione delle tre radici, si cangia in  $\sqrt{-\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ ,

e diviene *immaginario* se  $\frac{1}{27}p^3$  sorpassi  $\frac{1}{4}q^2$ . Tutte le radici sono allora affette da *immaginarj*, e sembrano in conseguenza *tan*. Frattanto abbiám veduto (*Elem.* 213.) che qualunque equazione di grado impari aveva necessariamente una radice *reale*. V'è dunque, per il caso, di cui mi occupo, una contraddizione almeno apparente, e che bisogna rimuovere.

Siffatta contraddizione dipende da questo, cioè, che si avrebbe torto di pronunziare che un' espressione composta, contenente degli *immaginarj*, sia *immaginaria*, salvo che non si sia provato ch'essa gli conserva allorchè è sviluppata. La formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

può scriversi così:

$$x = \sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}},$$

se facciamo, per abbreviare,

$$-\frac{1}{2}q = a, \quad \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2 = b^2;$$

e se succede che le quantità  $a + b\sqrt{-1}$ , e  $a - b\sqrt{-1}$  fosser de' cubi perfetti della forma

$$(A + B\sqrt{-1})^3, \text{ e } (A - B\sqrt{-1})^3,$$

A, e B essendo delle quantità *reali*, avremo allora

$$x = A + B\sqrt{-1} + A - B\sqrt{-1} = 2A,$$

valore *reale*.

Se s'avesse, per esempio,

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}},$$

ci assicureremmo, per mezzo dell'inalzamento a cubo, che

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1},$$

e si troverebbe 4 per la somma dei due radicali.

I primi Analisti, i quali occuparonsi della risoluzione dell'equazioni dei gradi superiori, dopo d'aver osservata la specie di *paradosso* sviluppato qui sopra, arrivarono infatti a ricavare dall'espressione medesima della prima radice un risultato libero degli *immaginarj* allorchè le quantità comprese sotto i radicali cubi eran dei cubi perfetti.

20. » In questa maniera, dice *Lagrange* (\*),  
 » che *Bombelli* si è convinto della *realta* dell'espres-  
 » sione *immaginarja* della formula del caso *irri-*  
 » *ducibile* (questo è il nome, che si dà al caso,  
 » ch'examino); ma questa estrazione non essen-  
 » do possibile in generale che mediante le *serie*,  
 » non si può arrivare in questa maniera a una  
 » dimostrazion generale, e diretta della Propo-  
 » sizione, di cui si tratta.

» Non è lo stesso riguardo ai radicali qua-  
 » drati, ed a tutti quelli, il cui esponente è una  
 » potenza di 2. Infatti, se abbiamo la quantità

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}},$$

» composta di due radicali *immaginarj*, il suo  
 » quadrato sarà

$$2a + 2\sqrt{a^2 + b^2};$$

(\*) Sedute delle Scuole Normali (*Lezioni* T. III. pag. 295. della *prima edizione*).

» quantità necessariamente positiva : dunque ,  
 » estraendone la radice quadrata , avremo

$$\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

» per il valore *reale* della quantità proposta .  
 » Ma , se in vece della somma si avesse la diffe-  
 » renza dei medesimi radicali , allora il suo qua-  
 » drato sarebbe  $2a - 2\sqrt{a^2 + b^2}$  ; quantità neces-  
 » sariamente negativa ; e rilevandone la radice ,  
 » s' avrebbe l' espressione *immaginaria* semplice

$$\sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

» Se si avesse la quantità

$$\sqrt[4]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[4]{a - b\sqrt{-1}},$$

» alzerebbesi immediatamente al quadrato , il  
 » che darebbe

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}} + 2\sqrt[4]{a^2 + b^2} = \\ \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}} + 2\sqrt[4]{a^2 + b^2},$$

» quantità *reale* , e positiva ; avrem dunque ancora ,  
 » togliendone la radice quadrata , un valore *reale*  
 » della quantità proposta ; e così di seguito . Ma ,  
 » se si volesse applicar questo metodo ai radicali  
 » cubici , si ricaderebbe in un' equazione di terzo  
 » grado nel caso *irriducibile* .

» Sia difatto

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}} = x ;$$

» alzando primieramente al cubo , si avrà

$$2a + 3\sqrt[3]{a^2 + b^2} (\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}) = x^3 ,$$

» cioè ,

$$2a + 3x\sqrt[3]{a^2 + b^2} = x^3 ,$$

» OVVERO

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{a^2 + b^2} - 2a = 0;$$

» formula generale del caso *irriducibile*, poichè

$$\frac{1}{4}(2a)^2 + \frac{1}{27}(-3\sqrt[3]{a^2 + b^2})^3 = -b^2.$$

» Se  $b = 0$ , avremo

$$x = 2\sqrt[3]{a};$$

» sarà necessario dunque il provare che  $b$  aven-  
 » do un valor qualunque *reale*,  $x$  avrà pure un  
 » valore corrispondente *reale*. Ora, l'equazion  
 » precedente dà

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2} = \frac{x^3 - 2a}{3x},$$

» ed alzando a cubo si trova

$$a^2 + b^2 = \frac{x^9 - 6ax^6 + 12a^2x^3 - 8a^3}{27x^3},$$

» d'onde

$$b^2 = \frac{x^9 - 6ax^6 - 15a^2x^3 - 8a^3}{27x^3};$$

» equazione, la quale può mettersi sotto la forma  
 » seguente

$$b^2 = \frac{(x^3 - 8a)(x^3 + a)^2}{27x^3},$$

» o si vvero sotto questa

$$b^2 = \frac{1}{27} \left( 1 - \frac{8a}{x^3} \right) (x^3 + a)^2.$$

» Quest'ultima forma fa vedere che  $b$  è zero  
 » allorchè  $x^3 = 8a$ ; che in seguito  $b$  aumenterà  
 » sempre senza interruzione allorchè  $x$  aumen-  
 » terà, poichè il fattore  $(x^3 + a)^2$  aumenterà

» sempre, e l'altro fattore aumenterà pure, perchè  
 » il denominatore  $x^3$  aumentandosi, la parte nega-  
 » tiva  $\frac{\delta a}{x^3}$ , la quale è in principio  $= 1$ , diverrà  
 » sempre minore di 1. Così facendo aumentare  
 » per gradi insensibili il valore di  $x^3$  da  $\delta a$  sino  
 » all'*infinito*, il valor di  $b^2$  aumenterà pure per  
 » gradi insensibili, e corrispondenti da zero sino  
 » all'*infinito*. Dunque reciprocamente a cia-cun  
 » valor di  $b^2$ , da zero sino all'*infinito*, corrispon-  
 » derà un valor di  $x^3$  compreso tra  $\delta a$ , e l'*in-*  
 » *finito*; e siccome ciò ha luogo qualunque sia  
 » il valore di  $a$ , ne possiamo concludere legitti-  
 » mamente che qualunque sieno i valori di  $a$ , e  
 » di  $b$ , il valore corrispondente di  $x^3$ , e per con-  
 » seguenza quello di  $x$ , sarà sempre *reale*. Ma  
 » come assegnare questo valore? Non sembra  
 » ch'esso poss'essere rappresentato in altro modo  
 » che per l'espressione *immaginaria*, o per un'  
 » espressione in *serie*, che n'è lo sviluppo (il  
 » quale farò conoscere in seguito); così dobbiam  
 » riguardare questo genere d'espressioni *imma-*  
 » *ginarie*, il qual corrisponde a delle quantità  
 » *reali*, come faciente una nuova classe d'espres-  
 » sioni algebriche, che quantunqu'esse non ah-  
 » biano, come l'altre espressioni, il vantaggio  
 » di poter essere valutate in numeri nello stato,  
 » in cui desse sono, hanno nulladimeno quello,  
 » ch'è il solo necessario nelle operazioni alge-  
 » briche, di poter essere impiegate in queste ope-  
 » razioni come se desse non contenessero *imma-*  
 » *ginarj* (\*). »

---

(\*) S'impiegano quest'espressioni con successo  
 nell'applicazion dell'Analisi alla Geometria per rap-  
 porto alla divisione degli angoli. Questa Teoria trovasi  
 sviluppata nell'Introduzione, e nel Cap. III. del mio  
*Trattato del Calcolo Differenziale, e del Calcolo Integrale.*

L'impossibilità di ridurre sotto una forma ad un tempo *reale*, e composta d'un numero limitato di termini algebrici, le radici d' un' equazione del terzo grado nel caso dove  $\frac{1}{27}p^3$  sorpassi  $\frac{1}{4}q^2$ , ha fatto dare a questo caso il nome di *caso irriducibile*; l'espressione della prima radice non è allora che un caso particolare della seguente

$$\sqrt[n]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[n]{a - b\sqrt{-1}},$$

la quale appartien pure, come lo vedremo in appresso, a una quantità *reale*, ma inassegnabile algebricamente, e in una maniera finita, per tutti i mezzi fin qui conosciuti.

21. Non solamente nel caso *irriducibile* la prima radice è *reale*, ma le due ultime, le quali sono *immaginarie* in tutti gli altri casi, divengono in questo caso *reali*. Possiamo in primo luogo vederlo immediatamente allorchè le quantità  $a + b\sqrt{-1}$ , e  $a - b\sqrt{-1}$  son due cubi perfetti; poichè, sostituendo le loro radici  $A + B\sqrt{-1}$ , e  $A - B\sqrt{-1}$  in luogo dei radicali cubici nella seconda, e terza radice (16), ed effettuando le moltiplicazioni conformemente al n.º 172. degli *Elementi*, si trova

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)(A + B\sqrt{-1}) + \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)(A - B\sqrt{-1}) \\ = -A - B\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)(A + B\sqrt{-1}) + \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)(A - B\sqrt{-1}) \\ = -A + B\sqrt{3}. \end{aligned}$$

22. Possiamo senza il soccorso dell' estrazione delle *radici* dimostrare che allorché le tre *radici* dell' equazione  $x^3 + px + q = 0$  sono *reali*,  $p$  è negativo; che si ha necessariamente  $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ ; e che viceversa, allorché  $\frac{1}{27}p^3$  sorpassa  $\frac{1}{4}q^2$ , le tre *radici* sono *reali*.

Difatto, sia  $a$  una radice *reale* dell' equazione  $x^3 + px + q = 0$ , avremo

$$a^3 + pa + q = 0,$$

dalla quale

$$q = -a^3 - pa,$$

ed in conseguenza

$$x^3 - a^3 + p(x - a) = 0,$$

che darà, dividendo per  $x - a$ , l' equazione

$$x^2 + ax + a^2 + p = 0,$$

in cui son contenute le due altre *radici* della proposta, dalla quale ricavasi

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - p}.$$

Si fa manifesto primieramente dall' ispezione di questo risultato che le *radici*, ch' ei somministra, non potranno esser *reali* salvo che  $p$  non sia negativo, e nel medesimo tempo eguale a  $\frac{3}{4}a^2$ , ovvero maggiore.

Cangiando dunque il segno di  $p$ , e supponendo  $p = \frac{3}{4}a^2 + d$  avremo

$$x^3 - px + q = 0, \quad a^3 - pa + q = 0;$$

le tre *radici* saranno  $a$ ,  $-\frac{1}{2}a + \sqrt{d}$ ,  $-\frac{1}{2}a - \sqrt{d}$ , e ponendo per  $p$  il suo valore nell' equazione  $a^3 - pa + q = 0$ , troveremo

$$q = -\frac{1}{4}a^3 + ad.$$

Per paragonare questo valore di  $q$  a quello di  $p$ , senza conoscere quello di  $a$ , bisogna alzar  $p$

al cubo, e  $q$  al quadrato, affinchè la più alta potenza di  $a$  sia la stessa nei due risultati; otterremo in questa maniera

$$p^3 = \frac{27}{64} a^6 + \frac{27}{16} a^4 d + \frac{9}{4} a^2 d^2 + d^3,$$

$$q^2 = \frac{1}{16} a^6 - \frac{1}{4} a^4 d + \frac{1}{4} a^2 d^2,$$

di dove

$$\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{64} a^6 + \frac{1}{16} a^4 d + \frac{1}{12} a^2 d^2 + \frac{1}{27} d^3,$$

$$\frac{1}{4} q^2 = \frac{1}{64} a^6 - \frac{1}{8} a^4 d + \frac{1}{4} a^2 d^2.$$

dalle quali per conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2 &= \frac{3}{16} a^4 d - \frac{1}{6} a^2 d^2 + \frac{1}{27} d^3 \\ &= 3 d \left[ \frac{1}{16} a^4 - \frac{1}{18} a^2 d + \frac{1}{81} d^2 \right] \\ &= 3 d \left( \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} d \right)^2. \end{aligned}$$

L'ultimo valore  $3 d \left( \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} d \right)^2$  essendo sempre positivo fintanto che  $d$  sarà positivo, poichè il suo secondo fattore essendo un quadrato, dà evidentemente

$$\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2;$$

ed il contrario non potrà avere mai luogo salvochè  $d$  non sia negativo, e vale a dire salvochè le due ultime radici della proposta non sieno *immaginarie*. Facendo  $d = 0$ , si ha

$$\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q^2,$$

e le tre radici, le quali sono allora *reali*, hanno tra loro una relazione notevole indicata dai valori seguenti:  $a$ ,  $-\frac{1}{2} a$ ,  $-\frac{1}{2} a$ .

È dunque dimostrato da ciò, che precede che, se un'equazione di terzo grado ha almeno in tutti i casi una delle sue radici, che sia reale, tutte tre divengono tali allorchè  $p$  è negativo, e che  $\frac{1}{27} p^3$  sorpassa  $\frac{1}{4} q^2$ . Ora, abbiamo veduto (*Elem.* 213), che qualunque equazione d'un grado impari ha almeno una radice reale, qualunque sieno i valo-

ri, che hanno i ài lei coefficienti: dunque sono tutte tre reali nel caso citato.

23. Aspettando ch'io esponga le serie, ch'esprimono i valori approssimativi delle radici dell'equazione del terzo grado nel caso *irriducibile*, riporterò adesso un metodo molto più semplice dato da *Clairaut* nei suoi *Elementi d'Algebra*.

Questo metodo consiste nel ridur l'equazione  $x^3 - px + q = 0$  alla forma  $z^3 - z = r$ , facendo  $x = mz$  e determinando la quantità  $m$  in modo da rendere il coefficiente di  $z$  eguale all'unità. Per mezzo della sostituzione indicata, s'ottiene

$$z^3 - \frac{p z}{m^2} = -\frac{q}{m^3},$$

e ponendo  $m^2 = p$ , abbiám solamente

$$z^3 - z = -\frac{q}{m^3}$$

Dei due valori  $m = \pm \sqrt{p}$  il primo conviene al caso ove  $q$  è negativo nel primo membro, ed il secondo a quello ov'esso è positivo; di maniera

che si ha sempre  $r = \frac{q}{p \sqrt{p}}$ . Ciò posto, l'equazione

$z^3 - z = r$  non può cadere nel caso *irriducibile* se non che quando  $\frac{1}{27} > \frac{1}{4} r^2$ , e vale a dire quan-

do  $r < \sqrt{\frac{4}{27}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ ; il che non può aver luogo

fintantochè il valor positivo di  $z$  è tra i limiti 1,

e  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Difatto è visibile che  $z$  dee sorpassar l'uni-

tà acciò la quantità  $z^3 - z$  sia positiva; ma, se

si facesse  $z = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ; avrebbesi per resulta-

to  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ , numero maggiore di  $r$ .

Se suppongasi dunque  $z = 1 + \delta$ , la lettera  $\delta$ , non potrà rappresentar che una piccola frazione, minor della differenza 0,1547, che trovasi tra 1, e  $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ; il cubo 0,0037 di questa frazione può essere trascurato; e la resultanza della sostituzione di  $1 + \delta$  in luogo di  $z$  nell'equazione proposta, omettendo  $\delta^3$ , conduce a

$$2\delta + 3\delta^2 = r,$$

dalla quale ricavasi

$$\delta = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 + 3r},$$

ed in conseguenza

$$z = 1 + \delta = \frac{2 + \sqrt{1 + 3r}}{3},$$

poichè non si cerca che il valor di  $z$ , il quale sorpassa l'unità. Il limite dell'errore, che si può commetter per mezzo di questo metodo, non giunge rispetto al valore di  $z$  che ad un millesimo d'unità. Difatto, se si suppone  $z = \sqrt{\frac{4}{3}}$ , valore che corrisponde a  $r = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4}{3}}$ , e pel quale  $\delta$  è il maggiore possibile, la formula quì sopra darà

$$z = \frac{2 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4}{3}}}}{3} \text{ in luogo di } \sqrt{\frac{4}{3}},$$

che non differisce dal vero se non che di 0,00126.

Sia, per esempio, l'equazione  $x^3 - 13x + 5 = 0$ ; faremo  $x = -z\sqrt{13}$ , ed avremo

$$z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}},$$

dalla quale ne dedurremo

$$r = \frac{5}{13\sqrt{13}}, \quad z = \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3},$$

$$-2\sqrt{13} - \sqrt{13 + \frac{15}{\sqrt{13}}}$$

$$x = \frac{\quad}{3} = -3,784.$$

Se si vuole spingere l'esattezza più oltre, impiegheremo il metodo dato nel n.º 215. degli *Elementi*, e troveremo per di lui mezzo

$$x = -3,78434.$$

24. Vado adesso ad occuparmi delle *radici* dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + 2px^2 + qx + r = 0.$$

Queste *radici* dipendon da quelle dell'equazione

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \dots (R),$$

la quale chiamasi la *ridotta*; ed abbiamo pel n.º 17.

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (-\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} - \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}), \\ x &= \frac{1}{2} (+\sqrt{z'} + \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}), \end{aligned}$$

secondo che  $q$  è negativo, o positivo.

\*

1.° È visibile dalla forma di questi valori che, se le *radici* della *ridotta* son tutte tre positive, e *reali*, quelle dell'equazione proposta saranno pure tutte quattro *reali*.

2.° L'equazione (R) avendo il suo ultimo termine negativo, dee, allorchè le sue tre *radici* sono *reali*, averle tutte positive, o solamente una positiva, e due negative; poichè quest'ultimo termine essendo il prodotto di tutte le radici prese con un segno contrario, non può risultar negativo che dalla moltiplicazione di tre fattori negativi, o da quella di due fattori positivi per uno negativo. Nell'ultimo caso fra le quantità  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$  ve ne son dunque due, le quali son affette dal segno —, ed in conseguenza le quattro radici della proposta sono *immaginarie*, eccetto il caso ove le due quantità negative fossero eguali tra loro, poichè allora esse si distruggerebbero in due delle radici, le quali diverrebbero *reali*, ed eguali. Infatti, se si suppone, per esempio, che le radici  $z''$ , e  $z'''$  sien negative, ed eguali, i due primi valori di  $x$  in ciascuna colonna divengono *immaginarj*, ed abbiamo nella prima colonna

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{z'}, \quad x = -\frac{1}{2}\sqrt{z'}:$$

e nella seconda

$$x = +\frac{1}{2}\sqrt{z'}, \quad x = +\frac{1}{2}\sqrt{z'}.$$

3.° Allorchè l'equazione (R) ha una radice *reale*, e due *immaginarie*, la sua radice *reale* non può esser che positiva; poichè le due *immaginarie* non potendo provenire che da un'equazione di secondo grado, di cui l'ultimo termine sia positivo, e sia in conseguenza della forma  $z^2 + Az + B = 0$ , bisogna necessariamente che al fattore del primo grado; il quale contiene la

radice *reale*, sia delle forma  $z = \gamma$ ; senza di che l'ultimo termine del prodotto del primo fattore per il secondo sarebbe positivo.

Risolvendo l'equazione  $z^2 + Az + B = 0$ , avremo

$$z = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B};$$

ma, perchè le sue radici sieno *immaginarie*, è necessario che

$$\frac{A^2}{4} < B;$$

facendo dunque, per abbreviare,

$$-\frac{A}{2} = \alpha, \quad B - \frac{A^2}{4} = \epsilon^2,$$

otterremo

$$z = \alpha \pm \sqrt{-\epsilon^2} = \alpha \pm \epsilon \sqrt{-1},$$

ed avremo

$$z' = \alpha + \epsilon \sqrt{-1}, \quad z'' = \alpha - \epsilon \sqrt{-1}, \quad z''' = \gamma.$$

Troverem successivamente in due dei quattro valori di  $x$  la quantità,

$$\sqrt{\alpha + \epsilon \sqrt{-1}} + \sqrt{\alpha - \epsilon \sqrt{-1}},$$

la quale, benchè affetta dai simboli *immaginarj*, è *reale*, ed eguale a

$$\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 + \epsilon^2}} \quad (20):$$

queste due radici saranno in conseguenza *reali*; le altre due contenendo la quantità

$$\sqrt{\alpha + \epsilon \sqrt{-1}} - \sqrt{\alpha - \epsilon \sqrt{-1}},$$

la quale riducesi a

$$\sqrt{2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 + \zeta^2}},$$

saranno in conseguenza *immaginarie*.

Per riconoscere parimente col mezzo dei coefficienti della proposta in qual caso l'equazione (R) abbia le sue tre radici *reali*, altro non si dee fare che mandar via il secondo termine di quest'ultima, affin di poterla paragonare con la formula  $y^3 + Py + Q = 0$ ; si supporrà per questo  $z = y - \frac{2p}{3}$ , ciò che darà

$$y^3 - \left(\frac{p^2}{3} + 4r\right)y - \frac{2p^3}{27} + \frac{8rp}{3} - q^2 = 0;$$

equazione, della quale le tre radici saranno *reali* quando

$$\frac{1}{27} \left(\frac{p^2}{3} + 4r\right)^3 > \frac{1}{4} \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{8rp}{3} + q^2\right)^2.$$

25. Io non terminerò questo soggetto senza far osservare che le radici *immaginarie* dell'equazioni del quarto grado son della stessa forma di quelle dell'equazioni di secondo. Difatto, allorchè la *ridotta* ha due radici negative  $z''$ ,  $z'''$ , rappresentandole per  $-\alpha^2$ , e  $-\zeta^2$ , i quattro valori di  $x$  diverranno

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\sqrt{z'} + (\alpha + \zeta)\sqrt{-1}) \\ x &= \frac{1}{2}(\sqrt{z'} - (\alpha + \zeta)\sqrt{-1}) \\ x &= -\frac{1}{2}(\sqrt{z'} + (\alpha - \zeta)\sqrt{-1}) \\ x &= -\frac{1}{2}(\sqrt{z'} - (\alpha - \zeta)\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

I due primi combinati insieme daranno un fattor reale di secondo grado; lo stesso succederà riguardo a' due ultimi.

Quando la *ridotta* ha due radici *immaginarie* della forma  $\alpha + \xi \sqrt{-1}$ , e  $\alpha - \xi \sqrt{-1}$ , le due radici *immaginarie* della proposta divengono

$$x = -\frac{1}{2}\gamma + \sqrt{2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} = -\frac{1}{2}\gamma + \delta\sqrt{-1},$$

$$x = -\frac{1}{2}\gamma - \sqrt{2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} = -\frac{1}{2}\gamma - \delta\sqrt{-1},$$

facendo  $2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 + \xi^2} = -\delta^2$ .

La proposta potrà dunque, anco in questo caso, esser formata dalla moltiplicazione di due fattori reali di secondo grado.

### *Delle radici immaginarie in generale.*

26. Abbiamo veduto che per la risoluzione dell'equazioni dei 2.<sup>o</sup>, 3.<sup>o</sup>, e 4.<sup>o</sup> gradi le radici *immaginarie* di queste equazioni possen sempre ridursi alla medesima forma, e distribuirsi a coppie, tali quali come

$$x = A + B\sqrt{-1}, \quad x = A - B\sqrt{-1},$$

di maniera che ciascuna coppia dava un fattore di secondo grado, i cui coefficienti eran *reali*.

Gli Analisti hanno pure riconosciuto che qualunque equazione di grado *p* pari è decomponibile in fattori *reali* di secondo grado. Ecco la dimostrazion, che n'ha data Laplace (*Giornale delle Sedute della Scuola Normale, Lezioni, prima edizione, Tom. II., pag. 315.*)

È necessario provare in primo luogo che ogni equazione d'un grado qualunque *p* avrà un fattore reale di secondo grado se qualunque equazione del grado  $\frac{p(p-1)}{2}$  ha un fattore reale, tanto di primo, che di secondo grado.

Rappresenterò per (P) l'equazione del grado  $p$ , e le sue radici per  $\alpha, \xi, \gamma, \delta$ , ec. Ciò posto, osservo che i fattori di secondo grado di quest'equazione, formati necessariamente dalla moltiplicazione dei fattori di primo grado, combinati due a due, saranno

$$x^2 - (\alpha + \xi)x + \alpha\xi,$$

$$x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma,$$

.....

$$x^2 - (\xi + \gamma)x + \xi\gamma$$

ec.

e dipenderanno per conseguenza dalla ricerca delle funzioni della forma  $\alpha + \xi$ , e  $\alpha\xi$ . Queste funzioni sarebbero determinate quando se ne conoscessero due della forma

$$\alpha + \xi + M\alpha\xi, \quad \alpha + \xi + M'\alpha\xi,$$

le lettere M, e M' indicando dei numeri dati; poichè facendo

$$\alpha + \xi + M\alpha\xi = N, \quad \alpha + \xi + M'\alpha\xi = N',$$

troverebbesi

$$\alpha + \xi = \frac{M'N - N'M}{M' - M}, \quad \alpha\xi = \frac{N' - N}{M' - M}.$$

Ma per giungere all'equazione, dalla quale dipende la funzione  $\alpha + \xi + M\alpha\xi$ , bisogna formar tutti i valori, che dessa prende ponendovi successivamente, in luogo di  $\alpha$ , e  $\xi$ , tutte le radici  $\alpha, \xi, \gamma, \delta$ , ec. della proposta, combinate due a due (7), il che dà  $\frac{p(p-1)}{2}$  risultati, e

fa vedere in conseguenza che l'equazione cercata, ch'io indicherò per (Q), sarebbe del grado  $\frac{p(p-1)}{2}$ .

1.° Se s'ammetta primieramente che quest'equazione abbia sempre una radice *reale*, dando a  $M$  un'infinità di valori, si formeranno un'infinità d'equazioni simili, ciascuna delle quali avrà una radice *reale*, contenente una delle combinazioni, le quali posson farsi delle radici della proposta nella formula  $\alpha + \zeta + M \alpha \zeta$ : ora, il numero di queste combinazioni essendo limitato, bisognerà necessariamente che la stessa combinazione sia ripetuta più volte con diversi valori di  $M$ . Possiamo dunque asserire che esistono almeno due *funzioni* della forma

$$\alpha + \zeta + M \alpha \zeta, \quad \alpha + \zeta + M' \alpha \zeta$$

contenenti le medesime radici  $\alpha$ , e  $\zeta$ , ed i valori delle quali  $N$ , e  $N'$  sono *reali*; dal che risulta che i valori corrispondenti di  $\alpha + \zeta$ , e di  $\alpha \zeta$  lo son parimente.

2.° Se l'equazione (Q) non ha radici *reali*, ma solamente un *fattor reale* di secondo grado, le cui radici sieno *immaginarie*, dando a  $M$  un'infinità di valori, otterremo un'infinità di *funzioni*  $\alpha + \zeta + M \alpha \zeta$ , l'espression delle quali sarà della forma  $A + B \sqrt{-1}$ , e proveremo come quì sopra che se ne devon trovare diverse, le quali non differiscono che per il valore di  $M$ . Avremo dunque

$$\alpha + \zeta + M \alpha \zeta = A + B \sqrt{-1},$$

$$\alpha + \zeta + M' \alpha \zeta = A' + B' \sqrt{-1},$$

dalle quali ricavasi

$$\alpha + \zeta = \frac{M' (A + B \sqrt{-1}) - M (A' + B' \sqrt{-1})}{M' - M},$$

$$\alpha \zeta = \frac{A' + B' \sqrt{-1} - A - B \sqrt{-1}}{M' - M}.$$

E riunendo tra loro i termini *reali*, ed i termini *immaginarj*, potremo rappresentare queste espressioni per

$$2(C + D\sqrt{-1}), \text{ ed } E + F\sqrt{-1};$$

e per mezzo di ciò il fattore  $x^2 - (a + \epsilon) + a\epsilon$  diverrà

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1}.$$

L'esistenza di questo fattore porta seco quella d'un altro, il quale sarebbe

$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1};$$

poichè, sia  $X - Y\sqrt{-1}$  il quoziente, che dà l'equazione (P) allorchè dividesi per il primo fattore, le quantità  $X$ , e  $Y$  debbon essere necessariamente tali che le parti *immaginarie* contenute nel prodotto di questo fattore per  $X - Y\sqrt{-1}$  si distruggano, poichè il dividendo è interamente *reale*; e, se si moltiplica il secondo fattore per  $X + Y\sqrt{-1}$ , avremo un nuovo prodotto, nel quale la parte *reale* sarà pure la stessa che quella del precedente, e la parte *immaginaria*, altro non avendo fatto che cangiare di segno, svanirà parimente.

In generale, qualunque espressione, la quale ha un fattore della forma  $a + b\sqrt{-1}$ , n'ha necessariamente un altro della forma  $a - b\sqrt{-1}$ .

Adesso, se i polinomj

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1},$$

$$\text{e } x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1}$$

non hanno divisor comune, dessi contengono tra loro quattro fattori semplici dell'equazione (P), i quali moltiplicati l'uno per l'altro danno un

fattore del quarto grado, i cui coefficienti sono *reali*; ed abbiain dimostrato nel num.<sup>o</sup> 25. che qualunque equazione del quarto grado può decomporci in fattori *reali* del secondo.

Se i due polinomj

$$x^2 - 2(C + D\sqrt{-1})x + E + F\sqrt{-1},$$

$$x^2 - 2(C - D\sqrt{-1})x + E - F\sqrt{-1}$$

hanno un divisor comune, ponendoli sotto la forma

$$x^2 - 2Cx + E - (2Dx - F)\sqrt{-1},$$

$$x^2 - 2Cx + E + (2Dx - F)\sqrt{-1},$$

vedremo che questo divisore debb'essere comune ancora alle due quantità  $x^2 - 2Cx + E$ , e  $2Dx - F$ , e ne concluderemo ch'esso non può essere se non che della forma  $x - I$ : avrem dunque

$$x^2 - 2Cx + E - (2Dx - F)\sqrt{-1}$$

$$= (x - K - L\sqrt{-1})(x - I),$$

$$x^2 - 2Cx + E + (2Dx - F)\sqrt{-1},$$

$$= (x - K + L\sqrt{-1})(x - I);$$

del che ne segue che  $x - K - L\sqrt{-1}$ ,  $x - K + L\sqrt{-1}$  e  $x - I$  saran tre fattori dell'equazione (P). I due primi moltiplicati tra loro danno un fattore *reale* di secondo grado; e dividendo l'equazione (P) per il terzo, otterremo, s'essa è d'un grado *pari*, un quoziente di grado *impari*, il quale avrà egli stesso un fattore *reale* di primo grado, formante con quello, pel quale abbiain diviso, un secondo fattor *reale* di secondo grado. È dunque ben dimostrato che un'equazione (P) di grado *pari* avrà almeno un fattor *reale* di secondo, gra-

do se l'equazione (Q) ha sempre un fattore *reale* tanto di primo grado, che di secondo.

27. Ciò posto, qualunque numero *pari* essendo necessariamente il prodotto d'un numero *impari* moltiplicato per qualcuno dei numeri 2, 4, 8, 16, ec., e vale a dire, per una potenza di 2, sarà compreso nella formula  $2^m n$ ,  $m$  rappresentando un numero intero qualunque, e  $n$  un numero *impari*; il grado dell'equazione (Q), espresso generalmente da  $\frac{p(p-1)}{2}$ , sarà dunque eguale a

$$\frac{2^m n (2^m n - 1)}{2} = 2^{m-1} n (2^m n - 1)$$

se  $p = 2^m n$ . Facendo  $n (2^m n - 1) = n'$ ,  $n'$  sarà pure un numero *impari*, poichè desso è il prodotto di due numeri *impari*  $n$ , e  $2^m n - 1$ ; e secondo ciò, che precede, l'equazione del grado  $2^m n$  avrà un fattore *reale* di secondo grado se l'equazione del grado  $2^{m-1} n'$  ha un fattore *reale* tanto del primo, che del secondo. Per la stessa ragione, l'equazione del grado  $2^{m-1} n'$  avrà un fattore *reale* se l'equazione del grado  $2^{m-2} n' (2^{m-1} n' - 1)$ , ovvero  $2^{m-2} n''$  ha un fattore *reale* tanto di primo, che di secondo grado. Continuando così, passeremo per una serie d'equazioni, i più alti esponenti delle quali saran della forma

$$2^m n, \quad 2^{m-1} n', \quad 2^{m-2} n'', \quad 2^{m-3} n''', \dots,$$

i numeri  $n, n', n'', n''', \dots$  essendo tutti *impari*, ed arriverem finalmente a un'ultima equazione di grado *impari*, la quale avrà necessariamente un fattore *reale* di primo grado (*Elem.* 213.); in conseguenza la penultima  $n'$  avrà uno di secondo grado, come pure ciascuna dell'altre sino alla proposta inclusivamente. Se si concepisca in se-



2.° che  $(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1})$

$$= aa' - bb' + (a'b + ab')\sqrt{-1};$$

3.° che  $\frac{a + b\sqrt{-1}}{a' + b'\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1})}{(a' + b'\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1})}$

$$= \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\sqrt{-1};$$

4.° che  $(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$ .

Per provar quest' ultima Proposizione, cangeremo  $(a + b\sqrt{-1})^m$  in  $a^m(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1})^m$ ; ed os-

servando che

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{-1} = +\sqrt{-1} & (\sqrt{-1})^5 = +\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1})^2 = -1 & (\sqrt{-1})^6 = -1 \\ \sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1} & (\sqrt{-1})^7 = -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1})^4 = +1 & (\sqrt{-1})^8 = +1, \end{array}$$

vedremo che, se  $s$  indica per  $i$  un numero intero qualunque, si debb' avere in generale

$$(\sqrt{-1})^{4i} = 1, \quad (\sqrt{-1})^{4i+1} = +\sqrt{-1},$$

$$(\sqrt{-1})^{4i+2} = -1, \quad (\sqrt{-1})^{4i+3} = -\sqrt{-1},$$

il che contien tutti i casi: poichè è evidente che non esiste alcun numero, il quale non sia compreso in una delle quattro formule

$$4i, \quad 4i+1, \quad 4i+2, \quad 4i+3,$$

e vale a dire, che non sia divisibile per 4, oppure che non lo divenga quando gli si toglie 1, o sivero 2, oppure 3 unità.

Ciò posto, trovasi per lo sviluppo della potenza  $m$  del binomio.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m = \\ & 1 + \frac{mb}{1a} \sqrt{-1} - \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} \sqrt{-1} \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \text{ec.} \end{aligned}$$

e riunendo i termini affetti da  $\sqrt{-1}$ , i quali son quelli situati in posto *pari*, s'ottiene

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m = \\ & 1 - \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} - \text{ec.} \\ & + \left(\frac{mb}{1a} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} + \text{ec.}\right) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Per passar da questo sviluppo a quello di  $\left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m$ , serve cangiare il segno della quantità  $\frac{b}{a}$  in tutti i termini ov'essa si trova al-

zata ad una potenza *impari*, e così avremo

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m = \\ & 1 - \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} - \text{ec.} \\ & - \left(\frac{mb}{1a} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} + \text{ec.}\right) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Moltiplicando questi risultati per  $a^m$ , e facendo

$$a^m \left( 1 + \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \text{ec.} \right) = A,$$

$$a^m \left( \frac{mb}{1 a} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} + \text{ec.} \right) = B,$$

conseguiremo

$$(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}, (a - b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{-1}.$$

Allorchè avrò fatto vedere che lo sviluppo della potenza  $m$  del *binomio* conviene egualmente al caso ove l'esponente  $m$  è frazionario, o negativo, sarà dimostrato da ciò, che precede, che, qualunque sia  $m$ ,

$$(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}.$$

Per mezzo di questi risultati ridurremo alla forma  $A + B\sqrt{-1}$  qualunque espressione risultante dalla combinazione di più quantità della forma  $a \pm b\sqrt{-1}$ , per addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, ed elevazione alle potenze tanto intere, che frazionarie.

29. Segue dalla Proposizion dimostrata nel n.° 27. che, per ottener le radici *immaginarie* d' un' equazione qualunque, fa di mestieri decomporla in fattori di secondo grado; ma questo mezzo esige la risoluzione d' un' equazione del grado  $\frac{m(m-1)}{2}$  (27) prima ancora che si possa sapere

se la proposta del grado  $m$  ha, o non ha delle radici *immaginarie*. I Geometri han cercato dei metodi per riconoscere l'esistenza di queste *radici* indipendentemente dalla risoluzione d' alcuna equazione: vado ad esporre ciò, che *Lagrange* ha trovato di più generale, a questo riguardo.

Se s'indicano per  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , ec., le radici *reali* d'un'equazione d'un grado qualunque, le sue radici *immaginarie* potranno esser riunite per coppie della forma  $a \pm b\sqrt{-1}$ ,  $a' \pm b'\sqrt{-1}$ , ec. (28); le differenze delle radici combinate due a due saranno necessariamente d'una delle forme seguenti:

$\alpha - \zeta$  tra due radici *reali*;

$\alpha - a \mp b\sqrt{-1}$  tra 1 rad. *reale*, e 1 rad. *im.*

$(a-a') \pm (b-b')\sqrt{-1}$  tra 2 rad. *im.* di cop. dif.

$2b\sqrt{-1}$  tra 2 rad. *im.* della med. cop.

Facendo i quadrati di quest'espressioni, troverem per la prima un risultato *reale*, e positivo; e per la quarta un risultato *reale*, e negativo; le altre due daranno dei risultati *immaginarj*, salvo che non si abbia  $\alpha = a$ , ovvero  $a = a'$ , oppure  $b = b'$ ; ma ciascuno di questi casi introduce delle radici eguali nell'equazione ai quadrati delle differenze. Segue da ciò che, facendo astrazione dalle radici eguali, l'equazione, le cui radici sono i quadrati delle differenze, che si trovano tra quelle della proposta, avrà tante radici negative quante coppie ha quest'ultima di radici *immaginarie*.

30. Da ciò, che precede, si comprende quanto sarebbe da desiderarsi che si avesse almeno una regola sicura onde conoscere senza calcolo il numero delle radici positive, e negative d'un'equazione qualunque; poichè sarebbesi allora in istato d'assegnare, per mezzo dell'equazione ai quadrati delle differenze, il numero delle radici *reali*, e quello delle radici *immaginarie* della proposta. Disgraziatamente la regola, che ha dato *Descartes* per soddisfare a quest'oggetto, genera-

lizzata tanto quanto può esserlo, riducesi alla seguente, cioè:

*Qualunque equazione non può avere un numero di radici positive maggior di quello delle variazioni di segno, che si trovano tra i suoi termini, nè un numero di radici negative maggior di quello delle successioni del medesimo segno; e s' essa non contenesse che delle radici reali, ella n' avrebbe precisamente tante positive quante le variazioni di segno, e tante radici negative quante le successioni del medesimo segno.*

Le *variazioni* di segno sono i cangiamenti dal  $+$  in  $-$ , ovvero dal  $-$  in  $+$ , i quali hanno luogo da un termine all'altro; e *v'* è *successione* ogni qual volta il segno d'un termine è lo stesso di quello del precedente. L'equazione

$$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 9x - 4 = 0,$$

per esempio, ha tre *variazioni* di segno, cioè, da  $+x^4$  a  $-8x^3$ , da  $-8x^3$  a  $+7x^2$ , e da  $+9x$  a  $-4$ ; dal termine  $+7x^2$  al termine  $+9x$  evvi una *successione* di segno  $+$ .

Tra le diverse dimostrazioni, che son state date di questa regola, sceglierò quella, ch'è dovuta a *Segner*, perch'essa m'è sembrata la più semplice di tutte l'altre.

Sia l'equazione

$$x^m \pm P x^{m-1} \pm Q x^{m-2} \dots \pm T x \pm U = 0,$$

nella quale i segni  $+$ , e  $-$  procedono in una maniera qualunque; moltiplicandola per il fattore  $x - \alpha$ , il quale dà la radice positiva  $x = \alpha$ , avremo

$$x^{m-1} \pm P \left. \begin{array}{l} x^m \pm Q \\ - \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^{m-1} \dots \pm U \\ \pm P \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \\ \pm T \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \\ \pm U \alpha \end{array} \right\} = 0.$$

I coefficienti posti nella prima linea del re-

sultato son quelli della proposta presi col medesimo segno, da cui essi erano affetti in principio; ed i coefficienti della seconda linea son formati con quelli della prima moltiplicati per  $\alpha$ , ma presi con un segno contrario, e scritti un passo avanti verso la destra. Ciò posto, sino a tanto che i coefficienti superiori saranno maggiori degl' inferiori, essi determineranno il segno del termine, nel quale si trovano; e, siccome essi non han cangiato di segno, vi saranno tra loro le medesime *variazioni*, e le medesime *successioni* che nella proposta; ma l'ultimo termine  $\mp U \alpha$  avendo sempre un segno contrario a quello del coefficiente superiore  $\pm U$  del penultimo, ne resulterà una nuova *variazione*, che non avea la proposta.

Allorchè s'incontrerà un coefficiente inferiore di segno contrario al suo corrispondente superiore, e maggior di quest'ultimo, avremo una *successione* della proposta, che si cangerà in una *variazione*; poichè il segno del termine, ove ciò accaderà, essendo determinato da quello del coefficiente inferiore, sarà contrario a quello del termine precedente, che si suppone l'istesso di quello del suo coefficiente superiore.

Comprenderemo la verità di quest'asserzione osservando che non possiamo esser obbligati di ricorrere al coefficiente inferiore per riconoscere il segno d'un termine se non che in dei casi simili ad uno dei due seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} +R\alpha^{m-3} + S \\ -R\alpha \end{array} \right\} x^{m-4}, \quad \left. \begin{array}{l} -R\alpha^{m-3} - S \\ +R\alpha \end{array} \right\} x^{m-4},$$

supponendo che s'abbia  $R\alpha > S$ ; l'ordine progressivo dei segni sarà nel primo  $+ -$ , e nel secondo  $- +$ : io non ho scritto il coefficiente inferiore nel primo termine, poichè per ipotesi, desso non influisce sul segno di questo termine.

È dunque evidente che ogni qual volta si discende dalla linea superiore alla linea inferiore per determinare il segno, avremo in tal caso una *variazione*, la qual non si trova nell'equazione proposta; e, se dopo di questo passaggio si resta sempre nella linea inferiore, si trovano le medesime *variazioni*, e le medesime *successioni* come nella proposta, perchè i coefficienti di questa linea hanno tutti un segno contrario al primitivo lor segno. Quando risaliremo dalla linea inferiore alla superiore, potrà risultarne o una *variazione*, o una *successione*; poichè non esiste connessione alcuna tra il segno d'un coefficiente inferiore, e quello del coefficiente superiore del termin seguente. Ma supponendo ancora che questo passaggio producesse in tutti i casi una *successione*, siccome l'ultimo termine della nuova equazione fa parte della seconda linea, bisognerà sempre tornare almeno una volta di più in questa linea che nella prima, ed in conseguenza la nuova equazione avrà almeno una *variazione* di segno di più che la proposta: succederebbe lo stesso per ciascuna radice positiva, che s'introducesse di nuovo.

Se si moltiplica in seguito l'equazione proposta per il fattore  $x + \alpha$ , il quale dà la radice negativa  $x = -\alpha$ , avremo

$$x^{m-1} \pm P \left\{ x^m \pm Q \right\} x^{m-1} \dots \pm U \left\{ x \right. \\ \left. \pm \alpha \right\} \left. \pm P\alpha \right\} \left. \pm T\alpha \right\} \left. \pm U\alpha \right\} = 0.$$

I coefficienti posti nella prima linea sono ancor qui gli stessi, e del medesimo segno che nell'equazione proposta; quelli della seconda linea son pure formati da quelli della prima moltiplicati per  $\alpha$ , e portati avanti d'un passo verso la destra; ma nel caso attuale d'essi conservano il segno lor primitivo.

Ragionando della stessa maniera come di sopra, vedremo che, ogni qual volta saremo obbligati di prendere il segno del coefficiente inferiore, otterremo una nuova *successione*, la quale non esisteva nella proposta. Gli esempj, che seguono

$$\begin{array}{l} +R\alpha^{m-3} - S \\ +R\alpha \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} +R\alpha^{m-3} - S \\ +R\alpha \end{array}} \right\} x^{m-4}, \quad \begin{array}{l} -R\alpha^{m-3} + S \\ -R\alpha \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -R\alpha^{m-3} + S \\ -R\alpha \end{array}} \right\} x^{m-4},$$

analoghi a quelli, che abbiám dati superiormente, renderan questa conseguenza molto evidente; poichè  $R\alpha$  essendo maggiore di  $S$ , avremo nell'uno  $++$ , e nell'altro  $--$ . Allorchè risaliremo dalla linea inferiore alla linea superiore, potrà risultare indifferentemente o una *variazione*, o una *successione*; ma supponendo che in qualunque caso abbia luogo una *variazione*, potremo malgrado ciò concludere che il numero delle *successioni* sarà almeno d'un'unità maggiore, poichè l'ultimo termine trovandosi nella seconda linea, ci obbligherà sempre a tornare a questa linea almeno una volta di più che nell'altra. Segue da ciò che ciascuna radice negativa aggiunta alla proposta apporterà con essa almeno una *successione*. Rapprossimando questa conclusione alla precedente, vedremo che *il numero delle radici positive d'un'equazione qualunque non potrà sorpassare quello delle variazioni di segno, ch'essa contiene, ed il numero delle radici negative quello delle successioni*.

Se l'equazione proposta non avesse che delle radici *reali*, si proverebbe per mezzo di ciò ch'essa debb' avere precisamente tante radici positive quante *variazioni*, e tante radici negative quante *successioni* di segno. Infatti, qualunque siasi il numero delle *variazioni*, e il numero delle *successioni*, che porta seco ciascuna radice positiva,

e ciascuna radice negativa, il numero dell' une, e dell' altre nel risultato finale debb' essere eguale a quello dei termini diminuito dell' unità, ovvero all' esponente del grado dell' equazione, oppure finalmente al numero delle radici; ma le *variazioni* non son prodotte che dalle radici positive, e le *successioni* dalle radici negative: bisogna dunque che vi sien tante *variazioni* quante radici positive, tante *successioni* quante radici negative, e viceversa.

31. Le radici *immaginarie* modifican questa proposizione, perchè desse hanno luogo tanto con delle *variazioni*, quanto con delle *successioni* di segno. Ciò si fa manifesto sull' equazione stessa del secondo grado  $x^2 \pm 2px + q = 0$ , le radici della quale sono *immaginarie* qualunque siasi il segno di  $p$ , allorchè  $p^2$  è minore di  $q$ .

Possiamo spessissimo riconoscere immediatamente la presenza delle radici *immaginarie* per mezzo della regola sopraccitata, allorchè un' equazione manca di qualche termine. Nell' equazione  $x^3 + px + q = 0$ , per esempio, se si pone  $\pm 0 \cdot x^2$  in luogo del secondo termine, il quale manca, s' ottiene

$$x^3 \pm 0 \cdot x^2 + px + q = 0;$$

e quando non si ha riguardo che al segno superiore, non si trovano che delle *successioni*, mentre che il segno inferiore dà due *variazioni*. Questi risultati, uno de' quali sembra indicare tre radici negative, e l' altre due radici positive, non accordandosi punto tra loro, fanno vedere che la proposta ha delle radici *immaginarie*: se s' avesse

$$x^3 - px + q = 0,$$

scrivendola nel modo seguente

$$x^3 \pm 0 \cdot x^2 - px + q = 0,$$

qualunque segno s'impiegasse, troverebbersi sempre due *variazioni*, e una *successione*; l'accordo di questi risultati prova che quest'equazione può avere le sue tre radici reali, ma non ch'essa le abbia difatto, poichè sappiamo d'altronde che ciò non ha luogo eccetto che quando  $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ .

32. Ciò posto, indico per (D) l'equazione ai quadrati delle differenze (29), la quale può formarsi secondo le regole del n.º 8. È evidente, mercè dalla regola del num.º precedente, che, se tutti i suoi segni sono alternativamente positivi, e negativi, e vale a dire, se dessa non ha che delle *variazioni*, non avrà che delle radici *reali*, e positive, e tutte quelle della proposta saranno *reali*. Difatto, se questa avesse delle radici *immaginarie*, tra le radici dell'equazione (D) se ne troverebbero necessariamente delle *reali*, e negative (29); essa avrebbe dunque delle *successioni*; il che è contra la supposizione.

L'ultimo termine d'un'equazione essendo, come si sa, il prodotto di tutte le sue radici prese con un segno contrario, sarà negativo, se il numero delle radici reali positive è *impari*; imperocchè l'ultimo termine del prodotto d'una coppia di radici *immaginarie* è sempre positivo. Applicando quest'osservazione all'equazione (D), vedremo che, se il suo ultimo termine è negativo, essa avrà un numero di radici negative *pari*, o *impari*, secondo ch'ella sarà d'un grado *impari*, o *pari*. Nel primo caso, la proposta avrà un numero *pari* di coppie di radici *immaginarie*, ed un numero *impari* nel secondo. In generale segue dalla natura delle radici dell'equazioni (D), e da ciò, che abbiamo veduto nel n.º 29., che la proposta non può aver più coppie di radici *im-*

*maginarie* di quel che si trovino *successioni* di segno nell'equazione (D).

Le considerazioni precedenti non conducono sempre che ad assicurarsi se un'equazione data ha delle radici *immaginarie*, ed a trovare un limite che il loro numero non possa eccedere; ma seguendo lo spirito del metodo, formeremo delle nuove equazioni ausiliarie, le quali non potrebbero avere delle radici negative se non che allora quando la proposta avesse almeno quattro radici *immaginarie*; altre, che non avrebbero che delle positive fintanto che il numero delle radici *immaginarie* della proposta fosse al disotto di sei; e così di seguito. Bisognerebbe formare nel primo caso l'equazione, che dà i quadrati delle differenze, che trovansi tra le somme delle radici combinate due a due; nel secondo quella, che dà i quadrati delle differenze, che si trovano tra le somme delle radici prese tre a tre.

33. Qualora s'arrivasse a trovare in una maniera qualunque le radici negative, e ineguali dell'equazione (D), se ne dedurrebbero le radici *immaginarie* della proposta. Difatto, sostituendo in quest'ultima  $a + b\sqrt{-1}$  in luogo di  $x$ , ed eguagliando separatamente a zero la parte *reale*, e la parte *immaginaria*, avrebbersi due equazioni per determinare le incognite  $a$ , e  $b$ ; ma, se si conoscesse *a priori* il valor di  $b$ , e si sostituisse nell'una, e nell'altra di queste equazioni,  $a$  sarebbe data per mezzo del divisor comune dei due risultati fatto eguale a zero (*Elem.* 189). Ora, chiamando  $-z'$  una delle radici negative dell'equazione (D), questa radice esprimerà il quadrato della differenza tra le due radici *immaginarie*

comprese nella formula  $a \pm b\sqrt{-1}$ , ed avremmo in conseguenza

$$-z' = -4b^2,$$

dalla quale

$$b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{z'}.$$

*Dell' estrazione delle radici delle quantità in parte commensurabili, ed in parte incommensurabili.*

34. Abbiam veduto nei num. 19., e 21. quanto poteva esser utile il sapere quando un' espressione complicata di radicali sia una potenza perfetta; per questa ragione gli Analisti sonosi essi occupati della ricerca dei caratteri, dai quali queste potenze si riconoscono.

35. Sia  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ : l' espressione  $a + \sqrt{b}$  non può essere che il quadrato d' un' altra espressione di questa forma  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ , nella quale si trova compresa la seguente  $A' + \sqrt{B}$ , supponendo che  $A = A'^2$ . Ciò posto, avremo

$$a + \sqrt{b} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = A + B + 2\sqrt{AB};$$

paragonando da un lato la parte commensurabile, e dall' altro la parte incommensurabile, formeremo queste due equazioni

$$a = A + B, \quad \sqrt{b} = 2\sqrt{AB};$$

quadrando di nuovo, avremo

$$a^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad b = 4AB;$$

togliendo la seconda equazion dalla prima, con seguiremo

$$a^2 - b = A^2 - 2AB + B^2;$$

e finalmente prendendo la radice quadrata da ciascun membro di quest'ultima, concluderemo

$$\sqrt{a^2 - b} = A - B.$$

Se si combina quest'equazione con  $a = A + B$ , ne ricaveremo i valori

$A = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$ ,  $B = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$ ,  
dietro ai quali le quantità  $A$ , e  $B$  non possono essere razionali come supponesi, salvo che  $a^2 - b$  non sia un quadrato perfetto.

Sia, per esempio,  $\sqrt{7} + \sqrt{48}$ ; avremo

$$a = 7, \quad b = 48, \quad a^2 - b = 49 - 48 = 1,$$

$$A = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4, \quad B = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3,$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Sia ancora l'espression letterale

$$\sqrt{4mn + 2(m+n)(m-n)\sqrt{-1}},$$

equivalente a

$$\sqrt{4mn + \sqrt{-4(m+n)^2(m-n)^2}};$$

avremo, per quest'esempio,

$$a = 4mn, \quad b = -4(m+n)^2(m-n)^2,$$

$$a^2 - b = 4m^4 + 8m^2n^2 + 4n^4 = 4(m^2 + n^2)^2,$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{2mn + m^2 + n^2}, \quad \sqrt{B} = \sqrt{2mn - m^2 - n^2},$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{(m+n)^2} + \sqrt{(m-n)^2} \times -1$$

$$= m + n + (m - n)\sqrt{-1}.$$

Finalmente, se s'avesse

$$\sqrt{m^2 - mn + \frac{1}{4}n^2 + 2\sqrt{m^3n - 2m^2n^2 + \frac{1}{4}mn^3}},$$

troverebbesi

$$\sqrt{mn} + \sqrt{m^2 - 2mn + \frac{1}{4}n^2}.$$

Quando, in luogo di  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ , abbiassi  $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ , bisogna prendere  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ , A, e B conservando gli stessi valori che sopra.

In questi due casi la radice cercata è doppia come tutte quelle di secondo grado; poichè abbiamo nel primo caso

$$+ \sqrt{A} + \sqrt{B}, \text{ o sivero } - \sqrt{A} - \sqrt{B},$$

e nel secondo,

$$+ \sqrt{A} - \sqrt{B} \text{ o sivero } - \sqrt{A} + \sqrt{B}.$$

36. Vado a cercare attualmente il caso ove sia possibile d'estrarre la radice cubica da un'espressione della forma  $a + \sqrt{b}$ . Per giungere a ciò, fa di mestieri scoprire la forma, che si dee dare a questa radice. Non si può supporre ch'essa sia  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ , poichè il cubo di questa quantità essendo

$$\begin{aligned} & A\sqrt{A} + 3A\sqrt{B} + 3B\sqrt{A} + B\sqrt{B} \\ & = (A + 3B)\sqrt{A} + (3A + B)\sqrt{B}, \end{aligned}$$

contiene due radicali quadrati essenzialmente diversi.

Non sarà così della forma  $A + \sqrt{B}$ ; ma, per generalizzarla un poco, scriverò

$$(A + \sqrt{B})\sqrt[3]{C};$$

il suo cubo sarà allora

$$C(A^3 + 3A^2\sqrt{B} + 3AB + B\sqrt{B}).$$

Paragonando la parte razionale di quest'espressione con  $a$ , e la parte irrazionale con  $\sqrt{b}$ , troverò l'equazioni

$$a = C(A^3 + 3AB), \quad \sqrt{b} = C(3A^2 + B)\sqrt{B};$$

quadrando l'una, e l'altra, otterrò

$$a^2 = C^2 (A^6 + 6A^4B + 9A^2B^2),$$

$$b = C^2 (9A^4B + 6A^2B^2 + B^3),$$

dalle quali conchiuderò

$$\frac{a^2 - b}{C^2} = A^6 - 3A^4B + 3A^2B^2 - B^3 = (A^2 - B)^3,$$

ed in conseguenza

$$A^2 - B = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{C^2}} = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C}.$$

La lettera C essendo indeterminata, possiamo disporre in modo che la quantità  $(a^2 - b)C$  sia un cubo perfetto: allorchè questa determinazione sarà effettuata, avremo, facendo, per abbreviare,

$\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C} = c$ , l'equazione

$$A^2 - B = c,$$

dalla quale

$$B = A^2 - c;$$

sostituendo nell'equazione  $a = C(A^3 + 3AB)$ , avremo

$$4CA^3 - 3cCA - a = 0.$$

Quest'ultima avrà necessariamente una radice commensurabile, se A, e B son razionali.

Prendendo, per esempio, la quantità  $2 + 11\sqrt{-1}$  del n.º 19., otterremo

$$a = 2, 11\sqrt{-1} = \sqrt{b},$$

d'onde

$$b = -121, a^2 - b = 125$$

$$A^2 - B = \frac{1}{C} \sqrt[3]{125C}.$$

Il numero 125. essendo un cubo perfetto, potremo far  $C=1$ , ed avremo

$$c=5, A^2-B=5, \text{ e } 4A^3-15A-2=0.$$

L'equazione in  $A$  avendo per divisore commensurabile  $A-2$ , somministra

$$A=2;$$

dipoi trovasi

$$B=4-5=-1,$$

dalla quale risulta

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1};$$

otterrebbe col medesimo metodo

$$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}.$$

Sia ancora la quantità  $52+30\sqrt{3}$ , la quale dà

$$a=52, \sqrt{b}=30\sqrt{3}, a^2-b=4,$$

$$A^2-B=\frac{1}{C}\sqrt[3]{4C}.$$

Qui, per rendere  $4C$  un cubo perfetto, bisogna far  $C=2$ , ed abbiamo in seguito

$$A^2-B=1, \quad 8A^3-6A-52=0.$$

Adesso, se si pone  $2A=y$ , avrem l'equazione

$$y^3-3y-52=0,$$

della quale  $y-4$  è un divisore, e s'arriverà finalmente a

$$y=4, \quad A=2, \quad B=3,$$

di dove

$$\sqrt[3]{52+30\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

37. Questi esempj servono per far vedere

come può giungersi a estrarre una radice qualunque da un' espressione irrazionale data. La difficoltà consiste nell' indovinare la forma, sotto la quale questa radice dee presentarsi; ed allorchè questa forma è trovata, e che se ne paragona la potenza con l' espressione irrazionale proposta, ottenngonsi dell' equazioni in numero eguale a quello delle indeterminate, e che debbon condurre ad un' equazione finale avente dei divisori commensurabili.

