Euclidis
Element.
Tom. 2.



EVCLIDIS POSTERIORES

Libri sex a x. ad xv.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

AD usum

CAIETAN I

SAV

EVCLIDIS ELEMENTVM X.

DEFINITIONES.

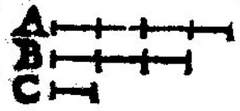
I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantũ satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incõmensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harũ linearũ cõplures magnitudines cũ solidæ, tũ planæ, neq; pfecte intelligi possunt, neq; cũ res tulerit, in opus atq; vsum cõferri; propterea quòd plerunq; latera earũ incõmensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cum & hæc incõmensurabilia sæpe numero existant, vt ad finẽ huius libri demonstrabimus. Quoniã vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearũ, de quibus disserit, obscuritatẽ; oẽs nervos industriæ meæ in eo cõtendã, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demõstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui p. cedentiũ tamẽ librorũ demõstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neq; n. in eorũ possum sententiã ire, qui putãt ad eius intelligentiã esse necessariã eã partẽ Arithmetices,*

metices, quæ de radicibus numerorũ, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocãt, sermonẽ instituit: Immo cõtra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionẽ pfectã illius partis Arithmetices pẽdere ex hoc 10. lib. tãtũ abesse, vt existimẽ, tractationẽ illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quã qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum, non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem



dem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum quia eas linea tam vnius palmi; quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Necnon corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, nec non, & solida, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1 commensurabiles simpliciter diximus: quædam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earũ quadrata sint commensurabilia; aliæ vero ita se habent, vt & quadrata

drata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſq; lineæ, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

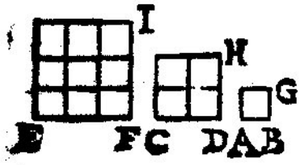
QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia cõmenſurabiles, nõ autẽ cõmenſurabiles longitudine; reſpondendũ eſt, lineas longitudine cõmenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione cõmenſurabiliũ magnitudinũ, cũ huiuſmodi lineas vna cõmunis menſura metiatur, vt dictũ eſt: At vero quoniã lineas potẽtia cõmenſurabiles nulla cõmunis menſura metiri poteſt, ſed tantũmodo earum quadrata idem ſpacium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmenſurabiles tã longitudine quàm potẽtia, hãc quaſi conuenientiã inter ſe, & connexionẽ, vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etiã cõmenſurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari poſſint cõmenſurabiles longitudine, quin earũ quadrata cõmenſurabilia quoq; ſint; quoniam quadratum ex cõmuni earum menſura deſcriptum metitur tanquã menſura cõmunis earũ quadrata, vt in ſubiecta figura apparet:



paret: ſicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratũ A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiã cõmenſurabiles lõgitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur. Rurſus inter lineas incõmenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommẽſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.

V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ lineæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamuis eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdam dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine,

& potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA *autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis* ῥητὴ; *Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoq;, ac notæ; cũ quælibet in quotcunq; partes æquales possit diuidi.*

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET *lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum.*

ITAQVE *ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri* **20.** *vel* 1000. *&c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est* 20. *vel* 1000. *&c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui eam Irrationalem vocant, eo quod numero non possit exprimi.*

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM *in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt cõmensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri* 20. *vel* 1000. *&c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est* 20. *vel* 1000. *&c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tãtum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.*

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM *linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notũ, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesve dicuntur.*

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES *planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidẽ ex positione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodũ etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.*

QVONIAM *vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex* 3. *defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin.* 6. *Rationales.*

HVIC

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato a Rationali lineæ deſcripto incommenſurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidem quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi vero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunq; figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrata Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturq; in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas,

illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREVNDVM quoq; non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atq; potentia tantum: apponere fere ſemper vocibus iſtis: commenſurabiles, ac incommenſurabiles: Vix autem, & rariſſime his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantũ; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt varie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; ſint locuti.

CAETERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, ſiue Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem.

AXIOMATA, SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunq; magnitudines metiens, compoſitam quoq; ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunq; magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totã magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquã.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce numeri in vocẽ magnitudinis.

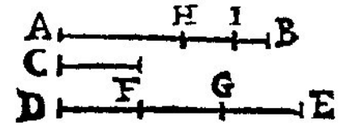
CAETERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus, vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtrat. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonẽ

Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

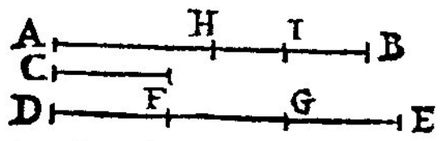
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quãdam, quæ minor ſit quam C. Multiplicetur C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quam AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quam AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales; detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI; atque hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB, multitudine æquales ſint partibus ipſius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot ſunt ipſæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior eſt quam AB; At ex DE, ablatum eſt DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex DE, dimidium auferretur, nec non & ex AB, dimidium, eſſet quoque reliquũ ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quã dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium;

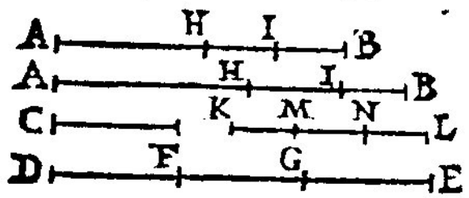


midium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demõstrabitur, si ex AB, auferat dimidiũ AH, & ex reliquo HB, rursus dimidiũ HI, &c. Nãeadẽrõne erit reliquũ FE, maiꝰ reliquo HB, nec nõ & reliquũ GE, maius reliquo IB; Cũ ex maiori DE, ablatũ sit DF, minꝰ q̃ dimidiũ, vel certe dimidiũ; & ex minori AB, dimidiũ AH, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam vero AH,



maior est quam HB, vel certe illi æqualis, si ablatũ sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoq; AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quã IB, vel certe illi æqualis; est autẽ IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quã MN, vel illi æqualis; atq; adeo tota AI, maior, quã tota KN. Additis ergo æqualibꝰ IB, NL, erit tota AB, maior quã tota KL: Est aũt DE, maior adhuc, quã AB. Multo ergo maior erit DE, quã KL. Quare cũ sit vt DE ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta.n.fuit KL, ipsius IB, tã multiplex, quã multiplex
14. *quinti.* est DE, ipsius C,) erit quoq; C, maior quã IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrãdum.

SCHO-

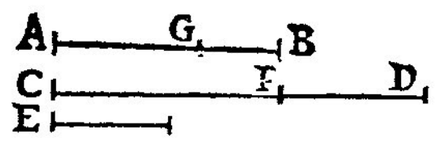
SCHOLION.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

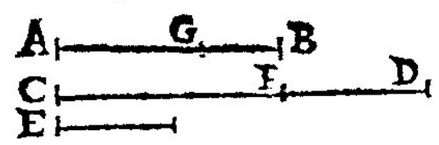
DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquã reliqua metiatur præcedentẽ. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si.n.non sunt incõmensurabiles, metietur eas aliqua mẽsura cõmunis. Metiatur eas si fieri



potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta aũt AB, ex CD, quoties põt, relinquat FD, se minorẽ, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorẽ GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atq; hoc semp fiat. Relinquetur ergo tãdẽ ex CD, vel AB, magnitudo quędã minor quã E. (Qm̃ cũ AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quã dimidia ipsius CD, alias si esset dimidia, vel minor quã dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodẽ modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, *1. decimi.*

quam

1. *decimi* quam dimidium, relinquetur tandem magnitudo quædã minor quam E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quam E.



Quoniam igitur E, metitur A B; & A B, metitur C F; metietur quoque E, ipsam C F: Metitur autem E, & totam C D. Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

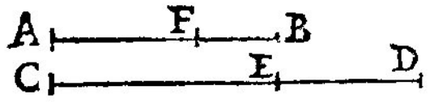
2. *pron.*
3. *pron.*
2. *pron.*
3. *pron.*

SCHOLION.

Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

Sint incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex D, & reliqua sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquã reliquam metiri præcedentẽ.



Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D. Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur autem & se ipsam: Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E. Igitur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Ostensa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, vtranq; A B, C D, metitur. quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositũ.

2. *pron.*
1. *pron.*
2. *pron.*
1. *pron.*

Similiter & hoc demonstrabimus.

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

Nam si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines, incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

Itaque facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ, sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij: Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, ostensum est, eandem reliquam F B, metiri vtranque magnitudinem A B, C D. Si vero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

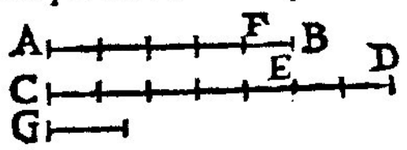
PROBL. 1. PROPOS. 3. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

Datae duæ magnitudines commensurabiles sint A B, C D, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam A B, C D, commensurabiles sunt, fit ut si minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties potest, relinquat E D;

B & E D,

& E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B. & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione; tandē reliqua quępiam magnitudo præcedentem metiatur. per 1. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentē E D. Dico F B, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim utranque metiatur, ita oſtendemus. Quomiā F B, metitur E D; & E D, metitur A F; metietur quoq; F B, ipſam A F. At metitur F B, & ſe ipſam: Igitur F B, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E, quā A B, metitur. Cū ergo, & ipſam E D, metiatur; metietur quoq; F B, totā C D. Metitur ergo F B, utranq; A B, C D. Quare utriuſque A B, C D, communis menſura eſt F B.



2. pron.
1. & 2. pron.
1. pron.

Quod autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia cōmunis earum menſura, maior quam F B. Sit etgo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam F B. Quia igitur G, metitur utranque A B, C B; metitur autem & A B, ipſam C E; metietur quoque G, ipſam C E: At metitur quoque totam C D. Igitur G, reliquam quoque E D, metietur. Metitur autem E D, ipſam A F: Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

2. pron.
3. pron.
2. pron.
3. pron.

Quod ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita ut detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, amborum maxima menſura cōmunis; cū & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

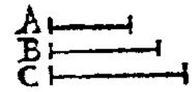
ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D.

Demon-

Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam menſuram F B. Eademque eſt ratio de cæteris.

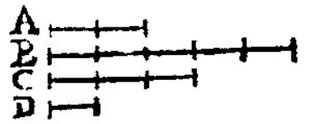
SCHOLION.

Ex his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non.

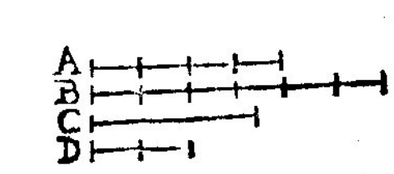


Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuum eſt, omnes tres A, B, C, eſſe incommenſurabiles, quod nullam habere poſſint communem menſuram, propter incommenſurabiles magnitudines A, & B.

Si vero A, & B, fuerint commenſurabiles; ſit earum maxima communis menſura inuenta D; quæ ſi metiatur quoque magnitudinem C, manifeſtum eſt, tres magnitudines A, B, C, commenſurabiles eſſe, cum habeant communem menſuram D. 3. decimi.



Quod ſi D, maxima menſura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commenſurabiles, vel non. Si ſunt incommenſurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommenſurabiles. Si enim credantur eſſe commenſurabiles, metietur earum maxima communis menſura ipſam D, maximam menſuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommenſurabiles. Quod eſt contra hypotheſim.



Si vero C, & D, ſunt commēſurabiles, erūt quoq; tres A, B, C, cōmenſurabiles. Inuenta n. E, maxima mēſura ipſarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipſas A, & B; metietur quoque E, ipſas 3. decimi. 2. pron.

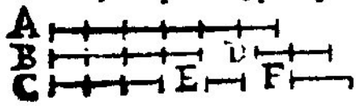
F, ipſas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

SIMILITER *explorabimus, an plures datæ magnitudines, quam tres, ſint commenſurabiles, nec ne. Nam ſi datæ ſint quatuor, experiemur id primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, ut de tribus magnitudinibus eſt dictum.*

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commenſurabiles **A, B, C**, quarum maximam menſuram inuenire oporteat. Sit **D**, maxima menſura ipſarum **A, B**, inuenta. Si ergo **D**, metiatur quoque **C**, perſpicuum eſt **D**, maximam eſſe menſuram omnium trium **A, B, C**. Nã ſi maior magnitudo quã **D**, metiri dicatur magnitudines **A, B, C**; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib maximã menſuram ipſarum **A, B**, nempe ipſam **D**, maior magnitudo minorem. quod fieri non poteſt. Si uero **D**, non metiatur **C**, erunt ſaltem **D, C**, commenſurabiles Cum enim **A, B, C**, ſint commenſurabiles, metietur quælibet earum menſura communis ipſam **D**, maximam mẽſuram ipſarum **A, B**, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa menſura metiatur quoque ipſam **C**; erunt **D**, & **C**, commenſurabiles. Sit igitur **E**, maxima menſura ipſarum inuẽta. Dico **E**, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum **A, B, C**. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia **E**, metitur **D**, & **C**; & **D**, metitur **A**, & **B**; metietur quoque **E**, ipſas **A**, & **B**. Metitur autem & ipſam **C**: Igitur **E**, menſura eſt communis ipſarum **A, B, C**.



3. decimi

3. decimi

2. pron.

QVOD autem **E**, ſit earum maxima menſura, hoc modo

do confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit **F**, maior quã **E**, ſi fieri poteſt, earum menſura communis. Quoniam igitur **F**, metitur **A**, & **B**; metietur quoque **D**, earum maximam menſuram, per coroll. præcedentis propos. Metitur autem & **C**: Igitur **F**, metiens **D**, & **C**, metietur quoque **E**, earum menſuram maximam, ex eodem coroll maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam **E**, magnitudines **A, B, C**, metitur; Ac propterea **E**, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commẽſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex ultima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem **F**, ſi metiatur ipſas **A, B, C**, metiri quoque **E**, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

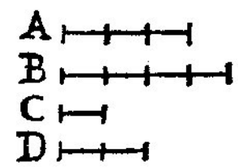
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; ſolumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua uero omnia abſoluenda erunt, ut de tribus magnitudinibus eſt dictũ.

LEMMA.

SI ſint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidẽ numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita F, ad

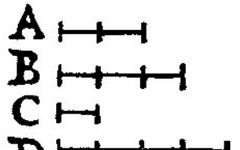
G; & ut C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, ut A, ad D, ita E, ad H. Quoniam ex iis, quæ ad de



E, 3. F, 4. G, 1. H, 2.

fin. 5. lib. 6. a nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse ut A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, ut in hoc exemplo apparet, in quo est, ut A, ad B, ita G, ad H; & ut B, ad C, ita F, ad G; & ut C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.



E, 3. F, 12. G, 4. H, 6.

SCHOLION.

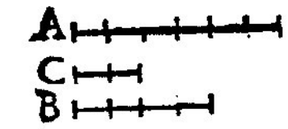
QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantũ est in quantitatibus eiusdẽ generis; In numeris quidem lib. 7. Libro uero 5. in magnitudinibus. quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiã ad hoc lemma transferri possit, cũ omnes demonstrationes illius libri numeris quoq; cõueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D,

C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea re petita metiẽ A, toties unitas repetita metiatur numerum D: Et quoties ea



D, 3. Vnitas. E, 2.

3. decimi.

dem C, repetita metitur B toties unitas repetita metiatur numerũ E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & unitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinẽ C, atq; numerus D, unitatem. Quare erit ut A, ad C ita numerus D, ad unitatem: Est autẽ & ut C, ad B, ita unitas ad numerũ E; quod C, ipsam B, atq; unitas numerũ E, æque metiatur. Igitur p 5ma præcedẽs, erit ex æquo, ut A, magnitudo ad B, magnitudinẽ, ita D, numerus ad E, numerum. Cõmensurabiles ergo magnitudines inter se rationẽ habent, &c. Quod erat demõstrandum.

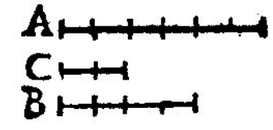
SCHOLION.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximã cõmunẽ mensurã propositarũ magnitudinũ cõmẽsurabiliũ, qualis fuit C, ipsarũ A, & B; perspicuũ est, lineas debere esse longitudine, & ob id potẽtia quoq; cõmensurabiles, ut rationẽ habeãt inter se, quã numerus ad numerũ. Hæc enim solæ cõmunẽ recipiũt mẽsurã, atq; adeo in eis demõstratio locũ habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidẽ earũ quadrata inter se rationẽ, quã numerus ad numerũ, quia cõmensurabilia sunt, atq; idcirco mensurã habent cõmunẽ, ipsisq; demõstratio huius theorematis cõuenit: At ipsæ lineæ nequaquã, quia lõgitudine incõmensurabiles cũ sint,

communis mensuræ sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

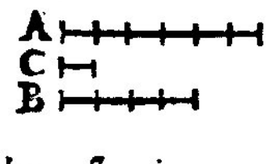
EX demonstratione porro eiusdem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere



proportionē magnitudines A & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet, earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam ut demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habēt, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quācunque communem earum mensuram, nihilo minus hoc theorema demonstrabimus eodē



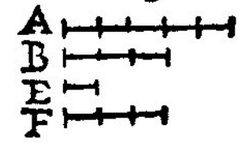
argumento. Quāuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, ut ex apposita figura apparet. Quoniam uero in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea forte Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerū: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem

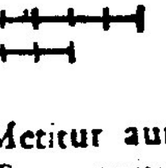
nem quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse cō mensurabiles. Quoties enim unitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarum partiū uni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties unitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandā aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties unitas in C; continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus unitatem. Quare erit A, ad E, ut C, ad unitatem: Est autem & ut E, ad F, ita unitas ad D, quod E, ipsam F, & unitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, ut A ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam ut C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit ut A, ad B, ita A, ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, utranque A, & B, metitur; Ac proinde A, & B, commensurabiles sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionē habeant, &c. Quod erat demonstrandum.



9. *quinti.*

1. *defin.*

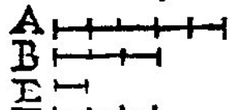
ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est ut E, ad A, ita unitas ad C. quod E, ipsam A, & unitas ipsum C, æque metiantur; ponitur q; ut A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, ut E, ad B, ita unitas ad D: Metitur autem unitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, commensurabiles sunt. Quod est propositum.



COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis laperta est nobis uia qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia

alia data recta linea, ut numerus ad numerum. Nam si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, ut numerus C, ad numerum D; diuidenda erit A, in tot æquales partes, quot unitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, ut C, ad D, ut demonstratũ est.



HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. Si nanque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, ut numerus C, ad numerum D, inueniẽda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quã sic se habeat A, ut C, ad D: Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, ut C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad F, atque adeo ut numerus C, ad numerum D, (cum sit ut A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.



13. sexti.

SCHOLION.

IN hoc eiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, ut ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

10. INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incõmẽsurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionẽ nõ habere, quam habet numerus ad numerũ. Si enim A, & B proportionẽ dicantur habere, quam numerus ad numerum; erunt ipsæ cõmmensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, &



6. decimi

A, & B, proportionẽ habẽt, quã numerus ad numerũ. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

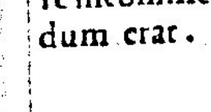
SCHOLION.

QVOCVNQVE modo lineæ incõmensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus eas proportionem non habere, quam numerus ad numerũ, vt vult theorema. Nam alias, ut demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8. 10.

SI duæ magnitudines inter se proportionẽ nõ habeant, quã numerus ad numerũ: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quã numerus ad numerũ. Dico eas incõmensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse cõmensurabiles; erit earũ proportio, quę numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerũ. Nõ igitur cõmẽsurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionẽ habeãt, &c. Quod erat ostẽdendũ.



5. decimi

SCHOLION.

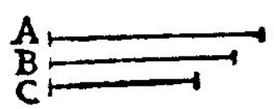
QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionẽ haberẽt, quam numerus ad numerum, vt ad propos 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autẽ colligendũ est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionẽ nõ habent, quã numerus ad numerũ, necessario & potẽtia incõmensurabiles esse, vt manifestũ est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantũ sint cõmẽsurabiles, eas proportionẽ habere, quã numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos.

propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; ſitque ut prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & ut prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT *continue proportionales tam quantitates* A, B, C, *quam* D, E, F; *ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque ut* A, *ad* C, *ita* D, *ad* F. *Dico quoque eſſe ut* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E. *Quoniam tam proportio* A, *ad* C, *proportionis* A, *ad* B, *quam proportio* D, *ad* F, *proportiones* D, *ad* E, *duplicata eſt; ponunturque proportiones* A, *ad* C, & D, *ad* F, *æquales; Erunt quoque proportiones* A, *ad* B, & D, *ad* E, *æquales, quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.*



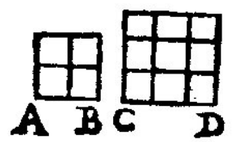
IDEM *ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem; & in quinque, quadruplicatam, &c.*

7. ## THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſu

menſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ uero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ A B, C D, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quoniam rectæ A B, C D, longitudine ſunt commenſurabiles; erit A B, ad C D, ut numerus ad numerum: Sit ut E, numerus ad numerũ F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt A B, ad C D, ut E, numerus ad numerum F: habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, duplicatam proportionem lateris A B, ad latus C D: Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex A B, ad quadratum ex C D, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionũ æqualium. Quod eſt propoſitum.



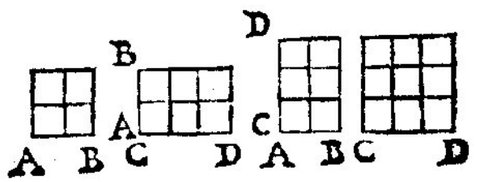
5. *decimi*

20. *ſexti.*

11 *octaui*

ALITER.

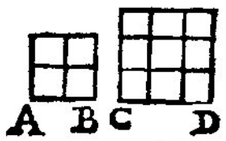
ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum B D, sub rectis A B, C D. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, ut constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, ut diximus in scholio eiusdem propos. Quoniã igitur est A B, ad C D, ut E, ad F: Vt autẽ A B, ad C D,



1. sexti. ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandẽ altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item ut E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ut quadratus numerus G, ad numerũ I. Rursus quia est A B, ad C D, ut E, ad F: Vt autẽ A B, ad C D,

1. sexti. ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandẽ altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item ut E ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulũ B D, ad quadratũ ex C D, ut I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulũ B D, & quadratũ ex C D, in eadẽ ratione sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lẽma 4. ppos. huius lib. erit quadratũ ex A B, ad quadratũ ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratũ ex A B, ad quadratũ ex C D, ut numerus quadratus G, ad numerũ quadratũ H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine cõmensurabiles. Sint numeri E, & F, latera quadratorũ numerorũ G & H, ut in priori figura. Quoniã igitur est quadratũ ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratũ numerum H: Habet autem quadratum ex A B ad quadratum ex C D, proportionem duplicatam lateris A B, ad latus C D;



20. sexti. Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerũ H,

11. octavi proportionẽ habet duplicatã lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones, æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum. 6. decimi

ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. Quia igitur est ut A B, ad C D, ita quadratũ ex A B, ad rectangulũ B D; Itẽ ut A B, rursum ad C D, ita rectangulum B D, ad quadratũ ex C D, ut supra diximus; erunt quadratũ ex A B, rectangulũ B D, & quadratũ ex C D, continue proportionalia in ratione lineæ A B, ad lineã C D: Sunt autem & numeri G, I, H, continue proportionales in ratione numeri E, ad numerũ F, ut supra ostendimus; ponitur q; quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, ut quadratus numerus G, ad quadratũ numerum H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, ut G, ad I, hoc est, ut E, ad F; Ac propterea A B, C D, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, cõmensurabiles sunt longitudine. Quod est propositũ. 1. sexti. 6. decimi.

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earũ quadrata proportionẽ non habere, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Si enim quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionẽ dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine cõmensurabiles, ut iam est demonstratũ. Quod est absurdũ. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionẽ habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, nõ habeat proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine esse incõmensurabiles. Si enim longitudine cõmensurabiles credantur; habebũt earũ quadrata, ut est demonstratũ, proportionẽ quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. Quod est absurdũ. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine cõmensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Quapropter quæ a rectis lineis longitudine commẽsurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROL

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ut in hoc theoremate demõstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; ipsa commensurabilia erũt; Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existẽt. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles sunt.

6. decimi 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamẽ quam numerus simpliciter ad numerum, potentia quidem commensurabiles sunt cum earum quadrata commensurabilia sint; at lõgitudine nequaquam, ut in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, ut constat ex secunda parte huius theorematis.

3. defin. 6. decimi

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidẽ sunt longitudine, at potentia commensurabiles, ut modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionẽ non habent, quam numerus ad numerum, potentia quoque incommensurabiles sunt, cum earum quadrata incommensurabilia sint.

4. defin. 8. decimi.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, ut patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdũ. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLION.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis

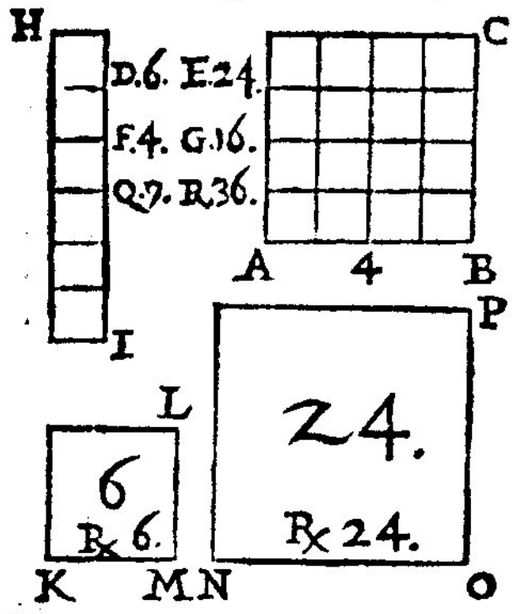
matis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter consideranda sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2. & C D, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex C D, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quã sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR *linea Rationalis A B, expressa numero 4. cuius quadratum A C, cõtinebit mensuras quadratas 16. Sint quoq; numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; atq; ipsi H I, quadratum* 26. octaui

14 secundi

C *æquale*

14. septimi. *æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postremo per ea, quæ ĩ coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum*



rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratũ G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; Continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16 continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt Rx. 6. & Rx. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntq; linea Rationali A B, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O; sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1, ad 4. erit proportio laterum subdupla videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata est, vt hic

6. decimi. *apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commensurabiles sunt rectæ K M, N O, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiã illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi, si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eædem lineæ K M, N O, simpliciter, & absolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt effer-*

ri. Cum enim proportionem habeant subduplam, si K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 2. secabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sũt partib⁹ lineæ Rationalis A B, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles.

RVRSVS, *quia quadrata K L, N P, proportionem habentia quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas A C, quadratum Rationalis lineæ A B, resoluitur, quam vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale est sex huiusmodi mensuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumãtur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata K L, N P, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõstituatur; manifestũ est, in hoc theoremate intelligẽda quoq; esse quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cũ quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadẽ quadrata K L, N P, cõsiderentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, descripti, resolui poterũt in totidẽ mẽsuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, cõtinentur. Nã si recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratũ K L, quatuor mensuras quadratas, & quadratũ N P, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiũtur in quadratis numeris F, G. Item, si eadẽ lineæ secentur in partes tres, & sex, habebunt earũ quadrata mẽsuras quadratas 9. & 36. quot nimirũ vnitates cõprehẽdũtur in numeris quadratis Q, R, &c. At hmõi mẽsuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratũ A C, Rationalis lineæ A B, resoluitur.*

IDEM *dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorũ superficies nõ exprimuntur numeris quadratis, dũmodo proportionẽ habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12, & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.*

ITAQVE *theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Ex quadratainter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.*

COLLIGIT *Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8 oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabilia. Hoc etiam nos demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. Quod tamen clarius oſtendet Euclides propoſ. vltima huius lib.*

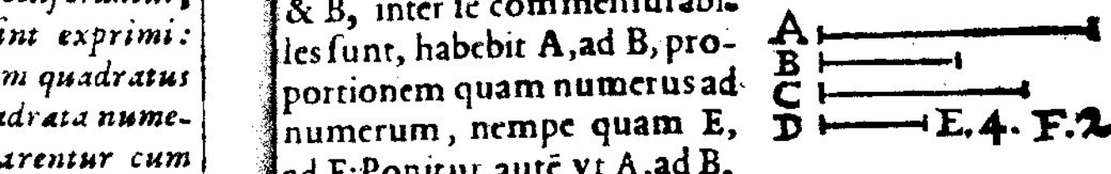
11.

10. ## THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ fuerit incommen-

commenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, ſitq; A, prima ſecundæ B, commenſurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commenſurabilem eſſe. Quoniam A, & B, inter ſe commenſurabiles ſunt, habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F. Ponitur autē vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerū F. Quare C, & D, commenſurabiles inter ſe ſunt. 5. *decimi.* 6. *decimi.*



SED ſit iam A, ipſi B, incommenſurabilis. Dico & C, ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Quoniam A, & B, incommenſurabiles ſunt, non habebit A, ad B, proportionē quā numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet quam numerus ad numerum. Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum. 7. *decimi.* 8. *decimi.*

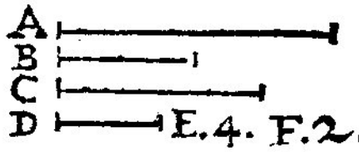
SCHOLION. I.

QVOD *ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus poſteriores duas proportionē habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.*

SI *autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt potentia ipſi B, erunt earum quadrata commenſurabilia; ac propterea proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum* 3. *defin.* 5. *decimi.*

22. sexti.

dratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D: (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earũ quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Quare commensurabiles erunt; Ac propterea lineæ C, D, potentia cõmensurabiles.



5. decimi.

3. defin.

Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neq; C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 5. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositum.

EADEM rõne, si prima secũdæ sit incõmẽsurabilis longitudine tãtũ, erit & tertia quartæ longitudine tantũ incõmẽsurabilis. Nã si A, & B, sint lõgitudine tãtũ incõmẽsurabiles; erũt ipsarũ potẽtiæ cõmensurabiles; ac propterea ipsæ potẽtia tantũ cõmẽsurabiles erũt. Igitur, vt nũc ostẽdimus, erunt quoq; rectæ C, D, potẽtia tãtum cõmensurabiles, Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex ijs, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cũ ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandẽ, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; atq; adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. Quare in

6. decimi.

re incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

8. decimi.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, lineæ, demõstrabimus, si plana, vel solida cõmensurabilia sint, vel incõmẽsurabilia, lineas lõgitudine cõmẽsurabiles esse, vel incõmensurabiles. Si.n. plana, solidaue cõmẽsurabilia sint, habebũt ipsa pportionẽ, quã numer⁹ ad numerũ. Igiẽ & lineæ eandẽ cũ ipsis rõnẽ habẽtes, proportionẽ habebũt, quã numer⁹ ad numerũ; ac propterea lõgitudine cõmẽsurabiles erũt, vt dixim⁹ in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incõmensurabilia, nõ habebũt ea proportionẽ, quã numer⁹ ad numerũ. Igiẽ neq; lineæ eãdẽ cũ ipsis proportionẽ habẽtes, proportionẽ habebunt, quã numerus ad numerũ. Ergo longitudine incommensurabiles erũt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositũ.

5. decimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finẽ lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quã quadratus numerus ad quadratum numerũ, ut in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire uelimus, quorum quilibet duo proportionẽ nõ habeant, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunq; numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli.n. horũ primorũ acceptorũ proportionẽ inter se habẽt, ex scholio prop. 26. lib. 8. quã numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ nõ sint plani similes, ut ad finẽ lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLION. II.

PORRO inuentionẽ numerorũ planorũ nõ similium, qui videlicet proportionẽ nõ habeãt, quam quadratus numerus ad quadratũ numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expedium.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia nõ sũt, qđ facere oportebat.

A, 2.	C, 2.	
B, 6.	D, 16.	
E, 12.	F, 48.	

HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quã quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt cõstat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

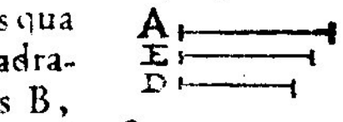
10.

11. ## PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per

per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; ergo quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autẽ tantũ longitudine sint incõmensurabiles, patet. Cũ enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantũ incõmensurabiles sunt.



B, 10.
C, 6.
9. decimi.
6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incommensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum; erit & quadratum ex A, incõmensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas lineas, &c. Quod erat demonstrandũ.

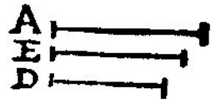
13. sexti.
10. decimi.

SCHOLION.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensuræ caterarum sumantur; erit & recta D, per defin.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM, *ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantũ cõmensurabiles, vel quod idẽ est, inter duas longitudine tantũ incõmensurabiles, esse vtrilibet illarũ incõmensurabilẽ longitudine, & potentia; atq; adeo appellari Irrationalẽ, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. Ex eo. n. quod*



B, 10. *rectæ A, D, sunt lõgitudine tãtũ incõmensurabiles, vel com-*

C, 6. *mẽsurabiles potẽtia tantũ, demõstrauimus rectã E, inter illas mediã proportionalẽ, esse ipsi A, incõmensurabilẽ lõgitudine, & potẽtia: Eodẽq; argumẽto ostẽdemus eandẽ longitudine, & potẽtia ipsi D, esse incõmensurabilẽ. Cũ. n. rectæ D, E, A, sint cõtinue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratũ ex D, ad quadratũ ex E, ita rectæ D, ad rectã A: Est aũt recta D, rectæ A, incõmensurabilis longitudine. Igit̃ & quadratũ ex D, quadrato ex E, incõmensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incõmẽsurabiles sunt potẽtia, atq; adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.* 10. decimi.

IN *codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propositio a Theone propositioni decimæ præcedẽti: quod errore librariorum factum esse puto; cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.*

12.

8. THEOR. 9. PROPOS. 12.

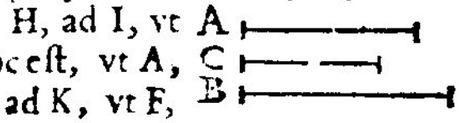
QVAE eidem magnitudini sunt commẽsurabiles, & inter se sunt cõmẽsurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, cõmensurabilis. Dico & A, B, inter se esse cõmensurabiles. Cũ. n. A, & C, sint cõmensurabiles, habebit A, ad C, proportionẽ, quã numerus ad numerũ: habeat quã numerus D, ad numerũ E. Rursus quia C, B, cõmensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionẽ, quã numerus ad numerũ: habeat quã numerus F, ad numerũ G. sumãturq; tres numeri H, I, K, minimi de-

5. decimi.

4. octaui

mi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitq; H, ad I, vt A, D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniã igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerũ. Quare A, B, proportionẽ habẽtes, quam numeri H, K, inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini cõmensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.



D. 10. E, 8. F, 2. G, 3. H, 5. I, 4. K, 6.

6. decimi.

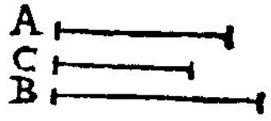
SCHOLION.

QVOD *si magnitudines A, E, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine cõmensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo, & A, B, inter se commensurabiles potẽtia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad F, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G. Sumptis ergo in eisdẽ rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus, erit rursum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerũ K. Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atq; adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis, quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.* 5. decimi. 4 octaui 6. decimi.

SED

SED *& conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.*

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



SINT *enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem* C, *commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam* C, *ipsi* A, *sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.*

QVOD *si magnitudines* A, B, C, *sint lineæ, & A,* B, *commensurabiles longitudine, sit autem* A, *ipsi* C, *commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem* C, *longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi* C, *commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B,* C, *ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam* B, *eidem* C, *longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.*

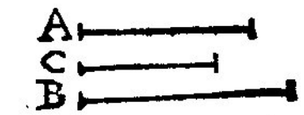
12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, cõmensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.



12. *decimi.*

SCHOLION.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. 12. *decimi.* *(cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

QVONIAM *vero hæc propositio* 13. *apud Theonem lemma est, fit, vt post hac in nostra editione numerus propositionũ Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus. n. dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.*

13. 8.

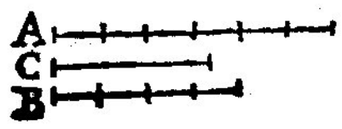
THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini

a cuipim

cuipiam incommensurabilis fuerit : Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duę magnitudines cōmensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; erunt & A, C, inter se cōmensurabiles.



12. decimi. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demōstrandum erat.

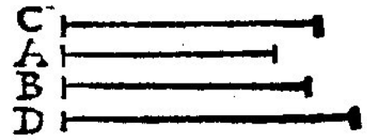
SCHOLION.

HIC quoq;, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, essent
12. decimi. *quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, vtraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incōmensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent com-*
12. decimi. *mensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, vtraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.*

COLLIGVNT *porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, q̄ in hoc lib. demonstrantur, perutile.*

QVAE incommensurabilibus sunt commēsurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; erit quoq; reliqua C, eidem B, incommensurabilis.



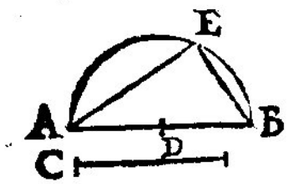
14. decimi. *Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostēsa ipsi C, incommensurabilis; erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.* 14 decimi.

SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS *id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamē quia hic breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarū A B, maior. oporteatq; inuenire, quo AB, plus possit quā C. Diuisa AB, bifariā in D, describatur ex centro D, & interuallo D A, uel D B, semicirculus A E B, in quo aptetur recta A E, ipsi C, æqualis, iungaturque recta E B. Dico rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ E B. Cum enim angulus E, in semicirculo-*

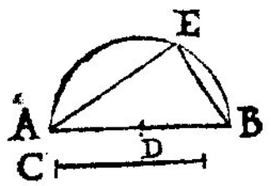


1. quarti. 1 tertii. rectus

47. primi. *rectus sit; erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B; atq; idcirco A B, plus poterit quam A E, hoc est, quam C, quadrato rectæ E B. Quod est propositum.* *Similiter*

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam aliter tradidimus ad propos. 47. *lib.* 1. *Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, quippe cũ quadratum ex A B, æquale sit quadratis ex A E, E B.*



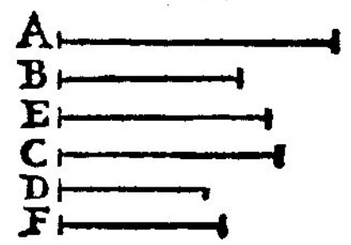
47. primi.