Così, per ridurre alla forma  $(A + \sqrt{B}) \sqrt[n]{C}$

l' espressione  $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}}$ , avremo

$$a + \sqrt{b} = C(A + \sqrt{B})^n;$$

equazione, la qual si dividerà nelle seguenti

$$a = C \left( A^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2} B + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n-4} B^2 + \text{ec.} \right),$$

$$\sqrt{b} = C \left( \frac{n}{1} A^{n-1} \sqrt{B} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-3} B \sqrt{B} + \text{ec.} \right).$$

Dietro a questi valori è visibile che

$$a = \frac{1}{2} C [(A + \sqrt{B})^n + (A - \sqrt{B})^n],$$

$$\sqrt{b} = \frac{1}{2} C [(A + \sqrt{B})^n - (A - \sqrt{B})^n];$$

e siccome

$$a^2 - b = \frac{1}{4} C^2 [(A + \sqrt{B})^{2n} + 2(A^2 - B)^n + (A - \sqrt{B})^{2n} - (A + \sqrt{B})^{2n} + 2(A^2 - B)^n - (A - \sqrt{B})^{2n}],$$

si ha, dopo fatte le riduzioni,

$$a^2 - b = C^2 (A^2 - B)^n, \text{ oppure } A^2 - B = \sqrt[n]{\frac{a^2 - b}{C^2}}.$$

Bisognerà dunque primieramente, per una deter-

minazion convenevole di  $C$ , rendere la quantità  $\frac{a^2 - b}{C^2}$  una potenza esatta del grado  $n$ ; allorchè questa condizione sarà sodisfatta, avremo un valor razionale di  $B$ , il quale sostituito nell'espressione di  $A$  dovrà condurre ad un'equazione avente dei divisori commensurabili, se  $A$  può essere razionale.

### *Dell'abbassamento dell'Equazioni.*

38. Vi son delle circostanze ove un'equazione può esser ridotta ad un grado inferiore a quello, sotto il quale essa presentasi; ciò succede sempre allorchè esistono tra le sue radici delle relazioni particolari, ovvero ch'essa divien divisibile per un fattor razionale. La ricerca dei caratteri, da cui riconoscesi che un'equazione sia suscettibile d'*abbassamento*, e quella dei mezzi d'effettuar questi *abbassamenti*, fan parte della risoluzione delle equazioni; ecco perchè quì ne tratterò succintamente.

Supporrò in primo luogo che s'abbia l'equazione

$$x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0,$$

le cui radici sieno rappresentate per  $a, b, c, e d$ , e che si sappia che tra due di queste radici esista una relazione indicata dall'equazione  $ma + nb = k$ ;  $m, n$ , e  $k$  essendo delle quantità cognite, potrem trovare  $a$ , e  $b$  in una maniera semplicissima; poichè  $a$ , e  $b$  essendo le radici dell'equazione proposta, avremo

$$a^4 + p a^3 + q a^2 + r a + s = 0,$$

$$b^4 + p b^3 + q b^2 + r b + s = 0:$$

ma, se dall'ultima di queste s'elimina  $b$  per mez-

zo dell'equazione  $ma + nb = k$ , l'equazione risultante dovrà necessariamente accordarsi con l'equazione

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0;$$

e poichè l'una, e l'altra saran soddisfatte col medesimo valore di  $a$ , desse avranno un fattor comune, il quale otterremo cercandone il loro massimo comun divisore, che farà conoscere il valor di  $a$  (*Elem.* 189): troverebbesi  $b$  nella stessa maniera. Convieni osservare che nel caso, ove le due radici  $a$ , e  $b$  entrassero *similmente* nella data relazione, il che succederebbe se  $s$  avesse  $m = n$ , da cui ne risulterebbe

$$m(a + b) = k,$$

il divisor comune, di cui ho parlato, ascenderebbe al secondo grado. La ragione di questo fatto è facile a intendersi; poichè allora, sia che s'elimini  $a$ , sia che s'elimini  $b$ , si cade sopra equazioni *simili*, e che per conseguenza debbon condurre ad un'equazione, che dà nel medesimo tempo l'una, e l'altra di queste incognite, ovvero che ha due radici.

Se la relazione proposta fosse  $la + mb + nc = k$ , s'avrebbero l'equazioni

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$$

$$b^4 + pb^3 + qb^2 + rb + s = 0$$

$$c^4 + pc^3 + qc^2 + rc + s = 0.$$

Eliminando, per mezzo delle due ultime,  $b$ , e  $c$  dall'equazione  $la + mb + nc = k$ , s'arriverebbe ad un'equazione finale, che non contenendo altro che  $a$ , avrebbe necessariamente con  $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$  un divisore comune, il qual determinerebbe  $a$ ; troverebbersi  $b$ , e  $c$  in una maniera consimile. Se s'avesse  $l = m$ , ciò che

cangerebbe la relazione data in  $l(a + b) + nc = k$ , siccome sarebbe indifferente di scrivere  $a$  per  $b$ , e  $b$  per  $a$ , il divisor comune, il qual somministra  $a$ , somministrerebbe ancora  $b$ , e sarebbe in conseguenza di secondo grado. Finalmente nel caso, ove la relazione data fosse  $l(a + b + c) = k$ , le tre radici  $a, b, c$  entrerebbero della stessa maniera nel divisor comune, il quale sarebbe in conseguenza del terzo grado.

Ciò che abbiám detto per rapporto all'equazione del quarto grado, ed a relazioni espresse da equazioni del primo, può applicarsi ad un grado, ed a relazioni qualunque; e ne concluderemo che bisogna trattar ciascuna delle radici, le quali entrano nella relazione data, come un'incognita distinta, formar l'equazioni risultanti dalla loro sostituzione nell'equazion proposta, ed unir queste nuove equazioni con quelle, ch'esprime la relazione data; dipoi eliminare tutte le incognite, eccettuatane una, che si conserverà ad un tempo nelle due equazioni, le quali così ammetteranno un divisor comune, il quale secondo il grado, di cui sarà, farà conoscere una, o più delle radici comprese nella relazione data.

39. Prendo per primo esempio l'equazione di terzo grado

$$x^3 + px^2 - q^2x - q^2p = 0,$$

e suppongo che si sappia d'altronde che fra le sue radici due ve ne sono eguali, ma di segno contrario: chiamando  $a$ , e  $b$  queste due radici, otterremo immediatamente dall'equazion proposta

$$a^3 + pa^2 - q^2a - q^2p = 0,$$

$$b^3 + pb^2 - q^2b - q^2p = 0.$$

La relazione data tra  $a$ , e  $b$  somministra di più

questa terza equazion  $b = -a$ , in virtù della quale la seconda diviene

$$-a^3 + pa^2 + q^2 a - q^2 p = 0,$$

oppure, cangiando nel medesimo tempo tutti i segni, e ponendo  $x$  per  $a$ ,

$$x^3 - px^2 - q^2 x + q^2 p = 0.$$

Dipoi cercando il divisor comune a quest'ultima equazione, ed alla proposta, si trova

$$x^2 - q^2;$$

il che dà

$$x^2 - q^2 = 0,$$

o sivvero

$$x = +q, \text{ e } x = -q.$$

Il divisore è di secondo grado, poichè la relazione  $b = -a$ , equivalente ad  $a + b = 0$ , resta la stessa allorchè cangiansi  $a$  in  $b$ , e  $b$  in  $a$  (38).

Il precedente Problema si sarebbe potuto risolvere nella maniera che segue: il fattor, che contiene le due radici  $a$ , e  $b$ , essendo  $x^2 - (a+b)x + ab$ , diviene  $x^2 - a^2$  allorchè si suppone, dietro la data relazione,  $b = -a$ ; bisognerebbe dunque, se  $a$  fosse determinato convenevolmente, che l'equazione proposta fosse divisibile per  $x^2 - a^2$ . Ora, dopo d'aver spinta la divisione per questo fattore fino a che sia possibile, abbiamo per resto

$$-(q^2 - a^2)x - (q^2 p - a^2 p);$$

quantità, la quale dovendo essere *zero* indipendentemente da  $x$  (*Elem.* 210), somministra

$$q^2 - a^2 = 0, \quad q^2 p - a^2 p = 0;$$

la seconda di quest'equazioni è *identica* colla prima, dalla quale ricavasi

$$q^2 = a^2,$$

ed in conseguenza

$$x^2 - a^2 = x^2 - q^2,$$

come quì sopra .

Sarà facile, con un poco d'attenzione di riconoscere che quest'ultimo metodo, convenevolmente generalizzato, dee risolvere tutti i Problemi relativi all'abbassamento dell'equazioni.

40. Se le due equazioni  $q^2 - a^2 = 0$ , e  $q^2 p - a^2 p = 0$  non si fosser trovate comprese l'una nell'altra, l'equazione proposta non sarebbe stata divisibile per un fattor della forma  $x^2 - a^2$ , e non si sarebbe avuta per conseguenza tra due delle sue radici la relazione, la quale abbiamo supposto esistere; ma, se le quantità  $p$ , e  $q$ , oppure in generale i coefficienti dell'equazion proposta, fossero stati indeterminati, avremmo potuto determinarli in modo da soddisfare a tal condizione. Le medesime circostanze s'incontrano nel primo metodo; poichè potrebbersi eliminare  $a$ , e  $b$  dalle tre equazioni

$$\begin{aligned} a^3 + p a^2 - q^2 a - q^2 p &= 0, \\ b^3 + p b^2 - q^2 b - q^2 p &= 0, \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

ed esisterebbe ancora un'equazione tra  $p$ , e  $q$ , la quale si troverebbe *identica* nel caso attuale, perchè l'equazion proposta sodisfà alla condizione data, ma che, se ciò non avesse luogo, esprimerebbe la relazione, che una simil condizione suppone tra i coefficienti dell'equazion proposta.

41. Abbiám veduto nel n.º 205. degli *Elementi* che, quando un'equazione avesse delle radici eguali, essa sarebbe suscettibile d'abbassamento; questo è ciò, che si può provarc per mezzo delle considerazioni precedenti.

L'equazione  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ , per esempio, somministrando tra due qualunque delle sue radici  $a$ , e  $b$ , l'equazioni identiche

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0,$$

$$b^4 + pb^3 + qb^2 + rb + s = 0,$$

conduce a

$$a^4 - b^4 + p(a^3 - b^3) + q(a^2 - b^2) + r(a - b) = 0.$$

Dividendo questo risultato per  $a - b$ , avrem l'equazione

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + p(a^2 + ab + b^2) + q(a + b) + r = 0,$$

la quale diviene

$$4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r = 0$$

allorchè si suppone  $a = b$ : bisogna dunque che, in quest'ipotesi, l'equazioni

$$a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0,$$

$$4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r = 0,$$

abbian tra loro un divisore comune. Seguendo questa via, arriverem, mediante il soccorso della Proposizione del n.º 158. degli *Elementi* al risultato del n.º 205. del Volume medesimo.

Possiamo trovare ancora le radici eguali considerando che un'equazione, la quale ha due radici eguali, è necessariamente divisibile per un fattor della forma

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2;$$

e per un fattor della forma

$$x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3,$$

s'essa ha tre radici eguali; e così in seguito.

Arrivasi ad un risultato più elegante, e più generale cercando ciò, che diviene allora la *funzione* designata per (A) nel n.º 4.

Se l'equazion proposta è della forma

$$(x-a)^n(x-b)^r(x-c)^s \dots \times (x-g)(x-h) = 0,$$



42. L'equazione

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

offre un esempio del caso, in cui la forma stessa dell'equazione proposta fa scoprire una relazione tra le sue radici. Essa resta la stessa allorchè si

si sostituisce  $\frac{1}{x}$  in luogo di  $x$ , e trovasi solamente

scritta in un ordine inverso: bisogna dunque con-

cluder da ciò che, se  $a$  è una delle sue radici,  $\frac{1}{a}$

n'è pure un'altra. Chiamando  $c$  una radice dif-

ferente dalle due precedenti, dessa pure n'avrà

una corrispondente  $\frac{1}{c}$ ; e finalmente  $e$  essendo una

radice distinta dalle quattro, che ho già indicate,

darà una sesta radice  $\frac{1}{e}$ . Da ciò si fa manifesto che, se

s'indicano per  $a, b, c, d, e, f$  le sei radici della

proposta, avremo tra loro le relazioni seguenti:

$$b = \frac{1}{a}, \quad d = \frac{1}{c}, \quad f = \frac{1}{e},$$

o sivero

$$ab = 1, \quad cd = 1, \quad ef = 1.$$

Non è necessario d'impiegar quì il metodo del n.º 38., poichè egli è evidente che, combinando ciascuna delle radici  $a, c, e$  colla sua corrispondente, per formarne un fattore di secondo grado della proposta, avremo questi tre fattori

$$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1,$$

$$x^2 - \left(c + \frac{1}{c}\right)x + 1,$$

$$x^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)x + 1,$$

nei quali altro non v'è d'incognito se non che il coefficiente del secondo termine. Se dunque s'indica questo per  $z$ , la quantità  $z$  non dipenderà che da un'equazione di terzo grado, le cui radici saranno  $a + \frac{1}{a}$ ,  $c + \frac{1}{c}$ ,  $e + \frac{1}{e}$ . Benchè queste *funzioni* non sembrino a prima vista contenere tutte le permutazioni, che la lor forma permette di fare tra le radici, è facile assicurarsi che quelle, che si trascurano, non son che ripetizioni. Difatto, non supponendo alcuna relazione tra  $a, b, c, d, e, f$ ; s'avrebbe

$$\begin{array}{ccc} a + \frac{1}{a}, & c + \frac{1}{c}, & e + \frac{1}{e}. \\ b + \frac{1}{b}, & d + \frac{1}{d}, & f + \frac{1}{f}, \end{array}$$

ma, poichè nell'ipotesi stabilita

$$b = \frac{1}{a}, \quad d = \frac{1}{c}, \quad f = \frac{1}{e},$$

le *funzioni* della seconda linea sono le stesse che quelle della prima, ed in conseguenza l'equazione di sesto grado, che darebbe queste sei *funzioni* per il caso generale, debbe abbassarsi, in questo caso, al terzo grado.

43. Si può formare quest'ultima semplicissimamente dividendo per  $x^3$  tutti i termini dell'equazione proposta

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

e riunendo quelli, che sono equidistanti dagli estremi, nel modo, che si vede quì sotto

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + p \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + q \left( x + \frac{1}{x} \right) + r = 0.$$

Se facciamo adesso  $x + \frac{1}{x} = z$ , avremo

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2,$$

oppure

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2,$$

dalla quale ricaveremo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

poi

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = z^3,$$

il che darà

$$x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3;$$

e ponendo  $z$  in luogo di  $x + \frac{1}{x}$ , otterremo

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + p\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + q\left(x + \frac{1}{x}\right) + r = 0,$$

troveremo

$$z^3 + pz^2 + (q - 3)z + r - 2p = 0.$$

Allorchè avremo determinato  $z$  per mezzo di quest'equazione, altro non resterà, per ottenere le radici della proposta, che risolvere le tre equazioni di secondo grado

$$x^2 - z'x + 1 = 0, \quad x^2 - z''x + 1 = 0, \quad x^2 - z'''x + 1 = 0,$$

nelle quali  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$  rappresentano i tre valori di  $z$ , che si deducono da  $x + \frac{1}{x} = z$ .

Le osservazioni precedenti sull'equazione  $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0$ , convengono a tutti i Problemi, nell'equazioni dei quali i termini equidistanti dal primo, e dall'ultimo hanno gli stessi coefficienti, e che si chiamano *equazioni reciproche*, perchè desse non cambiano allorchè si sostituisce  $\frac{1}{x}$  in luogo di  $x$  :

44. Sia l'equazion generale d'un grado *pari*  $x^{2m} + px^{2m-1} + qx^{2m-2} \dots + qx^2 + px + 1 = 0$ ; la divideremo per  $x^m$ ; e riunendo i termini equidistanti dagli estremi, avremo

$$x^m + \frac{1}{x^m} + p \left( x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) + q \left( x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}} \right) + \dots = 0.$$

Faremo ancora  $x + \frac{1}{x} = z$ , e non si tratterà d'altro che di dedurne successivamente

$$x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x^3 + \frac{1}{x^3}, \dots, x^m + \frac{1}{x^m}.$$

Ora, ravvicinando i risultati digià trovati, e calcolando nella stessa maniera alcuni di quelli, che vengon dopo, troveremo

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2,$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = z^5 - 5z^3 + 5z;$$

e spingendo questa Tavola tanto lontano quanto sarà necessario, riconosceremo, dietro la legge dell'espressioni, ch'essa contiene, che

$$x^n + \frac{1}{x^n} = z^n - \frac{n}{1} z^{n-2} + \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2} z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{n-6} \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^{n-8} - \text{ec.}$$

Da ciò si fa manifesto che l'equazione proposta del grado  $2m$  sarà ridotta al grado  $m$ .

S'essa fosse d'un grado *impari*, e s'avesse, per esempio,

$$x^5 + px^4 + qx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

si scriverebbe nel modo seguente:

$$x^5 + 1 + px(x^3 + 1) + qx^2(x + 1) = 0,$$

il che farebbe vedere ch'essa sarebbe divisibile per  $x + 1$ ; e fatta la divisione, avrebbesi per quoziente

$$x^4 + (p-1)x^3 - (p-q-1)x^2 + (p-1)x + 1 = 0,$$

equazione *reciproca* del quarto grado.

Sarà facile l'operare sopra qualunque equazione *reciproca* di grado *impari*, come su quella di quinto grado.

45. Ciò, che precede, s'applica all'equazione  $y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \dots + y^2 + y + 1 = 0$ , dedotta dall'equazione  $y^m - 1 = 0$  divisa per  $y - 1$ , e che contiene le  $m - 1$  radici dell'unità, differenti da 1 (*Elem.* 159.). Vi son dunque due casi da esaminare, cioè, quello ove l'esponente è *pari*, e l'altro dov'egli è *impari*.

Nel primo, il numero  $m - 1$  essendo *impari*,

l'equazione  $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{ec.} = 0$  è divisibile per  $y + 1$ , e dà per quoziente un'equazione *reciproca* del grado  $m - 2$ , la quale riducesi a un'equazione in  $z$  del grado  $\frac{m-2}{2}$ . Si può ancora arrivare

immediatamente all'equazione del grado  $m - 2$  in  $y$ , osservando che, siccome la potenza  $m$  è *pari*, si può soddisfare all'equazione  $y^m - 1 = 0$  facendo  $y = \pm 1$ , cosicchè quest'equazione è divisibile per  $(y - 1)(y + 1) = y^2 - 1$ .

Allorchè  $m$  è *impari*, l'equazione .....  
 $y^{m-1} + y^{m-2} + \text{ec.} = 0$  è *reciproca*, e di grado *pari*,  
 e se ne ricava un'equazione in  $z$  del grado  $\frac{m-1}{2}$ .

Segue da ciò che si può, nello stato attuale dell'Analisi, trovare per mezzo della risoluzione dell'equazioni tutte le radici dell'equazione  $y^m - 1 = 0$  allorchè  $m$  non sorpassa 10; poichè l'equazione  $y^{10} - 1 = 0$  può dividersi per  $y^2 - 1$ , e l'equazione d'ottavo grado, che ne risulta, si riduce al quarto; ma l'equazione  $y^{11} - 1 = 0$ , non essendo divisibile che per  $y - 1$ , conduce ad un'equazione *reciproca* di decimo grado, la quale non può ridursi che al quinto (\*).

Torna in acconcio osservare che avremo tutte le radici dell'equazione  $y^{mn} - 1 = 0$ , i numeri  $m$ , e  $n$  essendo *primi* tra loro, se si conoscano quelle dell'equazioni  $y^m - 1 = 0$ , e  $y^n - 1 = 0$ ;

(\*) La considerazione delle proprietà del Circolo somministra, per tutti i gradi, dell'espressioni delle radici dell'unità, le quali espressioni si troveranno nel mio *Trattato del Calcolo differenziale, e del Calcolo integrale*.

poichè supponendo  $y^m = x$ , l'equazion proposta si cangerà in  $x^n - 1 = 0$ ; e designando per  $a$  una qualunque delle radici di quest'ultima, avremo

$$y^m - a = 0;$$

resultato, al quale daremo la forma  $t^m - 1 = 0$ ,

facendo  $z = t \sqrt[m]{a}$ .

*M. Gauss* in un'Opera commendabilissima intitolata *Disquisitiones Arithmeticae* ha fatto vedere che ogni equazione a due termini, il cui esponente è un numero primo, può essere decomposta razionalmente in altre equazioni, i gradi delle quali son espressi dai fattori primi del numero, che precede d'un'unità questo numero primo. Siffatto Teorema riduce, per esempio, l'equazione  $x^{17} - 1 = 0$  a quella di quattro equazioni di secondo grado, e quella dell'equazione  $x^{19} - 1 = 0$  a quella di due equazioni di terzo grado, e d'una di secondo: ma, per dimostrarlo, bisogna ricorrere a delle proprietà dei numeri, ch'io non potrò far conoscere se non che alla fin di quest'Opera.

46. Le relazioni  $ab = 1$ ,  $cd = 1$ ,  $ef = 1$ , che si avevano nell'esempio del n.º 42, posson essere riguardate come una sola, ed unica equazione, comune alle tre coppie di radici  $a$  e  $b$ ,  $c$  e  $d$ ,  $e$  e  $f$ ; e se, in luogo di questa, se n'avesse un'altra qualunque tra queste radici medesime, l'abbassamento sarebbesi effettuato con un metodo analogo a quello del num.º precitato.

Sia infatti un'equazione di grado pari

$$x^{2n} + Px^{2n-1} + Qx^{2n-2} + \dots + U = 0,$$

e tale che s'abbia tra due delle sue radici  $a$ , e  $b$  un'equazione qualunque, comune alle coppie  $c$  e  $d$ ,  $e$  e  $f$  ec. Se si fa  $a + b = z'$ , e che in luogo di  $b$

si sostituisca il suo valore  $z' - a$  nell'equazione data tra  $a$ , e  $b$ , potremo eliminare  $a$  da quest'ultima per mezzo dell'equazione

$$a^{2n} + Pa^{2n-1} + Qa^{2n-2} \dots + U = 0,$$

e l'equazion risultante sarà quella, che darà  $z'$ . Facendo  $c + d = z''$ ,  $e + f = z'''$ , ec., è facil vedere che si dee trovare per  $z''$ ,  $z'''$ . ec. la medesima equazion che per  $z'$ , e che in conseguenza  $z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$ , ec. son le radici dell'equazione in  $z'$ , la quale salirà al grado  $n$ , poichè vi sono  $n$  coppie di radici, che soddisfanno alla condizione data.

Allorchè conosceremo  $z'$ , avremo il secondo termine del fattore di secondo grado, formato con le radici  $a$ , e  $b$  della proposta, e ch'è

$$x^2 - (a + b)x + ab, \text{ ovvero } x^2 - z'x + ab;$$

poi, per ottenere  $ab$ , ch'io rappresenterò per  $q$ , divideremo l'equazion proposta per  $x^2 - z'x + q$ , e quando saremo arrivati ad un resto, eguaglieremo separatamente a zero la parte di questo resto, che moltiplica  $x$ , e quella che n'è indipendente; otterremo così due equazioni, che non contenendo se non la sola incognita  $q$ , debbono necessariamente avere un divisor comune, dal quale ricaveremo il valore di quest'incognita.

Se il metodo particolare; che si fosse giudicato a proposito d'impiegare per l'eliminazione, facendo salire l'equazion finale più alto che il grado  $n$ , avesse introdotto un fattore inutile, (*Elem.* 196.), la vera equazione sarebbe allora il divisor comune dell'equazione, di cui abbiám parlato, e dell'equazione, che si otterrebbe formando *a priori* quella, da cui dipendono le somme  $a + b$ ,  $a + c$ , ec. di due qualunque delle radici della proposta, tra le quali si troveranno

necessariamente comprese le somme delle coppie  $a$  e  $b$ ,  $c$  e  $d$ , ec.

47. Estenderem facilmente ciò, che abbiám detto pel caso delle radici dell'equazione combinate per coppie, a quella ov' esse fossero combinate tre a tre in un ordine particolare. Se l'equazione proposta fosse del grado  $3n$ , e s'avesse, per esempio, una relazione qualunque tra le tre radici  $a$ ,  $b$ , e  $c$ , la qual sussistesse pure tra  $d$ ,  $e$ , e  $f$ , e così di seguito, farebbesi  $a + b + c = z$ , e ponendo per  $c$  il suo valore  $z - a - b$  nell'equazione, ch'esprime la relazione data, s'elimine-rebbero in seguito  $a$ , e  $b$  per mezzo dell'equazioni

$$\begin{aligned} a^{3n} + Pa^{3n-1} + Qa^{3n-2} \dots + U &= 0, \\ b^{3n} + Pb^{3n-1} + Qb^{3n-2} \dots + U &= 0, \end{aligned}$$

resultanti dalla sostituzione di  $a$ , e  $b$  in luogo di  $x$  nella proposta: l'equazione finale in  $z$  conterrebbe tutti i valori delle somme  $a + b + c$ ,  $d + e + f$ , ec., il cui numero è  $n$ . Considerando in seguito il fattore  $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$ , formato dalle tre radici  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e ponendo  $z$  in luogo di  $a + b + c$ ,  $q$  in luogo di  $ab + ac + bc$ , e  $r$  per  $abc$ , verrà

$$x^3 - zx^2 + qx - r;$$

questo fattore dovrebbe dividere esattamente la proposta se  $q$ , e  $r$  fossero cogniti. Eguagliando dunque a zero il resto, che lascia allorchè s'impiega nello stato attuale, e che contiene tre parti, di cui la prima è affetta da  $x^2$ , la seconda da  $x$ , la terza è senza  $x$ , si avrebbero tra le due incognite  $q$ , e  $r$  tre equazioni, e per mezzo dell'eliminazione s'arriverebbe a due equazioni finali tra la medesima incognita  $r$ : il divisor comune tra queste due equazioni darebbe  $r$ .

Vi sarebbero molte osservazioni importanti da fare sopra questa parte della Teoria dell'equazioni; ma non posso qui trattenermi. Osserverò solamente che l'abbassamento ha luogo, in generale, allorchè s'ottegono tra le incognite d'un Problema possibile più equazioni, ch'esso non contenga d'incognite; cosa, alla quale spesso si giunge, considerando il Problema proposto sotto più aspetti: si trovano allora tra una medesima incognita due equazioni finali, che dovendo accordarsi tra loro, hanno un divisore comune, da cui ricavasi la soluzione la più semplice, della quale il Problema proposto sia suscettibile.

48. Qualunque equazione, la quale può decomorsi in due fattori, s'abbassa necessariamente con questo mezzo: è dunque utile saper conoscere quando questa decomposizione possa eseguirsi. Il metodo indicato nel n.º 210. degli *Elementi*, e digià richiamato più alto, serve per ottenere l'equazione finale, da cui dee dipendere la decomposizione d'un'altra in due fattori di gradi dati. Ma io ritorno sopra queste ricerche mediante un metodo più semplice, fondato sulle considerazioni del n.º 183. degli *Elementi*.

Sieno  $\alpha, \epsilon, \gamma$  le tre radici dell'equazione

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0:$$

deffa sarà necessariamente il prodotto dei fattori  $x - \alpha, x - \epsilon, x - \gamma$ . Se la decomponghiamo in due fattori  $x^2 + Ax + B$ , e  $x + A'$ , è evidente che il primo dee comprendere due qualunque dei fattori riportati quì sopra, e che  $x + A'$  è *identico* con quello, che resta. Ma si possono combinare i fattori  $x - \alpha, x - \epsilon, x - \gamma$  due a due in tre maniere diverse: così l'equazione proposta potrà subire tre decomposizioni differenti, e siccome

niente indica quella, che si cerca in particolare, esse debbon trovarsi comprese tutte nel risultato, che s' otterrà.

Se si moltiplicano l' uno per l' altro i fattori  $x^2 + Ax + B$ , e  $x + A'$ , e si paragoni il prodotto alla proposta, troveremo, per determinare i coefficienti  $A$ ,  $B$ , e  $A'$ , l' equazioni

$$A + A' = P, \quad B + AA' = Q, \quad \text{e} \quad A'B = R.$$

Qualunque sieno tra le incognite  $A$ ,  $A'$ , e  $B$  le due, che s' eliminano, arriveremo ad un' equazione finale di terzo grado.

Quest' ultima può ancora ottenersi *a priori*; poichè, se è  $A'$ , che si cerca, il Problema riducesi a trovare una delle radici della proposta, perchè  $x + A' = 0$  dà  $x = -A'$ ; dobbiamo dunque incontrare per equazione finale quella, che s' otterrebbe cangiando  $x$  in  $A'$  nella proposta. Se  $A$  è quella, che cercasi, questo coefficiente, dipendendo dalla somma di due qualunque delle radici della proposta, ha necessariamente tre valori, i quali sono  $-(\alpha + \zeta)$ ,  $-(\alpha + \gamma)$ ,  $-(\zeta + \gamma)$ , e in conseguenza è eguale a  $-z$  nell' equazione del num.° 7. Per arrivare all' equazione in  $B$ , fa di mestieri osservare che  $B$  è il prodotto di due qualunque delle radici della proposta, e che così  $B$  ha tre valori, cioè,  $\alpha\zeta$ ,  $\alpha\gamma$ ,  $\zeta\gamma$ ; moltiplicando dunque tra loro i tre fattori  $B - \alpha\zeta$ ,  $B - \alpha\gamma$ ,  $B - \zeta\gamma$ , ed eliminando le lettere o quantità  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , avremo l' equazione dimandata. In qualunque maniera si operi, non s' ottiene in questo caso che un' equazione di terzo grado, tanto difficile a risolversi quanto è la proposta.

49. Sia adesso l' equazione del quarto grado

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

che ha per radici  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$ ; decomporla in due

fattori  $x^2 + Ax + B$ , e  $x^2 + A'x + B'$  riducesi a combinare due qualunque dei quattro fattori  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$ ,  $x - \gamma$ ,  $x - \delta$ , il che può farsi in sei differenti maniere. Così, cercando di determinare per mezzo del paragone del prodotto dei fattori  $x^2 + Ax + B$ , e  $x^2 + A'x + B'$  con la proposta i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , si trova, dopo l'eliminazione di tre qualunque di questi coefficienti, che l'equazion finale, dalla quale dipende il quarto, è del sesto grado.

Difatto, il prodotto

$$x^4 + (A + A')x^3 + (B + AA' + B')x^2 + (A'B + AB')x + BB',$$

paragonato termine a termine con

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S,$$

somministra l'equazioni

$$\begin{aligned} A + A' &= P, \\ B + AA' + B' &= Q, \\ A'B + AB' &= R, \\ BB' &= S. \end{aligned}$$

Ricavansi dalla seconda, e dalla terza

$$\begin{aligned} B &= \frac{A(Q - AA') - R}{A - A'}, \\ B' &= \frac{R - A'(Q - AA')}{A - A'}. \end{aligned}$$

Ma la prima dando  $A' = P - A$ , avremo

$$\begin{aligned} B &= \frac{A[Q - A(P - A)] - R}{2A - P}, \\ B &= \frac{R - (P - A)[Q - A(P - A)]}{2A - P}; \end{aligned}$$

e sostituendo questi valori nella quarta, si otterrà, dopo fatte le riduzioni,

$$\left. \begin{aligned} & A^6 - 3PA^5 + (3P^2 + 2Q)A^4 - P(P^2 + 4Q)A^3 \\ & + (2P^2Q + PR + Q^2 - 4S)A^2 - P(PR + Q^2 - 4S)A \\ & + PQR - P^2S - R^2 = 0. \end{aligned} \right\} (R)$$

Quest'equazione potrebbe dedursi immediatamente dalla formazione dei coefficienti  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  per mezzo delle radici della proposta.

$A$ , per esempio, essendo la somma di due qualunque delle radici  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , ha i sei valori seguenti:

$$\begin{aligned} & -(\alpha + \epsilon), \quad -(\alpha + \gamma), \quad -(\alpha + \delta), \\ & -(\epsilon + \gamma), \quad -(\epsilon + \delta), \quad -(\gamma + \delta). \end{aligned}$$

$B$  n° ha parimente sei, i quali sono

$$\begin{aligned} & \alpha\epsilon, \quad \alpha\gamma, \quad \alpha\delta, \\ & \epsilon\gamma, \quad \epsilon\delta, \quad \gamma\delta; \end{aligned}$$

e l'equazioni, le quali debbon dare  $A$ , e  $B$ , si formeranno nel modo, ch'è stato avvertito nel num.° 7. È facil vedere che l'equazioni in  $A'$ , e  $B'$  sarebbero simili all'equazioni in  $A$ , e  $B$ .

Del rimanente, quando  $A$ , e  $B$  sono cogniti, abbiamo

$$\left. \begin{aligned} A' &= P - A \\ B' &= \frac{S}{B} \end{aligned} \right\}.$$

È da osservarsi che la supposizione di  $P=0$  fa sparir tutti i termini affetti dalle potenze *impari* di  $A$  nell'equazione (R), la quale per questa ragione divien risolubile collo stesso metodo di quelle del terzo grado. I principianti vedran senza dubbio con piacere la causa di tal semplificazione.

L'equazione proposta riducendosi allora a

$$x^4 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

oppure essendo senza secondo termine, bisogna che la somma delle sue radici, tanto positive che negative, sia nulla, e vale a dire, che la somma dell'una sia eguale a quella dell'altre, fatta astrazione dal segno: avrem dunque

$$\alpha + \epsilon + \gamma + \delta = 0,$$

dalla quale si fa manifesto che

$$\alpha + \epsilon = -(\gamma + \delta),$$

$$\alpha + \gamma = -(\epsilon + \delta),$$

$$\alpha + \delta = -(\epsilon + \gamma),$$

e per conseguenza, in quest'ipotesi, tre dei valori di  $A$  son rispettivamente eguali agli altri tre presi con un segno contrario. Bisogna dunque che l'equazione in  $A$  sia della forma

$$A^6 + bA^4 + dA^2 + f = 0 \text{ (Elem. 208.)}$$

50. Senza supporre  $P=0$  nell'equazione (R), serve farne sparire il secondo termine; tutti quelli di grado *impari* spariranno nel medesimo tempo; il che la renderà sempre risolubile col metodo del terzo grado.

Infatti, il coefficiente del secondo termine di quest'equazione essendo la somma dei valori di  $A$  presi con un segno contrario, sarà, dietro a ciò che precede, eguale a

$$(3\alpha + 3\epsilon + 3\gamma + 3\delta), \text{ oppure a } -3P,$$

e per fare sparire il secondo termine, faremo

$$A = A'' + \frac{P}{2} \text{ (Elem. 209.)}$$

dalla quale ricavasi

$$A'' = A - \frac{P}{2};$$

ponendo per P il suo valore, e sostituendo successivamente ciascuno di quelli, che debb'aver A, si troveranno i risultati seguenti:

$$-(\alpha + \epsilon) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\gamma + \delta - \alpha - \epsilon}{2} \quad (1)$$

$$-(\alpha + \gamma) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\epsilon + \delta - \alpha - \gamma}{2} \quad (2)$$

$$-(\alpha + \delta) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\epsilon + \gamma - \alpha - \delta}{2} \quad (3)$$

$$-(\epsilon + \gamma) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\alpha + \delta - \epsilon - \gamma}{2} \quad (3)$$

$$-(\epsilon + \delta) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\alpha + \gamma - \epsilon - \delta}{2} \quad (2)$$

$$-(\gamma + \delta) + \frac{\alpha + \epsilon + \gamma + \delta}{2} = \frac{\alpha + \epsilon - \gamma - \delta}{2} \quad (1),$$

tra i quali quelli, che son seguiti dalle medesime cifre, non differiscono che per il segno. I sei valori di A'' saran dunque eguali due a due, e di segni contrarj; ed in conseguenza l'equazione in A'' non conterrà alcuna potenza *impairi* di quest'incognita.

L'equazion, che darebbe B, sarebbe in tutte le ipotesi, di sesto grado, e completa.

Da ciò, che precede, si fa manifesto che l'equazione di 4.<sup>o</sup> grado può sempre abbassarsi a una di secondo per mezzo della risoluzione d'una di terzo. I coefficienti dei fattori  $x^2 + Ax + B$ , e  $x^2 + A'x + B'$  essendo determinati, la risoluzione di questi fattori, considerati come equazioni di secondo grado, darà le radici della proposta: ecco dunque un metodo proprio a risolvere l'equazioni del quarto grado; e questo è quello, che

difatto *Descartes* ha dato; ma desso è particolare a questo grado. Il suo successo dipende dalle circostanze, che abbiám fatto conoscere dietro *Lagrange*, le quali non hanno luogo che nel quarto grado. Le considerazioni indicate nel n.º 184. degli *Elementi*, combinate con quelle del n.º 7., e colle precedenti, fanno vedere ch'esso non può applicarsi ai gradi più alti.

51. Ciò, che precede, conduce ancora alla possibilità di decompor qualunque equazione di quarto grado, i cui coefficienti sono *reali*, in due fattori reali di secondo, ma con un metodo, il quale presenta alcune circostanze notabili. Suppongo, per semplicizzare i calcoli, che siasi fatto sparire il secondo termine di quest'equazione: l'equazione (R) divenendo

$$A^6 + 2QA^4 + (Q^2 - 4S)A^2 - R^2 = 0 (R'),$$

il suo ultimo termine sarà essenzialmente negativo: essa avrà dunque due radici reali, una positiva, e l'altra negativa (*Elem.* n.º 214). L'espressione di B, trovata nel num.º precedente, ridotta a

$$B = \frac{A(Q + A^2) - R}{2A},$$

darà necessariamente un valor *reale* per B, e l'equazioni

$$A' = P - A, \text{ oppure } A' = -A, \text{ e } B' = \frac{S}{B}$$

ne daran pur de' *reali* per A', e B' e così i fattori supposti saranno *reali*.

Evvi nulladimeno un caso particolare dove i detti fattori non si potrebbero determinare per mezzo delle formule sopraccitate. Questo caso corrisponde a quello di  $R = 0$ ; abbiamo allora

$$A = 0, \text{ e } B = \frac{S}{2A};$$

espressione indeterminata (*Elem.* 69.). L'espressione generale di B trovasi difettosa in questo caso perchè ad un medesimo valore di A ne corrispondono due di B (*Elem.* 191.). Difatto, se si riprendono le quattro equazioni primitive tra le incognite A, A', B, e B', queste si riducono a

$$A' = 0, \quad B + B' = Q, \quad BB' = S,$$

a motivo di  $A = 0$ , di  $P = 0$ , e di  $R = 0$ : di maniera che B, e B' son le radici dell'equazione di secondo grado

$$B^2 - QB + S = 0;$$

ed i fattori sono per conseguenza

$$x^2 + B, \quad x^2 + B',$$

o sivvero

$$x^2 + \frac{1}{2}Q + \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - S}, \quad x^2 + \frac{1}{2}Q - \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 - S},$$

che si dedurrebbero parimente dalla proposta, la quale diviene

$$x^4 + Qx^2 + S = 0.$$

Questi fattori saranno *immaginarj* se, S essendo positiva, sorpassa  $\frac{1}{4}Q^2$ ; ma essi conducono ad altri fattori *reali*. Facendo per abbreviare

$$\frac{1}{2}Q = a, \quad \frac{1}{4}Q^2 - S = -b^2,$$

e risolvendo in seguito l'equazioni

$$x^2 + a + b\sqrt{-1} = 0, \quad x^2 + a - b\sqrt{-1} = 0,$$

avremo i quattro fattori di primo grado

$$\left. \begin{array}{l} x + \sqrt{-a - b\sqrt{-1}} \\ x - \sqrt{-a - b\sqrt{-1}} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x + \sqrt{-a + b\sqrt{-1}} \\ x - \sqrt{-a + b\sqrt{-1}} \end{array} \right\},$$

il cui prodotto forma l'equazione proposta. Se adesso si moltiplican tra di loro quei della prima li-

nea, indi quelli della seconda, avremo due nuovi fattori di secondo grado

$$x^2 + \left\{ \sqrt{-a-b} \sqrt{-1} + \sqrt{-a+b} \sqrt{-1} \right\} x + \sqrt{a^2+b^2} \Bigg\},$$

$$x^2 - \left\{ \sqrt{-a-b} \sqrt{-1} + \sqrt{-a+b} \sqrt{-1} \right\} x + \sqrt{a^2+b^2} \Bigg\},$$

i quali, dietro al n.º 20., riduconsi a

$$x^2 + x \sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2},$$

$$x^2 - x \sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2},$$

e sono in conseguenza *reali*.

Da ciò si fa manifesto che i fattori di secondo grado trovati in primo luogo non erano *immaginarj* che per l'effetto d'una combinazione particolare dei fattori di primo.

*Dell'eliminazione dei radicali: della maniera di formar l'equazione allorchè si ha l'espressione della sua radice.*

52. Oltre ai mezzi analoghi a quelli, di cui ci siamo serviti nel n.º 186. degli *Elem.* per fare sparire i radicali, n' esiste un altro, il quale è ben di conoscere, e che consiste in formar nello stesso tempo tutte le radici dell'equazione, da cui dee dipendere la quantità proposta.

Per prendere in primo luogo l'esempio il più semplice, sia  $x = \sqrt{A}$ : è evidente che, poichè un radicale quadrato può essere affetto indifferentemente dal segno +, o dal segno —, dobbiam riguardare  $x = -\sqrt{A}$  come la seconda radice dell'equazione, dalla quale dipende la prima.

Moltiplicando i due fattori  $x - \sqrt{A}$ ,  $x + \sqrt{A}$ , l'uno per l'altro, ed eguagliando il prodotto a zero, troveremo

$$x^2 - A = 0$$

per l'equazione razionale, alla quale appartiene  $x = \sqrt{A}$ .

Se s'avesse  $x = \sqrt[3]{A}$ , si porrebbero successivamente in quest'equazione le tre radici cubiche della quantità  $A$  (*Elem:* 159.), e facendo, per abbreviare,

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \epsilon,$$

otterrebbe

$$x = \sqrt[3]{A}, \quad x = \alpha \sqrt[3]{A}, \quad x = \epsilon \sqrt[3]{A},$$

il che darebbe i fattori

$$x - \sqrt[3]{A}, \quad x - \alpha \sqrt[3]{A}, \quad x - \epsilon \sqrt[3]{A},$$

il prodotto dei quali sarebbe

$$\left. \begin{array}{l} x^3 - \sqrt[3]{A} \\ -\alpha \sqrt[3]{A} \\ -\epsilon \sqrt[3]{A} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 + \alpha \sqrt[3]{A^2} \\ + \epsilon \sqrt[3]{A^2} \\ + \alpha \epsilon \sqrt[3]{A^2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - \alpha \epsilon A \end{array} \right\} = 0.$$

Ma, poichè  $1$ ,  $\alpha$ , e  $\epsilon$  son le tre radici dell'equazione  $y^3 - 1 = 0$ , la quale manca di secondo, e di terzo termine, ne segue che

$1 + \alpha + \epsilon = 0$ ,  $\alpha + \epsilon + \alpha\epsilon = 0$ ,  $1 \times \alpha \times \epsilon = \alpha\epsilon = 1$ ,  
ed in conseguenza il prodotto qui sopra riducesi a

$$x^3 - A = 0,$$

come doveva aspettarsi.

53. Passo adesso all'espressione

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

Per ottenere tutte le radici dell'equazione, dalla

quale dee dipendere la quantità  $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , bisogna combinare in tutte le maniere possibili le diverse espressioni, di cui son suscettibili le radici cubiche di A, e di B. Formeremo così nove valori di  $x$ , dai quali ricaveremo i seguenti fattori

$$\begin{aligned} x - \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}, x - \alpha\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}, x - \sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B}, \\ x - \alpha\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B}, x - \alpha\sqrt[3]{A} - \epsilon\sqrt[3]{B}, x - \epsilon\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B}, \\ x - \epsilon\sqrt[3]{A} - \epsilon\sqrt[3]{B}, x - \epsilon\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}, x - \sqrt[3]{A} - \epsilon\sqrt[3]{B}; \end{aligned}$$

se si moltiplicano tra di loro questi fattori, giungeremo a un prodotto, il quale non conterrà che delle *funzioni simmetriche* delle quantità  $\alpha$ , e  $\epsilon$ . Queste *funzioni* s'otterranno cercando, per mezzo delle formule del n.º 15., le somme  $1 + \alpha^2 + \epsilon^2$ ,  $1 + \alpha^3 + \epsilon^3$  delle potenze delle radici dell'equazione  $y^3 - 1 = 0$ ; ma questo calcolo può effettuarsi in una maniera più semplice, facendo a ciascuna moltiplicazione parziale le riduzioni, che si presentano in virtù dell'equazioni  $1 + \alpha + \epsilon = 0$ ,  $\alpha + \epsilon + \alpha\epsilon = 0$ ,  $\alpha\epsilon = 1$ , riportate quì sopra, e osservando che  $\alpha^2 = \epsilon$ , e  $\epsilon^2 = \alpha$ : l'operazione essendo terminata, non resterà alcun termine *irrazionale*.

54. È facil vedere che il metodo indicato quì sopra non è altra cosa che l'eliminazione effettuata con un mezzo analogo a quello del n.º 9. Infatti, ponendo l'equazioni a due termini  $t^3 - A = 0$ ,  $u^3 - B = 0$ , d'onde resulta  $x - t - u = 0$ , se si sostituiscono in quest'ultima, in luogo di  $u$ , e di  $t$ , tutti i valori, che possono aver queste in-

cognite, e si moltiplichin tra di loro i risultati, dessi saranno delle *funzioni simmetriche* delle radici dell'equazioni  $t^3 - A = 0$ ,  $u^3 - B = 0$ , e potranno esprimersi per conseguenza in una maniera *razionale*.

Principiando da eliminar  $t$ , il che si farà moltiplicando tra loro le tre quantità

$$x - u - \sqrt[3]{A}, \quad x - u - \alpha \sqrt[3]{A}, \quad x - u - \epsilon \sqrt[3]{A},$$

le quali risultano dalla sostituzione delle tre radici dell'equazione  $t^3 - A = 0$ , in  $x - t - u = 0$ , otterremo

$$\left. \begin{array}{l} (x - u)^3 - \sqrt[3]{A} \\ - \alpha \sqrt[3]{A} \\ - \epsilon \sqrt[3]{A} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (x - u)^2 + \alpha \sqrt[3]{A^2} \\ + \epsilon \sqrt[3]{A^2} \\ + \alpha \epsilon \sqrt[3]{A^2} \end{array} \right\} (x - u) - \alpha \epsilon A = 0;$$

risultato, il quale si ridurrà a

$$(x - u)^3 - A = 0,$$

Ponendo successivamente, in luogo di  $u$ , i suoi tre valori

$$\sqrt[3]{B}, \quad \alpha \sqrt[3]{B}, \quad \epsilon \sqrt[3]{B},$$

verrà

$$(x - \sqrt[3]{B})^3 - A, \quad (x - \alpha \sqrt[3]{B})^3 - A, \quad (x - \epsilon \sqrt[3]{B})^3 - A;$$

sviluppendo queste quantità, e facendo il loro prodotto, coll'avvertenza di ridur sempre le *funzioni* di  $\alpha$ , e di  $\epsilon$  secondo le relazioni stabilite nel n.º precedente, ricaderemo ancora sul medesimo risultato.

Io non riporto qui il calcolo, che sarebbe assai lungo, e non ho un poco insistito sul metodo se non perchè desso ha il vantaggio di far vedere

a priori a qual grado dee salir l'equazion *razionale*, di cui abbiain la radice.

Osserverò che l' esempio di sopra può ancora esser trattato in un modo molto più semplice, come abbiain fatto nel n.º 20; poichè, se s' alzano al cubo i due membri dell' equazione  $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , avremo

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} + B;$$

trasportando nel primo membro i termini A, e B, otterremo

$$x^3 - A - B = 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2};$$

ma

$$\sqrt[3]{A^2B} + \sqrt[3]{AB^2} = \sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = x\sqrt[3]{AB};$$

dunque

$$x^3 - A - B = 3x\sqrt[3]{AB};$$

cubando i due membri di quest' equazione, avremo

$$(x^3 - A - B)^3 = 27ABx^3;$$

resultato *razionale* facile a svilupparsi.

55. Si può, col mezzo di quel che precede, trovare il fattore, per cui una *funzione irrazionale* proposta essendo moltiplicata, ne resulti un prodotto libero dei radicali. Infatti, se si formano tutte le radici dell' equazione, dalla quale dipende l' espressione *irrazionale* proposta, il loro prodotto, facendo astrazione dal segno, essendo eguale all' ultimo termine di quest' equazione, sarà *razionale*, ed in conseguenza il prodotto di tutte quelle, che son dipendenti dalla proposta, darà il factor dimandato.

Avendo, per esempio,  $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , se si fa il prodotto degli altri otto valori di  $x$ , questo prodotto sarà tale ch' essendo moltiplicato

per  $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , ne risulterà una quantità *razionale* eguale all'ultimo termine dell'equazione finale in  $x$ , preso con un segno contrario.

56. *Euler* avendo osservato che nell'equazioni di secondo, e di terzo grado, senza secondo termine, le radici son della forma  $x = \sqrt{A}$ ,  $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ , congetturò che quelle dell'equazioni di quarto, e di quinto grado potrebbero essere rappresentate da

$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$ ,  $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ ,  
e che in generale la radice dell'equazione del grado  $n$  sarebbe della forma

$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \sqrt[n]{E} + \dots$ ,  
il numero dei radicali essendo  $n - 1$ .

Dopo aver posto così in evidenza per ciascun grado i radicali di questo grado, pensò che le quantità  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , ec. non potevano contenere che dei radicali d'un grado inferiore, e non dipenderebber perciò che da equazioni d'un grado inferiore a quello della proposta: ma un'osservazione più attenta sulla forma delle radici dell'equazioni di terzo, e di quarto grado, e la difficoltà, che provò a formar l'equazione del quinto, conforme la radice, ch'ei supponeva, lo determinarono a modificare la forma di questa radice. Esso prese la legge seguente

$$2.^{\circ} \text{ grado } x = A\sqrt{u}$$

$$3.^{\circ} \quad x = A\sqrt[3]{u} + B\sqrt[3]{u^2}$$

$$4.^{\circ} \quad x = A\sqrt[4]{u} + B\sqrt[4]{u^2} + C\sqrt[4]{u^3}$$

$$5.^{\circ} \quad x = A\sqrt[5]{u} + B\sqrt[5]{u^2} + C\sqrt[5]{u^3} + D\sqrt[5]{u^4}$$

ed in generale

$$x = A\sqrt[n]{u} + B\sqrt[n]{u^2} + C\sqrt[n]{u^3} + D\sqrt[n]{u^4} + \dots + M\sqrt[n]{u^{n-1}},$$

le quantità  $A, B, C, D, \dots, M$ , e  $u$  essendo *indeterminate*.

Le formule qui sopra contengono implicitamente tutte le radici dell'equazione, dalla quale esse dipendono. Quanto al terzo grado, per esempio, la radice cubica di  $u$  avendo tre espressioni, cioè,

$$\sqrt[3]{u}, \quad \alpha\sqrt[3]{u}, \quad \epsilon\sqrt[3]{u},$$

il suo quadrato n'avrà parimente tre, le quali saranno

$$\sqrt[3]{u^2}, \quad \alpha^2\sqrt[3]{u^2}, \quad \epsilon^2\sqrt[3]{u^2},$$

e si formeranno le tre radici combinando ciascuno di questi valori col suo corrispondente, nel modo che segue,

$$x = A\sqrt[3]{u} + B\sqrt[3]{u^2}, \quad x = A\alpha\sqrt[3]{u} + B\alpha^2\sqrt[3]{u^2}, \quad x = A\epsilon\sqrt[3]{u} + B\epsilon^2\sqrt[3]{u^2}.$$

Non v'è cosa più facile adesso (7., e 15.) che di formar l'equazione, dalla quale derivano le radici qui sopra, e troveremo

$$x^3 - 3ABu x - A^3 u - B^3 u^2 = 0.$$

Paragonando questa resultante con

$$x^3 + p x + q = 0.$$

Si ottiene

$$p = -3ABu, \quad q = -A^3 u - B^3 u^2.$$

Siccome vi sono in queste due equazioni tre indeterminate,  $A, B$ , e  $u$ , ne possiamo determinare una a piacere. *Euler* ha fatto  $A = 1$ , il che dà  $B = -\frac{p}{3u}$ . Sostituendo nell'espressione di

$q$ , s' ottiene

$$q = -u + \frac{p^3}{27u^3}$$

e per conseguenza

$$u^2 + qu = \frac{p^3}{27}$$

dalla quale

$$u = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$$

Da  $q = -A^3u - B^3u^2$  ricavasi

$$B^3u^2 = -q - A^3u = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2};$$

dunque finalmente

$$A\sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$

$$B\sqrt[3]{u^2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$$

Queste espressioni danno per  $x$  il valore notato nel n.º 16.

Invece di formar l'equazione

$$x^3 - 3ABux - A^3u - B^3u^2 = 0$$

a priori, come ho indicato di sopra, *Euler*, che conosceva bastantemente il risultato, al quale doveva arrivare, si serve d'un metodo, che può esser comodo in molte occasioni, per riconoscere se un' espressione proposta è la radice d'una data equazione. Egli sostituisce nell'equazione  $x^3 + px + q = 0$  in luogo di  $x$ , e di  $x^3$  i valori

$$A\sqrt[3]{u} + B\sqrt[3]{u^2}, \quad (A\sqrt[3]{u} - B\sqrt[3]{u^2})^3,$$

il che dà

$$\left. \begin{aligned} A^3u + 3A^2Bu\sqrt[3]{u} + 3AB^2u\sqrt[3]{u^2} + B^3u^2 \\ + pA\sqrt[3]{u} + pB\sqrt[3]{u^2} + q \end{aligned} \right\} = 0.$$

Perchè il valore di  $A\sqrt[3]{u} + B\sqrt[3]{u^2}$  convenga a tutti i casi dell'equazione  $x^3 + px + q = 0$ , è necessario che l'equazione qui sopra possa aver luogo quando ancora  $\sqrt[3]{u}$ , e  $\sqrt[3]{u^2}$  fossero quantità *irrazionali*. Segue da ciò che i termini *razionali* debbono separatamente distruggersi, nello stesso modo che gli *irrazionali*: dobbiam dunque avere separatamente

$$A^3u + B^3u^2 + q = 0, \quad 3A^2Bu + pA = 0, \quad 3AB^2u + pB = 0;$$

le due ultime equazioni altro non sono che  $3ABu + p = 0$  moltiplicata in primo luogo per  $A$ , ed in seguito per  $B$ . Questo metodo conduce, come si vede, al medesimo risultato del precedente.

57. Io non seguirò punto *Euler* nelle particolarità dell'applicazione del suo metodo al quarto grado; mi limiterò a dar l'espressione delle radici in tal caso, e, per questo, farò osservare che le radici dell'equazione  $y^4 - 1 = 0$  sono

$$y = 1, \quad y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1};$$

moltiplicando per questi valori la quantità  $\sqrt[4]{u}$ , avremo le quattro espressioni, di cui essa è suscettibile; dipoi formando il lor quadrato, ed il loro cubo, troveremo le diverse espressioni di  $\sqrt[4]{u^2}$ , e di  $\sqrt[4]{u^3}$ ; e combinando insieme i risultati somministrati da un medesimo valor di  $y$ , avremo

$$x = A\sqrt[4]{u} + B\sqrt[4]{u^2} + C\sqrt[4]{u^3}$$

$$x = -A\sqrt[4]{u} + B\sqrt[4]{u^2} - C\sqrt[4]{u^3}$$

$$x = A\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{u} - B\sqrt[4]{u^2} - C\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{u^3}$$

$$x = -A\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{u} - B\sqrt[4]{u^2} + C\sqrt{-1} \cdot \sqrt[4]{u^3}.$$

Essendo ottenuta l'equazione, di cui ho formate le radici, si paragonerà a  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ; e siccome non avremo ancora che tre equazioni, potremo prendere arbitrariamente una delle quattro indeterminate  $A, B, C, u$ . *Euler* fa qui  $B=1$ , ed arriva, per questo mezzo, a un'equazione di terzo grado in  $u$ ; ma, s'egli avesse fatto  $u=1$ , ed avesse voluto determinar  $B$ , egli sarebbe caduto sopra un'equazione di sedicesimo; e sopr'una di ventiquattresimo grado, se avesse cercato  $A$ , o  $C$ .

58. *Euler* passa in seguito alla formazione dell'equazione di quinto grado. I calcoli, ch'esso è obbligato d'effettuare in questa ricerca, son troppo proli si per trovarli qui collocati; tuttavia il suo metodo è troppo elegante per non darne un'idea.

Indicando per  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$  le quattro radici dell'equazione  $y^5 - 1 = 0$ , diverse dall'unità, le

cinque espressioni di  $\sqrt[5]{u}$  saranno

$$\sqrt[5]{u}, \quad \alpha \sqrt[5]{u}, \quad \epsilon \sqrt[5]{u}, \quad \gamma \sqrt[5]{u}, \quad \delta \sqrt[5]{u};$$

e, formando le loro potenze, troveremo che le radici dell'equazione di quinto grado sono

$$\begin{aligned} x &= A \sqrt[5]{u} + B \sqrt[5]{u^2} + C \sqrt[5]{u^3} + D \sqrt[5]{u^4} \\ x &= A \alpha \sqrt[5]{u} + B \alpha^2 \sqrt[5]{u^2} + C \alpha^3 \sqrt[5]{u^3} + D \alpha^4 \sqrt[5]{u^4} \\ x &= A \epsilon \sqrt[5]{u} + B \epsilon^2 \sqrt[5]{u^2} + C \epsilon^3 \sqrt[5]{u^3} + D \epsilon^4 \sqrt[5]{u^4} \\ x &= A \gamma \sqrt[5]{u} + B \gamma^2 \sqrt[5]{u^2} + C \gamma^3 \sqrt[5]{u^3} + D \gamma^4 \sqrt[5]{u^4} \\ x &= A \delta \sqrt[5]{u} + B \delta^2 \sqrt[5]{u^2} + C \delta^3 \sqrt[5]{u^3} + D \delta^4 \sqrt[5]{u^4}. \end{aligned}$$

Sarebbe lunghissimo il formar per mezzo

della moltiplicazione l'equazione risultante da queste cinque radici; ma avremo (8) questi valori

$$P = -S_1,$$

$$Q = -\frac{PS_1 + S_2}{2},$$

$$R = -\frac{PS_1 + QS_2 + S_3}{3},$$

ec.

Se dunque si fa successivamente la somma dei cinque valori di  $x$ , quella delle loro seconde, terze, quarte, e quinte potenze, ne dedurremo i coefficienti  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , e  $T$  dell'equazione

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0,$$

la quale contiene questi valori.

Prendendo primieramente la somma delle prime potenze, si ha

$$\begin{aligned} S_1 &= A(1 + \alpha + \epsilon + \gamma + \delta) \sqrt[5]{u}, \\ &+ B(1 + \alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2 + \delta^2) \sqrt[5]{u^2}, \\ &+ C(1 + \alpha^3 + \epsilon^3 + \gamma^3 + \delta^3) \sqrt[5]{u^3}, \\ &+ D(1 + \alpha^4 + \epsilon^4 + \gamma^4 + \delta^4) \sqrt[5]{u^4}; \end{aligned}$$

espressione, la quale riducesi a zero (15); il che fa vedere che l'equazione cercata non debb' avere secondo termine.

Troverebbesi parimente che  $S_2$ ,  $S_3$ , ec. contengono le somme delle potenze delle radici  $1$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$ , determinate nel n.° 15.

59. Per trovare, dietro al metodo accennato nel n.° 54., l'equazione, la cui radice è

$$x = A\sqrt[n]{u} + B\sqrt[n]{u^2} + C\sqrt[n]{u^3} + Q\sqrt[n]{u^4} \dots + M\sqrt[n]{u^{n-1}},$$

faremo  $\sqrt[n]{u} = y$ , ed avremo da eliminar  $y$  tra le due equazioni

$$y^n - u = 0,$$

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \dots + My^{n-1}.$$

L'equazione finale non salirà che al grado  $n$ , e non avrà secondo termine; paragonandola termine a termine colla formula generale

$$x^n + Px^{n-2} + Qx^{n-3} \dots + U = 0,$$

s'otterrà un numero  $n - 1$  d'equazioni; e siccome entreranno  $n$  indeterminate  $A, B, C$ , ec.,  $u$ , potremo prendere un valore a piacimento per una di queste indeterminate. Se si fa, per esempio  $u = 1$ , si cade sopra le due equazioni ausiliarie

$$y^n - 1 = 0,$$

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \dots + My^{n-1}$$

impiegate da *Bezout* nel metodo, ch'esso ha proposto per risolvere l'equazioni, e che riducesi com'è chiaro, a quel d'*Euler*.

60. Affin di formare, per l'uno, o per l'altro dei metodi esposti qui sopra, l'equazione, di cui si ha la radice, altra difficoltà non s'incontra che la lunghezza dei calcoli; ma, allorchè si cerca di determinare le quantità  $A, B, C \dots, u$  per mezzo del paragone del risultato coll'equazione generale del grado  $n$ , si cade in un'equazione finale, oppure in una *ridotta*, di cui il grado sorpassa molto quel della prima.

Bisognerà esaminare se quest'equazione finale contiene delle radici inutili al Problema, oppure se dessa sia suscettibile d'abbassamento. *Lagran-*

ge, e *Vandermonde*, per dei mezzi assai differenti, si son occupati di questa ricerca, ed hanno trovato che non si poteva abbassare che al sesto grado la *ridotta* del quinto.

È un Problema non ancor risoluto quel di sapere se sia possibile, o nò d'esprimere la radice d'un'equazione per mezzo d'una *funzione* composta d'un numero limitato d'espressioni radicali d'un grado inferiore a quello della proposta. Se l'affermativa fosse provata, resulterebbe dalle riflessioni, che *Condorcet* ha fatte su questa materia nel Tomo V. delle *Memorie di Torino*, che non siamo arrestati nella risoluzione generale dell'equazioni se non che dalla lunghezza dei calcoli da effettuarsi. Difatto, se la radice dell'equazione del grado  $n$  avesse la forma

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} \dots,$$

potrebbe succedere che l'equazione, la quale dee dare  $A$ , s'elevasse al di sopra del grado  $n$ , perchè il valore di questa quantità sarebbe compreso in quello d'una *funzione* suscettibile di più di  $n$  forme diverse, per le differenti combinazioni dei radicali d'un grado inferiore a  $n$ , che vi si troverebbero contenuti. Se, in questo caso,  $A$  potess'essere, per esempio, della forma

$$\sqrt[n']{A'} + \sqrt[n']{B'} \dots,$$

e che  $A'$  fosse una quantità senza radicali, oppur non ne contenesse al più che di secondo grado, l'equazione in  $A'$  sarebbe necessariamente riducibile al primo, o al secondo grado; e un tale abbassamento sarebbe facile a riconoscersi. Se  $A'$  non avesse questa forma, ma che v'entrassero ancora dei radicali d'un grado  $n''$ , ponendoli in evidenza, e ragionando della stessa maniera, si

provverebbe la possibilità di arrivare ad un'equazione di primo, o di secondo grado per rapporto a una delle quantità contenute sotto questi ultimi radicali. È facile spingere queste considerazioni tanto avanti quanto vorrassi, ed assicurarsi col loro mezzo che, se l'espressione della radice d'un'equazione qualunque è composta d'un numero limitato di radicali, tanto sommati insieme, che posti gli uni sopra gli altri, bisognerà necessariamente che facendoli sparire gli uni dopo degli altri, e con un metodo, il quale non introduca fattori inutili s'arrivi, per rapporto alla quantità *razionale*, che trovasi posta sotto l'ultimo radicale, ad un'equazione di primo grado.

Dalla fecondità stessa dell'Algebra dipende che aumentasi la difficoltà delle sue ricerche. L'equazione finale, o sìvero la *ridotta*, che ottiensì contiene tutti i valori, di cui le quantità *A, B, C*, ec. son suscettibili; l'espressione d'una qualunque delle radici dell'equazione proposta per mezzo di combinazioni convenevoli dei diversi valori delle lettere *A, B, C*, ec., divien successivamente quella di tutte l'altre radici; e finalmente si risolvono spesso ad un tempo più equazioni differenti dalla proposta, nello stesso modo che abbiám veduto per l'equazioni di terzo grado nel n.º 16.

61. È visibile che allorquando si prende un'espressione radicale, che non contenga tante indeterminate quanti sono i coefficienti dell'equazione generale del grado, al quale essa riportasi, l'eliminazione dei radicali non conduce che ad un'equazione particolare: vado a darne un esempio.

Se si suppone solamente

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B},$$

le potenze di quest' espressioni potranno esser poste sotto la forma

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$$

$$(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})^2 = \sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + 2\sqrt[n]{AB}$$

$$(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})^3 = \sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + 3\sqrt[n]{AB}(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})$$

$$(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})^4 = \sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + 4\sqrt[n]{AB}(\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2}) + 6\sqrt[n]{A^2B^2}$$

$$(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})^5 = \sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + 5\sqrt[n]{AB}(\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3}) \\ + 10\sqrt[n]{A^2B^2}(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B});$$

e se da quest' equazioni ricavansi successivamente

i valori di  $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2}$ ,  $\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3}$ , ec. per mez-

zo delle potenze di  $(\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B})$ , e di  $\sqrt[n]{AB}$ , con-

seguiremo, ponendo  $x$  in luogo di  $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ , e  $b$  in luogo di  $AB$ ,

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = x$$

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{b} + 2\sqrt[n]{b^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{b} + 5x\sqrt[n]{b^2}.$$

Un' induzione simile a quella, che abbiamo indicata nel n.° 44., farà vedere che

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} = x^m - \frac{m}{1} x^{m-2} \sqrt[n]{b} + \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} x^{m-4} \sqrt[n]{b^2},$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-6} \sqrt[n]{b^3} + \text{ec.}$$

Ponendo adesso  $m = n$ , e  $A + B = a$ , avremo a

motivo di  $\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = A + B$ , quest'equazione

$$x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} \sqrt[n]{b} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} \sqrt[n]{b^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-6} \sqrt[n]{b^3},$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-8} \sqrt[n]{b^4} + \text{ec.} = a,$$

di cui una delle radici è

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}.$$

Paragonandola coll'equazioni generali dei 3.<sup>o</sup>, 4.<sup>o</sup>, 5.<sup>o</sup>, ec. gradi, riconosceremo quali son l'equazioni di questi diversi gradi aventi una radice

della forma  $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ .

1.<sup>o</sup> Quando  $n = 3$ , si ha

$$x^3 + p x + q = 0, \quad x^3 - 3 x \sqrt[3]{b} - a = 0,$$

e s'ottiene  $p = -3 \sqrt[3]{b}$ ,  $q = -a$ ,

di dove  $b = -\frac{1}{27} p^3$ ;

e, siccome abbiain fatto

$$A + B = a, \quad AB = b,$$

A, e B saran le radici dell'equazione

$$A^2 + q A - \frac{1}{27} p^3 = 0;$$

ciò che rientra nelle soluzioni del terzo grado date nel n.° 16., e n.° 56.

2.° Quando  $n = 4$ , si ha

$$x^4 + p x^2 + q x + r = 0,$$

$$x^4 - 4 x^2 \sqrt[4]{b} + 2 \sqrt[4]{b^2} - a = 0.$$

Il paragone di queste due formole somministra

$$p = -4 \sqrt[4]{b}, \quad q = 0, \quad r = 2 \sqrt[4]{b^2} - a.$$

L'equazione  $q = 0$  è la condizione, che limita l'equazione proposta; ed allorchè dessa ha luogo, si trova

$$b = \frac{1}{256} p^4, \quad a = \frac{1}{8} p^2 - r,$$

$$A^2 - \left(\frac{1}{8} p^2 - r\right) A + \frac{1}{256} p^4 = 0;$$

l'equazione di quarto grado, che si risolve per mezzo di queste formole, è

$$x^4 + p x^2 + r = 0.$$

3.° Quando  $n = 5$ , si han l'equazioni

$$x^5 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0,$$

$$x^5 - 5 x^3 \sqrt[5]{b} + 5 x \sqrt[5]{b^2} - a = 0,$$

dalle quali se ne deduce

$$p = -5 \sqrt[5]{b}, \quad q = 0, \quad r = 5 \sqrt[5]{b^2}, \quad s = -a.$$

Trovansi in questo grado la condizione  $q = 0$ , digià esatta pel precedente; e l'equazioni

$$p = -5 \sqrt[5]{b}, \quad r = 5 \sqrt[5]{b^2}$$

danno di più, per l'eliminazione di  $b$ , la seguente relazione tra  $p$ , e  $r$ , cioè

$$p^2 = 5 r.$$

Allorchè dessa ha luogo, ne risulta

$$b = -\frac{1}{5^5} p^5, \quad a = -s,$$

$$A^2 + s A - \frac{1}{5^5} p^5 = 0,$$

e l'equazione risolta è

$$x^5 + p x^3 + \frac{1}{5} p^2 x + s = 0.$$

Non spingerò più oltre siffatto esame; ma farò riflettere 1.° che le quantità  $A$ , e  $B$  essendo date per mezzo d'un'equazione della forma

$$A^2 - aA + b = 0,$$

la radice dell'equazion proposta sarà

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}} + \sqrt[n]{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}};$$

resultato, al quale si posson applicare le riflessioni del n.° 19., e che fa vedere per conseguenza che il caso *irriducibile* ha luogo nell'equazioni dei gradi superiori al terzo.

2.° Che l'espressione  $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$  somministra nel medesimo tempo tutte le radici dell'equazione corrispondente, allorchè si combinano due a due gli  $n$  valori, dei quali è suscettibile ciascuna delle quantità  $\sqrt[n]{A}$ , e  $\sqrt[n]{B}$ , di maniera che il lor prodotto riducesi a  $\sqrt[n]{AB}$ , e vale a dire, che se si prendono  $\alpha \sqrt[n]{A}$ , e  $\epsilon \sqrt[n]{B}$ , s'abbia  $\alpha \epsilon = 1$ . Con quest'attenzione si trova (15) che gli  $n$  valori di  $x$  sono

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sqrt[n]{A} + \alpha^{n-1} \sqrt[n]{B} \\ x &= \alpha^2 \sqrt[n]{A} + \alpha^{n-2} \sqrt[n]{B} \\ x &= \alpha^3 \sqrt[n]{A} + \alpha^{n-3} \sqrt[n]{B} \\ &\dots\dots\dots \\ x &= \alpha^{n-1} \sqrt[n]{A} + \alpha \sqrt[n]{B} (*). \end{aligned}$$

---

(\*) Allorchè l'equazioni particolari, che qui considero, cadon nel caso *irriducibile*, desse hanno tutte le

62. Le riflessioni antecedenti debbono far sentire la natura delle difficoltà, che appresenta il Problema della risoluzione algebrica dell'equazioni; e riepilogandole è facil concluderne ch'è ancor dubbioso se possano esprimersi per mezzo d'un numero limitato d'operazioni algebriche, e vale a dir d'addizioni, di sottrazioni, di moltiplicazioni, di divisioni, e d'estrazioni di radici, generalmente indicate, le radici d'un'equazione qualunque per mezzo dei suoi coefficienti. Nel terzo grado altresì, pel quale abbiam trovate delle formule generali, divenendo queste formule illusorie per il caso *irriducibile*, la stessa circostanza, la quale debbe a più forte ragione aver luogo nei gradi più alti, servirebbe per rendere inutili le formule delle radici relative all'equazioni di questi gradi quand'esse fossero cognite.

» Possiamo assicurarci bastantemente, dice *La-*  
 » *grange*, che quando ancora s'arrivasse a risol-  
 » vere generalmente l'Equazioni del quinto gra-  
 » do, e seguenti, non avrebbonsi contuttociò che  
 » delle formule algebriche, preziose per loro  
 » medesime, ma pochissimo utili per la risol-  
 » zione effettiva, e numerica dell'equazioni dei  
 » detti gradi, e che in conseguenza non ci dispen-  
 » serebbero punto dal ricorrere ai metodi arit-  
 » metici » (\*).

loro radici *reali*, e si riportano alla divisione d'un arco di circolo in  $n$  parti eguali; il che fornisce un metodo semplicissimo di calcolarle col soccorso delle *Tavole trigonometriche*. (Vedete il mio *Trattato del Calcolo differenziale, e del Calcolo integrale*, Tomo I.)

(\*) *Della Risoluzione dell'Equazioni numeriche di tutti i gradi* (Avvertimento pag. VIII.)

È stato in virtù di questo motivo di sì gran peso, ch'io ho creduto di non dover dare negli *Elementi d'Algebra* se non che la risoluzione numerica dell'equazioni, la quale è « a parlar propriamente, un'operazione aritmetica, fondata in vero sui principj generali della *Teoria dell'equazioni*, ma i di cui risultati non son che dei numeri dove non si riconoscon più i primi numeri, i quali han servito d'elementi (vale a dire i coefficienti dell'equazion da risolvere), e non conservano alcuna traccia delle differenti operazioni particolari, che gli hanno prodotti. L'estrazione delle radici quadrate, e cubiche è l'operazion la più semplice di questo genere; questa è la risoluzione dell'equazioni di secondo, e terzo grado, nelle quali mancano tutti i termini intermedj.

» L'Algebra, si libra, per così dire, egualmente sull'Aritmetica, e sulla Geometria; il suo oggetto non è quello di trovare i valori stessi delle quantità cercate, ma i sistemi dell'operazioni da farsi sulle quantità, cognite per dedurne i valori delle quantità, che si cercano dietro le condizioni del Problema. L'intavolatura di queste operazioni, rappresentate per mezzo dei caratteri algebrici, è ciò, che in Algebra si dice una *formula* ».

Siam dunque ancor ricondotti dalle osservazioni d'un Geometra, il quale ha profondamente meditato sulla filosofia delle Scienze Matematiche, a dimandarsi se non sarebbe un'impossibilità assoluta quella di far dipendere da un numero limitato d'operazioni algebriche la ricerca della radice d'un'equazion qualunque, ovvero, ciò ch'è lo stesso, d'esprimere questa radice col mezzo d'una *formula* algebrica. Sarebbe forse temerario

nello stato, in cui si trova attualmente l'Algebra, il decidere affermativamente su questa impossibilità; ma quelli, che hanno percorso il vasto campo dell'Analisi, sanno ch' esistono altre quantità, le quali non si possono ottenere col mezzo d' un sistema limitato d' operazioni algebriche, e pensano senza dubbio che debban esistere tra le grandezze relazioni tali, le quali è impossibile sviluppare diversamente da una maniera approssimativa, e *individuale*, o sìvero adattata a ciascun valore particolare. È evidente che, se le radici dell' equazioni algebriche sono di questa natura, altro non resta che a perfezionare i metodi aritmetici appropriati alla loro ricerca.

*Vieta* è stato sicuramente guidato da delle considerazioni di questo genere allorchè, nel suo Trattato *De numerosa potestatum adfectarum resolutione*, ha cercato risolvere immediatamente l' equazioni numeriche mediante una serie d' operazioni puramente aritmetiche, e combinate tra loro presso a poco, come lo sono quelle, che s' impiegano per estrar le radici dei numeri. Se il suo metodo fosse uniforme per tutti i casi, che possono presentarsi, di tal maniera che, mediante una successione regolare dei medesimi metodi, esso conducesse infallibilmente alla radice cercata tutte le volte che questa radice è assegnabile esattamente in numeri, e in tutti gli altri casi a un valore di più in più approssimato, non lascerebbe il medesimo nulla da desiderare nella risoluzione numerica dell' equazioni, che si potrebbe allor risguardare come completa nello stesso modo che l' estrazione delle radici; ma ciò non è difatto così, malgrado gli sforzi, che *Harriot*, *Oughtred*, *Wallis*, *Pell*, ed altri hanno fatto affiu di perfezionare il metodo di *Vieta*; de-so è sempre restato difettosissimo; e *La-*

*grange* in ultimo luogo ha dimostrato » ch'esso » non può riuscire in una maniera certa che per » l'equazioni, di cui tutti i termini hanno lo » stesso segno, all'eccezione dell'ultimo tutto » cognito; poichè allora questo termine dovendo » essere eguagliato alla somma di tutti gli altri, » si può, per mezzo di tentativi limitati e rego- » lati, trovar successivamente tutte le cifre del » valor dell'incognita fino al grado di precisio- » ne, che ci saremmo prefissi. In tutti gli altri » casi i tentativi diverranno più o meno incerti, » a motivo dei termini sottrattivi.

*Lagrange* dimostra di più che si può sem- pre ridurre un'equazione a questa forma, » pur- » chè si abbian due limiti d'una radice, uno in » più, l'altro in meno, e che sieno tali, che » tutte l'altre radici, come pure le parti reali » delle radici immaginarie, se ve ne sono, cadano » fuori di questi limiti«. Ma questi limiti essendo almenò così difficili a trovarsi quanto le radici medesime dell'equazione, il metodo dato negli *Elementi*, n.º 221., è preferibile a questa ricerca, e combinandolo con ciò, ch'è stato detto nel n.º 33. di questo *Complemento*, avremo i mezzi di conoscere le radici immaginarie, come pure le radici reali, e vale a dir tutto ciò, che mai si possa desiderare sulla risoluzione numerica dell'equazioni.

63. Segue dal n.º 181. degli *Elementi* che, se per un'equazione algebrica qualunque esista sempre un'espressione reale, o immaginaria, la qual sottoposta alle operazioni indicate in quest'equazione dia un risultato, di cui tutti i termini si distruggano, la medesima equazione sarà necessariamente il prodotto di tanti fattori semplici, quante sono le unità nel suo più alto espo-

nente. La risoluzione dell'equazioni dei quattro primi gradi dimostra altresì la verità di questa proposizione nell'equazioni del quinto, le quali hanno necessariamente una radice reale (*Elem.* 213.).

E manifesto che in generale il Problema riducesi a provare che qualunque equazione d'un grado pari ha almeno una radice o reale o immaginaria. La proposizione del n.º 27. mostra che una simile equazione ha almeno due radici, le quali posson esser comprese in un'equazione di secondo grado, che abbia i suoi coefficienti reali; ma non si arriva a quest'ultima equazione che riguardando la proposta come il prodotto d'un numero di fattori semplici eguali all'esponente del suo grado; di maniera che la difficoltà sussiste ancora nel suo totale. Era necessario d'allontanarla dagli *Elementi*, i quali non debbono contenere che le nozioni le più evidenti; ma convenien dimostrarla per l'intero a quelli, i quali hanno digià penetrato tanto avanti nell'*Analisi* per concepirne lo spirito. Se non abbiamo ancora da offerir loro la dimostrazione completa della proposizione, di cui si tratta, si posson nulladimeno dar loro delle ragioni tanto valedoli perchè dessa non sia altrimenti dubbiosa.

» Lo spirito del calcolo algebrico (*Lagrange, della risoluzione dell'Equazioni numeriche*, pag. 116.) » il quale è indipendente dai valori particolari, che si posson dare alle quantità, fa vedere che si può riguardar qualunque polinomio ( $x^m + \text{ec.}$ ) come formato dal prodotto di tanti fattori semplici  $x - a$ ,  $x - b$ ,  $x - c$ , ec. quante sono le unità dell'esponente  $m$  del grado di questo polinomio, qualunque possan esser d'altronde le quantità  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ec. »

Sviluppriamo un poco quest'osservazioni.

La formula  $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ , la qual rappresenta le radici dell'equazione  $x^2 + px + q = 0$ , non cessa di farlo ancorchè quest'equazione divenga assurda; solamente dessa riducesi allora a un simbolo puramente algebrico, il quale non corrisponde più ad alcuna quantità esistente, ma che, essendo sottomesso alle operazioni indicate nell'equazione, rende ciò nonostante la somma di tutti i termini eguale a zero. Mediante quest'esempio dobbiam comprendere che, s'esista per un sol caso un'espressione della radice d'un'equazione di grado *pari*, quest'espressione debbe ancora sussistere per qualunqu'altro. Ora, abbiamo veduto (*Elem.* 214.) che qualunque equazione di grado *pari* ha almeno due radici *reali* allorchè il suo ultimo termine è negativo; ma il valore di queste radici dipendendo da quello dei coefficienti dell'equazion proposta, dee necessariamente esser composto in una certa maniera coi suoi coefficienti, o sivvero esserne una *funzione*. Benchè non si possa assegnar la forma di questa *funzione*, la sua esistenza non è però meno evidente; il metodo delle *serie*, e il *calcolo differenziale* somministrano i mezzi di averne degli sviluppi. Ciò posto, è manifesto che dessa debbe ancora sussistere allorchè si cangerà il segno dell'ultimo termine dell'equazion proposta, e che allora dessa diverrà la radice dell'equazione, il cui ultimo termine è positivo: essa potrà, mediante tal cangiamento, cessare d'esser reale, ma non d'esistere come espressione analitica: sarà dunque sempre permesso di rappresentarla per mezzo d'un simbolo, il quale godrà delle proprietà comuni a tutte le radici dell'equazioni.

Potrèbbersi opporre a questo ragionamento

le osservazioni fatte nei num.<sup>i</sup> 67. e 69. degli *Elementi*; ma vi si risponderebbe facendo osservare che l'eccezioni indicate in queste osservazioni non possono incontrarsi nell'equazioni algebriche a una sola incognita. Difatto queste equazioni non posson essere identiche senza che si riconoscan per tali alla semplice loro ispezione; ed è evidente (*Elem.* 212.) che nessun valore infinito non potrebbe mai sodisfarvi allorchè i loro coefficienti sono finiti.

*D'alcune trasformazioni, le quali conducono alla risoluzione dell'equazioni dei quattro primi gradi.*

64. Il numero dei mezzi, che gli Algebristi han tentati onde risolvere l'equazioni letterali, è troppo grande per intraprendere di farli tutti conoscere; ve ne sono frattanto due, ch'io vado ad esporre, perchè son notabili tanto per la sorgente, da cui essi derivano quanto per la loro semplicità. Il primo è il metodo di *Tschirnaüsh*: eccone un'idea succinta.

La sostituzione di  $x + a$  in luogo di  $y$  in un'equazione in  $y$  non è propria che a fare sparire un sol termine; poichè dessa non introduce che una sola quantità indeterminata  $a$  (\*); ma se, in

---

(\*) Quelli, che non hanno ancor l'abitudine dell'Analisi, crederan forse di guadagnar qualche cosa supponendo  $y = x + a + b$ : ma, se facciano il calcolo, si convinceranno ben presto che la quantità  $a + b$  si comporta come se fosse una quantità *monomia*, e ch'essi non possono determinar separatamente  $a$ , e  $b$ , nè per conseguenza fare svanire più d'un sol termine.

luogo dell'equazione ipotetica  $y = x + a$ , prendasi  $y^2 = x + a + by$ , si posson fare sparire due termini dall'equazione in  $x$ , determinando convenientemente le quantità  $a$ , e  $b$ , sulle quali nulla vien stabilito dall'enunciato del Problema.

In questo caso, l'equazione in  $x$  non è così facile a formarsi come quando si cangia solamente  $y$  in  $x + a$ ; ma frattanto dessa è ancora del medesimo grado della proposta, come possiamo assicurarcene per il metodo dell'eliminazione dato nel n.º 9.

Se, per esempio, s'indicano per  $\alpha$ ,  $\zeta$ , e  $\gamma$ , le tre radici dell'equazione  $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$ , dietro ciò, che precede, l'equazione finale in  $x$  risulterà dal prodotto delle tre quantità

$$\begin{aligned}\alpha^2 - b\alpha - (a + x) \\ \zeta^2 - b\zeta - (a + x) \\ \gamma^2 - b\gamma - (a + x),\end{aligned}$$

la quale perciò necessariamente non passerà il terzo grado; e dopo che avremo eliminato  $\alpha$ ,  $\zeta$ , e  $\gamma$  nel modo conveniente, otterremo un risultato, il quale può rappresentarsi da

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

in cui  $A$ ,  $B$ , e  $C$  saranno quantità composte dei coefficienti  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  dell'equazione proposta, e delle due indeterminate  $a$ , e  $b$ . Scegliendo fra queste tre quantità, per eguagliarle a zero, le due che sono affette dai termini, che si vogliono eliminare, ci procureremo dell'equazioni, le quali daranno i valori, che debbono avere  $a$ , e  $b$  in tal circostanza, e dietro a questi valori l'equazione  $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$  sarà ridotta a due termini.

La supposizione di  $y^2 = x + a + by$  è egualmente propria a fare sparir due termini in un'

equazione di quarto grado. Eliminando  $y$  tra quest'equazione ipotetica, e la proposta

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0,$$

col medesimo metodo che nel caso precedente, arriveremo a un risultato della forma

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

il quale potrem ridurre a tre termini, eguagliando a zero due qualunque delle quantità  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$ , che, come qui sopra, saranno date per  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $a$ , e  $b$ .

Se si volesse cangiare l'equazion proposta in un'altra, la qual contenesse tre termini di meno, l'analogia fa vedere che si dovrebbe prendere allora l'equazione ipotetica

$$y^3 = x + a + by + cy^2,$$

e che eliminando  $y$  tra quest'ultima, e la proposta, troverebbesi ancora, operando come di sopra, un risultato della forma

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

ma in cui potrebbersi eguagliare tre coefficienti a zero, poiche avremmo introdotte tre quantità indeterminate,  $a$ ,  $b$ , e  $c$ .

È facile di generalizzare quest'andamento, e di riconoscere che, prendendo l'equazione sussidiaria

$$y^m = x + a + by + cy^2 \dots + qy^{m-1},$$

potremo cangiare l'equazion generale

$$y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} \dots + Uy + T = 0$$

in un'altra

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \dots + L = 0,$$

nella quale potremo fare sparire un numero di termini eguale a  $m$  col mezzo delle  $m$  quantità indeterminate  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\dots$ ,  $q$ .

65. Questa teoria sembra promettere la risoluzione dell'equazioni d'un grado qualunque, ed essa offre il mezzo il più semplice, e più naturale, che si possa desiderar per risolvere l'equazioni di secondo, di terzo, e di quarto grado: ma, malgrado il suo successo in questi gradi, desso è inferiore a tutti gli altri metodi conosciuti per la lunghezza dei calcoli, che porta seco. Io non saprei entrar quì in delle diffuse particolarità sopra questo soggetto; frattanto in favore di quelli, i quali voglion conoscere tutte le ricchezze dell'*Analisi*, vado a tracciare un estratto rapido del metodo indicato da *Tschirnaüs*.

Facendo sparire, mediante la supposizione di  $y = x + a$ , il secondo termine dell'equazione  $y^2 + Py + Q = 0$ , la riduciamo alla forma  $x^2 + B = 0$ , la qual si risolve subito mediante l'estrazione della radice quadrata, e dà  $x = \pm \sqrt{-B}$ . Difatto, sostituendo  $x + a$  in luogo di  $y$ , nell'equazione proposta, dessa diviene

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 2ax + a^2 \\ + P x + aP \\ + Q \end{array} \right\} = 0,$$

e, se si eguagli a zero la quantità  $2a + P$ , coefficiente di  $x$ , ella riducesi a

$$x^2 + a^2 + aP + Q = 0,$$

il che dà

$$B = a^2 + aP + Q;$$

ma da  $2a + P = 0$  risulta

$$a = -\frac{1}{2}P, \quad B = -\frac{1}{4}P^2 + Q,$$

ed in conseguenza

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q},$$

e 
$$y = a + x = -\frac{1}{2}P \pm \sqrt{\frac{1}{4}P^2 - Q}.$$

66. Allorchè l'equazion proposta è

$$y^3 + P y^2 + Q y + R = 0,$$

prendendo  $y^2 = x + a + by$ , la cangeremo in un'altra della forma

$$x^3 + A x^2 + B x + C = 0,$$

nella quale potremo fare sparire due termini; e si vede bene che, se si eguagliano a zero i coefficienti  $A$ , e  $B$  dei termini intermedi, l'equazione, ridotta al suo primo, ed al suo ultimo termine, si risolverà mediante la sola estrazione della radice cubica. Se s'effettua il prodotto indicato per questo caso nel n.º 64., e si esprimano per mezzo dei coefficienti  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  dell'equazion proposta le *funzioni simmetriche* di  $a$ ,  $\zeta$ , e  $\gamma$ , che questo prodotto contiene, troverem senza pena la composizione dei coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dell'equazione in  $x$ ; ma questi risultati, che il lettore farà ben di cercare per esercitarsi nel calcolo, son troppo complicati per non trovarli quì esposti: n'otterrem dei più semplici supponendo che già siasi fatto sparire il secondo termine dall'equazion proposta. Non avrem'altro che da eliminar  $y$  tra le due equazioni

$$y^3 + Q y + R = 0, \quad y^2 = x + a + by;$$

il che si farà, nel modo seguente, ponendo per abbreviare  $x + a = m$  (\*).

L'equazione  $y^2 = m + by$  essendo moltiplicata per  $y$  dà

$$y^3 = my + by^2, \quad \text{ovvero} \quad y^3 = my + bm + b^2y,$$

(\*) Si lascian sempre le due quantità indeterminate  $a$ , e  $b$  malgrado l'eliminazione del secondo termine della proposta, perchè l'equazione in  $x$  ha nulladimeno un secondo termine, il quale bisogna pure fare svanire.

se si ponga per  $y^2$  il suo valore. Sostituendo in seguito nella proposta, otterremo

$$m y + b m + b^2 y + Q y + R = 0;$$

d'onde

$$y = -\frac{b m + R}{m + b^2 + Q};$$

e ponendo questo valore nell'equazione

$$y^2 = m + b y,$$

otterremo, dopo le riduzioni,

$$\left. \begin{array}{l} m^3 + 2Qm^2 + Q^2 \\ + Qb^2 \\ - 3bR \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m - R^2 \\ - bQR \\ - b^3 R \end{array} \right\} = 0;$$

Rimettendo in luogo delle diverse potenze di  $m$  quelle di  $x + a$ , ordinando il risultato per rapporto alle potenze di  $x$ , e  $a$ , paragonando con

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ conseguiremo}$$

$$A = 3a + 2Q$$

$$B = 3a^2 + 4Qa + Qb^2 - 3Rb + Q^2$$

$$C = a^3 + 2Qa^2 + Q^2a + Qb^2a - 3Rba - Rb^3 - RQb - R^2.$$

Se si fa  $A = 0$ ,  $B = 0$ , il che produce l'equazioni

$$3a + 2Q = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$3a^2 + 4Qa + b^2Q - 3Rb + Q^2 = 0 \dots \dots (2),$$

l'equazione

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0;$$

riducesi a

$$x^3 + C = 0,$$

$$x = -\sqrt[3]{C}.$$

La quantità  $C$  sarà cognita allorchè avremo de-

terminato  $a$ , e  $b$ ; il che è facile, poichè, dietro l'equazione (1), si ha

$$a = -\frac{2}{3}Q$$

valore, il quale, posto nell'equazione (2), la cangia in

$$Qb^2 - 3Rb - \frac{1}{3}Q^2 = 0;$$

equazione di secondo grado, la cui soluzione darà il valore di  $b$ . Io non mi fermerò a sviluppare l'espressione di  $C$ , nè a ricavare le numerose conseguenze, che resultano da questa Teoria, ma si supplirà facilmente ai particolari, che ometterò.

Allorchè abbiamo determinato  $a$ ,  $b$ , e  $x$ , non bisogna prendere indistintamente per  $y$  una qualunque delle radici dell'equazione  $y^2 = x + a + by$ ; ma si dee, dietro ciò ch'è stato detto nel n.º 192. degli *Elementi*, cercare il divisore comune, che esiste allora tra quest'equazione, e la proposta, o sivero, che torna lo stesso, sostituire i valori di  $a$ , di  $b$ , e di  $x$  nell'espressione

$$y = \frac{bm + R}{m + b^2 + Q} = \frac{b(x + a) + R}{x + a + b^2 + Q},$$

la quale ha servito all'eliminazione di  $y$ .

67. Passando al quarto grado, il medesimo metodo può applicarvisi in due maniere diverse; imperocchè, se si cangia l'equazione

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$

in un'altra, ove i termini affetti dalla terza, e dalla prima potenza dell'incognita sieno spariti, quest'ultima potrà risolversi a guisa di quelle del secondo grado (*Elem.* 160): si può finalmente, come per i gradi precedenti, trasformare l'equazione proposta in tal modo che la resultante possa esser ridotta al suo primo, ad ultimo termine.

Nel primo caso, non si hanno che due termini da fare sparire; serve dunque combinar l'equazione

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$

con l'equazione

$$y^2 = x + a + by.$$

Effettuando i calcoli necessarj per ottener l'equazione

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

e ponendo in seguito

$$A = 0, \quad C = 0,$$

si ha

$$x^4 + Bx^2 + D = 0,$$

equazione, che si risolve col metodo di quelle di secondo grado. L'equazione  $A = 0$  sarebbe ancora del primo grado per rapporto alle indeterminate  $a$ , e  $b$ , ma l'equazione  $C = 0$  salirebbe al terzo grado; così la risoluzione dell'equazione proposta si troverebbe ridotta a quella d'un'equazione di terzo grado. Conoscendo  $a$ ,  $b$ , e  $x$ , troverebbesi  $y$ , come nel num.<sup>o</sup> precedente.

Per cangiar l'equazione

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$

in un'altra, la quale non abbia che due soli termini, bisogna farne sparir tre, ed in conseguenza supporre

$$y^3 = x + a + by + cy^2.$$

Il risultato dell'eliminazione di  $y$  tra quest'equazione, e la proposta essendo sempre espresso da

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

faremo

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = c,$$

il che darà

$$x^4 + D = 0;$$

ma le indeterminate  $a$ ,  $b$ , e  $c$  trovandosi al primo grado in  $A$ , al secondo in  $B$ , al terzo in  $C$ , l'equazione, da cui dipende il valore d'una di esse, salirà al sesto grado, e sarà dunque in general più difficile a risolversi che la proposta medesima: frattanto *Lagrange* ha provato che dessa potrebbe ancora ridursi ad un'altra di terzo grado.

Allorchè la proposta sarà di quinto grado, bisognerà necessariamente cangiarla in un'altra, la quale non abbia che due soli termini, e per questo far disparir quattro termini dalla trasformata; ma disgraziatamente la ricerca delle indeterminate condurrà allora ad un'equazione finale d'un grado molto più elevato della proposta, cosicchè il metodo di *Tschirnaüs*, nello stesso modo che tutti gli altri metodi conosciuti, è manchevole al di là del quarto grado.

68. Il secondo mezzo, col quale terminerò ciò che ho da dire sull'equazioni, è quello, che si attribuisce a *Cardano*, o almeno che s'impiegò in bel principio per rintracciar l'espressione ch'esso avea data della prima radice dell'equazione di terzo grado senza secondo termine; mezzo, che *Lagrange* ha esteso dipoi all'equazioni del quarto grado. Esso consiste in far  $x = u + z$  nell'equazione

$$x^3 + px + q = 0,$$

affin di potere, disponendo convenevolmente d'una delle indeterminate  $u$ , e  $z$ , decomporre questa equazione in due altre più facili ad essere risolte. Il risultato della sostituzione del valore ipotetico di  $x$  è

$$\left. \begin{aligned} u^3 + 3u^2z + 3uz^2 + z^3 \\ + pu + pz \\ + q \end{aligned} \right\} = 0:$$

fra le diverse maniere, colle quali si può dividere in due altre equazioni, eguagliando una delle sue parti a zero, ci siamo ben presto accorti che la seguente

$$\begin{aligned} 3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0, \\ u^3 + z^3 + q = 0 \end{aligned}$$

era la sola, che avrebbe potuto semplicizzare il Problema.

La prima dell'equazioni di sopra è la stessa cosa che

$$(3uz + p)(u + z) = 0,$$

e si riduce per conseguenza a

$$3uz + p = 0,$$

poichè non si può fare  $u + z = 0$  senza supporre  $x = 0$ ; ipotesi, la qual non si accorda punto coll'equazione proposta. La risoluzione di quest'ultima è dunque ridotta a quella dell'equazioni

$$3uz + p = 0, \quad u^3 + z^3 + q = 0:$$

la prima di queste dando

$$uz = -\frac{p}{3}, \text{ e } u^3z^3 = -\frac{p^3}{27};$$

si ha

$$u^3 + z^3 = -q, \quad u^3z^3 = -\frac{p^3}{27},$$

e segue dalla Teoria della composizione dell'equazioni che  $u^3$ , e  $z^3$  saranno le radici d'un'equazione di secondo grado avente  $q$  per coefficiente del suo secondo termine, e  $-\frac{p^3}{27}$  per suo ultimo termine.

Se  $t^2 + qt - \frac{1}{27} p^3 = 0$  rappresenta quest'equazione, ed  $A$ , e  $B$  sieno i valori di  $t$  avremo  $u = \sqrt[3]{A}$ , e  $z = \sqrt[3]{B}$ . Le diverse espressioni di queste radici soddisfaranno in un ordin qualunque all'equazioni

$$u^3 + z^3 = -q, \text{ e } u^3 z^3 = -\frac{p^3}{27};$$

ma l'ultima di quest'equazioni è più generale che  $uz = -\frac{p}{3}$ , dalla quale essa è stata ricavata:

in quest'ultima egli è dunque che bisogna sostituire i valori di  $u$  per ottener quelli di  $z$ , oppur, ch'è lo stesso, bisogna combinare ciascuna dell'espressioni

$$\sqrt[3]{A}, \alpha \sqrt[3]{A}, \alpha^2 \sqrt[3]{A}$$

colle seguenti

$$\sqrt[3]{B}, \alpha \sqrt[3]{B}, \alpha^2 \sqrt[3]{B},$$

di maniera che il prodotto riducasi a  $\sqrt[3]{AB}$ ; il che non somministra se non che questi tre risultati:

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

$$\alpha \sqrt[3]{A} + \alpha^2 \sqrt[3]{B},$$

$$\alpha^2 \sqrt[3]{A} + \alpha \sqrt[3]{B}.$$

E facil vedere che ponendo per  $\alpha$ , e  $\alpha^2$  i valori dati nel n.º 159. degli *Elementi*, e per  $A$ , e  $B$  quei, che risultano dall'equazione  $t^2 + qt - \frac{1}{27} p^3 = 0$ , ricaderemo sull'espressioni ottenute nel n.º 16.

Farò osservare in quest'occasione che, allorchando alzasi un'equazione ad una potenza, ov-

ver si moltiplichi per un fattore dove si trova l'incognita, s'introducono delle nuove radici, straniere al Problema proposto,

69. Abbiam risolta l'equazione del terzo grado  $x^3 + px + q = 0$  supponendo  $x = u + z$ ; si risolve quella del quarto grado  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  in una maniera analoga facendo  $x = y + u + z$ ; poichè introducendo così tre indeterminate, due ve ne sono, che restano arbitrarie, e di cui si può in conseguenza disporre per dividere l'equazione proposta in altre, le quali sieno più facili a risolversi (\*).

Dalla supposizione di  $x = y + u + z$ , risulta

$$\begin{aligned} x^2 &= (y + u + z)^2 = y^2 + u^2 + z^2 + 2uy + 2yz + 2uz \\ x^4 &= (y + u + z)^4 = [(y^2 + u^2 + z^2) + 2(uy + yz + uz)]^2 \\ &= (y^2 + u^2 + z^2)^2 + 4(y^2 + u^2 + z^2)(uy + uz + zy) + 4(uy + yz + uz)^2; \end{aligned}$$

sviluppando solamente l'ultimo termine, avremo

$$\begin{aligned} 4(uy + yz + uz)^2 &= 4(u^2y^2 + y^2z^2 + u^2z^2) + 8(uy^2z + u^2yz + uyz^2) \\ &= 4(u^2y^2 + y^2z^2 + u^2z^2) + 8uyz(y + u + z); \end{aligned}$$

il che somministra

$$\begin{aligned} x^4 &= (y^2 + u^2 + z^2)^2 + 4(y^2 + u^2 + z^2)(uy + uz + zy) \\ &\quad + 4(u^2y^2 + y^2z^2 + u^2z^2) + 8uyz(y + u + z); \end{aligned}$$

sostituendo i valori di  $x$ ,  $x^2$ , e  $x^4$  nell'equazione proposta, dessa diverrà

$$\left. \begin{aligned} &(y^2 + u^2 + z^2)^2 + 4(y^2 + u^2 + z^2)(uy + uz + zy) \\ &+ 4(u^2y^2 + y^2z^2 + u^2z^2) + 8uyz(u + y + z) \\ &+ p(y^2 + u^2 + z^2) + 2p(uy + uz + zy) + q(y + u + z) \\ &\quad + r \end{aligned} \right\} = 0,$$

A causa delle tre indeterminate introdotte, si può divider quest'equazione in altre tre, e la

---

(\*) Ciò si rileva dalle Sedute delle Scuole Normali, *Lezioni*, Tom. III. pag. 306., (prima edizione).

combinazion, che riesce, consiste in eguagliare a zero i termini moltiplicati per  $u + y + z$ , e quei che lo sono per  $uy + uz + zy$ ; il che dà

$$8uyz + q = 0(1), \quad 2(y^2 + u^2 + z^2) + p = 0(2).$$

Per questo l'equazione suddivisata si trova ridotta a

$$(y^2 + u^2 + z^2)^2 + 4(u^2y^2 + y^2z^2 + u^2z^2) + p(y^2 + u^2 + z^2) + r = 0(3)$$

risultato, il quale, se si pone in luogo di  $y^2 + u^2 + z^2$  il suo valore  $-\frac{p}{2}$  ricavato dall'equazione (2), si cangia in

$$-\frac{p^2}{4} + 4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + r = 0;$$

abbiam dunque per determinare  $u$ ,  $y$ , e  $z$ , le tre equazioni

$$2(y^2 + u^2 + z^2) + p = 0$$

$$4(u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2) + r - \frac{p^2}{4} = 0$$

$$8uyz + q = 0,$$

ovvero, che si riduce allo stesso,

$$u^2 + y^2 + z^2 = -\frac{p}{2}$$

$$u^2y^2 + u^2z^2 + y^2z^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}$$

$$u^2y^2z^2 = \frac{q^2}{64},$$

di cui la prima dà la somma dei loro quadrati, la seconda quella dei prodotti di questi quadrati combinati due a due, e la terza il prodotto di tutti tre. Rammentandosi la composizione dell'equazioni (*Elem.* 183), si vede tosto che, se si riguar-

dano le quantità  $u^2$ ,  $y^2$ , e  $z^2$  come i tre valori d'una medesima incognita  $t$ , quest' incognita dipenderà dall' equazione

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Designando per  $l$ ,  $m$ , e  $n$  le tre radici di quest' equazione, avremo

$$u^2 = l, \quad y^2 = m, \quad z^2 = n,$$

di dove

$$u = \pm \sqrt{l}, \quad y = \pm \sqrt{m}, \quad z = \pm \sqrt{n},$$

ed in conseguenza

$$x = \pm \sqrt{l} \pm \sqrt{m} \pm \sqrt{n}.$$

Questa formula, nella quale si possono combinare come si vogliono i segni, equivale per questo alle seguenti:

$$\begin{array}{l|l} x = +\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n}, & x = -\sqrt{l} - \sqrt{m} - \sqrt{n} \\ x = +\sqrt{l} - \sqrt{m} - \sqrt{n}, & x = -\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ x = -\sqrt{l} + \sqrt{m} - \sqrt{n}, & x = +\sqrt{l} - \sqrt{m} + \sqrt{n} \\ x = -\sqrt{l} - \sqrt{m} + \sqrt{n}, & x = +\sqrt{l} + \sqrt{m} - \sqrt{n} \end{array}$$

e sembrerebbe dar otto valori per l' incognita  $x$ , la quale non può averne che quattro; ma rimontando più alto, vedremo che i valori di  $u$ ,  $y$ , e  $z$  debbono soddisfare all' equazione  $8uyz + q = 0$ , della quale non abbiamo impiegato che il quadrato. Ora, se  $q$  è positivo nell' equazion proposta, avremo  $8uyz = -q$ ; bisognerà dunque combinare i segni dei valori  $u = \pm \sqrt{l}$ ,  $y = \pm \sqrt{m}$ ,  $z = \pm \sqrt{n}$  di maniera che il loro prodotto sia negativo, il che non potrà farsi se non prendendo negativamente o i tre radicali, o solamente uno, e così non avremo che le combinazioni riportate nella seconda colonna qui sopra; ma, allorchè  $q$

sarà negativo nell'equazion proposta, ne seguirà

$$8u y z = +q,$$

ed in conseguenza bisognerà disporre i segni dei radicali in tal modo che il loro prodotto sia positivo, il che esige che tutti tre sien positivi, o sivvero che ve ne sien sempre due presi negativamente: da ciò risulteranno le combinazioni riportate nella prima colonna, le quali saranno le quattro radici della proposta nel caso di  $q$  negativo, laddove che quelle della seconda colonna esprimono queste radici nel caso di  $q$  positivo.

Se, nell'equazione

$$t^3 + \frac{P}{2}t^2 + \left(\frac{P^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t - \frac{q^2}{64} = 0,$$

si fa  $t = \frac{s}{4}$ , le frazioni spariranno mediante la ri-

duzione di tutti i termini al medesimo denominatore, ed otterremo

$$s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0.$$

*ridotta* simile a quella, che abbiám trovata in  $x$  nel n.º 17. Ci convinceremo altresì facilmente che i valori di  $x$  riportati di sopra s'accordan con quelli, i quali si dedurrebbero dai risultati del medesimo n.º 17.

*Dello Sviluppo delle potenze frazionarie, e negative in serie.*

70. Abbiám veduta nel n.º 235. degli *Elementi* la divisione prolungata indefinitamente dar origine ad una *serie infinita*, la quale esprimeva lo sviluppo in termini monomj d'una frazione; e nel n.º 237. ho annunziato che l'estrazione delle radici conduceva pure a delle serie. Per offrire

un esempio di quest'ultimo caso, vado ad estrarre la radice quadrata di  $a^2 + b^2$ ,

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 a^2 + b^2 \\
 -a^2 \\
 \hline
 +b^2 \\
 -b^2 - \frac{b^4}{4a^2} \\
 \hline
 +\frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6} \\
 \hline
 \text{ec.}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \text{ec.} \\
 \hline
 2a + \frac{b^2}{2a} \\
 \hline
 2a + \frac{b^2}{a} - \frac{b^4}{8a^3} \\
 \hline
 \text{ec.}
 \end{array}
 \end{array}$$

ec.:

la radice quadrata del primo termine essendo  $a$ , resta  $b^2$ , il quale bisogna dividere per  $2a$ ; scrivendo il quoziente  $\frac{b^2}{2a}$  allato di  $a$ , nella radice,

avremo  $a + \frac{b^2}{2a}$  per i due primi termini di questa radice, e  $-\frac{b^4}{4a^2}$  per il resto; raddoppiando la radice trovata, abbiamo  $2a + \frac{b^2}{a}$ ; e dividendo il

resto  $-\frac{b^4}{4a^2}$  per  $2a$ , avremo un quoziente  $-\frac{b^4}{8a^3}$ ,

il quale sarà il terzo termine della radice. Verificherei questo termine conformemente alla re-

gola ordinaria, e togliendolo da  $-\frac{b^4}{4a^2}$ , avremo un

resto sul quale opereremo come sui precedenti.

Sarebbe facile imitar quest'operazione per estrarre la radice d'un grado più elevato, ma considerando le radici come potenze frazionarie si deducono più semplicemente dalla formula del

*binomio*, tale com' essa è presentata nel n. 134. degli *Elementi*.

Difatto, se si cangi  $\sqrt{a^2 + b^2}$  in  $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ , e si faccia  $m = \frac{1}{2}$  nella formula precitata, dopo che vi si scriva  $a^2$  per  $x$ ,  $b^2$  per  $a$ , otterremo, come qui sopra,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \text{ec.}$$

Quest' esempio serve per far vedere qual partito potrebbesi ricavare dalla formula del *binomio* se fossimo assicurati ch' essa avesse luogo, qualunque fosse l' esponente  $m$ ; ciò che non potrebbe concludersi dalla maniera, colla quale vi siam pervenuti negli *E'ementi*, perchè dessa suppone che  $m$  sia necessariamente un numero intero positivo. Bisogna in conseguenza sottomettere questa formula a nuove verificazioni appropriate ai differenti casi, che vi si voglian comprendere.

71. Fra le diverse prove, ch' *Euler* ha date della generalità della formula del *binomio*, la seguente tiene il primo posto per la sua brevità, e sottigliezza.

È stato dimostrato che, quando  $m$  è un numero intero positivo, si ha

$$(1 + z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{ec.};$$

ma s' ignora a che cosa corrisponde il secondo membro di quest' equazione allorchè  $m$  cessa d' essere intero, o positivo: tuttavia è incontrastabile che in questo caso medesimo il suo valore essendo legato con quello di  $m$  può essere riguardato come lo sviluppo d' una *funzione* incognita di  $m$ . Rappresentando questa *funzione* per  $f(m)$ , avremo, in generale,

$$f(m) = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{ec.}$$

Se si scriva  $n$  in luogo di  $m$ , il che è permesso, avrem parimente

$$f(n) = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{ec.},$$

ed in conseguenza

$$\begin{aligned} f(m) \times f(n) = \\ \left[ 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{ec.} \right] \\ \times \left[ 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{ec.} \right]. \end{aligned}$$

Esaminiamo adesso qual debba esser la forma di questo prodotto, che indicherò per  $P$ . È evidente che, se si ordina per rapporto alle potenze di  $z$ , potremo rappresentarlo dalla serie

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ec.},$$

e che il coefficiente di una qualunque di queste potenze, della quinta per esempio, dipenderà dalla maniera, con cui saranno composti l'uno, e l'altro dei fattori dal primo termine fino a quello, il quale contiene questa potenza: poichè questi sono i soli, i quali concorrono alla formazione del termine, ch'io considero. Ma la composizione di questi termini non cangia, qualunque sieno i valori particolari di  $m$ , e di  $n$ ; e se dessa è cognita in un caso ove  $m$ , e  $n$  sien dei numeri indeterminati, dessa sarà la stessa in tutti gli altri: ora, si sa che quando  $m$ , e  $n$  son dei numeri interi, il prodotto  $P$  è eguale a

$$(1 + z)^m (1 + z)^n,$$

oppure a

$$(1 + z)^{m+n},$$

e che

$$(1+z)^{m+n} = 1 + \frac{m+n}{1}z + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2}z^2 + \text{ec.},$$

vale a dire, che ciascuno dei coefficienti delle potenze di  $z$  è composto colla quantità  $m+n$ , come i coefficienti corrispondenti dei fattori  $(1+z)^m$ , e  $(1+z)^n$  lo sono coi numeri  $m$ , e  $n$ : dunque il prodotto  $P$  dovendo conservare la medesima forma in tutti i casi, dee corrispondere in generale a  $f(m+n)$ ; e ne risulta da ciò che

$$f(m) \times f(n) = f(m+n).$$

Quest'equazione è quella, che contiene il carattere fondamentale della *funzion* designata dalla lettera  $f$ , e che farà conoscerne la natura.

Se si cangia  $n$  in  $n+p$ , dessa darà

$$f(m) \times f(n+p) = f(m+n+p);$$

e siccome

$$f(n) \times f(p) = f(n+p),$$

conseguiremo

$$f(m) \times f(n) \times f(p) = f(m+n+p).$$

Otterrebbesi una simile equazione qualunque fosse il numero delle *funzioni* moltiplicate tra loro.

Segue da ciò che, se prendasi un numero  $k$  di fattori eguali a  $f\left(\frac{h}{k}\right)$ , avremo

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{h}{k}\right) \times f\left(\frac{h}{k}\right) \times f\left(\frac{h}{k}\right) \dots\dots\dots \\ & = f\left(\frac{h}{k} + \frac{h}{k} + \frac{h}{k} \dots\dots\dots\right) = f(h), \end{aligned}$$

poichè  $\frac{h}{k} \times k = h$ , ed in conseguenza

$$\left( f\left(\frac{h}{k}\right) \right)^k = f(h).$$

Estraendo da ambedue i membri la radice del grado  $k$ , troveremo

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = \left( f(h) \right)^{\frac{1}{k}};$$

ma  $h$  essendo un numero intero,  $f(h) = (1+z)^h$ , e l'equazione qui sopra diviene

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = \left( 1+z \right)^{\frac{h}{k}};$$

è dunque dimostrato che  $f\left(\frac{h}{k}\right)$ , o sivero la serie

$$1 + \frac{h}{k}z + \frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)\frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)\left(\frac{h}{k}-2\right)\frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.}$$

è lo sviluppo della potenza frazionaria  $\frac{h}{k}$  della quantità  $1+z$ .

Passiamo adesso al caso ove l'esponente è un numero negativo: si ha allora

$$m+n=0,$$

ma da un altro lato

$$f(m+n) = (1+z)^0 = 1 \text{ (Elem. 37);}$$

segue da ciò che

$$f(m) \times f(n) = 1.$$

Ponendo in luogo di  $m$  il suo valore  $-n$ , s'ottiene, qualunque sia  $n$ ,

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)};$$

e poichè

$$f(n) = (1+z)^n, \quad \frac{1}{(1+z)^n} = (1+z)^{-n},$$

ne risulta che  $f(-n)$ , o sivero la serie

$$1 - \frac{n}{1}z + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}z^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \text{cc.}$$

è lo sviluppo di  $(1+z)^{-n}$ .

Si passa facilmente dallo sviluppo di  $(1+z)^m$

a quello di  $(x+a)^m$ ; imperocchè, se si fa  $z = \frac{a}{x}$ , si ha

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m = \frac{(x+a)^m}{x^m},$$

da cui ricavasi

$$(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m,$$

e siam condotti alla formula del n.º 144. degli *Elementi*.

72. La dimostrazion precedente non lascia nulla da desiderare dal lato del rigore, e dell'eleganza; ma essa riposa sopra una considerazione molto sagace, e perciò molto difficile a intendersi dai principianti. La seguente, fondata su delle semplici operazioni di calcolo, sembrerà forse più chiara alla più parte delle persone; essa è ricavata dalle *Transazioni Filosofiche* (anno 1796).

L'esame delle prime potenze di  $1+x$  conduce naturalmente a pensare che lo sviluppo d'una potenza qualunque di questa quantità debb' essere della forma

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{ec.}$$

i coefficienti  $A, B, C, D, E, \text{ec.}$  essendo dei numeri indipendenti del tutto da qualunque valore di  $x$ . È manifesto d'altronde che questo sviluppo non dee contenere alcuna potenza negativa di  $x$ ;

poichè, se s'avesse, per esempio, un termine della forma  $\frac{p}{x^p}$ , la supposizione di  $x = 0$  renderebbe questo termine infinito (*Elem.* 68), mentre che la medesima supposizione riduce all'unità tutte le potenze di  $1 + x$ .