14. 12. THEOR. 15. PROPOS. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ

rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D; possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si uero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniã est ut A, ad B, ita C, ad D; erit quoque ut quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, ut quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, ut quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; Ac propterea erit etiam ut recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque ut B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est ut A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, ut A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incõmensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, ut in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



22. sexti. 22. sexti.

SCHOLION.

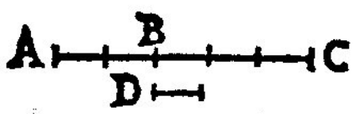
EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantum commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, ut constat ex iis, quæ in scholio propos. 10. *huius lib. scripsimus.*

15. 9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duę magnitudines commenſurabiles A B, BC. Dico totam quoque magnitudinem A C, utrique ipſarum A B, B C, commenſurabilem eſſe. Sit enim ipſarū A B, BC, communis menſura D Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, metietur quoque D, totam AC, ex ipſis cōpoſitam. Cum ergo D, metiatur A C, & AB; erunt AC, A B, commenſurabiles. Similiter cum D, metiatur A C, & BC; erūt & A C, BC, cōmenſurabiles; Ac propterea A C, utrique ipſarū A B, BC, cōmenſurabilis erit.



3. decimi 8. pron.

SED iam tota A C, ex A B, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi A B. Dico & A B, B C, inter ſe commēſurabiles eſſe. Sit enim D, communis menſura ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatā A B; metietur quoque D, reliquā B C. Quare cum D, metiatur AB, BC; cōmenſurabiles erūt A B, BC, inter ſe. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi A C, ipſi B C, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines commenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

3. decimi 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus cōpoſita, cōmenſurabilis ſit alteri ipſarū, eandē & reliquę cōmēſurabilē eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit cōmenſurabilis, eſſe quoq; eandem AC, reliquæ BC, cōmenſurabilē. Nā ut in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius A C, & ablatæ AB, cum metiatur totā AC, & ablatā A B, metietur quoque reliquā BC, ex 3. pronunciato. Quare cōmenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitū.

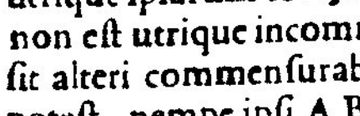
THEOR.

16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipſarum incōmenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo uni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommenſurabiles AB, B C. Dico totam quoque magnitudinē A C, utrique ipſarum A B, BC, incommenſurabilē eſſe. Si enim non eſt utrique incommēſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt, nempe ipſi A B, ſitque D, communis menſura ipſarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cum D, metiatur utranq; A B, B C, erunt A B, B C, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commenſurabilis eſt A C, ipſi A B; Eademque ratione neque ipſi B C, commenſurabilis erit. Quare utrique ipſarum A B, B C, incommenſurabilis eſt.



3. decimi 3. pron.

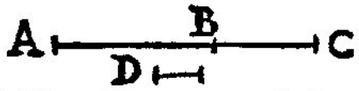
SED iā tota AC, cōpoſita ex AB, BC, incōmenſurabilis ſit uni ipſarū cōponentium, nempe ipſi A B. Dico quoque AB, BC, incōmenſurabiles eſſe. Si enim ſint cōmenſurabiles, erit quoque tota AC, utriq; ipſarū AB, BC, cōmenſurabilis. Quod eſt abſurdū. Ponitur enim AC, alteri ipſarū, nempe ipſi A B, incōmenſurabilis. Non ergo cōmenſurabiles ſunt AB, BC. Eodē argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

16. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reli-

quæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque A C, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.



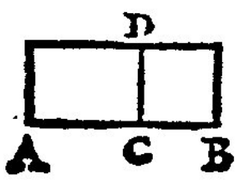
SCHOLION. I.

PERSPICVVM *est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad utriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.*

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

AD *rectam* A B, *applicetur parallelogrammum* A D, *deficiens figura quadrata* B D. *Dico parallelogrammum* A D, *æquale esse rectangulo sub segmentis* A C, C B, *comprehenso. Cum enim* B D, *quadratum sit, erit angulus* A C D, *rectus. Parallelogrammum igitur rectangulum est* A D, *contentum sub* A C, C D, *rectis. Quare cum* C D, *æqualis sit rectæ* C B, *ob quadratum* B D; *continebitur idem parallelogrammum rectangulum* A D, *sub segmentis* A C,

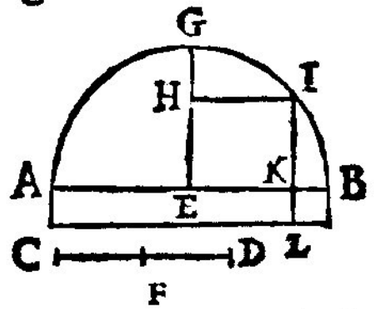


A C, C B; *ac proinde parallelogrammum* A D, *applicatum æquale est rectangulo sub segmentis* A C, C B, *quæ ex applicatione in recta* A B, *sunt facta, comprehenso. Quod est propositum.*

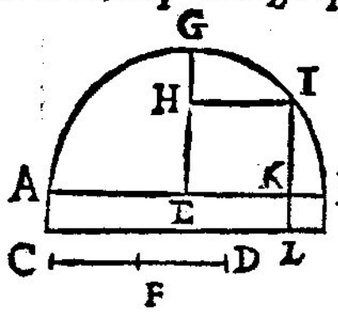
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.

QVAMVIS *id, quod in hoc lemmate proponitur, facile absolui possit ex propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales* A B, C D, *quarum* A B, *maior sit, oporteatque ad* A B, *applicare parallelogrammũ deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta* C D, *descripti. Sectis rectis* A B, C D, *bifariam in* E, *&* F, *describatur ex centro* E, *& interuallo* E A, *uel* E B, *semicirculus* A G B; *& ex* E, *perpendicularis ad* A B, *ducatur* E G. *Et quia tota* A B, *maior ponitur quam tota* C D, *erit quoque* A E, *dimidia ipsius* A B, *hoc est* E G, *ipsi* A E, *æqualis, maior quam* C F, *dimidia ipsius* C D. *Posita igitur* E H, *æquali ipsi* C F, *agatur per* H, *ipsi* A B, *parallela* H I, *demittaturque* I K L, *ad* A B, *perpendicularis, & sit* K L, *ipsi* K B, *æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum* A L, *& quadratum* B L. *Dico parallelogrammũ* A L,



applicatum ad rectam A B, *deficiens figura quadrata* B L, *æquale esse quartæ parti quadrati rectæ* C D.



17. *sexti.* 34. *primi*

Quoniam K I, *media proportionalis est inter* A K, K B, *ut in scholio propos.* 13. *lib.* 6. *tradidimus; erit rectángulú sub* A K, K B, *hoc est, rectangulum* A L, *æquale quadrato ex* K I, *hoc est, quadrato ex* E H; (*est enim* K I, *ipsi* E H, *æqualis, ob parallelogrammum* E I,) *hoc est, quadrato ex* C F: *Est autem quadratum ex* C F, *quarta pars quadrati ex* C D; *quod quadratum ex* C D, *per scholium propos.* 4. *lib.* 2. *quadruplum sit quadrati ex* C F. *Igitur parallelogrammú* A L, *ad rectam* A B, *applicatum deficiensq; quadrato* B L, *æquale est quartæ parti quadrati ex* C D, *descripti. Quod est propositum.*

SCHOLION.

Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

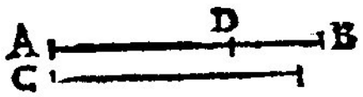
Sit enim recta data A B, *& rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex* C F, *nõ maius quam quadratum ex dimidia* A E, *ita ut latus* C F, *non maius sit latere* A E. *Educta ergo ad* A B, *perpendiculari* E G, *sit* E H, *æqualis ipsi* C F. *Deinde acta* H I, *parallela ipsi* A B, *demittatur* I K, *perpendicularis ad* A B. *Quibus peractis ostendemus, ut prius, rectangulum sub partibus* A K, K B, *æquale esse quadrato ex* I K, *hoc*

hoc est, quadrato ex C F, *atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex* C F. *Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta* C F, *maior quam recta* E G. *Quare ex* E G, *abscindi non posset recta ipsi* C F, *æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, ut ex demonstratione manifestum est.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erũt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales A B, *&* C; *& ad maiorem* A B, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita ut* D B, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta* A D, D B, *inæqualia esse. Si enim* A D, D B, *segmenta dicantur esse æqualia; cum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* A B, *deficiensque figura quadrata ex* D B, *descripta, æquale sit rectangulo sub* A D, D B; *sit autem quod sub æqualibus* A D, D B, *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* A D, *dimidio ipsius* A B, *descriptum; atq; adeo ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum ex* A B, *quadruplum erit ipsius parallelográmi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesim, quadruplú eiusdẽ parallelográmi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarú ex* A B, *et* C, *æqualia sunt, atq; rectæ* A B, *et* C, *æquales.*



Quod eſt abſurdum. ponuntur enim inæquales, & A E, maior. Inæqualia igitur ſunt ſegmenta A D, D B. Quod eſt propoſitum.

Hoc facile etiam apparet ex conſtructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abſciſſa ſit per conſtructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipſius C D, nempe ipſi C F, dictaque H I, parallela ipſi A B, & tandem demiſſa perpendicularis I K, ut partes factæ ex applicatione ſint A K, K B; manifeſtum eſt A K, K B, ſegmenta eſſe inæqualia, cum A B, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

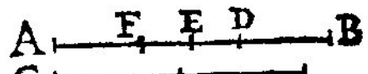
THEOR. 15. PROPOS. 18.

17.
13.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorē applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit quam minor, quātum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelo-

rallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudi ne commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minori C, deſcripti, per lemma ſecundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta A D, D B, longitudine commenſurabilia. Dico A B, plus poſſe quam C, quadrato lineę longitudine ſibi commenſurabilis.

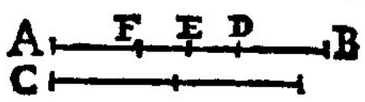


Quoniam per 3. lemma præceden tis propos. A D, maior eſt, quam D B. diuidatur A B, biſariam in E, & ipſi E D, æqualis ſumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales ſint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuiſa eſt biſariam in E, & non biſariam in D; erit rectangulum ſub A D, D B, una cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli ſub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Eſt autem quadruplo rectanguli ſub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum ſub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale eſt quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum eſt ex ſcholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla ſit ipſius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale eſt quadratum ex A B. (quod quadratum ex A B, quadruplum ſit per ſcholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipſius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia ſunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus poteſt quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonſtrare oportet longitudine cō menſurabilem eſſe ipſi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commenſurabiles; erit quoque tota A B, parti D B, commenſurabilis longitudine. Eſt autem & ipſi D B, compoſita ex D B, A F, longitudine commenſurabilis: (quod cōpoſita ex D B, A F, dupla ſit ipſius D B) Igitur cum utraque A B, & compoſita ex D B, A F, longitudine

5 *ſecundi*

16. *decimi.*

dine sit commensurabilis ipsi D B; erunt quoque A B, & cõposita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; 12. decimi.



Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam una, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex coroll. propos. 16. huius lib. cõmensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

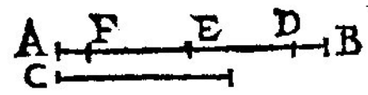
SED iam A B, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquã una, cõmensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine cõmensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum utraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cũ tota A B, composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum. 12. decimi. 16. decimi.

18. 14. THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in

in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrãmum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

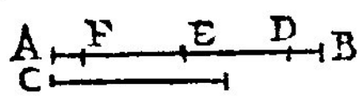
SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarũ maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minori descripti applicetur ad A B, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B, tanquam una, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B, erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine



17. decimi. 14. decimi.

ne incommensurabilis. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.

IAM uero A B, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum



applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus ut prius, rectam A B, plus posse quam C, quadrato rectæ F D. Quare cum A B, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam una, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cum duarum linearum commensurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cum tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; erunt & ipsæ A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autē parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandū.

14. decimi

17. decimi

SCHOLION. I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA. I.

QVONIAM *demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia uero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea cōmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem uocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si uero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.*

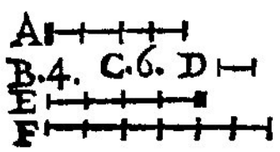
LEMMA. II.

EX PROCLO. *Rationales uocat eas lineas, quæ expositæ Rationali uel longitudine & potentia commensurabiles sunt, uel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atq; ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se uel longitudine & potentia, uel potentia solum: Et si quidē longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, ut intelligatur, etiam potentia commensurabiles esse; Si uero potentia inter se solum sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.*

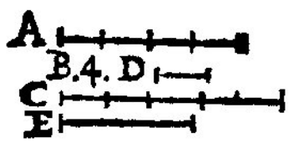
SCHO-

SCHOLION. II.

ITAQVE *ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde utraque Rationali commensurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis: Aut denique utraque expositæ Rationali commensurabilis est solum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit exposita Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum unitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensæ longitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine cõmensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarũ una, nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.*



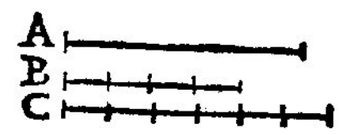
IAM *uero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit, qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A,*



F, 5. G, 3.

li A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

POSTREMO *expositæ Rationali A, inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quot cunque partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C, quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo, & potentia; Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia uero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.* 11. decimi. 12. decimi. 14. decimi.



QVOD *si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt unitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communẽ mensuram A, longitudine cummensurabiles erunt.*



E, 3.
F, 5.
G, 4.

CAETERVM & *omnes lineæ Rationales, non sẽlũ expositæ Rationali, sed etiã inter se esse cõmensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. Quoniã Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est,* 6. defin. 12. decimi.

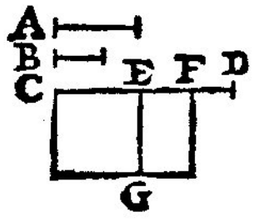
Ratio-

Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.

LEMMA. III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratū ex prima.

SINT *duæ rectæ* A, *&* B. *Dico eſſe ut* A, *ad* B, *ita quadratum ex* A, *ad rectangulum ſub* A, *&* B, *comprehenſum. Ex quantacunque linea recta* C D, *abſcindatur* C E, *ipſi* A, *æqualis, &* E F, *ipſi* B. *Deinde ſuper* C E, *deſcribatur quadratum* C G, *perficiaturque rectangulum* G F, *contentum ſub* C E, *&* E F, *hoc eſt, ſub* A, *&* B. *Quoniam igitur eſt ut* C E, *ad* E F, *hoc eſt, ut* A, *ad* B, *ita parallelogrammum* C G, *hoc eſt, quadratum ex* A, *ad parallelogrammum* G F, *ſub* A, *&* B, *comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, ut quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*



1. *ſexti.*

EODEM *modo erit, ut* B, *ad* A, *ita rectangulū* F G, *ad quadratum* G C. *Quod eſt propoſitum.*

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT *ſpatium* A, *commenſurabile Rationali ſpatio*

tio B. *Dico &* A, *Rationale eſſe. Sit* C, *quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, uel Irrationalia, quod nimirum ab ex poſita Rationali deſcribitur. Quoniã igitur* B, *Rationale eſt, erit ipſum Rationali* C, *commenſurabile: Eſt autem &* A, *ipſi* B, *commenſurabile. Igitur* A, *&* C, *cum commenſurabilia ſint ipſi* B, *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde* A, *Rationali quadrato* C, *ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile, Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



9. *defin.*

12. *decimi*

9. *defin.*

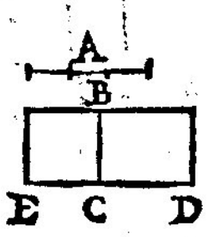
19.

15.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus B C, C D, ſecundum aliquem prædictorum modorum (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorum, quos in ſcholio 2. antecedentis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarum B C, C D, Rationali expoſitæ A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantum.) Dico B D, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum; erit quoque quadratum B E, ex B C, deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile: Eſt autem quadra



3. *defin.*

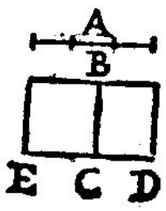
8. *defin.* 9. *defin.* tum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. Igitur & B E, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est vt 1. *sexti.* E C, ad C D, ita E B, ad B D; erunt quoq; E B, B D, com- 10. *decimi.* mensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

20. 16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propos. præcedentis exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, ipsa commensurabilia erunt 9. *defin.* quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; Ac pro- 12. *decimi.* pterea & commensurabilia inter se erunt: Est autem vt 1. *sexti.* B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur, & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, 6. *defin.* commensurabilis longitudine: sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensu-



mensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

POSSIT *recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoq;, ut in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.*

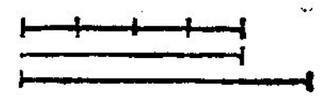
A

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, uocantur Irrationales.

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

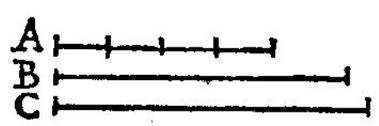
DVO *genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium. Aut enim altera earum est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, inueniatur C, longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est)* 11. *decimi.*



potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt; (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum commensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantum incommensurabilis inueniatur B; & huic rursum longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod enim sint solum commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quod autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, ut in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cum utraque B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis; erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles.

11. decimi.



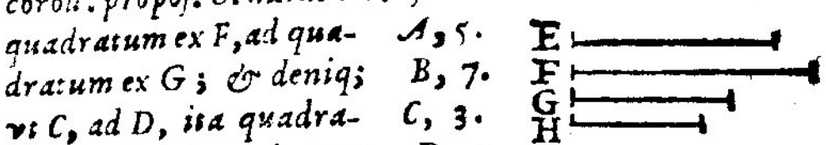
6. defin.

SCHOLION.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quærun-

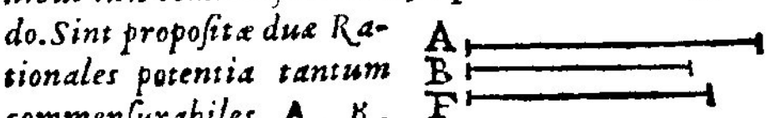
tur, nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & deniq; vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantum commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C; & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterque quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) erunt ipsa inter se commensurabilia; ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.



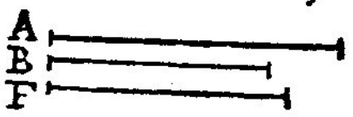
6. decimi

9. decimi.

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur pri-



mus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit,

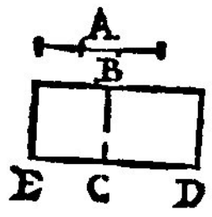


C, 10. ex eo patet, quod commen-
D, 6. ſurabilis ſit Rationali B,
E, 7. ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, pro-
6. decimi. *portionem habentia. quam numeri D, E, commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad*
9. decimi. *numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus, quod D, & E, ſint inter ſe primi; erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ; erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

21. 19. THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod



quod erit Rationale, vt in demonſtratione propos. 20. diximus. Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad C D, vt B E, ad B D: Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipſi B D. incommenſurabile. Quare cum B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A: Sit autem B E, ipſi B D, incommenſurabile; erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem B D, incommenſurabile; Ac propterea B D, quadrato Rationalis expoſitę incommenſurabile exiſtens, Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum B D, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis. 1. ſexti. 9. defin. 14. decimi. 10. defin.

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum B D, Media; propterea quod media proportionalis ſit inter duas B C, C D, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratum æquale ſit rectangulo B D, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat. 17. ſexti.

SCHOLION.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. Cum enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantum inter ſe incommenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulũ ſub duabus Rationalibus potẽtia tãtũ inter ſe cõmẽſurabilibus cõtẽtũ. Nã ſola hæc linea Media hoc loco appellatẽ. 17. ſexti.

VT autem recte hoc loco monet Campanus, nõ ſolũ recta potens rectãgulũ Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potẽtia tãtũ cõmẽſurabilibus cõtentũ, Irrationalis eſt, vocaturq; Media: Verũ etiã quadratum ipſius, vel rectangulum illud Mediũ dicit, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata

illarum rectarum Rationalium potentia ſolum commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continue proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata, proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptũ proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.

Hoc autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cum & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Mediꝭ longitudine, vel potentia tantum inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

Vnde Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum cõmenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

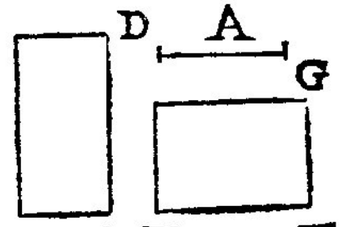
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

22.
20.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; applicetur q; ad B C, rectangulũ B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinem C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilem. Quoniam A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus inter ſe contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulũ E G, ſub Rationalibus E F, F G, potẽtia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D; æqualia erunt B D, & E G, latera que idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; Ac propterea quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratum ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F, ponantur Rationales; atq; adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur & quadratum ex F G, commẽſurabile erit quadrato ex C D; propterea q; & rectę F G, C D, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cũ F G, Rationalis expoſitæ Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa nõ eſt expoſita Rationalis; erit quoq; C D, expoſitę Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. [illegible] huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incõmenſurabilis ipſi B C. Quoniam



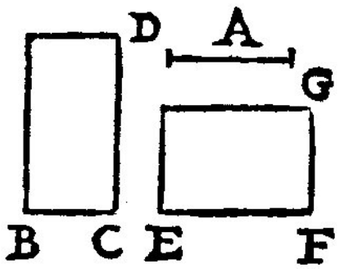
45. primi

14. ſexti.

22. ſexti.

10. decimi.

niam E F, F G, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F ad rectangulum E G, ſub E F, F B, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit
10. decimi. quadratum ex E F, incommenſurabile rectangulo E G, atq; adeo rectangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex E F, commenſurabile eſt quadrato ex C D. (quod E F, C D, Rationales ſint, atq; idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex C D, commenſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incom-
13. decimi. menſurabile; incommenſurabilia erunt quadratū ex C D, & rectangulum B D. Eſt autem ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt re-
10. decimi. cta C D, ad rectam B C. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo eſt C D, & Rationali B C, longitudine incōmenſurabilis. Quamobrē, quod a Media fit, ad Rationalē applicatū, &c. Quod demonſtrandū erat.



SCHOLION.

FACILIVS *quam ex propoſ. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, ſi ipſis B C, & A,*
11. ſexti. *ſumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim B C, A,*
17. ſexti. *& C D, proportionales ſint; erit rectangulū B D, ſub extremis B C, C D, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.*

HAC arte vtendum erit & in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuſpiam lineæ rectæ.

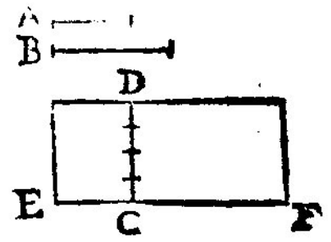
PORRO *ex hoc theoremate manifeſtum eſt, omne Mediū, hoc eſt, ſpatium, quod linea Media poteſt, æquale eſſe cuidā alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus. Nam ſi illi Medio ad Rationalē lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommenſurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio*

dio æquale, Medium erit ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus contentum. Atque hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE cōmenſurabilis, Media eſt.

SIT Mediæ A, recta B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & B, Mediam eſſe. Expoſita enim ſit Rationalis C D, ad quam applicetur
45. primi. rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinē; erit C E, Rationalis ipſi C D, lon-
23. decimi. gitudine incommenſurabilis. Rurſus ad C D, Rationalem applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia re-
45. primi. ctæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, D E, D F, commenſurabilia. Eſt autem vt D E, ad D F, ita recta E C,
1. ſexti. ad rectam C F. Igitur E C, C F, longitudine ſunt commen-
10. decimi. ſurabiles: Sed E C, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi C D, incommenſurabilis. Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationa-
14. decimi. lis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi C D, cōmenſurabilis ſaltē potentia, quod Rationalis ſit; erit & C F, eidem C D, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, ſub Rationalibus po-
22. decimi. tentia tantum cōmenſurabilibus C D, C F, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabilis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

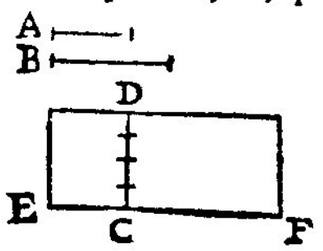


COROL-

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoq; Medium. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

Sit spatium, DF, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cũ DE, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam, D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Ac idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.



LEMMA. I.

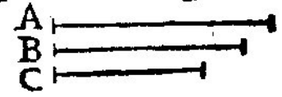
QVEMADMODVM *autem in lemmate* 1. *propos.* 19. *huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuerse enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si uero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit cõmensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.*

LEM-

LEMMA. II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT *Media aliqua linea* A, *cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles* B, C; *illa quidem longitudine, hæc uero potentia tantum; erit utraque* B, C, *Mediæ* A, *commensurabilis, Media. Cum ergo* A, B, *sint longitudine commensurabiles; &* A, C, *potentia tantum; erunt inuentæ* A, B, *Mediæ longitudine commensurabiles; &* A, C, *Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.* 24. *decimi*



SCHOLION.

QVAMVIS *omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos.* 36. *huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, qua nam via inuenienda sint duæ Media longitudine & potentia incommensurabiles.*

24.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

23.

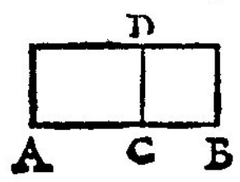
QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum A D, sub Medijs A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium

dium esse. Describatur ex CD, Media quadratū BD, quod erit Mediū. Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine cōmēsurabiles; erunt AD, DB, cōmēsurabilia. Quare spatiū AD, Medio DB, cōmensurabile, Mediū est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Medijs longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

1. sexti

10. decimi.



25. 23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum cōmensurabilibus rectis lineis cōtinetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Medijs AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describātur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib 1. est ostēsum. Quia vero AD, CE, Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, (est enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earū quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM, commensurabilia: Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali uero FG, solum commensurabiles potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniā est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quod DB, BC ipsis AB, BE, sint æquales, utraq; utrique.) & ut DB, ad BC, ita AD, ad AC; & ut AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; ut AD, ad AC, ita AC, ad CE; atq; adeo AD, AC, CE, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaidem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt, propterea q; rectāgulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratū ex HK, Rationale est; ideoq; & recta HK, Rationalis erit; & ob hoc ipsi FG, Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI, cōmēsurabilis uel lōgitudine, uel solū potētia. Et si quidē HK, ipsi HI, lōgitudine sit cōmēsurabilis; rectāgulū HL, sub Rationalibus HI, HK, lōgitudine cōmēsurabilibus cōtētū, hoc est, AC, illi æquale erit Rōnale. Si uero HK, ipsi HI, potētia solū cōmēsurabilis sit; erit rectāgulū HL, sub Rationalibus HI, HK, potētia tātū cōmēsurabilibus cōtentū, hoc est, AC, illi æquale, Mediū. Est ergo AC, rectāgulū sub Medijs AB, BC, potētia tātū cōmēsurabilibus cōtentū, uel Rationale, uel Medium. Quocirca, quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

45. primi.

34. primi.

23. decimi.

1. sexti

10. decimi.

20. decimi.

1. sexti

1. sexti

17. sexti

6. defin.

20. decimi.

22. decimi.

SCHOLION.

FACILIVS quā ex 45. propos. lib. 1. applicabimꝰ ad HI, rectāgulū ipsi AC, æquale, si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK. Nā rectangulū sub extremis HI, HK, æquale erit rectāgulo sub medijs AB, BC.

HAC eadē arte vtemur in sequētibꝰ, quādo ad aliquā rectā applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

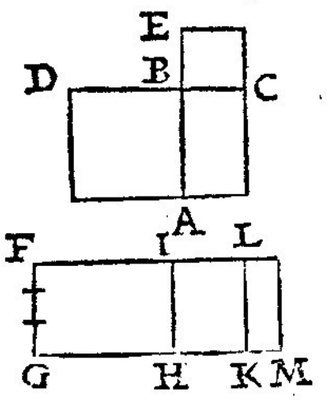
12. sexti.

16. sexti.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse uel Rationale, uel Medium; docebit Euclides propos. 28 quanam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, rectangulum contentum sub
20. decimi. duabus Rationalibus longitudine cõmensurabilibus esse Rationale; Sub duabus vero Rationalibus potentia tantũ cõmensura
22. decimi. bilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex
25. decimi. demonstratis constat, rectangulum comprehensum sub duabus Medijs longitudine commensurabilibus esse Medium; Rectan
26. decimi. gulum autem sub duabus Medijs potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, uel Medium.

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere; nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.



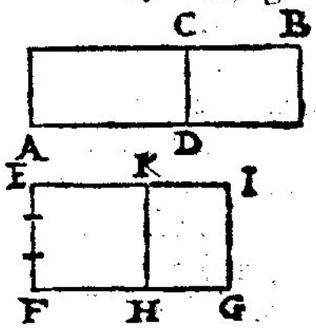
SIT enim rectangulum A C, comprehensum sub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico A C, neque Rationale esse, neque Medium, &c. Constructis eisdem, ut in theoremate, ostendemus similiter, rectas G H, K M, Rationales esse, & ipsi F G, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeo ipsis æqualia rectangula F H, L M, incommensurabilia: Vt autem F H, ad L M, ita est recta
1. sexti. G H, ad rectam K M. Igitur rectæ G H, K M, longitudine
10. decimi. inter se sunt incommensurabiles. Quare G H, K M, ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles;
22. decimi. Ac propterea rectangulum sub ipsis G H, K M, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. Potest autem rectangulum sub ipsis G H, K M, recta H K: (Nam, ut prius, ostendemus tres G H, H K, K M, esse proportionales) Igitur H K, Irrationalis est, & Media. Quare I K, Rationale non est. Si enim Rationale esset, faceret ipsum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est H K, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque I K, Medium est; Si enim esset Medium, faceret ipsum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipsi H I, longitudine incommensurabilem. quod est absurdum. ostensa est enim H K, Irrationalis, & Media. Itaque cum I K, neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque A C, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi I K, quod sub Rationali, & Media, continetur, cum H I, Rationalis sit, & H K, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ potest spatium sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus (quales ponuntur A B, B C, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media uocatur, contentum. Quod est propositum.
22. decimi.
17. sexti.
21. decimi.
23. decimi.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

26. 22.

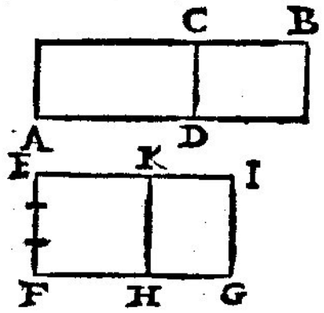
MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium A B, Medium A C, rectangulo D B. Dico D B, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, D B, Rationale. Exposita ergo Rationali linea E F; ad ipsam applicetur rectangulũ E G, Medio A B, æquale; & Medio A C, rectangulum E H, æquale, ut sit reliquum H I, Rationali D B, æquale. Erunt igitur E G, E H, æqualia Medijs A B, A C, Media; & H I, æquale Rationali D B, Rationale.



45. primi

nale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad Rationalem E F
23. decimi. sunt applicata; erunt rectæ F G, F H, Rationales, & ipsi E F, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia



34. primi 21. decimi. Rationale H I, applicatum est ad Rationalem H K; (est enim recta H K, Rationali E F, æqualis) erit recta H G, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis. Quare cum H G, E F, longitudine sint cõmensurabiles; & E F, ipsi F H, longitudine incommensurabilis, ut est
14. decimi. ostensum; erit & H G, eidem F H, longitudine incommensurabilis. Est autem ut F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum sub F H, H G, ex tertio lemmate propos. 19.
10. decimi huius lib. Igitur quadratum ex F H, incommensurabile est rectangulo sub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commensurabile est quadratum ex H G; (quod sint ambo ex lineis
16. decimi. Rationalibus E H, H G, descripta) atque adeo & duo quadrata ex F H, H G, simul, quadrato ex F H, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub F H, H G, commensurabile est id, quod bis continetur sub F H, H G, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F H, H G, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F H, H G, bis. Quare & compositum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectan
27. decimi. gulo bis sub F H, H G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G. At quadratis ex F H, H G,
4. secundi una cum rectangulo bis sub F H, H G, æquale est quadratũ ex F G. Igitur & quadratũ F G, incõmensurabile est cõposito ex quadratis rectarum F H, H G: Est autem compositũ hoc Rationale, ex lemmate 4 propos. 19. huius lib. quod ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F G, erit quadratum ex F G, Irrationale,
10. defin. ac propterea & recta F G, Irrationalis existet. Quod est ab-
11. defin. surdum. ostensa enim est F G, Rationalis longitudine ipsi E F, incõmensurabilis. Non ergo D B, quo Mediũ A B, superat Mediũ A C, Rationale est. Quam ob rem Mediũ non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

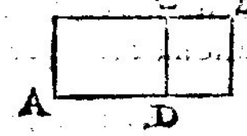
SCHO-

SCHOLION.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat Rationale Rationali.

RATIONALE enim A B, superet Rationale A C, quæ sit D B. Dico D B, quoque esse Rationale. Quoniã A B, A C, Rationalia sunt; erũt A B, A C, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; atq; adeo & inter se cõmensurabilia. Quare cum tõtum A B, cõpositum ex A C, D B, commensurabile sit ipsi A C; erit quoq; idem A B, reliquo D B, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem A B, Rationale, Igitur & D B, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

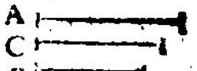


9. defin. 12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28. 27. 0.

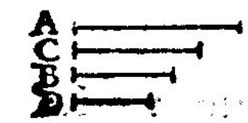
MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, inter quas media proportionalis sumatur C; fiatque ut A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis contentũ, Irrationale, quod Mediũ uocatur; atq; adeo cũ ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; suntq; A, B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoq; C, D, solum cõmensurabiles potentia, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas



13. sexti. 12. sexti. 22. decimi. 17. sexti. 14. decimi.

sas continere Rationale. Quoniam est ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A,

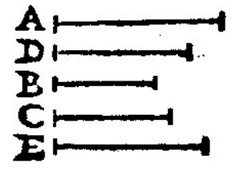


ad C, ita est C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; ideoque B, media proportionalis inter C, & D, poterit rectangulum sub ipsis C, D comprehensum. 17. *sexti.* Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

28. PROBL. 5. PROPOS. 29.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineãt.

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles; & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. Deinde fiat ut B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. 13. *sexti.* 12. *sexti.* Quoniam A, B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeo & quadratum ex D, quod illi æquale est,



17. *sexti* Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. 22. *decimi.* Et quia est ut B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media; 24. *decimi.* Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam est ut B, ad C, ita D, ad E; & permutando ut B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque ut D, ad A, ita C, ad E. 16. *sexti.* Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia

tentia solùm commensurabilibus, Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat. 22. *decimi.*

SCHOLION. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigebimus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	C, 12.	
B, 4.	D, 8.	
E, 24.	F, 96.	

QVONIAM autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, uel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem uero, si impar multiplicet imparem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum uterque par sit, uel impar; Vel unus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidē planus, impar; horum uero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat unum latus numerum parem, alterum uero imparem, &c. 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR *per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum*

uterque uel par sit, uel impar. Et quoniam, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto B D, ex A B, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex A B, in B D, qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam numerus A D, bifariam est diuisus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compositi faciunt quadratum, eum uidelicet, qui ex B E, gignitur. quod est propositum.

24 & 26. noni.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

1. noni.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus sit.

Quod si numeri sumantur A B, & C, non similes, uterq; tamẽ par, uel impar; inuenti erũt eodẽ modo duo quadrati numerorũ B E, E D, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est quadratus. Si.n. quadratus esset, numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdũ. ponuntur enim non similes.

2. noni.

SCHOLION. II.

Itaque *si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus ut prius, duos planos similes, quorum uterque par, uel impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, ut in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D,*

E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus est.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

Si *uero inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus nõ sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes, quorum uterque par sit, uel impar, & reliqua peragenda, ut prius. Nã similiter ostendemus, quadratũ ex B E, æquale esse quadrato ex D E, una cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .....

Hoc *posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratũ numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter uero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratũ 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratũ 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.*

LEMMA. II.

Dvos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint *duo numeri plani similes A B, & C, pares, uel impares, ut in lemmate præcedẽti, fiatque eadem constructio, ita ut rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorũ A B, D B, inter se,*

A .. H .. I . E . F . G ... D ..... B
C .....

una cum quadrato ex D E, æqualis sit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, unitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quod & latus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex D F, in se sit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is uel maior quadrato ex BF, uel æqualis, uel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit ergo latus ipsius uel æquale numero B E, uel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola unitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne unitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam B F, minus uero quam B E.) Si dicatur æquale, ita ut quadrato ex B E, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cum eidem quadrato ex B E, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex A B, in D B; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod est absur-

A .. H .. I . E . F . G ... D ..... B C .....

dum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex D F, in se sit, æquale est numero B E. Sed neque maius. Sit enim si fieri potest, latus illius æquale numero B I, qui maior sit, quam B E, ita ut quadrato ex B I, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiori, maior est quadrato ex B E, latere minori; erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter uero ex B F, in se sit, (cum hic compositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Est autem quadrato ex B E, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter uero ex D F, in se, maius est latere B E. Sed neque æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus, maior est quadrato ex B F.

Sit iam, si fieri potest, numerus qui fit ex A B, in B D, una cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus unitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus est, (diuisus enim est A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ unitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ys, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib.

lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *æqualis quadrato ex* BF. *Sed eidem quadrato ex* BF, *æqualis ponitur nume rus, qui fit ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato* D F: *Igitur qui fit ex* H B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *æqualis eſt ei, qui fit ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F; *& detracto communi quadrato ex* D F, *relinquetur, qui fit ex* H B, *in* B D, *ei qui fit ex* A B, *in* B D, *æqualis. Quare cum* H B, A B, *multiplicantes eundem* B D, *producant æquales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit* H B, *ipſi* A B, *æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *quadrato ex* B F, *æqualis.*

A .. H .. I . E . F . G ... D ..... B
C .....

18. *ſeptimi*

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *minor quadrato ex* B F, *ac propterea & latus eius latere* B F, *minus, quod ſit* B G, *ita ut qui ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *æqualis ſit quadrato ex* B G. *Sumatur autem ipſius* E G, *duplus* A I. *Quoniam igitur totus* A D, *totius* E D, *duplus eſt, & ablatus* A I, *ablati* E G; *erit rurſus & reliquus* I D, *reliqui* G D, *duplus; ac propterea* I D, *in* G, *diuidetur bifariam. Quare ex eodem theor. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex* I B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D G, *æqualis quadrato ex* B G: *ponitur autem eidem quadrato ex* B G, *æqualis*

æqualis, qui fit ex A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F. *Igitur qui fit ex* I B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D G, *æqualis eſt ei, qui ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F. *Ablatis igitur quadratis ex* D G, *&* D F, *quorum qui ex* D G, *minor eſt, remanebit qui ex* I B, *in* B D, *maior eo, qui ex* A B, *in* B D, *pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F, *minor quadrato ex* B F. *Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex* A B, *in* B D, *una cum quadrato ex* D F. *Quod eſt propoſitum.*

SCHOLION. III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita ut ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorũ proportionem, quã quadratus ad quadratũ.

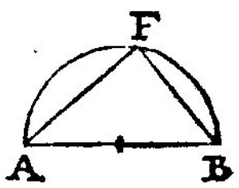
IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

EXPO-

EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 7. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum exceſſus D E, non ſit quadratus. Deinde per coroll propos. 6. huius lib. fiat ut C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nempe ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A B F, circa diametrum A B, deſcripto: ac denique connectatur recta F B.



31. tertij. Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; erit quadratũ ex A B,

47. primi æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc eſt, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia eſt quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, ut numerus C D,

6. decimi. ad numerum D E; erunt quadrata ex A B, A F, commenſurabilia; atque adeo cum quadratum ex A B, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, deſcriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea que & recta A F, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt A B, A F; atque adeo commenſurabiles ſaltem potentia. Quia vero quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque qudaratus numerus C D, ad non quadratum D E, proportionem habeat quam quadratus ad quadratum;

24. octaui alias & D E, quadratus eſſet, ut in Arithmeticis eſt demonſtratum. quod non ponitur) erunt rectæ A B, A F,

9. decimi. longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, ut oſtenſum eſt. Igitur A B, A F, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.

IAM uero, quoniam eſt ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, erit per conuerſionem rationis, ut quadratus numerus C D, ad quadratum numerũ C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (ſicut enim C D, ſuperat D E, quadrato C E, ita etiam quadratũ ex A B, ſuperat quadratum ex A F, quadrato ex F B.) Quare

9. decimi. rectæ A B, F B, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior A B, plus poſſit, quam minor A F,

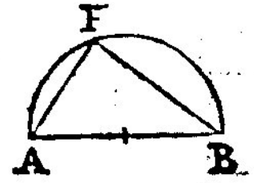
A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

30. 18.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita ut maior, quam minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea A B, inueniantur que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita ut ex illis compoſitus C D, non ſit quadratus, uel certe numerus aliquis quadratus C D, ſecetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad neutrũ ipſorum C E, E D, proportionem habeb t, quam quadratus ad quadratum, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus C D, etiam quadratus: iuxta poſteriorem uero, quilibet ipſorum C E, E D, quadratus quoque, ut in Arithmeticis oſtenſum eſt. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. ut C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, ut ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in ſemicirculo A F B, circa A B, deſcripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, ut in præcedenti, A B, plus quam A F, quadrato rectæ F B: Eruntque A B, A F, Rationales potentia ſolum commenſurabiles: Eadem enim hic eſt demonſtratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam uero rurſus, ut prius, eſt per conuerſionem rationis, ut C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad quadratum, Non habebit quoque quadratum ex A B, ad



24. octaui

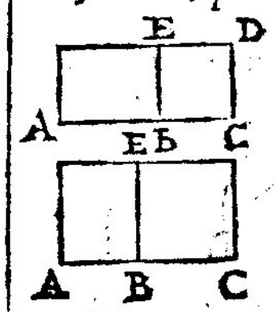
qua-

quadratum ex FB, proportionem, quã quadratus numerus ad numerum quadratum. Quare rectæ AB, FB, longitudi
9. decimi. ne incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum commensurabiles, ita ut maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT *duæ rectæ inæquales* AB, BC, *in rectum constitutæ, quarum* AB, *maior sit*. *Dico esse, ut* AB, *ad* BC, *ita rectangulũ sub* AB, BC, *ad quadratum ex* BC. *Describatur ex* BC, *quadratum* BD, *compleaturque rectangulum* AD; *eritq; rectangulum* AE, *sub* AB, BC, *contẽtum; quod* BE, *ipsi* BC, *sit æqualis: perspicuum autem est, esse ut* AB, *ad* BC, *ita* AE, *ad* BD.



1. sexti.

EODEM *modo erit, ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, ut in secunda figura est manifestum, in qua* AB, *minor est, quam* BC.

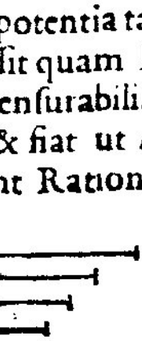
31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior plus possit quam minor,

minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potentia tantum commensurabiles, ita ut A maior plus possit quam B, minor, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque C, media proportionalis inter A, & B; & fiat ut A, ad B, ita C, ad D. Quoniam igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est ut A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantum commensurabiles; erunt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit ut A, ad B, ita C, ad D; & permutando ut A, ad C, ita B, ad D; sit autem ut A, ad C, ita C, ad B; erit quoque ut C, ad B, ita B, ad D; Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum comensurabiles, Rationale. Quoniam uero est ut A, ad B, ita C, ad D: potest autẽ A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi cõmensurabilis, ex constructione; poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



30. decimi. 22. decimi. 24. decimi. 17. sexti. 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, ut prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commen

commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

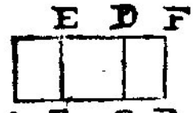
SCHOLION.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, ut facile iudicabunt, qui eum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Intermedias C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT *tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse ut AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur ex BC, quadratum BCDE, perficiaturque rectangulum AF; Eritque AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quod BE, CD, ipsi BC, æquales sint. Perspicuum autem est esse AB, ad CD, ut AE, ad CF. Quod est propositum.*



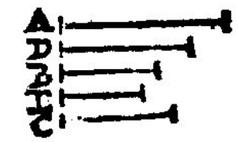
1. *sexti.*

32. 26. PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium cõtineant

tineant, ita ut maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commẽsurabilis longitudine; inueniatur alia B, utrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus. Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniã igitur ex lemmate antecedenti, est ut A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed ut quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit ut A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, ut in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. Quia uero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; erit quoq; E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulũ sub D, E; erit rectãgulum sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse ut A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum



30. *decimi.*
13. *sexti.*
12. *sexti.*
17. *sexti.*
16. *sexti.*
22. *decimi.*
24. *decimi.*
22. *decimi.*
15. *decimi.*

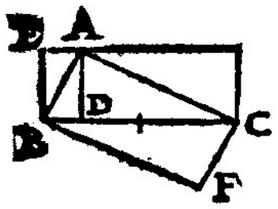
lum commensurabiles, quę Medium continent, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineę rectę longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita ut A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, ut prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quę Medium contineant, ita ut maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA. I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, a quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentum denique sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.

QVONIAM *ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter* C B, B D; *erit* 16. *sexti.*



rectangulum sub C B, B D, *quadrato ex* A B, *æquale.*

EADEM *ratione erit rectangulum sub* BC, CD, *æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis est inter* B C, C D.

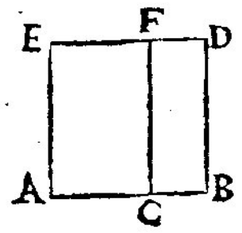
RVRSVS *quia ex eodem coroll. A D, inter* B D, D C, *media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub* B D, D C, *æquale quadrato ex* A D.

POSTREMO, *quia triangula* A B C, A B D. 8. *sexti.*
similia sunt; erit ut B C, *ad* A C, *ita* A B, *ad* A D, *Quare rectangulum sub* B C, A D, *æquale est rectangulo sub* A B, A C. *Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulũ* C E, *contentum sub* B C, A D: *Item rectangulum* A F, *sub* A B, A C, *contentum. Quoniam igitur rectangulum* C E, *duplum est trianguli* A B C, *necnon & rectangulum* A F, *eiusdem triãguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula* C E, A F. *quod est propositum.* 17. *sexti.* 41. *primi*

LEMMA. II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETVR *recta* A B, *non bifariam in* C, *sitq; maior pars* A C. *Dico esse ut* A C, *ad* C B, *ita rectãgulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* A B, C B. *Describatur enim ipsius* A B, *quadratum* A B D E, *ducaturq;* C F, *ipsi* A E, *parallela; eritq;* A F, *contentum sub* A B, A C; *&* C D, *contentum sub* A B, C B; *quod* A E, C F, *ipsi* A B, *æquales sint. Quoniam igitur est ut* AC, *ad* CB, *ita* AF, *ad* CD; *cõstat propositũ.* 1. *sexti.*

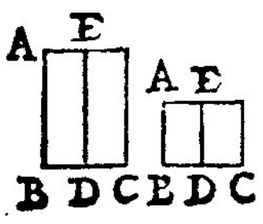


EADEM *ratione erit, ut minor pars* B C, *ad maiorem* C A, *ita* B F, *contentum sub* A B, B C, *tota, & minore parte, ad* C E, *contentum sub* A B, C A; *tota, & maiore parte.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT *duæ rectæ inæquales* A B, B C, *angulum rectum constituentes* A B C, *secetur q; minor* B C, *bifariam in D. Dico rectangulum sub* A B, B C, *duplum esse rectangulum sub* A B, B D. *Compleatur rectangulum* A C, *sub* A B, B C; *ducatur q; D E, ipsi* A B, *parallela; eritq; B E, contentum sub* A B, & B D, *dimidia minoris. Quoniam igitur* A C, *ipsius* B E, *duplum est, quod & basis* B C, *dupla sit basis* B D; *constat propositum.*



1. *sexti.*

EODEM *modo, si* B C, *secta bifariam, sit maior, erit quod sub* A B, B C, *continetur, duplum eius, quod continetur sub* A B, *minore &* B D, *dimidia maioris, ut ex secunda figura apparet.*

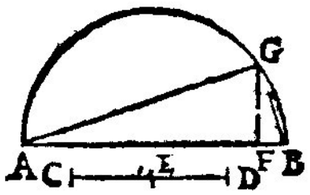
33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant cōpositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

REPE-

REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia solum commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quam minor C D, quadrato lineę longitudine sibi incōmensurabilis; secetur q; C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc est, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub A F F B, continetur. Postremo descripto semicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad A B, perpendicularis, connectanturq; rectæ A G, G B. Quoniam igitur A B, plus potest, quā C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad A B, rectangulum sub A F, F B, æquale quartæ parti quadrati ex C D, deficiens figura quadrata; erit A F, ipsi F B, longitudine incommensurabilis. Est autem vt A F, ad F B, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub A B, A F, ad rectangulum sub A B, F B; Rectangulum vero sub A B, A F, quadrato ex A G, & rectangulum sub A B, F B, quadrato ex G B, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; quod angulus A G B, rectus sit in semicirculo A G B. Igitur quoque erit vt A F, ad F B, ita quadratum ex A G, ad quadratum ex G B; ac propterea cum A F, F B, longitudine sint incommensurabiles, erunt quadrata ex A G, G B, incommensurabilia. Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali A B, Rationale est æqualeq; quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub A F, F B, quod quadrato ex C E, æquale est factum, æquale est quadrato ex F G; (propterea q; angulus A G B, rectus est, & F G ad A B, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, C E, æqualia; ac proinde & rectæ F G, C E, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius C E, dupla etiam erit ipsius F G. Igitur per lemma 3 antecedentis propositionis, rectangulum sub A B, C D, duplum erit rectanguli sub A B, F G. (cum F G, dimidia sit minoris C D,)



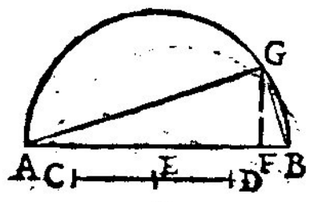
51. *decimi.*

19. *decimi.*

31. *tertij.*

10. *decimi.*
4. *defin.*
47. *primi.*

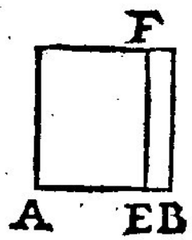
22. decimi. Sed rectangulum ſub A B, C D, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub A B, F G, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium, Medium eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectangulo ſub A B, F G, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectãgulum ſub A G, G B. Contentum igitur ſub A G, G B, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum; Medium. Quod faciendum erat.



SCHOLION.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, fieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D; ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F; & tãdem deſcripto quadrato ex A B, educatur E F, ad A B, perpendicularis. Quoniam igitur eſt vt C, ad D, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A E: Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; erunt latera A B, A E, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommenſurabilia; Ac propterea cum A B, tota longitudine ſit incommenſurabilis parti A E, erit eadem A B, & reliqua E B, longitudine incommenſurabilis, ex coroll. propoſ. 17. huius lib. Vt autem A B, ad A E, ita eſt quadratum ex A B, ad A F. Igitur cum A B, A E, incommenſurabiles ſint longitudine, erunt quadratum ex A B, & rectangulum A F, incommenſurabilia. Quare quadrato ex A B, exiſtente Rationali,



9. decimi. C, 6. D, 4.

1. ſexti.

10. decimi.

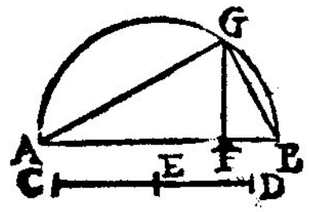
li, quod & A B, Rationalis ponatur; erit A F, dicto quadrato incommenſurabile, Irrationale. Eodemq; argumento oſtendemus B F, Irrationale eſſe. Quia vero A F, B F, componunt quadratum Rationale ex A E; perſpicuum eſt, ex duobus Irrationalibus confici poſſe Rationale. Quod eſt propoſitum.

AT vero ſi A F, F B, Rationalia ſint, oſtendemus & totum A F B, ex ipſis compoſitum Rationale eſſe. Cum enim vtrumq; A F, F B, Rationale ſit; erunt ipſa inter ſe commenſurabilia. Igitur & totum A F B, ex ipſis compoſitum vtriq; eorum commenſurabile erit. Quare A F B, totum commenſurabile vtrique Rationali A F, F B, Rationale quoque eſt. Quod eſt propoſitum. 16. decimi. 9. defin.

PROBL. 11. PROPOS. 35. 34. 28.

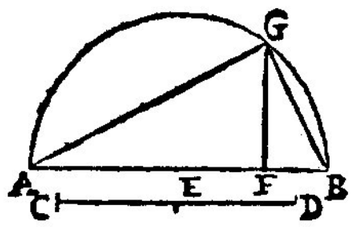
INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum Rationale.

REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior A B, plus poſſit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propoſ. Oſtendemus igitur ſimiliter, vt in propoſ. antecedenti, rectas A G, G B, potentia eſſe incommenſurabiles. Et quia quadratum ex Media A B, æquale exiſtens quadratis rectarum A G, G B, Medium eſt; erit quoque compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus vt in antecedenti propoſitione, oſtendemus rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G; atq; adeo illud



32. decimi. 47. primi.

illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub A B, C D, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub A B, F G, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33 huius lib. rectangulo sub A B, F G, æquale est rectangulum sub A G, G B. Igitur & rectangulum sub A G, G B, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum A G, G B, esse Medium. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



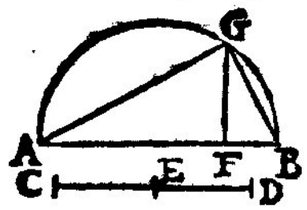
35. 29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediũ, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

Reperiantur duę Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fianteq; reliqua, vt ī propos. 34. Ostẽdemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus,

3. decimi.



47 primi.

bimus, rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G; atq; adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit; erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, φ illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniã vero A B, longitudine incõmensurabilis ponitur ipsi C D; Est autem eidẽ C D, ipsa C E, longitudine commensurabilis, quod illa huius sit dupla; erunt A B, C E, longitudine incommensurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19 huius lib. quadratum ex A B ad rectangulum sub A B, C E, hoc est, ad rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B. (sunt enim rectangula sub A B, F G, & sub A G, G B, per 1. lemma propos 33. huius lib æqualia.) Igitur quadratum ex A B, hoc est, compositum ex quadratis rectarum A G, G B, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

13. decimi.

10. decimi

SCHOLION.

Ex hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

Quoniam ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum A G, G B, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & rectangulum sub A G, G B, commensurabilia, quod

quod non ponitur. Quocirca si fumatur A B, potens compositum ex quadratis rectarum A G, G B, & alia recta potens rectangulum sub A G, G B, ideſt, media proportionalis inter A G, G B; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod eſt propoſitum.

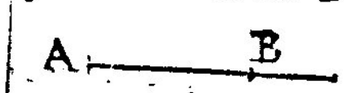
PRINCIPIVM SENARIORVM per compoſitionem.

36.
30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantum cõmenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales A B, B C, potentia ſolum commenſurabiles, inuentæ per 3. lemma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe.



Quoniam A B, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi B C; & vt A B, ad B C, ita eſt rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C, per lemma propoſ. 31. huius lib. erit rectangulum ſub A B, B C, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabilia ſunt quadrata rectarum A B, B C; (omnia enim ſunt Rationalia) atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14 huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub A B, B C, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratum ex tota A C, (Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cum rectangulo ſub A B, B C, bis) compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis A B, B C, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potẽtia tãtũ cõmenſurabiles, &c. Quod oſtẽdẽdũ erat.

10. decimi.
16. decimi

4. ſecundi.
17. decimi.
10. defin.

SCHOLION.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas eſt mẽdio loco proportionalis, Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

22. decimi.
37. decimi.

37.
31.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit: Vocetur autem ex binis Medijs prima.

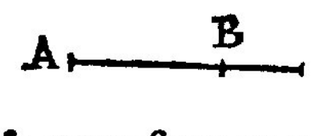
COMPONANTVR duæ Mediæ ſuperius inuẽtæ A B, B C, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale cõtineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quia A B, eſt ad B C, vt rectangulũ ſub A B, B C, ad quadratũ ex B C, vt in lemmate propoſ. 3. huiꝰ lib. eſt oſtenſum; ſunt autẽ A B, B C, longitudine incõmenſurabiles; erunt rectangulum ſub A B, B C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, B C, com-



28. decimi.
10. decimi.

commensurabile est, quod sub A B, B C, bis; & quadrato ex B C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, B C: (Nam cum A B, B C, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex B C, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub A B, B C, bis, & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex A C, quod huic composito æquale est, incommensurabile quoque est rectangulo sub A B, B C, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub A B, B C, cõmensurabile rectangulum semel sub A B, B C, cum hoc sit illius dimidiũ. Igitur quadratum ex A C, incommensurabile est rectangulo sub A B, B C: Ponitur autem rectangulum sub A B, B C, Rationale. Irrationale ergo est quadratum ex A C; & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, uel ut alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum cõmensurabiles cõponantur, &c. Quod erat ostendendũ.

16. *decimi.*

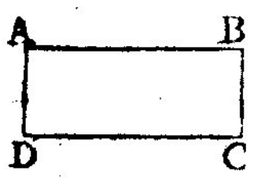


4. *secundi.*
17. *decimi*
13. *decimi.*
10. *defin.*
11. *defin.*

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR *rectangulum* A B C D, *sub Rationali* A B, *& Irrationali* B C. *Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, faciet ipsum ad Rationalem* A B, *applicatum latitudinem* B C, *Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim* B C, *Irrationalis. Non ergo* A C,



21. *decimi.*

A C, *Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

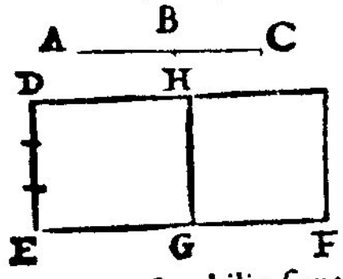
38.
32.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

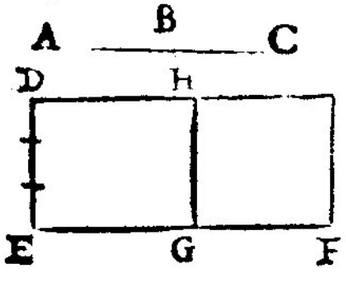
COMPONANTVR duæ Mediæ superius inuentæ A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, ad quam applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & composito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, æquale est duobus quadratis ex A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub A B, B C, continetur. Quoniam uero, ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub A B, B C, ei commensurabile, hoc est, H F, Medium, ex coroll. propos. 24 huius lib. Rursus quia quadrata Mediarũ A B, B C, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, utriuis ipsorum commensurabile: Sed utrumque quadratorum ex Medijs A B, B C, Medium est. Igitur & D G, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (est enim C H, Rationali D E, æqualis.) erunt eorum latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia A B, B C, longitudine incommensu-

29. *decimi.*
45. *primi.*
4. *secundi.*



16. *decimi.*
34. *primi*
23. *decimi.*

mensurabiles sunt; & est vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, B C, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A B, incommensurabile rectangulo sub A B, B C, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex A B, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo sub A B, B C, commensurabile est, quod continetur bis sub A B, B C, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, incommensurabile rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, rectangulo H F. Cum ergo sit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; erit E G, ipsi G F, longitudine incommensurabilis: ostensum autem iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt E G, G F, potentia tantū cōmensurabiles; ac propterea, & tota E F, cōposita, Irrationalis est. Quare, per lēma antecedens, D F, cōtentū sub Rōnali D E, & Irrationali E F, Irrationale est; Ac propterea & quadratū ex A C, ipsi D F, æquale, Irrationale est. Quare & recta A C, Irrationalis est. Vocetur aūt ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundū. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandū.



1. *sexti.*
10. *decimi.*
37. *decimi.*

SCHOLION.

VOCAVIT Euclides in præcedēti propositione lineā Irrationalē A C, quæ cōponitur ex duabus Medijs potētia tantū cōmēsurabilibus, quæ Rationale cōtineāt, ex binis Medijs primā: Hic vero lineā Irrationalē A C, quæ cōponitur ex duabus Medijs potētia tātū cōmēsurabilibus, quæ Mediū cōtineāt, ex binis Medijs secūdā, quoniā Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit cōpositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulū sub partibus bis cōprehēsum, quadrato eius lineę, quæ maior pars minorem superat.

SECETVR recta A D, in B, non bifariam, sitq; maior pars A B; in qua sumatur B C, minori parti B D, æqualis, ut sit A C, excessus, quo A B, superat B D, hoc est, B C, ipsi B D, æqualem. Dico quadrata rectarū A B, B D, simul maiora esse rectāgulo bis sub A B, B D, quadrato rectæ A C. Quoniá quadrata ex A B, B C, æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, una cum quadrato ex A C; estq; B C, ipsi B D, æqualis: erunt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectāgulo bis sub A B, B D, una cū quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora sunt, quá rectangulum bis sub A B, B D quadrato rectæ A C. quod est propositum.



7. *secundi.*

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur, quadrata partiū inæqualiū simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potētia incōmēsurabiles cōponātur, quæ faciāt cōpositū quidē ex ipsarū quadratis Rōnale; quod autē sub ipsis cōtinetur, Mediū: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ superius inuētæ A B, B C, potētia incōmēsurabiles, faciētes quidē cōpositū ex ipsarū quadratis Rōnale; rectāgulū vero sub ipsis cōtētū, Mediū. Dico totā A C, esse Irrationalē. Q m rectāgulū sub A B, B C, Mediū ponitur, erit & rectāgulū bis sub A B, B C, illi cōmēsurabile, Mediū, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur

34. *decimi.*

10. *defin.* Ponitur aũt cõpositũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rõnale. Incõmẽsurabile ergo est rectãgulũ bis sub AB, BC, cõposito ex quadratis rectarũ AB, BC. Igitur & rectangulum bis sub
17. *decimi.* AB, BC, una cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadra-
10. *defin.* tis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur
11. *defin.* Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Voce-
4. *secundi* tur autem Maior, quia cum possit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulũ bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, per lemma antecedẽs, ma



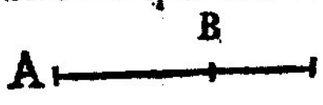
ius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum uero bis sub AB, BC, Medium; recte uocabitur AC, Maior, si quidem a Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

40. 34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum qui[illegible]um quadratis Medium; quo[illegible]s continetur, Rationale: [illegible]ta recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ superius inuentæ
35. *decimi.* AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectangulum uero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Ir-



rationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, Medium est; quod uero cõtinetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur;

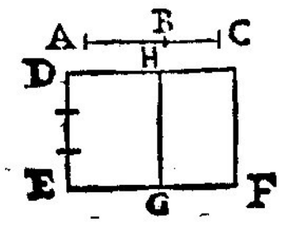
ponatur; erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. Igitur & cõ- 10. *defin.*
positum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommen- 17. *decimi.*
surabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, ut diximus, sit Rationale; erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; Ac pro- 10. *defin.*
inde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Ratio- 11. *defin.*
nale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandũ erat.

41. 35.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque c[illegible]sito ex quadratis ipsarum: tota rec[illegible] Irra[illegible]onalis erit. Vocetur autem b[illegible]s.

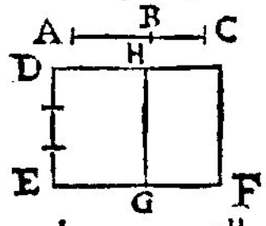
COMPONANTVR duæ rectæ sup[illegible]uentę AB, 36. *decimi.*
BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalẽ esse. Exponatur enim Rationalis DE, ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, re-



45. *primi.*

H ctangu-

4. *secundi.* ctangulum D F, æquale est composito ex quadratis rectarum A B, B C, una cum rectangulo bis sub A B, B C, erit reliquum H F, æquale rectangulo bis sub A B, B C. Quoniam uero tam compositum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum D G, quam rectangulum sub A B, B C, atque adeo ex coroll. propos. 24. huius libri, quod bis sub A B, B C, nempe ipsum H F, (cum illi sit commensurabile) Medium ponitur; facient D G, H F, ad Rationalem D E, applicata latitudines E G, G F, Rationales ipsi D E, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum A B, B C, id est, rectangulum D G, incommensurabile ponitur rectangulo sub A B, B C: Eidem autem rectangulo sub A B, B C, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub A B, B C, hoc est, ipsum H F; erunt & D G, H F, incommensurabilia. Quare cum sit ut D G, ad H F, ita E G, ad G F; erunt E G, G F, longitudine incommensurabiles: Atqui E G, G F, ostensæ sunt Rationales. Igitur E G, G F, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea tota E F, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare D F, contentum sub Rationali D E, & Irrationali [illegible] ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. [illegible] quadratum ex A C, illi æquale, Irrationale [illegible] & recta ipsa A C, Irrationalis. Vocetu[illegible]dia potens, nimirum & compositum [illegible] A B, B C, & rectangulum bis sub A B, B C. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat demonstrandum.



23. *decimi.*

13. *decimi.*

1. *sexti.*

10. *decimi.*

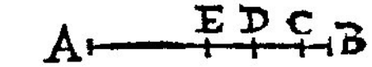
37. *decimi.*

11. *defin.*

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

Sec-

SECETVR *recta A B, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintque priores partes A C, C B, magis inæquales, quam posteriores A D, D B. Dico quadrata ex A C, C B, simul maiora esse quadratis ex A D, D B, simul.* Diuisa enim *A B, bifariam in E,* 

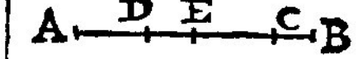
cadet punctum D, uel inter E, C, uel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub A C, C B, una cum quadrato ex E C, æquale est quadrato ex E B: Item rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex E D, æquale est eidem quadrato ex E B; erit rectangulum sub A C, C B, una cum quadrato ex E C, æquale rectangulo sub A D, D B, una cum quadrato ex E D. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium E C, E D, cum quadratū ex E C, maius sit quadrato ex E D; erit reliquū rectangulū sub A C, C B, minus reliquo rectangulo sub A D, D B; ac propterea & rectangulum bis sub A C, C B, minus erit rectangulo bis sub A D, D B. Quoniá uero quadratū ex A B, æquale est tam rectangulo bis sub A C, C B, una cū quadratis ex A C, C B, quá rectágulo bis sub A D, D B, una cum quadratis ex A D, D B; erit rectangulum bis sub A C, C B, una cum quadratis ex A C, C B, æquale rectágulo bis sub A D, D B, una cum quadratis ex A D, D B. Quare cum rectangulum bis sub A C, C B, ostensum sit minus rectangulo bis sub A D, D B; erunt reliqua quadrata ex A C, C B, maiora reliquis quadratis ex A D, D B. Quod est propositum.

5. *secundi*

4. *secundi*

Sed cadat iá *D, inter A, E. Quoniá igitur partes A C, C B, magis inæquales ponuntur, quá partes A D, D B: erit A D; (quæ minor est posteriorū) maior quá*

CB; (quæ priorū minor eſt) ac proinde cū AE, EB, æquales ſint, erit reliqua EC, maior quā reliqua DE.



Itaque quia rectangulum ſub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, una cum quadrato ex DE, æquale eſt quadrato ex AE, hoc eſt, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, una cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, una cum quadrato ex DE. Igitur ut prius, demonſtrabimus quadrata ex AC, CB, maiora eſſe quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum. 5. ſecundi

42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita ut AC, CB, ſint Rationales potentia tantū commenſurabiles, ut uult propoſitio 37. huius libri. Dico



AB, ad aliud punctū diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiā Rationales lineæ potentia tantum commenſurabiles. Si enim fieri poteſt, diuidatur iterum in ſua nomina ad D. Conſtat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam ſi bifariam diuidcretur, eſſent AC, CB, longitudine commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim Rationaies potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariam ſecabitur AB, cum & AD, DB, Rationales ſint potentia tantū commenſurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quam ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, uel minus inæquales ſunt, quam partes AD, DB, uel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB,

CB, uel minora ſunt quadratis ex AD, DB, uel maiora. (Neque enim partes AD, DB, ubicunque punctum D, exiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, utraque utrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione ſecaretur AB, ſecunda diuiſione in eadem nomina, in quæ ſecta eſt diuiſione prima. quod non ponitur.) Quia uero ſi ab æqualibus inæqualia demantur, reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis eſt, ut in pronunciato 6. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, una cum rectangulo bis ſub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, una cum rectangulo bis ſub AD, DB, quod tam illa, quam hæc, æqualia ſint quadrato ex AB; fit, ut qui exceſſus fuerit ablati compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compoſiti ex quadratis rectarum AD, DE, idem ſit reliqui rectanguli bis ſub AC, CB, & reliqui rectanguli bis ſub AD, DB. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. (cum enim rectæ AC, CB, Rationales ſint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compoſitum ex earum quadratis Rationale, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 34. huius. libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, ut in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quoniam uero rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt, erit & quod bis ſub AC, CB, illi commenſurabile, ex coroll. propos. 24 huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub AD, DB, Medium erit. Quare cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum. 4. ſecundi 22. decimi. 27. decimi.

43. 37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ut uult propositio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, existat, similiter probabimus, ut in præcedenti propositione, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. (Cum enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub A C, C B, ei, quod continetur semel sub A C, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub A D, D B. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, ut in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C D, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. Quia uero rectæ A C, C B, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. Quare & 16. *decimi.* compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum utrunque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum A D, D B. Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum A C,

A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse Quod est absurdum. Non igitur A B, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

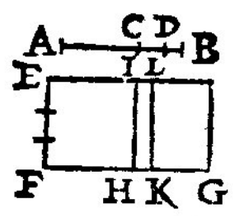
44. 38.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita ut A C, C B, Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ut uult propos. 39. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur ubicunque punctum D, existat, similiter ostendemus, ut in propositione 43. quadrata ex A C, C B, uel maiora esse quadratis ex A D, D B, uel minora. Exponatur Rationalis E F, ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex 45. *primi* A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis sub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis sub 4. *secundi.* A C, C B. Eodem modo si ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis sub A D, D B, comprehenso. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia sunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex A C, C B, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B; erit & E H, maius quam I G; ac propterea E H, maius quam dimidium ipsius E G, ideoq; & recta F H, maior quam dimidium ipsius F G. Eadem ratione ostendemus

demus F K, maiorem esse dimidio ipsius F G. Inæquales ergo sunt partes F H, H G partibus F K, K G, singulæ singulis. Quoniam uero A C, C B, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles, erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. Igitur & compositum ex ipsis utrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo utrunque ipsorum sit Medium, erit quoque compositum ex ipsis, hoc est, E H, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit F K. Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipsi E F, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis sub A C, C B, hoc est, I G, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem H I, erit H G, Rationalis ipsi H I, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus L G, Medium esse, & K G, Rationalem ipsi K L, longitudine incommensurabilē. Rursus quia A C, C B, longitudine sunt incommensurabiles; & est ut A C, ad C B, ita per lemma 3. propos. 19 huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, C B; erit quadratum ex A C, rectangulo sub A C, C B, incommensurabile. Sed quadrato ex A C, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum A C, C B: (cum enim A C, C B, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarū quadrata commensurabilia; erit & compositum ex ipsis utrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex A C, commensurabile.) Rectangulo uero sub A C, C B, commensurabile est, quod bis sub A C, C B. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum E H, incommensurabile est, per scholion propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub A C, C B. hoc est, ipsi I G. Quocirca cum sit ut E H, ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur F G, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus, diuisam



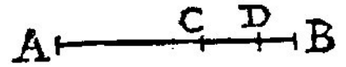
16. decimi.
23. decimi.
23. decimi.
10. decimi.
16. decimi.
1. sexti.
10. decimi.
37. decimi

sam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, ut demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendū. 43. decimi.

THEOR. 34. PROPOS. 46. 45. 39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita ut A C, C B, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum uero sub ipsis Mediū, ut uult propositio 40. huius libri. Dico A B, non posse diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ scilicet lineæ incommensurabiles quoque sint potentia, facientes compositum ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, extiterit, demonstrabimus similiter, ut in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, eum esse, qui rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium est Rationale: (quia cum utrunque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoque eorum excessus spatium Rationale, ut in scholio propos. 17. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium est Rationale. Quoniam uero rectangulum sub A C. C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub A C, C B, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulū bis sub A D; D B. Igitur cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, spatium



27. decimi.

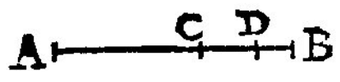
ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita ut A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum uero ſub ipſis Rationale, ut uult propos 41. huius libri.



Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propos. 43 huius libri, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt; quod oſtendemus, ut in propos. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia uero compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: Medium autem non ſuperat Medium Rationale; non erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum

27. decimi.

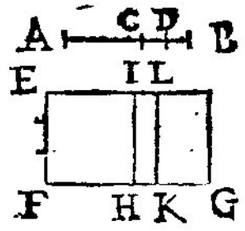
ctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

47. 41.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

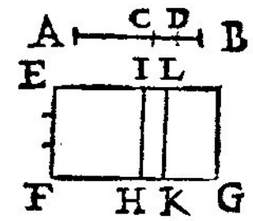
BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita ut A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis, ut uult propos. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ uidelicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. oſtendemusque ut ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (eſt enim I H, ipſi E F, æqualis) faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipſi E F, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia uero compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G; eſtq; ut E H, ad



23. decimi.

1. *sexti.* ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommensurabiles, ut in scholio propos. 10. huius libri ostendimus: Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt F H, H G, potentia solum commensurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, iam ante demonstratum est. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quã ad C, in sua nomina. Quocirca ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.



37. *decimi.*

43. *decimi.*

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomẽ plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI uero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

III.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali cõmensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI uero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLION.

NVMERVS *dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ potentia tantum commensurabiles, non poterit utrunque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomi-*

na

ne ipſæ eſſent lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel vnam tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur una cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE *autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile, antecedit incommenſurabile.*

RVRSVS *recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipſorum nominum expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile:*
Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

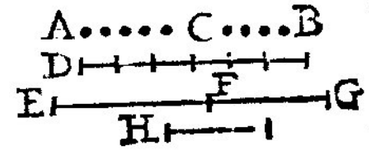
PROBL.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

48.
42.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, CB, ex ijs, quæ in ſcholio 2. propos. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus, ita ut A B, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum:



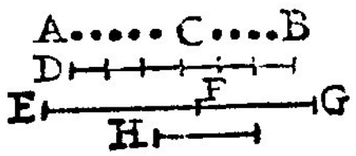
Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, & D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A B, ad A C, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico E G, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam quadrata ex E F, FG, cum proportionem habeant, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, F G, commenſurabiles ſaltem potentia; Oſtenſa autem eſt E F, Rationalis. Igitur & I G, Rationalis eſt. Quæ uero A B, ad A C, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex E F, F G, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F, FG. Sunt igitur E F, FG, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; Ac idcirco tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit ut numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior, quam A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quam quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propos. 14 huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt ut A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuerſionem rationis, ut A B, ad C B, uidelicet ad exceſſum quo antecedens A B, ſuperat conſequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens qua-

6. decimi.