Ciò posto, sia

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.},$$

avremo ancora

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{ec.},$$

e facendo

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = u, \quad (1+y)^{\frac{1}{n}} = v,$$

otterremo

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = u^m, \quad (1+y)^{\frac{m}{n}} = v^m,$$

e

$$u^m - v^m = A(x-y) + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + D(x^4-y^4) + \text{ec.}.$$

ma, se si fa attenzione che

$$(1+x) = u^n, \quad (1+y) = v^n,$$

ne concluderemo che

$$u^n - v^n = x - y,$$

e che

$$\frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = \frac{A(x-y)}{x-y} + \frac{B(x^2-y^2)}{x-y} + \frac{C(x^3-y^3)}{x-y} + \text{ec.}$$

Ora, in virtù del Teorema del n.º 158. degli *Elementi*, si ha, poichè  $m$ , e  $n$  son dei numeri interi,

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1}),$$

$$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}),$$

e la divisione per la quantità  $x - y$  s'effettua; verrà dunque dopo di ciò

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1}}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}} =$$

$$A + B(x+y) + C(x^2 + xy + y^2) + D(x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^3) + E(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) + \text{ec.}$$

Quest'ultima equazione dovendo aver luogo qualunque sieno  $x$ , e  $y$ , sussisterà ancora allorquando faremo  $x = y$ ; ipotesi, la qual somministra;

$$1 + x = 1 + y, \quad u = v,$$

e che riduce l'espressione qui sopra a.....(V)

$$\frac{m u^{m-1}}{n u^{n-1}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ec.},$$

o sivero a

$$\frac{m}{n} u^m = u^n (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ec.}).$$

Adesso, se si pongano per  $u^m$ , e  $u^n$  i loro valori  $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ , e  $(1+x)$ , avremo

$$\frac{m}{n} (1+x)^{\frac{m}{n}} = (1+x)(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ec.});$$

equazione, la quale contiene una condizione propria a determinare i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , ec.

dello sviluppo di  $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ . Infatti, se si sostituisca questo sviluppo nel primo membro, avremo

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n} Ax + \frac{m}{n} Bx^2 + \frac{m}{n} Cx^3 + \frac{m}{n} Dx^4 + \text{ec.}$$

$$= \begin{cases} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ec.} \\ + Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \text{ec.} \end{cases}$$

Se non si è punto perduto di vista che tutte

l'equazioni, per le quali siamo passati, debbon verificarsi senza che siavi bisogno d'assegnare alcun valore a  $x$ , ne concluderem necessariamente che il lor primo membro dee contenere precisamente i medesimi termini che il secondo, o si vvero, ch'è la stessa cosa, che desse Equazioni debbon essere *identiche*. Ora, perchè ciò succeda, bisogna che i termini affetti dalla medesima potenza di  $x$  sieno moltiplicati nell'uno, e nell'altro membro pei medesimi coefficienti: eguaglierem dunque i coefficienti del primo membro dell'equazion precedente a quei, che lor corrispondono nel secondo; conseguiremo in questa maniera l'equazioni

$$\left. \begin{array}{l}
 A = \frac{m}{n}, \\
 2B + A = \frac{m}{n}A, \\
 3C + 2B = \frac{m}{n}B, \\
 4D + 3C = \frac{m}{n}C, \\
 5E + 4D = \frac{m}{n}D, \\
 \text{ec.}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{dalle quali} \\
 \text{ricaveremo}
 \end{array} \left( \begin{array}{l}
 A = \frac{m}{n}, \\
 B = \frac{A \left( \frac{m}{n} - 1 \right)}{2}, \\
 C = \frac{B \left( \frac{m}{n} - 2 \right)}{3}, \\
 D = \frac{C \left( \frac{m}{n} - 3 \right)}{4}, \\
 E = \frac{D \left( \frac{m}{n} - 4 \right)}{5}, \\
 \text{ec.}
 \end{array} \right.$$

Si vede dall'ultime equazioni come i coefficienti  $A, B, C, D, \text{ec.}$  derivino successivamente gli uni dagli altri. Se si prendano i loro valori, il che

non affaccia alcuna difficoltà, e si sostituiscano nella serie

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ec.},$$

troveremo

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{\frac{m}{n}}{1}x + \frac{\frac{m}{n} \left( \frac{m}{n} - 1 \right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{m}{n} \left( \frac{m}{n} - 1 \right) \left( \frac{m}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \\ + \frac{\frac{m}{n} \left( \frac{m}{n} - 1 \right) \left( \frac{m}{n} - 2 \right) \left( \frac{m}{n} - 3 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \text{ec.}$$

Osserverò che non v'è alcuna induzione in ciò, che precede; poichè tutte l'equazioni, che vi conducono, sono *simmetriche*, e la legge dei loro termini è tale che si può concepirne uno tanto lontano quanto si voglia dal primo. Fa di mestieri

riflettere ancora che lo sviluppo di  $(1+x)^{\frac{m}{n}}$  dà quelle di  $(1+x)^m$ , facendo  $n=1$ , e che in questa maniera la formula del *binomio* trovasi dimostrata allorchè l'esponente è un numero intero.

Potrebbeasi eziandio richiamare in dubbio la legittimità della formula per il caso dell'esponente negativo; ma, per dimostrarla, servirà far vedere che l'equazione (V), da cui si ricava la formula, ha luogo ancora allorchè vi si cangia  $m$  in  $-m$ : ora, ciò è quello appunto, a cui si perviene osservando che

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = \frac{v^m - u^m}{u^m v^m},$$

poichè ne risulta

$$\frac{u^{-m} - v^{-m}}{u^n - v^n} = \frac{1}{v^m u^m} \left( \frac{v^m - u^m}{u^n - v^n} \right) = - \frac{1}{v^m u^m} \left( \frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} \right);$$

• siccome da ciò, che precede, la quantità  $\frac{u^m - v^n}{u^n - v^m}$

diviene  $\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}}$  tosto ch'è  $u = v$ , avremo, per il medesimo caso,

$$\frac{u^{-m} - v^{-m}}{u^n - v^n} = \frac{-1}{u^{2m}} \times \frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}} = \frac{-mu^{-m-1}}{nu^{n-1}}.$$

Il secondo membro dell'equazione (V) non cambiando d'altronde di forma, avremo

$$\frac{mu^{-m-1}}{nu^{n-1}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ec.};$$

equazione, la quale non differisce da (V) se non che per il segno di  $m$ , e che dee per conseguenza condurre ai medesimi risultati, i quali si dedurrebbero dall'equazione (V) cangiandovi  $m$  in  $-m$ .

73. Per applicare adesso la formula del *binomio* all'estrazione delle radici, vado a cercar la radice quinta di  $a + b$ , e vale a dir, sviluppare  $(a + b)^{\frac{1}{5}}$ . Facendo  $m = \frac{1}{5}$  nella formula del n.º 144. degli *Elementi*, e cangiandovi  $x$  in  $a$ , e  $a$  in  $b$ , le quantità

$$1, \frac{m a}{1 x}, \frac{m-1 a}{2 x}, \frac{m-2 a}{3 x}, \text{ ec.}$$

divengono

$$1, \frac{1 b}{5 a}, \frac{\frac{1}{5}-1 b}{2 a}, \frac{\frac{1}{5}-2 b}{3 a}, \frac{\frac{1}{5}-3 b}{4 a}, \text{ ec.};$$

e riducendo

$$1, \frac{1 b}{5 a}, -\frac{4 b}{2.5 a}, -\frac{9 b}{3.5 a}, -\frac{14 b}{4.5 a}, \text{ ec.}$$

Facendo i prodotti consecutivi dei numeri di quest' ultima linea, come l'accenna la formula precitata, e moltiplicando il risultato per  $a^{\frac{1}{5}}$ , troveremo

$$(a+b)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} \left\{ 2 + \frac{1}{5} \frac{b}{a} - \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 5^3} \frac{b^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^4} \frac{b^4}{a^4} + \text{ec.} \right\}$$

Per impiegare questa formula nell'estrazione approssimativa della radice quinta d'un numero dato, dividerem questo numero in due porzioni di maniera che la maggiore sia una quinta potenza esatta, e la rappresenteremo per  $a$ ; il resto sarà  $b$ .

Sia, per esempio, il numero 260; lo decomporremo in  $243 + 17$ , perchè 243 è la quinta potenza di 3, e faremo

$$a = 243, \quad b = 17;$$

ne risulterà

$$a^{\frac{1}{5}} = 3, \quad \frac{b}{a} = \frac{17}{243}.$$

Sostituendo questi numeri nella formula antecedente, la radice cercata sarà espressa da una serie di frazioni di più in più piccole. Per valutarle, farà di mestieri ridurre queste frazioni al denominatore medesimo; ma eviteremo quest'imbarazzo convertendole in *decimali*. In quest'esempio,  $b$  essendo minore della decima parte di  $a$ , l'approssimazione sarà rapidissima.

Ecco i differenti termini della serie, formati ciascuno mediante quello, che lo precede, a forma di ciò, che abbiain detto di sopra.

$$\begin{array}{r}
 1.^{\circ} \text{ termine} \dots\dots\dots +1,0000000 \\
 2.^{\circ}, 1 \times \frac{b}{5a} = \frac{17}{1215} = A = +0,0139918 \\
 3.^{\circ}, A \times 2 \cdot \frac{b}{5a} = \quad - \quad B = \dots\dots\dots -0,0003915 \\
 4.^{\circ}, B \times 3 \cdot \frac{b}{5a} = \quad \quad \quad C = +0,0000164 \\
 5.^{\circ}, C \times \frac{7}{2} \cdot \frac{b}{5a} = \quad - \quad D \quad \dots\dots\dots -0,0000008 \\
 \hline
 \phantom{1.^{\circ} \text{ termine}} +1,0140082 \quad -0,0003923 \\
 \phantom{1.^{\circ} \text{ termine}} -0,0003923 \\
 \hline
 \phantom{1.^{\circ} \text{ termine}} +1,0136159 \\
 \phantom{1.^{\circ} \text{ termine}} \phantom{+1,0136159} 3 \\
 \hline
 \phantom{1.^{\circ} \text{ termine}} 3,0408477 \quad .
 \end{array}$$

I termini, che seguono il quinto, son troppo piccoli per non dover tenerne conto, allorchè ci limitiamo, com' ho fatto, a *7 decimali*. Ho tolta la somma dei termini negativi da quella dei termini positivi, ed ho moltiplicato il resto per  $a^{\frac{1}{3}}$ , o sivero 3, il che ha dato 3,0408477 per la radice quinta di 260; ma, benchè il risultato abbia *7 decimali*, non si può contare che sull' esattezza della sesta cifra.

74. Di qualunque grado che sia la radice, che vuolsi estrarre, procederemo come di sopra, ed osserveremo generalmente che, ogni qual volta s'impiegherà la formula  $(x + a)^m$  per convertire un' espressione in *serie infinita*, e per approssimarsi al di lei valore, bisogna che il primo termine  $x$  sia maggior del secondo  $a$ , affinchè  $\frac{a}{x}$  sia una frazione, e che tutti i termini divenendo di più in più piccoli, la serie sia *convergente*.

75. I primi termini dello sviluppo di  $(x+a)^m$  bastano al più spesso per esprimere in una maniera approssimantissima le radici dei numeri, ed è per questa ragione che ne sono state ricavate più formole, le quali farò adesso conoscere.

Sia proposto d'estrarre la radice  $m^{\text{ma}}$  dalla quantità  $a^m + b$ , nella quale  $a$  è una quantità assai maggiore di  $b$ . In virtù di ciò paragonando allo sviluppo di  $(a+q)^m$  la quantità proposta  $a^m + b$ , e scancellando da una parte, e dall'altra il termine  $a^m$ , avremo

$$b = ma^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}q^3 + \text{cc.};$$

risultato, al quale può darsi la forma seguente

$$b = q \left( ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}q^2 + \text{e.} \right),$$

e dal quale ricaveremo

$$q = \frac{b}{ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}q^2 + \text{cc.}}$$

Potrem trascurare in confronto del termine  $ma^{m-1}$  quelli, i quali sono affetti dalla quantità  $q$ , se questa quantità debb'essere una frazion piccolissima; avremo una prima approssimazione, che

designerò per  $q'$ , e di cui l'espressione sarà  $q' = \frac{b}{ma^{m-1}}$ .

Prendendo un termine di più nel denominatore dell'espressione generale di  $q$ , e non trascurando che i termini affetti da  $q^2$ , e dalle potenze superiori, avrassi

$$q = \frac{b}{ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}q} = \frac{b}{ma^{m-2}} \times \frac{1}{a + \frac{m-1}{2}q}$$

Porremo nel denominator del secondo membro in luogo di  $q$  il suo valore  $q'$ , che risulta dalla prima approssimazione, e ne risulterà un secondo valore

$$q'' = \frac{b}{ma^{m-2}} \times \frac{1}{a + \frac{m-1}{2}q'}$$

più esatto del primo: potrebbesi proseguire in questa maniera, ma mi contenterò d'aggiungere a ciò, che precede, l'esempio dato da *Lambert* autore del metodo.

Sia  $m=3$ , e  $a^3 + b = 45873642$ ; si trova che il cubo maggiore contenuto in questo numero è  $4549929^3$ , cubo di 357; abbiám dunque  $a^3 = 4549929^3$ ,  $b = 374349$ , e  $a = 357$ . S'ottiene in seguito.

$$q' = \frac{b}{3a^2}, \quad q'' = \frac{b}{3a} \times \frac{1}{a+q'}$$

$$\frac{b}{3a} = \frac{374349}{1071} = 349,53221$$

$$q' = \frac{b}{3a} \times \frac{1}{a} = \frac{349,53221}{357} = 0,98$$

$$q'' = \frac{b}{3a} \times \frac{1}{a+q'} = \frac{349,53221}{357,98} = 0,9764,$$

ed in conseguenza

$$a + q'' = 357,9764.$$

Questo risultato è esatto fino alla quarta *decimale*, e si può assicurarsene facendo  $a = 358$ , numero approssimantissimo, e dal quale risulta

$$a^3 = 45882712, \quad b = -9070$$

$$\frac{b}{3a} = \frac{9070}{1074} = -8,445065$$

$$\frac{b}{3a} \frac{1}{a} = \frac{8,445065}{358} = -0,0236 = q'$$

$$\frac{b}{3a} \frac{1}{a+q'} = \frac{8,445065}{357,9764} = -0,023591 = q''$$

d'onde

$$a + q'' = 357,976409;$$

valore, il quale accordasi col precedente nei quattro primi *decimali*.

$$\text{Se nell'espressione } q'' = \frac{b}{ma^{m-2}} \times \frac{1}{a + \frac{m-1}{2} q'}$$

si ponga per  $q'$  il suo valore  $\frac{b}{ma^{m-1}}$ , otterremo

$$q'' = \frac{2ab}{2ma^m + (m-1)b},$$

da cui ne segue

$$\sqrt[m]{a^m \pm b} = a \pm \frac{2ab}{2ma^m \pm (m-1)b},$$

formula, alla quale *Haros*, impiegato nel *Catasto*, è pervenuto senza conoscere il calcolo di *Lambert*. Resultano, allorchè  $m = 2$ , e  $m = 3$ , l'espressioni seguenti:

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{2ab}{4a^2 \pm b}, \quad \sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{ab}{3a^3 \pm b}.$$

76. Facendo  $m = \frac{2}{3}$  nelle quantità rappresentate da A, e da B alla pagina 68, desse daranno, se  $a$  sorpassa  $b$ , delle *serie convergenti*,

per mezzo delle quali otterremo i valori prossimi dell' espressioni

$$(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}, \quad (a - b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Otterremo

$$A = a^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot 2 b^2}{3 \cdot 6 a^2} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 b^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 a^4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 b^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 a^6} - \text{ec.} \right\},$$

$$B = a^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{1 b}{3 a} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 b^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 a^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 b^5}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 a^5} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 b^7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 a^7} + \text{ec.} \right\},$$

• sostituendo questi valori nelle formule del n.° 21, avremo dei valori approssimativi, e reali delle radici dell' equazione di terzo grado nel caso *irriducibile*.

Queste *serie* non essendo *convergenti* se non nel caso ove si ha  $b < a$ , bisognerà trovarne di quelle, che procedano secondo le potenze di  $\frac{a}{b}$  per il caso di  $b > a$ ; il che si farà scrivendo i *binomj* proposti nel modo, che segue

$$(b\sqrt{-1} + a)^m, \quad (-b\sqrt{-1} + a)^m.$$

Ora

$$b\sqrt{-1} + a = \left(1 + \frac{a}{b\sqrt{-1}}\right) b\sqrt{-1} = \left(1 - \frac{a}{b}\sqrt{-1}\right) b\sqrt{-1}.$$

poichè  $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$ ; parimente

$$-b\sqrt{-1} + a = \left(1 - \frac{a}{b\sqrt{-1}}\right) \times -b\sqrt{-1}$$

$$= \left(1 + \frac{a}{b} \sqrt{-1}\right) \times -b \sqrt{-1},$$

dunque

$$(a + b \sqrt{-1})^m = (b \sqrt{-1})^m \left(1 + \frac{a}{b} \sqrt{-1}\right)^m,$$

$$(a - b \sqrt{-1})^m = (-b \sqrt{-1})^m \left(1 + \frac{a}{b} \sqrt{-1}\right)^m.$$

Gli sviluppi dei fattori

$$\left(1 - \frac{a}{b} \sqrt{-1}\right)^m, \text{ e } \left(1 + \frac{a}{b} \sqrt{-1}\right)^m$$

si dedurranno da quelli di

$$\left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m, \text{ e } \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m$$

cangiando  $\frac{b}{a}$  in  $\frac{a}{b}$ ; altro non resterà che multi-

plicare le *serie* risultanti pei fattori

$$(b \sqrt{-1})^m = b^m (\sqrt{-1})^m, \text{ e } (-b \sqrt{-1})^m = (-b)^m (\sqrt{-1})^m.$$

Per ottenere  $(\sqrt{-1})^m$  allorchè  $m = \frac{p}{q}$ , fa di me-

stieri cercare il valore di  $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$ , ed inalzarlo

in seguito alla potenza  $p$ . Sia  $y = (\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$ , op-

pure, che torna lo stesso,  $y = (-1)^{\frac{1}{2q}}$ ; inalzando i due membri alla potenza  $2q$ , si avrà

$$y^{2q} = -1, \text{ oppure } y^{2q} + 1 = 0.$$

Tal'è l'equazione, dalla quale dipende in ge-

nerale  $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$ ; ma allorchè  $q$  è *impari*, uno dei valori di quest'espressione è eguale a  $\pm \sqrt{-1}$ ,

oppure  $a - \sqrt{-1}$ , secondo che  $q$  è della forma  $4i + 1$ , o sivero  $4i + 3$  (28), perchè facendo nel primo caso  $y = -\sqrt{-1}$ , e nell'altro  $y = +\sqrt{-1}$ , si trova  $y^q = \sqrt{-1}$ . Segue da ciò che  $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{-1}$ . Effettuando i calcoli per il caso di  $m = \frac{1}{3}$ , troveremo

$$A = -b^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{1a}{3b} - \frac{1.2.5a^3}{3.6.9b^3} + \frac{1.2.5.8.11a^5}{3.6.9.12.15b^5} - \text{ec.} \right\},$$

$$B = -b^{\frac{1}{3}} \left\{ 1 + \frac{1.2a^2}{3.6b^2} - \frac{1.2.5.8a^4}{3.6.9.12b^4} + \text{ec.} \right\};$$

e formeremo con questi valori un secondo sistema di formule, il quale darà le radici dell'equazione del terzo grado allorchè  $b > a$ .

77. Abbiamo in generale

$$(a + b\sqrt{-1})^m + (a - b\sqrt{-1})^m = 2a^m \left\{ 1 - \frac{m(m-1)b^2}{1.2a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1.2.3.4a^4} - \text{ec.} \right\}.$$

Si posson ottenere per la medesima espressione altri sviluppi in serie, il cui andamento sia più rapido di quello del precedente, e ciò con un semplicissimo mezzo. Aggiungendo l'equazione

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = 1 + \frac{mb}{1a} + \frac{m(m-1)b^2}{1.2a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1.2.3a^3} + \text{ec.}$$

all'equazione

$$\left(1 - \frac{b}{a}\right)^m = 1 - \frac{mb}{1a} + \frac{m(m-1)b^2}{1.2a^2} - \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1.2.3a^3} + \text{ec.}$$

otterremo

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m =$$

$$2 \left(1 + \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \text{ec.}\right);$$

e se si fosse tolta la seconda dalla prima, sarebbesi avuto

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m =$$

$$2 \left(\frac{m b}{1 a} + \frac{m(m-1)(m-2) b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} + \text{ec.}\right);$$

uno di questi risultati non contiene che i termini, i quali son situati in posto *impari* nello sviluppo del *binomio*, e l'altro quelli, i quali son situati in posto *pari*. Se adesso si aggiunga l'espressione di

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m$$

trovata qui sopra con quella di

$$\left(1 + \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^m,$$

dedotta dalle serie del n.º 28, e che sarebbe

$$2 \left(1 - \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} - \text{ec.}\right).$$

ne risulterà

$$\left(1 + \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m$$

$$= 4 \left(1 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \text{ec.}\right);$$

la serie del secondo membro altro non conterrà che i termini dello sviluppo del *binomio* presi di quattro in quattro, a partire dal primo

Togliendo in seguito l'espressione di

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m$$

da quella di

$$\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m,$$

troveremo

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m - \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m = \\ &-4 \left( \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)b^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 a^6} + \text{ec.} \right), \end{aligned}$$

il secondo membro non contiene parimente che i termini dello sviluppo del binomio di quattro in quattro, ma a partire dal terzo.

Ricavasi dalla prima di quest'equazioni

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m = -\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m \\ &+ 4 \left( 1 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \text{ec.} \right), \end{aligned}$$

e dalla seconda,

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^m = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m \\ &- 4 \left( \frac{m(m-1)b^2}{1 \cdot 2 a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)b^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 a^6} + \text{ec.} \right) \end{aligned}$$

Allorchè l'esponente  $m$  sarà frazionario le serie di sopra non avran termine; ma, se la frazione  $\frac{b}{a}$  è piccolissima, servirà unire alla quantità ...

$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m$  uno o due termini dalla serie, che ne vien dopo; potrem contentarci sovente dell'uno o dell'altro di questi valori:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m = \\ & \quad - \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m + 4; \\ & \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m = \\ & \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m - \frac{4 m(m-1) b^2}{1 \cdot 2 a^2}. \end{aligned}$$

Si vede dal segno dei termini, che si trascurano, che il primo debb'esser più piccolo del vero valore, e che il secondo debb'esser più grande. Conoscerem dunque dalla differenza dei risultati ottenuti il grado d'approssimazione, a cui saremo arrivati. Tutte le formule precedenti s'applicheranno all'espressione

$$(a + b \sqrt{-1})^m + (a - b \sqrt{-1})^m,$$

moltiplicandole per  $a^m$ .

78. Se si prenda la differenza dell'espressioni di

$$\left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m, \text{ e } \left(1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1}\right)^m,$$

che si divida per  $\sqrt{-1}$ , e se n'aggiunga o se ne tolga lo sviluppo di

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m - \left(1 - \frac{b}{a}\right)^m,$$

avremo le due equazioni qui appresso, i cui secondi membri contengono i termini dello sviluppo

del *binomio* presi di quattro in quattro, a partirsi dal secondo, e dal quarto.

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \left( 1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1} \right)^m - \left( 1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1} \right)^m \right\} + \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^m - \left( 1 - \frac{b}{a} \right)^m$$

$$4 \left( \frac{mb}{1a} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^5} + \text{ec.} \right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \left\{ \left( 1 + \frac{b}{a} \sqrt{-1} \right)^m - \left( 1 - \frac{b}{a} \sqrt{-1} \right)^m \right\} - \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^m + \left( 1 - \frac{b}{a} \right)^m$$

$$-4 \left( \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 a^3} + \frac{m(m-1) \dots (m-6)b^7}{1 \cdot 2 \dots 7 a^7} + \text{ec.} \right)$$

79. È facil dedurre dallo sviluppo della potenza  $n$  del *binomio* quello della medesima potenza di un polinomio qualunque  $(a + b + c + d + e + \text{ec.})$ . Per giungervi in una maniera comoda, rappresenterò, affin d'abbreviare, lo sviluppo di  $(a + b)^n$  per

$$a^n + Aa^{n-1}b + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-3}b^3 + \text{ec.}$$

Se adesso suppongasi che  $b$  si cangi in  $b + c$ , il *binomio*  $(a + b)$  diverrà il *trinomio*  $(a + b + c)$ ; e bisognerà scrivere nello sviluppo precedente

$$(b + c), (b + c)^2, (b + c)^3, \text{ec.}$$

in luogo di  $b, b^2, b^3, \text{ec.}$  Troveremo, mediante queste sostituzioni,

$$a^n + Aa^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} b \\ +c \end{array} \right\} + Ba^{n-2} \left\{ \begin{array}{c} b^2 \\ +2bc \\ +c^2 \end{array} \right\} + Ca^{n-3} \left\{ \begin{array}{c} b^3 \\ +3b^2c \\ +3bc^2 \\ +c^3 \end{array} \right\} + \text{ec.}$$

resultato, il qual'è facile di continuare tanto lontano quauto vorrassi. Sia dunque  $Na^{n-n'}b^{n'}$  il termine generale di  $(a+b)^n$ ; esso si cangerà in  $Na^{n-n'}(b+c)^{n'}$ , e facendo

$$(b+c)^{n'} = b^{n'} + A'b^{n'-1}c + B'b^{n'-2}c^2 + C'b^{n'-3}c^3 \dots + N'b^{n'-n''}c^{n''} + ec.,$$

esso diverrà  $Na^{n-n'} \left( \begin{array}{l} b^{n'} \\ + A'b^{n'-1}c \\ + B'b^{n'-2}c^2 \\ + C'b^{n'-3}c^3 \\ \dots \\ + N'b^{n'-n''}c^{n''} \\ + ec. \end{array} \right)$ .

Considerando con attenzione questo sviluppo, si scorge ben presto che in ciascuno dei termini, che lo compongono, la somma degli esponenti delle lettere  $a, b, c$  è costantemente eguale a  $n$ , ma ch'essi hanno d'altronde, ciascuno in particolare, tutti i valori, i quali possono soddisfare a questa tal condizione: di più è manifesto che il termine generale, e vale a dir quello, il qual non contiene che degli esponenti indeterminati, ha per espressione

$$NN'a^{n-n'}b^{n'-n''}c^{n''}.$$

Suppongo ancora che  $c$  si cangi in  $(c+d)$ , e che s'abbia

$$(c+d)^{n''} = c^{n''} + A''c^{n''-1}d + B''c^{n''-2}d^2 + C''c^{n''-3}d^3 \dots + N''c^{n''-n'''}d^{n'''} + ec.;$$

sostituendo questo sviluppo in luogo di  $c^{n''}$  nel risultato precedente, troveremo che il termine generale di  $(a+b+c+d)^n$  sarà

$$NN'N''a^{n-n'}b^{n'-n''}c^{n''-n'''}d^{n'''}$$

È agevol cosa continuar ciò che precede, e si vede di già che  $N''' d^{n''''-n''''} e^{n''''}$  essendo il termine generale del binomio  $(d+e)^{n''''}$ , quello di  $(a+b+c+d+e)^n$  sarà

$$N N' N'' N''' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''-n'''} d^{n''''-n''''} e^{n''''}.$$

Altro non resta, per aver ciascuno di questi termini generali, se non che sostituire in luogo dei coefficienti  $N, N', N'', N'''$ , ec. i loro valori.

Poichè  $N$  è il coefficiente del termine  $a^{n-n'} b^{n'}$  nello sviluppo di  $(a+b)^n$ , si ha

$$N = \frac{n(n-1) \dots (n-n'+1)}{1 \cdot 2 \dots n'} \quad (\text{Elem. 141}).$$

Se si scrivono nel numeratore, e nel denominatore tutti i fattori compresi tra 1, e  $n-n'$  inclusivamente, il valore di quest'espressione non cangerà, ed avremo allora

$$N = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 2 \dots n' \times 1 \cdot 2 \dots n-n'}.$$

Dedurremo  $N'$  da  $N$  cangiando  $n$  in  $n'$ , e  $n'$  in  $n''$ ; otterrem dunque

$$N' = \frac{1 \cdot 2 \dots n'}{1 \cdot 2 \dots n'' \times 1 \cdot 2 \dots n'-n''}.$$

avrem parimente

$$N'' = \frac{1 \cdot 2 \dots n''}{1 \cdot 2 \dots n'''' \times 1 \cdot 2 \dots n''-n''''}.$$

$$N''' = \frac{1 \cdot 2 \dots n''''}{1 \cdot 2 \dots n'''''' \times 1 \cdot 2 \dots n''''-n''''''}.$$

Facendo il prodotto  $N N' N'' N'''$ , coll'avvertenza di scancellare tutti i fattori comuni ad un tempo

al numeratore, e al denominatore, troveremo

$$NN'N''N''' =$$

$$\frac{1.2.3 \dots n}{1.2 \dots (n-n') \times 1.2 \dots (n'-n'') \times 1.2 \dots (n''-n''') \times 1.2 \dots (n'''-n'''' ) 1.2 \dots n''''}$$

Facciasi, per abbreviare,  $\begin{cases} n - n' = p \\ n' - n'' = q \\ n'' - n''' = r \\ n''' - n'''' = s \\ n'''' = t, \end{cases}$

e sommando quest'equazioni, otterremo

$$p + q + r + s + t = n,$$

ed avremo

$$\frac{1.2 \dots n}{1.2 \dots p \times 1.2 \dots q \times 1.2 \dots r \times 1.2 \dots s \times 1.2 \dots t} a^p b^q c^r d^s e^t$$

pel termine generale di  $(a + b + c + d + e)^n$ : è facile da ciò dedurre quello della potenza  $n$  d'un polinomio qualunque.

Mediante il termine generale formerem lo sviluppo cercato, osservando che desso dee contenere tutte le potenze, da 0 sino a  $n$  inclusivamente, di ciascuna delle lettere  $a, b, c, d, e$ , ec., e che la somma degli esponenti in qualunque termine siasi dee sempre esser eguale a  $n$ . Quanto poi al coefficiente numerico, la formula precedente fa ben vedere come questo produca dagli esponenti del termine, al quale è affetto.

Per darne un esempio, prenderò

$$(a + b + c + d)^5.$$

Ordinando lo sviluppo di questa potenza per rapporto a una medesima lettera, e supponendo che questa sia  $a$ , non dovremo far altro che cercar tutti i termini, i quali debbono contenere ciascu-

na potenza di  $a$ ; la maniera, con cui io formerò quelli, che sono affetti da  $a^2$ , farà conoscere come bisognerebbe contenersi per qualunque altra potenza.

Scriverò

$$\begin{array}{lll} a^2 b^3 & a^2 c^3 & a^2 d^3 \\ a^2 b^2 c & a^2 c^2 d & \\ a^2 b^2 d & a^2 c d^2 & \\ a^2 b c^2 & & \\ a^2 b c d & & \\ a^2 b d^2 & & \end{array}$$

Non mi tratterrò a formare i coefficienti, perchè non v'è alcuna difficoltà a questo riguardo, rammentandosi che qualunque lettera, la quale non ha esponente, si considera averne uno eguale all'unità.

Se  $n$  non è un numero intero positivo, la condizione espressa dall'equazione  $p+q+r+s+t+\dots=n$ , potrebbe sembrar difficile a sodisfarsi; ma eviterem quest'inconveniente dando al polinomio  $a+b+c+d+e$  ec. la forma d'un binomio  $(a+x)^n$ , nello sviluppo del quale sostituiremo, in luogo delle potenze di  $x$ , le quali saranno necessariamente positive, ed intere, quelle del polinomio  $b+c+d+e$  ec.

80. Potrebbe si far uso delle formole precedenti per isviluppar l'espressione

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n$$

secondo le potenze di  $x$ ; ma v'arriveremo in una maniera più semplice supponendo

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\dots)^n = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.};$$

$A, B, C, D$ , ec. essendo dei coefficienti indeterminati; il che somministra pure

$$(a+by+cy^2+dy^3+\dots)^n = A+By+Cy^2+Dy^3+\text{ec.};$$

è facendo, per abbreviare,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots = u,$$

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \dots = v,$$

troveremo

$$\frac{u^n - v^n}{u - v} = \frac{B(x-y) + C(x^2 - y^2) + D(x^3 - y^3) + \text{ec.}}{b(x-y) + c(x^2 - y^2) + d(x^3 - y^3) + \text{ec.}}$$

I due termini della frazione del secondo membro di quest' equazione son divisibili per  $x - y$ ; effettuando la divisione, troveremo

$$\frac{B + C(x+y) + D(x^2 + xy + y^2) + \text{ec.}}{b + c(x+y) + d(x^2 + xy + y^2) + \text{ec.}}$$

Se si fa  $x = y$ , avremo nel medesimo tempo  $u = v$ ,

e lo sviluppo  $\frac{u^n - v^n}{u - v}$  si ridurrà, in quest' ipotesi, a

$nu^{n-1}$ , qualunque sia  $n$ , nella stessa maniera che concluderebbsi facilmente dal n.º 72, e l'equazione precedente diverrà

$$n(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.})^{n-1} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{ec.}}{b + 2cx + 3dx^2 + \text{ec.}}$$

ma

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^{n-1} = \frac{(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^n}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots}$$

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}}$$

stante l'ipotesi: avrem dunque

$$\frac{n(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.})}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ec.}} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{ec.}}{b + 2cx + 3dx^2 + \dots}$$

e mandando via i denominatori

$$n(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.})(b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \text{ec.}) \\ = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ec.})(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ec.})$$

facendo le moltiplicazioni indicate, otterremo

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 nbA + nbB \left| x + nbC \left| x^2 + nbD \left| x^3 + nbE \left| x^4 + ec. \right. \right. \right. \\
 + 2ncA \quad \left| + 2ncB \quad \left| + 2ncC \quad \left| + 2ncD \\
 \quad \quad \quad \left| + 3ndA \quad \left| + 3ndB \quad \left| + 3ndC \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \left| + 4neA \quad \left| + 4neB \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| + 5nfA
 \end{array} \right. \right. \right. \right. \\
 \\
 = \left( \begin{array}{l}
 aB + 2aC \left| x + 3aD \left| x^2 + 4aE \left| x^3 + 5aF \left| x^4 + ec. \right. \right. \right. \\
 + bB \quad \left| + 2bC \quad \left| + 3bD \quad \left| + 4bE \\
 \quad \quad \quad \left| + cB \quad \left| + 2cC \quad \left| + 3cD \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \left| + dB \quad \left| + 2dC \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left| + eB
 \end{array} \right. \right. \right. \right)
 \end{array}$$

Paragonando i coefficienti delle potenze *omologhe* di  $x$ , troveremo

$$aB = nbA$$

$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$

$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$

$$4aE = (n-3)bD + (2n-2)cC + (3n-1)dB + 4neA$$

$$5aF = (n-4)bE + (2n-3)cD + (3n-2)dC + (4n-1)eB + 5nf$$

ec.

La legge di questi valori è facile a conoscersi: tutti i coefficienti  $B, C, D, ec.$  saranno determinati allorchè  $A$  sarà cognito; ma si vede ch'esso esprime il valore dello *sviluppo* allorchè  $x = 0$ , ed in questo caso la *funzione* proposta  $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots)^n$  riducesi ad  $a^n$ ; abbiam dunque  $A = a^n$ .

Calcolando dietro di questo valore quello delle lettere  $B, C, D, ec.$ , troverem facilmente che la

potenza  $n$  del polinomio  $a + b + cx^2 + dx^3 + ec$ . ha per espressione

$$\begin{aligned}
 & a^n + na^{n-1}bx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \left. \begin{array}{l} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 \\ + na^{n-1}c \\ + na^{n-1}d \end{array} \right\} x^3 \\
 & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 \left. \begin{array}{l} x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5}b^5 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{n-4}b^3c \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3}b^2d \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2}bc^2 \\ + na^{n-1}e \end{array} \right\} x^5 \\
 & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5}b^5 \left. \begin{array}{l} x^5 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{n-4}b^3c \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3}b^2d \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{n-3}bc^2 \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2}be \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2}cd \\ + na^{n-1}f \end{array} \right\} x^6
 \end{aligned}$$

*Moirre*, che ha dato il primo la formula precedente, fece pure osservare la legge, secondo la quale si può formare ciascun dei termini, che dessa contiene; ma siccome non avrò occasione d'impiegarla frequentemente, non mi tratterò d'avvantaggio sopra questo soggetto. Osserverò solamente che non esistono *funzioni* algebriche, le quali non si possano sviluppare mediante ciò, che precede; poichè le più generali non potrebbero essere che combinazioni di *monomi*, o di

polinomj alzati a delle potenze positive o negative, intere o frazionarie.

*Della somma delle serie, il cui termine generale è una funzione razionale, ed intera del numero dei loro termini.*

81. Ho data nel n.° 229. degli *Elementi* la somma dei termini d'una progressione per differenze

$$a, b, c, \dots, k, l,$$

la cui differenza era  $\delta$ , ed il numero dei termini  $n$ ; suppongo adesso che si alzi ciascun termine di questa serie ad una potenza medesima, e vado a considerare la serie.

$$a^m, b^m, c^m, \dots, k^m, l^m.$$

Si forma immediatamente lo sviluppo di queste quantità alzando alla potenza  $m$  ciascun membro dell'equazioni

$$b = a + \delta, c = b + \delta \dots, l = k + \delta,$$

e si ha

$$b^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} \delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} \delta^2 + \text{ec.},$$

$$c^m = b^m + \frac{m}{1} b^{m-1} \delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{m-2} \delta^2 + \text{ec.},$$

$$d^m = c^m + \frac{m}{1} c^{m-1} \delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c^{m-2} \delta^2 + \text{ec.},$$

.....,

$$l^m = k^m + \frac{m}{1} k^{m-1} \delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} k^{m-2} \delta^2 + \text{ec.}$$

Sommando rispettivamente tra loro i primi, e i secondi membri di quest'equazioni, scancellando

i termini comuni alle due somme, e trasportando  $a^m$  nel primo membro, otterremo

$$\begin{aligned}
 l^m - a^m = & \left. \begin{aligned} & \frac{m}{1} \delta (a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} \dots + k^{m-1}) \\ & + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \delta^2 (a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} \dots + k^{m-2}) \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 (a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} \dots + k^{m-3}) \\ & + \text{ec.} \end{aligned} \right\} (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a + b + c \dots + k + l &= S_1 \\
 a^2 + b^2 + c^2 \dots + k^2 + l^2 &= S_2 \\
 \dots & \dots \\
 a^m + b^m + c^m \dots + k^m + l^m &= S_m,
 \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned}
 a + b + c \dots + k &= S_1 - l \\
 a^2 + b^2 + c^2 \dots + k^2 &= S_2 - l^2 \\
 \dots & \dots \\
 a^m + b^m + c^m \dots + k^m &= S_m - l^m;
 \end{aligned}$$

e dietro a questi simboli, l'equazione (1) si cambierà in

$$\begin{aligned}
 l^m - a^m = & \frac{m}{1} \delta (S_{m-1} - l^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \delta^2 (S_{m-2} - l^{m-2}) \\
 & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta^3 (S_{m-3} - l^{m-3}) + \text{ec.} \dots (2).
 \end{aligned}$$

Questo risultato contiene una relazione tra le diverse somme  $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$ , e farà conoscere l'ultima allorchè l'altre saranno date.

Supponghiamo primieramente  $m = 1$ , otterremo

$$l - a = \delta (S_0 - l^0);$$

ora  $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 \dots + k^0 + l^0 = n;$

avremo dunque

$$l - a = (n - 1) \delta,$$

o sivero

$$l = a + (n - 1) \delta,$$

come l'abbiamo ottenuto nel n.º 228 degli *Elementi*.

Facendo in seguito  $m = 2$ , avremo

$$l^2 - a^2 = 2 \delta (S_1 - l) + \delta^2 (S_0 - l^0);$$

e ponendo  $\frac{l-a}{\delta}$  per  $S_1 - l$ , troveremo

$$l^2 - a^2 = 2 \delta (S_1 - l) + \delta (l - a),$$

di dove

$$S_1 = \frac{l^2 - a^2 + \delta l + \delta a}{2 \delta} + \frac{(l - a + \delta)(l + a)}{2 \delta};$$

e siccome  $l - a + \delta = n \delta$ , conseguiremo

$$S_1 = \frac{n(l + a)}{2},$$

nella stessa maniera come nel n. 229. degli *Elementi*.

La supposizione di  $m = 3$  darà

$$l^3 - a^3 = 3 \delta (S_2 - l^2) + 3 \delta^2 (S_1 - l) + \delta^3 (S_0 - l^0);$$

sostituendo in quest'equazione per  $S_0 - l^0$ , e  $S_1 - l$ , i valori trovati qui sopra, d'essa diventerà

$$l^3 - a^3 = \frac{6 \delta (S_2 - l^2) + 3 \delta (l^2 - a^2) - \delta^2 (l - a)}{2},$$

e darà

$$\begin{aligned} S_2 &= l^2 + \frac{2(l^3 - a^3) - 3\delta(l^2 - a^2) + \delta^2(l - a)}{6\delta} \\ &= \frac{2(l^3 - a^3) + 3\delta(l^2 + a^2) + \delta^2(l - a)}{6\delta}; \end{aligned}$$

È facile, proseguendo così, d'arrivare ai valori di  $S_3, S_4, \text{ec.}$

82. *Tommaso Simpson* ha dato pure un mezzo semplicissimo per ottenere immediatamente la *somma* delle potenze simili dei termini della progressione per differenze, il quale riducesi presso a poco a quello, che segue.

La *somma* delle prime potenze essendo

$$S = \frac{(a+l)n}{2}, \text{ diviene } \frac{\delta}{12} n^2 + \frac{2a-\delta}{2} n \text{ allor-}$$

chè si pone per  $l$  il suo valore  $a + (n-1)\delta$ : l'analogia porta a concluder da ciò che la *somma* delle potenze del grado  $m$  può essere espressa da

$$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} \dots + Mn,$$

le lettere  $A, B, C, \dots M$  designando delle quantità indipendenti da  $n$ : avrem dunque, in quest'ipotesi,

$$An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} \dots + Mn = a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m \dots + (a+(n-1)\delta)^m.$$

Ma, se s'augmenta la progressione proposta del termine  $a + n\delta$  consecutivo ad  $a + (n-1)\delta$ , il numero dei termini diverrà allora  $n + 1$ ; e sostituendo quest'ultimo in luogo di  $n$  nel primo membro dell'equazione di sopra, troveremo

$$A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1} \dots + M(n+1) = a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m \dots + (a+(n-1)\delta)^m + (a+n\delta)^m;$$

togliendo da quest'ultima equazione quella che precede, conseguiremo

$$A[(n+1)^{m+1} - n^{m+1}] + B[(n+1)^m - n^m] + C[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}] \dots + M = (a+n\delta)^m.$$

Sviluppando i due membri di questo risultato, e

ordinandoli per rapporto a  $n$ , prenderà desso la forma

$$\frac{m+1}{1} An^m + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} An^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} An^{m-2} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{m}{1} Bn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Bn^{m-2} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{m-1}{1} Cn^{m-2} + \text{ec.}$$

$$= \delta^m n^m + \frac{m}{1} a \delta^{m-1} n^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 \delta^{m-2} n^{m-2} + \text{ec.}$$

Eguagliando adesso tra loro i coefficienti dei termini simili di ciascun membro, avremo

$$\frac{(m+1)}{1} A = \delta^m$$

$$\frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} A + \frac{m}{1} B = \frac{m}{1} a \delta^{m-1}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} B + \frac{m-1}{1} C = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 \delta^{m-2}$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} C + \frac{m-2}{1} D$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 \delta^{m-3}$$

ec.;

d'onde ricaveremo

$$A = \frac{\delta^m}{m+1}$$

$$B = a \delta^{m-1} \frac{m+1}{2} A$$

$$C = \frac{m}{2} a^2 \delta^{m-2} \frac{m}{2} B - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} A$$

$$D = \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} a^3 \delta^{m-3} \frac{m-1}{2} C - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} B - \frac{(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} A,$$

ec.

Se in queste formule successivamente si faccia  $m = 1$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$ , ec., e si sostituiscano nell'espressione  $An^{m+1} + Bn^m + \text{ec.}$  i valori, ch'esse daranno per i coefficienti  $A, B, C, \dots$ , e che s'indichi, come quì sopra, per  $S_1$  la *somma* delle prime potenze,  $S_2$  quella delle seconde,  $S_3$  quella delle terze....., troveremo

$$S_1 = \frac{\delta}{2} n^2 + \frac{2a - \delta}{2} n$$

$$S_2 = \frac{\delta^2}{3} n^3 + \frac{2a\delta - \delta^2}{2} n^2 + \frac{6a^2 - 6a\delta + \delta^2}{6} n$$

$$S_3 = \frac{\delta^3}{4} n^4 + \frac{2a\delta^2 - \delta^3}{2} n^3 + \frac{6a^2\delta - 6a\delta^2 + \delta^3}{4} n^2 + \frac{2a^3 - 3a^2\delta + a\delta^2}{2} n.$$

83. Io non ispingerò più oltre questi valori, ma ne farò l'applicazione alla progressione formata dalla serie *naturale* dei numeri

$$\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

In questa progressione

$$a = 1, \quad \delta = 1, \quad l = n,$$

ed in conseguenza

$$S_0 = n = \frac{n}{1}$$

$$S_1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ec.

84. Col mezzo di queste formule si può tro-

vare la *somma* di tutte le progressioni, il cui termine generale è espresso da dette potenze intere, e positive di  $n$ .

Infatti, se il termine general d'una serie fosse  $an^p$ , la quantità  $a$  non cangiando, è evidente che la *somma* di questa serie, di cui ciascun termine ricavasi dall'espressione  $an^p$ , facendo successivamente  $n = 1, n = 2, \text{ ec.}$ , sarebbe

$$1^p \cdot a + 2^p \cdot a + 3^p \cdot a + 4^p \cdot a \dots + n^p a \\ = (1^p + 2^p + 3^p + 4^p \dots + n^p) a = a S_p.$$

Segue da ciò che la *somma* della serie, il cui termine generale è  $an^p + bn^q$ , ha per espressione  $aS_p + bS_q$ ; poichè ciascuno dei termini di questa serie è la *somma* dei termini, i quali si corrispondono nelle serie derivate da  $an^p$ , e da  $bn^q$ .

Finalmente il termine generale essendo  $an^p + bn^q - cn^r$ , la *somma* sarà  $aS_p + bS_q - cS_r$ ; perocchè ciascun termine di quest'ultima serie è eguale alla differenza tra i due termini, che si corrispondono nella serie derivata da  $an^p + bn^q$ , ed in quella che dà  $cn^r$ ; ed è evidente che deesi ottenere il medesimo risultato facendone la sottrazione termine a termine, oppure prendendo la differenza delle rispettive due *somme*.

85. Sien, per esempio, le serie

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \frac{n}{1}, \\ 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 \dots \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}, \\ 1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 20 \dots \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \text{ec.} \dots \dots \dots,$$

le quali contengono i coefficienti dei termini dello

sviluppo delle potenze negative del *binomio*, e di cui i termini generali sono i coefficienti relativi alla potenza  $-n$ .

La prima è la progressione per differenze, il cui termine generale  $= n$ , ed è eguale in conseguenza a

$$\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La seconda, il cui termine generale è

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 + n}{2},$$

può essere considerata come la metà della *somma* delle serie

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 9 + 16 \dots + n^2, \\ 1 + 2 + 3 + 4 \dots + n. \end{aligned}$$

La *somma* dell'una essendo  $S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ ,

e quella dell'altra  $S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$ , avremo

$$\frac{S_2 + S_1}{2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

La terza serie proposta, avendo per termine generale  $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ , può

decomporsi in tre altre, i cui termini generali saranno rispettivamente  $\frac{n^3}{6}$ ,  $\frac{3n^2}{6}$ ,  $\frac{2n}{6}$ ; ed è facil vedere che le *somme* di queste serie avranno per espressioni  $\frac{S_3}{6}$ ,  $\frac{3S_2}{6}$ ,  $\frac{2S_1}{6}$ , e che in consequen-

za quella della serie proposta sarà

$$\frac{S_1 + 3S_2 + 2S_3}{6} = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Le serie, che ho *sommate*, fan parte di quelle, le quali sono comprese sotto la denominazione di *numeri figurati*, a motivo del loro rapporto con certe figure di Geometria. Si vede che la *somma* di ciascheduna è la medesima cosa che il termine generale della seguente; di modo che la seconda è formata dalle *somme* parziali della prima, la terza è formata da quelle della seconda, e così delle altre.

### *Delle serie ricorrenti.*

86. Abbiamo veduto (*Elem.* 235) la progression per quozienti

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{ec.}$$

nascere dallo sviluppo della frazione  $\frac{a}{1-q}$ ; ciò

conduce naturalmente ad esaminare le serie, le quali possono risultare dallo sviluppo d'una frazione qualunque. Supponghiamo primieramente

che s'abbia la frazione  $\frac{a}{a' + b'x}$ ; per isviluppar-

la, possiam servirci della formula del *binomio*,

poichè  $\frac{a}{a' + b'x} = a (a' + b'x)^{-1}$ , oppure sup-

porre ancora che

$$\frac{a}{a' + b'x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.},$$

le lettere A, B, C, ec. designando dei coefficienti *indeterminati*. Moltiplicando i due membri per

$a' + b'x$ , e passando tutti i termini in un sol membro, avremo

$$\left. \begin{array}{l} a' A + a' B | x + a' C | x^2 + a' D | x^3 + \text{ec.} \\ -a + b' A | + b' B | + b' C | + \text{ec.} \end{array} \right\} = 0:$$

quest' equazione dovendo aver luogo qualunque valore che d'iasi a  $x$ , bisognerà eguagliar separatamente a zero i coefficienti di ciascuna potenza di  $x$ ; il che darà

$$\left. \begin{array}{l} a' A - a = 0 \\ a' B + b' A = 0 \\ a' C + b' B = 0 \\ a' D + b' C = 0 \\ \text{ec.} \end{array} \right\}, \text{ di dove } \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{a}{a'} \\ B = -\frac{b'}{a'} A, \\ C = -\frac{b'}{a'} B, \\ D = -\frac{b'}{a'} C, \\ \text{ec.;} \end{array} \right.$$

e si vede che ciascun coefficiente di  $x$  della serie  $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}$  è formato, nel caso attuale, di quello, che lo precede, moltiplicato per la quantità  $-\frac{b'}{a'}$ , oppure che ciascun termine

è il prodotto di quello, che lo precede, per  $-\frac{b'x}{a'}$ .

Sia ancora

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.};$$

operando su questa frazione come sull' precedente, otterremo

$$\left. \begin{array}{l} a' A + a' B | x + a' C | x^2 + a' D | x^3 + \text{ec.} \\ -a + b' A | + b' B | + b' C | + \text{ec.} \\ -b | + c' A | + c' B | + \text{ec.} \end{array} \right\} = 0;$$

ed avremo per conseguenza

$$\left. \begin{array}{l} a'A - a = 0 \\ a'B + b'A - b = 0 \\ a'C + b'B + c'A = 0 \\ a'D + b'C + c'B = 0 \\ \text{ec.} \end{array} \right\} \text{ di dove } \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{a}{a'} \\ B = \frac{b - b'A}{a'} \\ C = \frac{-c'A - b'B}{a'} \\ D = \frac{-c'B - b'C}{a'} \\ \text{ec.} \end{array} \right.$$

Qui ciascun coefficiente, a partirsi dal terzo, è *determinato* dai due, che lo precedono, moltiplicati rispettivamente per le quantità  $-\frac{c'}{a'}$ ,  $-\frac{b'}{a'}$ ;

ed in conseguenza ciascun termine della serie si forma dai due precedenti, moltiplicati rispettivamente per  $-\frac{c'x^2}{a'}$ ,  $-\frac{b'x}{a'}$ .

Finalmente sia, per ultimo esempio,

$$\frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.};$$

troveremo in questo caso che il coefficiente d'una potenza qualunque di  $x$  dipenderà dai tre, che lo precedono, moltiplicati rispettivamente per le

quantità  $-\frac{d'}{a'}$ ,  $-\frac{c'}{a'}$ ,  $-\frac{b'}{a'}$ , e che un termin qua-

lunque della serie sarà formato dai tre precedenti, moltiplicati rispettivamente per

$$\frac{d'x^3}{a'}, \frac{c'x^2}{a'}, \frac{b'x}{a'}.$$

È facile di concludere dagli esempj di sopra che una frazion razionale della forma

$$\frac{a + bx + cx^2 \dots + px^{n-1}}{a' + b'x + c'x^2 \dots + p'x^{n-1} + q'x^n}$$

genererà una serie, nella quale il coefficiente d' un termin qualunque dipenderà da tanti coefficienti precedenti quante unità vi sono nel più alto esponente del denominatore. Bisogna frattanto osservare che questa legge non ha luogo nella serie se non che dopo tanti termini quanti se ne trovano nel numeratore.

Le quantità  $-\frac{q'}{a'}, \dots, -\frac{d'}{a'}, -\frac{c'}{a'}, -\frac{b'}{a'}$ , per

le quali bisogna moltiplicare i coefficienti dei termini, che precedono quel che si cerca, portano unitamente il nome di *scala di relazione*; e la relazione costante, ch' esiste sempre tra un medesimo numero di termini consecutivi di queste serie, le ha fatte chiamare *serie ricorrenti*. Possiam porci per queste serie, come per le progressioni, i due Problemi seguenti: 1.º *Determinar l' espressione d' un termin qualunque indipendentemente da quelli, che lo precedono, o sivvero il termine generale.* 2.º *Trovare la somma d' un numero qualunque di termini di queste serie.* Il secondo Problema è il più facile a sciogliersi; perciò io principierò da questo.

87. Sia  $A + B + C + D \dots + H + I + K + L$  una serie *ricorrente*, di cui ciascun termine non dipenda che dai tre, che lo precedono; quest' esempio basterà per far vedere come il metodo si applicherebbe a qualunque altra. La natura della

serie proposta somministrerà l'equazioni seguenti

$$p A + q B + r C + s D = 0$$

$$p B + q C + r D + s E = 0$$

$$p C + q D + r E + s F = 0$$

$$p D + q E + r F + s G = 0$$

.....

$$p H + q I + r K + s L = 0.$$

Prendendo la *somma* di quest'equazioni, otterremo

$$p(A + B + C + D + \dots + H) + q(B + C + D + \dots + I) + r(C + D + \dots + K) + s(D + \dots + L) = 0;$$

e se s'indichi per  $f$  la *somma* di tutti i termini della serie proposta, avremo

$$p(f - I - K - L) + q(f - A - K - L) + r(f - A - B - L) + s(f - A - B - C) = 0,$$

di dove ricaveremo . . . . .  $f =$

$$\frac{p(I + K + L) + q(A + K + L) + r(A + B + L) + s(A + B + C)}{p + q + r + s}$$

Vedesi in conseguenza che la *somma* dimandata non dipenderà che dai tre primi termini, e dai tre ultimi.

88. Lo stesso metodo, dovuto a *Tommaso Simpson*, fa conoscere ancor la frazione, da cui la serie proposta prende la propria origine. Fa di mestieri perciò considerar questa serie come indefinita, e vale a dire, far astrazione dagli ultimi termini. In quest'ipotesi il numero dell'equazioni

$$p A + q B + r C + s D = 0$$

$$p B + q C + r D + s E = 0$$

$$p C + q D + r E + s F = 0$$

$$p D + q E + r F + s G = 0$$

ec.

diviene illimitato; sommandole insieme, si ha

$$\left. \begin{aligned} p(A+B+C+D+ec.)+q(B+C+D+ec.) \\ +r(C+D+ec.)+s(D+ec.) \end{aligned} \right\} = 0;$$

il che darà

$$pf+q(f-A)+r(f-A-B)+s(f-A-B-C)=0,$$

se si rappresentano per  $f$  la somma di tutti i termini della serie continuata all'infinito, oppure, ciò ch'è lo stesso, la frazione che l'ha prodotta mediante il di lei sviluppo. Da quest'equazione ricavasi

$$f = \frac{qA + r(A+B) + s(A+B+C)}{p + q + r + s}.$$

Sia, per esempio, la serie

$$1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + ec.,$$

nella quale ciascun termine è formato dai due precedenti, moltiplicati rispettivamente per  $2x^2$ , e per  $3x$ , come possiamo assicurarcene osservando che

$$8x^2 = 1 \times 2x^2 + 2x \times 3x, 28x^3 = 2x \times 2x^2 + 8x^2 \times 3x, ec.$$

avremo

$$A=1, B=2x, C=8x^2, D=28x^3, ec.$$

$$\left. \begin{aligned} C=2x^2A+3xB \\ D=2x^2B+3xC \\ ec. \end{aligned} \right\} \text{oppure} \left\{ \begin{aligned} -2x^2A-3xB+C=0 \\ -2x^2B-3xC+D=0 \\ ec.; \end{aligned} \right.$$

il che somministra

$$p = -2x^2, q = -3x, r = 1, s = 0,$$

$$e \quad f = \frac{1-x}{-2x^2-3x+1} = \frac{x-1}{2x^2+3x-1};$$

e, se si sviluppi difatto questa frazione, ricaderemo sulla serie proposta.

89 Possiamo pur ricavare dal n.º 86. indipendentemente dalla considerazione dell'*infinito* l'e-

espressione della frazione generatrice d'una serie ricorrente. In quel num.<sup>o</sup>. l'equazione

$$\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2} = A + Bx + Cx^2 + \text{ec.}$$

avendo condotto alle seguenti,

$$\begin{aligned} a'A - a &= 0, \\ a'B + b'A - b &= 0: \end{aligned}$$

se si sostituiscano nella frazione  $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$  i valori di  $a$ , e di  $b$  dati da quest'equazioni, conseguiremo

$$\frac{a'A + (a'B + b'A)x}{a' + b'x + c'x^2} = \frac{A + (B + \frac{b'}{a'}A)x}{1 + \frac{b'}{a'}x + \frac{c'}{a'}x^2};$$

e, se si fa  $\frac{b'}{a'} = q'$ ,  $\frac{c'}{a'} = p'$ , avremo

$$\frac{A + (B + q'A)x}{1 + q'x + p'x^2}.$$

Quì la frazione generatrice altro non contiene che i coefficienti dei due primi termini della serie proposta, e i due termini della scala di relazione dei coefficienti di questa serie, in virtù dei quali si ha

$$\begin{aligned} p'A + q'B + C &= 0 \\ p'B + q'C + D &= 0 \\ \text{ec.} \end{aligned}$$

Nell'esempio del num.<sup>o</sup> precedente

$$\begin{aligned} A &= 1, & B &= 2, \\ p' &= -2, & q' &= -3, \end{aligned}$$

ed in conseguenza

$$\frac{A + (B + q'A)x}{1 + q'x + p'x^2} = \frac{1 - x}{1 - 3x - 2x^2},$$

come di sopra.

Si costruirebbero nella stessa maniera delle formule per ritrovar la frazione generatrice delle *serie ricorrenti*, la cui *scala di relazione* contenesse un maggior numero di termini.