9. decimi.

37. decimi.

dratum ex E F, ſuperat conſequens quadratum ex F G Haber autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionẽ habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; ac proinde rectæ E F, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniã igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



9. decimi.

49. 43. PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in præcedenti propoſitione, expoſitaque Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde ut numerus A C, ad numerum A B, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ F G, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis eſt. Quia uero A C, A B, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantum commenſurabiles; Atque idcirco tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cum enim ſit ut numerus A C, ad numerum A B; ita quadratũ ex F G, ad quadratũ ex E F:

6. decimi

9. decimi

37. decimi.

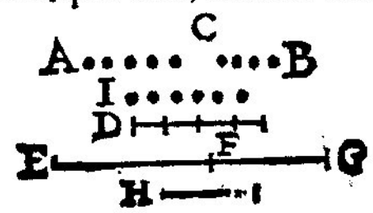
Et

Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quam minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecũda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundam. Quod erat faciendum.

50. 44. PROBL. 15. PROPOS. 51.

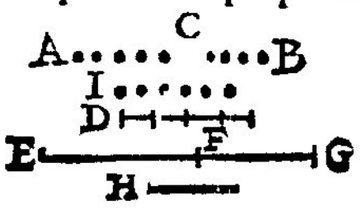
INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proxime maior quam A C. Ita enim, cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quã A C, differet uel ſola unitate ab A C, uel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando unitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi A C, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia unitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit nõ quadratus proxime maior 6. differens a 5. Vnitate, quia unitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare ut in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur nõ



I erunt

erunt ſimiles plani ; ac propterea neq; proportionem habebũt,quã numeri quadrati. Expoſita iã Rationali quapiã D, fiat per coroll propoſ.6. huius lib.vt I,ad AB,ita quadratũ ex D,ad quadratum ex EF.Erũt ergo quadrata ex D,& EF, proportionẽ habentia,quam numerus I,ad numerum AB, cõmenſurabilia;atq; adeo & lineę D, EF,cõmenſurabiles,ſaltem potentia.Exiſtente igitur D,Rationali,erit & EF, Rationalis. Quia uero I,ad AB,hoc eſt, quadratum ex D,ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ ; erunt D,& EF,rectæ inter ſe longitudine incõmẽſurabiles. Rurſus per dictũ coroll. fiat ut AB,ad AC, ita quadratũ ex EF,ad quadratũ ex FG.Erũt ergo quadrata ex EF,FG proportionẽ habẽtia,quã numerus ad numerũ,cõmẽſurabilia ; Ideoq; & lineæ EF,FG,cõmẽſurabiles ſaltem potẽtia.Igitur cũ EF,oſtenſa ſit Rationalis;erit & FG,Rationalis. Et quia AB,ad AC,hoc eſt,quadratũ ex EF,ad quadratũ ex FG, proportionẽ nõ habet , quã numerus quadratus ad numerum quadratũ; erũt EF,FG,longitudine incõmenſurabiles. Sũt ergo EF,FG,Rationales potẽtia tantum commenſurabiles; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiã eſſe. Quoniã eſt vt I, ad AB, ita quadratũ ex D,ad quadratũ ex EF; Et ut AB, ad AC, ita quadratũ ex EF,ad quadratũ ex FG ; erit ex æqualitate ut I,ad AC,ita quadratũ ex D,ad quadratũ ex FG . Nõ habet autẽ I,ad AC, proportionẽ, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Igitur nec quadrata ex D,& FG, proportionẽ habebunt , quam quadratus numerus ad numerum quadratum ; ac propterea rectæ D , & FG, longitudine incõmẽſurabiles ſunt. Quoniã aũt eſt ut AB, ad AC, ita quadratũ ex EF,ad quadratũ ex FG: Eſt aũt AB,maior,quã AC;erit & quadratũ ex EF,maius quã quadratũ ex FG. Sit ergo maiꝰ, per lẽma propoſ. 14.huius lib.quadrato rectæ H. Oſtẽdemꝰ iã ſimiliter,vt in 49.propoſ.H,ipſi EF, longitudine cõmẽſurabilẽ eſſe. Quoniã igitur maius nomẽ EF,plus põt,quã minus FG,quadrato rectæ H,ſibi lõgitudine cõmẽſurabilis ; & neutra ipſarũ EF,FG,lõgitudine cõmẽſurabilis eſt expoſitæ Rati-



6. decimi.

9. decimi.

6. decimi

9. decimi.

37. decimi.

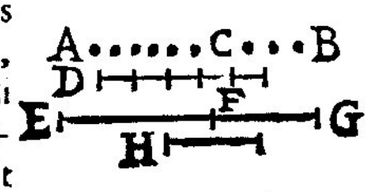
9. decimi.

Rationali D,vt demonſtratum eſt ; Erit EG,per definitionem,ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartã.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita ut cõpoſitus ex ipſis AB,ad neutrũ ipſorũ proportionẽ habeat,quã quadratus ad quadratũ,ex ijs,quæ in ſcholio 3.propoſ.29. huiꝰ lib tradidimus;exponatur Rationalis quædam D,cui longitudine cõmẽſurabilis ſumatur EF.Erit ergo & EF,Rationalis,cũ Rationali D, cõmẽſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cõſtruantur, ut in propoſ.49. oſtẽdemus ſimiliter, ut ibi,totã EG,ex binis nominibus eſſe.Dico & quartã eſſe.Erit enim rurſus,vt in 49.propoſ.quadratũ ex EF, maius quam quadratũ ex FG.Sit ergo maius , quadrato rectæ H. Quoniã igitur eodẽ modo,vt in 49 propoſ. per cõuerſionẽ rõnis, eſt ut AB,ad CB,ita quadratũ ex EF,ad quadratum ex H : Nõ eſt aũt AB,ad CB,ut quadratus ad quadratũ; neq; quadratũ ex EF,ad quadratũ ex H, erit ut numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Lõgitudine ergo incõmẽſurabiles ſũt rectę EF,& H.Itaq; cũ maius nomẽ EF,plus poſſit,quã minus FG,quadrato rectæ H,ſibi lõgitudine incõmẽſurabilis , & maius rurſus nomẽ EF,lõgitudine cõmẽſurabile expoſitę Rõnali D;erit EG,ꝑ defin.ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartã . Qđ faciendũ erat.



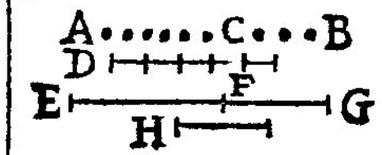
9. decimi.

PROBL. 17. PROPOS. 53. 52. 46.

INVENIRE. ex binis nominibꝰ quintã.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ut in præcedenti propoſ. fiat conſtructio , ut in propoſ.50.nẽpe ſumatur FG, longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D, &c. Oſtendemus ergo ut in propoſ. 50.EG, eſſe ex binis nominibus . Dico,& quintam eſſe. Demonſtrabimus enim eodem modo , ut in 50. propoſ. quadratum ex EF, maius

esse, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam uero, ut in propos. 49 ostensum est, per conuersionem rationis, est ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Ostendemus, ut in propositione antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen E F, plus possit, quã minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

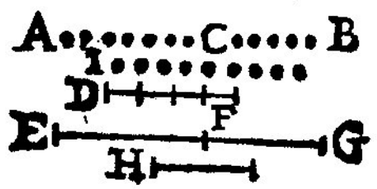


53.
47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam,

REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se pri-
30. *septimi* mos. Nam hac ratione & totus ad utrunque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finẽ lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus: Hic enim ad A B, & A C, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & ut I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiant, ut in propos. 10.

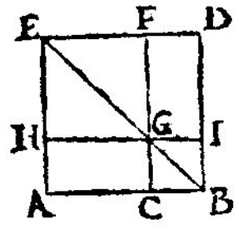


ostendemusq; ut ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, ut in 55. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque ut in propos. 49. per conuersionem rationes, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum igitur A B, ad C B, atque adeo quadratũ ex E F, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius 9. *decimi.*
nomen E F, plus possit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextã. Quod faciendum erat.

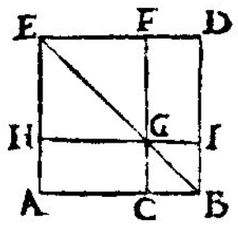
LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA *sit recta* A B, *utcunq; in* C. *Describatur ex* A B, *quadratum* A B D E, *in quo diameter ducatur* B E: *Ducta autem ex* C, *recta* C F, *ipsi* B D, *parallela, quæ diametrum secet in* G, *agatur per* G, *ipsi* A B, *parallela* H I. *Erunt igitur per coroll. propos.* 4. *lib.* 2. F H, C I, *quadrata partium* A C, C B; *utrunq; autem rectangu-*



lorum D G, G A, *comprehensum sub eisdem partibus*: *At uero rectangula* C D, A I, *sub tota* A B, *&*



parte C B, *contenta*. *Dico* D G, *medium proportionale esse inter quadrata* F H, C I: *At* C D, *medium esse proportionale inter quadrata* A D, C I. *Quoniam ut* H G, *ad* G I, *ita* 1. *sexti.* *est tam* F H, *ad* D G, *quam* A G, *ad* C I; 43. *primi* *erit ut* F H, *ad* D G, *ita* A G, *ad* C I: *Est autem* A G, *ipsi* D G, *æquale*. *Igitur erit quoq; ut* F H, *ad* D G, *ita* D G, *ad* C I; *Atq; adeo* D G, *medium proportionale est inter quadrata* F H, C I.

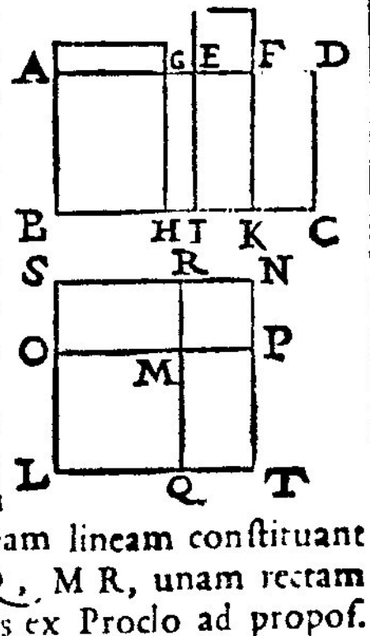
1. *sexti.* RVRSVS *quia est ut* A B, *ad* C B, *ita tã* A D, *ad* C D, *quam* A I, *ad* C I; *erit ut* A D, *ad* C D, *ita* A I, *ad* C I: *Est autem* A I, *ipsi* C D, *æquale*. *Igitur erit ut* A D, *ad* C D, *ita quoq;* C D, *ad* C I. *Quare* C D, *medium proportionale est inter quadrata* A D, C I. *Eodem modo erit* A F, *medium proportionale inter quadrata* A D, F H.

54.
48. ## THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commensurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato

drato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq; A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabilis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus potest quam E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, quadrato ex E F, æquale parallelogrammum sub A G, G E, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare A G, G E, partes inter se longitudine cõmẽsurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis A B, D C, parallelæ G H, E I, F K. Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturq; quadrata L M, M N, ita ad angulũ M, ut latera M O, M P, unam rectam lineam constituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, unam rectam Q R, vt demonstratum est a nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli O M Q, P M R, ad uerticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; sit autem O P, ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoq; quadratum.



18. *decimi.*

14. *secundi*

QVONIAM uero rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex E F; erit ut A G, ad E F, ita E F, ad G E; Ac propterea & ut A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate. A Equale igitur est T M, ipsi E K. Cum ergo ipsi T M, æquale sit M S; & ipsi E K, æquale sit F C: erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totũ quadratũ L N, toti rectãgulo A C, æquale est; atq; adeo recta O P, potest spatiũ A C, contentum

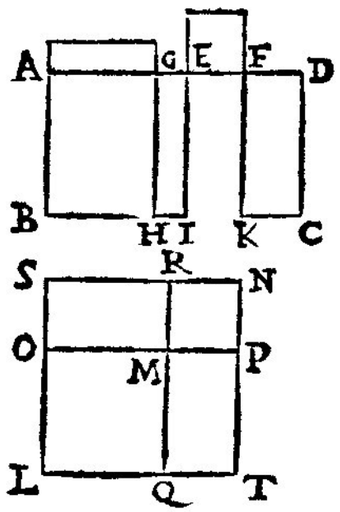
17. *sexti.* 1. *sexti.*

43. & 36. *primi.*

tantum ſub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

QVONIAM A G, G E, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles; erit & tota A E, utrique ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem A E, cum ſit maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commenſurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeo cum A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. Quare rectangula A H, G I, ſub Rationalibus cõtẽta Rationalia ſunt; Ideoq; & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

16. decimi.



10. decimi.

ET quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi A E, longitudine oſtenſa commẽ ſurabilis A G; & ipſi E D, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & A G, E F, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & A H, E K, eandem proportionem habentia, quam A G, E F, incommenſurabilia ſunt; ac proinde & L M, M T, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. Igitur & rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autẽ & O M, M P, Rationales oſtenſæ. Igitur O M, M P, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quapropter tota O P, potens ſpatium A C, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

1. ſexti
10. decimi.
10. decimi.
1. ſexti
37. decimi.

55.
49.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

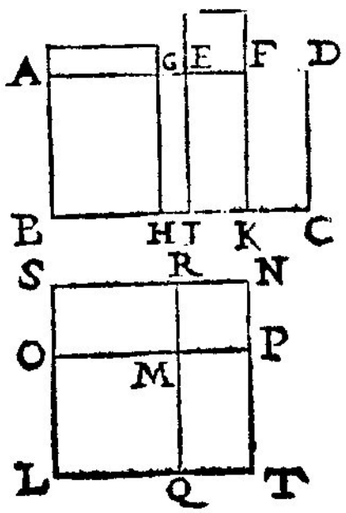
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex

& ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles; & A E, plus poterit quam E D, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et deniq; E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis. Secetur E D, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam O P, poſſe ſpatium A C, contentum ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico iam O P, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM A E, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi E D; & E D, minus nomen exiſtens ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali A B; erunt A E, A B, longitudine incommenſurabiles. Et quia A G, G E, oſtenſæ ſunt in antecedẽti propoſitione longitudine cõmenſurabiles; erit quoq; tota A E, vtriq; ipſarum commenſurabiles. Quare cum A E, maius nomẽ exiſtens ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & A G, G E, Rationales: quod cum vtraq; A G, G E, ipſi A E, ſit longitudine commenſurabilis; at vero A E, Rationali A B, longitudine incommenſurabilis; erit vtraque A G, G E, eidem A B, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam A B, A G, quam A B, G E, Rationales ſunt potentia ſolum cõmenſurabiles. Igitur rectangula A H, G I, Media ſunt; propterea q;

13. decimi.



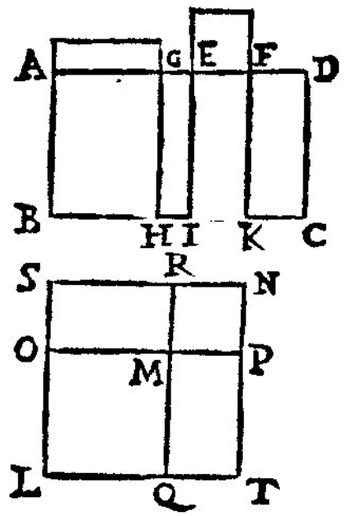
16. decimi.

14. decimi.

22. decimi.

ptereaq; & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ O M, M P, ſunt Mediæ.

10. *decimi.* QVIA uero A G, G E, longitudine ſunt commenſurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia, commenſurabilia; atq; idcirco & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt gitur & rectæ O M, M P, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam A E, E D, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ipſi uero A E, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis A G; & ipſi E D longitudine commenſurabilis eſt E F, eius dimidia; erũt pe. ſch. 1ũ propoſ. 14. huius lib. A G, E F, longitudine incommẽſurabiles; Ac proinde A H, E K, eandem habentia proportionem cũ ipſis, incõmenſurabilia ſunt. Igitur & L M, M T, ipſis A H, & E K, æqualia, incommenſurabilia ſunt. Ideoq; & rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, cum eandem habeant proportionem quam L M, M T. Cum ergo oſtenſum ſit O M, M P, Medias eſſe, & commẽſurabiles; erunt O M, M P, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniã deniq; E D, minus nomẽ ipſius A D, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi A B, hoc eſt, ipſi E I: Eſt autem E F, ipſi E D, quoque longitudine commenſurabilis;



10. *decimi.*

10. *decimi* 1. *ſexti.*

12. *decimi.* Erunt etiam E I, E F, longitudine commenſurabiles; Ac proptereа cum E I, Rationalis ſit, erit & E F, Rationalis. Quare

20. *decimi.* E K, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem M T, ſub O M, M P, contentum ipſi E K, æquale. Igitur & M T, Rationale eſt. Quapropter O M, M P, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleq: continentes; atq; adeo

38. *decimi.* O P, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

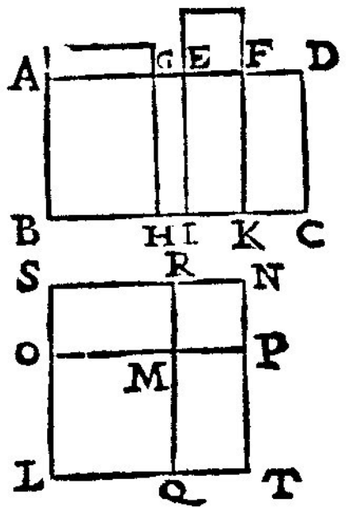
THEO-

56.
50.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus tertia A D. Dico rectã, quæ põt ſpatiũ A C, Irrationalẽ eſſe, quæ dicitur ex binis Medijs ſecunda. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles; & A E, plus poterit, quã E D, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationalis eſt. Secta E D, bifariam in F. reliqua oĩa fiãt, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, ut ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et ut in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tãtũ cõmenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponatur longitudine incõmenſurabilis, quẽadmodũ & ibi eadẽ A E, ipſi A B, longitudine erat incõmenſurabilis. Quoniã uero E D, E F, ſunt cõmẽſurabiles lõgitudine; eſtq; E D, ipſi A B, Rõnali, hoc eſt, ipſi E I, lõgitudine incõmẽſurabilis; erit quoq; E F, eidẽ E I, lõgitudine incõmẽſurabilis: Sũt aũt E F, E I, Rõnales, qđ E F, dimidia ſit ipſius E D, Rõnalis; & E I, expoſitæ Rõnali A B, æqualis. Igitur E F, E I, Rõnales ſunt potẽtia tãtũ cõmẽſurabiles; Ac proptereа E K, Mediũ eſt; ideoq; & M T, æquale ipſi E K, Mediũ eſt, qđ ſub Medijs O M, M P, cõtinetur. Itaq; cũ O P, M P, Mediæ ſint potẽtia ſolũ cõmenſurabiles, cõtineantq; ſpatiũ Mediũ; erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecũda appellatur. Si igitur ſpatiũ contineatur ſub Rõnali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



14. *decimi.*

22. *decimi.*

39. *decimi*

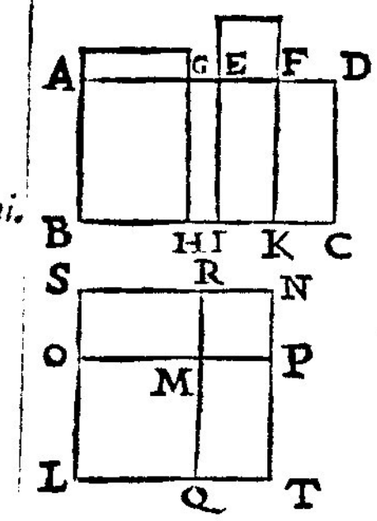
THEO-

57. 51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatiũ A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit A E, ipſius A D, maius nomen. Erunt ergo ex defin A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & deniq; A E, ipſi A B, commẽ ſurabilis erit longitudine. Secta E D, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. Erunt ergo A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iã eodem modo, ut ibi, O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ uocatur Maior. Quoniã A G, G E, longitudine incommenſurabiles ſunt; erunt & rectangula A H, G I, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeo & quadrata L M, M N, ipſis A H, G I, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ O M, M P, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine cõmenſurabilis Rationali A B; erit & A E, Rationalis; & rectangulum A I, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autẽ A I, æquale compoſito ex quadratis L M, M N: Compoſitum ergo ex quadratis L M, M N, Rationale eſt.



19. *decimi.*

10. *decimi.*

20. *decimi.*

ET quoniam E D, minus nomen ipſius A D, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali A B, erit & E F, ipſius dimidia eidem A B, longitudine incommenſurabilis; Et eſt E F, Rationalis, cum ſit Rationali E D, commenſurabilis. Igitur E F, & A B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare E K, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & M T, illi æquale, contentumq; ſub O M, M P, Medium eſt. Quocirca cum O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex ipſarum quadratis L M, M N, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis M T, Medium, Irrationalis erit tota O P, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

22. *decimi*

40. *decimi.*

58. 52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

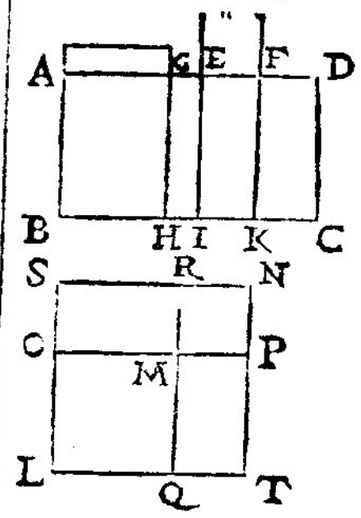
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus quinta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poteſt, quam E D, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & denique E D, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali A B. Secta E D, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. Erunt igitur rurſus A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam O P, poſſe ſpatium A C. Dico O P, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ O M, M P, potentia incommenſurabiles. Et quia A E, maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali A B; erunt;

19. *decimi*

erunt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ commenſurabiles. Quare rectangulũ AI, ſub ipſis contentũ, Mediũ eſt. Eſt autẽ AI, æquale cõpoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & cõpoſitũ hoc, Mediũ erit. Rurſus quia ED, Rõnalis ponitur ſ ogitudine cõmenſurabilis Rõnali AB, cũ ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidẽ AB, cõmenſurabilis lõgitudine, & Rõnalis. Quare EK, ſub Rõnalibus EI, EF, ſ ogitudine cõmenſurabilibus, Rationale eſt; atq; idcirco & MT, ſub OM, MP, contentũ Rõnale erit, cũ ipſi EK, ſit æquale. Quũobrẽ cũ rectæ OM, MP, potẽtia incõmẽſurabiles ſint, faciantq; cõpoſitũ quidẽ ex ipſarũ quadratis LM, MN, Mediũ; Rectangulũ vero MT, ſub ipſis cõtentũ, Rõnale; Irrationalis erit tota OP, quę dicitur potẽs Rationale & Mediũ. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

22. *decimi.*



20. *decimi.*

41. *decimi.*

59.
53.

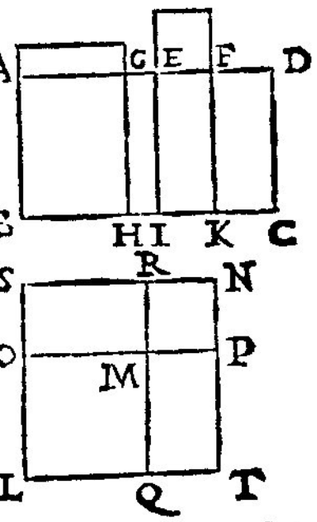
THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectã, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quę dicitur potens bina Media. Sit ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & deniq; neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit cõmẽſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quę in ſu-

in ſuperioribus; eruntq; AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Iam uero oſtendemus ſimiliter, ut in propoſ. 55. rectã OP, poſſe ſpatiũ AC. Item, ut in propoſ. 58 rectas OM, MP, potentia eſſe incõmenſurabiles. Rurſus, ut in antecedẽti propoſ. erit cõpoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autẽ in ppoſ. 58. erit quoq; MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incõmenſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc uero eidẽ cõmenſurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. Igitur & AI, EK, incõmenſurabilia ſunt, cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

19. *decimi*



13. *decimi.*
10. *decimi.*
1. *ſexti.*

42. *decimi*

THEOR. 43. PROPOS. 61.

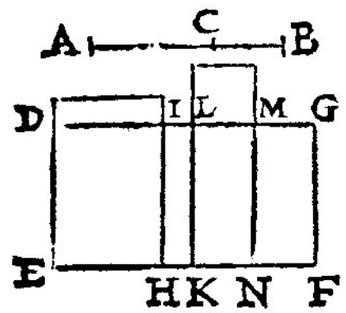
60.
54.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominib⁹ AB, cuius maius nomẽ AC; & ad Rõnale expoſitã DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, ex binis nomi-

45 *primi.*

nominibus esse primam. Applicetur ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub
4. *secundi.* A C, C B, æqualia sint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per constructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, parallela agatur M N: eritq; utrunque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, cõtinetur. Et quoniam A C, C B, Ra



37. *decimi.* tionales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; quorum vtrique cum etiam cõ-
16. *decimi* mensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad
21. *decimi.* Rationalem D E, faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.

22. *decimi* RVRSVS quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commẽsurabiles, Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

QVONIAM ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, C B, medium proportionale est inter quadrata ex A C, C B; erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K; atque adeo cum rectæ D I, L M, I L, eandem

eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commensurabilia sunt, quod A C, C B, ponuntur potentia commensurabiles; erunt & D H, I K, ipsis æqualia, commensurabilia. Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem D K, maius est, quam L F, quod & quadrata ex A C, C B, maiora sint, per lemma propos. 39 huius libri, quam rectangulum bis sub A C, C B; erit & recta D L, maior quam L G, cum D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior est, quam L G; & ad D L, applicatur rectangulum sub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore L G, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub D I, I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurque D L, ad I, in partes D I, I L, longitudine commensurabiles, ut est demonstratum, poterit D L, maior plus quam L G, minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum D G, ostensa sit ex binis nominibus, & D L maius nomen plus posse, quam L G, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

1. *sexti.* 17. *sexti.* 10. *decimi.* 1. *sexti.* 18. *decimi.*

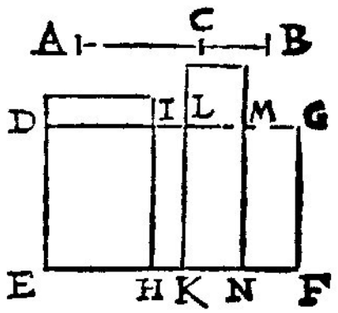
THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F,

æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur eadem, quæ in propos. præcedenti, ita ut rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, C B, & utrunque ipsorū L N, M F, ei quod sub A C, C B, continetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Medijs primam A B, componentes, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B; atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, commensurabilia, atque Media. Cum ergo propterea & totum D K, utrique ipsorum D H, I K, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos 24. huius lib. D K, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalē D E; erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub A C, C B, Rationale est; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem L K; erit eius latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarum D L, L G, ipsa L G, sit ipsi D E, commensurabilis longitudine, at D L, longitudine incommensurabilis; erunt D L, L G, longitudine incommensurabiles. Quod cum D L, L G, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; ac propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in antecedenti propos demonstrabimus D L, maius nomen esse, & posse plus, quam minus L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius D G, maius nomen D L, plus possit, quam minus nomen L G, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen L G, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

45. *primi*



38. *decimi.*

16. *decimi.*

23. *decimi.*

21. *decimi.*

13. *decimi.*

37. *decimi.*

THEOR.

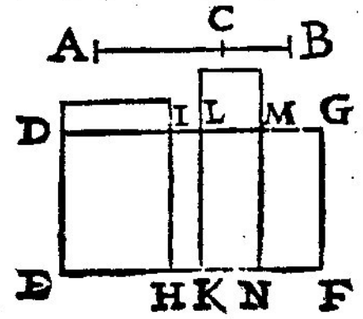
THEOR. 45. PROPOS. 63.

62. 56.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalē applicatū, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalē D E, applicetur rectangulū D F, æquale quadrato ex A B, latitudinē faciens D G. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiā. Constructis ijsdē, quæ in propos. 61. quoniā A C, C B, ex binis Medijs secundā A B, cōponētes, Mediæ sunt potentia solū cōmensurabiles, quę Mediū cōtinent; Erūt quadrata ex A C, C B, atq; adeo rectangula ipsis æqualia D H, I K, cōmensurabilia, & Media. Cum ergo propterea & totum D K, utriq; ipsorū D H, I K, sit cōmensurabile; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri D K, Mediū; quod cum applicatū sit ad Rationalē D E; erit eius latitudo D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incōmensurabilis. Rursus quia rectangulū sub A C, C B, Mediū est; erit & eius duplū L F, Mediū; quod cū applicatū sit ad Rationalē L K; erit latitudo L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incōmēsurabilis. Et quia A C, ipsi C B, lōgitudine est incōmensurabilis; estq; ut A C, ad C B, ita per lēma 3. propos. 19. huius libri, quadratū ex A C, ad rectangulū sub A C, C B; erit quoque quadratū ex A C, rectangulo sub A C, C B, incōmensurabile. Est autē quadrato ex A C, cōmensurabile cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, quod quadrata ex A C, C B, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur cōmensurabiles; & rectangulo sub A C, C B, cōmensurabile est eius duplum, nimirū rectangulum bis sub A C, C B. Igitur cōpositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectāgulū D K, incōmēsurabile est rectāgulo bis sub A C, C B, hoc est, rectāgulo L F, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ D L, L G, eandem

45. *primi*



39. *decimi.*

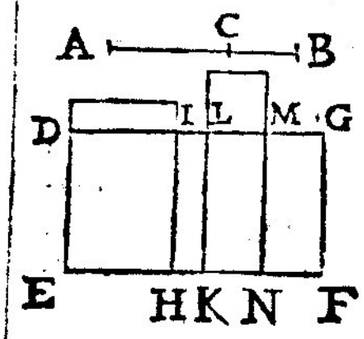
16. *decimi.*

23. *decimi.*

20. *decimi.*

16. *decimi.*

10. *decimi.* rationem cum D K, L F, habentes, longitudine sunt incommensurabiles: sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; ac
37. *decimi.* propterea tota D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in propos. 61. ostendemus D L, esse maius nomen, possequè plus, quã minus L G, quadrato rectæ sibi lõgitudine commensurabilis. Quã ob rem cum D L, maius nomen plus possit, quã L G, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, L G, Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. G, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, &c. Quod erat demonstrandum.



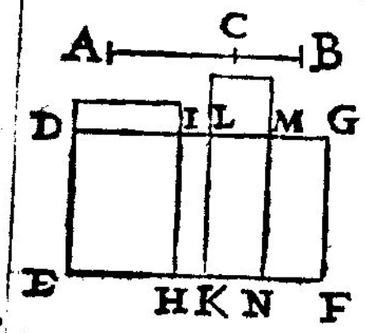
63. 57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

45. *primi*

40. *decimi.*



SIT Maior A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, applicetur rectangulũ D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse quartã. Constituantur eadẽ prorsus, quæ in propos. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectangulum uero sub ipsis, Medium; erit quoque D K, composito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale existens, Rationale; At uero L F, duplum eius, quod sub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur Rationale D K, ad Rationalem D E, est applicatum; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item cum L F, Medium sit appli-

applicatum ad Rationalem L K; erit L G, Rationalis ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quæ cum duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipsi D E, cõmensurabilis sit longitudine; hæc uero eidem D E, longitudine incommensurabilis; incommensurabiles erunt longitudine D L, L G: ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantum commensurabiles; ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam uero ut in propos. 61. demonstrabimus rectangulũ sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quod rectæ A C, C B, potentia incommensurabiles sunt; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia; atque adeo & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam uero ut in propos. 61. ostendimus, D L, maior est, quam L G; & ad D L, applicatum est rectangulũ sub D I, I L, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; poterit D L, plus quam L G, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa D L, (maius nomen ipsius D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratũ ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

23. *decimi*

13. *decimi*

37. *decimi*

10. *decimi*

19. *decimi*

64. 58.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

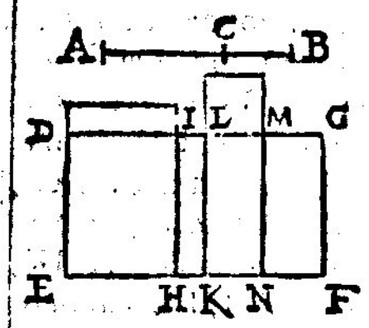
QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomen A C; & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinẽ faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam esse. Fiant eadem

5. *primi*

omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, cõponentes AB, potentem Rationale ac Medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale cõposito ex quadratis rectarum AC, CB, Mediũ; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalẽ, & longitudine Rationali DE, incõmensurabilẽ: At uero Rationale LF, ad Rationalẽ LK, applicatum, facit latitudinẽ LG, Rationalẽ longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, cõmensurabilem. Quia igitur duarũ rectarũ DL, LG, hæc quidem longitudine cõmensurabilis est Rationali DE, illa uero longitudine incommensurabilis; erunt DL, LG, longitudine incommẽsurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam uero, ut in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & ut in antecedẽti propos. DL, maius nomẽ esse, atq; posse plus, quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine cõmensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

41. *decimi.*



23. *decimi.*

21. *decimi.*

13. *decimi.*

37. *decimi.*

65. 59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

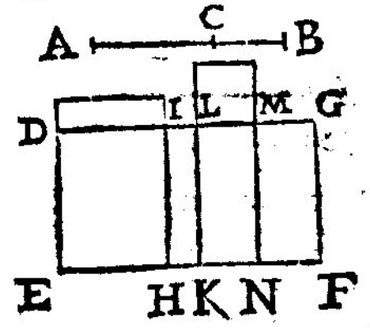
QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DI, æquale

45 *primi.*

æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis ijsdem quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & cõpositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium, & incõmensurabile cõposito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Quoniã uero cõpositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem uero rectangulo sub AC, CB, cõmensurabile est rectangulũ bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; Erit cõpositum ex dictis quadratis hoc est DK, incõmensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandẽ rationẽ habentes cum DL, LG, longitudine incõmensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum cõmensurabiles; Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam uero, ut in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen, posseq; plus quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis. Cum ergo ostensum sit, neutrã ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, &c. Quod erat ostendendum.

42. *decimi.*



23. *decimi.*

42. *decimi.*

13. *decimi.*

10. *decimi*

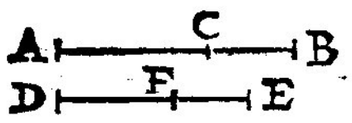
37. *decimi.*

66. 60.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque A B, diuisa in sua nomina, quorum maius A C, & C B, minus, sitque recta D E, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi A B.



12. sexti. Fiat ut tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F; erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E ut tota A B, ad totam D E.

19. quinti. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur D E; erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis: sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus Rationales. Igitur & D F, F E, Rationales sunt. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E: Sunt autem A C, C B, potentia solum commensurabiles; erunt & D F, F E, potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; Ac propterea D E, ex binis nominibus. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Aut enim A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem A C, plus potest quam C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quod si A C, commensurabilis sit longitudiné Rationali expositæ, ita ut A B, sit ex binis nominibus prima; erit & D F, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum utraque, & Rationalis & D F, eidem A C, sit cõmensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si uero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, ut A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda: Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita ut A B, sit ex binis nominibꝰ tertia; erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

10. decimi. 37. decimi. 10. decimi. 37. decimi. 15. decimi. 12. decimi. 14 decimi.

Ergi si A C, plus possit, quam C B, quadrato rectæ sibi

longitudine incommensurabilis; poterit & D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, uel quintam, uel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, uel quinta, uel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

5. decimi.

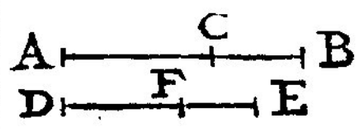
SCHOLION.

QVOD si recta D F, potentia tantum commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodē modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus ubique: commensurabilis potentia tantum:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem, commensurabilis longitudine; At uero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, ut D F, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei commensurabilis potentia tantum D F, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, ut D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo utrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D F; erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D F, ipsi A B, potentia

12. decimi. 10. decimi.

potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eodem modo neque vtraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque ſecunda, uel quinta. Eſſet enim vtrunque nomen minus CB, FE, ex defin longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ, atque adeo & inter ſe. Igitur & totæ AB, DE, longitudine, forent commenſurabiles. quod non ponitur.



SEMPER *tamen verum eſt, ſi AB, eſt ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilem, eſſe quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE; poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel ſexta, ita ut AC, plus poſſit, quam CB, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum ſit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiã quarta, vel quinta, vel ſexta, licet nõ eadẽ ordine ipſi AB.*

15. *decimi.*

15. *decimi.*

IN *ſequentibus autem quinque propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, quanquam potentia tantum illi commenſurabilis ſit.*

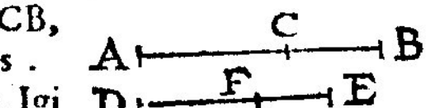
67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ eſt ex binis Medijs, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Medijs eſt, atque ordine eadem.

SIT ex binis Medijs AB, quæcunque diuiſa in ſua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, ſitque ei recta DE, longitudine commenſurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. Fiat ut tota AB, ad

ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. Erit ergo & reliqua CB, ad reliquã FE, ut tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. Igitur & DF, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt ut AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando ut AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sũt autem AC, CB, potentia ſolum commenſurabiles; erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cum ergo & oſtenſæ ſint Mediæ; erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; Atque idcirco DE, erit ex binis Medijs. Dico & ipſi AB, eandem eſſe ordine. Quoniam eſt ut AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem ut AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & ut DF, ad FE ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque ut quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando ut quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulũ ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita ut AB, ſit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si uero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Medium, ita ut AB, ſit ex binis Medijs ſecunda; erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs, longitudine commenſurabilis, &c. Quod demonſtrandum erat.



12. *ſexti.* 19. *quinti.* 10. *decimi.* 24. *decimi.* 38. *decimi.* 10. *decimi.* 38. *vel* 39. *decimi.* 10. *decimi.* 38. *decimi.* 39. *decimi.*

SCHOLION.

EODEM *prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE,*

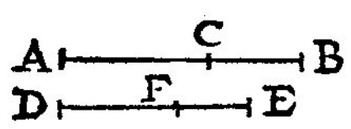
D F, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi A E, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atque ordine eandem ipſi A B, cui commenſurabilis eſt; ſi modo loco: commenſurabilis longitudine: in demonſtratione dicamus ubique: commenſurabilis potentia tantum, &c. vt manifeſtum eſt.

68. 62.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

SIT linea Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis ſit D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, Maiorem eſſe. Fiant enim eadē, quæ ſuperius; ita ut partes A C, C B, ad partes D F, F E, eandem habeant rationem, quam tota A B, ad totam D E. Quoniam igitur A B, D E, commenſurabiles ſunt uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque tam A C, D F, quam C B, F E, eodem modo commenſurabiles. 10 *decimi.*



Rurſus quia eſt ut A C, ad D F, ita C B, ad F E, & permutando ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex C B, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex F E; & componendo ut compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, ad quadratum ex C B, ita compoſitum ex quadratis rectarum D F, F E, ad quadratum ex F E; Et conuertendo ut quadratum ex C B, ad compoſitū ex quadratis rectarum A C, C B, ita quadratum ex F E, ad compoſitum ex quadratis rectarum D F, F E; Et permutando ut quadratum ex C B, ad quadratum ex F E, ita cōpoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, ad compoſitum ex quadratis rectarum D F, F E. Commenſurabile eſt autē quadratum ex C B, quadrato ex F E, quod rectæ C B, F E, oſtenſæ ſint commenſurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarū A C, C B, cōmenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum D F, F E. Eſt autem compoſitum illud Rationale, cum rectæ A C, C B, componant Maiorem A B. Igitur

22. *ſexti.*

10. *decimi.*

40. *decimi*

tur & hoc Rationale eſt, ex 9. defin.

RVRSVS quia eſt ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; Vt autem A C, ad C B, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, & ut D F, ad F E, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque ut quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, ita quadratum ex D F, ad rectangulum ſub D F, F E: et permutando ut quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, C B, ad rectangulum ſub D F, F E. Eſt autem quadratum ex A C, quadrato ex D F, commenſurabile, quod rectæ A C, D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles uel longitudine & potentia, uel potentia tantum. Igitur & rectangulum ſub A C, C B, rectangulo ſub D F, F E, commenſurabile eſt. Eſt autem rectangulum ſub A C, C B, Medium. Igitur & rectangulum ſub D F, F E, illi commenſurabile, Medium eſt, ex coroll. propos 24. huius libri. Quoniam uero eſt ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; ſuntque A C, C B, potentia incommenſurabiles, cum componant Maiorem A B; Erunt quoque D F, F E potentia incommenſurabiles. Itaque cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium, ut oſtenſum eſt; erit tota D E, Maior. Maiori ergo commenſurabilis, & ipſa Maior eſt. Quod demonſtrandum erat.

10. *decimi.*

40. *decimi.*

10. *decimi.*

40. *decimi.*

THEOR. 52. PROPOS. 70.

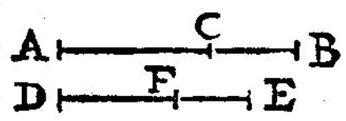
69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commēſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

SIT recta A B, potens Rationale ac Medium, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe potentem Rationale ac Medium. Conſtructis ijſdem, quæ ſupra, oſtendemus, ut in præcedenti propos. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile eſſe compoſito

sito ex quadratis rectarum D F, F E. Est autem illud compositum Medium, cum rectæ A C, C B, componant ipsam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Mediũ est. Eodem modo, ut in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub A C, C B, quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub D F, F E; atque adeo & rectangulum sub D F, F E, Rationale est, ex 9. defin. Denique ut in eadem superiori propos. erunt D F, F E, potentia incommensurabiles. Quare cum D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, ut demonstratum est; erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

41. *decimi.*



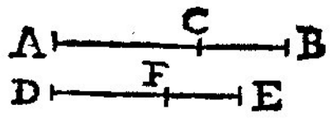
41. *decimi.*

41. *decimi.*

70. 64. THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, esse bina Media potentẽ. Constructis ijsdem, quæ supra, ostendemus, ut in propos. 69. compositũ ex quadratis rectarũ A C, C B, cõposito ex quadratis rectarũ D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse cõmensurabile rectangulo sub D F, F E. Cũ ergo tã compositũ ex quadratis rectarũ A C, C B, quam rectangulũ sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 21. huius libri, tã cõpositum ex quadratis rectarũ D F, F E, quam rectangulũ sub D F, F E, Mediũ. Sed & D F, F E, potentia incõmensurabiles sunt, ut prius. Postremo quia cõpositum ex quadratis rectarũ A C, C B, & rectangulum sub A C,



42. *decimi.*

A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod A B, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum cõpositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarũ D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cum rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Mediũ; & quod sub ipsis continetur, Mediũ; incõmensurabileq; cõpositum ex quadratis ipsarũ; erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti cõmensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendẽdũ.

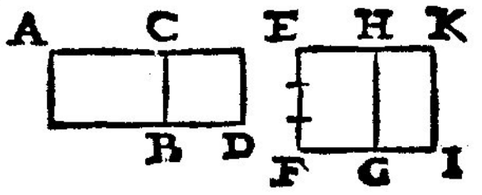
42. *decimi.*

42. *decimi.*

71. 65. THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componãtur, quatuor Irrationales fiunt, uel ea, quæ ex binis nominibus, uel quæ ex binis Medijs prima, uel Maior, uel Rationale ac Mediũ potens.

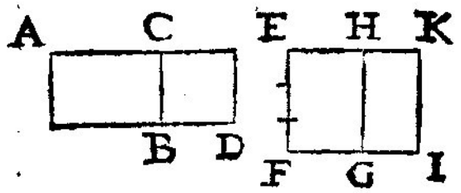
SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse uel ex binis nominibus, uel ex binis Medijs primam, uel Maiorem, uel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, uel maius quam C D, uel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius, & exposita Rationali E F, applicetur ad eã rectangulũ E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, ut totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cum applicentur ad



45. *primi*

Ratio-

21 *decimi.* Rationalem E F; erit E H, Rationalis, & ipsi E F longitu
23.*decimi.* dine commensurabilis; At uero H K, Rationalis, & eadem E F, longitudine incõmensurabilis. Rursus quia F G, H I, incommensurabilia sunt, ut constat ex definitionibus; quod E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Mediũ; erunt E H,

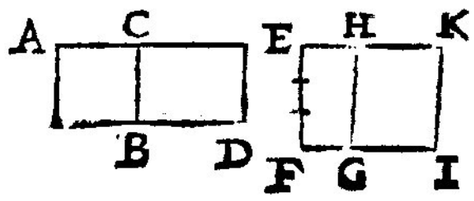


10.*decimi.* H K, eandem cum illis habentes rationem incommensurabiles longitudine, Rationales ergo sunt E H, H K, potentia
37.*decimi.* solum commensurabiles; Ac propterea E H, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque E H, maior quam
1. *sexti.* H K, cum E H, H K, eandem rationem habeant, quã E G, H I. Iam uero maius nomen E H, plus poterit quam minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus possit E H, quam H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeo & spatiũ A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, Irra-
55.*decimi.* tionalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

Si uero E H, plus possit quam H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit E K, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentũ sub Rationali E F, & ex binis nominibus quarta E K, atque adeo & spatium A D, Irra-
58.*decimi.* tionalis est, quæ uocatur Maior.

Sit secundo A B, minus quam C D; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, ut prius, E K, ex binis nominibus, & E H, ipsi E F, longitudine commensurabilis. Et quia A B, minus est, quam C D, hoc est, E G, quam H I; erit quoque recta E H, minor quam H K. Poterit igitur rursus H K, maius nomen ipsius E K, quæ est ex binis nominibus, plus quam E H, minus nomen, quadrato rectæ longitudine

tudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit H K, quam E H, quadrato rectæ longitudine sibi cõmensurabilis; erit E K, ex binis nominibus secunda, cum E H, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali E F, vt ostensum est. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus secunda E K, atq; adeo & spatium A D, ex Rationali A B, & Medio C D, compositum, Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Medijs prima. 56.*decimi.*



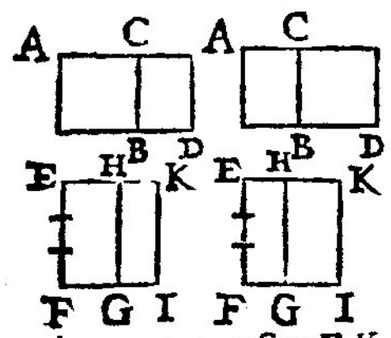
Si uero H K, plus possit quam E H, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit E K, ex binis nominibus quinta, cum E H, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus quinta E K atq; adeo & spatium A D, Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. 59. *decimi.* Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

SI duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia A B, C D. Dico rectam, quæ potest totum spatium A D, esse vel ex binis Medijs secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus A B, vel maius, quam C D, vel minus: A Equale siquidem non erit; alias essent A B, C D, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia A B, C D, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt

& ſpatia E G, H I, Media & incõmenſurabilia; cum illis ſint æqualia Igitur rectæ E H, H K, eandem cum illis habentes
10. *decimi.* rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraq; (cum E G, H I, Media ſint, applicenturq; ad Rationalem
23. *decimi.* E F.) Rationalis eſt, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt E H, H K, potentia ſolum commenſurabiles;
37. *decimi.* ac propterea E K, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero A B, maius ponitur quam C D; erit vt in antecedenti propoſ. E H, maius nomen ipſius E K. Poterit ergo plus quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommẽ ſurabilis. Si plus poſſit E H, quam H K, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrunq; nomẽ E H, H K, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali E F; erit E K, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium E I, contentum ſub Rationali E F, & ex binis nominibus tertia E K, atque adeo & ſpatium
57. *decimi.* A D, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.



Si uero E H, plus poſſit quam H K, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum utrunq; nomen E H, H K, longitudine ſit incommenſurabile Rationali E F; erit E K, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium E I, ſiue ſpatium A D, Irrationa-
60. *decimi.* lis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

Quod ſi A B, minus ſit, quam C D; non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

Nam quadratum Mediæ ad Rationalem lineam applicatum,
23. *decimi.* latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.

At

At quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit ex binis nominibus primam. 61. *decimi.*

Et quadratum eius, quę eſt ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. 62. *decimi.*

Quadratvm deinde eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. 63. *primi.*

At vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam. 64. *decimi.*

Quadratvm autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam. 65. *decimi.*

Postremo quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. 66. *decimi.*

Itaqve cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediç, & inter ſe; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illę vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLION.

Hactenvs egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

In primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

In ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe.

In tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, uidelicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

In quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, uel ex bi-

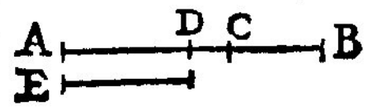
nis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN *quinto autem, quem reperies in propoſ.* 61. 62. 63. 64. 65. *&* 66. *docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.*

IN *ſexto vero; qui quinque propoſ. nempe* 67. 68. 69. 70. *&* 71. *abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.*

IN *ſeptimo deniq; contento duabus propoſitionibus, nimirum* 72. *&* 73. *explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.*

REPERITVR *autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.*



SIT *enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidiæ A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam A C, ſuperat dimidiam A D, recta D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem recta D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.*

RVRSVS *quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti A B, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.*

IDEM *oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationabilibus contingere.*

SEQVVNTVR *iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.*

PRIN-

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

73.
68.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali A B, Rationalis A C, potentia ſolum commenſurabilis ipſi A B. Dico reliquam B C Irrationalem eſſe. Quoniam per lemma 3. propoſ. 9. huius lib. eſt ut A B, ad A C, ita quadratum ex A B, ad rectangulũ ſub A B, A C: Et ſunt A B, A C, longitudine incommenſurabiles; erunt incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangulum ſub A B, A C. Sed quadrato ex A B, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C; (Cum enim A B, A C, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A C,) rectangulo vero ſub A B, A C, commenſurabile eſt rectangulum ſub A B, A C, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum ſub A B, A C, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis ſub A B, A C, una cum quadrato ex B C. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex B C, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex A C, linea Rationali deſcripto;) erit quadratum ex B C, Irrationale; atq; adeo & recta ipſa B C, Irratio-



10. *decimi.*

15. *decimi.*

7. *ſecundi.*

rationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

POTVISSET *Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.*

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM *cum A B, A C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; erit composita ex* B *ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, ut relinquatur Apotome B C.* 37. *decimi.*



74. 69. THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B. sitq; rectangulum sub A B, A C, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam A B, A C, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia; atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit 16. *decimi.*

erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub A B, A C, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub A B, A C, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum A B, A C, rectangulo bis sub A B, A C. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C; erit quoque rectangulum bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub A B, A C, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoq; & recta B C, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. quia uidelicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, ut in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

A C B

7. *secundi.*

17. *decimi.*

SCHOLION.

POTVISSET *hæc propositio proponi hoc modo.*

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM *enim A B, A C, sint Mediæ potentia solum com-*

mensurabiles, contineantq; Rationale ; erit composita ex ipsis
38. decimi. *Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius*
nomen A B, & minus A C. Aufertur igitur A C, minus nomen ex ma-
A C B *iori A B, ut relinquatur B C, Mediæ Apotome prima.*

75.
70.

THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium continet; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR a Media A B, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitq; rectangulum sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam quadrata ex A B, A C, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; erit & compositum ex ipsis
16. decimi. C utrique ipsorum commensurabile: Est autem utrunque ipsorum Medium, quod & rectæ A B, A C, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, utrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub A B, A C, Medium ponitur; erit & eius duplum, rectangulum uidelicet bis sub A B, A C, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Cum ergo com-
7. secundi. positum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale sit rectangulo bis sub A B, A C, una cum quadrato ex B C; superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium est, rectangulum bis sub A B, A C, quod etiam Medium est, quadrato ex B C. Medium autem non superat
27. decimi. Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. ergo Irrationale, & ipsa recta B C, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quę ex binis

nis Medijs secunda, a maiori nomine, ut ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM A B, A C, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, continentq; Medium; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cu- 39. decimi.
ius maius nomen A B, & minus A C. Aufertur igitur A C, minus nomen ex maiori A B, ut relinquatur B C, Mediæ Apotome secunda.

76.
71.

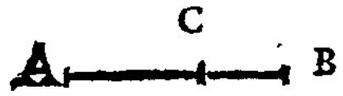
THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autē sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR a recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Rationale; rectangulum vero sub A B, A C, Medium. Dico reliquam B C, Irrationalem esse. Quoniam compositum ex quadratis rectarū A B, A C, Rationale est; rectangulum uero sub A B, A C, atq; adeo,

adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei cõmenſurabile, hoc eſt, rectangulũ bis ſub AB, AC, Mediũ, hoc eſt, Irrationale; erit cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AB, AC, incõmenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Eſt autẽ cõpoſitũ ex quadratis rectarũ AB, AC. æquale rectangulo bis ſub AB, AC, una cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. Igitur quadratum ex BC, illi incommenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. vocetur autem Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineæ Maioris, a maiori nomine, ut in ſcholio ſequenti dicemus. Si igitur a recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

10. *defin.* 7. *ſecundi.* 10. *defin.*



SCHOLION.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

Nam cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiuſq; maius nomen AB, minus autem AC. Auſertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, ut relinquatur Minor BC.

40. *decimi.*

77. 72.

THEOR. 60. PROPOS. 78.

Si a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Detrahatur ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub AB, AC, Rationale; erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, AC. Sunt ergo & rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale ſit; erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. quiâ eius quadratum additum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua, &c. Quod oſtendendum erat.

10. *defin.* 7. *ſecundi.* 17. *decimi.* 10. *defin.*



SCHOLION.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

Si

Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Cvm enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis. Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus nomen AC, a maiori AB, ut BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.



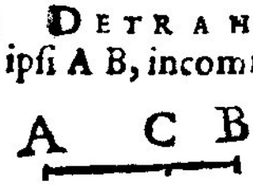
41. *decimi.*

78.

73. ## THEOR. 61. PROPOS. 79.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Detrahatvr ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, quam rectangulum ſub ipſis, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, una cum quadrato ex BC; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod



7. *ſecundi*

quod Medium ponitur, rectãgulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24 huius li. Medium etiam eſt, (cum Medio, quod ſub AB, AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex BC. Medium autem non ſuperat Mediũ Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Medium eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiã eſt. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.

27 *decimi.*

SCHOLION.

In hunc modum proponi quoq; potuiſſet hoc theorema.

Si a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

Qvoniam cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum; erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Aufertur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

42. *decimi.*

LEMMA.

Si idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & viciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui

qui inter ſecũdam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines A B, C D, E F, G H, ſitq; I B, exceſſus inter A B, C D, æqualis exceſſui K F, inter E F, G H. Dico eundem eſſe exceſſum inter A B, E F, qui inter C D, G H. Quoniam I B, exceſſus eſt inter A B, & C D; erit A I, ipſi C D, æqualis. Eodem modo æqualis erit E K, ipſi G H. Idem igitur exceſſus erit inter A I, & E K, qui inter C D, & G H; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum A B, E F, ex pronunciato 15. lib. 1. idem exceſſus, qui inter A I, E K; quod I B, K F, æquales ponuntur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter A B, & E F, qui inter C D, & G H. quod eſt propoſitum.



COROLLARIVM.

Ex his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

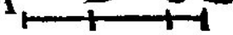
79.

74. THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome A B; congruens autem ei Rationalis B C,

B C, potentia ſolum toti A C, commenſurabilis. Dico ipſi A B, aliam Rationalem non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis B D, ita vt B D, ipſi A D, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia B C, Rationalis eſt; erit & A C, illi ſolũ potẽtia cõmẽſurabilis, Rõnalis. Rõnales ergo ſunt A C, B C, potẽtia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C. B C, & rectangulum bis ſub A C, B C, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis ſub A D, B D; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub A C, B C, quadrato ex A B; quod compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale ſit rectangulo bis ſub A C, B C, vna cum quadrato ex A B. Et eodem modo compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſuperat rectangulum bis ſub A D, B D, quadrato eodem ex A B; cum & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, æquale ſit rectangulo bis ſub A D, B D, vna cum quadrato ex A B.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C. B C, & rectangulum bis ſub A D, D B. Eſt autem exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrunque Rationale ſit. (Nam cum A C, B C, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commenſurabilia. Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique illorum commenſurabile eſt, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum,



7. *ſecundi.*

7. *ſecundi.*

16. *decimi.*

22. *decimi.*

nempe rectangulum bis ſub A C, B C. Medium. Eadem-
que ratione Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D.
27. *decimi.* Medium autem non ſuperat Medium Rationali Igitur
exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectan-
gulum bis ſub A D, B D, Rationale ſpatium non eſt.
Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum.
Ergo ipſi A B, alia Rationalis non congruit, præter
B C, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Apo-
tomæ igitur una tantum congruit, &c. Quod erat oſten-
dendum.

80. 75.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima A B; & ipſi congruat B C, Media toti A C, potentia ſolum commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatq; cum tota Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantum commenſurabilis, ſitq; rectangulũ ſub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media eſt potentia ſolum ipſi A C, commenſurabilis; erit
24. *decimi* & A C, Media, cum illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergo ſunt A C, B C, potentia tantum commenſurabiles. Similiter & A D, B D, Mediæ erunt potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, vt in propoſ. præcedenti oſtenſum eſt. Eſt autem exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. ſpatium Rationale; quod vtrunq; ſit Rationale. (cum enim rectangulum ſub

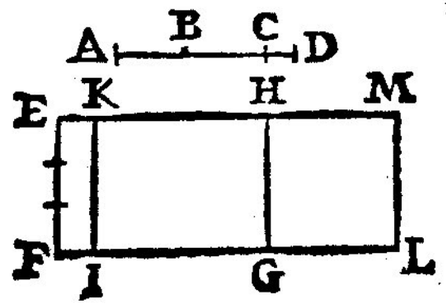
ſub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, B C, illi commenſurabile, Rationale. Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis ſub A D, B D.) Igitur & exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectæ A C B C, Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erunt & ipſarum quadrata Media, & commenſurabilia. Igitur & compoſitũ ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atque adeo & 16. *decimi.*
Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque
Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D.
Medium autem non ſuperat Medium Rationali Igitur ex- 27. *decimi.*
ceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandũ.

81. 76.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

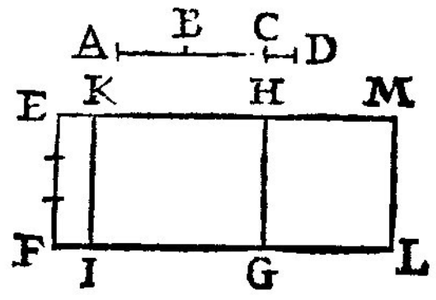
MEDIAE Apotomæ ſecundæ una tãtum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecunda A B, cui congruat Media B C toti A C, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Medium. Dico ipſi A B, aliam Mediam nõ congruere, quæ toti ſit potentia tantum cõmenſurabilis, contineatque cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia B D, Media toti A D,



M potentia

potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, ad quam
45. primi applicetur rectangulum E G, æquale composito ex quadratis rectarum A C, B C; & ad eandem E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et denique aliud E L, æquale composito ex quadratis rectarū A D, B D.

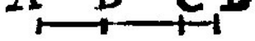


7. secundi. Quoniam igitur compositū ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, una cum quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis continetur sub A C, B C. Eodemque modo erit K L, æquale ei, quod bis cōtinetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim B C, Media ponatur, erit & A C, ipsi potentia commensurabilis, Media) erunt
24. decimi. & earum quadrata Media, & commensurabilia. Ergo &
16. decimi. compositum ex ipsis commensurabile est utrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem E F, erit E H, Ratio-
23. decimi. nalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cum applicetur ad Rationalem K I, erit K H,
23. decimi. Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estque ut A C, ad B C, ita quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, ut ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. erit quadratum ex A C,
10. decimi. incommensurabile rectangulo sub A C, B C. Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cum enim rectæ A C, B C, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia. Igitur & com-
16. decimi. positum ex ipsis commensurabile est utrique ipsorum, nempe quadrato ex A C,) & rectangulo sub A C, B C, cōmensurabile est eius duplum, videlicet K G. Igitur & E G, ipsi A G, incommensurabile est, ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationē cū E G, K G, longitudine incōmensurabiles sunt: Sed
10. decimi. & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solum commen
74. decimi. surabilis, si E H, erit E K, Apotome, & illi congruens K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentem K M. Non igitur Apotomæ una tantum congruit recta linea Rationalis, potentia solum commensura-
80. decimi. bilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantū congruere, demonstratum est. Igitur Mediæ Apotomæ secundæ una tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autē sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri



potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incōmensurabilis, faciensq; cōpositū quidē ex quadratis rectarū A D, B D, Rationale, at rectāgulū sub A D, B D, Mediū. Quoniā igitur, ut in propos. 80. demonstratū est, idē excessus est inter compositū ex quadratis rectarū A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulū bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri;

quod utrunque Rationale ponatur. Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, BC, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatium eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt (Cũ enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub A C, BC, Medium Similiterque Mediũ erit rectangulum bis ſub A D, B D. Quare unum non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incõmenſurabilis, &c. Minori ergo una tantum cogruit, &c. Quod erat demonſtrandum.



27. decimi.

83. 78.

THEOR. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum cõgruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum uero ſub A C, BC, Rationale. Dico ipſi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta B D, toti A D, potentia incommenſurabilis, faciensque compoſitum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum uero ſub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, ut in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, BC, & rectangulum bis ſub A D, B D. Eſt autem exceſſu,



exceſſus inter hæc rectangula, ſpatium Rationale, ut in propoſ. 81 demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale eſt: ſed & non Rationale eſt, cũ utrunque ſit Medium. Medium enim Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdum. Non ergo ipſi A B, alia recta, quam B C, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandũ.

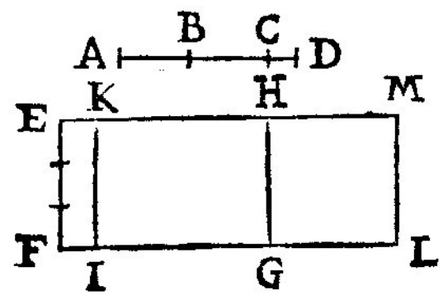
27. decimi.

84. 79.

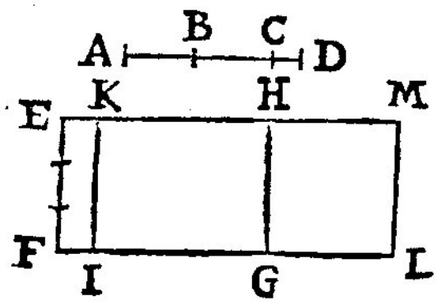
THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarũ quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipſi uero congruens B C, toti A C, potentia incommenſurabilis, faciensque & compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, Medium, & rectangulum ſub A C, B C, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipſi A B, aliam non congruere, quæ eadẽ hæc faciat. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi recta alia B D, toti A D, potentia incõmenſurabilis, ita ut & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium ſit, & rectangulum ſub A D, B D, Medium quoque, ac incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum A D, B D. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitũ ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam E G,



illi æquale, Medium. Recta igitur E H, Rationalis eſt, ipſi
23. *decimi.* E F, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, BC, Medium eſt; erit & eius duplum K G,
23. *decimi.* Medium. Igitur & recta K H, Rationalis eſt, longitudine ipſi E F, incommenſurabilis. Et quoniam K G, commenſurabile eſt rectangulo ſub A C, B C, cum illud huius ſit duplum; at rectangulum ſub A C, B C, incommenſurabile ponitur compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; erit quoque K G, eidem compoſito,
14. *decimi.* hoc eſt, ipſi E G, incommenſurabile; Ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem,
10. *decimi.* longitudine incommenſurabiles ſunt. Sed & oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles. Quare cum ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia ſolum commenſurabilis ipſi E H;
74. *decimi.* erit E K, Apotome, & ei congruens A H. Non aliter oſtendemus E K, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe K M.
80. *decimi.* Non igitur Apotomæ una tantum recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. Vnam enim tantum congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit, &c. Quod erat oſtendendum.



DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longi-

longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI uero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI uero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commẽſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

SCHOLION.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

85. 80.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in ſcholio 2. propos. 29 huius libri docuimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus; ita ut AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, non: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritq; EF, cũ commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde ut numerus AB, ad numerũ AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF. Dico EG, eſſe primam Apotomen. Quoniam quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia uero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia tantum commenſurabiles; atque idcirco reliqua EG, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſſit enim recta EF, plus quam recta GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt ut numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, ut AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

A . . . . . C . . . . B

D, E, G, F, H

6. decimi. *9. decimi.* *74. decimi.* *9 decimi.*

86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

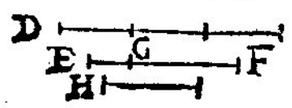
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ut in propos. præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF; eritque GF, Rationali D, cõmenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde ut numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. Quoniam quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia uero numeri AC, AB, atque adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt GF, EF, longitudine incommenſurabiles.

A . . . . . C . . . . B

D, E, G, F, H

6. decimi. *9. decimi.*

les. Rationales ergo ſunt G F, E F, potentia ſolum com-
74. *decimi.* menſurabiles; Ideoque E G, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſſit enim recta E F, plus quam G F, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt ut A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Oſtendemus iam, ut in antecedenti propos. rectam H, ipſi E F, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cum tota E F, plus poſſit, quam congruēs G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitque congruens G F, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit E G, *ex defin. ſecunda* Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.

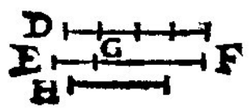


87. 82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ut in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, ut in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat ut I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Eruntque quadrata ex D,
6. *decimi.* & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, cōmenſurabilia; atque adeo & rectæ D, & E F, cōmenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, & A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; erunt rectæ D, & E F, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem corollario propos. 6. huius libri. Dico E G, eſſe tertiam Apotomen. Quoniam quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, ut demonſtrauimus. Et quia A B, A C, atque adeo & quadrata ex E F, G F, proportionem non habent, quam numeri quadrati; Erunt rectæ E F, G F, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt E F, G F, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex E F, auferatur G F, potentia illi ſolum cōmenſurabilis; reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam eſt ut I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; & ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo ut I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F. Non habent autem numeri I, & A C, proportionem quam numeri quadrati; Neque igitur quadrata ex D, & G F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & D, E F, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H: Oſtendemusque, ut in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota E F, plus poſſit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen Quod faciendum erat.



PROBL.

9. *decimi.*

6. *decimi.*

9. *decimi.*

74. *decimi.*

9. *decimi.*

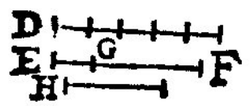
88.
83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita ut A B, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit E F; eritq; propterea & E F, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86 ostendemus, ut ibi, E G, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit n. E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia est ut A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cum ergo A B, & C B, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota E F, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

A . . . . . C . . . B



9. decimi.

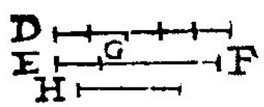
89.
84.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, ut in propos. præcedenti, fiat constructio, ut in propos. 87. hoc est, sumatur G F, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo ut in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & secundam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, ut in propos 86. ostendemus,

A . . . . . C . . . B



demus, per conuersionem rationis, esse ut A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, ut in propos. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Quia ergo tota E F, plus potest, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90.
85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, ut in propos. 54. ita ut A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, ut in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, ut ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam ut in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, ut in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

A . . . . . C . . . . . B
I . . . . . .



SCHOLION.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, ut Theon docet hoc loco.

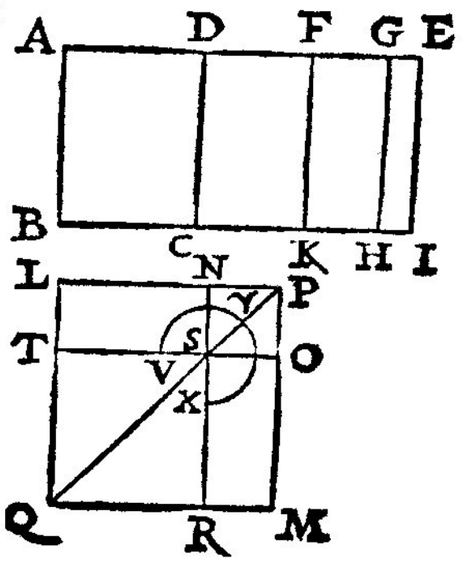
49. decimi. SIT *inuenienda exempli gratia, prima Apotome. Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen A C, & minus C B. Abscissa igitur ex A C, recta C D, quæ æqualis sit ipsi C B. Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erunt etiam A C, D C, Rationales potentia tantum commensurabiles. Est ergo A D, Apotome. Et*



74 decimi. *quia A C, plus potest, quam C B, hoc est, quam D C, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & est A C, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, A D, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

91. 86. THEOR. 68. PROPOS. 92.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.



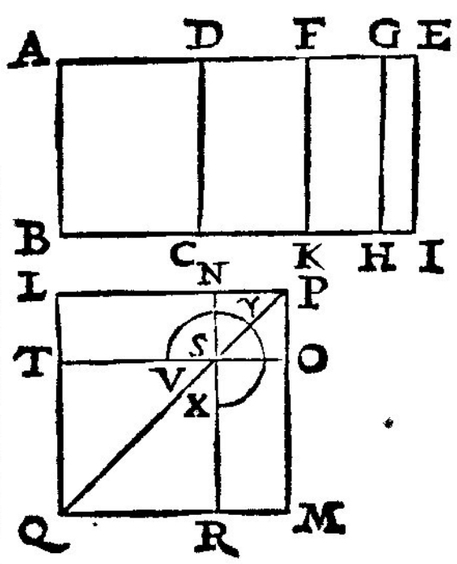
CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erũt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commẽsurabiles; & tota A E, longitudine cõmensurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam quam congruens D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quartæ parti quadrati ex D E, applicetur ad A E, rectangulum æquale sub A G, G E, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia A E, plus potest, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; erunt rectæ A G, G E, longitudine commensurabiles; Ac propterea & utraque toti A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, Rationali A B, longitudine commensurabilis. Igitur & utraque A G, G E, ipsi A B, longitudine est commensurabilis; atque ex definitione 6 Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipsi A B, parallelis, quæ ipsi B C, productæ occurrant in H, I; erit utrunque rectangulum A H, G I, contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia utraque D F, F E, longitudine commensurabilis est ipsi D E; & D E, longitudine incommensurabilis est Rationali A B; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & A E, sit eidẽ A B, longitudine cõmensurabilis; essent A E, D E, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur n. tolũ potentia cõmensurabiles:) erit etiã utraque ipsarũ D F, F E, ipsi A B, lõgitudine incõmensurabilis. Et quoniã utraq; D F, F E, Rationali D E, cõmensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam A B, D F, quã A B, F E, Rationales potentia tantũ cõmẽsurabiles. Quare ducta F K, ipsi A B, parallela, erit utrunq; rectangulũ D K, F I, contentũ sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

18. decimi. 16. decimi. 12. decimi. 20 decimi. 12. decimi. 14. decimi. 22. decimi. 14. secundi. 25. sexti. 17. sexti. 1. sexti. 16. primi

IAM uero ipsi A H, fiat quadratũ æquale L M, & ipsi G I, æquale fiat quadratũ N O, cõmunem habens cum L M, angulum L P M. Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrũ, quæ sit P Q. Perficiatur autem figura, ut uides. Quoniã igitur rectangulũ sub A G, G E, per constructionẽ, æquale est quadrato ex F E; erunt tres rectæ A G, F E, G E, proportionales; Ac propterea cũ A H, F I, G I, eandẽ cũ ipsis habeant rationẽ; erit F I, mediũ proportionale inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Est autem inter eadem L M, N O, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia sunt: Sed ipsi F I, æquale est D K; & ipsi L O, æquale

æquale eſt M N. Eſt ergo totum D I, toti gnomini V Y X, cum quadrato N O, æquale. Eſt autem & totum A I, per conſtructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, eſt æquale; Ac propterea recta T S, poteſt ſpatium A C. Dico T S, Apotomen eſſe.

QVONIAM ſpatia A H, G I, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt L M, N O, erunt quoque quadrata L M, N O, Rationalia; atq; adeo & rectæ T O, S O, Rationales. Rurſus quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cum unum ſit Irrationale, alterum uero Rationale. Igitur rectæ T O, S O, eandem rationem habentes cum L O, N O, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ac idcirco reliqua T S, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandū erat.



1 *ſexti.*
10. *decimi.*
74. *decimi.*

92. 87.

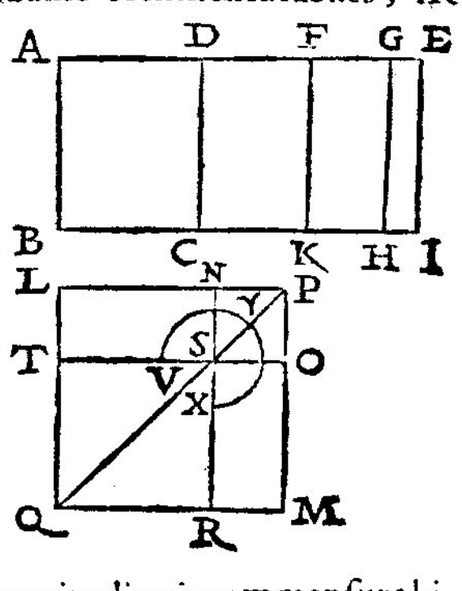
THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma ſecunda A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi A D, congruens recta D E. Erunt ergo A E, D E, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens D E, longitudine commenſurabilis Rationali

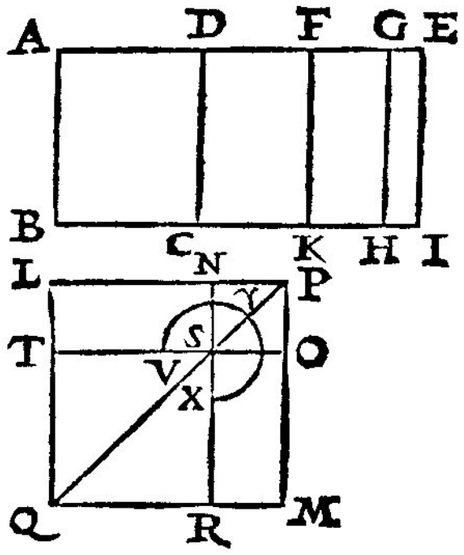
tionali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. Eruntq; rurſus, vt in antecedenti propoſitione, A G, G E, longitudine commenſurabiles; Ac propterea & vtraq; toti A E, longitudine commenſurabilis. Eſt autem A E, Rationali A B, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi A B, longitudine, cum D E, eidem A B, ponatur longitudine commēſurabilis; eſſent A E, D E, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantū commenſurabiles.) Igitur & utraque ipſarum A G, G E, longitudine incommenſurabilis eſt eidem A B. Eſt autem utraque A G, G E, Rationali A E, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam A B, A G quam A B, G E, potentia ſolum commenſurabiles; Atq; idcirco rectangulum utrunq; A H, G I, cōtentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia utraq; D F, F E, ipſi D E, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur D E, Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit quoque, ut in ſcholio propoſ. 12. huius lib. oſtendimus, eidem A B, Rationali longitudine commenſurabilis utraq; D F, F E; atq; adeo & Rationalis. Vtrunq; ergo rectangulum D K, F I, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam uero ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen eſſe primam.