Ciò, che precede, suppone che la serie proposta sia ordinata secondo le potenze d'una medesima quantità  $x$ ; se s'avesse la serie numerica

$$1 + 2 + 8 + 28 + 100 + \text{ec.},$$

bisognerebbe prendere in di lei vece la seguente

$$1 + 2x + 8x^2 + 28x^3 + 100x^4 + \text{ec.},$$

la quale rientra nella serie proposta allorchè si fa  $x = 1$ .

Rapprossimando ciò all'espressione di  $S_{m+n}$ , ottenuta nel n.º 5., vedrem che le somme  $S_{m+1}$ ,  $S_{m+2}$ ,  $S_{m+3}$ , ec. delle potenze delle radici d'una equazione algebrica, formano una *serie ricorrente*, e troverem facilmente la frazione, da cui essa deriva.

90. Passiamo adesso al secondo Problema, il quale ha per oggetto la ricerca del *termine generale*. Per dar un'idea della maniera, colla quale esso possa risolversi, esaminiamo alcune delle *serie ricorrenti* le più semplici. La prima è quella,

che prende la sua origine dalla frazione  $\frac{a}{a' + b'x}$ , e che riducesi ad una progressione geometrica, di cui la *ragione* sarebbe  $-\frac{b'x}{a'}$ , ed il primo

termine  $\frac{a}{a'}$ ; è facil vedere, dopo di ciò (*Elem.*

231), che il *termine generale*, quello cioè, il cui posto è indicato da  $n$ , debb'essere

$$\frac{a}{a'} \left( -\frac{b'x}{a'} \right)^{n-1} = \pm \frac{ab'^{n-1}}{a'^n} x^{n-1},$$

il segno superiore avendo luogo allorchè  $n-1$  sarà *pari*, ed il segno inferiore nel caso contrario.

Daremo a questo risultato una forma più semplice facendo  $\frac{a}{a'} = \alpha$ ,  $\frac{a'}{b'} = \alpha'$ ; la frazione proposta, la serie che ne deriva, ed il termine generale di questa serie diverranno allora

$$\frac{\alpha}{a' + x}, \frac{\alpha}{a'} - \frac{\alpha x}{a'^2} + \frac{\alpha x^2}{a'^3} - \text{ec.}, \text{ e } \pm \frac{\alpha x^{n-1}}{a'^n}.$$

91. Viene in seguito la serie, che risulta dallo sviluppo della frazione  $\frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}$ ; frazione, che può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{a}{c'} + \frac{b}{c'}x$$

$$\frac{\frac{a}{c'} + \frac{b}{c'}x}{\frac{a'}{c'} + \frac{b'}{c'}x + x^2} : \text{facendo, per abbreviare,}$$

$$\frac{a}{c'} = \alpha, \frac{b}{c'} = \beta, \frac{a'}{c'} = \alpha', \frac{b'}{c'} = \beta', \text{ essa si cangerà}$$

$$\text{in } \frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}. \text{ Se } p, \text{ e } q \text{ indicano le due radi-}$$

ci dell'equazione di secondo grado  $x^2 + \beta'x + \alpha' = 0$ , la quantità  $x^2 + \beta'x + \alpha'$  sarà il prodotto dei due fattori  $x-p$ , e  $x-q$ ; avrem dunque

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{\alpha + \beta x}{(p-x)(q-x)}.$$

È naturale il pensare che una frazione, il

cui denominatore è composto di più fattori semplici, può risultare dalla riduzione al medesimo denominatore, e dall'addizione delle frazioni aventi questi fattori semplici per denominatori; e questo è ciò, che si vede nella maniera, che segue. Suppongasi.

$$\frac{\alpha + \xi x}{(p-x)(q-x)} = \frac{P}{p-x} + \frac{Q}{q-x}$$

$P$ , e  $Q$  essendo delle quantità *indeterminate*, e indipendenti da  $x$ ; riducendo al medesimo denominatore le due frazioni del secondo membro, si trova

$$\alpha + \xi x = (Pq + Qp) - (P + Q)x,$$

il che può aver luogo, qualunque sia  $x$ , se  $\alpha = (Pq + Qp)$ , e  $\xi = -(P + Q)$ ; e, per soddisfare a queste condizioni, serve determinare, mediante l'equazioni di sopra, le quantità  $P$ , e  $Q$ : si troverà

$$P = -\frac{\alpha + p\xi}{p-q}, \quad Q = \frac{\alpha + q\xi}{p-q}.$$

Col mezzo di questi valori, avremo

$$\frac{\alpha + \xi x}{\alpha' + \xi'x + x^2} = \frac{P}{p-x} + \frac{Q}{q-x};$$

e siccome ciascuna frazione del secondo membro può svilupparsi in una serie ordinata secondo le potenze di  $x$ , ne segue che la somma dei termini, i quali si corrispondono in queste serie, sarà eguale al termine, che occuperebbe il medesimo posto nella serie risultante dalla prima frazione; il termine general di quest'ultima s'otterrà dunque aggiungendo quelli delle due prime, i quali, dopo ciò che precede, saranno  $\frac{Px^{n-1}}{p^n}$ ,  $\frac{Qx^{n-1}}{q^n}$

Segue pure da questo che la serie risultante dalle due progressioni per quozienti, sommate termine a termine, è *ricorrente*.

92. Nel caso, dove s'avesse  $p = q$ , e vale a dire, ove i due fattori del denominatore fossero eguali tra loro, non potrebbesi decompor la frazione  $\frac{a + \zeta x}{a' + \zeta' x + x^2}$  in due altre della forma

$\frac{P}{p-x}$ ,  $\frac{Q}{p-x}$ , poichè troverebbesi

$$P = \frac{a + p\zeta}{0}, \quad Q = \frac{a + p\zeta}{0};$$

e si vede che ciò debb'esser così, perchè le due frazioni  $\frac{P}{p-x}$ ,  $\frac{Q}{p-x}$  si sommano immediatamente,

nè posson dare che un risultato simile a ciascuna, e non simile alla frazion proposta: bisogna dunque allora tentare un'altra decomposizione. Si scorge immediatamente che la frazione  $\frac{a + \zeta x}{(x-p)^2}$  equivale alle due seguenti  $\frac{a}{(x-p)^2} + \frac{\zeta x}{(x-p)^2}$ ,

e che l'ultima, scrivendosi così  $\frac{\zeta}{x-p} \times \frac{x}{x-p}$ , riducesi a

$$\frac{\zeta}{x-p} \times \left( 1 + \frac{p}{x-p} \right),$$

poichè

$$\frac{x}{x-p} = 1 + \frac{p}{x-p};$$

ricavasi da ciò

$$\frac{a + \zeta x}{(x-p)^2} = \frac{a}{(x-p)^2} + \frac{\zeta}{x-p} + \frac{p\zeta}{(x-p)^2} = \frac{a + \zeta p}{(p-x)^2} - \frac{\zeta}{p-x}.$$

Eccoci dunque arrivati a sostituire alla frazion proposta due altre frazioni, i cui numeratori sono indipendenti da  $x$ . Lo sviluppo della prima è

$$(a + \zeta p)(p - x)^{-2} = \frac{(a + \zeta p)}{p^2} \left( 1 + \frac{2x}{p} + \frac{3x^2}{p^2} + \frac{4x^3}{p^3} + \text{ec.} \right);$$

serie, il cui termine generale è evidentemente

$$\frac{(a + \zeta p)}{p^2} \cdot \frac{n x^{n-1}}{p^{n-1}};$$

e quello della seconda frazione essendo espresso da  $\frac{\zeta x^{n-1}}{p^n}$ , ne risulterà

$$\left[ \frac{n a + (n - 1) \zeta p}{p^2} \right] \frac{x^{n-1}}{p^{n-1}}$$

per il termine generale della serie data dalla frazione  $\frac{a + \zeta x}{(x - p)^2}$ .

93. Mi resta anco un caso da esaminare, quello cioè ove le radici dell'equazione  $x^2 + \zeta'x + a' = 0$  sono immaginarie. I fattori  $x - p$ , e  $x - q$  divenendo immaginarj, il termine generale  $\frac{P x^{n-1}}{p^n} +$

$\frac{Q x^{n-1}}{q^n}$  si trova complicato d'immaginarj, ma

che non sono se non che apparenti, e si distruggono scambievolmente allorchè riduconsi le quan-

tità  $\frac{P x^{n-1}}{p^n}$ ,  $\frac{Q x^{n-1}}{q^n}$  al denominatore medesimo,

e si sviluppano le potenze indicate. Difatto, se pongansi per  $P$ , e  $Q$  i valori precedentemente trovati, e si riuniscano i termini moltiplicati per  $\zeta$  e quelli, che lo sono per  $\alpha$ , avremo

$$\begin{aligned} & - \frac{(\alpha + \xi p)x^{n-1}}{(p-q)p^n} + \frac{(\alpha + \xi q)x^{n-1}}{(p-q)q^n} \\ & = \left\{ \frac{\alpha(p^n - q^n)}{(p-q)p^n q^n} + \frac{\xi(p^{n-1} - q^{n-1})}{(p-q)p^{n-1} q^{n-1}} \right\} x^{n-1}; \end{aligned}$$

ora, quando  $p$ , e  $q$  sono immaginarij, dessi possono essere rappresentati da

$$a + b\sqrt{-1}, \text{ e } a - b\sqrt{-1};$$

il che dà

$$p - q = 2b\sqrt{-1}, \quad pq = a^2 + b^2,$$

e le quantità,

$$p^n - q^n = (a + b\sqrt{-1})^n - (a - b\sqrt{-1})^n,$$

$$p^{n-1} - q^{n-1} = (a + b\sqrt{-1})^{n-1} - (a - b\sqrt{-1})^{n-1}$$

divengono allora della forma  $2B\sqrt{-1}$

$2B'\sqrt{-1}$  (28); sostituendo quest' espressioni nella formula suddivisata, dessa si cangerà in

$$\left( \frac{\alpha B}{b(a^2 + b^2)^n} + \frac{\xi B'}{b(a^2 + b^2)^{n-1}} \right) x^{n-1};$$

risultato reale.

94. È nel decomporre così la frazione generatrice in altre frazioni più semplici che si può arrivare al termine generale della *serie ricorrente*, ch'essa produce, e che per questo trovasi decomposta essa pure in *serie ricorrenti* d'un ordin più semplice. Bisogna che le frazioni parziali, di cui l'insieme rappresenta la frazione proposta, abbiano dei numeratori costanti, e per denominatori i binomj, che s'otterranno cercando i fattori semplici del denominatore della proposta. Questi fattori ricavansi dalle radici dell'equazione, che somministra il denominatore della frazion proposta eguagliato a zero; e i numeratori possono ot-

tenersi col *metodo dei coefficienti indeterminati*, come nell'esempio del n.° 91.: ma quando s' incontrano delle radici eguali, la forma delle frazioni parziali prova delle modificazioni analoghe a quella, che ha avuto luogo nel n.° 92.; ed allorchè vi sono delle radici immaginarie, si pone il termine generale sotto una forma reale, sviluppandolo nella stessa maniera che nel numero precedente. Tutto questo esige alcune specialità, nelle quali non posso entrare; osserverò solamente che la ricerca del termine generale d' una *serie ricorrente* è compresa in quella del termine generale della formula del n.° 80; poichè la frazione

$$\frac{a + bx + cx^2 \dots \dots + px^{m-1}}{a' + b'x + c'x^2 \dots \dots + p'x^{m-1} + q'x^m}$$

riducesi a

$$(a + bx \dots + px^{m-1})(a' + b'x \dots + p'x^{m-1} + q'x^m)^{-1},$$

ed in conseguenza il metodo, di cui ci siam serviti fino al presente per trovar questo termine generale, è indirettissimo. La risoluzione dell' equazioni, ch'esso esige, introduce nell'espression dimandata delle quantità irrazionali, le quali non debbono entrarvi: la riduzione di tutte le parti di quest'espressione al medesimo denominatore, e l'impiego delle formule relative alle funzioni *simmetriche* delle radici dell' equazioni, farebbero veramente sparire gl'irrazionali, ma non resulta di meno che la risoluzione dell' equazioni è una difficoltà straniera alla ricerca del termine generale d' una *serie ricorrente*.

La *Teoria delle serie* è una delle ramificazioni più importanti, e più estese dell' Analisi: dessa riunisce le parti sue *elementari* alle parti *trascendenti*; ma è principalmente in queste

ch'ell' è d' un' applicazion più frequente, ed essa dà loro altresì i suoi principali accrescimenti. Non vi è dunque cosa più sconvenevole quanto quella di suddividerla così come si fa quasi da tutti, ed io confesso che mi sarei astenuto di parlarne, se non vi fossi stato forzato per evitare il rimprovero di non aver reso quest'Opera tanto completa, quanto quelle ch' esistevano per l' avanti. Troveremo d' altronde tutto ciò, che concerne la *Teoria delle serie* in seguito del *Trattato del Calcolo differenziale, e integrale* digià citato. Terminerò questo soggetto esponendo succintamente il metodo, che *Lagrange* ha dato nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi, anno 1772.*, per riconoscere se una serie proposta sia *ricorrente*.

95. Abbiassi  $S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.}$ , una serie, nella quale le quantità  $A, B, C, \text{ec.}$  indicano dei numeri dati: se questa serie è *ricorrente*, dessa dee risultare dallo sviluppo d' una frazion razionale (88). Suppongo, come in tutto ciò che precede, che il più alto esponente di  $x$  nel numeratore di questa frazione, sia minore d' un' unità che nel denominatore; se avesse luogo il contrario, il metodo stesso ce lo farebbe conoscere, così come lo vedremo in appresso.

Cercheremo immediatamente se la serie  $S$  può essere lo sviluppo della frazione  $\frac{a'}{a + bx}$ , e

per questo faremo  $S = \frac{a'}{a + bx}$ ; d' onde risulta

$$\frac{1}{S} = \frac{a + bx}{a'} = \frac{a}{a'} + \frac{b}{a'}x = p + qx;$$

il che dimostra che il quoziente dell'unità divisa per la serie  $S$ , ordinato per rapporto a  $x$ , non dee contenere che due termini solamente, allor-

chè questa formula viene difatto dalla frazione supposta.

Sia, per esempio,

$$S = 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \text{ec.} :$$

faremo la divisione nel modo seguente, prendendo 2 per il primo termine del divisore:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \text{ec.} : \\ \hline & \frac{1}{2} - x \\ \hline -1 - & 2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - \text{ec.} \\ & + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \text{ec.} \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

avremo

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = -1, \quad \text{e} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{2} - x,$$

di dove ricaverem facilmente

$$S = \frac{2}{1 - 2x}.$$

Se la divisione non si termina così al secondo termine, la serie proposta non sarà lo sviluppo

d'una frazione tale come  $\frac{a'}{a + bx}$ ; bisognerà provare allora se dessa non venga da una frazion

della forma  $\frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}$ ; in quest'ipotesi avremo

$$\frac{1}{S} = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x}.$$

Se si effettua la divisione indicata nel secondo membro, e non si spinga che sino a tanto che non s'abbia un quoziente della forma  $p + qx$ , il che succederà dopo due divisioni parziali, ave-

remo un resto, il quale potremo rappresentare per  $a''x^2$ , ed otterremo per conseguenza

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{a''x^2}{a' + b'x},$$

il che prova che il resto della divisione di 1 per S sarà divisibile per  $x^2$ . Se s'indica per  $S_1x^2$  questo resto, il quale sarà una serie della forma

$$A_1x^2 + B_1x^3 + C_1x^4 + \text{ec.},$$

avremo

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1x^2}{S} = p + qx + \frac{a''x^2}{a' + b'x},$$

d'onde procede

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a''}{a' + b'x}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{a' + b'x}{a''},$$

e

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a'}{a''} + \frac{b'}{a''}x = p_1 + q_1x,$$

facendo la divisione indicata nel secondo membro. Così  $\frac{S}{S_1}$  dee dare un quoziente di due termini come l'abbiamo ottenuto qui sopra per  $\frac{1}{S}$ ; e dalle due equazioni

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1x^2}{S}, \quad \frac{S}{S_1} = p_1 + q_1x,$$

ricaveremo

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2}{p_1 + q_1x}};$$

riducendo questa frazione, conseguiremo

$$S = \frac{p_1 + q_1 x}{(p + qx)(p_1 + q_1 x) + x^2}.$$

Supponghiamo ancora che non s'abbia esattamente  $\frac{S}{S_1} = p_1 + q_1 x$ : bisognerà far allora

$$S = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3};$$

ed operando come nel caso precedente, troveremo

$$\frac{1}{S} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{a' + b'x + c'x^2} = p + qx + \frac{a''x^2 + b''x^3}{a' + b'x + c'x^2}.$$

La serie, che resta dopo che abbiamo spinta

la divisione in  $\frac{1}{S}$  fino ai due primi termini  $p + qx$ ,

essendo divisibile per  $x^2$ , potrà essere rappresentata da  $S_1 x^2$ ; di maniera che avremo

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1 x^2}{S} = p + qx + \frac{a''x^2 + b''x^3}{a' + b'x + c'x^2},$$

il che darà

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a'' + b''x}{a' + b'x + c'x^2}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a'' + b''x},$$

e

$$\frac{S}{S_1} = p_1 + q_1 x + \frac{a'''x^2}{a'' + b''x},$$

facendo la divisione indicata nel secondo membro, ed arreatandoci ai due primi termini del quoziente. Quest'ultima espressione dimostra che la divisione di  $S$  per  $S_1$ , spinta parimente fino a tanto che s'abbia un quoziente della forma  $p_1 + q_1 x$ , lascerà per resto una serie divisibile per  $x^2$ , e chiamando  $S_2 x^2$  questa serie, avremo

$$\frac{S}{S_1} = p_1 + q_1 x + \frac{S_2 x^2}{S_1} = p_1 + q_1 x + \frac{a''' x^2}{a'' + b'' x},$$

d'oude

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a'''}{a'' + b'' x}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{a'' + b'' x}{a'''} = \frac{a''}{a'''} + \frac{b''}{a'''} x = p_2 + q_2 x;$$

combinando l'equazioni

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S_1 x^2}{S}, \quad \frac{S}{S_1} = p_1 + q_1 x + \frac{S_2 x^2}{S_1},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = p_2 + q_2 x,$$

che abbiamo ottenute, ne dedurremo

$$\frac{S}{S_1} = \frac{(p_1 + q_1 x)(p_2 + q_2 x) + x^2}{(p + qx)(p_1 + q_1 x)(p_2 + q_2 x) + (p + qx) + (p_2 + q_2 x)x^2}.$$

per la frazione generatrice della serie proposta. Sarebbe facile adesso proseguire più avanti l'operazione se la divisione di  $S_1$  per  $S_2$  non desse un quoziente esatto, e dobbiam vedere che dessa condurrà sempre, come di sopra, a un numero finito d'equazioni tra  $S, S_1, S_2, S_3$ , ec., dalle quali dedurremo l'espressione della frazione generatrice. La regola da seguirsi in tutti i casi può enunciarsi così: *Dividete l'unità per la serie proposta  $S$ , fino a che abbiate nel quoziente due termini tali come  $p + qx$ , e indicando il resto per  $S_1 x^2$ , dividete  $S$  per  $S_1$ , fino a tanto che abbiate nel quoziente due termini come  $p_1 + q_1 x$ , indicando ancora il resto per  $S_2 x^2$ , dividete  $S_1$  per  $S_2$ , fino a che troviate un quoziente della forma  $p_2 + q_2 x$ , e così successivamente. Se la serie proposta è veramente ricorrente, arriverete in ultimo ad un quoziente esatto, il quale potrà essere rap-*

presentato da  $p_n + q_n x$ . Si ottiene allor questa serie d'equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{S} &= p + qx + \frac{S_1 x^2}{S} \\ \frac{S}{S_1} &= p_1 + q_1 x + \frac{S_2 x^2}{S_1} \\ \frac{S_1}{S_2} &= p_2 + q_2 x + \frac{S_3 x^2}{S_2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{S_{n-1}}{S_n} &= p_n + q_n x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{di} \\ \text{dove} \\ \text{ricavasi} \end{array} \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{1}{p + qx + \frac{S_1 x^2}{S}} \\ \frac{S_1}{S} &= \frac{1}{p_1 + q_1 x + \frac{S_2 x^2}{S_1}} \\ \frac{S_2}{S_1} &= \frac{1}{p_2 + q_2 x + \frac{S_3 x^2}{S_2}} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{S_n}{S_{n-1}} &= \frac{1}{p_n + q_n x} \end{aligned} \right.$$

96. Per applicar la regola antecedente alla serie dei numeri 1, 1, 3, 7, 18, 47, 123, 322, 843, 2207, 5778, ec., per esempio, le daremo la forma

$$S = 1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 18x^4 + 47x^5 + 123x^6 + 322x^7 + 843x^8 + \text{ec.},$$

ed avremo

$$p + qx = 1 - x,$$

$$S_1 = -2 - 4x - 11x^2 - 29x^3 - 76x^4 - 199x^5 - 521x^6 - \text{ec.}$$

$$p_1 + q_1 x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x,$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} - 2x - \frac{11}{2}x^2 - \frac{29}{2}x^3 - 38x^4 - \frac{199}{2}x^5 - \text{ec.}$$

$$p_2 + q_2 x = 4 - 8x,$$

$$S_3 = -5 - 15x - 40x^2 - 105x^3 - \text{ec.},$$

e finalmente  $p_3 + q_3x = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}x$ , senza resto.  
Formando allora l'equazioni

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}x}, \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4 - 8x + \frac{S_1 x^2}{S_2}},$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{S_2 x^2}{S_1}}, \quad S = \frac{1}{1 - x + \frac{S_1 x^2}{S}},$$

troveremo

$$S = \frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{1 - 3x + x^2}.$$

Il numeratore essendo d'un grado più elevato che il denominatore, possiamo togliere un intero dalla frazione, ed avremo,

$$S = -x - 2 + \frac{3 - 7x}{1 - 3x + x^2},$$

d'onde si vede che la serie proposta è la *serie ricorrente* prodotta dalla frazione propriamente

detta  $\frac{3 - 7x}{1 - 3x + x^2}$ , alla quale si sono aggiunti i

termini  $-2$ , e  $-x$ ; così, nella prima, la legge della *ricorrenza* non si manifesta che al quinto termine, in luogo che dessa si manifesterà al terzo, se si tolgono  $-2$ , e  $-x$ , poichè verrà

$$3 + 2x + 3x^2 + 7x^3 + \text{ec.},$$

e digià

$$3x^2 = 3 \times -x^2 + 2x \times 3x,$$

$$7x^3 = 2x \times -x^2 + 3x^2 \times 3x, \text{ ec.}$$

*Sviluppo in serie degli esponenziali,  
e dei logaritmi.*

97. Abbiám ricavati i *logaritmi* dall' equazione  $y = a^x$  (*Elem.* 240.),  $y$  essendo il *numero*,  $x$  il *logaritmo*, e  $a$  la *base*; quest' equazione presenta due Problemi; *trovare y conoscendo x*; e *trovare x, conoscendo y*. Principierò immediatamente da cercare  $y$  in  $x$ ; e per questo supporrò

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ec.},$$

$A, B, C, D$ , ec. essendo dei coefficienti indipendenti da  $x$ : prendendo dunque un' altra quantità  $z$ , avrò egualmente

$$a^z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ec.},$$

di dove ricaverò

$$\frac{a^x - a^z}{x - z} = \frac{B(x - z) + C(x^2 - z^2) + D(x^3 - z^3) + \text{ec.}}{x - z}.$$

La divisione del secondo membro per  $x - z$  si eseguisce dietro alla formula del num.º 158. degli *Elementi*, e s' ottiene

$$\frac{a^x - a^z}{x - z} =$$

$$B + C(x + z) + D(x^2 + xz + z^2) + E(x^3 + x^2z + xz^2 + z^3) + \text{ec.}$$

Per potere sviluppare nella stessa maniera il primo membro, scrivo il suo numeratore così:  $a^z(a^{x-z} - 1)$ : facendo in seguito  $a = 1 + b$ , nella quantità  $a^{x-z}$ , io la sviluppo secondo le potenze di  $b$  mediante la formula del *binomio*, ed ho

$$(1 + b)^{x-z} = 1 + \frac{(x-z)}{1} b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \text{ec.},$$

di dove procede

$$a^z(a^{x-z}-1) = a^z \left[ \frac{(x-z)}{1} b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \text{ec.} \right].$$

Quest'ultimo sviluppo essendo divisibile per  $x-z$ , ne risulta

$$a^z \left( b + \frac{x-z-1}{2} b^2 + \frac{(x-z-1)(x-z-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \text{ec.} \right) =$$

$$B + C(x+z) + D(x^2+xz+z^2) + E(x^3+x^2z+xz^2+z^3) + \text{ec.}$$

Se adesso si suppone  $x=z$ , l'equazione qui sopra diverrà

$$a^x \left( b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ec.} \right) =$$

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ec.};$$

facendo per abbreviare,

$$b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ec.} = k,$$

e sostituendo per  $a^x$  la serie

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.},$$

troveremo

$$Ak + Bkx + Ckx^2 + Dkx^3 + Ekkx^4 + \text{ec.} =$$

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ec.},$$

dalla quale ricaveremo

$$B = Ak, C = \frac{Bk}{2}, D = \frac{Ck}{3}, E = \frac{Dk}{4}, F = \frac{Ek}{5}, \text{ec.}$$

Tutti i coefficienti, ad eccezione di  $A$ , saranno *determinati* da queste equazioni: ma, allorchè  $x=0$ , l'equazione  $a^x = A + Bx + Cx^2 + \text{ec.}$

dando  $1=A$ , ne segue che  $A=1$ ,  $B=\frac{k}{1}$ ,  $C=\frac{k^2}{1 \cdot 2}$ ,

$$D = \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, E = \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, F = \frac{k^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \text{ ec.},$$

e che

$$y = a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$$

98. È a proposito d'osservare che, qualunque valore diasi a  $x$ , la serie, di sopra finirà sempre con essere *convergente*. Difatto, è facil vedere che si può rappresentare il termine generale di questa serie per  $\frac{k^n x^n}{1 \cdot 2 \dots n}$ ; quello, che viene imme-

diatamente dopo, sarà  $\frac{k^{n+1} x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots n(n+1)}$ ; ed il rapporto dell'uno all'altro avrà per espressione  $\frac{kx}{n+1}$ .

Ora, prolungando la serie, si dee necessariamente incontrare un termine, nel quale  $n+1$  sorpasserà  $kx$ , e che in conseguenza sarà minore di quello, che lo precede; ed è chiaro che il decrescimento continuerà sempre nei termini ulteriori.

99. Si tratta adesso di determinare la quantità  $k$ . Ponendo, in luogo di  $b$ , il suo valore  $a-1$ , avremo

$$k = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ec.}$$

Questa serie non sarà *convergente* fintantochè  $a-1$  non sarà minore dell'unità; ma dessa è suscettibile di divenir tanto *convergente* quanto vorremo, mediante la dipendenza, che si trova tra  $a$ , e  $k$ , e ch'io vado a far conoscere.

Allorchè si suppone  $x = 1$  nella serie

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ec.},$$

deffa diviene

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

e darà il valore di  $a$  quando quello di  $k$  sarà cognito. Facendo  $k = 1$ , e indicando per  $e$  il valore corrispondente di  $a$ , avremo

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{ec.},$$

d'onde risulterà  $e = 2,7182818$ , arretandoci alla settima *decimale*. Se sostituiscansi  $e$  in luogo di  $a$ ,

e 1 in luogo di  $k$  nell'equazione  $a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \text{ec.}$ ,

otterremo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.}$$

Quest'equazione dovendo sussistere qualunque sia  $x$ , supporremo  $x = k$ ; deffa si cangerà in

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

e darà, in virtù del suo paragone col valor di  $a$ ,

$$a = e^k.$$

Prendendo i *logaritmi*, troveremo

$$k \log e = \log a;$$

se  $a$  è la base del sistema dei *logaritmi* rappresentati dalla *caratteristica* 1, avremo

$$k = \frac{1}{\log e},$$

e per conseguenza in quest'ipotesi

$$y = a^x =$$

$$1 + \frac{x}{1. \log e} + \frac{x^2}{1.2.(\log e)^2} + \frac{x^3}{1.2.3.(\log e)^3} + \text{ec.}$$

Tal' è l'espressione del numero  $y$  per il suo logaritmo  $x$ .

100. Il Problema proposto è risoluto, poichè abbiamo  $y$  espresso per  $x$ , e vale a dire, ch' essendo dato il logaritmo  $x$ , e quello del numero  $e$  relativamente alla base  $a$ , avremo il numero  $y$ ; ma l'espressione di  $k$  in  $a$  ci conduce pure alla soluzione del secondo Problema: *essendo dato un numero trovare il suo logaritmo.*

Infatti, se si suppone che  $a$  sia una quantità qualunque, e si ponga per  $k$  la serie, ch' egli rappresenta nell'equazione  $k l e = l a$ , ne risulterà

$$l a = l e \left\{ \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{ec.} \right\}.$$

Ecco dunque il logaritmo d'un numero qualunque  $a$  espresso per mezzo di questo numero, e del solo logaritmo d'un numero determinato  $e$ .

Questa serie non è *convergente* se non che quando il numero  $a$  è vicinissimo all'unità: ma

siccome  $l \cdot \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} l a$  (*Elem.* 241), se si cangia nel

secondo membro  $a$  in  $\sqrt[m]{a}$ , otterremo

$$l a = m l e \left\{ \frac{(\sqrt[m]{a}-1)}{1} - \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a}-1)^3}{3} - \text{ec.} \right\}:$$

ora, in generale prendendo per  $m$  un numero grandissimo, potremo far sempre in modo che la quan-

tità  $\sqrt[m]{a}$  differisca tanto poco quanto vorremo dall'unità.

Abbiamo pure un mezzo semplicissimo di

calcolare il logaritmo di  $a$ ; poichè, prendendo  $m$  eguale a qualcuno dei numeri compresi nella serie 2, 4, 8, 16, ec., non avremo che da effettuare dell'estrazioni successive di radici quadrate (*Elementi* 153). Frattanto questo metodo diverrebbe laborioso per i numeri un poco considerevoli, ed è per ciò che gli Analisti hanno cercato delle nuove serie, le quali potessero applicarsi a questi numeri; serie, le quali non sono che delle trasformazioni della prima espressione di  $\log a$ .

101. Il numero  $a$  essendo supposto nelle serie precedenti indipendente dalla *base* dei logaritmi, è evidente che potremo applicar queste serie a un numero qualunque  $y$ , e che avremo in generale

$$x = \log y = \log e \left\{ \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{ec.} \right\}.$$

Sostituendo in quest'espressione  $1 + u$  in luogo di  $y$ , dessa diverrà

$$\log(1 + u) = \log e \left\{ \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \text{ec.} \right\};$$

cangiando in seguito  $+u$  in  $-u$ , avremo

$$\log(1 - u) = \log e \left\{ -\frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \text{ec.} \right\};$$

togliendo il secondo risultato dal primo, troveremo

$$\log(1 + u) - \log(1 - u) = \log \left( \frac{1+u}{1-u} \right) =$$

$$2 \log e \left\{ \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{ec.} \right\};$$

serie, il cui andamento è più rapido di quel delle precedenti.

Se ne trova una molto più *convergente* facendo in quest'ultima

$$\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{z}{n},$$

il che dà

$$u = \frac{z}{2n+z},$$

ed in conseguenza

$$\ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \ln\frac{(n+z)}{n} = \ln(n+z) - \ln n =$$

$$2le \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{ec.} \right\},$$

di dove ricavasi

$$\ln(n+z) = \ln n +$$

$$2le \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{ec.} \right\}.$$

Quest'ultima serie farà conoscere il logaritmo del numero  $n+z$ , mediante quello di  $n$ , e sarà tanto più *convergente* quanto più  $n$  sarà considerevole.

Se si prende, per esempio,  $n=1$ ,  $z=1$ , otterremo

$$\ln 2 = 2le \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{ec.} \right);$$

serie convergentissima, e di cui l'ottavo termine non arriva a  $\frac{1}{100000000}$ : riducendo in *decimali* tutti quelli, che lo precedono, conseguiremo

$$\ln 2 = 0,6931472 \text{ le.}$$

102. Non si può avere il valore assoluto di  $\ln 2$  senza fissar quello di  $le = 1$  (2,7182818), il quale dipende dal *sistema* di logaritmi, che si adotta. L'ipotesi la più semplice consiste nel supporre  $le = 1$ , e si ha allora

$$l 2 = 0,6931472;$$

in questo *sistema* particolare, che corrisponde all'equazione  $y=e^x$  (99), la base è  $e$ . Io lo designerò sotto il titolo di *sistema Neperiano*, per rammentare il nome dello Scozzese *Neper* (o *Napier*), al quale si dee l'importante scoperta dei logaritmi, ed accenterò la lettera  $l$  ogni qual volta si tratterà di logaritmi di questo *sistema*; così scriverò  $l e=1$ ,  $l 2=0,6931472$  (\*).

Per passar dal *sistema Neperiano* a quello, la cui base fosse una quantità qualunque, bisogna, dietro l'equazione  $Ly = \frac{l y}{l A}$  (*Elem.* 250), che diviene nel caso attuale  $z l' = \frac{l z}{l e}$ , prendere  $l e = \frac{l z}{l' z}$  e siccome il logaritmo della base è sempre l'unità, sarà comodo di fare  $z=a$ : avremo così

$$l e = \frac{1}{l' a}:$$

non dovrete far altro che calcolar  $l' a$  mediante l'ultima serie data qui sopra, supponendovi  $l e=1$ .

Per i logaritmi ordinarij, nei quali  $a=10$ , osserveremo che  $l 10 = 5.2$ ; vedremo che basta d'aver  $l 5$ , perchè  $l 10 = l 5 + l 2$ , e  $l 2$  è digià cognito.

Affine di pervenire al logaritmo di 5, supporremo nell'ultima serie del num.<sup>o</sup> precedente

(\*) I Logaritmi *Neperiani* son appellati comunemente *Logaritmi Iperbolici*; ma questa denominazione è difettosa, perchè non havvi nun *Sistema* di Logaritmi, che non corrisponda a qualcheduna delle Curve, alle quali i Geometri han dato il nome d'*Iperbole*.

$n=4$ , e  $x=1$ ; e siccome  $l'4 = 2 l'2$ , conseguiremo, prendendo  $l'e=1$ ,

$$l'5 = 2 l'2 + 2 \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{9} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{9} \right)^5 + \text{ec.} \right\}.$$

I tre primi termini di questa serie bastano per ottenere un risultato esatto fino alla settima *decimale*, ed essa somministra

$$l'5 = 1,6094379;$$

sommando questo logaritmico con quello di 2 trovato più alto, si ha

$$l'10 = 2,3025851,$$

ed in conseguenza

$$l e = \frac{1}{l'10} = 0,4342945.$$

Moltiplicando per questo numero i logaritmi *Neperiani* di 2, e 5, ottenuti nel num.<sup>o</sup> 102. ed in questo, troveremo

$$l2 = 0,3010300, \quad \text{e} \quad l5 = 0,6989700,$$

tali appunto com'essi sono nelle *Tavole* dei logaritmi ordinarij.

103. La quantità  $l e$  è detta generalmente *modulo*; si vede che quello dei logaritmi *Neperiani* è 1, e che quello dei logaritmi *ordinarij* è 0,4342945. Si passa dai logaritmi *Neperiani* a dei logaritmi qualunque moltiplicando i primi per il *modulo* dei secondi, e da questi ritornasi agli altri dividendoli per il loro *modulo*, oppure,

ciò ch'è lo stesso, moltiplicandoli per  $\frac{1}{l e}$ . Allora

chè la base è 10, si ha

$$\frac{1}{l e} = 2,3025851;$$

ed è per questo numero che bisogna moltiplicare i logaritmi *ordinarij*, onde convertirli in logaritmi *Neperiani*, il che spesso è necessario.

La serie, ch' esprime il logaritmo di  $n+z$ , dà per il logaritmo di  $n+1$  quest' espressione semplicissima, e sempre *convergente*, allorchè  $n > 1$ ,

$$l(n+1) = l n + 2 l e \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{(2n+1)^5} + \text{ec.} \right\}.$$

104. *Borda*, ed *Haros* hanno dato delle formule, le quali esprimono, per mezzo di serie convergentissime, le relazioni tra più logaritmi di numeri consecutivi, e conducono prontissimamente a questi logaritmi. Ecco le prime, che si trovano ancora nella Prefazione alle *Tavole Trigonometriche decimali* calcolate da *Borda*, riviste, e aumentate da *Delambre*.

Se nella serie

$$l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2 l e \left\{ \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \text{ec.} \right\}$$

si fa

$$1+u = (p-1)(p-1)(p+2) = p^3 - 3p + 2,$$

$$1-u = (p+1)(p+1)(p-2) = p^3 - 3p - 2;$$

avremo

$$\begin{aligned} l \frac{p^3 - 3p + 2}{p^3 - 3p - 2} &= l \frac{1 + \frac{2}{p^3 - 3p}}{1 - \frac{2}{p^3 - 3p}} \\ &= 2 l e \left\{ \frac{2}{p^3 - 3p} + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{p^3 - 3p} \right)^3 + \text{ec.} \right\}, \end{aligned}$$

di dove concluderemo

$$1(p+2) + 21(p-1) - 1(p-2) - 21(p+1) \\ = 21e \left\{ \frac{2}{p^3-3p} + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{p^3-3p} \right)^3 + \text{ec.} \right\}.$$

Se prendasi successivamente

$$p=5, \quad p=6, \quad p=7, \quad p=8,$$

avremo queste quattro equazioni

$$17 + 412 - 13 - 213 - 212 = 21e \left[ \frac{1}{55} + \text{ec.} \right]$$

$$312 + 215 - 212 - 217 = 21e \left[ \frac{1}{99} + \text{ec.} \right]$$

$$213 + 213 + 212 - 15 - 612 = 21e \left[ \frac{1}{161} + \text{ec.} \right]$$

$$15 + 12 + 217 - 13 - 12 - 413 = 21e \left[ \frac{1}{244} + \text{ec.} \right].$$

Le dette quattro equazioni non contenendo che i logaritmi dei numeri 2, 3, 5, e 7, logaritmi, che si possono allora determinare per una semplice eliminazione: s'ottiene in questa maniera

$$12 = 21e \left\{ \begin{array}{l} 28 \left[ \frac{1}{55} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{55} \right)^3 + \text{ec.} \right] \\ + 10 \left[ \frac{1}{99} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{99} \right)^3 + \text{ec.} \right] \\ + 16 \left[ \frac{1}{161} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{161} \right)^3 + \text{ec.} \right] \\ - 4 \left[ \frac{1}{244} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{244} \right)^3 + \text{ec.} \right] \end{array} \right\},$$

e così degli altri.

Se si prenda ancora  $p=15$ , conseguiremo

$$117 + 217 - 113 - 612 = 21e \left[ \frac{1}{1665} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1665} \right)^3 + \text{ec.} \right].$$

Finalmente avrem pure, facendo  $p=1007$ ,

$$11009 + 211006 - 11005 - 211008$$

$$= 21e \left[ \frac{1}{530572161} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{530572161} \right)^3 + \text{ec.} \right]$$

Questi esempj son sufficienti per far vedere qual partito possa mai ricavarsi dalla formula di *Borda*.

105. Per ottener quella di *Haros*, bisogna nell'equazione

$$1z = 21e \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \text{ec.} \right\}$$



ed in conseguenza

$$\frac{x-z}{u-w} = A + B(u+w) + C(u^2 + uw + w^2) + \text{ec.}$$

L'equazione  $y = a^x$  somministra

$$y = 1, \text{ ovvero } u = a^x - 1,$$

d'onde ne segue

$$w = a^z - 1 \text{ e } u - w = a^x - a^z = a^z(a^{x-z} - 1);$$

ora abbiamo trovato (97)

$$\frac{a^z(a^{x-z} - 1)}{x - z} =$$

$$a^z \left\{ b + \frac{(x-z-1)}{2} b^2 + \frac{(x-z-1)(x-z-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \text{ec.} \right\};$$

ricavando da quest'equazione il valore di . . . .

$$\frac{x-z}{a^z(a^{x-z} - 1)}, \text{ l'eguaglieremo alla serie}$$

$$A + B(u+w) + \text{ec.};$$

supponendo in seguito  $x = z$ , di dove resulta  $u = w$ , avremo

$$\frac{1}{a^x \left( b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ec.} \right)} =$$

$$A + 2B u + 3C u^2 + 4D u^3 + \text{ec.}$$

ponendo  $k$  in luogo di  $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ec.}$ , e

$1 + u$  in luogo di  $a^x$ , conseguiremo

$$\frac{1}{k(1+u)} = A + 2B u + 3C u^2 + 4D u^3 + \text{ec.},$$

o sivero, facendo sparire il denominatore, e passando tutto in un solo membro,

$$\left. \begin{aligned} & A k + 2B k u + 3C k u^2 + 4D k u^3 + \text{ec.} \\ - 1 + & A k u + 2B k u^2 + 3C k u^3 + \text{ec.} \end{aligned} \right\} = 0;$$

equazione, dalla quale ricavasi

$$A = \frac{1}{k}, \quad B = -\frac{1}{2k}, \quad C = \frac{1}{3k}, \quad D = -\frac{1}{4k}, \text{ ec.},$$

ed in conseguenza

$$x = \frac{1}{k} \left\{ \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{ec.} \right\}.$$

Se  $a$  è la base del sistema dei logaritmi, avremo dunque, come di sopra (101),

$$\log y = \frac{1}{k} \left\{ \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{ec.} \right\}.$$

### *Del regresso delle Serie.*

107. L'uso frequente, che ho fatto in ciò che precede, del metodo dei *coefficienti indeterminati*, mi permetterà d' esporre in succinto quello del *regresso delle serie*, il quale conduce a trovar l'espressione d'una quantità involta in una serie, il cui valore sia dato.

Abbiasi  $y = z + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.}$ : per ottenere  $x$  in  $y$ , passeremo il termine  $a$  nel primo membro, e facendo per abbreviare,  $y - a = z$ , conseguiremo

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.} \dots (1):$$

la supposizione di  $x = 0$  dando  $z = 0$ , è facile di concluderue che si può fare

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ec.} \dots (2);$$

i coefficienti  $A, B, C, D, \text{ ec.}$  indipendenti da  $z$ , si determineranno col mezzo dell'equazioni, che s'otterranno dopo d'averne sostituito in luogo delle potenze di  $x$  nell'equazione (1) quelle della ~~so-~~



vare con questo mezzo il valore di  $x$  dalla serie

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$$

nella quale  $y = e^x$  (99); avremo

$$z = y - 1,$$

e

$$a = 1, b = \frac{1}{1 \cdot 2}, c = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, d = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ec.},$$

di dove ricaveremo

$$A = 1, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{6}, D = -\frac{1}{24}, \text{ec.}$$

e

$$x = \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{ec.};$$

il che si accorda con l'espressione del n.° 101. facendovi  $k$ , o sivero  $1e = 1$ .

Ricaverebbesi parimente il valore di  $y$  in  $x$  dalla serie

$$x = \frac{(y-1)}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{ec.}$$

supponendo  $y-1=z$ , e  $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ec.}$  Lascio al lettore la cura d'esercitarsi su questo calcolo; i coefficienti  $A, B, C$ , ec. essendo determinati, rimetteremo  $y-1$  per  $z$ , e conseguiremo

$$y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{ec.}$$

109. Se si avesse l'equazione

$$\alpha y + \xi y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \text{ec.} = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{ec.}$$

formata da due serie, e si volesse ottenere l'espressione di  $y$ , supporrebbesi

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.},$$

ed opererebbesi come precedentemente, dopo d'aver passati tutti i termini dal primo membro nel

secondo. Noi insistiam poco su questi calcoli, perchè dessi non conducono se non che a delle formule, delle quali se ne conosce facilmente la legge.

*Delle Frazioni continue.*

OSSERVAZIONE. Quest' articolo, tranne alcuni leggieri cangiamenti, è il primo paragrafo delle Addizioni fatte da *Lagrange* all'Algebra d'*Euler*.

110. Il metodo esposto nel n.° 221. degli *Elementi d'Algebra* per approssimarsi al valor dell'incognita in un'equazione d'un grado qualunque prescrive di far successivamente

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{y'}, \quad y' = b' + \frac{1}{y''},$$

$$y'' = b'' + \frac{1}{y'''}, \quad \text{ec.},$$

$a, b, b', b'',$  ec. essendo i numeri interi immediatamente inferiori ai veri valori delle quantità  $x, y, y', y'',$  ec.: se nel valore di  $x$  pongasi quello di  $y$ , ricavato dalla seconda equazione, otterremo

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{y'}};$$

sostituendo in quest'espressione per  $y'$  il suo valore preso dalla terza equazione, avremo

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{b' + \frac{1}{y''}}};$$

eliminando  $y''$  col mezzo della quarta equazione,

perverremo a

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{b' + \frac{1}{b'' + \frac{1}{y'''}}}};$$

e così di seguito.

La frazione, che accompagna l'intero  $a$  in questa espressione, simile a quelle, che abbiain fatto conoscere in *Aritmetica* (163), è una *frazione continua*; e si comprende generalmente sotto questo nome qualunque frazione, il cui denominatore è composto d'un intero più una frazione, la quale ha pure per denominatore un intero più una frazione, e così successivamente.

S'incontrano le *frazioni continue* sotto due forme differenti: l'une hanno, come la precedente, l'unità in tutti i numeratori delle frazioni *integranti*, mentre l'altre hanno dei denominatori, e dei numeratori qualunque; tal'è la seguente:

$$a + \frac{b}{\xi + \frac{c}{\gamma + \frac{d}{\delta + \text{cc.}}}}$$

ma io non mi occuperò che delle prime, essendo le altre più curiose che utili.

III. Ravvicinando il n.º 163. dell'*Aritmetica* ai n.º 221, e 243. degli *Elementi* si fa manifesto che « le *frazioni continue* si presentano natural-  
« mente tutte le volte che si tratta d'esprimere in  
« numeri delle quantità, le quali non si posson  
« ottener che per mezzo di approssimazioni conse-  
« cutive. Infatti supponghiamo che debbasi va-  
« lutare una quantità qualunque data  $a$ , la quale  
« non sia esprimibile per un numero intero; la  
« via la più semplice è quella di cominciar da

« cercare il numero intero, che sarà il più prossimo  
 « al valore di  $a$ , e che non ne differirà se non se  
 « d'una frazione minore dell'unità. Sia questo  
 « numero  $\alpha$ , ed avremo  $a - \alpha$  eguale ad una fra-  
 « zione minore dell'unità, di maniera che  $\frac{1}{a - \alpha}$   
 « sarà pel contrario un numero maggiore dell'unità.

« Sia dunque  $\frac{1}{a - \alpha} = b$ ; e siccome  $b$  debb'essere  
 « un numero maggiore dell'unità, potremo cer-  
 « care nella stessa maniera il numero intero, che  
 « più si approssimerà al valore di  $b$ ; e questo  
 « numero essendo chiamato  $\zeta$ , avremo di nuovo  
 «  $b - \zeta$  eguale ad una frazione minore dell'unità,

« ed in conseguenza  $\frac{1}{b - \zeta}$  sarà eguale ad una quan-

« tità maggiore dell'unità, la quale potremo de-  
 « signare per  $c$ ; così, per valutar  $c$ , non dovremo  
 « far altro che cercar parimente il numero intero  
 « più prossimo a  $c$ , il quale essendo notato da  $\gamma$ ,  
 « avremo  $c - \gamma$  eguale ad una quantità minore

« dell'unità, ed in conseguenza  $\frac{1}{c - \gamma}$  sarà eguale

« ad una quantità  $d$  maggiore dell'unità; e così  
 « in seguito. Con questo mezzo egli è chiaro che  
 « si debb' esaurire a poco a poco il valore di  $a$ , e  
 « ciò nella maniera la più semplice, e la più  
 « pronta che sia possibile, perchè non s'impiegano  
 « che dei numeri interi, di cui ciascuno s'appros-  
 « sima tanto quanto è possibile al valore cercato.

« Adesso, poichè  $\frac{1}{a - \alpha} = b$ , avremo

$$a - \alpha = \frac{1}{b}, \quad \text{e} \quad a = \alpha + \frac{1}{b};$$

« parimente, a motivo di  $\frac{1}{b-\epsilon} = c$ , avremo

$$b = \epsilon + \frac{1}{c};$$

« ed a motivo di  $\frac{1}{c-\gamma} = d$ , avrem similmente

$$c = \gamma + \frac{1}{d},$$

« e così di seguito; talmentechè, sostituendo successivamente questi valori, avremo

$$a = \alpha + \frac{1}{b},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{c},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta};$$

« ed in generale

$$a = \alpha + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{ec.}$$

« È bene osservar quì che i numeri  $\alpha, \epsilon, \gamma,$   
 « ec., i quali rappresentano, come l'abbiam veduto, i valori interi approssimativi delle quantità  $a, b, c$ , ec., posson essere presi ciascuno in due differenti maniere; poichè possiam prendere egualmente per il valore intero approssimativo d'una quantità data l'uno, o l'altro dei due numeri interi, tra i quali questa quantità si ritrova; v'è nulladimeno una differenza essenziale tra queste due maniere di prendere i valori ap-

« prossimativi per rapporto alla *frazione continua*,  
 « che ne resulta; poichè, se si prendon sempre i  
 « valori approssimativi minori dei veri, i deno-  
 « minatori  $\zeta, \gamma, \delta$ , ec. saranno tutti *positivi*,  
 « laddove che dessi sarebbero tutti *negativi*, se  
 « si prendessero i valori approssimativi tutti mag-  
 « giori dei veri; ed essi saranno in parte *positivi*,  
 « ed in parte *negativi*, se i valori approssimativi  
 « sian presi ora minori, ed ora maggiori.

« Difatto, se  $\alpha$  è minore di  $a$ ,  $a - \alpha$  sarà una  
 « quantità *positiva*; dunque  $b$  sarà *positivo*, e  $\zeta$   
 « lo sarà pure; al contrario  $a - \alpha$  sarà *negativo*,  
 « se  $\alpha$  è maggiore di  $a$ ; dunque  $b$  sarà *negativo*,  
 « e  $\zeta$  lo sarà pure. Parimente, se  $\zeta$  è minore di  
 «  $b$ ,  $b - \zeta$  sarà sempre una quantità *positiva*;  
 « dunque  $c$  lo sarà pure, ed in conseguenza anco  
 «  $\gamma$ : ma, se  $\zeta$  è maggiore di  $b$ ,  $b - \zeta$  sarà una  
 « quantità *negativa*, di manierachè  $c$ , ed in con-  
 « seguenza anco  $\gamma$  saran *negativi*; e così di se-  
 « guito.

« Del rimanente, allorquando si tratta di  
 « quantità *negative*, intendo per quantità minori  
 « quelle, le quali, prese *positivamente*, sarebber  
 « maggiori.

« Debb'osservare altresì che, se fra le quan-  
 « tità  $a, b, c, d$ , ec. se ne trovi una, che sia  
 « eguale ad un numero intero, allora la *frazione*  
 « *continua* sarà terminata, perchè vi si potrà  
 « tener ferma questa medesima quantità. Per esem-  
 « pio, se  $c$  è un numero intero, la *frazion conti-*  
 « *nua*, la qual somministra il valore di  $a$ , sarà

$$a = \alpha + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{c}.$$

« Difatto egli è manifesto che per continuarla

« bisognerebbe prendere  $\gamma = c$ ; il che darebbe

$$d = \frac{1}{c - \gamma} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (*)},$$

« ed in conseguenza  $\delta = \infty$ ; di manierachè avreb-  
« besi

$$a = a + \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\infty},$$

« i termini seguenti svanendo a fronte della quanti-  
« tà infinita  $\infty$ : ora,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ; dunque avremo sem-  
« plicemente

$$a = a + \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}.$$

« Questo caso succederà ogni qual volta la  
« quantità  $a$  sarà commensurabile, e vale a dire  
« che dessa sarà espressa per una frazion *razionale*;  
« ma tostochè  $a$  sarà una quantità *irrazionale*,  
« allora la *frazion continua* anderà necessariamen-  
« te all'infinito.

« 112. Supponghiamo che la quantità  $a$  sia  
« una frazione ordinaria  $\frac{A}{B}$ ,  $A$ , e  $B$  essendo dei  
« numeri interi dati; è evidente in primo luogo  
« che il numero intero  $a'$ , che più si approssimerà  
« ad  $\frac{A}{B}$ , sarà il quoziente della divisione di  $A$  per

(\*) Il segno  $\infty$  è, come scorgesi, quello adoperato dagli Analisti per denotare una quantità *infinita*, o ciò che diventa una *frazione*, il cui *denominatore* s'annulli (*Elementi* 68).

« B; così, supponendo la divisione eseguita nel  
 « modo ordinario, e chiamando  $\alpha$  il quoziente, e  
 « C il resto, avremo

$$\frac{A}{B} \rightarrow \alpha = \frac{C}{B};$$

« dunque  $b = \frac{B}{C}$ : per aver parimente il valore in-

« tero approssimativo  $\xi$  della frazione  $\frac{B}{C}$ , non do-

« vremo far altro che divider B per C, e prender  
 « per  $\xi$  il quoziente di questa divisione; allora  
 « chiamando D il resto, avremo

$$b - \xi = \frac{D}{C},$$

« ed in conseguenza

$$c = \frac{C}{D};$$

« continuerem dunque a dividere C per D, ed il  
 « quoziente sarà il valore del numero  $\gamma$ , e così  
 « di seguito; d'onde resulta questa regola sem-  
 « plicissima per ridur le *frazioni ordinarie a frazio-*  
 « *ni continue*.

« *Dividete primieramente il numeratore della*  
 « *frazione per il suo denominatore, e chiamate il*  
 « *quoziente  $\alpha$ ; dipoi dividete il denominator per il*  
 « *resto, e chiamate  $\xi$  il quoziente; dividete dopo*  
 « *il primo resto per il secondo resto, e sia  $\gamma$  il*  
 « *quoziente; continuate in questa maniera, divi-*  
 « *dendo sempre il penultimo resto per l'ultimo,*  
 « *fino a tanto che si presenti una divisione, la*  
 « *quale facciasi senza resto; il che dee necessa-*  
 « *riamente accadere, poichè i resti son tutti nu-*  
 « *meri interi, i quali vanno diminuendo: avrete*  
 « *la frazione continua*

$$a + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \text{ec.}$$

« che sarà eguale alla data frazione .

« 113. Sia proposto di ridurre a frazion conti-  
 « nua la frazione  $\frac{1103}{887}$ . Divideremo dunque 1103  
 « per 887; avremo il quoziente 1, ed il resto 216;  
 « divideremo 887 per 216; avremo il quoziente  
 « 4, ed il resto 23; divideremo 216 per 23, il  
 « che darà per quoziente 9, ed il resto 9; divi-  
 « deremo pure 23 per 9, avremo il quoziente 2,  
 « ed il resto 5; divideremo 9 per 5; avremo il  
 « quoziente 1, ed il resto 4; divideremo 5 per 4;  
 « avremo il quoziente 1, ed il resto 1; finalmente  
 « dividendo 4 per 1 avremo il quoziente 4, ed  
 « il resto zero, di manierachè l'operazione sarà  
 « terminata. Riunendo dunque per ordine tutti i  
 « quozienti trovati, avremo questa serie 1, 4, 9,  
 « 2, 1, 1, 4, mediante la quale formeremo la fra-  
 « zione continua

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}$$

« 114. Siccome nella maniera ordinaria di fare  
 « le divisioni si prende sempre per quoziente il  
 « numero intero, ch'è eguale, o minore della fra-  
 « zion proposta, ne segue che, per il metodo pre-  
 « cedente, non avremo che delle *frazioni continue*,  
 « di cui tutti i denominatori son dei numeri *positivi*.

« Ora, si può prendere ancor per quoziente  
 « il numero intero, ch'è immediatamente maggiore  
 « del valore della frazione, allorchè questa fra-

« zione non è riducibile a un numero intero, e per  
 « questo non dobbiam far altro che aumentare  
 « d' un' unità il valore del quoziente trovato col  
 « metodo ordinario; il resto allora sarà *negativo*,  
 « ed il quoziente, che segue, sarà necessariamente  
 « *negativo* ancor esso. Così potremo a piacimento  
 « rendere i termini della *frazione continua posi-*  
 « *tivi, o negativi.*

« Nell'esempio precedente, in vece di prender  
 « 1 per il quoziente di 1103 diviso per 887, posso  
 « prendere 2, ma avrò il resto *negativo* — 671,  
 « pel quale bisognerà adesso divider 887: divi-  
 « deremo dunque 887 per — 671, ed avremo il  
 « quoziente — 1, ed il resto 216, ovvero il quo-  
 « ziente — 2, ed il resto — 455. Prendiamo il  
 « quoziente maggiore — 1, ed allora bisognerà  
 « dividere il resto — 671 per il resto 216, di dove  
 « n' avremo o il quoziente — 3, ed il resto — 23,  
 « ovvero il quoziente — 4, ed il resto 193. Continuo  
 « la divisione adottando il quoziente maggiore — 3;  
 « avrò da dividere il resto 216 per il resto — 23,  
 « il che mi darà o il quoziente — 9, ed il resto  
 « 9, oppure il quoziente — 10, ed il resto — 14;  
 « e così di seguito.

« In questa maniera avremo

$$\frac{1103}{887} = 2 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-9} + \text{ec.},$$

« ove si vede che tutti i denominatori son *nega-*  
 « *tivi.*

« 115. Del rimanente si può render *positivo*  
 « ciascun denominatore *negativo*, cangiando il se-  
 « gno del numeratore; ma bisogna allora cangiare  
 « anco il segno del numeratore seguente, poichè  
 « egli è manifesto che si ha

$$\mu + \frac{1}{-\nu} + \frac{1}{\pi} + \text{ec.} = \mu - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\pi} + \text{ec.}$$

« Dipoi potrem, se si voglia, fare sparire  
 « tutti i segni — della *frazion continua*, e ridurla  
 « ad un'altra ove tutti i termini sien *positivi*;  
 « poichè abbiamo in generale

$$\mu - \frac{1}{\nu} + \text{ec.} = \mu - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{\nu - 1} + \text{ec.},$$

« come possiam facilmente convincercene riducendo  
 « queste due quantità in *frazioni ordinarie*.