QVONIAM A G, G E, longitudine ſunt commenſurabiles; erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & L M, N O, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eo-



18. *decimi.*
16. *decimi.*
12. *decimi.*
14. *decimi.*
22. *decimi.*
20. *decimi.*
10. *decimi.*

ra eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erun commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata L M, N O, Medijs A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse.) Media sint. Et quoniam F I, atque adeo sibi æquale L O, Rationale est, propterea que Medio N O, incommensurabile; erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium cõtineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.



10. *decimi.*

75. *decimi.*

93.
88.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

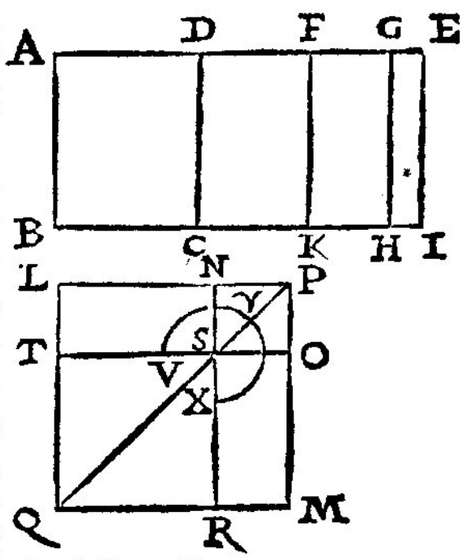
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, ut in propos. 92. eruntq; rursus, ut ibi, A G, G E, longitudine inter se commensu-

mensurabiles; Ac propterea & utraq; toti A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. Igitur & utraque A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cum ergo utraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tã A B, A G, quam A B, G E, Rationales potentia solum commensurabiles; Ac propterea utrunque rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoque utraque D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existens, eidẽ A B, longitudine incommensurabilis. Cum ergo utraque D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quam A B, F E, Rationales potentia tantum commensurabiles; atq; propterea utrunq; rectãgulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, ut in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam.

16. *decimi.*

14. *decimi.*



22. *decimi.*

14. *decimi.*

22. *decimi*

QVONIAM A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia; Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, cõmensurabiles, saltem potentia. At uero quia A E, D E, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estq; ipsi A E, longitudine ostensa commẽsurabilis G E, ipsi uero D E, cõmensurabilis est longitudine F E; erũt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, lõgitudine incõmensurabiles; ac propterea G I, F I, eandem rationẽ habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incõmensurabilia. Quare T O, S O, eandẽ rationem habentes

10. *decimi.*

10. *decimi.*

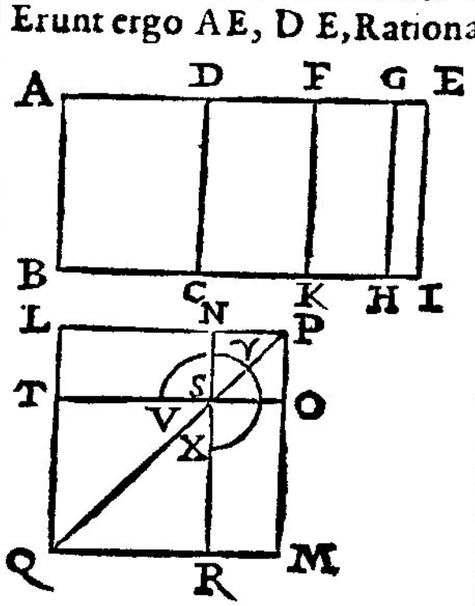
quam L O, N O, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt T O, S O, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent L O, Medium; (cum enim L O, æquale ſit ipſi F I, ut conſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe
76. decimi. oſtendimus; erit & L O, Medium.) erit T S, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

94.
89.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta; Recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Minorem eſſe. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine cõmenſurabilis Rationali A B, & eadem A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. Erunt ergo A G, G E, incõmenſurabiles longitudine, quandoquidem A E, plus poteſt, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad A E, applicatum eſt rectangulum ſub A G, G E, æquale quartæ parti quadrati ex D E, deficiensq; figura quadrata. Et quia A E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit rectangulũ
19. decimi. A I, Rationale. Rurſus quia D E, Rationalis eſt, & Rationali



nali A B, longitudine incommenſurabilis; erit D I, atque adeo & eius dimidium F I, Medium. Amplius cum A G, *22. decimi.*
G E, ſint longitudine incommenſurabiles; incommenſurabilia erunt A H, G I, eandem cum illis proportionem habentia. Iam uero ſimiliter demõſtrabimus, ut in propoſ. 92. *10. decimi.*
rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe Minorem.

QVONIAM ex conſtructione, rectangulo A I, æquale eſt compoſitũ ex quadratis L M, N O, rectarũ T O, S O: Eſt autem illud oſtenſum Rationale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum T O, S O, Rationale. Item quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, contentum ſub T O, S O, illi æquale, Medium. Denique quoniam A H, G I, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo rectæ T O, S O, potentia incommenſurabiles. Quapropter cum T O, S O, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum uero ſub ipſis, Medium; erit reliqua T S, Mi- *77. decimi.*
nor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

95.
90.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

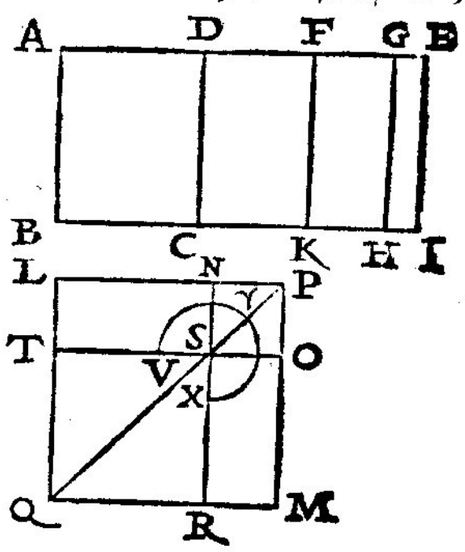
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma quinta A D. Dico rectam lineam quæ ſpatium A C, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, A E, D E, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & D E, Rationali A B, commenſurabilis longitudine; Et deniq; A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua conſtruan-

ſtruantur, ut prius. Erunt ergo rurſus, ut in antecedenti propoſ. A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Et quia A E, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali A B, ut in propoſ. 93. diximus; erit rectangulum A I, Medium. Item quia D E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine commenſurabilis; erit D I, atq; idcirco & eius dimidiũ F I, Rationale. Rurſus erunt, ut in præcedenti propoſ. A H, G I, incommenſurabilia; poteritq; ut oſtẽſum eſt in propoſ. 92. recta T S, ſpatium A C. Dico T S, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

22. *decimi.*

20. *decimi.*



Quoniam oſtenſum eſt A I, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia demonſtrauimus F I, Rationale eſſe; erit & L O, rectangulum ſub T O, S O, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autem & T O, S O, potentia incommenſurabiles, ut in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum T O, S O, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum uero ſub ipſis, Rationale; erit reliqua T S, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

78. *decimi.*

96.
91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

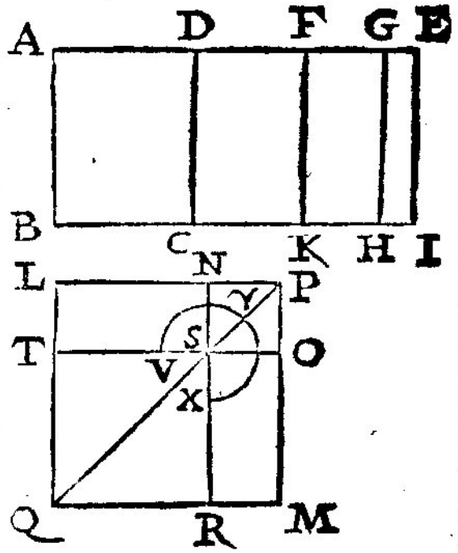
Con

Contineatur ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma ſexta A D. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium A C, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit ipſi A D, congruens D E. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextę, A E, D E, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles, & neutra ipſarum A E, D E, Rationali A B, commenſurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Secetur D E, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, ut ſupra. Erunt ergo rurſus ut in propoſ. 95. A G, G E, longitudine incõmenſurabiles. Et quia tam A E, quam D E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine incommenſurabilis; erit tam A I, quam D I, atq; adeo & huius dimidium F I, Medium. Eruntq; ut in propoſ. 95. A H, G I, incommenſurabilia. Et quoniam A E, D E, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; Erunt A I, D I, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum D I, F I, commenſurabilia ſint, erit F I, ipſi A I, incommenſurabile. Iam uero demonſtrabimus, ut in propoſ. 92. rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

22. *decimi.*

10. *decimi.*

14. *decimi.*



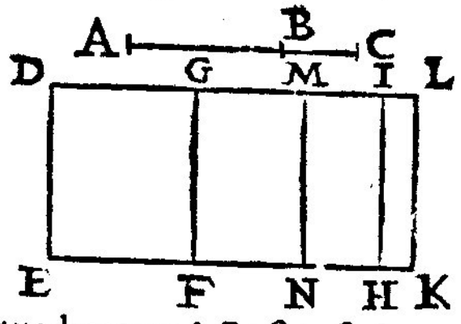
Quoniam A I, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia F I, Medium oſtenſum eſt; erit & L O, illi æquale, contentumq; ſub T O, S O, Medium. Rurſus quoniam F I, ipſi A I, eſt incommenſurabile, ut oſtendimus; erit quoque L O, ſub T O, S O, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum T O, S O; propterea quod L O, ipſi F I, & compoſitum ex quadratis rectarum T O, S O, ipſi A I, ſit æquale. Denique T O, S O, potentia incommenſu-

mensurabiles sunt, ut in propos. 65. est demonstratum. Quamobrem cum T O, S O, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; erit reliqua
79. decimi. T S, ea quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

97.
92. ## THEOR. 74. PROPOS. 98.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit Apotomen primam.

SIT Apotome prima A B, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, sint Rationales potentia solum commensurabiles: & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F,
45. primi. æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse Apotomen primam. Ad eandem D E, applicetur rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex B C, ita ut totum D K, æquale sit composito ex quadratis rectarum A C, B C. Et quoniam cõpositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, una cum
7. secundi. quadrato ex A B; si auferãtur quadratum ex A B, & rectangulum D F; relinquetur G K, rectangulo bis sub A C, B C, æquale; atque adeo diuisa G L, bifariam in M, ductaq; M N, ipsi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo sub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoq; commensurabilia. Cum ergo & compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, utrique ipsorum sit commensu-
16. decimi. rabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale D K, Ratio-



Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. 21. decimi.
Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atq; adeo & eius duplum G K, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem G F, erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, 23. decimi.
longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, longitudine incommensurabiles. 10. decimi.
Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam 74. decimi.
esse.

QVONIAM per lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continue proportionalia; atq; adeo & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, 17. sexti.
quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia, D H, I K, commensurabilia sunt; erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum 10. decimi.
duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensq; figura quadrata; atq; sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi commensu- 18. decimi.
rabilis longitudine. Quare cum sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atq; eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

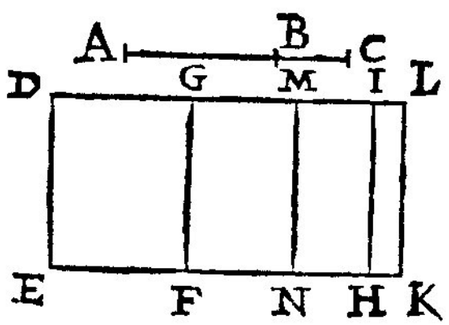
THEOR.

98. 93.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantq; Rationale: Et ad Rationalem D E, quadrato ex A B, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen ſecundam eſſe. Conſtruantur eadem, quæ in antecedenti propoſ. ita ut rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod ſub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod ſub A C, B C, continetur ſemel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & earũ quadrata, hoc eſt, illis æqualia, D H, I K, Media, & commenſurabilia; ac proinde & totum D K, utrique illorum commenſurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Cum ergo D K, applicetur ad Rationalẽ D E, erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, B C, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum G K, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem D E, erit G L, Rationalis longitudine commenſurabilis ipſi D E. Quia uero D K, Medium, id eſt, Irrationale, & G K, Rationale, incommenſurabilia ſunt; erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo Rationales ſint oſtenſæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Nam ſimiliter, ut in præcedenti propoſ. demonſtrabimus totam D L, plus poſſe, quam congruentem G L, quadrato rectæ ſibi longitudine.



45. primi.

16. decimi.

23. decimi.

21. decimi.

10. decimi.

74. decimi.

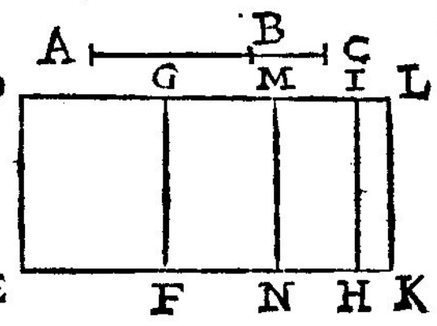
tudine commenſurabilis. Quare cum congruens G L, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome ſecunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam. Quod oſtendendum erat.

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome ſecunda A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia tantum commenſurabiles, contineantq; Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quę ſupra. Oſtendemus iam, ut in propoſ. præcedenti, D K, Medium eſſe, atque adeo rectam D L, Rationalem ipſi D E, longitudine incommenſurabilem. Et quia rectangulum ſub A C, B C, Medium eſt, atque ob id, & eius duplum G K; erit quoque G L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quia uero A C, B C, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtq; ut A C, ad B C, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C; erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub A C, B C. Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex A C, B C, ex rectis A C, B C, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub



45. primi.

23. decimi.

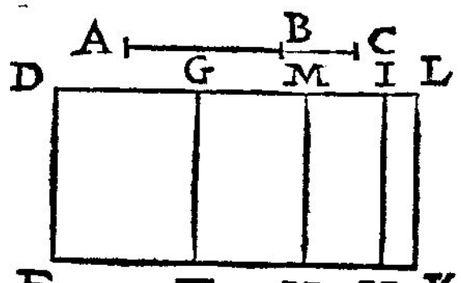
23. decimi.

10. decimi.

16. decimi.

sub A C, B C. Igitur ex scholio, propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; Atq; adeo rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia tolum commensurabiles; Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quam G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex defin. D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

10. *decimi.*



74. *decimi.*

100.

95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum vero sub A C, B C, Medium: Et ad Rationalem D E, applicetur spatium D F, quadrato ex A B, æquale, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, Rationale est; erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; erit G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis.

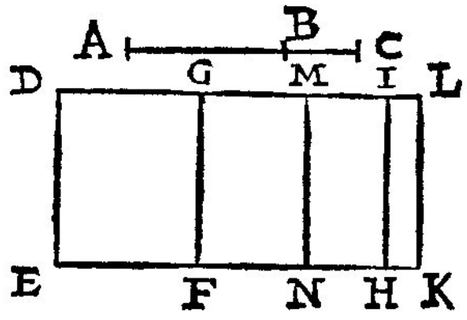
45. *decimi.*

21. *decimi.*

23. *decimi.*

bilis. Rursus quoniam D K, Rationale, & G K, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; erunt D L, G L, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia tantum commensurabiles; Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam A C, B C, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, D H, I K, incommensurabilia; Ac propterea rectæ D I, I L, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub D I, I L, æquale sit quadrato ex M L, id est, quartæ parti quadrati ex G L, ut in propos. 98. est demonstratum; poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad D L, maiorem applicatum est rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem D L, in partes D I, I L, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota D L, plus possit, quam congruens G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota D L, Rationali D E, longitudine ostensa commensurabilis; Erit ex defin. D G, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

10. *decimi.*



74. *decimi.*

10. *decimi*

19. *decimi.*

101.

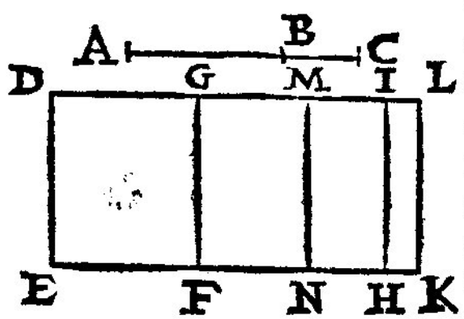
96.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiēs A B, & ipsi

& ipſi congruens BC, ita ut A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; rectangulum uero ſub ijſdem A C, B C, Rationale: Et ad Rationalem D E, applicetur
45. *primi.* D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen quintã eſſe. Conſtruantur enim eadem, quæ ſupra. Quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, atq; adeo & illi æquale D K, Medium eſt; erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Item quia rectangulum ſub A C, B C, atq; adeo & eius duplum G K,
21. *decimi.* Rationale eſt; erit G L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Et quia D K, Medium ſeu Irrationale, & G K, Rationale, incommenſurabilia ſunt; erunt D L,
10. *decimi.* G L, eandem cum ipſis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sunt autem & Rationales oſtenſæ. Rationales ergo ſunt D L, G L, potentia ſolum commenſura-
74. *decimi.* biles; Atque idcirco reliqua D G, Apotome eſt. Dico & quintam eſſe. Eodem enim modo, ut in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, totam plus poſſe quam G L, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare cum congruens G L, demonſtrata ſit longitudine commenſurabilis Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.



23. *decimi.*

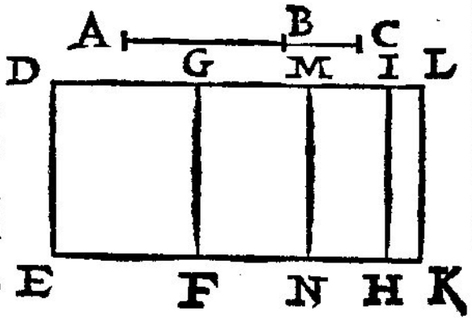
102.
97.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipſi congruens B C, ita ut A C, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex quadratis rectarum A C, BC, Medium, & rectangulum ſub ijſdem A C, BC, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarũ: Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, ſpatiũ 45. *primi.*
æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ſextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ ſupra. Quoniam tam compoſitum ex quadratis rectarũ A C, B C, hoc eſt, illi æquale D K, quã rectangulum ſub A C, B C, atq; adeo & eius duplũ G K, Medium eſt; Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipſi D E, 23. *decimi.*
longitudine incommenſurabilis. Et quia rectangulum ſub A C, BC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A C, B C; Et ſunt rectangulum ſub A C, B C, & eius duplum G K, commenſurabilia; Erit & G K, eidem cõpoſito, hoc eſt, ipſi D K, incommenſurabile; propterea q; rectæ D L, G L, eandẽ habentes rationẽ, quã D K, G K, longitudine incõmẽſurabiles. Oſtenſę ſunt aũt & Rationales. Rationales ergo ſunt D L, G L, potẽtia ſolũ cõmenſurabiles; Atq; idcirco reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & ſextã. Oſtẽdemus. n. ſimiliter ut in propoſ. 101. totam D L, plus poſſe, quã congruentẽ G L, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Cũ igitur neutra ipſarum D L, G L, cõmenſurabilis ſit longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome ſexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat oſtendendum.



14. *decimi.*
10. *decimi.*
74. *decimi.*

103.
98.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis; & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, longitudine commensurabilis D F. Dico & D E, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi A B. Fiat vt A B, ad D E, ita B C, ad E F. Erit ergo tota A C, ad totam D F, ut A B, ad D E, uel ut B C, ad E F. Quoniam igitur A B, D E, longitudine ponuntur commensurabiles;



12. sexti. 12. quinti. 10. decimi. Erunt quoq; A C, D F, necnon & B C, E F, commensurabiles longitudine. Et quia A C, B C, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles D F, E F, Rationales. Rursus quia est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F: & unt A C, B C, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus, D F, E F, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint 74. decimi. ostensæ, reliqua D E, Apotome est. Dico & ipsi A B, ordine eandem esse. Possit enim primum A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. 15. decimi. Quo posito, poterit & D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositę, vt A B, sit 12. decimi. Apotome prima; erit quoque D F, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam D F, eidem A C, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoq; D E, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi A B. Si uero B C, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo E F, Rationali longitudine commensurabilis; Atq; adeo utraque A B, D E, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum A C, B C, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; 14. decimi. erit quoque neutra ipsarum D F, E F, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque A B, D E, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT iam A C, plus quam B C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, poterit & 15. decimi. D F, plus quam E F, quadrato rectæ sibi longitudine incōmensurabilis. Quare ut prius, ostendemus D E, esse Apotomen

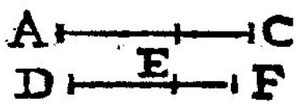
omen quartam, quintam, uel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta D E, commensurabilis sit ipsi A B, potentia tantum, eodē modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis; vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & D E, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eādem ipsi A B. Non enim sequitur, si tota A C, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & D F, eidem esse cōmensurabilem longitudine; propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & D F; eidem A C, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero D F, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si A B, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt D E, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim A B, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eique congruens B C; & sit D E, ipsi A B, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, ut in theoremate, ostendimus Apotomen esse, eique congruentem E F; & partes A B, B C, ad partes D E, E F, eandem proportionem habere cum totis A C, D F. Dico nulla ratione D E, Apotomen esse ordine eandem ipsi A B. Nam si fieri potest, sit utraque Apotome prima. Quo posito, erit tam A C, tota, q̄ tota D F, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt A C, et D F. 12. decimi. *Quare cum sit vt A C, ad D F, ita A B, ad D E; erunt quoque A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdū* 10. decimi. *ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solum commensurabilis, Non ergo vtraque A B, D E, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim utraque congruens B C, E F, ex defin. longitudine cōmensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsæ inter se. Quocirca & A B, D E, inter se longitudine forent commensurabiles. Quod non ponitur.*

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolũ eſt commenſurabilis, eſſe quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo ſit ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; poterit quoque DF, plus quã EF, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita ut AC, plus poſſit, quã BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; Erit quoque DE, Apotome quarta, uel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB: quia rurſus, cum ſit ut AC, ad BC, ita DF, ad EF, poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, uel quinta, uel ſexta.



15. decimi.

15. decimi.

IN ſequentibus autem quinque propoſitionibus neceſſario erit DF, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

104. 99. THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruẽs BC, ita ut AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & DE, Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. Fiat ut AB, ad DE, ita BC, ad EF. Erit ergo tota AC, ad totam DF, ut AB, ad DE, & ut BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, cõmenſurabiles ponuntur uel longitudine & potentia, uel potentia tantum; erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, erunt quoque

12. *ſexti.* 12. *quinti* 10. *decimi.*

quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus quia eſt ut AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando ut AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erũt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandẽ eſſe ordine ipſi AB. Quoniã eſt ut AC, ad BC, ita DF, ad EF; & ut AC, ad BC, ita eſt quadratũ ex AC, ad rectangulũ ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19 huius lib. & ut DF, ad EF, ita quadratũ ex DF, ad rectangulũ ſub DF, EF; Erit quoque ut quadratũ ex AC, ad rectangulũ ſub AC, BC, ita quadratũ ex DF, ad rectangulũ ſub DF, EF; Et permutando ut quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cum quadratũ ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, oſtenſę ſint commenſurabiles; erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, cõmenſurabile. Quare ſi rectangulũ ſub AC, BC, ſit Rationale, ita ut AB, ſit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si uero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita ut AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoque rectangulũ ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.



24. *decimi.*

75. *vel* 76. *decimi.*

10. *decimi.*

75. *decimi.*

76. *decimi.*

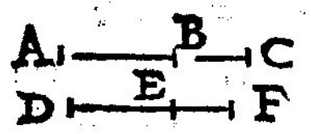
THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116. 100.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſiq; congruens BC, ita ut AC, BC, potentia ſint incõmenſurabiles, facientesq; cõpoſitum quidẽ ex quadratis rectarũ AC, BC, Rationale; rectangulũ uero ſub ijſdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, com-

mensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Minorem esse. Fiant eadem, quæ supra, ita ut rursus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem quam A C, ad D F. Erunt ergo rursus, ut in antecedenti propos. D F, E F, ipsis A C, B C, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniam est ut A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; erit ut quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; Et componendo ut compositum ex quadratis rectarū A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; Et permutando ut compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ad compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Est autem quadratum ex B C, commensurabile quadrato ex E F; quod rectas B C, E F, ostenderimus commensurabiles esse. Igitur & compositū ex quadratis rectarum A C, B C, composito ex quadratis rectarum D F, E F, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum A C, B C, ex hypothesi, Rationale. Igitur & compositum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam ut in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, rectangulo sub D F, E F, esse commensurabile: Ponitur autem rectangulum sub A C, B C, Medium; Erit, quoque rectangulum sub D F, E F, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est ut A C, ad B C, ita D F, ad E F; sunt que A C, B C, potentia incommensurabiles; erunt etiā D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum D F, E F, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum D F, E F, Rationale, rectangulum uero sub ijsdem D F, E F, Medium; erit D E, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



22. *sexti.*

10. *decimi.*

10. *decimi.*

77. *decimi.*

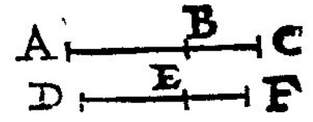
THEOR.

THEOR. 83. PROPOS. 107.

106. 117. 101.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

SIT recta A B, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens B C, ita ut A C, B C, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium; at rectangulum sub A C, B C, Rationale: Sit autem D E, ipsi A B, commensurabilis quocunque modo. Dico & D E, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim ijsdem, quæ supra, ostendemus ut in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus ut in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub A C, B C, commensurabile esse rectangulo sub D F, E F. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, ut in præcedenti propos. est probatum, rectæ D F, E F, potentia incommensurabiles. Igitur cum D F, E F, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum uero sub ipsis, Rationale; erit D E, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca recta linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.



78. *decimi.*

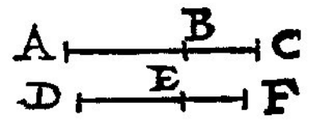
THEOR. 84. PROPOS. 108.

107. 102.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; &

ipſa cum Medio Medium totũ efficiens eſt.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens B C, ita ut A C, B C, ſint potentia incommenſurabiles, facientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem D E, ipſi A B, quomodolibet commenſurabilis. Dico & D E, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim ijſdem, quæ ſupra, probabimus ſimiliter, ut in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, E F. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus ut in propoſ. 105. oſtendemus rectangulum ſub A C, B C, commenſurabile eſſe rectangulo ſub D F, E F. Cum ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item ut in propoſ. 106. erunt quoque D F, E F, potentia incommenſurabiles: Poſtremo quia compoſito ex quadratis rectarum A C, B C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ut dictum eſt; & rectangulo ſub A C, B C, commenſurabile eſt rectangulum ſub D F, E F: Sunt autem compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum ſub A C, B C, per hypotheſin, incommenſurabilia; Erunt quoque ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, & rectangulum ſub D F, E F, incommenſurabilia. Quocirca cum D F, E F, potentia ſint incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; nec non & rectangulum ſub ipſis, Medium; incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; erit D E, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.



79. decimi.

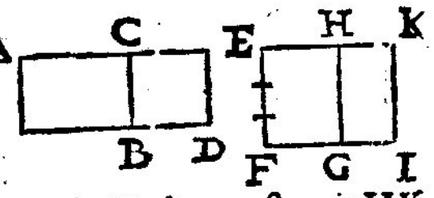
THEOR.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

108.
103.

MEDIO a Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, una ex duabus Irrationalibus fit, uel Apotome, uel Minor.

DETRAHATVR a Rationali A D, Medium C D. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum A B, eſſe uel Apotomen, uel Minorem. Exponatur Rationalis E F, ad quã applicetur rectangulum E G, æquale ipſi A B, & ad G H, aliud H I, æquale ipſi C D, ita ut totum E I, toti A D, ſit æquale. Quoniam igitur E I, æquale Rationali A D, Rationale eſt; erit E K, Rationalis, Rationali E F, longitudine commenſurabilis.



45 primi.

21. decimi.

Rurſus quia H I, Medio C D, æquale Medium eſt; erit H K, Rationalis, ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Itaque cum E K, quidem ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi E F; at H K, eidem E F, longitudine incõmenſurabilis; erunt E K, H K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: propterea quæ reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus põt E K, q̃ H K, quadrato rectæ lineæ cõmenſurabilis ſibi longitudine, cum tota E K. oſtenſa quoque ſit longitudine cõmenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potẽs ſpatiũ E G, cõtentũ ſub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc eſt, ſpatiũ A B, ſibi æquale, Apotome eſt. Si uero E K, plus poteſt, quã H K, quadrato rectę ſibi lõgitudine incõmẽſurabilis, cũ tota E K, ſit oſtenſa cõmenſurabilis longitudine Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome quarta. Quapropter recta potẽs ſpatiũ E G, cõtentũ ſub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc eſt, ſpatiũ A B, illi æquale, Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

23 decimi.

13. decimi.

74. decimi.

92. decimi.

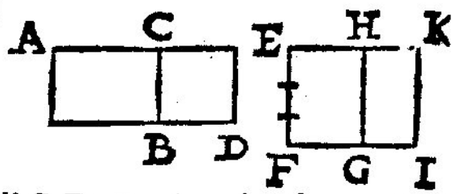
95. quinti.

109. 104.

THEOR. 86. PROPOS. 110.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome prima, uel cum Rationale Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe uel Mediæ Apotomen primam, uel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem conſtruantur, quæ ſupra. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium eſt; erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Itē quia H I, æquale Rationali C D, Rationale eſt; erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine; at E K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis; Erunt H K, E K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine cō menſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatiū A B, illi æquale, Mediæ eſt Apotome prima. Si uero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium illi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



23. decimi.
21. decimi.
13. decimi.
74. decimi.
93. decimi.
96. decimi.

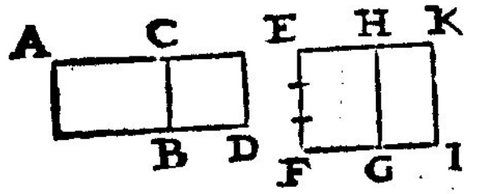
efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

110. 105.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; Reliquæ duæ Irrationales fiunt, uel Mediæ Apotome ſecunda, uel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe uel Mediæ Apotomen ſecundam, uel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra; quoniam E I, H I, Medijs A D, C D, æqualia, Media ſunt; erunt E K, H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si uero E K, plus poteſt, quam H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incōmenſurabilis, cum neutra ipſarum E K, H K,



23. decimi.
10. decimi.
74. decimi.
94. decimi.

Rationa

Rationali E F, sit longitudine commensurabilis, ut demonstrauimus; erit ex defin. E H, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma sexta E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, est ea, quæ cum Medio Medium totũ efficit Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

97. decimi.

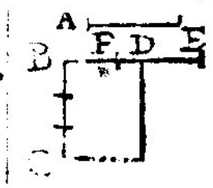
III. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita Rationali B C, applicetur ad B C, rectangulum C D, æquale quadrato ex A.

45. primi



98. decimi. Quoniam igitur A, Apotome est; erit latitudo B D, Apotome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin Apotomæ primæ, B E, D E, Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque B E, plus quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex

91. decimi. binis nominibus; erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque B F, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine; & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam B E, quam B F, longitudine sit commensurabilis eidem B C; erunt quoque

12. decimi. B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur tota B E, existente longitudine commensurabili parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, Rationalis sit, & F E, Rationalis erit. Quoniam uero duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium,

bilium, ipsa B E, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, D E, Rationales sint potentia solum cõmensurabiles) erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & utraque F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua F D, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

14. decimi.

74. decimi.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. 23. decimi.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen primam. 98. decimi.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primę ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen secundam. 99. decimi.

QVADRATVM uero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam. 100. decimi

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quartam. 101. decimi

AT uero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen quintam. 102. decimi

QVADRATVM deniq; eius, quę cũ Medio Mediũ totũ efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Apotomen sextam. 103. decimi

ITAQVE cum hę latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ uero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QVONIAM uero in hoc theoremate demonstrauimus Apotomen eandem nõ esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primã, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextã: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationaliũ, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundã, tertiã, quartã, quintam, ac sextã; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium,

quæ

quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quadam expoſita, tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.
4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

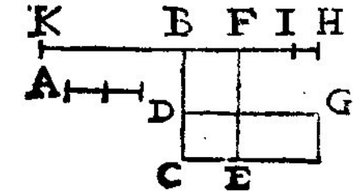
THEOR.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

112. O.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D; & ad B C, applicetur rectangulũ B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomẽ B F, eſſe ordine eandem ipſi B C, ex binis nominibus. Applicetur enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi D G, æqualis B H. Et quoniam æqualia ſunt B E, C G; erit ut B C, ad D C, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo ut B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem B D, maior, quam D C. Igitur & H F, maior eſt, quam F B. Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; & fiat ut H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo ut H F, ad I F, hoc eſt, ad ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. oſtenſum eſt autem eſſe ut H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque ut B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cum ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles. Igitur & F K, B K, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.



45. primi

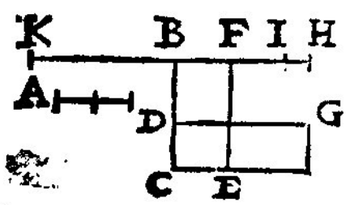
14. vel 16. ſexti.

12. ſexti.

10. decimi.

RVRSVS

RVRSVS quia est ut H F, ad B F, ita F K, ad B K, erũt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, ut F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare ut H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratũ ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia uero C G, cũ Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalẽ D C, applicatum facit D G, latitudinem Rationalẽ, ipsi D C, longitudine cõmensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine cõmensurabilis ipsi D C. Et quoniã ostensum est, esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autẽ F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque ut B D, ad D C, ita H K, ad F K. Igitur ut quadratũ ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, cõmensurabile est quadrato ex D C, (quod rectæ B D, D C, sint Rationales potentia cõmensurabiles, cum sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit ut quadratum ex H K, ad quadratũ ex F K, ita recta H K, ad B K. Igitur longitudine cõmensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeo & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis; Igitur & H K, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & B K, ipsi H K, commensurabilis, Rationalis existit. Cum ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solum commensurabilis; erit quoque F K, Rationalis. Quare cum F K, B K, Rationales sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles; erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.



12. *quinti*

21. *decimi.*

22. *sexti.*

10. *decimi.*

10. *decimi.*

74. *decimi.*

16. *decimi.*

QVONIAM uero ostensum est esse rectam H K, totam parti B K, longitudine commensurabilem; erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo B H, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi D C; erit quoque B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando ut B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modo D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles; Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cum F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis; erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

10. *decimi.*

ITEM quia demonstrauimus esse ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO uel B D, plus potest, quam D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest B D, quam D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit ut B D, ad D C, ita F K, ad B K; poterit quoque F K, plus quam B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quam D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K plus quam B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si uero D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si denique neutra ipsarum B D, D C, sit Rationali longitudine commensurabilis; erit quoque neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, ut constat ex definitionibus secundis, atque tertijs. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandũ erat.

15. *decimi.*

14. *decimi.*

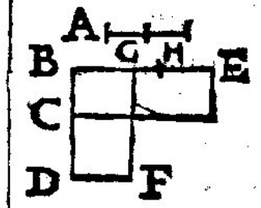
THEOR.

113.
0.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD; & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex
45. primi. A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinem faciens BG. Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; erit ut
14. vel 16. sexti. BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuersionem rationis, ut BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionem BE, ad GE, ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. conscripsimus; ut sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est ut BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius BE ad HE, reliquam ipsius GE, ut tota BE, ad totam GE: Erat autem ut BE ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quoque ut BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit ut BH, prima ad GH, tertiã, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia uero fuit ut BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantũ com-



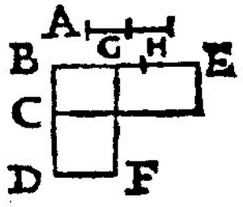
mensurabiles; Et sunt quoque BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE, ut demonstrauimus, longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensurabilis existens parti GH, cõmensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. huius lib. At uero cum BD, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BE, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo BG, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atq; adeo Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensurabiles sunt ostensæ. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantum, & BH, Rationalis, erit quoque HE, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt BH, HE, potentia solum cõmensurabiles; Ac propterea BE, ex binis nominibus est. Quod est primum.
10. decimi. 10. decimi 11. decimi. 37. decimi.

QVONIAM vero ostendimus esse BH, ad HE, ut BD, ad CD; atque adeo permutando BH, ad BD, ut HE, ad CD; Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis; erit quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum.
10. decimi.

IMMO & in eadem proportione, cum demonstratum sit esse BH, ad HE, ut BD, ad CD. Quod est tertium.

POSTREMO uel BD, plus potest quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, uel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; poterit quoq; BH, plus quam HE, quadrato rectę sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidē BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD,
15. decimi

si B D, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si uero C D, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione H E, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si uero neutra ipsarum B D, C D, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; erit quoque neutra ipsarum B H, H E, eidem Rationali longitudine cõmensurabilis. Igitur ex secundis, atq; ter-



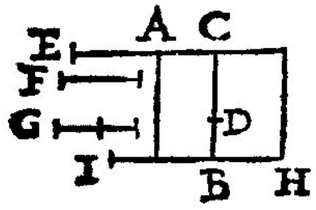
14. *decimi.*

tiis definitionibus, ipsa B E, ex binis nominibus, ordine eadẽ cum ipsi Apotomæ B C. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

114. THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATVR spatium A B, sub Apotoma A C, & sub C B, ex binis nominibus, cuius nomina C D, D B, commensurabilia sint nominibus C E, A E, Apotomæ A C; & in eadem ratione, nempe C D, ad D B, ut C E, ad A E. Possit autem recta F, spatium A B. Dico F, esse Rationalem. Expositа enim Rationali G, applicetur ad C B, quæ ex binis nominibus, rectangulum C H, æquale quadrato ex G. Erit ergo latitudo B H, Apotome, cuius nomina H I, B I, longitudine commensurabilia sunt nominibus C D, D B; & in eadem ratione, nimirum H I, ad B I, ut C D, ad D B; atque adeo ut C E, ad A E; & per-



45. *primi.*
113. *decimi*

& permutando, ut tota H I, ad totam C E, ita ablata B I, ad ablatam A E. Erit ergo & reliqua B H, ad reliquam A C, ut tota H I, ad totam C E: Commensurabilis autem est longitudine H I, ipsi C E, quod utraque H I, C E, commensurabilis fuit longitudine ipsi C D. Igitur & B H, ipsi A C, longitudine est commensurabilis; Atque idcirco H C, ipsi B A, commensurabile erit, cum sit ut H B, ad A C, ita H C, ad B A: Sed H C, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & B A, illi commensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum B A, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demonstrandum.