« Potrebbonsi ancora con un mezzo simile  
 « introdurre dei termini *negativi* in luogo dei  
 « *positivi*, poichè si ha

$$\mu + \frac{1}{\nu} + \text{ec.} = \mu + 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{\nu - 1} + \text{ec.},$$

« d'onde si vede che mediante queste sorte di  
 « trasformazioni possiam qualche volta sempliciz-  
 « zare una *frazion continua*, e ridurla ad un minor  
 « numero di termini; il che avrà luogo ogni qual  
 « volta avremo dei denominatori eguali all'unità  
 « *positiva*, o *negativa*.

« In generale è chiarissimo che, per avere  
 « la *frazion continua* la più convergente che sia  
 « possibile verso il valore della quantità data,  
 « bisogna sempre prendere per  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , ec. i nu-  
 « meri interi, che più si approssimano alle quan-  
 « tità  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ec., sia che dessi sieno minori, o mag-  
 « giori di queste quantità: or è facil vedere che  
 « se, per esempio, non si prenda per  $\alpha$  il numero  
 « intero, che più si avvicina, o in eccesso o in  
 « difetto, al valore di  $a$ , il numero seguente  $\zeta$   
 « sarà necessariamente eguale all'unità. Difatto

« la differenza tra  $a$ , ed  $\alpha$  sarà allora maggiore  
 « di  $\frac{1}{2}$ ; in conseguenza avremo  $b = \frac{1}{a - \alpha}$ , minore  
 « di 2: dunque  $\zeta$  non potrà esser che eguale  
 « all' unità.

« Così, ogni qual volta che in una *frazione*  
 « *continua* troverem dei denominatori eguali all'  
 « unità, ciò sarà un segno che non abbiám preso i  
 « denominatori antecedenti tanto approssimati  
 « quanto è possibile, e che in conseguenza la fra-  
 « zione può semplicizzarsi aumentando, o dimi-  
 « nuendo questi denominatori d' un' unità; il che  
 « potremo eseguire mediante le formule preceden-  
 « ti, senza esser obbligati di rifare interamente  
 « il calcolo.

« 116. Il metodo del n.º 112. può servire anche  
 « per ridurre a *frazion continua* una quantità  
 « qualunque, purchè dessa sia prima espressa in  
 « *decimali*; ma, siccome il valore in *decimali* non  
 « può esser che approssimativo, e che aumentando  
 « d' un' unità l' ultima cifra s' hanno due limiti,  
 « tra i quali dee trovarsi il vero valore della  
 « quantità proposta, bisognerà, per non escire  
 « da questi limiti, fare ad un tempo il medesimo  
 « calcolo sulle due frazioni, di cui si tratta, e  
 « non ammettere in seguito nella *frazion continua*  
 « che i quozienti, i quali risultano egualmente  
 « dalle due operazioni.

Se, per esempio, si tratta d' esprimere in  
*frazion continua* la radice quadrata di 2, il cui  
 valore in *decimali* è tra 1,414213, e 1,414214,  
 avrem da ridurre a *frazioni continue* le frazioni  
 ordinarie seguenti  $\frac{1414213}{1000000}$ ,  $\frac{1414214}{1000000}$ ; troveremo per  
 ambedue i sei primi quozienti eguali a 2; ma

il 7.° sarebbe 3 per una, e 1 per l'altra: abbiám dunque in questa maniera

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ec.}$$

Del rimanente è a proposito l'osservare che, qualunque numero di *decimali*, che s'abbiano nel valore della radice quadrata di 2, la *frazion continua* conserva la medesima forma come lo proveremo in appresso.

« La frazion *decimale*, ch'esprime il rapporto della circonferenza al diametro, è secondo il calcolo di *Vieta* 3,1415926535 ....., di maniera che avrem la frazione  $\frac{31415926535}{1000000000000}$  da ridursi a *frazion continua* per il metodo sopra esposto: ora, se non si prenda che la frazione  $\frac{314159}{1000000}$ , si trovano i quozienti 3, 7, 15, 1, ec.; e se si prendesse la frazione maggiore  $\frac{3141590}{10000000}$ , si troverebbero i quozienti 3, 7, 16, ec.; di modo che il terzo quoziente resterebbe incerto: dal che si fa manifesto che, per potere spingere solamente la *frazion continua* al di là di tre termini, bisognerà necessariamente adottare un valore della circonferenza, che abbia più di sei cifre.

« Se si prenda il valore dato da *Ludolph* (*Van Ceulen*) in trentacinque cifre, che è

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288,

« e s'operi nel medesimo tempo su questa frazione, e sulla medesima aumentandovi l'ultima cifra 8 d'un'unità, troverem questa serie di quozienti 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2,

« 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6;  
 « 1; di manierachè avremo

$$\frac{\text{circonf.}}{\text{diametro}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \text{ec.}$$

« Siccome vi sono quì dei denominatori eguali  
 « all'unità, potremo semplicizzar la frazione in-  
 « troducendovi dei termini *negativi* mediante le  
 « formule del n.º 115, e troveremo

$$\frac{\text{circonf.}}{\text{diametro}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{294} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \text{ec.},$$

« oppure

$$\frac{\text{circonf.}}{\text{diametro}} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{-294} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \text{ec.}$$

« 117. Dopo d'aver spiegata la generazione  
 « delle *frazioni continue*, andiamo a mostrarne  
 « gli usi, e le proprietà principali.

« È primieramente evidente che più che si  
 « prendon termini d'una *frazione continua*, più  
 « dobbiamo approssimarci al vero valor della quan-  
 « tità, che abbiamo espressa per questa frazione;  
 « di modo che, se ci arrestiam successivamente a  
 « ciascun termine della frazione, avremo una serie  
 « di quantità, le quali saranno necessariamente  
 « *convergenti* verso la quantità proposta.

« Così, avendo ridotto il valore di  $a$  alla  
« *frazion continua*

$$a + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{ec.},$$

« avremo le quantità

$$a, a + \frac{1}{\epsilon}, a + \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\gamma}, \text{ec.},$$

« oppure, riducendo,

$$a, \frac{a\epsilon + 1}{\epsilon}, \frac{a\epsilon\gamma + a + \gamma}{\epsilon\gamma + 1}, \text{ec.},$$

« le quali s'approssimeranno di più in più al valore  
« di  $a$ .

« Per poter meglio giudicar della legge di  
« *convergenza* di queste quantità, osserveremo che  
« in virtù delle formole del n.° 111., si ha

$$a = a + \frac{1}{b}, \quad b = \epsilon + \frac{1}{c}, \quad c = \gamma + \frac{1}{d}, \text{ec.},$$

« dal che manifestasi primieramente che  $a$  è il  
« primo valore approssimativo di  $a$ ; che in segui-  
« to, se si prende il valore esatto di  $a$ , ch'è

«  $\frac{ab+1}{b}$ , e si sostituisca per  $b$  il suo valore appros-

« simativo  $\epsilon$ , avremo questo valore più prossimo

«  $\frac{a\epsilon+1}{\epsilon}$ ; che avremo parimente un terzo valore

« più vicino ad  $a$  ponendo in primo luogo per  $b$  il

« suo valore esatto  $\frac{\epsilon c + 1}{c}$ , il che dà

$$a = \frac{(a\epsilon + 1)c + a}{\epsilon c + 1},$$

« e prendendo in seguito per  $c$  il valore approssi-  
 « mativo  $\gamma$ , con questo mezzo il nuovo valore  
 « approssimativo di  $a$  sarà

$$\frac{(\alpha\epsilon + 1)\gamma + \alpha}{\epsilon\gamma + 1};$$

« continuando lo stesso ragionamento, potremo  
 « approssimarci di più ponendo nell'espressione  
 « di  $a$  trovata di sopra, in luogo di  $c$ , il suo  
 « valore esatto  $\frac{\gamma d + 1}{d}$ , il che somministrerà

$$a = \frac{((\alpha\epsilon + 1)\gamma + \alpha)d + \alpha\epsilon + 1}{(\epsilon\gamma + 1)d + \epsilon},$$

« e prendendo in seguito per  $d$  il suo valor pros-  
 « simo  $\delta$ ; di tal maniera che avremo per la quarta  
 « approssimazione la quantità

$$\frac{((\alpha\epsilon + 1)\gamma + \alpha)\delta + \alpha\epsilon + 1}{(\epsilon\gamma + 1)\delta + \epsilon};$$

« e così in seguito.

« Da ciò è facil vedere che, se col mezzo  
 « dei numeri  $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ , ec. si formano l'espres-  
 « sioni seguenti:

$A = \alpha$	$A' = 1$
$B = \epsilon A + 1$	$B' = \epsilon$
$C = \gamma B + A$	$C' = \gamma B' + A'$
$D = \delta C + B$	$D' = \delta C' + B'$
$E = \epsilon D + C$	$E' = \epsilon D' + C'$
ec.	ec. ,

« avrem questa serie di *frazioni convergenti verso*  
 « la quantità  $a$ :

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}, \text{ ec.}$$

« Se la quantità  $a$  è *razionale*, e rappresentata da  
 « una frazione qualunque  $\frac{V}{\sqrt{r}}$ , è evidente che que-  
 « sta frazione sarà sempre l'ultima nella serie  
 « precedente; poichè in questo caso la *frazion con-*  
 « *tinua* sarà terminata perchè l'ultima frazione  
 « della serie suddivisata dee sempre equivalere a  
 « tutta la *frazione continua*.

« Ma se la quantità  $a$  sia *irrazionale*, allora  
 « la *frazion continua* andando necessariamente  
 « all'infinito, potrem pure spingere all'infinito  
 « la serie delle frazioni *convergenti* suddette.

« 118. Esaminiamo adesso la natura di queste  
 « frazioni. È primieramente manifesto che i nu-  
 « meri  $A, B, C$ , ec. debbono andare aumentando,  
 « come pure i numeri  $A', B', C'$ , ec.; perchè 1.<sup>o</sup>  
 « se i numeri  $\alpha, \zeta, \gamma$ , ec. son tutti positivi, i  
 « numeri  $A, B, C$ , ec.  $A', B', C'$ , ec. saranno pure  
 « tutti positivi, ed avremo evidentemente

$$B > A, \quad C > B, \quad D > C, \text{ ec.},$$

« e

$$B' = \text{ovvero} > A', \quad C' > B', \quad D' > C', \text{ ec.}:$$

« 2.<sup>o</sup> Se i numeri  $\alpha, \zeta, \gamma$ , ec. son tutti, op-  
 « pure in parte negativi, allora fra i numeri  $A$ ,  
 «  $B, C$  ec., ed  $A', B', C'$ , ec. ve ne saranno dei po-  
 « sitivi, e dei negativi; ma in questo caso si con-  
 « sidererà che abbiamo in generale, per le formu-  
 « le precedenti,

$$\frac{B}{A} = \zeta + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \quad \frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}, \text{ ec.},$$

« dalle quali si fa manifesto a prima vista, che,  
 « se i numeri  $\alpha, \zeta, \gamma$ , ec. son differenti dall'uni-  
 « tà, qualunque sieno d'altronde i lor segni, avrem  
 « necessariamente, facendo astrazione dai segni,

«  $\frac{B}{A}$  maggiore dell' unità; dunque  $\frac{A}{B}$  minore dell' u-  
 « nità; in conseguenza  $\frac{C}{B}$  maggiore dell' unità; e  
 « così di seguito: dunque B maggiore di A, C  
 « maggiore di B; ec.

« Non vi sarà eccezione che quando fra i  
 « num.<sup>i</sup>  $\alpha, \zeta, \gamma$ , ec. se ne troveranno di quelli eguali  
 « all' unità. Supponghiam, per esempio, che il  
 « numero  $\gamma$  sia il primo, che sia eguale a  $\pm 1$ ;  
 « avrem subito B maggiore di A; ma C sarà mi-  
 « nore di B se succede che la frazione  $\frac{A}{B}$  abbia il  
 « segno differente da  $\gamma$ , il che si fa chiaro dall' equa-  
 « zione  $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ , perchè in questo caso,  $\gamma +$   
 «  $\frac{A}{B}$  sarà un' numero minore dell' unità: ora, io  
 « dico, che allora avrem necessariamente D mag-  
 « giore di B; poichè, siccome  $\gamma = \pm 1$ , avre-  
 « mo (117)

$$c = \pm 1 + \frac{1}{d}, \text{ e } c - \frac{1}{d} = \pm 1:$$

« ma essendochè  $c$ , e  $d$  son delle quantità maggiori  
 « dell' unità (111), è manifesto che quest' equazione  
 « non potrà sussistere salvo che  $c$ , e  $d$  non sieno  
 « del medesimo segno; dunque, poichè  $\gamma$ , e  $\delta$  sono  
 « i valori interi approssimativi di  $c$ , e  $d$ , questi  
 « numeri  $\gamma$ , e  $\delta$  debbon essere pure del medesimo  
 « segno; ora, la frazione  $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$  debb' essere  
 « del medesimo segno di  $\gamma$ , a motivo che  $\gamma$  è uu  
 « numero intero, e  $\frac{A}{B}$  una frazione minore dell' u-

« nità; dunque  $\frac{C}{B}$ , e  $\delta$  saranno quantità del medesimo segno; in conseguenza  $\frac{\delta C}{B}$  sarà una quantità positiva. Ma si ha

$$\frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C};$$

« dunque, moltiplicando per  $\frac{C}{B}$ , avremo

$$\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1;$$

« dunque  $\frac{\delta C}{B}$  essendo una quantità positiva, è chiaro che  $\frac{D}{B}$  sarà maggiore dell'unità; dunque  $D$  sarà maggiore di  $B$ .

« Si fa manifesto da ciò che, se accade che nella serie  $A, B, C$ , ec. si trovi un termine, che sia minore del precedente, il termine consecutivo sarà necessariamente maggiore; di maniera che, ponendo a parte questi termini minori, la serie non cesserà d'andare aumentando.

« Del resto, potremo sempre evitar, se si voglia, quest'inconveniente, tanto prendendo i numeri  $\alpha, \epsilon, \gamma$ , ec. tutti positivi, quanto prendendoli tutti differenti dall'unità; il che è sempre possibile.

« Faremo gli stessi ragionamenti per rapporto alla serie  $A', B', C'$ , ec., nella quale si ha parimente

$$\frac{B'}{A'} = \epsilon, \quad \frac{C'}{B'} = \gamma + \frac{A'}{B'}, \quad \frac{D'}{C'} = \delta + \frac{B'}{C'}, \text{ ec.,}$$

« d'onde ne dedurremo delle conclusioni simili alle precedenti.

« 119. Adesso, se si moltiplicano *in croce*  
« i termini delle frazioni vicine nella serie

«  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ , ec., troveremo

$$BA' - AB' = 1, \quad CB' - BC' = AB' - BA', \\ DC' - CD' = BC' - CB', \text{ ec.},$$

« dalle quali concludo che avremo in generale

$$BA' - AB' = 1 \\ CB' - BC' = -1 \\ DC' - CD' = 1 \\ ED' - DE' = -1 \\ \text{ec.}$$

« Questa proprietà è ragguardevolissima, e  
« dà luogo a più conseguenza importanti.

« Si vede primieramente che le frazioni

«  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ , ec. debbono essere digià ridotte ai

« loro minimi termini poichè se, per esempio,  
« C, e C' avessero un comun divisore diverso  
« dall'unità, il numero intero  $CB' - BC'$  sa-  
« rebbe pur divisibile per questo medesimo divi-  
« sore, il che non è possibile a motivo di  
«  $CB' - BC' = -1$ .

« In seguito, se si pongono l'equazioni pre-  
« cedenti sotto questa forma,

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'} \\ \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{B'C'} \\ \frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'} \\ \frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = \frac{1}{D'E'} \\ \text{ec.}$$

» è facil vedere che le differenze tra le frazioni  
 « vicine della serie  $\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1}, \frac{C}{C^1}$ , ec. vanno con-  
 « tinuamente diminuendo, di maniera che questa  
 « serie è necessariamente *convergente*.

« Ora, io dico che la differenza tra due  
 « frazioni consecutive è tanto piccola quanto è  
 « possibile, di modo che tra queste frazioni me-  
 « desime non potrebbe cadere alcun'altra frazio-  
 « ne qualunque, salvo che dessa non avesse un de-  
 « nominatore maggiore di quelli delle due pre-  
 « citate frazioni.

« Imperocchè prendiam, per esempio, le due  
 « frazioni  $\frac{C}{C^1}$ , e  $\frac{D}{D^1}$ , la cui differenza è  $\frac{1}{C^1 D^1}$ , e  
 « supponghiamo, s'è mai possibile, ch' esista  
 « un'altra frazione  $\frac{m}{n}$ , il cui valore cada tra  
 « quelli di queste due frazioni, e nella quale il  
 « denominatore  $n$  sia minore di  $C^1$ , ovvero di  
 «  $D^1$ : dunque, poichè  $\frac{m}{n}$  dee trovarsi tra  $\frac{C}{C^1}$ , e  
 «  $\frac{D}{D^1}$ , bisognerà che la differenza tra  $\frac{m}{n}$ , e  $\frac{C}{C^1}$ ,  
 « la quale è  $\frac{m C^1 - n C}{n C^1}$ , ovvero  $\frac{n C - m C^1}{n C^1}$ , sia  
 « minore di  $\frac{1}{C^1 D^1}$ , differenza tra  $\frac{D}{D^1}$  e  $\frac{C}{C^1}$ ; ma  
 « è chiaro che la prima non può esser minore  
 « di  $\frac{1}{n C^1}$ : dunque, se  $n < D^1$ , dessa sarà ne-  
 « cessariamente maggiore di  $\frac{1}{C^1 D^1}$ : parimente la

« differenza tra  $\frac{m}{n}$ , e  $\frac{D}{D'}$  non potendo esser mi-  
 « nore di  $\frac{1}{n D'}$ , sarà necessariamente maggio-  
 « re di  $\frac{1}{C' D'}$  se  $n < C'$ , in luogo che dessa do-  
 « vrebbe' esser minore.

« 120. Vediamo adesso di quanto ciascuna  
 « frazione della serie  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ , ec., si approssime-  
 « rà al valore della quantità  $a$ . Per questo os-  
 « serveremo che le formule trovate nel n.º 117.  
 « danno

$$a = \frac{Ab + 1}{A'b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B'c + A'}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C'd + B'}$$

$$a = \frac{De + C}{D'e + C'} ;$$

« e così di seguito.

« Dunque, se si vuol sapere di quanto la fra-  
 « zione  $\frac{C}{C'}$ , per esempio, si approssima alla quan-

« tità  $a$ , cercheremo la differenza tra  $\frac{C}{C'}$ , e  $a$  ;

« prendendo per  $a$  la quantità  $\frac{Cd + B}{C'd + B'}$ , avremo

$$a - \frac{C}{C'} = \frac{Cd + B}{C'd + B'} - \frac{C}{C'} = \frac{BC' - CB'}{C'(C'd + B')} = \frac{1}{C'(C'd + B')}$$

« a motivo di  $BC' - CB' = 1$  (119): ora, sic-  
 « come si suppone che  $\delta$  sia il valore approssi-  
 « mativo di  $d$ , di tal maniera che la differenza  
 « tra  $d$ , e  $\delta$  sia minore dell'unità (111), è chia-  
 « ro che il valore di  $d$  sarà contenuto tra i due  
 « numeri  $\delta$ , e  $\delta \pm 1$  (il segno superiore essendo  
 « pel caso ove il valore approssimativo  $\delta$  è minore  
 « del vero  $d$ , ed il segno inferior per il caso ove  
 «  $\delta$  sia maggiore di  $d$ ), e che in conseguenza il  
 « valore di  $C'd + B'$  sarà pur contenuto tra i due  
 « seguenti  $C'\delta + B'$  e  $C'(\delta \pm 1) + B'$ , vale  
 « a dire tra  $D'$ , e  $D' \pm C'$ : dunque la differen-  
 « za  $a - \frac{C}{C'}$  sarà contenuta tra questi due limiti  
 «  $\frac{1}{C'D'}$ ,  $\frac{1}{C'(D' \pm C')}$ ; d'onde potrem giudicare  
 « della quantità dell'approssimazione della fra-  
 « zione  $\frac{C}{C'}$ .

« 121. In generale, avremo

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'b}$$

$$a = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c + A')}$$

$$a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd + B')}$$

$$a = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e + C')};$$

« e così di seguito.

« Ora, se si suppone che i valori approssi-  
 « mativi  $\alpha$ ,  $\xi$ ,  $\gamma$ , ec. sien sempre presi minori  
 « dei veri, questi numeri saranno tutti positivi,  
 « come pure le quantità  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec. (111); dun-

« que i numeri  $A, B, C, \text{ec.}, A', B', C', \text{ec.},$   
 « saranno pure tutti positivi; dal che ne segue  
 « che le differenze tra la quantità  $a$ , e le frazio-  
 « ni  $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \text{ec.}$  saranno alternativamen-  
 « te positive, e negative, e vale a dire che que-  
 « ste frazioni saranno alternativamente minori,  
 « e maggiori della quantità  $a$ .

« Di più, siccome  $b > \epsilon, c > \gamma, d > \delta, \text{ec.}$   
 « (*ipot.*), avremo

$$b > B', B'c + A' > B'\gamma + A' > C',$$

$$C'd + B' > C'\delta + B' > D', \text{ec.};$$

« e siccome  $b < \epsilon + 1, c < \gamma + 1, d < \delta + 1;$   
 « avremo altresì

$$b < B' + 1, B'c + A' < B'(\gamma + 1) + A' < C' + B',$$

$$C'd + B' < C'(\delta + 1) + B' < D' + C', \text{ec.},$$

« di maniera che gli errori, che si commettereb-  
 « bero prendendo le frazioni  $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \text{ec.}$   
 « per il valore di  $a$ , sarebbero rispettivamente  
 « minori di

$$\frac{1}{A'B'}, \frac{1}{B'C'}, \frac{1}{C'D'}, \text{ec.},$$

« ma maggiori di

$$\frac{1}{A'(B' + A')}, \frac{1}{B'(C' + B')}, \frac{1}{C'(D' + C')}, \text{ec.};$$

« dal che si fa manifesto quanto questi errori son  
 « piccoli, e quanto dessi vanno diminuendo da  
 « una frazione all'altra.

« Ma v'è di più; poichè le frazioni  $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \text{ec.}$   
 « sono alternativamente minori, e maggiori della

« quantità  $a$ ; egli è chiaro che il valore di que-  
 « sta quantità si troverà sempre tra due frazioni  
 « consecutive qualunque; ora, noi abbiám veduto  
 « quì sopra (119) esser impossibile che tra due  
 « tali frazioni possa trovarsi un'altra frazione  
 « qualunque, che abbia un denominatore minore  
 « d'uno di quelli di queste due frazioni; dal che  
 « ne possiam concludere che ciascuna delle fra-  
 « zioni, di cui si tratta, esprime la quantità  $a$   
 « più esattamente di quello che non potrebbe  
 « farlo qualunque altra frazione, il cui denomi-  
 « natore fosse minore di quello della frazione se-  
 « guente, e vale a dire, che la frazione  $\frac{C}{C'}$ , per  
 « esempio, esprimerà il valore di  $a$  più esatta-  
 « mente di qualunque altra frazione  $\frac{m}{n}$ , nella  
 « quale  $n$  fosse minore di  $D$ .

« 122. Se i valori approssimativi  $x, y, z$ , ec.  
 « son tutti, oppure in parte maggiori dei veri,  
 « allora, fra questi numeri, ve ne saranno neces-  
 « sariamente dei negativi (111); il che renderà  
 « pur negativi alcuni dei termini delle serie  $A,$   
 «  $B, C$ , ec.  $A', B', C'$ , ec.; in conseguenza le  
 « differenze tra le frazioni  $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$ , ec., e la  
 « quantità  $a$  non saranno più alternativamente po-  
 « sitive, e negative, come nel caso del numero  
 « precedente; di tal maniera che queste frazio-  
 « ni non avranno più il vantaggio di dar sempre  
 « dei limiti in *più*, ed in *meno* della quantità  $a$ ;  
 « vantaggio d'un'importanza grandissima, e che  
 « dee in conseguenza far preferir sempre nella  
 « pratica le frazioni *continue* ove i denominatori  
 « saranno tutti positivi. Così noi non conside-  
 «

« remo più in seguito che delle frazioni di questa  
« specie .

« 123. Consideriam dunque la serie

$$\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1}, \frac{C}{C^1}, \frac{D}{D^1}, \text{ ec. ,}$$

« nella quale le frazioni sono alternativamente  
« minori, e maggiori della quantità  $a$ ; è chiaro  
« che potrem decompor questa serie nelle due  
« seguenti

$$\frac{A}{A^1}, \frac{C}{C^1}, \frac{E}{E^1} \text{ ec.}$$

$$\frac{B}{B^1}, \frac{D}{D^1}, \frac{F}{F^1} \text{ ec. :}$$

« la prima sarà composta di frazioni tutte minori  
« di  $a$ , e che anderanno aumentando verso la  
« quantità  $a$ ; la seconda sarà composta di frazio-  
« ni tutte maggiori di  $a$ , ma che anderanno di-  
« minuendo verso questa medesima quantità .  
« Esaminiamo adesso ciascuna di queste due se-  
« rie in particolare: nella prima avremo, (117)  
« e (119),

$$\frac{C}{C^1} - \frac{A}{A^1} = \frac{\gamma}{A^1 C^1},$$

$$\frac{E}{E^1} - \frac{C}{C^1} = \frac{\varepsilon}{C^1 E^1}, \text{ ec. ,}$$

« e nella seconda avremo

$$\frac{B}{B^1} - \frac{D}{D^1} = \frac{\delta}{B^1 D^1},$$

$$\frac{D}{D^1} - \frac{F}{F^1} = \frac{\zeta}{D^1 F^1}, \text{ ec.}$$

« Se i numeri  $\gamma, \delta, \varepsilon, \text{ ec.}$  fossero tutti egua-

« li all'unità, potrebbesi dimostrare, come nel  
 « n.° 119, che tra due frazioni consecutive qualun-  
 « que dell'una, o dell'altra delle serie precedenti  
 « non potrebbe mai trovarsi alcun'altra frazione,  
 « il cui denominatore fosse minore di quelli di  
 « queste due frazioni; ma non sarà lo stesso allor-  
 « chè i numeri  $\gamma, \delta, \varepsilon$ , ec. saranno diversi dall'unità,  
 « poichè in questo caso potremo inserire tra le  
 « frazioni, di cui si tratta, tante frazioni *interme-*  
 « *die*, quante unità vi saranno nei numeri  $\gamma - 1$ ,  
 «  $\delta - 1$ ,  $\varepsilon - 1$ , ec., e perciò altro non dovrem  
 « fare che porre successivamente nei valori di C,  
 « e C' (117) i numeri 1, 2, 3, . . . .  $\gamma - 1$  in  
 « luogo di  $\gamma$ ; e parimente nei valori di D, e D',  
 « i numeri 1, 2, 3, . . . .  $\delta - 1$  in luogo di  $\delta$ ; e così  
 « in seguito.

« 124. Supponghiam, per esempio, che  $\gamma$  sia  
 « = 4; avremo

$$C = 4B + A, \text{ e } C' = 4B' + A',$$

« e potremo inserire tra le frazioni  $\frac{A}{A'}$ , e  $\frac{C}{C'}$  tre

« frazioni *intermedie*, le quali saranno

$$\frac{B + A}{B' + A'}, \quad \frac{2B + A}{2B' + A'}, \quad \frac{3B + A}{3B' + A'}.$$

« È chiaro che i denominatori di queste fra-  
 « zioni formano una serie crescente per differenze  
 « eguali da  $A'$  fino a  $C'$ , ed i numeratori da  $A$   
 « fino a  $C$ ; e noi andiamo a vedere che le frazioni

« stesse crescono pure continuamente da  $\frac{A}{A'}$  fino

« a  $\frac{C}{C'}$ ; di maniera che sarebbe adesso impossibile

« d'insertir nella serie

$$\frac{A}{A^1}, \frac{B+A}{B^1+A^1}, \frac{2B+A}{2B^1+A^1}, \frac{3B+A}{3B^1+A^1}, \frac{4B+A}{4B^1+A^1}, \text{oppure } \frac{C}{C^1},$$

« alcuna frazione, il cui valore cadesse tra quelli  
 « delle due frazioni consecutive, e di cui il deno-  
 « minator si trovasse pure tra quelli delle frazio-  
 « ni medesime. Poichè, se si prendon le differen-  
 « ze tra le frazioni precedenti, avremo, a motivo  
 « di  $BA^1 - AB^1 = 1$ ,

$$\frac{B+A}{B^1+A^1} - \frac{A}{A^1} = \frac{1}{A^1(B^1+A^1)}$$

$$\frac{2B+A}{2B^1+A^1} - \frac{B+A}{B^1+A^1} = \frac{1}{(B^1+A^1)(2B^1+A^1)}$$

$$\frac{3B+A}{3B^1+A^1} - \frac{2B+A}{2B^1+A^1} = \frac{1}{(2B^1+A^1)(3B^1+A^1)}$$

$$\frac{C}{C^1} - \frac{3B+A}{3B^1+A^1} = \frac{1}{(3(B^1+A^1)C^1)},$$

« dalle quali si vede immediatamente che le fra-  
 « zioni  $\frac{A}{A^1}, \frac{B+A}{B^1+A^1}$ , ec. vanno aumentando, poi-

« chè le lor differenze son tutte positive; in segui-  
 « to, siccome queste differenze sono eguali all'unità  
 « divisa per il prodotto di due denominatori, po-  
 « trem dimostrare, mediante un ragionamento  
 « analogo a quello, che abbiamo fatto nel n.º 119,  
 « ch'è impossibile che tra due frazioni consecutive  
 « della serie precedente possa cadere una frazione

« qualunque  $\frac{m}{n}$ , se il denominatore  $n$  cade tra i  
 « denominatori di queste frazioni, ovvero in ge-  
 « nerale, se desso è minore del maggior dei due  
 « denominatori.

« Di più, siccome le frazioni, di cui parlia-

« mo, sono tutte minori del vero valore di  $a$ , e  
 « la frazione  $\frac{B}{B'}$  è maggiore, si fa evidente che  
 « ciascuna di queste frazioni s'approssimerà alla  
 « quantità  $a$ , di maniera che la differenza sarà  
 « minore di quella della frazione medesima, e  
 « della frazione  $\frac{B}{B'}$ : ora si trova

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{C'B'}$$

« Dunque, poichè queste differenze son pure  
 « eguali all'unità divisa per il prodotto dei deno-  
 « minatori, vi potremo applicare il medesimo ra-  
 « gionamento del n.º 119, per dimostrare che  
 « alcuna frazione  $\frac{m}{n}$  non potrebbe cadere tra una

« qualunque della frazioni  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B+A}{B'+A'}$ ,  $\frac{2B+A}{2B'+A'}$ ,

« ec., e la frazione  $\frac{B}{B'}$ , se il denominatore  $n$  è mino-

« re di quello della frazione medesima; dal che  
 « ne segue che ciascuna di queste frazioni s'ap-  
 « prossima più alla quantità  $a$  di quel che non

« potrebbe farlo qualunque altra frazione minore  
 « di  $a$ , e che avesse un denominatore più picco-  
 « lo, e vale a dire, che fosse concepita in più  
 « semplici termini.

« 125. Noi non abbiamo considerato nel nu-  
 « mero precedente che le frazioni *intermedie* tra  
 «  $\frac{A}{A^1}$ , e  $\frac{C}{C^1}$ : sarebbe lo stesso delle frazioni *inter-*

« *medie* tra  $\frac{C}{C^1}$ , e  $\frac{E}{E^1}$ , tra  $\frac{E}{E^1}$ , e  $\frac{G}{G^1}$ , ec. se  $\varepsilon, \eta$ , ec.

« son dei numeri maggiori dell'unità.

« Possiamo pure applicare all'altra serie  
 «  $\frac{B}{B^1}$ ,  $\frac{D}{D^1}$ ,  $\frac{F}{F^1}$ , ec. tutto ciò, che abbiamo detto rela-

« tivamente alla prima serie  $\frac{A}{A^1}$ ,  $\frac{C}{C^1}$ , ec., di ma-

« niera che, se i numeri  $\delta, \zeta$ , ec. son maggiori  
 « dell'unità, potremo inserire tra le frazioni  $\frac{B}{B^1}$ , e

«  $\frac{D}{D^1}$ , tra  $\frac{D}{D^1}$ , e  $\frac{F}{F^1}$ , ec. differenti frazioni *inter-*

« *medie*, tutte maggiori di  $a$ , ma che anderanno  
 « continuamente diminuendo, e saran tali che  
 « desse esprimeranno la quantità  $a$  più esattamente  
 « di quello che non potrebbe farlo alcun'altra  
 « frazione maggiore di  $a$ , e che fosse concepita in  
 « più semplici termini.

« Di più, se  $\zeta$  è pure un numero maggiore  
 « dell'unità, potrem parimente porre avanti la

« frazione  $\frac{B}{B^1}$  le frazioni  $\frac{A+1}{1}$ ,  $\frac{2A+1}{2}$ ,  $\frac{3A+1}{3}$ ,

« ec. fino a  $\frac{\zeta A+1}{\zeta}$ , cioè  $\frac{B}{B^1}$ ; e queste frazioni ave-

« ranno le medesime proprietà delle altre frazioni  
« *intermedie*.

« In siffatta maniera avrem dunque queste  
« due serie complete di frazioni *convergenti* verso  
« la quantità *a*.

*Frazioni crescenti, e minori di a*

$$\begin{aligned} \frac{A}{A^1}, \frac{B+A}{B^1+A^1}, \frac{2B+A}{2B^1+A^1}, \dots, \frac{(\gamma-1)B+A}{(\gamma-1)B^1+A^1}, \\ \frac{C}{C^1}, \frac{D+C}{D^1+C^1}, \frac{2D+C}{2D^1+C^1}, \dots, \frac{(\varepsilon-1)D+C}{(\varepsilon-1)D^1+C^1}, \\ \frac{E}{E^1}, \frac{F+E}{F^1+E^1} \text{ ec., ec., ec.} \end{aligned}$$

*Frazioni decrescenti, e maggiori di a*

$$\begin{aligned} \frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \dots, \frac{(\xi-1)A+1}{\xi-1}, \\ \frac{B}{B^1}, \frac{C+B}{C^1+B^1}, \frac{2C+B}{2C^1+B^1}, \dots, \frac{(\delta-1)C+B}{(\delta-1)C^1+B^1}, \\ \frac{D}{D^1}, \frac{E+D}{E^1+D^1}, \text{ ec., ec., ec.} \end{aligned}$$

« Se la quantità *a* è *irrazionale*, le due serie  
« precedenti anderanno all'infinito; poichè la serie

« delle frazioni  $\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1}, \frac{C}{C^1}, \text{ ec.}$ , che noi chiamo-

« rem in seguito *frazioni principali*, per distin-  
« guerle dalle frazioni *intermedie*, va di per se  
« medesima all'infinito (117).

« Ma se la quantità *a* è *razionale*, ed eguale  
« ad una frazione qualunque  $\frac{V}{V^1}$ , abbiam veduto  
« nel num.<sup>o</sup> citato che la serie, di cui si tratta,

« sarà terminata, e che l'ultima frazione di que-  
 « sta serie sarà la frazione medesima  $\frac{V}{V^1}$ ; dun-  
 « que questa frazione terminerà pure necessaria-  
 « mente una delle due serie di sopra, ma l'altra  
 « serie potrà sempre andare all'infinito.

« Difatto, supponghiamo che  $\delta$ , sia l'ultimo  
 « denominatore della frazione *continua*, allora  $\frac{D}{D^1}$   
 « sarà l'ultima delle frazioni principali, e la serie  
 « delle frazioni maggiori di  $a$  sarà terminata da  
 « questa medesima frazione  $\frac{D}{D^1}$ ; ora, l'altra se-  
 « rie delle frazioni minori di  $a$  si troverà neces-  
 « sariamente terminata alla frazione  $\frac{C}{C^1}$ , la qua-

« le precede  $\frac{D}{D^1}$ ; ma, per continuarla, altro non  
 « dovrem far che considerare, che il denomina-  
 « re  $\varepsilon$ , il quale dovrebbe seguire l'ultimo deno-  
 « minatore  $\delta$ , sarà  $= \infty$  (111); di maniera che  
 « la frazione  $\frac{E}{E^1}$ , la quale seguirebbe  $\frac{D}{D^1}$ , nella  
 « serie delle frazioni principali, sarebbe

$$\frac{\infty D + C}{\infty D^1 + C^1} = \frac{D}{D^1} :$$

« ora, per la legge delle frazioni intermedie, è  
 « chiaro che, a motivo di  $\varepsilon = \infty$ , potremo inse-

« rire tra le frazioni  $\frac{C}{C^1}$ , e  $\frac{E}{E^1}$  un'infinità di  
 « frazioni intermedie, le quali saranno

$$\frac{D + C}{D^1 + C^1}, \frac{2D + C}{2D^1 + C^1}, \frac{3D + C}{3D^1 + C^1}, \text{ ec.}$$

« Così, in questo caso, potremo, dopo la

« frazione  $\frac{C}{C^1}$  nella prima serie di frazioni, porro  
 « ancora le frazioni intermedie, di cui parliamo,  
 « e continuarle all' infinito.

« 126. *Una frazione espressa da dei numeri  
 « molto grandi essendo data, trovar tutte le fra-  
 « zioni in termini minori, le quali si approssimin  
 « tanto alla verità, che sia impossibile l' appros-  
 « simarvisi di più con delle frazioni più semplici.*

« Questo Problema si risolverà facilmente  
 « colla Teoria, che abbiamo spiegata.

« Cominceremo da ridur la frazione propo-  
 « sta in frazione continua col metodo del n.º 112,  
 « avendo cura di prendere tutti i valori appros-  
 « simativi minori dei veri, perchè i numeri  $\alpha$ ,  
 «  $\zeta$ ,  $\gamma$ , ec. sieno tutti positivi; in seguito, col  
 « mezzo dei numeri trovati  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $\gamma$ , ec. forme-  
 « remo, dietro alle formule del n.º 117, le fra-  
 « zioni  $\frac{A}{A^1}$ ,  $\frac{B}{B^1}$ ,  $\frac{C}{C^1}$ , ec., l' ultima delle quali

« sarà necessariamente la medesima della frazio-  
 « ne proposta; perchè, in questo caso, la fra-  
 « zione *continua* è terminata. Queste frazioni  
 « saranno alternativamente minori, e maggiori  
 « della frazione data, e saranno successivamente  
 « concepite in termini maggiori; e di più desse  
 « saranno tali che ciascuna di queste frazioni  
 « s' approssimerà di più alla frazione data di quel  
 « che non potrebbe mai farlo ogni altra frazione  
 « qualunque, la quale fosse concepita in termini  
 « più semplici. Così avremo con questo mezzo tutte  
 « le frazioni concepite in termini minori della pro-  
 « posta, le quali potranno sodisfare al Problema.

« Che se si vogliono considerar in particolare  
 « le frazioni minori, e le frazioni maggiori della  
 « proposta, inseriremo tra le frazioni precedenti

« tante frazioni intermedie che potremo; e così  
 « formeremo due serie di frazioni convergenti,  
 « l' une tutte minori, le altre tutte maggiori della  
 « data frazione ( 123 , 124 , e 125 ); ciascuna di  
 « queste serie avrà in particolare le medesime  
 « proprietà della serie delle frazioni principali

«  $\frac{A}{A'}$  ,  $\frac{B}{B'}$  ,  $\frac{C}{C'}$  , ec. ; poichè le frazioni in cia-

« scuna serie saran successivamente concepite in  
 « termini maggiori, e ciascuna di esse si appros-  
 « simerà più alla frazion proposta, di quel che  
 « potrebbe farlo alcun' altra frazione, la quale  
 « fosse parimente minore, o maggiore della pro-  
 « posta, ma che fosse però concepita in più sem-  
 « plici termini.

« Del rimanente può accadere che una delle  
 « frazioni *intermedie* d' una serie non si appros-  
 « simi tanto alla frazione data, quanto una delle  
 « frazioni dell' altra serie, benchè concepita in  
 « termini meno semplici di quest' ultima; ecco per-  
 « chè non conviene impiegar le frazioni *interme-*  
 « *die* se non che quando si vuole che le frazioni  
 « cercate sien tutte minori, o tutte maggiori  
 « della data frazione.

« 127. Secondo *La Caille* l' anno solare è  
 « di 365<sup>g</sup> , 5<sup>or.</sup> , 48' , 49'' , ed in conseguenza più  
 « lungo di 5<sup>or.</sup> , 48' , 49'' , dell' anno comune, il quale  
 « è di 365<sup>g</sup> ; se questa differenza fosse esatta-  
 « mente di sei ore, dessa darebbe un giorno alla  
 « fine di quattro anni comuni; ma, se si voglia  
 « sapere precisamente alla fine di quanti anni  
 « comuni questa differenza può produrre un certo  
 « numero di giorni, bisogna cercare il rapporto,  
 « che v' è tra 24<sup>or.</sup> e 5<sup>or.</sup> , 48' , 49'' ; si trova que-  
 « sto rapporto =  $\frac{86400}{20925}$  ; di maniera che si può  
 « dire che alla fine di 86400 anni comuni bisc-

« gnerebbe intercalare 20929 giorni per ridurli a  
 « degli anni tropici (\*).

« Siccome il rapporto di 86400 a 20929 è  
 « espresso in termini molto grandi, proponesi  
 « di trovare in termini minori altri rapporti tanto  
 « approssimanti a questo, quanto riesca possibile.

« Ridurremo perciò la frazione  $\frac{86400}{20929}$  a fra-  
 « zione *continua* colla regola data nel n.° 112,  
 « la quale è la stessa di quella, che serve a tro-  
 « vare il massimo comun divisore di due numeri  
 « dati: avremo

$$\begin{array}{r}
 20929 \overline{) 86400} \quad 4 = \alpha \\
 \underline{83716} \\
 2684 \overline{) 20929} \quad 7 = \epsilon \\
 \underline{18788} \\
 2141 \overline{) 2684} \quad 1 = \gamma \\
 \underline{2141} \\
 543 \overline{) 2141} \quad 3 = \delta \\
 \underline{1629} \\
 512 \overline{) 543} \quad 1 = \epsilon \\
 \underline{512} \\
 31 \overline{) 512} \quad 16 = \zeta \\
 \underline{496} \\
 16 \overline{) 31} \quad 1 = \eta \\
 \underline{16} \\
 15 \overline{) 16} \quad 1 = \theta \\
 \underline{15} \\
 1 \overline{) 15} \quad 15 = \gamma \\
 \underline{15} \\
 0.
 \end{array}$$

---

(\* ) Si chiama *anno solare*, ovvero *anno tropico* l'intervallo di tempo, ch'è necessario per ricondurre

« Conoscendo in tal modo tutti i quozienti  $\alpha, \beta, \gamma,$   
 « ec., formerem facilmente la serie  $\frac{A}{A^1}, \frac{B}{B^1},$  ec.  
 « nella maniera seguente:

$$4, \quad 7, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 16, \quad 1, \quad 1, \quad 15,$$

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{29}{7}, \quad \frac{33}{8}, \quad \frac{128}{31}, \quad \frac{161}{39}, \quad \frac{2704}{655}, \quad \frac{2865}{693}, \quad \frac{5569}{1349}, \quad \frac{86400}{20929},$$

« ove si vede che l'ultima frazione è la medesi-  
 « ma che la proposta.

» Per facilitare la formazione di queste fra-  
 » zioni, scriveremo primieramente, com'io l'ho  
 « fatto, la serie dei quozienti 4, 7, 1, ec., e por-  
 » remo al di sotto di questi quozienti le frazio-  
 » ni  $\frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8},$  ec., che ne resultano.

« La prima frazione avrà sempre per nu-  
 » meratore il numero, ch'è al di sopra, e per  
 « denominator l'unità.

« La seconda avrà per numeratore il pro-  
 « dotto del numero, ch'è al di sopra, per il  
 « numerator della prima, più l'unità, e per de-  
 « nominatore il numero medesimo, ch'è al di  
 « sopra.

la Terra alla medesima posizione in riguardo del So-  
 le. Gli *Astronomi* hanno concluso dalle osservazioni  
 che questo spazio di tempo è di 365 giorni, 5 ore, 48  
 minuti, e 49 secondi; e segue da ciò che alla fine di  
 365 giorni, ossia d'un' *anno civile*, mancano 5 ore,  
 48 minuti, e 49 secondi perchè la Terra vada a finire  
 la sua rivoluzione intorno del Sole. Il *complemento* di  
 tal mancanza si trova compreso nell'anno seguente.  
 Se desso fosse precisamente di 6 ore, 4 rivoluzioni  
 riempirebber 4 anni, ed un giorno.

I giorni, che si aggiungono per accordar le ri-  
 voluzioni della Terra con gli anni civili, si chiamano  
*giorni intercalari*, ovvero *intercalazioni*.

« La terza avrà per numeratore il prodotto  
 « del numero, ch'è al di sopra per il numeratore  
 « della seconda, più quel della prima, e pari-  
 « mente per denominatore il prodotto del nume-  
 « ro ch'è al di sopra, pel denominatore della  
 « seconda, più quel della prima.

« Ed in generale, ciascuna frazione avrà per  
 « numeratore il prodotto del numero, che resta  
 « al di sopra, per il numeratore della frazion pre-  
 « cedente, più quello della frazione avanti la  
 « precedente; e per denominatore il prodotto del  
 « medesimo numero per il denominatore della  
 « frazion precedente, più quello della frazione  
 « avanti la precedente.

« Così  $29 = 7 \cdot 4 + 1$ ,  $7 = 7$ ,  $33 = 1 \cdot 29 + 4$ ,  
 «  $8 = 1 \cdot 7 + 1$ ,  $128 = 3 \cdot 33 + 29$ ,  $31 = 3 \cdot 8 + 7$ ; e  
 « così di seguito: il che s'accorda con le formule  
 « del n.º 117.

« Adesso si fa manifesto dalle frazioni  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{29}{7}$ ,  
 «  $\frac{33}{8}$ , ec. che l'*intercalazion* la più semplice è  
 « quella d'un' giorno in quattro anni comuni, il  
 « che è il fondamento del *Calendario Giuliano*;  
 « ma che ci approssimeremo di più all'esattezza  
 « *intercalando* sette giorni nel corso di ventinove  
 « anni comuni, oppure otto nello spazio di tren-  
 « tatre anni; e così di seguito.

« Si vede di più che, siccome le frazioni  $\frac{4}{7}$ ,  
 «  $\frac{29}{7}$ ,  $\frac{33}{8}$ , sono alternativamente minori, e maggiori  
 « della frazione  $\frac{86400}{20929}$ , oppure  $\frac{24^{\text{or}}}{5^{\text{or}}, 48', 49''}$ , l'*inter-*  
 « *calazione* d'un giorno in quatt'anni sarà trop-  
 « po forte, quella di sette giorni in ventinove anni  
 « troppo debole, quella di otto giorni in trentatre  
 « anni troppo forte, e così di seguito; ma ciascuna  
 « di queste *intercalazioni* sarà sempre la più esat-  
 « ta che sia possibile nel medesimo spazio di tempo.

« Ora , se si dispongono nelle due serie partico-  
 « lari le frazioni minori, e le frazioni maggiori  
 « della frazione data, potremo ancora inserire dif-  
 « ferenti frazioni intermedie per completare le  
 « serie; e per questo seguiremo il medesimo me-  
 « todo notato di sopra, ma prendendo successiva-  
 « mente in luogo di ciascun numero della serie  
 « superiore tutti i numeri interi minori di questo  
 « numero (allorchè ve ne sono).

« Così, considerando primieramente le frazio-  
 « ni crescenti

$$4, 1, 1, 1, 15,$$

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{86499}{20929},$$

« si vede che a motivo che l'unità è al disopra  
 « della seconda, della terza, e della quarta, non  
 « potrem porre alcuna frazione intermedia nè  
 « tra la prima, e la seconda, nè tra la seconda,  
 « e la terza, nè tra la terza, e la quarta; ma sic-  
 « come l'ultima frazione ha al disopra di lei il  
 « numero 15, potremo, tra questa frazione, e la  
 « precedente, porre quattordici frazioni interme-  
 « die, i cui numeratori formeranno la progres-  
 « sione per differenze  $2865 + 5569, 2865 + 2.5569,$   
 «  $2865 + 3.5569, ec.,$  e di cui i denominatori for-  
 « meranno pure la progressione  $694 + 1349,$   
 «  $694 + 2.1349, 694 + 3.1349, ec.$

« Con questo mezzo la serie completa delle  
 « frazioni crescenti sarà

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{161}{39}, \frac{2865}{694}, \frac{8434}{2043}, \frac{14003}{3392}, \frac{10572}{4741}, \frac{25141}{6090}, \frac{30710}{7439},$$

$$\frac{36279}{8788}, \frac{41848}{10137}, \frac{47417}{11486}, \frac{52986}{12835}, \frac{58555}{14184}, \frac{64124}{15533}, \frac{69693}{16882}, \frac{75262}{18231},$$

$$\frac{80831}{19580}, \frac{86400}{20929}.$$

« E siccome l'ultima frazione è la medesima  
 « che la frazione data, è chiaro che questa serie  
 « non può essere spinta più avanti.

« Da ciò si fa manifesto che , se non si voglio:  
 « no ammettere che delle *intercalazioni* , le quali  
 « pecchino per eccesso , le più semplici , e le più  
 » esatte saranno quelle d' un giorno in quattr'anni ,  
 » ovvero di otto giorni in trentatre anni , oppure  
 » di trentanove in centosessantun' anni , e così di  
 » seguito .

« Consideriamo adesso le frazioni decrescenti

$$7, 3, 16, 1,$$

$$\frac{29}{7}, \frac{128}{31}, \frac{2704}{655}, \frac{5569}{1349},$$

« e primieramente , a causa del numero 7, il quale  
 « è al disopra della prima frazione , potremo porre  
 « sei altre avanti di questa , i cui numeratori forme-  
 « ranno la progressione per differenze  $4 + 1$  ,  
 «  $2 \cdot 4 + 1, 3 \cdot 4 + 1$  , ec., e di cui i denominatori  
 « formeranno la progressione 1, 2, 3, ec.; pari-  
 « mente , a motivo del numero 3, potremo porre  
 « tra la prima , e la seconda frazione due frazio-  
 « ni intermedie ; tra la seconda , e la terza ne  
 « potrem porre 15, a motivo del numero 16, il  
 « quale è al disopra della terza ; ma tra questa  
 « quì , e l' ultima non potremo inserirvene alcuna ,  
 « a motivo che il numero , il quale resta al disopra ,  
 « è l' unità .

« Di più , bisogna osservare che , siccome la  
 « serie precedente non è terminata dalla frazione  
 « data , potremo ancora continuarla tanto lontano  
 « quanto si voglia , come lo abbiám fatto vedere  
 « nel n.º 126. Così avremo queste serie di frazioni  
 « decrescenti :

$$\frac{6}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}, \frac{29}{7}, \frac{62}{15}, \frac{95}{23}, \frac{128}{31}, \frac{269}{70}, \frac{450}{109}, \frac{611}{148}, \frac{772}{189},$$

$$\frac{933}{226}, \frac{1094}{265}, \frac{1255}{304}, \frac{1416}{343}, \frac{1577}{382}, \frac{1738}{421}, \frac{1899}{460}, \frac{2060}{499}, \frac{2221}{538},$$

$$\frac{2382}{577}, \frac{2543}{616}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{3026}{733}, \frac{3187}{772}, \frac{3348}{811}, \frac{3509}{850}, \frac{3670}{889},$$

$$\frac{3831}{928}, \frac{3992}{967}, \frac{4153}{1006}, \frac{4314}{1045}, \frac{4475}{1084}, \frac{4636}{1123}, \frac{4797}{1162}, \frac{4958}{1201}, \frac{5119}{1240},$$

$$\frac{437569}{105224}, \text{ ec. ,}$$

« le quali son tutte maggiori della frazion pro-  
 « posta, e se n'approssiman più di qualunque altra  
 « frazione, che fosse concepita in termini più  
 « semplici.

« Possiamo concluder da ciò che, se non si vo-  
 « lesse aver riguardo che alle *intercalazioni*, le  
 « quali peccassero per difetto, le più semplici, e  
 « le più esatte sarebbero quelle d'un giorno in  
 « cinque anni, ovvero di due giorni in nove anni,  
 « oppure di tre giorni in tredici anni, ec.

« Nel *Calendario Gregoriano s'intercalano*  
 « solamente novantasette giorni in quattrocent'an-  
 « ni; si fa manifesto dalla *Tavola* precedente che  
 « ci approssimeremmo con molto più d'esattezza  
 « *intercalando* centonove giorni in quattrocento-  
 « cinquanta anni.

« Ma bisogna osservare che nella *Riforma*  
 « *Gregoriana* ci siam serviti della determinazione  
 « dell'anno dato da *Copernico*, la quale è di 365  
 « giorni, 5 ore, 49 minuti, e 20 secondi. Impie-  
 « gando quest'elemento, avremo in luogo della  
 « frazione  $\frac{86400}{20929}$  la seguente  $\frac{86400}{20960}$ , ovvero  $\frac{540}{131}$ , per  
 « mezzo della quale si troverebbero, mediante  
 « il metodo precedente, i quozienti 4, 8, 5, 3,  
 « e da ciò queste frazioni *principali*,

$$4, 8, 5, 3$$

$$\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{169}{41}, \frac{540}{131}$$

« le quali sono, ad eccezione delle due prime,  
 « assai differenti da quelle, che abbiám trovate  
 « di sopra. Tuttavia non trovasi tra queste fra-  
 « zioni la frazione  $\frac{400}{97}$  adottata nel *Calendario*  
 « *Gregoriano*, e questa frazione non si trova tam-  
 « poco tra le frazioni intermedie, che potrebbero  
 « inserirsi nelle due serie  $\frac{4}{1}, \frac{169}{41}$ , e  $\frac{33}{8}, \frac{540}{131}$ ; poichè  
 « è chiaro che dessa non potrebbe cadere che tra  
 « queste due ultime frazioni, fra le quali, a mo-

« tivo del numero 3, il quale è al disopra della  
 « frazione  $\frac{54^0}{131}$ , posson cadere due frazioni inter-  
 « medie, che saranno  $\frac{202}{49}$ , e  $\frac{371}{90}$ ; di dove si fa ma-  
 « nifesto che ci saremmo approssimati ad una  
 « maggiore esattezza se nella *Riforma Gregoriana*  
 « si fosse prescritto di non *intercalare* che novanta  
 « giorni nell'intervallo di trecento-settantun'anni.

« Se si riducesse la frazione  $\frac{4^00}{97}$  ad aver per  
 « numeratore il numero 86400, dessa diverrà  
 «  $\frac{86400}{20952}$ , il che supporrebbe l'anno *tropico* di 365  
 « giorni, 5 ore, 49 minuti, e 12 secondi.

« In questo caso l'*intercalazion Gregoriana*  
 « sarebbe affatto esatta; ma siccome le osserva-  
 « zioni danno l'anno più corto di 23 secondi, è  
 « chiaro che bisognerà necessariamente alla fine  
 « d'un certo spazio di tempo introdurre una nuo-  
 « va *intercalazione*.

« Se volessimo stare alla determinazion di  
 « *Lacaille*, siccome il denominatore 97 della  
 « frazione  $\frac{4^00}{97}$  si trova tra i denominatori della  
 « quinta, e della sesta delle frazioni principali  
 « digià trovate, segue da ciò, che abbiám dimo-  
 « strato nel n.º 122, che la frazione  $\frac{161}{39}$  approssi-  
 « merebbesi più al vero che la frazione  $\frac{4^00}{97}$ : del  
 « rimanente, siccome gli *Astronomi* sono ancora  
 « divisi sulla vera lunghezza dell'anno, noi ci  
 « asterrem dal decidere sopra questo argomento;  
 « d'altronde non abbiamo avuto altr'oggetto nelle  
 « particolarità, che abbiamo dedotte, se non che  
 « di facilitare i mezzi di porsi al fatto delle fra-  
 « zioni *continue*, e dei loro usi: in questa veduta,  
 « aggiungeremo ancora l'esempio seguente.

« 128. Abbiám di già data (116) la frazione  
 « *continua*, la qual esprime il rapporto della cir-  
 « conferenza del circolo al diametro, in quanto-  
 « chè dessa resulta dalla frazion di *Ludolph*; così

« altro non dovrem fare che calcolare, colla ma-  
 « niera insegnata nell' esempio precedente, la serie  
 « delle frazioni convergenti verso questo rapporto  
 « medesimo, la quale sarà

$$\begin{array}{cccccccc}
 3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, & 1, & 1, & 2, \\
 \frac{3}{1} & \frac{22}{7} & \frac{333}{106} & \frac{355}{113} & \frac{103993}{33102} & \frac{104348}{33215} & \frac{208341}{66317} & \frac{312689}{99534} & \frac{811719}{265381} \\
 1, & 3, & 1, & 14, & 2, & 1, & & & \\
 \frac{1146408}{364913} & \frac{4272943}{1360120} & \frac{5419351}{1725033} & \frac{80143857}{26510582} & \frac{165707065}{52746197} & \frac{245850922}{78265779} & & & \\
 1, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & & & \\
 \frac{411557987}{131002976} & \frac{1068066896}{340262731} & \frac{2549491779}{811528438} & \frac{6167950454}{1963319607} & \frac{14885392687}{4735167632} & & & & \\
 1, & 84, & 2, & 1, & & & & & \\
 \frac{21053343141}{6701487259} & \frac{1783366216531}{567663097108} & \frac{3587785776203}{1142027682075} & \frac{5371151992734}{1709690779484} & & & & & \\
 1, & 15, & 3, & & & & & & \\
 \frac{8058937765937}{2851718461558} & \frac{139755218526789}{44485467702853} & \frac{428221593349304}{126308121570117} & & & & & & \\
 13, & 1, & 4, & & & & & & \\
 \frac{5706674032067741}{1816491048114374} & \frac{6144899725112045}{1952799169684491} & \frac{30246273033735931}{9027687726852338} & & & & & & \\
 2, & & 6, & & & & & & \\
 \frac{66627445502888887}{21208174623389167} & \frac{430010036501080243}{136876733467187340} & & & & & & & \\
 6, & & 1. & & & & & & \\
 \frac{2646693125139304345}{842468587426513207} & \frac{3076704671730373583}{979345322873700547} & & & & & & &
 \end{array}$$

« Queste frazioni saranno dunque alterna-  
 « tivamente maggiori, e minori del vero rapporto  
 « della circonferenza al diametro, e vale a dire,  
 « che la prima  $\frac{3}{7}$  sarà minore, la seconda  $\frac{22}{7}$  mag-  
 « giore, e così di seguito; e ciascuna di esse si  
 « approssimerà di più al valor vero di quel che  
 « non potrebbe mai farlo qualunque altra fra-  
 « zione, la quale fosse espressa in termini più sem-  
 « plici, oppure, in generale, che avesse un deno-  
 « minatore minore del denominatore della frazio-  
 « ne seguente; di maniera che possiamo esser  
 « certi che la frazione  $\frac{3}{7}$  si approssima più al vero

« di quel che non può farlo alcun'altra frazione,  
 « il cui denominatore fosse minore di 7; pari-  
 « mente la frazione  $\frac{2}{7}$  approssimerassi più al vero  
 « di qualunque altra frazione, il cui denomina-  
 « tore fosse minore di 106; e così delle altre.

« Quanto all'errore di ciascuna frazione,  
 « desso sarà sempre minore dell'unità divisa per  
 « il prodotto del denominatore di questa frazione  
 « per quello della frazione seguente. Così l'er-  
 « rore della frazione  $\frac{1}{7}$  sarà minore di  $\frac{1}{7}$ ; quello  
 « della frazione  $\frac{2}{7}$  sarà minore di  $\frac{1}{7 \cdot 106}$ ; e così di  
 « seguito. Ma nel medesimo tempo l'errore di  
 « ciascuna frazione sarà maggiore dell'unità di-  
 « visa pel prodotto del denominatore di questa  
 « frazione per la somma di questo denominatore,  
 « e del denominatore della frazione seguente; di  
 « maniera che l'errore della frazione  $\frac{3}{7}$  sarà mag-  
 « gior di  $\frac{1}{7}$ ; quello della frazione  $\frac{2}{7}$  sarà mag-  
 « gior di  $\frac{1}{7 \cdot 113}$ ; e così di seguito (121).

« Se si volessero adesso separar le frazioni  
 « minori del rapporto della circonferenza al dia-  
 « metro dalle maggiori, ciò si potrebbe fare inse-  
 « rendovi le convenevoli frazioni intermedie, onde  
 « formare due serie di frazioni, le une crescenti,  
 « e le altre decrescenti verso il vero rapporto,  
 « di cui si tratta: avrebbesi in tal maniera

*Frazioni minori di  $\frac{\text{circonf.}}{\text{diamet.}}$*

$\frac{3}{7} > \frac{25}{8} > \frac{47}{15} > \frac{69}{22} > \frac{91}{29} > \frac{113}{36} > \frac{135}{43} > \frac{157}{50} > \frac{179}{57} > \frac{201}{64} > \frac{223}{71} > \frac{245}{78} > \frac{267}{85} >$   
 $\frac{289}{92} > \frac{311}{99} > \frac{333}{106} > \frac{355}{113} > \frac{377}{120} > \frac{399}{127} > \frac{421}{134} > \frac{443}{141} > \frac{465}{148} > \frac{487}{155} > \frac{509}{162} > \frac{531}{169} > \frac{553}{176} > \frac{575}{183} > \frac{597}{190} > \frac{619}{197} > \frac{641}{204} > \frac{663}{211} > \frac{685}{218} > \frac{707}{225} > \frac{729}{232} > \frac{751}{239} > \frac{773}{246} > \frac{795}{253} > \frac{817}{260} > \frac{839}{267} > \frac{861}{274} > \frac{883}{281} > \frac{905}{288} > \frac{927}{295} > \frac{949}{302} > \frac{971}{309} > \frac{993}{316} > \frac{1015}{323} > \frac{1037}{330} > \frac{1059}{337} > \frac{1081}{344} > \frac{1103}{351} > \frac{1125}{358} > \frac{1147}{365} > \frac{1169}{372} > \frac{1191}{379} > \frac{1213}{386} > \frac{1235}{393} > \frac{1257}{400} > \frac{1279}{407} > \frac{1301}{414} > \frac{1323}{421} > \frac{1345}{428} > \frac{1367}{435} > \frac{1389}{442} > \frac{1411}{449} > \frac{1433}{456} > \frac{1455}{463} > \frac{1477}{470} > \frac{1499}{477} > \frac{1521}{484} > \frac{1543}{491} > \frac{1565}{498} > \frac{1587}{505} > \frac{1609}{512} > \frac{1631}{519} > \frac{1653}{526} > \frac{1675}{533} > \frac{1697}{540} > \frac{1719}{547} > \frac{1741}{554} > \frac{1763}{561} > \frac{1785}{568} > \frac{1807}{575} > \frac{1829}{582} > \frac{1851}{589} > \frac{1873}{596} > \frac{1895}{603} > \frac{1917}{610} > \frac{1939}{617} > \frac{1961}{624} > \frac{1983}{631} > \frac{2005}{638} > \frac{2027}{645} > \frac{2049}{652} > \frac{2071}{659} > \frac{2093}{666} > \frac{2115}{673} > \frac{2137}{680} > \frac{2159}{687} > \frac{2181}{694} > \frac{2203}{701} > \frac{2225}{708} > \frac{2247}{715} > \frac{2269}{722} > \frac{2291}{729} > \frac{2313}{736} > \frac{2335}{743} > \frac{2357}{750} > \frac{2379}{757} > \frac{2401}{764} > \frac{2423}{771} > \frac{2445}{778} > \frac{2467}{785} > \frac{2489}{792} > \frac{2511}{799} > \frac{2533}{806} > \frac{2555}{813} > \frac{2577}{820} > \frac{2599}{827} > \frac{2621}{834} > \frac{2643}{841} > \frac{2665}{848} > \frac{2687}{855} > \frac{2709}{862} > \frac{2731}{869} > \frac{2753}{876} > \frac{2775}{883} > \frac{2797}{890} > \frac{2819}{897} > \frac{2841}{904} > \frac{2863}{911} > \frac{2885}{918} > \frac{2907}{925} > \frac{2929}{932} > \frac{2951}{939} > \frac{2973}{946} > \frac{2995}{953} > \frac{3017}{960} > \frac{3039}{967} > \frac{3061}{974} > \frac{3083}{981} > \frac{3105}{988} > \frac{3127}{995} > \frac{3149}{1002} > \frac{3171}{1009} > \frac{3193}{1016} > \frac{3215}{1023} > \frac{3237}{1030} > \frac{3259}{1037} > \frac{3281}{1044} > \frac{3303}{1051} > \frac{3325}{1058} > \frac{3347}{1065} > \frac{3369}{1072} > \frac{3391}{1079} > \frac{3413}{1086} > \frac{3435}{1093} > \frac{3457}{1100} > \frac{3479}{1107} > \frac{3501}{1114} > \frac{3523}{1121} > \frac{3545}{1128} > \frac{3567}{1135} > \frac{3589}{1142} > \frac{3611}{1149} > \frac{3633}{1156} > \frac{3655}{1163} > \frac{3677}{1170} > \frac{3699}{1177} > \frac{3721}{1184} > \frac{3743}{1191} > \frac{3765}{1198} > \frac{3787}{1205} > \frac{3809}{1212} > \frac{3831}{1219} > \frac{3853}{1226} > \frac{3875}{1233} > \frac{3897}{1240} > \frac{3919}{1247} > \frac{3941}{1254} > \frac{3963}{1261} > \frac{3985}{1268} > \frac{4007}{1275} > \frac{4029}{1282} > \frac{4051}{1289} > \frac{4073}{1296} > \frac{4095}{1303} > \frac{4117}{1310} > \frac{4139}{1317} > \frac{4161}{1324} > \frac{4183}{1331} > \frac{4205}{1338} > \frac{4227}{1345} > \frac{4249}{1352} > \frac{4271}{1359} > \frac{4293}{1366} > \frac{4315}{1373} > \frac{4337}{1380} > \frac{4359}{1387} > \frac{4381}{1394} > \frac{4403}{1401} > \frac{4425}{1408} > \frac{4447}{1415} > \frac{4469}{1422} > \frac{4491}{1429} > \frac{4513}{1436} > \frac{4535}{1443} > \frac{4557}{1450} > \frac{4579}{1457} > \frac{4601}{1464} > \frac{4623}{1471} > \frac{4645}{1478} > \frac{4667}{1485} > \frac{4689}{1492} > \frac{4711}{1499} > \frac{4733}{1506} > \frac{4755}{1513} > \frac{4777}{1520} > \frac{4799}{1527} > \frac{4821}{1534} > \frac{4843}{1541} > \frac{4865}{1548} > \frac{4887}{1555} > \frac{4909}{1562} > \frac{4931}{1569} > \frac{4953}{1576} > \frac{4975}{1583} > \frac{4997}{1590} > \frac{5019}{1597} > \frac{5041}{1604} > \frac{5063}{1611} > \frac{5085}{1618} > \frac{5107}{1625} > \frac{5129}{1632} > \frac{5151}{1639} > \frac{5173}{1646} > \frac{5195}{1653} > \frac{5217}{1660} > \frac{5239}{1667} > \frac{5261}{1674} > \frac{5283}{1681} > \frac{5305}{1688} > \frac{5327}{1695} > \frac{5349}{1702} > \frac{5371}{1709} > \frac{5393}{1716} > \frac{5415}{1723} > \frac{5437}{1730} > \frac{5459}{1737} > \frac{5481}{1744} > \frac{5503}{1751} > \frac{5525}{1758} > \frac{5547}{1765} > \frac{5569}{1772} > \frac{5591}{1779} > \frac{5613}{1786} > \frac{5635}{1793} > \frac{5657}{1800} > \frac{5679}{1807} > \frac{5701}{1814} > \frac{5723}{1821} > \frac{5745}{1828} > \frac{5767}{1835} > \frac{5789}{1842} > \frac{5811}{1849} > \frac{5833}{1856} > \frac{5855}{1863} > \frac{5877}{1870} > \frac{5899}{1877} > \frac{5921}{1884} > \frac{5943}{1891} > \frac{5965}{1898} > \frac{5987}{1905} > \frac{6009}{1912} > \frac{6031}{1919} > \frac{6053}{1926} > \frac{6075}{1933} > \frac{6097}{1940} > \frac{6119}{1947} > \frac{6141}{1954} > \frac{6163}{1961} > \frac{6185}{1968} > \frac{6207}{1975} > \frac{6229}{1982} > \frac{6251}{1989} > \frac{6273}{1996} > \frac{6295}{2003} > \frac{6317}{2010} > \frac{6339}{2017} > \frac{6361}{2024} > \frac{6383}{2031} > \frac{6405}{2038} > \frac{6427}{2045} > \frac{6449}{2052} > \frac{6471}{2059} > \frac{6493}{2066} > \frac{6515}{2073} > \frac{6537}{2080} > \frac{6559}{2087} > \frac{6581}{2094} > \frac{6603}{2101} > \frac{6625}{2108} > \frac{6647}{2115} > \frac{6669}{2122} > \frac{6691}{2129} > \frac{6713}{2136} > \frac{6735}{2143} > \frac{6757}{2150} > \frac{6779}{2157} > \frac{6801}{2164} > \frac{6823}{2171} > \frac{6845}{2178} > \frac{6867}{2185} > \frac{6889}{2192} > \frac{6911}{2199} > \frac{6933}{2206} > \frac{6955}{2213} > \frac{6977}{2220} > \frac{6999}{2227} > \frac{7021}{2234} > \frac{7043}{2241} > \frac{7065}{2248} > \frac{7087}{2255} > \frac{7109}{2262} > \frac{7131}{2269} > \frac{7153}{2276} > \frac{7175}{2283} > \frac{7197}{2290} > \frac{7219}{2297} > \frac{7241}{2304} > \frac{7263}{2311} > \frac{7285}{2318} > \frac{7307}{2325} > \frac{7329}{2332} > \frac{7351}{2339} > \frac{7373}{2346} > \frac{7395}{2353} > \frac{7417}{2360} > \frac{7439}{2367} > \frac{7461}{2374} > \frac{7483}{2381} > \frac{7505}{2388} > \frac{7527}{2395} > \frac{7549}{2402} > \frac{7571}{2409} > \frac{7593}{2416} > \frac{7615}{2423} > \frac{7637}{2430} > \frac{7659}{2437} > \frac{7681}{2444} > \frac{7703}{2451} > \frac{7725}{2458} > \frac{7747}{2465} > \frac{7769}{2472} > \frac{7791}{2479} > \frac{7813}{2486} > \frac{7835}{2493} > \frac{7857}{2500} > \frac{7879}{2507} > \frac{7901}{2514} > \frac{7923}{2521} > \frac{7945}{2528} > \frac{7967}{2535} > \frac{7989}{2542} > \frac{8011}{2549} > \frac{8033}{2556} > \frac{8055}{2563} > \frac{8077}{2570} > \frac{8099}{2577} > \frac{8121}{2584} > \frac{8143}{2591} > \frac{8165}{2598} > \frac{8187}{2605} > \frac{8209}{2612} > \frac{8231}{2619} > \frac{8253}{2626} > \frac{8275}{2633} > \frac{8297}{2640} > \frac{8319}{2647} > \frac{8341}{2654} > \frac{8363}{2661} > \frac{8385}{2668} > \frac{8407}{2675} > \frac{8429}{2682} > \frac{8451}{2689} > \frac{8473}{2696} > \frac{8495}{2703} > \frac{8517}{2710} > \frac{8539}{2717} > \frac{8561}{2724} > \frac{8583}{2731} > \frac{8605}{2738} > \frac{8627}{2745} > \frac{8649}{2752} > \frac{8671}{2759} > \frac{8693}{2766} > \frac{8715}{2773} > \frac{8737}{2780} > \frac{8759}{2787} > \frac{8781}{2794} > \frac{8803}{2801} > \frac{8825}{2808} > \frac{8847}{2815} > \frac{8869}{2822} > \frac{8891}{2829} > \frac{8913}{2836} > \frac{8935}{2843} > \frac{8957}{2850} > \frac{8979}{2857} > \frac{9001}{2864} > \frac{9023}{2871} > \frac{9045}{2878} > \frac{9067}{2885} > \frac{9089}{2892} > \frac{9111}{2899} > \frac{9133}{2906} > \frac{9155}{2913} > \frac{9177}{2920} > \frac{9199}{2927} > \frac{9221}{2934} > \frac{9243}{2941} > \frac{9265}{2948} > \frac{9287}{2955} > \frac{9309}{2962} > \frac{9331}{2969} > \frac{9353}{2976} > \frac{9375}{2983} > \frac{9397}{2990} > \frac{9419}{2997} > \frac{9441}{3004} > \frac{9463}{3011} > \frac{9485}{3018} > \frac{9507}{3025} > \frac{9529}{3032} > \frac{9551}{3039} > \frac{9573}{3046} > \frac{9595}{3053} > \frac{9617}{3060} > \frac{9639}{3067} > \frac{9661}{3074} > \frac{9683}{3081} > \frac{9705}{3088} > \frac{9727}{3095} > \frac{9749}{3102} > \frac{9771}{3109} > \frac{9793}{3116} > \frac{9815}{3123} > \frac{9837}{3130} > \frac{9859}{3137} > \frac{9881}{3144} > \frac{9903}{3151} > \frac{9925}{3158} > \frac{9947}{3165} > \frac{9969}{3172} > \frac{9991}{3179} > \frac{10013}{3186} > \frac{10035}{3193} > \frac{10057}{3200} > \frac{10079}{3207} > \frac{10101}{3214} > \frac{10123}{3221} > \frac{10145}{3228} > \frac{10167}{3235} > \frac{10189}{3242} > \frac{10211}{3249} > \frac{10233}{3256} > \frac{10255}{3263} > \frac{10277}{3270} > \frac{10299}{3277} > \frac{10321}{3284} > \frac{10343}{3291} > \frac{10365}{3298} > \frac{10387}{3305} > \frac{10409}{3312} > \frac{10431}{3319} > \frac{10453}{3326} > \frac{10475}{3333} > \frac{10497}{3340} > \frac{10519}{3347} > \frac{10541}{3354} > \frac{10563}{3361} > \frac{10585}{3368} > \frac{10607}{3375} > \frac{10629}{3382} > \frac{10651}{3389} > \frac{10673}{3396} > \frac{10695}{3403} > \frac{10717}{3410} > \frac{10739}{3417} > \frac{10761}{3424} > \frac{10783}{3431} > \frac{10805}{3438} > \frac{10827}{3445} > \frac{10849}{3452} > \frac{10871}{3459} > \frac{10893}{3466} > \frac{10915}{3473} > \frac{10937}{3480} > \frac{10959}{3487} > \frac{10981}{3494} > \frac{11003}{3501} > \frac{11025}{3508} > \frac{11047}{3515} > \frac{11069}{3522} > \frac{11091}{3529} > \frac{11113}{3536} > \frac{11135}{3543} > \frac{11157}{3550} > \frac{11179}{3557} > \frac{11201}{3564} > \frac{11223}{3571} > \frac{11245}{3578} > \frac{11267}{3585} > \frac{11289}{3592} > \frac{11311}{3599} > \frac{11333}{3606} > \frac{11355}{3613} > \frac{11377}{3620} > \frac{11399}{3627} > \frac{11421}{3634} > \frac{11443}{3641} > \frac{11465}{3648} > \frac{11487}{3655} > \frac{11509}{3662} > \frac{11531}{3669} > \frac{11553}{3676} > \frac{11575}{3683} > \frac{11597}{3690} > \frac{11619}{3697} > \frac{11641}{3704} > \frac{11663}{3711} > \frac{11685}{3718} > \frac{11707}{3725} > \frac{11729}{3732} > \frac{11751}{3739} > \frac{11773}{3746} > \frac{11795}{3753} > \frac{11817}{3760} > \frac{11839}{3767} > \frac{11861}{3774} > \frac{11883}{3781} > \frac{11905}{3788} > \frac{11927}{3795} > \frac{11949}{3802} > \frac{11971}{3809} > \frac{11993}{3816} > \frac{12015}{3823} > \frac{12037}{3830} > \frac{12059}{3837} > \frac{12081}{3844} > \frac{12103}{3851} > \frac{12125}{3858} > \frac{12147}{3865} > \frac{12169}{3872} > \frac{12191}{3879} > \frac{12213}{3886} > \frac{12235}{3893} > \frac{12257}{3900} > \frac{12279}{3907} > \frac{12301}{3914} > \frac{12323}{3921} > \frac{12345}{3928} > \frac{12367}{3935} > \frac{12389}{3942} > \frac{12411}{3949} > \frac{12433}{3956} > \frac{12455}{3963} > \frac{12477}{3970} > \frac{12499}{3977} > \frac{12521}{3984} > \frac{12543}{3991} > \frac{12565}{3998} > \frac{12587}{4005} > \frac{12609}{4012} > \frac{12631}{4019} > \frac{12653}{4026} > \frac{12675}{4033} > \frac{12697}{4040} > \frac{12719}{4047} > \frac{12741}{4054} > \frac{12763}{4061} > \frac{12785}{4068} > \frac{12807}{4075} > \frac{12829}{4082} > \frac{12851}{4089} > \frac{12873}{4096} > \frac{12895}{4103} > \frac{12917}{4110} > \frac{12939}{4117} > \frac{12961}{4124} > \frac{12983}{4131} > \frac{13005}{4138} > \frac{13027}{4145} > \frac{13049}{4152} > \frac{13071}{4159} > \frac{13093}{4166} > \frac{13115}{4173} > \frac{13137}{4180} > \frac{13159}{4187} > \frac{13181}{4194} > \frac{13203}{4201} > \frac{13225}{4208} > \frac{13247}{4215} > \frac{13269}{4222} > \frac{13291}{4229} > \frac{13313}{4236} > \frac{13335}{4243} > \frac{13357}{4250} > \frac{13379}{4257} > \frac{13401}{4264} > \frac{13423}{4271} > \frac{13445}{4278} > \frac{13467}{4285} > \frac{13489}{4292} > \frac{13511}{4299} > \frac{13533}{4306} > \frac{13555}{4313} > \frac{13577}{4320} > \frac{13599}{4327} > \frac{13621}{4334} > \frac{13643}{4341} > \frac{13665}{4348} > \frac{13687}{4355} > \frac{13709}{4362} > \frac{13731}{4369} > \frac{13753}{4376} > \frac{13775}{4383} > \frac{13797}{4390} > \frac{13819}{4397} > \frac{13841}{4404} > \frac{13863}{4411} > \frac{13885}{4418} > \frac{13907}{4425} > \frac{13929}{4432} > \frac{13951}{4439} > \frac{13973}{4446} > \frac{13995}{4453} > \frac{14017}{4460} > \frac{14039}{4467} > \frac{14061}{4474} > \frac{14083}{4481} > \frac{14105}{4488} > \frac{14127}{4495} > \frac{14149}{4502} > \frac{14171}{4509} > \frac{14193}{4516} > \frac{14215}{4523} > \frac{14237}{4530} > \frac{14259}{4537} > \frac{14281}{4544} > \frac{14303}{4551} > \frac{14325}{4558} > \frac{14347}{4565} > \frac{14369}{4572} > \frac{14391}{4579} > \frac{14413}{4586} > \frac{14435}{4593} > \frac{14457}{4600} > \frac{14479}{4607} > \frac{14501}{4614} > \frac{14523}{4621} > \frac{14545}{4628} > \frac{14567}{4635} > \frac{14589}{4642} > \frac{14611}{4649} > \frac{14633}{4656} > \frac{14655}{4663} > \frac{14677}{4670} > \frac{14699}{4677} > \frac{14721}{4684} > \frac{14743}{4691} > \frac{14765}{4698} > \frac{14787}{4705} > \frac{14809}{4712} > \frac{14831}{4719} > \frac{14853}{4726} > \frac{14875}{4733} > \frac{14897}{4740} > \frac{14919}{4747} > \frac{14941}{4754} > \frac{14963}{4761} > \frac{14985}{4768} > \frac{15007}{4775} > \frac{15029}{4782} > \frac{15051}{4789} > \frac{15073}{4796} > \frac{15095}{4803} > \frac{15117}{4810} > \frac{15139}{4817} > \frac{15161}{4824} > \frac{15183}{4831} > \frac{15205}{4838} > \frac{15227}{4845} > \frac{15249}{4852} > \frac{15271}{4859} > \frac{15293}{4866} > \frac{15315}{4873} > \frac{15337}{4880} > \frac{15359}{4887} > \frac{15381}{4894} > \frac{15403}{4901} > \frac{15425}{4908} > \frac{15447}{4915} > \frac{15469}{4922} > \frac{15491}{4929} > \frac{15513}{4936} > \frac{15535}{4943} > \frac{15557}{4950} > \frac{15579}{4957} > \frac{15601}{4964} > \frac{15623}{4971} > \frac{15645}{4978} > \frac{15667}{4985} > \frac{15689}{4992} > \frac{15711}{4999} > \frac{15733}{5006} > \frac{15755}{5013} > \frac{15777}{5020} > \frac{15799}{5027} > \frac{15821}{5034} >$

« Ciascuna frazione della prima serie si ap-  
 « prossima più al vero di quel che non può farlo  
 « nessun' altra frazione espressa in termini più  
 « semplici, e che peccasse per difetto; e ciascuna  
 « frazione della seconda serie s' approssima pa-  
 « rimente dipiù al vero di quel che non può farlo  
 « nessun' altra frazione espressa in termini più  
 « semplici, e che peccasse per eccesso.

« Del rimanente, queste serie diverrebbero  
 « molto prolisse, se si volessero spingere tanto  
 « lontano come l'abbiamo fatto a riguardo delle  
 « frazioni principali date di sopra. »

129. Dopo gli esempj suddivisati i Lettori  
 troveran senza pena i diversi valori approssimativi  
 di  $\sqrt{2}$ , cioè

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \text{ ec.}$$

col mezzo della frazione *continua*

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{ec.}}}} \quad (116).$$

Una simil frazione, nella quale i denomina-  
 tori son sempre gli stessi, oppure ritornano in un  
 cert' ordine, si chiama *frazione continua perio-*  
*dica*, e può sempr' essere riguardata come la ra-  
 dice d' un' equazione di secondo grado.

Sia la frazione  $a + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \text{ec.}}}}$ ;

facendola eguale a  $x$ , avremo

$$x - a = \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \frac{1}{b + \text{ec.}}}}}$$

Il numero delle frazioni integranti essendo illimitato, è evidente che si può sostituire  $x - a$  ancora all'insieme delle frazioni, le quali seguono la prima; di modo che avremo

$$x - a = \frac{1}{b + x - a};$$

d'onde ne segue

$$x^2 - (2a - b)x + a^2 - ab - 1 = 0;$$

equazione, dalla quale dipende l'incognita  $x$ , che rappresenta la frazione proposta: supponendo  $a = 1$ , e  $b = 2$ , dessa diviene

$$x^2 - 2 = 0,$$

e dà

$$x = \sqrt{2};$$

il che giustifica l'espressione indefinita riportata quì sopra.

Sia ancora la frazione *continua*

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \text{ec.}}}}}$$

il cui *periodo* abbraccia due frazioni integranti; avremo in tal caso

$$x - a = \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \text{ec.}}}}}$$

e sostituendo  $x - a$  in luogo di tutte le frazioni, le quali seguono la seconda, otterremo

$$x - a = \frac{1}{b + \frac{1}{c + x - a}};$$

di dove ricaveremo

$$b x^2 - (2ab - bc) x + a^2 b - abc - c = 0.$$

È facile estendere questo metodo a qualunque siasi frazione *periodica*.

Reciprocamente; un' equazione di secondo grado essendo data, ne ricaveremo una frazione *continua periodica*, applicandole il metodo dato (*Elem.* 221.) per risolvere l' equazioni per approssimazione. Troveremo la dimostrazione di questa medesima Proposizione nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino*, anno 1768, pag. 135, e nelle *Addizioni all' Algebra d' Euler*, pag. 476.

### *Di alcune altre trasformazioni delle frazioni.*

130. Abbiamo veduto nel n.° 112. che la frazione *continua* equivalente al numero fraziona-

rio  $\frac{A}{B}$  si otteneva nella stessa maniera che si pro-

cede alla ricerca del massimo comun divisore, e vale a dire, dividendo A per B, poi B per il resto C, poi questo primo resto C per il secondo D, e così di seguito. Si può, in vece di prendere a ciascuna operazione parziale un nuovo dividendo, ed un nuovo divisore, dividere il primo numero A per B; poi per il resto C di questa prima divisione; poi per il resto C' della seconda; e così di seguito. Otterremo dietro a questo metodo una specie di frazioni *convergenti*, osservate primieramente da *Lambert*, e trattate in seguito da *Lagrange* nel Volume dei *Dibattimenti della Scuola Normale*, e nella 5.<sup>a</sup> *Dispensa del Giornale della Scuola Politecnica*.

Se si faccia successivamente

$$A = m B + C$$

$$A = n C + C'$$

$$A = n' C' + C''$$

$$A = n'' C'' + C'''$$

ec.,

ne dedurremo

$$\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B},$$

$$C = \frac{A - C'}{n},$$

$$C' = \frac{A - C''}{n'},$$

$$C'' = \frac{A - C'''}{n''},$$

ec.,

di dove concluderemo questi diversi valori:

$$\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B}$$

$$\frac{A}{B} = m + \frac{A}{Bn} - \frac{C'}{Bn}$$

$$\frac{A}{B} = m + \frac{A}{Bn} - \frac{A}{Bnn'} + \frac{C''}{Bnn'}$$

$$\frac{A}{B} = m + \frac{A}{Bn} - \frac{A}{Bnn'} + \frac{A}{Bnn'n''} - \frac{C'''}{Bnn'n''}$$

ec.

La frazione  $\frac{A}{B}$  è così trasformata in una serie convergente; poichè è manifesto che i quozienti  $n, n', n'',$  ec. vanno crescendo, mentre che

i resti  $C, C', C'',$  ec. incessantemente diminuiscono: di più si fa manifesto che questa serie dee terminarsi ogni qual volta il numero  $\frac{A}{B}$  è *razionale*.

Difatto, la serie delle divisioni prescritte dal metodo suddivisato conduce necessariamente ad un quoziente esatto allorchè  $A,$  e  $B$  son dei numeri interi; poichè i resti diminuendo successivamente, si dee finire col trovarne uno eguale all'unità quando i numeri  $A,$  e  $B$  sono *primi* tra loro.

131. Se si prenda, in luogo del numero frazionario  $\frac{A}{B}$ , la frazione propriamente detta  $\frac{C}{B}$ , nella quale  $C < B$ , avremo

$$\left. \begin{array}{l} B = n C + C' \\ B = n' C' + C'' \\ B = n'' C'' + C''' \\ \text{ec.,} \end{array} \right\} \text{ovvero} \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{B} = \frac{1}{n} - \frac{C'}{Bn} \\ \frac{C'}{B} = \frac{1}{n'} - \frac{C''}{Bn'} \\ \frac{C''}{B} = \frac{1}{n''} - \frac{C'''}{Bn''} \\ \text{ec.,} \end{array} \right.$$

di dove ricavasi successivamente

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{n} - \frac{C'}{Bn}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{n} - \frac{1}{nn'} + \frac{C'}{Bnn'}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{n} - \frac{1}{nn'} + \frac{1}{nn'n''} - \frac{C'''}{Bnn'n''}$$

ec.

Tutte le frazioni *convergenti* di questi risultati, eccettuata l'ultima, hanno per numerator l'unità.

Quest' ultima somministra sempre l' errore, il quale resulta dall' insieme dell' altre. E facile concluder da ciò che i valori

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{nn'}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{nn'} + \frac{1}{nn'n''}, \text{ ec.}$$

sono alternativamente minori, e maggiori della frazione  $\frac{C}{B}$ , supponendo sempre i quozienti  $n, n', n'', \text{ ec.}$  presi come nell' *Aritmetica*. Sarebbe facil trovare le modificazioni, che apporterebbero in questa conclusione, e nei segni delle frazioni parziali, dei quozienti presi ora in eccesso, ora in difetto; le considerazioni analoghe sviluppate nel n.° 114. mi dispensano dall' entrare adesso in alcuna particolarità a questo riguardo; mi limiterò a far osservare che avremo un' approssimazione più rapida prendendo sempre il quoziente il più prossimo tanto al disopra, che al disotto.

Farò ancora osservare che si posson ottener per il numero frazionario  $\frac{A}{B}$  dell' espressioni simili alle precedenti, sostituendo quest' ultime in luogo di  $\frac{C}{B}$  nell' equazione  $A = m + \frac{C}{B}$ .

Se si applichi ciò, che abbiám detto, alla frazione  $\frac{887}{1103}$ , troveremo

$$\begin{aligned} \frac{887}{1103} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 47} - \frac{1}{5 \cdot 47 \cdot 50} \\ &+ \frac{1}{5 \cdot 47 \cdot 50 \cdot 367} - \frac{1}{5 \cdot 47 \cdot 50 \cdot 367 \cdot 551} \\ &+ \frac{1}{5 \cdot 47 \cdot 50 \cdot 367 \cdot 551 \cdot 1103} \end{aligned}$$

Possiamo impiegare ancora ciò, che precede, per ottener dei valori approssimativi delle frazioni decimali, avendo riguardo a quello, ch'è stato detto nel principio del n.º 116. Se ne farem uso per dedurre dalla frazione  $\frac{41431}{100000}$  dei valori approssimativi di  $\sqrt{2}$ , troveremo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5.7} - \text{ec.}$$

Partendo dalla frazione, dalla quale dipende il rapporto della circonferenza al diametro (116), e prendendo i quozienti più prossimi (114), si consegue

$$\frac{\text{circonf.}}{\text{diamet.}} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} + \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.47051} + \text{ec.}$$

132. Abbiám fatto vedere nel numero 119. che denotando per

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}, \text{ec.}$$

la serie delle frazioni convergenti verso la quantità  $a$ , dedotte dalla frazion *continua* equivalente a questa quantità, si aveva

$$\begin{aligned} \frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} &= \frac{1}{A'B'} \\ \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} &= \frac{1}{B'C'} \\ \frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} &= \frac{1}{C'D'} \\ \frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} &= \frac{1}{D'E'} \end{aligned}$$

segue naturalmente da ciò che la quantità  $a$  può esser rappresentata così :

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}$$

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'}$$

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'}$$

ec. ,

il che offre pure una trasformazione dell'espressione di  $a$  in serie convergente, finita se  $a$  è razionale, ed infinita nel caso contrario.

Quest'ultima trasformazione è tanto più riguardevole che *Euler* ne ha ricavato un mezzo di convertire in frazione *continua* qualunque serie, i cui termini sono alternativamente positivi, e negativi. (*Vedasi il Cap. XVIII. dell'Introductio in Analysin infinitorum*). Desso è tornato a parlarne dipoi nel 2.<sup>o</sup> Volume dei suoi *Opuscula analytica* (pag. 138); ma queste ricerche son troppo complicate per non trovarle quì esposte.

133. Si può generalizzare la riduzione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali, proponendosi di convertire una frazione qualunque in un'

altra d'un denominatore dato.  $\frac{C}{B}$  essendo la prima, e  $b$  il denominatore dato, la seconda avrà evidentemente per numeratore il quoziente  $\frac{bC}{B}$  va-

lutato in numeri interi. Se si rappresenti questo quoziente per  $n$ , ed il resto per  $C'$ , avremo esattamente

$$\frac{bC}{B} = a + \frac{C'}{B}, \quad \text{di dove} \quad \frac{C}{B} = \frac{n}{b} + \frac{C'}{bB};$$

e proseguendo queste divisioni, si arriva a

$$\frac{bC'}{B} = n' + \frac{C''}{B}, \quad \frac{C'}{B} = \frac{n'}{b} + \frac{C''}{bB},$$

$$\frac{bC''}{B} = n'' + \frac{C'''}{B}, \quad \frac{C''}{B} = \frac{n''}{b} + \frac{C'''}{bB},$$

ec.;

resultati, dai quali ricavasi

$$\frac{C}{B} = \frac{n}{b} + \frac{C'}{bB}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{n}{b} + \frac{n'}{b^2} + \frac{C''}{b^2B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{n}{b} + \frac{n'}{b^2} + \frac{n''}{b^3} + \frac{C'''}{b^3B}$$

ec.

L'applicazione dei ragionamenti fatti in Aritmetica sulle frazioni decimali conduce facilmente alle conseguenze, che somministrano l'espressioni quì sopra; e le considerazioni, che abbiamo sviluppate nel n.º 97, dimostrano in particolare che, se la frazione  $\frac{C}{B}$  è razionale, i quozienti  $n, n', n'',$  ec. debbono necessariamente avere dei ritorni periodici.

134. Le diverse trasformazioni, di cui ho succintamente esposti i principj, si deducono dall'equazione

$$Cb - Bc = \pm D,$$

che si ottiene paragonando due frazioni  $\frac{C}{B}$ ,

$\frac{c}{b}$  per conoscere la lor differenza, di cui il numeratore è espresso allora per  $D$ .

1.° Se si voglia, supponendo il numeratore  $c=1$ , trovar per  $b$  un numero intero tale che la differenza  $D$  sia la minore possibile, è manifesto che bisogna far  $b$  eguale al quoziente del denominatore  $B$  per il numeratore  $C$ , e denotando per  $n$  questo quoziente, si ricade sull' equazione

$$\frac{C}{B} = \frac{1}{n} + \frac{C'}{Bn}$$

trovata nel n.° 131. Trattando nella stessa maniera la frazione  $\frac{C'}{B}$ , e le seguenti, opereremo la trasformazione indicata in questo numero.

2.° È manifesto ch'essendo dato il denominatore, si cade sulla trasformazione del n.° precedente.

3.° Finalmente se, lasciando i due termini della frazione  $\frac{c}{b}$  indeterminati, si arriva a scoprire il minor valore, di cui dessi son suscettibili in virtù dell' equazione

$$Cb - Bc = \pm D,$$

nella quale  $D$  è il minore possibile, si riprodurrebbero in un ordine inverso le frazioni convergenti, le quali resultano dalla frazione *continua* equivalente a  $\frac{C}{B}$ . Ciò si fa manifesto dall'equazioni

$$BA' - AB' = 1$$

$$CB' - BC' = -1$$

$$DC' - CD' = 1$$

$$ED' - DE' = -1$$

ec.

dedotte dal paragone delle frazioni  $\frac{A}{A'}$ ,  $\frac{B}{B'}$ ,  $\frac{C}{C'}$ ,

D  
 $\frac{c}{b}$ , ec. nel n.º 119, poichè l'ultima di queste frazioni essendo la proposta, la penultima sarà identica con  $\frac{c}{b}$ : facendo in seguito  $cb' - bc' = \pm 1$ , la frazione  $\frac{c'}{b'}$ , determinata come  $\frac{c}{b}$ , sarà necessariamente l'autepenultima convergente; e così di seguito.

Sopra di queste approssimazioni è fondata l'eccellente *Memoria* di *Lagrange* sulla trasformazione delle frazioni; in essa si trovano i mezzi, onde ottenere i numeri  $b, c, b', c'$ ; ma siccome dessa non contiene tutta la *Teoria delle frazioni continue*, io ho creduto di dover piuttosto preferire il testo delle sue *Addizioni all'Algebra d'Euler*, il quale, più completo, si lega d'altronde meglio colle diverse Opere, in cui trattasi delle *frazioni continue*. I Lettori, ai quali questa materia può interessare, dovranno consultare

Le Opere di *Wallis*,

*Descriptio automati Planetarii* ( Opere d'*Huygens* ),

L'*Introductio in Analysin infinitorum*, d'*Euler*,

Più *Memorie dell'Accademia di Pietroburgo* ( *Antichi Comm.* T. IX, T. XI; *Nuovi*, T. IX, XI, XVII, *Atti* 1779, parte 1.<sup>a</sup> )

Quelle dell'*Accademia di Berlino* (anni 1767, 1768, 1769, 1776).

Quelle dell'*Accademia delle Scienze di Parigi* (anno 1772, 1.<sup>a</sup> parte),

Il 2.<sup>o</sup> Volume degli *Elementi d'Algebra* d'*Euler*,

Gli *Opuscula analytica* d' Euler ,  
 La *Risoluzione dell' Equazioni numeriche*  
 di Lagrange ,  
 La *Teoria dei Numeri* di Legendre ,  
 E finalmente il 5.<sup>o</sup> Quaderno del *Giornale*  
*della Scuola Politecnica* .

*Nozioni generali sull' Analisi indeterminata* .

135. Allorchè l' enunciato d' un Problema somministra meno equazioni che incognite, questo Problema è indeterminato, perchè desso è suscettibile d' un numero infinito di soluzioni. Se si trattasse, per esempio, di trovar due numeri, la cui somma fosse eguale a 10, avrebbesi l' equazione

$$x + y = 10,$$

e qualunque valore, che si desse a  $y$ , se ne troverebbe uno per  $x$ : ma limitandosi a non prendere per l' una, e l' altra di queste incognite che dei numeri interi positivi, è evidente che non si possono avere che le nove soluzioni seguenti

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

$$y = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;$$

e le quattro ultime non debbon esser riguardate come differenti dalle quattro prime, poichè serve di cangiare  $x$  in  $y$  per render le une identiche all' altre .

L' esclusione data ai numeri negativi, e frazionarj non limita sempre il numero delle soluzioni dei *Problemi indeterminati*; ma bisogna spesso ricorrere a degli artifizj d' Analisi riguardatissimi per non cader mai che su dei valori interi, e positivi delle incognite .

L'equazione di primo grado a due incognite può essere rappresentata dalla seguente

$$ax + by = c,$$

$a, b, c$  essendo dei numeri interi dati. È necessario che i due primi  $a, b$  non abbiano alcun fattor comune, salvo che questo fattore non lo sia ancora del terzo. Difatto, se si avesse

$$a = km, \quad b = kn,$$

ne resulterebbe

$$kmx + kny = c, \quad \text{oppure} \quad mx + ny = \frac{c}{k},$$

e sarebbe in conseguenza impossibile che  $x, y$  fossero dei numeri interi se  $c$  non fosse divisibile per  $k$ .

L'equazione  $ax + by = c$  non richiede alcuna preparazione allorchè uno dei coefficienti  $a$ , ovvero  $b$  è eguale all'unità; poichè, sia  $a = 1$ , si ha immediatamente

$$x = c - by,$$

e non prendendo per  $y$  che dei numeri interi, non troveremo per  $x$  se non che dei numeri parimente interi.

136. Occupiamoci dunque del caso generale, e supponghiamo che nell'equazione  $ax + by = c$  si abbia  $a < b$ . Sia  $ma$  il maggiore dei multipli di  $a$ , il quale possa esser contenuto in  $b$ , di maniera che  $b = ma + r$ ,  $r$  essendo minore di  $a$ , conseguiremo

$$ax + may + ry = c.$$

Facciamo  $x + my = t$ ; avremo

$$ry + at = c.$$

Se  $r$  fosse l'unità, il Problema sarebbe risoluto, poichè si avrebbero allora l'equazioni:

$$x + my = t, \quad \text{e} \quad y + at = c,$$

dalle quali ricaverebbersi

$$y = c - at, \quad x = t - my,$$

che darebbero in conseguenza dei numeri interi per  $x$ , e  $y$ , prendendone dei simili per  $t$ .

Se  $r$  sorpassi l'unità, avremo, a motivo di  $r < a$ ,

$$a = m'r + r',$$

$m'r$  essendo il maggior multiplo di  $r$ , che possa esser contenuto in  $a$ ; e sostituendo quest'espressione nell'equazione  $ry + at = c$ , troveremo

$ry + m'rt + r't = c$ , ovvero  $r(y + m't) + r't = c$ ;  
faremo  $y + m't = u$ , il che darà

$$r't + ru = c:$$

avremo dunque l'equazioni

$x + my = t$ ,  $y + m't = u$ ,  $r't + ru = c$ ;  
le quali, se  $r' = 1$ , daranno

$$x = t - my, \quad y = u - m't, \quad t = c - ru;$$

e prendendo per  $u$  un numero intero, ne dedurremo ancora dei valori di  $t$ , di  $y$ , e di  $x$  in numeri interi

Se  $r'$  sorpassi l'unità, bisognerà operare sull'ultima equazione  $r't + ru = c$  come sulle precedenti, e poichè  $r' < r$ , avremo

$$r = m''r' + r'',$$

$m''r'$  essendo il maggior multiplo di  $r'$ , che possa esser contenuto in  $r$ . Mediante quest'espressione, l'equazione  $r't + ru = c$  si cangerà in

$$r'(t + m''u) + r''u = c;$$

facendo  $t + m''u = v$ , avremo

$$r''u + r'v = c,$$

e nel caso ove  $r''$  fosse eguale all'unità, ne resulterebbero l'equazioni

$$x + my = t, \quad y + m't = u, \quad t + m''u = v, \quad u + r'v = c,$$

dalle quali ricaverebbersi

$$x = t - my, \quad y = u - m't, \quad t = v - m''u, \quad u = c - r'v;$$

valori, i quali saran sempre interi se  $v$  è un numero intero.

È facil vedere che questo metodo condurrà necessariamente ad un'equazione, nella quale una dell'incognite avrà l'unità per coefficiente; poichè i valori di  $r, r', r'', \dots$  si ottengono colla medesima operazione di quella, che bisognerebbe far per trovare il massimo comun divisore dei due numeri  $b$ , e  $a$ , e che darebbe per ultimo risultato l'unità, perchè questi numeri son *primi* tra loro. Difatto, nella serie dell'espressioni

$$b = ma + r, \quad a = m'r + r', \quad r = m''r' + r'', \quad \text{ec.}$$

$r$  è il resto della divisione di  $b$  per  $a$ ,  $r'$  quello della divisione di  $a$  per  $r$ ,  $r''$  quello della divisione di  $r$  per  $r'$ , e così di seguito.

157. Prendo per primo esempio questo Problema: *Un certo, il quale non ha che delle monete di 5 fr., e delle monete di 24 franchi, si propone di pagare una somma di 109 fr.; quante ne dovrà egli dare dell'une, e dell'altre?*

Sia  $x$  il numero delle monete di 5 franchi,  $y$  quello delle monete di 24, otterremo

$$5x + 24y = 109;$$

si ha in questo caso

$$a = 5, \quad b = 24, \quad c = 109,$$

e si trova

$$m = 4, \quad r = 4, \quad m' = 1, \quad r' = 1,$$

al che somministra

$$x + 4y = t, \quad y + t = u, \quad t + 4u = 109,$$

dalle quali equazioni ne dedurremo

$$x = t - 4y, \quad y = u - t, \quad t = 109 - 4u:$$

risalendo dal valore di  $t$  a quelli di  $y$ , e di  $x$ , troverem finalmente

$$x = 545 - 24u, \quad y = 5u - 109.$$

Per non ricavar da questi valori se non che dei risultati positivi, non bisogna prender per  $u$  che dei numeri tali, che s'abbia  $5u > 109$ , e  $24u < 545$ ; questi numeri debbono dunque esser compresi tra  $\frac{109}{5}$ , e  $\frac{545}{24}$ , vale a dire tra 21, e 23; non ve n'è in conseguenza che un solo, cioè 22. Supponendo  $u = 22$ , si trova

$$x = 17, \quad y = 1:$$

ed infatti 17 monete di 5 franchi fanno 85 franchi, i quali sommati con 24 danno 109.

Il Problema suddivisato riducesi a *dividere il numero 109 in due parti, una delle quali sia divisibile per 5, e l'altra per 24*; e questo caso particolare è osservabile in ciò che il Problema è *determinato*, e non ha che una sola soluzione allorchè si escludono i numeri frazionarj, ed i numeri negativi: non succederà lo stesso nel Problema seguente.

138. *Uno ha comprato dei cavalli, e dei bovi; paga gli uni 31 monete di 5 franchi per ciascheduno, e gli altri 20; ed egli trova che il prezzo totale dei bovi sorpassa di 7 monete quel dei cavalli. Quanti bovi avrà egli avuto, e quanti cavalli?*

Denotando per  $x$  il numero dei bovi, e per  $y$  quello dei cavalli, troveremo

$$20x = 31y + 7, \quad \text{oppure} \quad 20x - 31y = 7;$$

nel caso attuale si ha

$$a = 20, \quad b = -31, \quad c = 7,$$

e ne risulta per conseguenza

$$m = -1, r = -11, m' = -1, r' = +9, m'' = -1, \\ r'' = -2, m''' = -4, r''' = +1:$$

farem dunque

$$x - y = t, y - t = u, t - u = v, u - 4v = w,$$

ed otterremo in ultimo luogo

$$v - 2w = 7;$$

il che somministra, risalendo ai valori di  $x$ , e di  $y$ ,

$$v = 7 + 2w, u = 28 + 9w, t = 35 + 11w, \\ y = 63 + 20w, x = 98 + 31w.$$

Nulla non limita qui i valori di  $x$ , e quelli di  $y$ , i quali son positivi allorquando ancora si danno a  $w$  i valori negativi  $-3, -2, -1$ ; e se si fa successivamente

$w = -3$ , si trova	$y = 3$ ,	$x = 5$
$= -2$	$= 23$	$= 36$
$= -1$	$= 43$	$= 67$
$= 0$	$= 63$	$= 98$
$= 1$	$= 83$	$= 129$
$= 2$	$= 103$	$= 160$
$= 3$	$= 123$	$= 191$
ec.	ec.	ec.

I valori di  $y$ , e quelli di  $x$  formano, come si vede, due progressioni per differenze; nella progressione relativa a  $y$  la differenza è eguale al coefficiente di  $x$ , e nella progressione relativa a  $x$  la differenza è eguale al coefficiente di  $y$ . È facile assicurarsi che questa circostanza ha sempre luogo; basta per ciò risalire dai valori generali di  $v, u, t$  (136) a quelli di  $x$ , e di  $y$ ; ma vedrem ciò auco più semplicemente.

139. Se si conoscesse *a priori*, oppure se si fosse trovata a caso una soluzione d' un' equazione *indeterminata*, potrebbersi ottenere un' infinità d' altre soluzioni nel modo seguente: sieno  $x = a$ ,  $y = \xi$  i due valori dati; avrem, per ipotesi,

$$ax + b\xi = c;$$

togliendo quest' equazione dalla proposta  $ax + by = c$ , conseguiremo

$$a(x - a) + b(y - \xi) = 0,$$

dalla quale ricaveremo

$$x - a = -\frac{b}{a}(y - \xi);$$

ma poichè i numeri  $a$ , e  $b$  son *primi* tra loro,

la quantità  $\frac{b}{a}(y - \xi)$  non può essere intera, salvo

che  $\xi - y$  non sia un multiplo di  $a$ ; condizione, alla quale soddisfaremo facendo  $\xi - y = pa$ ,  $p$  essendo un numero qualunque: con questo mezzo avremo, per determinare  $x$ , e  $y$ , le due equazioni

$$x - a = bp, \quad \xi - y = pa,$$

le quali daranno

$$x = a + bp, \quad y = \xi - pa.$$

Quest' espressioni provano in una maniera semplicissima che i valori di  $x$ , e di  $y$  debbon formare delle progressioni per differenze, tali com' è stato detto qui sopra.

140. La Teoria delle frazioni continue somministra pure la soluzione immediata dell' equazione  $ax - by = \pm c$ ; poichè, se si suppone primieramente  $c = 1$ , si sviluppi la frazione  $\frac{a}{b}$  in

frazione continua, e si rappresenti per  $\frac{m}{n}$  la frazione convergente, la quale precede la proposta avremo (119)

$$a n - b m = \pm 1;$$

poi moltiplicando i due membri di quest'equazione per  $c$ , s'avrà

$$a c n - b c m = \pm c.$$

Così potrem prendere  $x = c n$ ,  $y = c m$ , ed avremo in tal guisa due multipli di  $a$ , e di  $b$ , i quali differiranno tra loro della quantità data  $\pm c$ .

141. Il metodo esposto nel n.º 136. è generale, e s'applica a qualunque numero d'equazioni che sia. Ecco un esempio, che ne presenta tre: *Trovare un numero, il quale, essendo diviso per 2, dia per resto 1; essendo diviso per 3, dia per resto 2; ed essendo diviso per 5, dia per resto 3.* Sia  $N$  il numero cercato, e  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i quozienti rispettivi, che ottengonsi allorchè desso è diviso per 2, per 3, e per 5: segue dall'enunciato di sopra che

$$N = 2x + 1, \quad N = 3y + 2, \quad N = 5z + 3;$$

quest'equazioni riduconsi immediatamente alle seguenti

$$2x + 1 = 3y + 2, \quad 3y + 2 = 5z + 3,$$

$$\text{o sivero} \quad 2x - 3y = 1, \quad 3y - 5z = 1.$$

Risolveremo immantinente la prima come se dessa fosse sola, e troveremo

$$y = 2t - 1, \quad x = 3t - 1;$$

sostituendo il valor di  $y$  nella seconda, essa diventerà

$$-5z + 6t = 4;$$

nuova equazione, che bisognerà risolvere; da questa ricaveremo

$$z - t = u, \quad -5u + t = 4,$$

ed in conseguenza

$$t = 5u + 4, \quad z = 6u + 4.$$

Risalendo ai valori di  $x$ , e di  $y$ , avremo

$$x = 15u + 11, \quad y = 10u + 7, \quad z = 6u + 4,$$

ed una dell'equazioni proposte,  $N = 2x + 1$  per esempio, somministrerà

$$N = 30u + 23.$$

Il minor valore, che possa aver  $N$ , s'ottiene facendo  $u = 0$ ; vien allora  $N = 23$ ; numero, il quale, essendo diviso per 2, per 3, e per 5, somministra di fatto per resti 1, 2, 3.

Quest' esempio, benchè semplicissimo, fa sufficientemente vedere come bisogna operare nei casi più complicati. Il Lettore potrà esercitarsi eziandio sulle due equazioni

$$3x + 5y + 7z = 560, \quad 9x + 25y + 49z = 2920;$$

troverà, eliminando  $z$ , quest'equazione

$$12x + 10y = 1000,$$

la qual si semplifica dividendo tutti i suoi termini per 2, e somministra

$$6x + 5y = 500.$$

Facendo in seguito  $x + y = t$ , s'ottiene

$$x + 5t = 500, \text{ oppure } x = 500 - 5t, \quad y = 6t - 500;$$

ponendo per  $x$ , e per  $y$  questi valori nella prima dell'equazioni proposte, la qual'è la più semplice, avremo

$$7z + 15t = 1560.$$

risolvendo quest' ultima, conseguiremo

$$t = 1560 - 7u,$$

$$z = 15u - 3120,$$

$$x = 8860 - 42u,$$

$$y = 35u - 7300,$$

e non avrem che due soluzioni in numeri interi, e positivi, cioè quelle, che corrispondono a  $u=210$ , e  $u=210$ , perchè  $u$  debb' essere  $> \frac{7300}{35}$ , e  $< \frac{8860}{42}$ .

142. Se si avesse un' equazione a tre incognite  $ax + by + cz = d$ , si passerebbe il termine  $cz$  nell' altro membro, ed avrebbesi

$$ax + by = d - cz;$$

si farebbe  $d - cz = c'$ , e non si dovrebbe far altro che risolvere l' equazione  $ax + by = c'$ . Alorchè fossimo arrivati all' equazione, nella quale una dell' incognite non ha per coefficiente che l' unità, risaliremmo successivamente ai valori di  $x$ , e di  $y$ , sostituendo  $d - cz$  in luogo di  $c'$ ; e supponendo che  $v$  fosse l' ultima delle incognite ausiliarie (136), l' espressione di  $x$ , e di  $y$  conterrebbe allora due numeri interi  $v$ , e  $z$ , i quali si potrebbero prendere a piacimento.

Sia  $5x + 8y + 7z = 50$ ; si ha, dietro a ciò che precede,

$$5x + 8y = 50 - 7z = c';$$

e facendo  $a = 5$ ,  $b = 8$ , si trova

$$m = 1, r = 3, m' = 1, r' = 2, m'' = 1, r'' = 1;$$

il che somministra

$$x + y = t, y + t = u, t + u = v, u + 2v = c',$$

di dove ricavasi

$$u = c' - 2v, t = 3v - c', y = 2c' - 5v, x = 8v - 3c';$$

e rimettendo per  $c'$  il suo valore, si ha finalmente

$$x = 8v + 21z - 150, \quad y = 100 - 14z - 5v;$$

espressioni, nelle quali potremo prendere  $z$ , e  $v$  arbitrariamente, ma in modo per altro da non dare per  $x$ , e per  $y$  che dei valori positivi.

143. La difficoltà di trovar delle soluzioni o di numeri *interi*, o almeno di numeri *razionali* nei Problemi *indeterminati*, i quali passano il primo grado, è molto maggiore di quella d'ottenere dei numeri *interi* nei Problemi di questo grado; ecco perchè non mi tratterò che sopra un piccol numero di casi i più semplici.

M' occuperò primieramente dell'equazione

$$py = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \dots + hx^n,$$

nella quale  $y$  non sorpassa il primo grado, e che somministra

$$y = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \dots + hx^n}{p}.$$

È facil vedere che quando si conosce una sola soluzione di quest'equazione, se ne posson trovare un'infinità d'altre; poichè, se la supposizione di  $x = a$  rende la quantità

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \dots + hx^n$$

divisibile per  $p$ , tutti i numeri compresi nella formula  $a + np$  godranno pure della medesima proprietà; poichè, per la loro sostituzione in luogo di  $x$ , la quantità  $a + bx + cx^2 + dx^3 + ec.$  prenderà la forma

$$a + ba + ca^2 + da^3 + ec. + Anp + Bn^2p^2 + ec.,$$

e perchè la parte  $a + ba + ca^2 + da^3 + ec.$  è divisibil per  $p$ , dietro alla fatta ipotesi.

Ciò, che precede, prova ancora che, se il

Problema proposto può risolversi in numeri *interi*, vi sarà necessariamente una, o più soluzioni tra  $\frac{p}{2}$ , e  $-\frac{p}{2}$ ; imperocchè, se  $\alpha$  fosse fuori di questi limiti, sarebbe possibile di prender  $n$  in modo che  $\alpha \pm np$  vi si trovasse compreso. Se, per esempio,  $\alpha$  cadesse tra  $3p$ , e  $4p$ , ma più vicino a  $3p$  che a  $4p$ , prendendo  $n = -3$ , otterrebbeesi un risultato minore di  $\frac{p}{2}$ . Segue da ciò che, per cadere sopra una soluzione, servirà di tentare per  $x$  tutti i numeri *interi* compresi tra  $\frac{p}{2}$ , e  $-\frac{p}{2}$ .

144. Possiamo altresì dimostrare che l'equazione

$$py = a + bx + cx^2 + dx^3 \dots + hx^m$$

non potrebbe, allorchè  $p$  è un numero primo, il qual non divida  $a$ , ammettere più di  $m$  soluzioni in numeri interi per dei valori di  $x$  presi da 0 sino a  $p$ ; ed ecco come lo prova il Sig. Legendre (*Mem. dell'Accademia delle Scienze*, 1785).