19. *quinti.*
12. *decimi.*
10. *decimi.*
1. *sexti.*

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub A C, C B, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

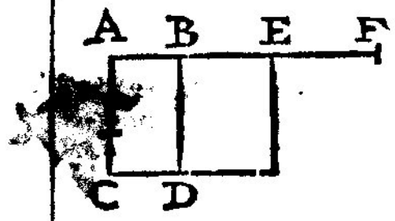
SCHOLION.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine offensa sunt esse commensurabilia; In posteriori uero, nempe in hac 115. *nihil colligetur, si nomina C D, D B. nominibus C E, A E, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.*

115. THEOR. 92. PROPOS. 116. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiũt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Expo sita enim Rationali A C, contineatur sub A B, Media, & Rationali A C, spatium A D. Est ergo A D, spatium sub Rationali A C, & Irrationali A B, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta B E, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico B E, non esse eandem alicui tredicim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem A C, applicatum, latitudinem faciat



23. *decimi.* Rationalem ipsi A C, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eandem Rationalem A C, applicata, faciant latitudines uel ex binis nominibus, uel Apotomas, ut constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At uero quadratum huius Irrationalis B E, ad eandem Rationalem A C, applicatum, faciat A B, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem B E, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem a latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

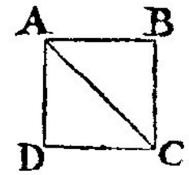
QVOD si compleatur rectangulum D E; erit & hoc cõtentum sub Rationali B D, & Irrationali B E, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta E F, quæ ex defin. xj. Irrationalis erit. Dico rursus E F, non esse eãdem alicui illarum tredecim, uel etiam ipsi B E. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius E F, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat B E. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius B E, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a B E, ut demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 93. PROPOS. 117. 118. 7.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum A B C D, in quo diameter A C. Dico diametrum A C, longitudine incommensurabilem esse lateri A B. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; ac propterea A C, A B, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat A C, ad A B, proportionem, quam numerus E F, ad numerum G; sintque numeri E F, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est ut A C, ad A B, ita numerus E F, ad numerum G; Erit quoq; ut quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, (Cum enim quadrata habeant suorũ laterum proportionem duplicatã; latera autẽ æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorũ æquales etiã, cũ sint æqualium duplicatę.) Sed quadratũ ex A C, duplũ est quadrati ex A B, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex E F, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex E F, cum dimidium habeat, atq; adeo bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse E F, illum producens, par erit. (Si namq; impar esset, cum se ipsum multiplicãs producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; eo quod impar imparem multiplicans imparem procreet. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia uero E F, & G, in sua proportione minimi, inter se primi sunt; & E F, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, mẽtiretur utrunque E F, & G, binarius; atq; adeo nõ essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus E F, bifariam in H. Quia igitur numerus E F, duplus est numeri E H; & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus



5. *decimi.*

20. *sexti.* & 11. *octaui.*

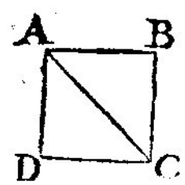
29. *noni.*

24. *septimi.*

11. *octaui.*

quadrati ex E H. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex E H; qualium partium 4. est quadratus ex E F, talium 2. erit quadratus ex G, & talium 1. quadratus ex E H. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, ut supra de numero E F; diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter A C, lateri A B. Igitur incommensurabilis longitudine.

ALITER. Sit si potest fieri, diameter A C, commensurabilis longitudine lateri A B; habeantq; A C, A B, proportionem, quam numeri E F, & G, qui minimi sint in sua proportione, atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, unitas. (Cum enim quadratum ex A C, duplum sit quadrati ex A B; sit autem ut quadratum ex A C, ad quadratū ex A B, ita quadrat⁹ numerus ex E F, ad quadratū numerū ex G, ut in priori demonstratione diximus; erit quoq; quadratus ex E F, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atq; adeo & quadrat⁹ ex ea, unitas; erit quadratus ex E F, binarius. Quod est absurdū.) ergo numerus. Et quia, ut iam est demonstratum, quadratus ex E F duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratū ex E F; ac propterea & G, latus metietur latus E F. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri E F, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdū. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.



14. octaui.

SCHOLION.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata a nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. uel 4. ad 2. uel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab unitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. solum tertius ab unitate quadratus est, & cæteri omnes unum intermittentes; quod 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. primus ab unitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui uero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

10. noni.

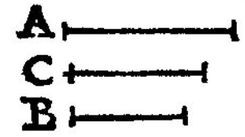
24. octaui.

9. decimi

HOC etiã theorema aliter demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, ut merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commensurabilitatẽ omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinẽs; uisum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorũ, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similẽ, similiterq; positã super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.



10. decimi.

RVRSVS quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta:

2 duodecimi.

Quadrata autem hæc, cum sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; positæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

11. quinti.

10. decimi.

IAM *uero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, C; habebunt pyramides, atq; prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, ut modo est demonstratum; Incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.*

5. 6. uel 7. duodecimi

10. decimi.

QVOD *si coni, uel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C; habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuentæ sunt igitur non solum lineæ, & superficies incommensurabiles, uerum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.*

11. duodecimi.

10. decimi.

EADEM *autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine cõmensurabiles sint, ostẽdemus earũ figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse; atq; adeo & earundem pyramides, & prismata; ac deniq; conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.*

10. decimi.

5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS
ELEMENTVM XI.
Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinẽ, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM *Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, usurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinã linearum commensurabilium, ac incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.*

EXPLICAT *autem prius, more suo, voces ad eam rem perneccessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur, eam quantitatem, quæ*

quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam uero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ uero longitudini latitudinem adiecit, superficies uocatur, ut in primo lib. diximus.

PORRO *quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hoc enim describit uestigium quoddam longum tantum, hoc est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; ut autem percipiamus superficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet uestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum uero propter motum illum, qui in transuersum est factus; Carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditum, consulunt, ut concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur uestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum uero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus uocatur. Neque uero alia quantitas quarta distincta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, ut perspicue in commentariis, quos in sphæram Ioannis de sacro bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.*

II.

SOLIDI autem extremum, est superficies.

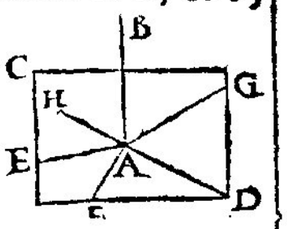
QVEMADMODVM *linea finita in extremitatibus puncta,*

puncta, superficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

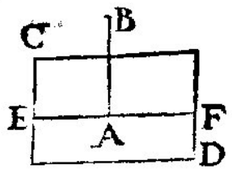
LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta A B, plano C D, insistens, ita ut B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum C D, cum rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus alijs, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cum angulus B A D, ponatur rectus, erit quoq; ei deinceps B A H, rectus ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut A B, cum una linea ex A, in plano C D, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoq; erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, vt recte concludatur, lineam quampiam esse ad planũ datũ rectã, demonstrandũ erit prius, eã cũ omnibus in eodẽ plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

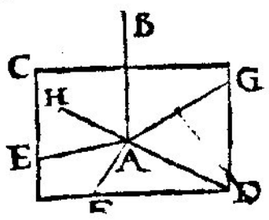


VT autem recta quæpiam plano cuicunq; insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq;

ipſamq; tangentibus, ſatis eſt, ut cum duabus non efficientibus lineam unam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficere, ut perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam unam: quia ſi duæ lineæ componant unam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus alijs rectos conficere angulos. Recta enim A E, inſiſtat plano C D, efficiatq; rectos



angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam unam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus alijs rectos angulos conſtituere; ac idcirco non eſſe rectam ad planum C D. Hoc autem perſpicuum eſt, cum A B, circa E F, ueluti axem, circumuerti queat, ita ut punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum E F, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem A B, cum duabus angulum componẽ-



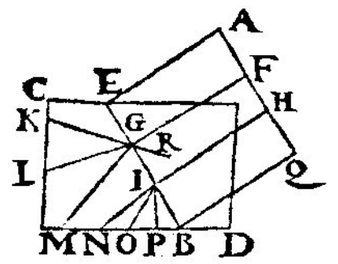
tibus, quales ſunt A G, A D, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tunc demum cum omnibus alijs rectos angulos efficiet, ut diximus. Id quod dilucide demonſtrabitur propoſ. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

INSISTAT *planum A B, plano C D, ita ut linea A Q, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum C D; at E B, in plano: Sit autem horum planorum communis ſectio E B, quæ, ut demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem*

autem ſumptis quotcunq; punctis G, I; ex ipſis in plano A B, ducãtur G F, I H, perpendiculares ad communem ſectionem E B. Si igitur lineæ F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum alijs omnibus in plano C D, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum;

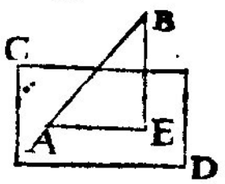


quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim K G, producatur ad R, cum angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique a lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendũ quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atq; a puncto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus ipſa inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.

INSISTAT *recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum uero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planũ deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctũ E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta E A; eritq; necessario angulus B A E acutus, cum in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus sint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehensus linea insistente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio rectæ A B, ad dictum planum C D; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ A B, ad planũ C D, quãtus est dictus angulus acutus B A E.*

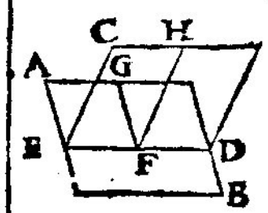


17. primi.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO A B, insistat planum C D, ita ut pars ad C, sit in sublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipso plano A B, sitq; C D, inclinatum ad A B; & communis eorum sectio sit D E. Si igitur ad D E, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, at F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani C D, ad planum A B: Ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM *Geometræ angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, siue is acutus sit siue rectus, obtususue; quanquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationẽ vnius plani supra aliud, q̃ inclinationẽ vnius ad alterũ; obtusus vero recessum quodãmodo vnius ab altero. Verũtamen quia quilibet horũ angulorũ cõmõstrat sitũ, seu eleuationẽ vni plani supra alterũ, generaliter dici cõsueuit a pleriſq; angulus inclinationis omnis ille, qui cõprehẽditur duabus rectis lineis, quæ in utroq; plano ad aliq̃ vnũ punctũ cõis illorũ sectionis ducuntur perpendiculares; cuiusmodi est angulus G F H, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.*

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atq; alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON *obscura est hæc definitio, præcedẽti bene intellectæ. Vnde planũ ad planũ magis inclinatũ esse dicẽt, cui⁹ angul⁹ inclinationis minor extiterit, atq; adeo a recto magis recesserit.*

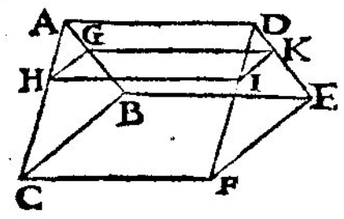
VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, *in quamcunq; partẽ, etiã infinite, producãtur; hoc est, siue ad dexterã, siue ad siniſtrã, & siue ſurſum, siue deorſum, &c. Sunt.n. quædã plana, quæ nec ad dexterã, nec ad siniſtrã producta conueniũt; nec tamẽ ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirũ vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandẽ coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio; idcirco non dicentur parallela.*

SIT-

SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius basis B C F E; auferaturq; fastigium A G H D K I. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana G B E K, H C F I, non conuenire inter se, si ad partes G B, H C, uel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes G H, K I, conueniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt esse protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atq; deorsum. Itaque duo plana quæcunq;, uel sunt parallela, uel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ uero rectæ, uel sunt parallelæ, uel ad alteram partem protractæ conueniunt, si nimirum in eodem existunt plano, vel tandem nec sunt parallelæ, nec unquam conueniunt, si uidelicet in diuersis sunt planis, & in transuersum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.



IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, uti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, ut breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, ut ex defin. 11. patebit, cum illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales;

æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continẽtur.

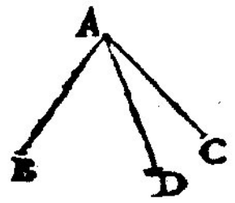
QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circunscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, ut in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, ut in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo cõtingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus B A C, conuentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum

larum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, uel quinta, vel deniq; plures adiungerẽtur, licet anguli quãtitas uariaretur.



Dixit autem Euclides, lineas angulũ solidũ constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniã videlicet, si tres lineæ AB, AD, AC, in eadẽ consisterent superficie, nõ efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus dũtaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

HAEC definitio secunda anguli solidi facilis est, precedenti recte intellecta. Cũ enim saltem tres lineæ in eodẽ non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus solidus efficiatur, ut ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus deniq; CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad unum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, ut supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiam si in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consi-

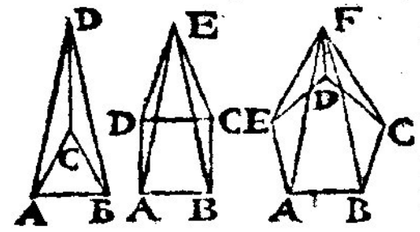
stat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis prabent duo parietes cum pauimento domus, uel laqueari, ad unum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus solidis eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ, quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui unica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, una quidem plana, altera uero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

VIDELICET figuræ solidæ a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, cõstitutæ appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulũ,



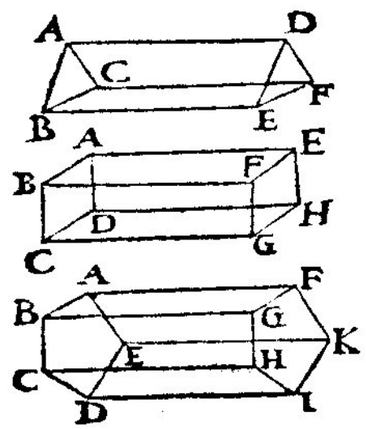
uel quadrangulum, uel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationẽ sumit; vt uidelicet dicatur pyramis triãgula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot. n. triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera

planum dictum continet. Vnde & basis pyramidis nuncupari solet planum huiusmodi. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulæ uero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagonæ denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia uero parallelogramma.

FIGVRAE *scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia & parallela sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaq; prisma nil aliud erit, quam columna quædã laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrãgula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli in vnoquoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.*



Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio

finitio autem tradita infinita alia genera prismatis complectatur, vt constat; præsertim quod plurimæ demonstrationes in hoc libro & 12 sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniãt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin colligunt. Sumpserunt autem forte hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12 solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autẽ animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solũ demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cũ illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt uult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHÆRA est, quando, semicirculi manente diametro, circunductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICVT *linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa al-*

terum eius extremum, nempe circa diametrum, circunductũ figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existant illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circunducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sint semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit etiam hoc modo.

SPHAERA est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO *in lib. de vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιρώειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.*

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta

cta quædam linea per centrũ ducta, & vtrinque a sphæræ superficie terminata.

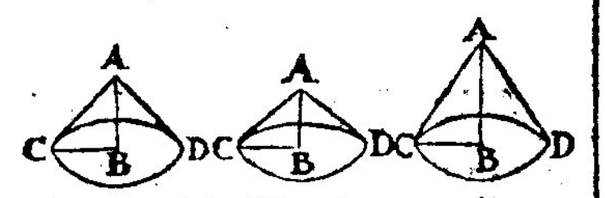
HAE tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

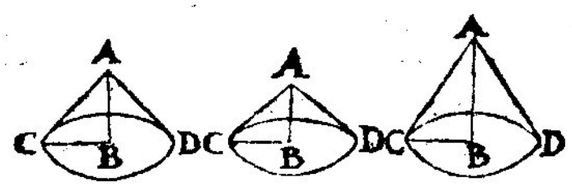
CONVS est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum trian gulum in se ipsum rursus reuoluitur, unde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si uero minor, Amblygonius: Si uero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circunducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædã figura, quæ cõtinetur duabus superficiebus, circulari una, ac plana, quã BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, ut in prima figura, dicetur conus descriptus orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope uerticem A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; erũt et anguli BAC, BCA, æquales; quicũ æquiualeant uni recto, eo quod ABC, sit rectus; erit BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si uero quiescens latus AB, minus fuerit circunducto BC, ut in secunda figura, uocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC, ponatur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circunducto BC, ut in tertia figura, appellabitur conus descriptus oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad uerticem A, acutus est. Cum n. latus AB, maius sit latere BC, erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo uni recto æquiualeant, eo quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.



5. primi

18. primi

18. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum uertitur.

VT in qualibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS uero coni est circulus, qui a circunducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circunductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, ut ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circunferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctũ, coniuncta recta linea in utramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circunferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad uerticem inter se se aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, uoco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem uoco figuram contentam circulo, & conica superficie, quæ inter uerticẽ,

& circuli circunferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ uertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ a uertice ad circuli centrum perducitur.

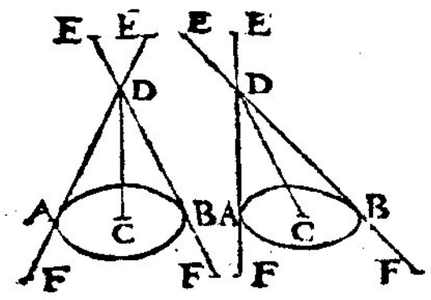
BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem uoco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS uero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HAEC autem omnia ita explicat Eutocius ĩ commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque D B, in infinitum ex utraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur ecusque in circuli A B, circunferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, a quo cæpit moueri: describet superficiem quandam, quæ quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axẽ, rectam D C. Conum vero appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie, quam D B, sola describit. Coni verticem, punctum D. Axem D C. Basim A B, circulum. Quod si D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

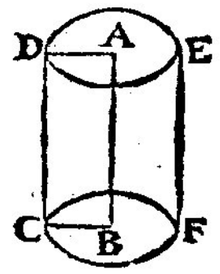


XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli

guli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, unde cæperat moueri, circumassumpta figura.

VELVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescens A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellaueris columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE *recta A B, in superiori figura, dicetur axis cylindri.*

XXIII.

BASES uero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumagun tur, descripti.

QVALES *sunt circuli a lateribus A D, B C, oppositis descripti.*

EVCLI-

EVCLIDES *uero ſolum cylindrum rectũ hoc loco definit, cuius uidelicet axis rectus eſt ad utramque baſim; atque de hoc ſolum in lib.* 12. *eſt diſputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris ſimus propoſituri in eodem* 12. *lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonſtrauit, uiſum eſt prius ex Sereno Antinſenſi definire cylindrum uniuerſe, ut complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur ſcribit Serenus ad initium primi libri de ſectione cylindri.*

SI duorum circulorum æqualium, & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe æquidiſtantes & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circunferantur, & ſimul circunferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quouſque rurſus in eũ locum reſtituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea deſcribitur, cylindrica ſuperficies uocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, linea ipſa deſcribente in infinitum producta.

CYLINDRVS eſt figura, quæ circulis æquidiſtantibus, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta continetur.

CYLINDRI baſes ſunt circuli ipſi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

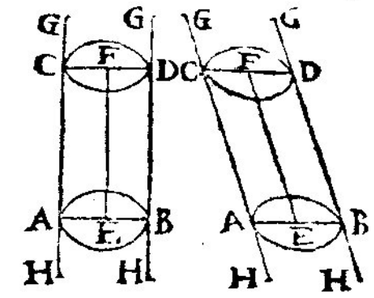
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta ſit, & in ſuperficie ipſius cylindri, baſes utraſque contingit; quam & circumlatam, cylyndri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

SCA-

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

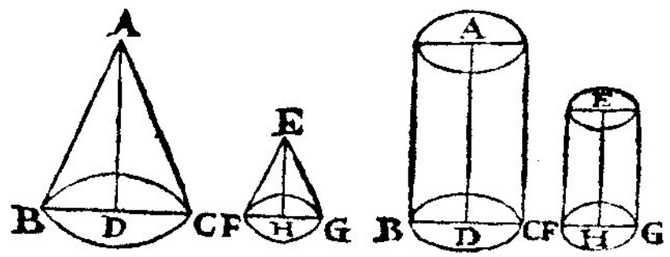
SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitum ex utraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtantes, una cum recta AC, circunducantur, donec ad eum locum reſtituantur, unde moueri cæperunt; deſcribetur a linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam uocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Cylindrum uero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam uidelicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum uocat cylindrum: Sin minus, Scalenũ.



XXIIII.

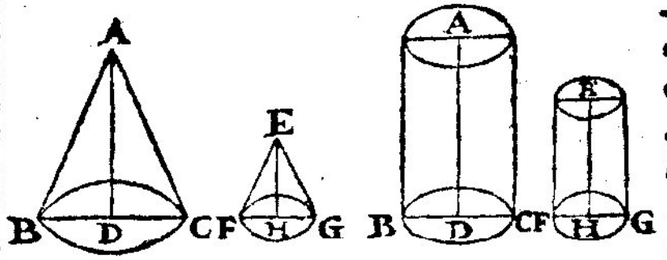
SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, et baſium diametris ſumit. Diametri enĩ baſium indicant conos &



cylin-

cylindros secũdũ duas dimensiones esse similes, longitudinẽ scilicet ac latitudinẽ; Axes uero eosdẽ secundũ profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Itẽ duo cylindri; in conis autem axes AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris: Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt; Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim



15. *quinti* *fit ut AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem ut BC, ad FG, ita dimidia BD, ad dimidiam FH; erit quoque ut AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula similia inter se erunt, & rectangula: Triangula quidem, propterea quod triangula unũ angulum uniangulo habentia æqualem, & circum æquales an-*

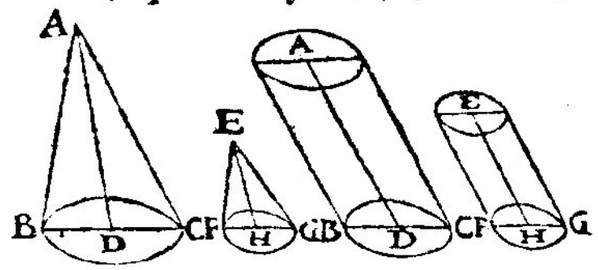
6. *sexti.* *gulos latera proportionalia, æquiangula sint, ideoque latera*

4. *sexti.* *omnia circa angulos æquales habeant proportionalia, atque adeo inter se similia existant: Rectangula vero, eo quod re-*

34. *primi.* *liqua duo latera ductibus lateribus AD, DB, sint æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habeant.*

Quod si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides uerba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterintque anguli inclinationũ ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicẽtur & coni ãter se, &



cylindri quoq; inter se se similes; quoniã nimirũ hac ratione & tres eorũ dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triãgulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub uiginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

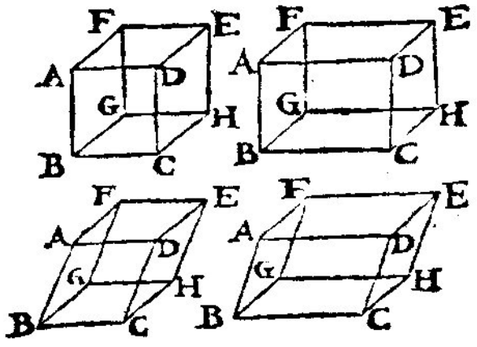
HAEC *sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, eo quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cælum, Ignem, Aerem, Aquam, atq; Terram quinque dictis corporibus assimilet, ut in sphæra Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib.* 13. *Cubi quidem propos.* 15 *Tetraedri vero propos.* 13. *Octaedri deinde propos.* 14. *Dodecaedri autem propos.* 17. *Icosaedri denique propos.* 16. *Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, ut ueram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque prædicta dari potest, ut demonstrabimus ad finem lib.* 13.

QVONIAM *vero in hoc lib.* 11. *frequens fit mentio Parallelepipedi, & in lib.* 15. *agitur de mutua inscriptione, circunscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.*

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

VELVTI solida comprehensa sex quadrilateris figuris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; *Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa. quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propos.* 24. *huius lib.*



SVNT *autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus: Si deniq; sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterũ quodcunq; parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.*

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidæ figuræ viciſſim circunſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circunſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: Sed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figuræ exterioris.

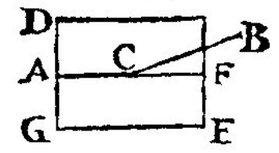
VERVM duæ hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circunſcriptionibuſq; mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

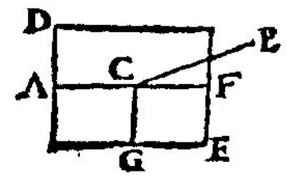
RECTAE lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ A B, pars quidem A C, in ſubiecto plano D E, pars vero C B, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis A C, in plano D E, iaceant; puncta vero omnia partis C B, ſupra planum D E, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano D E, ipſi A C, rectæ lineę continua quædam recta linea in directum poſita, nempe C F. Quamobrem duæ rectæ A B, A F, commune habent ſegmentum A C. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 13. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

HAEC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed forte dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, rectæ A C, eſſe aliquam rectam in plano D E, in directum, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ A B, partem quidem A C, eſſe in plano D E, partem vero C B, in ſublimi, vtique negabit, rectæ A C, in plano D E, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam C B, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi A C. Verum tamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, quæ ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi A C, in plano D E, producatur vſque ad F, erit C F, recta rectæ A C, in continuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet D E, ipſi A C, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineam conſtituat, quamuis quis dicat, A B, eſſe quoque rectam, eiuſque partem A C, in plano D E, partem vero C B, in ſublimi eſſe poſitã. Ducatur.n. in plano D E, ipſi A C, perpendicularis C G; 11. primi.



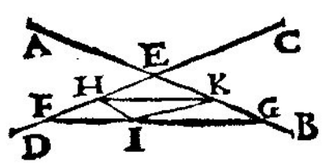
& in eodem plano ipſi C G, perpendicularis C F. Dico C F, eſſe ipſi A C, poſitam in continuum & rectum. Cum enim A C, & F C, in eodem plano D E, cum recta C G, duos rectos angulos conſtituant A C G, F C G, ex conſtructione; erunt A C, & F C, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis cõtendat, A B, eſſe rectam, cuius quidem pars A C, in plano D E, ſubiecto, pars autem C B, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano D E, erit alia recta, nempe C F, quæ cum A C, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ A B, A F, ſegmentum commune habebunt A C. Quod eſt abſurdum.

14. primi.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atq; triangulum omne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ A B, C D, ſe mutuo ſecent in E, & in E B, E D, ſumptis punctis F, & G, vtcunque, ducatur recta F G, vt fiat triangulum E F G. Dico triangulum E F G, in vno eſſe plano; Item rectas A B, C D, in vno quoque plano exiſtere. Si enim trianguli E F G, pars quædam, nimirum E H I G, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua F H I, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum E F, G F, partes quidem E H, G I, in vno plano, partes vero H F, I F, in ſublimi, vel contra. quod fieri non poſſe, iam ſupra demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem E F I K, in vno plano credatur eſſe, pars autem G I K, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum E G, F G, partes quidem E K, F I, in vno plano, partes vero K G, I G, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidē F H K G, in vno concedatur eſſe plano, pars vero E H K, in ſublimi, vel contra; erunt quoque rectarum F E, G E, partes quidem F H, G K, in vno plano, partes autem H E, K E, in ſublimi, vel contra. Quæ omnia abſurda ſunt, vt eſt demonſtratum. Quare triangulum E F G, in uno plano exiſtit; eademq; eſt ratio in omni alio triangulo.



1. undeci.

QVIA vero, in quo plano eſt triangulum E F G, in eodem exiſtunt eius latera E F, E G: In quo autem ſunt rectæ E F, E G, in eodem ſunt rectæ totæ C D, A B, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in ſublimi dicantur eſſe; Erunt propterea rectæ A B, C D, in uno plano, in quo nimirum triangulum E F G, conſiſtere demonſtrauimus. Quo circa ſi duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. Quod erat demonſtrandum.

1. undec.

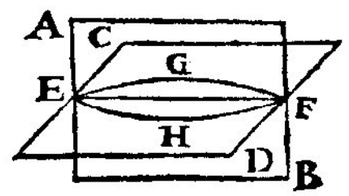
1. undec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta.

SECENT ſe mutuo plana A B, C D, ſitq; communis eorum ſectio E F. Dico E F, eſſe lineam rectam. Si enim non credatur eſſe recta, ducatur in plano A B, recta E G F, & in plano C D, recta E H F. Rectæ igitur E G F, E H F, cum eoſdem habeãt terminos E, & F, ſuperficiem includent. Quod fieri non poteſt, vt in 12. pronunciato 1. lib. oſtendimus. Communis ergo ſectio E F, recta erit linea; Ac proinde ſi duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. Quod erat oſtendendum.



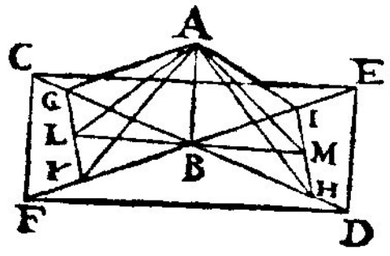
ALITER. Secent ſe rurſus plana A B, C D, ſintque termini ſectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta E F. Si igitur recta E F, in vtroque plano exiſtit, conſtat propoſitum: Ipſa enim erit communis ſectio. Si uero E F, recta in neutro eorum dicatur eſſe, tunc ſi in alterutro eorum recta ducatur E G F, concludent rurſus duæ rectæ E F, E G F, ſuperficiem, cum eoſdem habeant terminos E, & F. Si deniq; recta E F, in altero tantum plano

esse credatur, tunc si in altero ducatur recta E G F; includent iterum duæ rectæ E F, E G F, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta E F, in utroque plano A B, C D; atque adeo communis eorum sectio est.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea A B, insistat duabus rectis C D, E F, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam A B, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; erunt ipsæ in uno plano, quod sit C E D F. Sumantur inter se æquales rectæ B G, B H; Item rectæ B I, B K; ducanturq; rectæ G K, I H; & in eodem plano per B, ducatur recta L M, secãs rectas G K, I H, in punctis L, & M,. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ A G, A L, A K, A H, A M, A I. Quoniam igitur latera B G, B K, trianguli B G K, lateribus B H, B I, trianguli B H I, ex constructione sunt æqualia; & anguli quoque ipsis contenti G B K, H B I, cum sint ad uerticem B, oppositi, æquales: Erunt bases G K, H I, inter se, & anguli B K G, B I H, inter se quoque æquales.



RVRSVS cum anguli K B L, I B M, ad uerticem B, oppositi sint æquales, erunt duo anguli K B L, B K L, trianguli B K L, duobus angulis I B M, B I M, trianguli B I M, æquales; Sunt autem & latera B K, B I, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera A L, L B, reliquis lateribus I M, M B, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera A B, B G, trianguli A B G, æqualia

2. *undec.*
15. *primi.*
4. *primi.*
15. *primi.*
26. *primi.*

æqualia sint lateribus A B, B H, trianguli A B H, ex constructione; & anguli ipsis contenti A B G, A B H, æquales, nempe recti, ex hypothesi; erunt & bases A G, A H, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ A I, A K. 4. *primi.*

AMPLIVS quia latera A I, I H, trianguli A I H, lateribus A K, K G, trianguli A K G, æqualia sunt; & basis A H, basi A G, ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli A I H, A K G, dictis lateribus comprehensi, æquales. 8. *primi.*

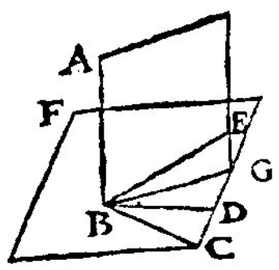
ITAQVE cum latera A K, K L, trianguli A K L, æqualia sint lateribus A I, I M, trianguli A I M; & anguli ipsis contenti A K L, A I M, æquales etiam, ut hactenus demonstrauimus; erunt quoque bases A L, A M, æquales. 4. *primi.*

QVONIAM denique latera A B, B L, trianguli A B L, æqualia sunt lateribus A B, B M, trianguli A B M; & basis A L, basi A M, ex demonstratis; erunt quoque anguli A B L, A B M, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. Quare recta A B, rectos angulos efficit cum recta L M, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq; ratione ostendetur, rectam A B, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere: Ac proinde recta A B, plano C E D F, quod per rectas C D, E F, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. Quod demonstrandum erat. 8. *primi.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis B C, B D, B E, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas B C, B D, B E, in uno plano esse. Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes E, se mutuo secent in B; sint B C, B D, in plano F C; Et si fieri potest, recta B E, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. Quoniam vero duæ rectæ A B, B E, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B; Sint ambæ in plano A E Et quia plana F C, A E sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. Sit ergo eorum communis sectio recta B G. Quia vero recta A B, ad angulos rectos ponitur rectis B C, B D; erit propterea & plano F C, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ B G, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli A B E, A B G, existentes in plano A G, per rectas A B, B E, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis B C, B D, in uno plano F C, existentibus, non erit B F, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



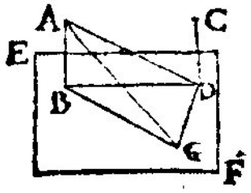
2. *undec.*
2. *undec.*
3. *undec.*
4. *undec.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, C D, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta B D, in plano E F, erunt anguli A B D, C D B, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodē plano E F, ducatur D G, ad B D, perpendicularis, ponanturq; æquales A B, D G. Connectantur deinde rectæ B G, G A, A D. Quoniam igitur latera A B, B D, trianguli A B D, æqualia

lia sunt lateribus G D, D B, triangŭli G D B, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti A B D, G D B, æquales, nempe recti; Erunt bases æquales A D, G B Rursus quia latera A B, B G, trianguli A B G, æqualia sunt lateribus G D, D A, trianguli G D A; Est autem & basis communis A G; Erunt anguli A B G, G D A, æquales: Est autem A B G, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & G D A, rectus erit Quoniam uero, ex eadem defin. angulus quoque G D C, rectus est; erit recta G D, tribus rectis D B, D A, D C, ad angulos rectos. Quare rectæ D B, D A, D C, in uno erunt plano: Est autem A B, in eodem plano, in quo D B, D A Recta igitur C D, in eodem erit cum A B, plano. Quocirca cum anguli interni A B D, C D B, sint recti, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

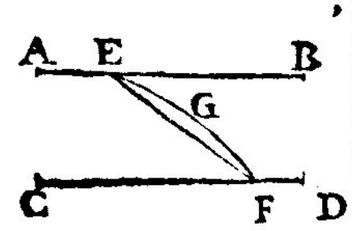


4. *primi.*
8. *primi.*
5. *undec.*
2. *undec.*
28. *primi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis A B, C D, sumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur E F. Dico rectam E F, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ A B, C D. Si enim recta E F, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra: secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E & F, sitq; communis sectio horum planorum E G F, quæ recta linea erit. Duę igitur rectæ E F, E G F, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum



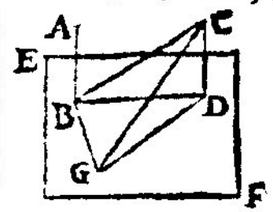
3. *undec.*

planum parallelarum AB, C D, erit recta E F. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodē est cum parallelis plano. Quod erat demonstrādū.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ A B, C D; sitque C D, plano E F, ad angulos rectos. Dico & A B, eidem plano E F, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta B D, in plano E F; erit per defin. 3. huius lib. angulus C D B, rectus: Sunt autem duo C D B, A B D, duobus rectis æquales. Igitur & A B D, rectus erit. Iam in plano E F, ducatur B G, perpendicularis ad B D; ponanturque æquales B G, C D. Coniungantur deinde rectæ D G, G C, C B. Quoniam igitur latera C D, D B, trianguli C D B, æqualia sunt lateribus G B, B D, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti C D B, G B D, æquales, nimirum recti; Erunt bases C B, G D, æquales. Rursus quia latera C D, D G, trianguli C D G, æqualia sunt lateribus G B, B C, trianguli G B C; & basis est communis C G; Erunt anguli C D G, G B C, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem C D G, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & G B C, rectus erit. Quare recta G B, duabus rectis B D, B C, se mutuo tangentibus in B, ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per B D, B C, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta A B; propterea quod rectæ B D, B C, in eodem sint plano, in quo parallelæ A B, C D; cum puncta B, C, D, existant in parallelis A B, C D. Igitur & G B, recta rectæ B A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum



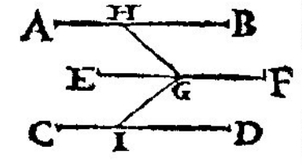
29. primi.
4. septimi.
8. primi.
4. undec.
7. undec.

re cum A B, recta sit ad rectas B G, B D; erit quoque A B, recta ad planum per B G, B D, ductum, hoc est, ad planū E F. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum. 4. undec.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

SINT rectæ lineæ A B, C D, ipsi E F, parallelæ; non sint autem in eodem cum E F, plano. Dico A B, C D, parallelas quoque esse. Nam a quolibet puncto G, rectæ E F, ad ipsam E F, ducantur duæ perpendiculares; G H, quidem in plano parallelarum A B, E F; at G I, in plano parallelarum C D, E F. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I, se tangentibus mutuo in G; erit recta quoque ad planum per ipsas G H, G I, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ A B, E F; & E F, sit recta ad planum per G H, G I, ductum; erit quoque A B, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ C D, E F; Sit autem E F, recta ad planum per G H, G I, ductum; erit etiam C D, recta ad idem planum; Atque proinde rectæ A B, C D, cum rectæ sint ad idem planum per G H, G I, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.



4. undec.
8. undec.
8. undec.
6. undec.

SCHOLION.