Se  $\alpha$  è una di queste soluzioni, avremo

$$\frac{a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \dots + h\alpha^m}{p} = n,$$

denotando  $n$  un numero intero, ed in conseguenza

$$pn = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 \dots + h\alpha^m;$$

togliendo quest'equazione dalla proposta, conseguiremo

$$py - pn = b(x - \alpha) + c(x^2 - \alpha^2) + d(x^3 - \alpha^3) \dots + h(x^m - \alpha^m);$$

risultato che si può (*Elem.* 180.) porre sotto la forma

$$p(y - n) = (x - \alpha)(b + c'x + d'x^2 + e'x^3 \dots + h'x^{m-1}).$$

147. Passo all'equazione

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

ove le due incognite montano al secondo grado: ponendola sotto la forma

$$y^2 + \left(\frac{ex+c}{f}\right)y = -\frac{a+bx+dx^2}{f}$$

se ne ricava

$$y = -\frac{ex+c}{2f} \pm \frac{\sqrt{(ex+c)^2 - 4f(a+bx+dx^2)}}{2f}$$

ovvero, il che è lo stesso,

$$2fy + ex + c = \pm \sqrt{(ex+c)^2 - 4f(a+bx+dx^2)}.$$

Sviluppando, e ordinando per rapporto a  $x$  la quantità sottoposta al radicale, le daremo la forma  $m + nx + px^2$ , nella quale

$$c^2 - 4af = m, \quad 2ce - 4bf = n, \quad e^2 - 4df = p.$$

Se non si domandan per  $x$ , e  $y$  che dei numeri *razionali*, tanto interi che frazionarj, la difficoltà del Problema si ridurrà a trovar dei valori di  $x$ , i quali rendano la quantità  $m + nx + px^2$  eguale a un quadrato perfetto; e questo quadrato essendo rappresentato da  $t^2$ , avremo

$$2fy + ex + c = \pm t.$$

La risoluzione dell'equazione  $m + nx + px^2 = t^2$  conduce a

$$x = -\frac{n}{2p} \pm \frac{\sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}}{2p},$$

oppure

$$2px + n = \pm \sqrt{4pt^2 + n^2 - 4pm};$$

facendo  $4p = A$ , e  $n^2 - 4pm = B$ , avremo

$$2px + n = \pm \sqrt{At^2 + B}.$$

Mediante questo risultato il Problema è ridotto a determinare  $t$  in modo che  $\sqrt{At^2 + B}$  sia un quadrato; poichè questo quadrato essendo  $u^2$ , le due incognite  $x$ , ed  $y$  non dipenderanno più che dall'equazioni di primo grado

$$2fy + ex + c = t, \quad 2px + n = u,$$

di cui i coefficienti  $c, e, f, n, e p$  son *razionali*, come pure le quantità  $t$ , ed  $u$ .

La determinazione di  $t$  per mezzo della condizione enunciata di sopra, ovvero, che la cosa medesima, la risoluzione dell'equazione  $u = \sqrt{At^2 + B}$  in numeri *razionali*, contiene in generale delle grandi difficoltà. Uno dei casi più semplici ha luogo allorchè  $A$  è un quadrato; rappresentando questo quadrato per  $a^2$ , avremo

$$u = \sqrt{a^2 t^2 + B};$$

e supponendo  $u = at + \gamma$ , conseguiremo

$$at + \gamma = \sqrt{a^2 t^2 + B};$$

quadrando i due membri, e riducendo, troveremo

$$2\gamma at + \gamma^2 = B,$$

ed in conseguenza

$$t = \frac{B - \gamma^2}{2a\gamma};$$

prendendo per  $\gamma$  un numero *razionale*,  $t$  diverrà un numero *razionale* come pure  $u$ , e lo stesso succederà di  $x$ , e di  $y$ .

Allorchè  $B$  è un quadrato rappresentato da  $\zeta^2$ , l'equazion proposta risolvesi pure colla medesima facilità che pocanzi, supponendo  $u = vt + \zeta$ , il che dà

$$(vt + \zeta)^2 = At^2 + \zeta^2;$$

equazione, che si riduce a

$$v^2 t^2 + 2\zeta v t = A t^2,$$

ovvero dividendo per  $t$ , a

$$v^2 t + 2\zeta v = A t,$$

e d'onde risulta

$$t = \frac{2\zeta v}{A - v^2}.$$

Finalmente, se la quantità  $A t^2 + B$  può essere decomposta in due fattori *razionali*,  $\alpha t + \zeta$ ,  $\alpha' t + \zeta'$ , di maniera che abbiasi

$$(\alpha t + \zeta) (\alpha' t + \zeta') = A t^2 + B,$$

faremo

$$u = v (\alpha t + \zeta);$$

ne dedurremo

$$v^2 (\alpha t + \zeta)^2 = (\alpha t + \zeta) (\alpha' t + \zeta');$$

sopprimendo il fattor comune  $\alpha t + \zeta$ , troveremo

$$v^2 (\alpha t + \zeta) = \alpha' t + \zeta' \quad \text{e} \quad t = \frac{\zeta' - \zeta v^2}{\alpha v^2 - \alpha'}.$$

148. Quando si conosce un valor *razionale* di  $t$ , se ne posson dedur facilmente un'infinità d'altri, che soddisfacciano all'equazione proposta. Per dimostrarlo, sia  $\alpha$  il valor dato di  $t$ , e  $\zeta$  quello di  $u$ , che ne risulta; avremo

$$\zeta = \sqrt{A \alpha^2 + B}, \quad \text{oppure} \quad \zeta^2 = A \alpha^2 + B:$$

togliendo quest'equazione da  $u^2 = A t^2 + B$ , proviene

$$u^2 - \zeta^2 = A (t^2 - \alpha^2), \quad \text{oppure} \quad u^2 = A (t^2 - \alpha^2) + \zeta^2.$$

Ma, se si fa  $u = (t - \alpha)v + \zeta$ , avremo, dopo dell'innalzamento a quadrato, e della sostituzione nell'equazione precedente,

$$v^2 (t - \alpha)^2 + 2\zeta v (t - \alpha) = A (t^2 - \alpha^2);$$

dividendo tutto per  $t - \alpha$ , troveremo

$$\nu^2 (t - \alpha) + 2\zeta\nu = A(t + \alpha),$$

di dove ricaveremo

$$t = \frac{2\zeta\nu - A\alpha - \alpha\nu^2}{A - \nu^2};$$

formula, che darà dei numeri *razionali* per  $t$  allorchè ne prenderemo dei tali per  $\nu$ .

149. È facil di fare tante applicazioni quante vorremo delle formule suddivisate, ed ecco perchè mi limiterò alle seguenti: *Trovar due numeri  $x$ , e  $y$  tali che la somma, o la differenza dei loro quadrati sia eguale ad un quadrato dato  $\zeta^2$* . L'equazioni da risolversi sono

$$y^2 + x^2 = \zeta^2, \quad y^2 - x^2 = \zeta^2,$$

e conducono a

$$y = \sqrt{\zeta^2 - x^2}, \quad y = \sqrt{\zeta^2 + x^2};$$

espressioni, che si rapportano immediatamente al secondo caso del numero antecedente. Faremo  $y = \nu x - \zeta$ , il che darà per l'una

$$(\nu x - \zeta)^2 = \zeta^2 - x^2,$$

e per l'altra

$$(\nu x - \zeta)^2 = \zeta^2 + x^2.$$

Sviluppando quest'equazioni, ricaverem dalla prima

$$x = \frac{2\zeta\nu}{\nu^2 + 1},$$

e dalla seconda

$$x = \frac{2\zeta\nu}{\nu^2 - 1};$$

sostituendo questi valori in quelli di  $y$ , avremo

$$y = \frac{\zeta(\nu^2 - 1)}{\nu^2 + 1}, \quad \text{e } y = \frac{\zeta(\nu^2 + 1)}{\nu^2 - 1};$$

assegnando in seguito dei valori *razionali* a  $\zeta$ , ed a  $\nu$ , n'otterrem parimente dei tali per  $x$ , e per  $y$ .

Se si prenda  $\zeta = 5$ , l'equazioni proposte diverranno

$$y^2 + x^2 = 25, y^2 - x^2 = 25;$$

avremo nella prima

$$x = \frac{10\nu}{\nu^2 + 1}, y = \frac{5(\nu^2 - 1)}{\nu^2 + 1},$$

nella seconda

$$x = \frac{10\nu}{\nu^2 - 1}, y = \frac{5(\nu^2 + 1)}{\nu^2 - 1}.$$

Non si può suppor  $\nu = 1$ , poichè una dell'espressioni di  $y$  darebbe allora  $\frac{0}{2}$ , e l'altra  $\frac{10}{0}$ ; ma facendo successivamente  $\nu = 2, \nu = 3, \nu = 4$ , ec. le soluzioni della prima equazione saranno

$$x = 4, x = 3, x = \frac{40}{17}, \text{ ec.}$$

$$y = 3, y = 4, y = \frac{75}{17}, \text{ ec.},$$

è quelle della seconda

$$x = \frac{20}{3}, x = \frac{30}{8}, x = \frac{40}{15},$$

$$y = \frac{25}{3}, y = \frac{50}{8}, y = \frac{85}{15}.$$

Non si arriva a dei numeri *interi* in quest'ultima allorchè non si danno che dei valori *interi* a  $\nu$ ; ma, se si fa  $\nu = \frac{3}{2}$ , risultano

$$x = 12, \text{ e } y = 13.$$

Non vi è cosa più agevole che risolvere il secondo Problema in numeri *interi* allorchè  $\zeta^2$  è *impari*; poichè la differenza tra il quadrato di  $a$ , e quello di  $a + 1$  essendo  $2a + 1$ , servirà di stabilir l'equazione

$$2a + 1 = \zeta^2,$$

dalla quale ricaveremo

$$a = \frac{\zeta^2 - 1}{2};$$

e prendendo  $x = a$ , e  $y = a + 1$ , ne risulterà  
 $y^2 - x^2 = \zeta^2$ .

Nell'esempio proposto, dove  $\zeta^2 = 25$ , si trova

$$a = \frac{24}{2} = 12,$$

ed in conseguenza

$$x = 12, \text{ e } y = 13,$$

come quì sopra.

È ben d'osservare che si posson sopprimere i denominatori dei valori di  $x$ , e di  $y$  senza cangiare le lor relazioni.

Per il primo Problema trovasi

$$x = 2\zeta v, \quad y = \zeta(v^2 - 1),$$

e la radice della somma dei quadrati di queste quantità diviene

$$\zeta(v^2 + 1).$$

Se si scriva  $\frac{m}{n}$  in luogo di  $v$ , otterremo

$$x = \frac{2\zeta m}{n}, \quad y = \frac{\zeta(m^2 - n^2)}{n^2},$$

$$\zeta(v^2 + 1) = \frac{\zeta(m^2 + n^2)}{n^2}.$$

Faremo sparire i denominatori da queste formule prendendo  $\zeta = n^2$ , e conseguiremo

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2,$$

d'onde ricaverassi  $x^2 + y^2 = (m^2 + n^2)^2$ . Trove-

remo dei risultati analoghi per il secondo Problema (\*).

Non ispingerò più avanti la risoluzione dell'equazioni *indeterminate*. Quei, che vorranno applicarsi in particolare a questo ramo d'Analisi, potranno consultare le *Memorie dell'Accademia di Berlino anno 1769*, ed il 2.<sup>o</sup> Volume dell'*Algebra d'Euler*. Essi vi troveranno la soluzione completa dell'equazione  $u = \sqrt{At^2 + B}$ , datavi da *Lagrange*, e molte altre ricerche non meno importanti.

### *Delle Proprietà dei Numeri.*

150. I numeri considerati in loro stessi indipendentemente da qualunque sistema di numerazione, e da qualunque Problema particolare, han delle proprietà ragguardevolissime; molte son relative alla lor divisibilità gli uni per gli altri, altre alla loro decomposizione in potenze perfette. *Bachet di Meizeiriac*, il quale commentò il primo con

(\*) Queste formule, le quali son semplicissime, danno tutti i numeri *interi*, che possano misurare dei lati di triangoli rettangoli.

Il rapporto dei lati dell'angolo retto, ovvero la tangente d'uno degl'angoli acuti, ha per espressione

$$\frac{2v}{v^2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2}v - \frac{1}{2v}};$$

dal che ne segue che questi triangoli contengon degli angoli di tutte le grandezze. (Vedete le Tavole di *Schulze*, Tomo II. pag. 308).

È manifesto dalla formula

$$\frac{2v}{v^2 - 1} = \frac{v + v}{v \cdot v - 1}$$

che  $v = \text{tang } \frac{1}{2} X$ ,  $X$  rappresentando l'angolo opposto al lato  $x$ .

successo l'Opera, che *Diofante* ci ha lasciata sull' *Aritmetica*, ovvero piuttosto sull' *Analisi numerica*, osservò che *un numero qualunque è sempre o un quadrato, o la somma di due quadrati, o quella di tre, ovvero finalmente quella di quattro ai più.*

10, per esempio, è la somma dei due quadrati 1, e 9;

24, quella dei tre quadrati 4, 4, e 16;

39, quella dei quattro quadrati, 1, 4, 9, e 25

Questa Proposizione fu in seguito dimostrata da *Fermat*, uno dei più gran Geometri, di cui la Francia si onora, e che arricchì di osservazioni il *Commentario* di *Bachet*; ma lo Scritto, nel quale ei si propose di riunire le grandi scoperte, che esso avea fatte sulla Teoria dei numeri, non è a noi pervenuto, e la proprietà precedente non fu che un semplice fatto provato dall'esperienza sino a tanto che *Lagrange* l'ebbe dimostrato nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino*, anno 1770. *Euler* ha dimostrata questa Proposizione d'una maniera un poco più semplice nella seconda Parte degli *Atti dell'anno 1777 dell'Accademia di Pietroburgo*.

Nel 1770, *Wilson* fece conoscere la proprietà seguente dei numeri primi: *Se n esprima un numero primo qualunque, il prodotto 1 . 2 . 3 . . . . (n—1), aumentato dell'unità, sarà divisibile per n.*

Per esempio, sia  $n=7$ , si ha

$$1 . 2 . 3 . . . . (n-1), = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720;$$

aggiungendovi l'unità, s'ottiene 721, che diviso per 7 dà 103 per quoziente. Il medesimo *Lagrange* fu il primo, che dimostrò la verità di questa Proposizione. (*Memorie dell'Accademia di Berlino, anno 1771*).

È ben d'osservare che le proprietà dei numeri corrispondono a dei Problemi d'Analisi *indeterminata*; quella, che noi abbiain citata la prima, riducesi a provare che l'equazione

$$u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = A$$

può sempre esser risolta in numeri *interi* qualunque siasi il numero *intero*, che si prenda per  $A$ ; la seconda psoprietà suppone che nell'equazione

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + 1 = nx$$

$x$  è sempre un numero *intero* allorchè  $n$  è un numero *primo*.

Sarebbe impossibile, senza escir molto dei limiti, ne' quali io debbo contenere quest'Opera, di sviluppar qui le dimostrazioni dei Teoremi, che ho pronunciati; ma, per dare un'idea di queste ricerche, esporrò dietro al *Sig. Gauss*, la *Teoria dei resti*, che lasciano le potenze d'un numero allorchè si dividono per un numero *primo*, la quale conduce a dinosttrar la *Proposizione* indicata nella pag. 96.

151. Sia, per esempio, la serie

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \text{ec.},$$

formata dalle potenze del numero 3, e si divida ciascu de'suoi termini per il numero *primo* 7; avremo i *resti* segnati qui sotto,

$$1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, \text{ec.},$$

ove si vede ritornar dopo 6 divisioni il primo *resto* 1. In quest'esempio il periodo dei *resti* abbraccia tutti i numeri inferiori al divisore; circostanza che non ha luogo negli altri casi, e somministra ai numeri, che vi si rapportano, delle proprietà considerabili, alle quali conducono i Teoremi seguenti.

Nella serie delle potenze,

$$1, a, a^2, a^3, \dots$$

esiste oltre al primo termine un termine  $a^t$ , il quale diviso per un numero  $p$ , primo rispetto alla base  $a$ , lascia l'unità per resto,  $t$  essendo minore di  $p$ .

Uò vale a dire che  $E$  indicando un numero intero qualunque, si ha

$$a^t = Ep + 1.$$

Sia in generale  $a^m = Ep + \alpha$ ; dando a  $m$  un numero di valori eguale a  $p$ , si dee incontrare almeno due volte un medesimo valore di  $\alpha$ , poichè  $\alpha$  è un intero  $< p$ . Sia dunque  $m'$  il valore di  $m$ , che somministra questa ripetizione, ed  $E'$  il valore di  $E$ , che a lui corrisponde; avremo

$$\left. \begin{array}{l} a^m = Ep + \alpha \\ a^{m'} = E'p + \alpha \end{array} \right\} \text{d'onde } a^{m'} - a^m = (E' - E)p = a^m (a^{m'-m} - 1);$$

ma siccome  $a$  non è divisibil per  $p$ ,  $a^m$  non lo sarà neppure (*Elem.* 97); e poichè  $(E' - E)p$  lo è, bisognerà che  $a^{m'-m} - 1$  lo sia; dunque  $a^{m'-m} - 1$  è della forma  $Ep$ , ed  $a^{m'-m}$  della forma  $Ep + 1$ .

È manifesto che  $m' - m < p$ ; partendo dal primo termine  $1 = a^0$ , incontrerem dunque il termine  $a^{m'}$  prima d'essere arrivati all'esponente  $p$ .

Per esempio, nella progressione

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \text{ ec.}$$

si ha  $2^{12} = 4096$ , che diviso per 13, lascia 1 di resto.

152. Partendo dal termine  $a^t = Ep + 1$ , si trova

$$\begin{aligned} a^t &= Ep + 1 \\ a^{t+1} &= a Ep + a \\ a^{t+2} &= a^2 Ep + a^2 \\ a^{t+3} &= a^3 Ep + a^3 \\ \text{ec.;} \end{aligned}$$

dal che si scorge che i *resti* ritornano i medesimi di quelli delle potenze  $a, a^2, a^3 \dots$  sino ad  $a^{t-1}$  inclusivamente; così tutti i *resti*, che posson somministrare i differenti termini della serie, si presentano nell'intervallo, o periodo

$$1, a, a^2, a^3, \dots, a^{t-1}.$$

Si può vedere anco immediatamente che il termine  $a^{n'}$  è della forma  $Ep + 1$ ; poichè, facendo  $a^t = Ep + 1$ , si trova

$$a^{n'} = (Ep + 1)^{n'} = E^n p^n + nEp + 1 = p(E^n p^{n-1} \dots + E) + 1,$$

che riducesi alla forma indicata.

153. Classando per *periodi*, nei quali ritornano i medesimi *resti*, la serie delle potenze d'un numero, ciò, che precede, somministra il mezzo d'ottenere i *resti* delle potenze elevatissime; poichè, se si domandasse, per esempio, nella progressione

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \text{ ec. ,}$$

il *resto* della divisione del termine  $3^{1000}$  per 13, cercherebbesi in primo luogo a qual potenza si ha l'unità per *resto* dividendo per 13, e troverebbesi 27, ovvero  $3^3$ ; avremo in conseguenza così di 3 in 3 l'unità: dividendo dunque 1000 per 3, li *resto* 1 indicherà il posto, che occupa  $3^{1000}$  nel *periodo*, e ch'esso lascia il medesimo *resto* che  $3^1$ , dunque questo *resto* sarà 3.

Tutto ciò, che precede, suppone solamente che  $p$  sia *primo* per rapporto ad  $a$ : ciò, che segue, non s'applica che ai numeri assolutamente *primi*.

154. Se  $p$  è un numero *primo*, che non divida  $a$ , e  $a^t$  il termine del più piccolo esponente, rispetto al quale si abbia  $a^t = Ep + 1$ , l'esponente  $t$  sarà o  $p-1$ , ovvero un divisore di  $p-1$ .

Abbiamo digià veduto che  $t$  non può supporre uguale  $p-1$ ; resta a dimostrare che desso dee dividere  $p-1$ .

Sieno primieramente  $1, \alpha', \alpha'', \text{ ec. i. resti de' termini}$

$$1, a, a^2 \dots a^{t-1};$$

il numero di questi *resti* non essendo eguale che a  $t$ , essi non comprenderan tutti i numeri  $1, 2, 3, \dots, p-1$  nel caso attuale, ove si suppone  $t < p-1$ ; dessi sono d'altronde tutti tra lor differenti, poichè, se ve ne fosser due eguali per due termini  $a^m, a^n$  anteriori al termine  $a^t$ , ne seguirebbe che  $a^n - a^m = a^m (a^{n-m} - 1)$  sarebbe divisibile per  $p$ , ovvero che  $a^{n-m}$  diviso per  $p$  lascerebbe l'unità per *resto*, il che non può succedere nell'intervallo da  $1$  a  $a^t$ .

Sia  $\zeta$  uno dei numeri della serie  $1, 2, \dots, p-1$  non compreso nelle serie  $1, \alpha', \alpha'', \text{ ec. } \dots$ ; se si moltiplichino ciascun termine di quest'ultima per  $\zeta$ , formeremo la serie

$$\zeta, \alpha' \zeta, \alpha'' \zeta, \text{ ec.},$$

la cui divisione per  $p$  condurrà ad una nuova serie di *resti*, ch'io rappresenterò per

$$\zeta, \zeta', \zeta'', \text{ ec.},$$

tutti differenti, 1° tra loro, 2° dai *resti*  $1, \alpha', \alpha'', \dots \text{ ec.}$ , di cui  $\alpha$  n'indicherà uno qualunque.

La prima asserzion si dimostra moltiplicando per  $\zeta$  le due equazioni

$$a^m = Ep + \alpha, \quad a^{m'} = E'p + \alpha',$$

corrispondenti a due termini del *periodo*  $1, a, \dots, a^t$ ; avremo

$$\zeta a^m = \zeta Ep + \alpha \zeta, \quad \zeta a^{m'} = \zeta E'p + \alpha' \zeta:$$

ora, se i numeri  $a\zeta$ ,  $a'\zeta$  divisi per  $p$  lasciassero il medesimo resto  $\zeta'$ , otterrebbe

$$\begin{aligned} a\zeta &= ep + \zeta' \\ a'\zeta &= e'p + \zeta', \end{aligned}$$

di dove

$$\begin{aligned} \zeta a^m &= \zeta Ep + ep + \zeta', \\ \zeta a^{m'} &= \zeta E'p + e'p + \zeta', \\ \zeta(a^{m'} - a^m) &= p(E'\zeta - E\zeta + e' - e): \end{aligned}$$

e siccome  $\zeta$  non è divisibil per  $p$ , bisognerebbe che lo fosse la differenza  $a^{m'} - a^m$ ; il che è impossibile nell'intervallo da 1 ad  $a'$ .

La seconda asserzione s'appoggia su ciò che se uno dei numeri della serie  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ , ec. fosse lo stesso che alcuno di quelli della serie 1,  $a'$ ,  $a''$ , ec., avrebbe nel medesimo tempo

$$a^m = Ep + \alpha, \text{ e } \zeta a^{m'} = \zeta E'p + \alpha;$$

ora ciò non può essere quando  $m' < m$ , perchè ne risulterebbe

$a^m - \zeta a^{m'} = p(E - \zeta E')$ , ovvero  $a^{m'}(a^{m-m'} - \zeta) = p(E - \zeta E')$ ; bisognerebbe dunque che  $a^{m-m'} - \zeta$  fosse divisibile per  $p$ ; e siccome il termine  $a^{m-m'}$  non può lasciare per resto che uno dei numeri 1,  $a'$ ,  $a''$ , ec., bisognerebbe che la differenza tra  $\zeta$ , e quest'ultimo fosse divisibil per  $p$ ; il che non può essere, poichè ambedue son minori di  $p$ .

Se  $m' > m$ , considererebbesi allora il termine  $a^{t+m}$ , che lascia il medesimo resto che  $a^m$ , ed avrebbe

$$a^{t+m} - \zeta a^{m'} = p(E - \zeta E'),$$

di dove

$$a^{m'}(a^{t+m-m'} - \zeta) = p(E - \zeta E');$$

ora  $t + m - m' < t$  in quest'ipotesi; così l'assur-

dità è ancora la stessa come nel caso precedente.

La serie  $\zeta, \zeta', \zeta'',$  ec. non avendo alcun termine comune con la serie  $1, a', a'',$  ec., desse contengono insieme un numero  $2t$  di termini.

Se questi termini non esauriscono i numeri  $1, 2, \dots, p-1$ , si moltiplicheranno i termini della serie  $1, a', a'', \dots$  per  $\gamma$ , uno di quelli che mancano, ed avremo un numero  $t$  di risultati

$$\gamma, a'\gamma, a''\gamma, \text{ ec.},$$

i quali condurranno a  $t$  resti

$$\gamma, \gamma', \gamma'', \text{ ec.}$$

differenti, 1.° tra loro, 2.° dai termini della serie  $1, a', a'',$  ec., 3.° da quelli della serie  $\zeta, \zeta', \zeta'',$  ec.

Le due prime asserzioni si dimostrano come precedentemente; la terza si verifica osservando che, quando s'avessero l'equazioni

$$\begin{aligned} \zeta a^m &= \zeta E p + \zeta', \\ \gamma a^{m'} &= \gamma E' p + \zeta', \end{aligned}$$

ne resulterebbe, se  $m' < m$ ,

$$\begin{aligned} \zeta a^m - \gamma a^{m'} &= p(\zeta E - \gamma E'), \\ a^{m'}(\zeta a^{m-m'} - \gamma) &= p(\zeta E - \gamma E'); \end{aligned}$$

$\zeta a^{m-m'} - \gamma$  sarebbe per conseguenza divisibil per  $p$ ; e siccome  $\zeta a^{m-m'}$  dà per resto uno dei numeri della serie  $\zeta, \zeta',$  ec. minore di  $p$ , bisognerebbe che la differenza tra uno di questi numeri e  $\gamma$ , parimente minor di  $p$ , fosse divisibil per  $p$ ; il che non può essere.

Quando  $m' > m$ , si considera il termine  $a^{t+m}$ , il quale dà il medesimo resto di  $a^m$ , e si ha l'equazione

$$a^m (\zeta a^{t+m-m'} - \gamma) = p(\zeta E - \gamma E'),$$

assurda per la ragione medesima che la precedente.

Unendo i  $t$  termini compresi nella serie  $\gamma, \gamma',$  ec., con quei delle serie precedenti, si hanno in tutto  $3t$  numeri distinti, tutti *interi*, tutti minori di  $p$ .

Se i numeri  $1, 2, \dots, p-1$  non vi si trovano tutti compresi, prendendo uno di quelli, che mancano, formeremo una nuova serie affatto distinta dalle tre precedenti, contenente  $t$  termini; e continuando, poichè nulla s'opponesse a questo procedimento, bisognerà che si esauriscano mediante un numero multiplo di  $t$  quei della serie  $1, 2, \dots, p-1$ , la quale non ne contiene che un numero limitato: dunque  $t$  sarà un divisore di  $p-1$ .

155. La quantità  $\frac{p-1}{t}$  essendo un numero *intero*, se s'elevano i due membri dell'equazione

$$a^t = Ep + 1$$

alla potenza espressa da questo numero, otterremo

$$a^{\frac{t(p-1)}{t}} = a^{p-1} = (Ep + 1)^{\frac{p-1}{t}};$$

tutti i termini dello sviluppo di questa potenza, eccettuato l'ultimo, ch'è 1, saranno divisibili per  $p$ ; così avremo

$$a^{p-1} = E'p + 1;$$

dal che ne segue che il numero  $a^{p-1} - 1$  è *divisibile per  $p$  allorchè  $a$  non lo è*. Teorema di Fermat, e che ha conservato il nome di questo Geometra.

156. *Esistono dei numeri tali, che veruna delle loro potenze, nei gradi inferiori a  $p-1$ , non dà per resto l'unità allorchè dessa potenza si divide per  $p$ .*

Siano  $a, b, c,$  ec. i fattori *primi* di  $p-1$ , di maniera che  $a^\alpha b^\beta c^\gamma,$  ec.  $= p-1$ : dimostreremo primieramente ch'esistono de' numeri  $A, B, C$

tali che le loro potenze  $A^{a^{\alpha}}$ ,  $B^{b^{\beta}}$ ,  $C^{c^{\gamma}}$  ec. son quelle del grado meno elevato, che nella divisione per  $p$  lascian 1 per resto, ed in seguito che il prodotto  $ABC$  ec. di questi numeri è tale, che  $(ABC \text{ ec.})^{p-1}$  è quella delle sue potenze del grado il meno elevato, sulla quale la divisione per  $p$  lascia 1 per resto.

Siccome da 0 sino a  $p$  l'equazione  $py = x^m - 1$  non ammette al più che  $m$  valori interi per  $x$  (144),

ne segue che, se si considera la quantità  $x^{\frac{p-1}{a}} - 1$ , vi sarà necessariamente nella serie 1, 2, 3, ...,  $p-1$  un numero, che posto in luogo di  $x$  non renderà

$x^{\frac{p-1}{a}} - 1$  divisibile per  $p$ .

Sia  $g$  questo numero; se si faccia  $g^{a^{\alpha}} = Ep + h$ , (\*) E indicando sempre un intero, alzando alla potenza  $a^{\alpha}$  i due membri di quest'equazione otterremo

$$g^{p-1} = (Ep + h)^{a^{\alpha}} = E'p + h^{a^{\alpha}},$$

$E'$  indicando pure un numero intero.

Così  $g^{p-1} - h^{a^{\alpha}}$  è divisibil per  $p$ ; ma, per il Teorema di Fermat (155),  $g$  essendo primo riguardo a  $p$ ,  $g^{p-1} - 1$  è divisibile per  $p$ , ovvero  $g^{p-1}$  è della forma  $E''p + 1$ ; dunque

$$E''p + 1 = E'p + h^{a^{\alpha}},$$

(\*) Fa di mestieri riflettere che quì, e in tutto ciò, che segue, la lettera  $g$  ha per esponente la frazione collocata sopra.

d'onde

$$h^{a^\alpha} = E'' p - E' p + 1,$$

ed in conseguenza  $h^{a^\alpha} - 1$  è divisibil per  $p$ . Le potenze  $a^{\alpha-1}$ ,  $a^{\alpha-2}$  ec., per le quali

$$g^{\frac{p-1}{a^{\alpha-1}}} = (E p + h)^{a^{\alpha-1}} = E''' p + h^{a^{\alpha-1}},$$

$$g^{\frac{p-1}{a^{\alpha-2}}} = (E p + h)^{a^{\alpha-2}} = E'''' p + h^{a^{\alpha-2}}$$

non soddisfanno a questa condizione; poichè le

quantità  $g^{\frac{p-1}{2}}$ ,  $g^{\frac{p-1}{\alpha}}$ , ec., per ipotesi, non la soddisfanno; ma, dietro al n.º 152, il più piccolo esponente della potenza del numero  $h$ , che rende la quantità  $h^t - 1$  divisibile per  $p$ , dee dividere  $a^\alpha$ , perchè  $h^{a^\alpha} - 1$  è divisibil per  $p$ : ora  $a$  essendo primo,  $a^\alpha$  non può esser diviso per un altro numero; dunque  $t = a^\alpha$ : dunque il numero  $h$ , resto della divisione

di  $g^{\frac{p-1}{a^\alpha}}$  per  $p$ , è il numero  $A$  dimandato. Si troverebbero nella stessa maniera altri numeri  $B$ ,  $C$ , ec.

Adesso, se si supponesse che il prodotto dei numeri  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sia tale che  $(A B C)^t = E p + 1$ ,  $t$  essendo minore di  $p - 1$ , bisognerà (154) che

$t$  diviso per  $p - 1$ , o sivero che  $\frac{p-1}{t}$  sia intero;

e poichè  $p - 1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ , il quoziente non può essere che uno dei numeri  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ovvero uno dei loro multipli.

Sia, per esempio,  $\frac{p-1}{t} = na$ ; avremo  $p - 1 =$

nat, d' onde  $\frac{p-1}{a} \cdot \frac{1}{t} = n$ ; così  $t$  dividerà  $\frac{p-1}{a}$

in questo caso, ed in virtù dell'ipotesi  $(ABC)^{\frac{p-1}{a}} - 1$  sarà divisibil per  $p$  (152); ma, poichè  $B, C$ , separatamente, son tali che

$$B^{\xi} = E p + 1,$$

$$C^{\gamma} = E' p + 1,$$

il prodotto  $B^{\alpha-1, \xi} C^{\alpha-1, \gamma} = (BC)^{\frac{p-1}{a}} = E'' p + 1$ :

dunque bisognerà che abbiassi pure  $A^{\frac{p-1}{a}} = E''' p + 1$ ,

o sia  $A^{\frac{p-1}{a}} - 1$  divisibile per  $p$ ; ora,  $A$  essendo tale che  $A^{\alpha} - 1$  è divisibil per  $p$ , bisognerà, per il n.° 152, che  $a^{\alpha}$  divida  $\frac{p-1}{a}$ , ovvero che  $\frac{p-1}{a^{\alpha+1}}$  sia un intero; il che è impossibile, poichè  $\frac{p-1}{a^{\alpha+1}} = \frac{a^{\alpha} b^{\xi} c^{\gamma}}{a^{\alpha+1}} = \frac{b^{\xi} c^{\gamma}}{a}$ : non si può dunque supporre  $t$  d'un grado inferiore a  $p-1$ .

157. Segue da ciò che, se s'indichi per  $g$  il prodotto  $ABC$ , ovvero il più piccolo resto della divisione di questo prodotto per  $p$ , ovvero che sia finalmente un numero tale che  $g^{p-1}$  sia la potenza la meno elevata, ch'abbia la forma  $E p + 1$ , i resti della divisione per  $p$  delle potenze

$$g^0, g^1, g^2, g^3, \dots, g^{p-2}$$

comprenderanno tutti i numeri  $1, 2, 3, \dots, p-1$ , ma in un ordine differente dall'ordine naturale.

Se, per esempio,  $p = 19$ , potremo prendere

$g = 2$ , e dividendo le diverse potenze di questo numero per 19, formeremo la Tavola seguente

Potenze.	$2^0$ ,	$2^1$ ,	$2^2$ ,	$2^3$ ,	$2^4$ ,	$2^5$ ,	$2^6$ ,	$2^7$ ,	$2^8$ ,
Resti.	1,	2,	4,	8,	16,	13,	7,	14,	9,
Potenze.	$2^9$ ,	$2^{10}$ ,	$2^{11}$ ,	$2^{12}$ ,	$2^{13}$ ,	$2^{14}$ ,	$2^{15}$ ,	$2^{16}$ ,	$2^{17}$ ,
Resti.	18,	17,	15,	11,	3,	6,	12,	5,	10.

Vi sono tra questi *resti*, e gli esponenti, ai quali dessi corrispondono, delle relazioni analoghe a quelle dei numeri, e dei lor logaritmi, ed *Euler* ha denotato sotto il nome di *radici primitive*, per rapporto al numero  $p$ , quelli, le cui potenze somministrano tutti i *resti*  $1, 2, 3 \dots p-1$ : in tal maniera  $2$  è *radice primitiva* a riguardo di 19. Io non avvanzerò più oltre questa Teoria, la quale contiene un gran numero di resultanze curiose, e per applicarla alla risoluzione dell'equazione  $x^p - 1 = 0$ , profitterò d'alcune osservazioni, che il Sig. *La Place* ha favorito comunicarmi.

158. L'equazione  $x^p - 1 = 0$  essendo divisa per il fattore  $x - 1$ , diventa

$$x^{p-1} + x^{p-2} \dots + x^2 + x + 1 = 0,$$

e quest'ultima equazione esprime nel medesimo tempo la somma di tutte le radici della precedente; poichè, se  $\alpha$  è una delle radici diversa dall'unità, le altre saranno (15)  $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{p-1}$ ; ed in generale la quantità  $\alpha^{p-1}$ , e essendo un numero intero, riducesi alla radice  $\alpha^1$ , poichè  $\alpha^p = 1$ . Queste proprietà essendo rammemorate, si fa manifesto che tutte le radici dell'equazione  $x^{p-1} + x^{p-2} \dots + 1 = 0$  posson essere rappresentate da una sola, che abbia successivamente per esponenti tutte le potenze, fino a quella del grado  $p-2$ , del numero  $g$ , supposto *radice primi-*

*tiva* del numero *primo*  $p$ ; ma  $p - 1$  non essendo *primo*, desso si decompone almeno in due fattori.

Sia, in conseguenza,  $p - 1 = fa$ ; potremo considerare a parte il *periodo* degli esponenti,

$$g^0, g^a, g^{2a}, g^{3a}, \dots, g^{(f-1)a},$$

i termini del quale danno, allorchè si dividan per  $p$ , dei *resti* diversi, e che riproducono i medesimi, a partire dal termine  $g^{fa}$ , poichè  $fa = p - 1$ . Egli è manifesto che, se si moltiplicano tutti questi numeri per  $g^{ra}$ ,  $r$  indicando un *intero*, e si tolga dall'esponente di  $g$  il maggior multiplo di  $p$ , che potrà trovarvisi contenuto, si riprodurranno, ma in un ordine differente, i medesimi esponenti di sopra, ed in conseguenza i medesimi *resti*.

Difatto, per un prodotto qualunque  $g^{ea}g^{ra} = g^{(e+r)a}$ , avremo  $\frac{(e+r)a}{fa} = \frac{e+r}{f}$ , ed il *resto* sarà

uno dei numeri  $1, 2, 3, \dots, f - 1$ . Non sarà lo stesso se si prende per moltiplicatore un numero  $\lambda$  compreso nella serie  $1, 2, \dots, p - 1$ , e che non sia uno de' *resti* dati dalla serie  $g^0, g^a, g^{2a}$ , ec: proveremo, come nel n.º 154, che nasceranno dei prodotti un numero  $f$  di *resti* distinti dagli altri. Scegliendo ancora per moltiplicatore un numero  $\lambda'$  differente dalle due serie di *resti*, che sonosi di già ottenuti, se ne troveran pure  $f$  distinti dai precedenti, e così successivamente. Con questo mezzo la totalità de' *resti* compresi nella serie  $1, 2, \dots, p - 1$  si troverà suddivisa in un numero  $a$  di *periodi* contenenti ciascuno  $f$  numeri.

Dopo queste considerazioni, se si faccia

$$x + x^{g^a} + x^{g^{2a}} \dots + x^{g^{(f-1)a}} = y,$$

e si sostituiscano successivamente a  $x$  le potenze  $x^\lambda, x^{\lambda'}$ , ec., formerem solamente un numero

$a$  di valori distinti per  $y$ , i quali comprenderanno tra loro tutti i valori di  $x$ , poichè l'insieme degli esponenti di questa quantità abbraccerà tutti i numeri  $1, 2, \dots, p-1$ : in conseguenza la nuova incognita  $y$ , non avendo che un numero  $a$  di valori, non dipenderà che da un'equazione del grado  $a$ .

Se il numero  $f$  non è primo, e  $p-1 = af = abh$ , faremo ancora

$$x + x^{\varepsilon^{ab}}, x^{\varepsilon^{2ab}}, \dots + x^{\varepsilon^{(h-1)ab}} = z,$$

la serie degli esponenti

$$\varepsilon^0, \varepsilon^{ab}, \varepsilon^{2ab}, \dots, \varepsilon^{(h-1)ab}$$

non darà che i medesimi *resti*, fintantochè non si moltiplicheranno i suoi termini che per un numero della forma  $\varepsilon^{ab}$ ; ma, se si moltiplichino per uno dei numeri

$$\varepsilon^a, \varepsilon^{2a}, \dots, \varepsilon^{(h-1)a},$$

otterremo per ciascun moltiplicatore un numero  $h$  di potenze, che daranno dei *resti* differenti, e formeranno per conseguenza dei *periodi* distinti dal primo: ed il numero totale dei termini di questi *periodi* riuniti essendo  $bh$ , ovvero  $f$ , dessi comprenderanno tutti gli esponenti contenuti in  $y$ . Segue da ciò che, per un valore di  $y$ , la nuova incognita  $z$  n'avrà un numero  $b$ ; ma  $z$ , e  $y$  essendo espressi dalla medesima quantità  $x$ , la quale può eliminarsi,  $z$  è necessariamente *funzione* di  $y$ , e debb'esser data in  $y$  mediante un'equazione del grado  $b$  solamente.

Se  $h$  non è un numero *primo*, ma che s'abbia  $h = cl$ , faremo

$$x + x^{\varepsilon^{abc}}, x^{\varepsilon^{2abc}}, \dots + x^{\varepsilon^{(l-1)abc}} = s;$$

ci convinceremo, come quì sopra, che la moltiplicazione dei termini della serie

$$g^0, g^{abc}, g^{2abc}, \dots, g^{(l-1)abc}$$

per ciascuno di quelli della serie

$$g^{ab}, g^{2ab}, \dots, g^{(s-1)ab}$$

produrrà un numero  $cl$ , ovvero  $h$ , di potenze di  $g$ , che daranno de' resti diversi, e l'insieme dei quali abbraccierà tutti quelli, che lasciano i termini della serie

$$g^0, g^{ab}, g^{2ab}, \dots, g^{(h-1)ab};$$

e che in conseguenza, per un medesimo valore di  $z$ ,  $s$  avranno  $c$  valori distinti, e saranno dati da un'equazione del grado  $c$ .

Proseguiremo quest'andamento fino a che non siam giunti al fattore  $z$ , necessariamente compreso tra quelli di  $p-1$ ; e supponendo che  $l$  sia questo fattore, avremo

$$x + x^{s^{abc}} = s;$$

ma poichè  $g^{abc} = g^{\frac{p-1}{2}}$ , e  $g^{p-1} - 1$  è divisibile per  $p$ , il prodotto  $\left(g^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(g^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$  sarà divisibile per  $p$ ; e siccome, per la determinazione del numero

$g$ , la quantità  $g^{\frac{p-1}{2}} - 1$  non è divisibile per  $p$ , lo

sarà il fattore  $g^{\frac{p-1}{2}} + 1$ ; ed in conseguenza  $g^{\frac{p-1}{2}}$  lascia  $p-1$  per resto; dal che ne resulta che  $x^{s^{abc}} =$

$x^{p-1} = \frac{1}{x}$ : allor l'equazione

$$x + x^{s^{abc}} = s$$

diviene

$$x + \frac{1}{x} = s, \text{ ovvero } x^2 - sx + 1 = 0.$$

Ecco dunque  $x$  determinato da un'equazione di secondo grado col mezzo di  $s$ , il quale dipende da  $z$  mediante un'equazione del grado  $c$ , l'incognita  $z$  dipendendo da  $y$  per un'equazione del grado  $b$ , e finalmente l'incognita  $y$  essendo data da un'equazione del grado  $a$ .

159. L'esposizione delle particolarità relative alla maniera di formare queste equazioni mi condurrebbe troppo lontano; gli esempj seguenti suppliran tanto quanto l'esige l'indole di quest'Opera.

Sia  $p = 17$ ; l'equazione  $x^{17} - 1 = 0$ , divisa per  $x - 1$ , somministra

$$x^{16} + x^{15} \dots + x^2 + x + 1 = 0:$$

$p - 1 = 16 = 2^4$ : questo numero non ammettendo per fattore *primo* se non che 2, l'equazioni, dalle quali dipende la proposta, non sono che di secondo grado. La *minor radice primitiva* di 17 è 3; la prima decomposizione di 16 è 2.8; si ha dunque

$$g = 3, a = 2, f = 8,$$

ovvero

$$x + x^{3^2} + x^{3^4} + x^{3^6} + x^{3^8} + x^{3^{10}} + x^{3^{12}} + x^{3^{14}} = y,$$

il che torna a

$$x + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16} + x^8 + x^4 + x^2 = y.$$

Se si sostituisca in luogo di  $x$  una delle potenze

$$x^3, x^5, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}, x^{14},$$

i cui esponenti compongono, con quelli del valor precedente, tutti i numeri da 1 fino a 16 inclusivamente, e si tolgano dal prodotto degli esponenti i multipli di 17, poichè  $x^{17} = 1$ , non troverem

sempre, ma in un ordine differente, se non che un solo valore di  $y$ , e che sarà affatto distinto dal precedente. Impiegando  $x^3$ , si ha

$$x^3 + x^{10} + x^5 + x^{11} + x^{14} + x^7 + x^{12} + x^6 = y;$$

sviluppando il prodotto

$$(y - x - x^9 - x^{13} - x^{15} - x^{16} - x^8 - x^4 - x^2) \\ \times (y - x^3 - x^{10} - x^5 - x^{11} - x^{14} - x^7 - x^{12} - x^6),$$

ed esprimendo le *funzioni* di  $x$  dietro alle relazioni indicate nel n.º 15, formerem l'equazione

$$y^2 + y - 4 = 0.$$

Decomponendo 8 nei suoi fattori 2, e 4, si ottiene

$$b=2, h=4, ab=4;$$

si fa

$$x + x^{3^4} + x^{3^3} + x^{3^{12}} = z,$$

ovvero

$$x + x^{13} + x^{16} + x^4 = z.$$

Ora, si sostituisca a  $x$  una delle quattro potenze, che contiene il valor di  $y$ , e che non sono in quello, che abbiamo assegnato a  $z$ ,  $x^2$ , per esempio, avremo

$$x^2 + x^9 + x^{15} + x^8 = z,$$

e l'equazione in  $z$ , risultante dal prodotto

$$(z - x - x^{13} - x^{16} - x^4)(z - x^2 - x^9 - x^{15} - x^8) = 0,$$

sarà

$$z^2 - yz - 1 = 0.$$

Finalmente decomponendo 4 in 2 . 2, si ha

$$c=2, l=2, abc=8,$$

e si fa

$$x + x^{3^8} = s,$$

ovvero

$$x + x^{16} = s.$$

Se si sostituisca  $x^4$  a  $x$ , otterremo

$$x^4 + x^{13} = s;$$

l'equazione in  $s$  si formerà dal prodotto

$$(s - x - x^{16})(s - x^4 - x^{13}) = 0,$$

e sarà

$$s^2 - zs + x^{14} + x^5 + x^{12} + x^3 = 0;$$

e la funzione  $x^{14} + x^5 + x^{12} + x^3$ , come è facile di verificare, riducesi a  $\frac{z^2 - 4 + z - y}{2}$ .

Ciò fatto, osserveremo che  $x^{16} = \frac{x^{17}}{x} = \frac{1}{x}$ ,

e che in conseguenza

$$x + \frac{1}{x} = s, \text{ ovvero } x^2 - sx + 1 = 0.$$

Ecco dunque la risoluzione dell'equazione  $x^{17} - 1 = 0$  ridotta a quella delle quattro equazioni combinate

$$y^2 + y - 4 = 0,$$

$$z^2 - yz - 1 = 0,$$

$$s^2 - sz + \frac{z^2 - 4 + z - y}{2} = 0,$$

$$x^2 - sx + 1 = 0.$$

Sia ancora  $p = 19$ , l'equazione  $x^{19} - 1 = 0$ , essendo ridotta a

$$x^{18} + x^{17} \dots + x^2 + x + 1 = 0,$$

si ha  $p - 1 = 18$ , il che dà immediatamente  $a = 3$ ,  $f = 6$ ; la radice primitiva è 2, e si pone per conseguenza,

$$x + x^{2^3} + x^{2^6} + x^{2^9} + x^{2^{12}} + x^{2^{15}} = y,$$

ovvero

$$x + x^8 + x^7 + x^{18} + x^{11} + x^{12} = y.$$

Sostituendo in seguito  $x^2$  a  $x$ , avremo

$$x^2 + x^{16} + x^{14} + x^{17} + x^3 + x^5 = y;$$

sostituendo altresì, nel primo valor di  $y$ ,  $x^4$  a  $x$ , conseguiremo

$$x^4 + x^{13} + x^9 + x^{15} + x^6 + x^{10} = y:$$

questi tre valori contengono, come già doveamo aspettarci, tutte le potenze di  $x$  comprese da  $x^1$  sino a  $x^{18}$  inclusivamente, e conducono all'equazione

$$y^3 + y^2 + 6y - 7 = 0.$$

Decomponendo 6 in 3.2, si ha  $b=3$ ,  $h=2$ ; e si pone

$$x + x^{2^9} = z,$$

ovvero

$$x + x^{18} = z.$$

I tre valori di  $z$  si formano mediante la sostituzione delle altre potenze di  $x$ , le quali fanno parte della prima di  $y$ , ed arrivasi all'equazione

$$z^3 - yz^2 + (y^2 - 5)z + 3 + y - y^2 = 0;$$

dipoi, a cagione di  $x^{18} = \frac{1}{x}$ , si ha finalmente

$$x^2 - zx + 1 = 0.$$

Così la risoluzione dell'equazione  $x^{19} - 1 = 0$  è ridotta a quella dell'equazioni

$$\begin{aligned} y^3 + y^2 + 6y - 7 &= 0, \\ z^3 - yz^2 + (y^2 - 5)z + 3 + y - y^2 &= 0, \\ x^2 - zx + 1 &= 0 \quad (*). \end{aligned}$$

(\*) Si può vedere nel *Trattato Elementare del Calcolo differenziale, e integrale* che l'equazione  $x^p - 1 = 0$

Affine di conoscere a fondo la *Teoria dei Numeri* si può consultar l'Opera ove il Sig. *Legendre* ha il primo riunita questa Teoria in un corpo di dottrina completa, e le *Disquisitiones arithmeticae* del Sig. *Gauss*, dalle quali ho ricavato ciò, che precede. I primi materiali di questa Teoria son l'opera dei più gran Geometri del nostro Secolo, i quali han dimostrata la maggior parte delle Proposizioni, delle quali *Fermat* non ci aveva lasciato che gli enunciati: i loro lavori si trovano nelle *Raccolte* delle Accademie di Parigi, di Berlino, e di Pietroburgo.

---

riportasi alla divisione della Circonferenza del Cerchio in un numero  $p$  di parti eguali; ed in conseguenza, dietro a ciò che precede, la divisione in diciassette parti non dipendendo che da equazioni di secondo grado, si eseguirebbe con una costruzione geometrica mediante la Linea retta, ed il Circolo.

F I N E .

# I N D I C E

<i>Delle funzioni simmetriche delle radici dell' equazioni.</i>	pag. 3
Loro definizione, e loro proprietà.	4
Relazioni delle somme delle diverse potenze delle radici d' un' equazione con i suoi coefficienti.	9
Come si possa esprimere qualunque <i>funzione simmetrica</i> delle radici col mezzo di queste somme.	10
Formazione d' un' equazione, di cui le radici son delle <i>funzioni</i> qualunque di quelle d' un' equazione data.	13
Formazione dell' equazione ai quadrati delle differenze delle radici.	15
Teoria dell' eliminazione nell' equazioni a due incognite, di qualunque grado che desse sieno.	17
Determinazione delle <i>funzioni simmetriche</i> delle radici dell' equazioni a più incognite.	19
Teoria dell' eliminazione tra un numero qualunque d' equazioni.	23
<i>Della risoluzione generale dell' equazioni.</i>	26
Risoluzione dell' equazioni di secondo grado.	27
Proprietà delle radici dell' equazione $y^n - 1 = 0$ ,	29
Risoluzione dell' equazioni di terzo grado.	32
Risoluzione dell' equazioni di quarto grado.	37
<i>Osservazioni sopra l' espressioni delle radici dell' equazioni del terzo, e del quarto grado.</i>	44
Esame del <i>caso irriducibile</i> dell' equazione di terzo grado.	ivi
Prova diretta che le tre radici sono allora <i>reali</i> .	50
Metodo per approssimarsi alle radici in questo caso.	52
Esame delle radici dell' equazioni di quarto grado.	55

- Un' equazione di quarto grado, di cui i coefficienti sono *reali*, può sempre essere decomposta in fattori *reali* di secondo grado. 58
- Delle radici immaginarie in generale.* 59
- Qualunque equazione d' un grado pari è decomponibile in fattori *reali* di secondo grado. *ivi*
- Le radici d' un' equazione qualunque sono o *reali*, o *immaginarie*, e della forma di quelle del secondo grado. 65
- Qualunque espressione algebrica *immaginaria* è della forma  $A \pm B\sqrt{-1}$  *ivi*
- Mezzo per riconoscere se un' equazione ha delle radici *reali*, o *immaginarie*. 68
- Regola di *Descartes* sul numero delle radici *positive*, e *negative*. *ivi*
- Questa regola dà il numero esatto delle radici *positive*, e delle radici *negative* allorchè non ve ne sono delle *immaginarie*. 73
- Qualche volta dessa fa conoscere l' esistenza delle radici *immaginarie*. 74
- Metodi per ottener le radici *immaginarie*. 76
- Dell' estrazione delle radici delle quantità in parte commensurabili, ed in parte incommensurabili.* 77
- Dell' abbassamento dell' equazioni.* 83
- Un' equazione s'abbassa allorchè si conosce una relazione tra alcune delle sue radici. *ivi*
- Metodi per effettuar quest' abbassamento. *ivi*
- Un' equazione, che ha delle radici *eguali*, è suscettibile d' abbassamento. 87
- Proprietà generale dell' equazioni, le quali hanno delle radici *eguali*. 88
- Equazioni *reciproche*. 90
- Le osservazioni fatte sopra quest' equazioni s' applicano all' equazione formata dalle radici *immaginarie* dell' unità, e somministrano il mezzo di risolvere l' equazione  $y^n - 1 = 0$ , allorchè  $n$  non sorpassa 10. 94

- Metodi per decomporre dell'equazioni in fattori d'un grado dato. 99
- La determinazione di questi fattori per il quarto grado conduce alla risoluzione della proposta. 102
- Dell'eliminazione dei radicali: della maniera di formare l'equazione allorchè si ha l'espressione della sua radice.* 107
- Si fanno svanire i *radicali* formando l'equazione *razionale*, dalla quale dipende la radice data. *ivi*
- Il metodo per fare svanire i *radicali* riducesi all'eliminazione. 109
- Questo metodo fa vedere a qual grado dee salir l'equazione, di cui si ha la radice. 110
- Metodo d'*Euler* per la determinazione d'un'equazione d'un grado qualunque dietro alla forma della sua radice. 112
- Applicazioni al terzo, quarto, e quinto grado. 113
- Metodo di *Bezout* per risolvere l'equazioni. 118
- Congetture sull'espressione delle radici d'un'equazione qualunque. *ivi*
- Dell'equazioni, di cui una delle radici è la somma di due *radicali* del medesimo grado. 120
- Riflessioni sulla risoluzione generale dell'equazioni. 125
- Considerazioni tendenti a dimostrare ch'esiste una quantità, o *reale*, o *immaginaria*, la quale soddisfa ad un'equazione qualunque. 126
- Di alcune trasformazioni, le quali conducono alla risoluzione dell'equazioni dei quattro primi gradi.* 131
- Metodo di *Tschirnaüs* per fare svanir tanti termini quanti ne vorremo da un'equazione. *ivi*
- Metodo di *Cardano* per il terzo grado. 139
- Metodo analogo per il quarto grado. 142
- Dello sviluppo delle potenze frazionarie, e negative in serie.* 145
- Riduzione dell'espressioni *irrazionali* in serie mediante l'estrazione della radice quadra. *ivi*

- Dimostrazione data da *Euler* della formula del *binomio* per un esponente *frazionario*, o *negativo*. 147
- Altra dimostrazione. 151
- Uso di questa formula per l'estrazione delle radici. 156
- Formule per approssimarsi rapidamente alla radice d'una quantità *irrazionale*. 159
- Serie, le quali esprimono le radici dell'equazione del terzo grado per il *caso irriducibile*. 161
- Sviluppo in serie di  $(a + b\sqrt{-1})^m \pm (a - b\sqrt{-1})^n$ . 164
- Formula per alzare un *polinomio* ad una potenza qualunque. 171
- Sviluppo di  $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ec.)^n$ . 174
- Della somma delle serie, il cui termine generale è una funzione razionale, ed intera del numero de' loro termini.* 176
- Somma delle potenze simili della progressione per differenze. *ivi*
- Serie, che si posson sommare col mezzo delle precedenti. 181
- Serie ricorrenti.* 184
- Maniera di sviluppare in serie una frazione *razionale*. *ivi*
- Ricerca dell'espressione della somma d'un numero qualunque di termini d'una *serie ricorrente*. 187
- Metodo per ritornar da una serie alla frazione, dalla quale dessa è derivata. 188
- Ricerca del *termine generale* d'una *serie ricorrente*. 191
- Metodo per riconoscere se una serie proposta sia *ricorrente*. 198
- Sviluppo in serie degli esponenziali, e dei logaritmi.* 205
- Espressione in serie d'un numero per mezzo del suo *logaritmo*. 208
- Espressioni in serie del *logaritmo* per mezzo del numero. 209
- Serie esprimenti la relazione, ch'esiste tra i *logaritmi* di più numeri consecutivi. 214

Maniera di dedurre immediatamente dall'equazione $y = a^x$ l'espressione di $x$ in $y$ .	216
<i>Del regresso delle serie.</i>	218
<i>Delle frazioni continue.</i>	221
Loro origine.	222
Regola per convertire in frazione <i>continua</i> una frazione <i>ordinaria</i> .	227
Maniera d'ottenere le frazioni <i>convergenti</i> .	234
Proprietà di quest'ultime.	236
Inserzione delle frazioni intermedie.	246
Applicazione della Teoria precedente alla ricerca dei valori approssimativi delle frazioni espresse da dei numeri grandi.	252
Una frazione <i>continua periodica</i> può sempre essere risguardata come la radice d'un'equazione di secondo grado.	263
<i>Di alcune altre trasformazioni delle frazioni.</i>	265
<i>Nozioni generali sull'Analisi indeterminata.</i>	274
Risoluzione dei Problemi <i>indeterminati</i> di primo grado.	ivi
Dei Problemi <i>indeterminati</i> , che passano il primo grado.	284
<i>Delle proprietà de' numeri.</i>	294
Dei <i>resti</i> , che lasciano le potenze d'un numero allorchè desse si dividono per il medesimo numero <i>primo</i> .	296
Teorema di <i>Fermat</i> .	302
Della risoluzione dell'equazione $x^p - 1 = 0$ , essendo $p$ un numero <i>primo</i> .	306

20	31	<i>indeterminato</i>	<i>indeterminato</i> qualunque
22	18	<i>Algebraicae</i>	<i>Algebraicae</i>
23	27	la dimostrazion generale	la dimostrazion generale della proposizione
26	5	appropriati ad	modificati per
27	30	necessariamente dal secondo grado	necessariamente da un' e- quazione di secondo grado
41	21	peecede	precede
45	28	a cubo	al cubo
46	9	degli <i>immaginarj</i>	dagli <i>immaginarj</i>
63	21	del che	dal che
69	1	per	per
76	19	tre a tre	tre a tre ec.
90	6	si si sostituisce	si sostituisce
93	6	equidistanti	equidistanti
115	5	irragionali	irrazionali
124	16	riducesi	riducasi
126	15	equazioni	equazioni numeriche
137	33	ad ultimo termine	ed ultimo termine
139	24	bel principio	sul principio
155	17	da quelle	da quello
159	8	in virtù di ciò	per far ciò
212	13	<i>z'</i>	<i>z'</i>
215	12	contenendo	contengono
226	16	questo casso	questo caso
227	24	<i>frazione</i>	<i>frazione</i> proposta
239	13	conseguenza	conseguenze
292	16	della primi	della prima