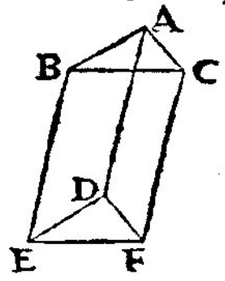
DATA opera Euclides voluit, duas rectas A B, C D, non esse in eodē plano cū recta E F, cui sunt parallelæ. Nā si foret in eodē plano cū ipsa E F; essent A B, C D, inter se parallelæ, ex 30.

ex 20. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint paral lelæ, non autem in eodem plano : Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ A B, A C, ſe tangentes in A, parallelæ rectis D E, D F, ſe tangentibus in D ; non ſint autem A B, A C, in eodem plano, in quo D E, D F. Dico angulos B A C, E D F, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim A B, D E, inter ſe æquales, & A C, D F, inter ſe; ducanturq; rectæ B C, E F, B E, A D, C F.



Quoniam igitur A B, D E, parallelæ ſunt & æquales ; erunt quoque B E, A D, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales C F, A D. Quare cũ B E, C F, parallelæ & æquales ſint eidem A D; erunt etiã B E, C F, inter ſe parallelæ, & æquales: Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ B C, E F. Quia ergo latera A B, A C, triãguli A B C, æqualia ſunt lateribꝰ D E, D F, triãguli D E F, ex cõſtructione; & baſi B C, baſi E F, æqualis, vt modo demonſtrauimus ; Erunt & anguli B A C, E D F, dictis lateribus comprehenſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.

33. *primi.*

9. *undec.*
33. *primi.*

8. *primi.*

SCHOLION.

CONCLVSIO *huius theorematis vera etiam eſt, quãdo priores duæ lineæ in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ* A B, A C, D E, D F, *in eodem plano, ſitq;* A B, *ipſi* D E, *&* A C, *ipſi* D F, *parallela. Dico angulos* B A C, E D F, *eſſe æquales. Nam ponantur æquales* A B, D E, *&* A C, D F; *ducanturq; rectæ* B C, E F, *quæ aut in*

in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in una recta B F. *Quoniam igitur parallelæ ſunt* A B, D E ; *æquales erunt anguli* A B C, D E F ; *internus & externus. Similiter æquales erunt anguli* A C B, D F E; *Sunt enim &* A C, D F, *parallelæ. Quare duo anguli* A B C, A C B, *trianguli* A B C, *æquales ſunt duobus angulis* D E F, D F E, *trianguli* D E F. *Igitur anguli quoque reliqui* B A C, E D F, *æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

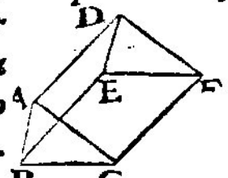
29. *primi.*



32. *primi.*

NON *ſint iam* B C, E F, *in una recta linea conſtitutæ. Ductis rectis* A D, B E, C F, *cum* A B, D E, *ſint parallelæ & æquales ; erunt &* A D, B E, *parallelæ & æquales. Eadem ratione* A D, C F, *parallelæ erunt & æquales, eo quod* A C, D F, *parallelæ ponantur & æquales. Quare &* B E, C F, *eidẽ* A D, *parallelæ exiſtentes & æquales, inter ſe parallelæ erunt & æquales: Ac proinde parallelæ & æquales quoque erũt* B C, E F. *Itaq; cum duo latera* A B, A C, *trianguli* A B C, *æqualia ſint lateribus* D E, D F, *trianguli* D E F; *& baſis* B C, *baſi* E F; *erunt anguli* B A C, E D F, *contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

33. *primi.*



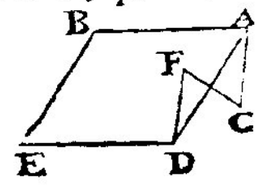
30. *primi.*

33. *primi.*

8. *primi*

CAETERVM *ut concluſio huius theorematis recte ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non,) ut tres rectæ* A D, B E, C F, *nulla ratione ſe mutuo ſecent ; ut ex prima, & ultima figura apparet. Nam alias concluſio vera non erit.*

SVNT *enim rectæ* A B, A C, *rectis* D E, D F, *parallelæ in hac figura ; & tamen anguli* B A C, E D F, *quos comprehendunt, non ſunt æquales, cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod* A D, C F, *ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis* A C, D F, *ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea* A D, C F, *quæ eas cõiungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33 lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione ; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.*



PRO-

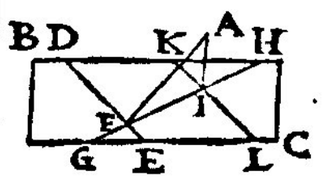
11.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta utcunque D E; ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: Quæ ſi fuerit perpendicularis ad planum B C, factum erit, quod proponitur: Si uero non fuerit A F, ad planum B C, perpendicularis, ducatur in plano B C, per F, ad D E, per

12 *primi.*



11. *primi.* pendicularis G H; ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C. Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L; cum D F, ad rectos angulos ſit duabus F A, F H,

12. *primi.*

31. *primi.*

4. *undec.* ex conſtructione, ac proinde recta ad planum per F A, F H,
8. *undec.* ductum; erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H,
2. *undec.* ductum recta. Quoniam uero A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitq; rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atq; adeo A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. Igitur A I, ad

4. *undec.* planum per K I, I F, ductum, hoc eſt, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

12.

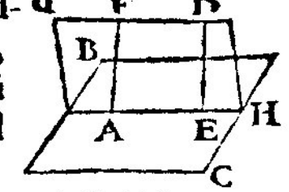
PROBL. 2. PROPOS. 12.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. Ex quouis puncto D, in ſublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E: quæ

11. *undec.* ſi ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si uero ceciderit in aliud punctum E; extenſa recta per E, & A, ducatur per A, ipſi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam eſſe ad planum datum B C. Cũ enim D E, A F, parallelę ſint; & D E, recta ad planũ B C, ex conſtructione; erit quoq; A F, ad idem planũ B C, recta. Itaq; dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, &c. Quod faciẽdum erat

31. *primi.*



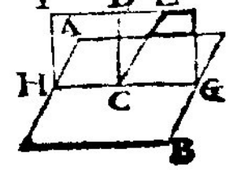
8. *undec.*

THEOR. 11. PROPOS. 13.

13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum A B. Dico a dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, quæ in uno eodẽq; plano ſunt, ducatur planum F G, ſecans planum A B, per rectam lineam G H. Cum igitur E C, D C, rectæ ſint ad planum A B; erunt per



2. *undec.* defin 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datũ eſt, duæ rectæ lineæ, &c. Quod erat demonſtrandum.

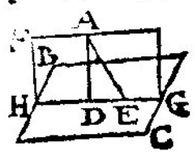
ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planũ A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cum igitur duæ D C, E C, rectæ ſint ad idem planũ A B; erunt ipſæ inter ſe paral-

6. *undec.* lelæ, cũ tamẽ conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdũ.

SCHOLION.

EODEM modo, a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, *puncto in ſublimi ad ſubiectum planum* B C,

B C, *si fieri possit, duæ perpendiculares* A D, A E. *Ducatur*
2. *undec.* *per* A D, A E, *quæ in vno plano sunt, planum* F G, *secans*



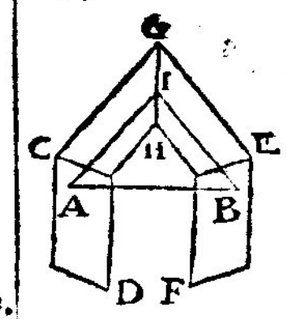
planum B C, *per rectam* G H. *Cum igitur* A D, A E, *rectæ sint ad planum* B C; *erunt per de-*
fin. 3. *huius lib. duo anguli* A D E, A E D, *recti, interni in triangulo* A D E. *Quod est ab-*
17. *primi* *surdum; cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.*

ALITER. *Si* A D, A E, *rectæ sunt ad planum* B C;
6. *undec.* *ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto* A. *Quod est absurdum.*

14. THEOR. 12. PROPOS. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C,
3. *undec.* E; & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto utcunq; I, ducantur rectæ I A, I B,



in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I.
17. *primi.* Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadē recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

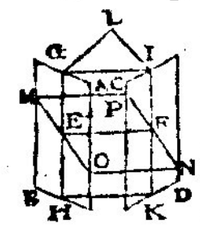
SCHOLION.

FACILE *etiã demõstrari poterit cõuersum huius, videlicet.*

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT

SINT duo plana parallela AB, C D, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta E F. Dico E F, rectam quoque esse ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectã E F, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas G H, I K: eruntque anguli G E F, H E F, recti, per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F E, K F E. (Si enim alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I F E, duobus rectis minores. Quare rectæ E G, F I, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; cum tota recta H G L, sit in uno plano, nempe in AB, producto; Item 1. *undec.* *tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo si aliud planum videlicet M N, eadem plana secet per E F, faciens alias rectas, communes sectiones cum ipsis, M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cum E F, sit recta ad duas rectas I K, P N, recta quoque erit E F, ad planum C D, per ip-* 4. *undec.* *sas ductum. Quod est propositum.*



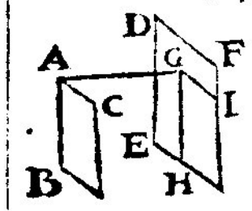
THEOR. 13. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, duabus rectis lineis D E, D F, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ. Dico & plana B C, E F, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in 11. *undec.* puncto G. Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, 31. *primi.*

S ipsis

ipſis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, GH,
9. *undec.* parallelæ ſunt ipſi D E; erunt & AB, GH, inter ſe parallelæ;
29. *primi.* Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem A G H, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit



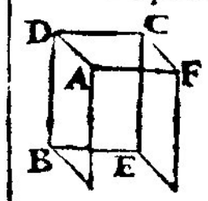
& angulus B A G. Simili argumento concludes angulum C A G, rectum eſſe.
4. *undec.* Itaque cum recta G A, ſit recta duabus AB, AC; recta quoque erit G A, ad planū BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum E F, ex conſtructione. Igitur
14. *undec.* parallela ſunt plana B C, D E. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit A B, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in pla-



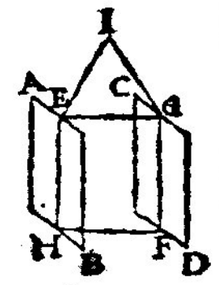
31. *primi* *no B C, per rectas D B, D C, ducto, agatur C F, ipſi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto fiat quoque C F, ipſi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C F, C F, ductum, parallelum eſſe plano dato A B. Cum enim duæ rectæ D B, D A, ſe tangentes in D, duabus rectis C E, C F, ſe tangentibus in C, exiſtentibusque in alio cum illis*
15. *undec.* *plano parallelæ ſint; parallelæ erunt plana A B, E F, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.*

16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur

ſecentur : communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana A B, C D, plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes ſectiones eorum E H, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient. Cōueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in uno eſt plano,



1. *undec.* nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in uno quoque eſt plano, uidelicet in C D, producto; conuenient etiā plana A B, C D producta ad I. Quod eſt abſurdum, cū ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandū.

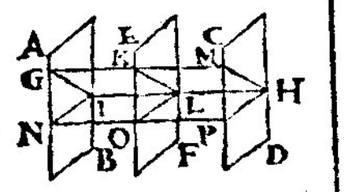
SCHOLION.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum facta ab alio plano ſecante ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum cōmunes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantum ſunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO *ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theomati* 30. *lib.* 1. *nimirum.*

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

SINT duo plana A B, C D, plano E F, parallela. Dico & A B, C D, parallela eſſe. Secētur enim oīa tria plana plano G H, ſintq; cōmunes eorū ſectiones rectæ G I, K L, M H. Secētur rurſus alio plano N H, ſintq; communes eorum ſectiones rectæ N I, O L, P H, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia G H, N H,

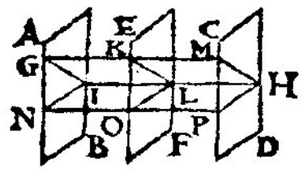


se quoque mutuo secent, quarum sectio communis sit linea recta H I. Quia igitur parallela plana A B, E F, secantur plano G H, erunt cõmunes sectiones G I, K L, parallelæ. Eodem modo parallela erunt M H, K L; atque adeo parallela erunt inter se G I, M H. Nõ aliter ostendemus, parallelas esse N I, P H. Itaque cum I G, I N, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis H M, H P, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano; erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.

16. undec.

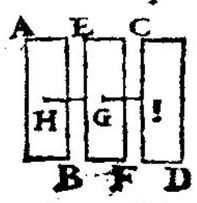
30. primi

15. undec.

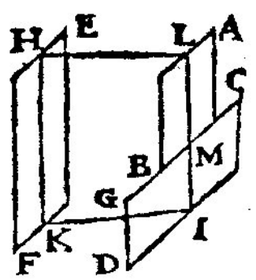


ALITER. *Sumatur in tertio plano E F, punctũ quodlibet G, a quo in vtramque partem educatur ad planum E F, linea recta perpendicularis, occurrens plano A B, in puncto H, & plano C D, in puncto I. Quoniam igitur linea H G, recta est ad planum E F, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione G I, recta erit ad planum C D. Quamobrem cum recta H I, sit recta ad plana A B, CD; parallela inter se erunt plana A B, C D. Quod est propositum.*

14. undec.



QVOD *si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana A B, C D, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam C G. Dico plana A B, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam H I, omnia tria plana per lineas rectas H K, L M, M I. Quoniam igitur parallela sunt plana A B, E F; erunt & communes sectiones L M, H K, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I M, H K. Quamob rem cum rectæ L M, I M, parallelæ sint ipsi H K, existantque in eodem plano secante H I, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. 1. lib. ostendimus. Ac proinde plana A B, C D, vnum*



16. undec.

vnum planum efficient; propterea quod recta L I, in uno iaceat plano. Quod est propositum.

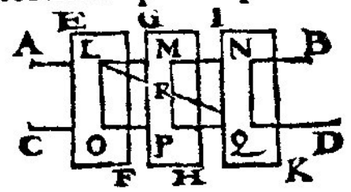
11. undec.

ITAQVE *duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, uel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.*

THEOR. 15. PROPOS. 17. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ A B, C D, (siue eæ parallelæ sint, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmẽta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem L M, ad M N, ita esse O P, ad P Q. Ducantur enim rectæ L O, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano G H, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur R M, R P, in eodem plano G H. Eritque triangulum L N Q, in uno plano: similiter triã gulum L O Q, in uno plano. Quoniam uero plana parallela G H, I K, secantur plano trianguli L N Q, erunt communes sectiones eorum M R, N Q, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt R P, L O. Quam ob rem erit ut L R, ad R Q, ita L M, ad M N; Item ut L R, ad R Q, ita O P, ad P Q; Ac proinde ut L M, ad M N, ita O P, ad P Q. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



2. undec.

16. undec.

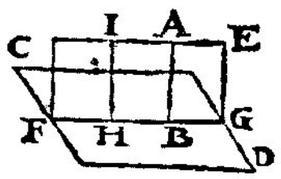
2. sexti.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, pla-

na eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta A B, ad planum C D, recta. Dico omnia plana per rectam A B, ducta, esse recta ad idem planum C D. Ductum enim sit per A B, planum E F, secans planum C D, per rectam lineam F G. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta F G, ducatur in plano E F, ipsi A B, parallela H I. Quoniam igitur anguli A B H, I H B, duobus rectis sunt æquales: Est autem A B H, rectus, per 3. defin huius lib. erit & angulus I H B, rectus. Rursus quia A B, ponitur recta ad planum C D; erit quoque I H, ad idem planum C D, recta. Eadem ratione erunt omnes lineæ, quæ in plano E F, ipsi A B, ducentur parallelæ, ad planum C D, rectæ: Quæ cum ducantur in plano E F, ad communem sectionem F G, perpendiculares; rectum erit planum E F, ad planum C D, per defin. 4. huius lib. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam A B, ducta, ad planum C D, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



31. *primi*

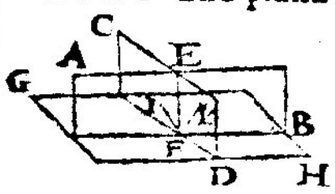
29. *primi*

8. *undec.*

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana A B, C D, se mutuo secantia per lineã rectam E F, ad planum G H, recta. Dico communem illorum sectionem E F, rectam quoque esse ad idem planum G H. Aut enim E F, ad B F, D F, communes sectiones planorum A B, C D, cum plano G H, recta est, aut non. Si recta est E F, ad B F, D F, recta quoque erit ad planum G H,



4. *undec.*

G H, quod per ipsas ducitur. Si uero E F, concedatur recta ad alteram rectarum B F, D F, tantum; Sit ea recta ad B F. Quoniam igitur planum C D, ad planum G H, ponitur rectum; erit E F, quæ in plano C D, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur perpendicularis, ad planum G H, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si E F, concedatur recta ad D F. Si denique E F, ad neutram B F, D F, esse credatur recta; ducatur ex F, in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F I; Item in plano C D, ad D F, communem eius sectionem cum plano G H, perpendicularis F K. Quoniam igitur planum A B, rectum ponitur ad planum G H, erit quoque perpendicularis I F, quæ in plano A B, ad B F, communem eius sectionem cum plano G H, ducitur, recta ad planum G H, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit K F, ad idem planum G H, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum G H, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare E F, recta erit ad planum G H. Si duo igitur plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

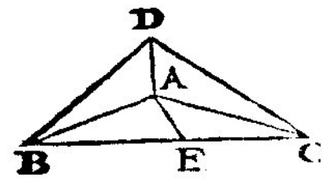
11. *primi*

13. *undec.*

20. THEOR. 18. PROPOS. 20.

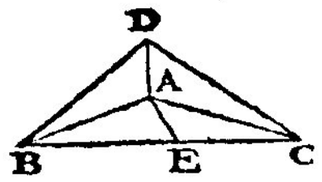
SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis B A C, C A D, D A B. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si uero duo tantum sint æquales, & tertius utrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si unus, uidelicet B A C, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum



cum maximo illo B A C, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo B A C, maiores quoque esse angulos duos B A D, D A C. In plano enim per A B, A C, ducto fiat angulus B A E, angulo B A D, æqualis; & recta A E, æqualis rectæ A D. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta B C, secans rectas A B, A C, in B, & C; coniungantur quæ B D, D C. Quoniam igitur latera A D, A B, trianguli B A D, æqualia sunt lateribus A E, A B, trianguli B A E; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; erunt bases B D, B E, æquales. Quia uero latera D B, D C, maiora sunt latere B C; si demantur æquales rectæ B D, B E, relinquetur recta C D, maior quam C E. Cum igitur latera A D, A C, trianguli D A C, æqualia sint lateribus A E, A C, trianguli E A C; & basis C D, maior basi C E; erit angulus C A D, angulo C A E, maior. Additis ergo æqualibus angulis B A D, B A E, erunt duo anguli C A D, B A D, maiores duobus angulis C A E, B A E, hoc est, toto angulo B A C, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde quilibet duo multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendũ.

23. primi.



4. primi.

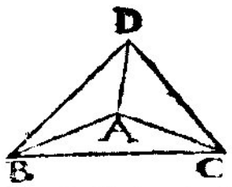
20. primi.

25. primi.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis, continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis B A C, C A D, D A B. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis B C, C D, D B, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub C B A, A B D, D B C. At C, sub B C A, A C D, D C B: D, uero sub C D A, A D B, B D C.



BDC. Quoniam uero duo anguli C B A, A B D, maiores sunt angulo C B D; similiterque duo anguli B C A, A C D, maiores angulo B C D; & duo anguli C D A, A D B, maiores angulo C D B: erunt sex anguli C B A, A B D, B C A, A C D, C D A, A D B, tribus angulis C B D, B C D, C D B, maiores: Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis, propter triangula tria B A C, C A D, D A B, (sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) Si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus &c. Quod erat demonstrandum.

20. undec.

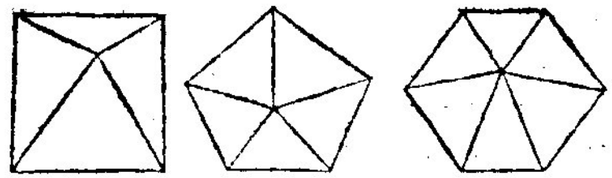
32. primi.

32. primi.

SCHOLION.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eã ad oẽs angulos solidos extẽdemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumue, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ (cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, &

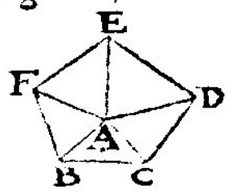


32. primi

horum

20. vndec. *horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.*

VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus ſubtendantur ordine rectæ B C, C D, D E, E F, F B, ita ut conſtituatur pyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. Quia vero omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E,



32. primi *E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis B C D E F, æquales ſunt ſex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur; erunt duo C B A, A B F, qui ſunt in trian*

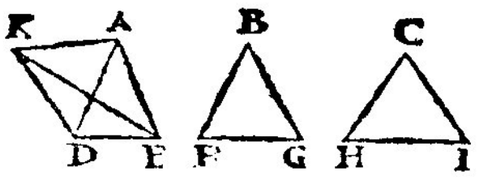
20. vndec. *gulis, maiores angulo C B F, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, ut dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in alijs omnibus angulis ſolidis.*

22. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, ut ex lineis æquales illas rectas

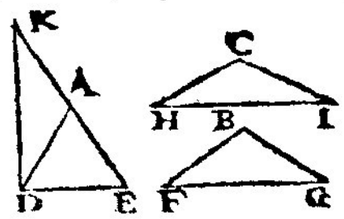
rectas cõnectentibus triangulũ cõſtituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulũ poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarũ D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ D E, F G, maiores ſint, quam H I, ita oſtẽdetur. Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primo A K, ad partes A D, ita ut fiat totus quidã angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compoſitus; quod quidẽ cõtinget, quãdo duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur autẽ A K, ipſi A D, æqualis, cõnectanturq; rectę K D, K E. Quoniã igitur latera A K, A D, triãguli A K D, æqualia ſunt lateribus B F, B G, triãguli B F G; & anguli ipſis cõtenti D A K, & B, æquales; erũt & baſes K D, F G, æquales. Rurſus quia latera A K, A E, triãguli A K E, æqualia ſunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quod duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; erit & baſis E K, maior baſe H I: Sunt autẽ rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multo maiores erũt E D, D K, quã H I. Cũ ergo D K, oſtẽſa ſit æqualis rectę F G; erũt quoq; D E, F G, maiores quã H I. quod eſt propoſitũ.



22. primi. 23. primi. 4. primi. 24. primi 20. primi.

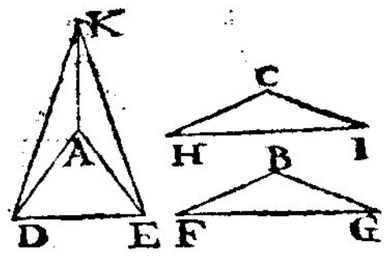
CADAT ſecundo A K, in rectum & cõtinuum ipſi A E; quod quidẽ accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturq; A K, ipſi A D, æqualis rursũ, & connectatur recta K D. Erit igitur, ut prius, K D, ipſi F G, æqualis. Quoniam uero rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æqualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: Hæ autem maiores ſunt, quam H I. Igitur multo maiores erunt E D, D A, quam H I. Cum ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi



4. primi. 20. primi. 20. primi

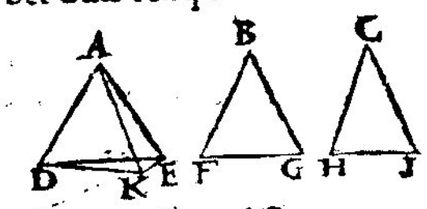
ipsi F G ; erunt quoque D E, F G, maiores quam H I. Quod est propositum.

CADAT postremo A K, ad partes A E, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec recta sit E A K; quod demum eueniet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponatur que rursum A K, ipsi A D, æqualis, & ducãtur rectæ K D, K E. Erit igitur, ut prius K D, ipsi F G, æ-



4. primi. qualis. Quoniam uero duæ D E, D K, maiores sunt dua-
21. primi. bus A E, A K; & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque D E, D K maiores quam C H, C I: Hæ autem maiores sunt, quam H I.
20. primi. Igitur multo erunt maiores D E, D K, quam H I. Cum ergo D K, ostensa sit æqualis ipsi F G; erunt quoque D E, F G, maiores quam H I. quod est propositum. Eodem modo concludemus D E, H I, maiores esse, quam F G,
22. primi. si angulus D A K, angulo C, fiat æqualis; Item F G, H I, maiores, quam D E. si angulo C, ad F G, constituatur angulus æqualis, &c. Quare ex tribus rectis D E, F G, H I, triangulum cõstitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; erũt quoque bases D E, F G, H I, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si uero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor;



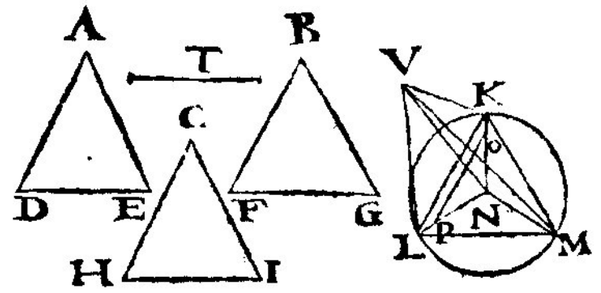
4. primi 24. primi. erunt quoque duæ illorum bases æquales, & basis tertij utraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales;
24. primi. erit quoque basis D E, omnium maxima. Quare D E, F G, maiores erunt quam H I: Item D E, H I, maiores, quam F G. Dico iam & rectas F G, H I, maiores esse recta
23. primi. D E. Fiat enim angulus D A K, æqualis angulo B, ponaturque A K, ipsi A D, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra

infra D E; propterea quod per puncta D, K, E, transeat circunferentia circuli ex A, ad interuallum A D, descripta, ob æqualitatem rectarum A D, A K, A E. Connectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis est angulo D A K, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, trianguli A D K, æqualia sunt lateribus B F, B G; trianguli B F G; & anguli ipsis contenti D A K, & B, æquales; erit basis D K, basi F G, æqualis. Rursus quia latera C H, C I, 4. primi. trianguli C H I, æqualia sunt lateribus A K, A E, trianguli A K E; & angulus C, ostensus maior angulo K A E; erit & basis H I, maior base K E. Quare cum D K, ostensa sit 24. primi. æqualis ipsi F G; erunt F G, H I, maiores quam D K, K E: Sed D K, K E, maiores sunt, quam D E. Igitur multo 20. primi. maiores erunt F G, H I, quam D E. Quod est propositũ.

PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

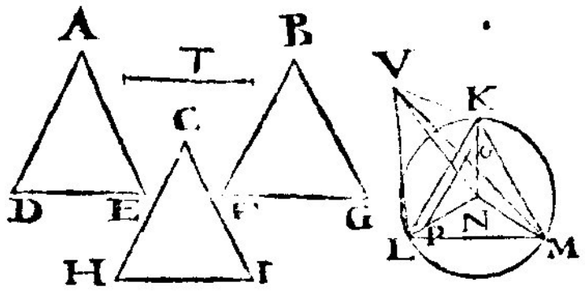
EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cõditione, ut quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum con tineatur tribus an gulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos cõprehendentes, nẽpe A D, A E, B F,



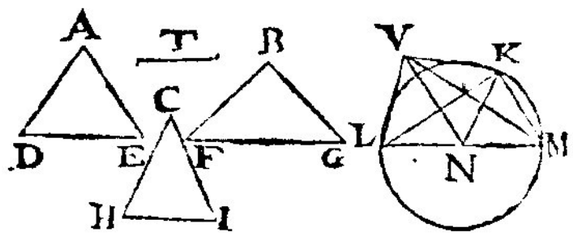
B G, C H, C I, æquales; subtendanturque bases D E, F G, H I. Fieri ergo potest, ut ex D E, F G, H I, triangulum con 22. undec stituatur.

ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triangulũ K L M, ſitq; latus K L, rectæ D E; latus L M, rectæ F G; & latus K M,
5. *quarti.* rectæ H I, æquale. Deſcribatur circa triangulum K L M, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectę N K, N L, N M. Eritq; quælibet rectarum angulos planos comprehendentiũ, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtenditur. Cadat primo centrũ N, intra triangulũ K L M; quod quidem fiet, quando triangulũ eſt oxygonium. Si igitur A D, A E, maiores non credantur, quã N K, N L, erũt uel æquales, uel minores. Sint ergo æquales. Quoniã igitur latera A D, A E, triãguli A D E,
8. *primi.* æqualia ſunt lateribus N K, N L, trianguli N K L; & baſis D E, baſi K L, æqualis: erit angulus A, angulo K N L, æqualis Eodẽ argumento erit angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1 erũt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur.n. quatuor rectis minores Non igitur æquales ſunt A D, A E, ipſis N K, N L. Dico quod neq; minores. Si.n. minores ſint A D, A E, quã N K, N L; abſcindantur N O, N P, ipſis A D, A E, æquales, ducaturq; recta O P. Quoniã igitur eſt ut N K, ad N O, ita N L, ad N P, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequentia ſint inter ſe æqualia; erunt
2. *ſexti.* latera N K, N L, trianguli N K L, ſecta proportionaliter; ac proinde O P, ipſi K L, parallela erit. Quare anguli N O P,
29. *primi.* N P O, angulis N K L, N L K, æquales erunt, & triangulum N O P, triãgulo N K L, æquiangulum. Igitur erit ut N K, ad
4. *ſexti.* K L, ita N O, ad O P. Eſt autẽ N K, maior quã N O. Igitur
14 *quinti* & K L, hoc eſt, D E, quę æqualis eſt ipſi K L, maior erit, quã O P. Quocirca cũ latera A D, A E, triãguli A D E, ſint æqualia lateribus N O, N P, triãguli N O P, & baſis D E, maior baſe
25. *primi* O P; erit & angulus A, maior angulo O N P. Eadẽ ratione angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, maior

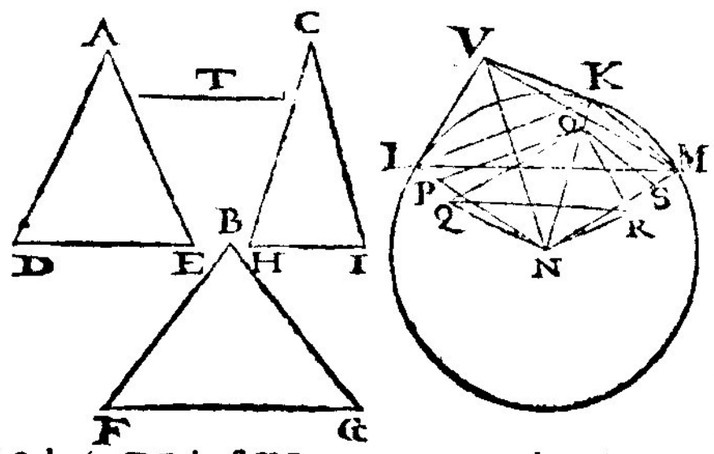


ior eſſe oſtendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum. ponuntur.n. quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt A D, A E, quã N K, N L; ſed neq; æquales: Igitur maiores.

Cadat ſecundo centrum N, in latus L M; quod tum continget, quando triangulum K L M, angulum L K M, habuerit rectum. Si igitur A D, A E, dicantur eſſe æquales ipſis N K, N L; erũt quo que B F, B G, æquales eiſdẽ N K, N L. Cum ergo N K, æqualis ſit ipſi N M; æquales erunt B F, B G, rectæ L M: Poſita autẽ fuit L M, æqualis ipſi F G. Igitur B F, B G, æquales quoq; ſunt rectæ F G. Sunt autẽ & maiores B F, B G, quã F G. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt A D, A E, ipſis N K, N L. Quod ſi A D, A E, minores credantur, quam N K, N L; erunt quoq; B F, B G, minores quã N K, N L. Cũ ergo N K, æqualis ſit ipſi N M; minores erunt B F, B G, quã recta L M: Poſita autem fuit L M, ipſi F G, æqualis. Igitur B F, B G, minores quoq; ſunt recta F G. Quod eſt abſurdum, cum ſint maiores. Non ergo minores ſunt A D, A E, quam N K, N L; ſed neque æquales: Igitur maiores.
20. *primi.*
20. *primi.*



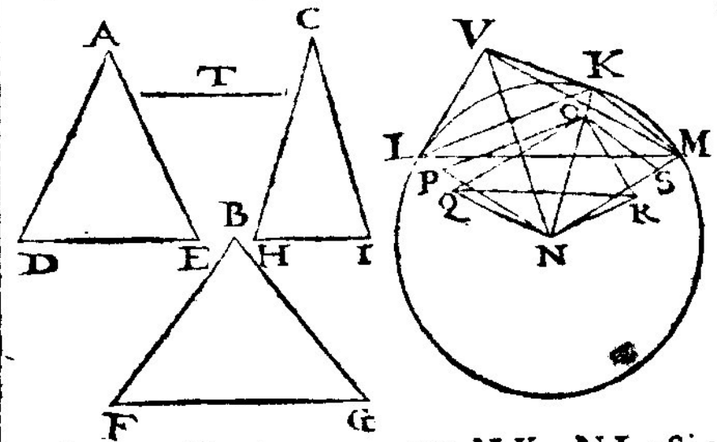
Cadat poſtremo centrũ N, extra triãgulum K L M, infra latus L M; quod demum accidet, quãdo angulus L K M, fuerit obtuſus. Si igitur dicãtur A D, A E, eſſe æquales ipſis N K, N L; cũ & baſis D E, baſi K L, ponatur æqualis; erit angulus A, angulo K N L, æqualis. Eadẽ ratione angulus C, angulo



8. *primi.*

lo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit: Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus L N M, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & basis L M, basi F G, æqualis; erit angulus L N M, angulo B, æqualis: Sed & maiore ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt A-D, A E, ipsis N K, NL. quod si A D, A E, credantur esse minores quam N K, N L; Si abscindantur N O, N P, ipsis A D, A E, æquales, & ducatur recta O P; demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, maior angulo O N P; & eadē ratione angulus C, maior angulo KNM. Fiat angulus O N Q, angulo A; & angulus O N R, angulo C, æqualis: ponanturque N Q, N R, æquales ipsis A D, A E, & connectantur O Q, O R; cadetq; O Q, infra O P, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circunferentia circuli ex N, ad interuallum N O, descripta, cum æquales sint rectæ N O, N P, N Q. Quare cum angulus P O N, æqualis sit angulo L K N, externus interno; erit angulus Q O N, minor angulo L K N. Eadem ratione ostendetur angulus N O R, minor angulo NKM, si ducatur O S, parallela ipsi K M. Cadet enim similiter O R, infra O S. Igitur totus angulus L K M, toto angulo Q O R, maior erit. Quoniam uero latera N O, N Q, trianguli N O Q, æqualia sunt lateribus A D, A E, trianguli A D E; Est autem & angulus O N Q, angulo A, æqualis, per constructionem; erit O Q, ipsi D E, hoc est, ipsi K L, æqualis. Eodem modo erit O R, ipsi K M, æqualis. Connexa iam recta Q R, cum latera K L, K M, trianguli L K M, æqualia sint lateribus O Q, O R, triāguli O Q R; & angulus

8. *primi.*



23. *primi*

29. *primi*

4. *primi*

& angulus L K M, maior angulo Q O R, ut ostendimus: erit basis L M, hoc est F G, maior basi Q R. Quoniam igitur latera B F, B G, trianguli B F G, æqualia sunt lateribus N Q, N R, trianguli N Q R; & basis F G, maior basi Q R; erit angulus B, maior angulo Q N R. Rursus quia angulus O N Q, angulo A; & angulus O N R, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus Q N R, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur angulus Q N R, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo Q N R. Non ergo minores sunt A D, A E, quam N K, N L; sed neque æquales: Igitur maiores.

24. *primi.*

25. *primi.*

IAM uero, cum rectæ A D, A E, maiores sint rectis N K, N L, ubicunque centrum N, existat; possit recta A D, plus quam recta N K, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita ut quadratum rectę A D, æquale sit quadratis rectarum N K, & T. Ex centro N, excitetur ad planum circuli K L M, perpendicularis N V, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ K V, L V, M V. Quoniam igitur N V, recta est ad planum circuli K L M, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas N K, N L, N M; ac proinde quadratum rectæ V K, quadratis rectarum K N, N V, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ A D, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum K N, N V; æqualia erunt inter se quadrata rectarū V K, & A D. Ac propterea æquales erunt rectæ V K, A D. Rursus quia latera V N, N K, trianguli V N K, æqualia sunt lateribus V N, N L, trianguli V N L; & anguli ipsis contenti V N R, V N L, recti; erit basis V K, æqualis basi V L; Atq; eadem ratione rectæ V M. Quare tres rectæ V K, V L, V M, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta V K, æqualis rectæ A D. Tres ergo rectæ V K, V L, V M, æquales sunt rectæ A D, & ob id, rectis A E, B F, B G, C H, C I. Quamobrem, cum latera V K, V L, trianguli V K L, æqualia sint lateribus A D, A E, trianguli A D E; & basis K L, basi D E; erit angulus K V L, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum L V M, angulo B; & angulum K V M, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis K V L, L V M, M V K,

12. *undec.*

47. *primi.*

4. *primi.*

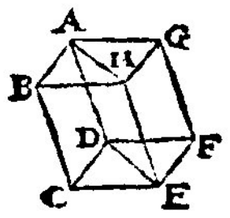
8. *undec.*

qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligẽda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris A C, C F, F H, H A, A F, B E, quarũ aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma, ſimilia, & æqualia. Cum enim parallela plana B G, C F, ſecentur plano A C; erunt communes ſectiones A B, D C, parallelæ. Similiter cum plana parallela A F, B E, ſecentur plano A C; erunt communes ſectiones A D, B C, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera A B C D. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ A B, B H, parallelæ ſint rectis D C, C E, & non in eodem plano, ſed in oppoſitis; erunt anguli A B H, D C E, æquales; eodemq; argumento reliqui anguli parallelogrammi B G, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi C F. Quoniam vero A B, ipſi D C, in parallelogrammo A C; & B H, ipſi C E, in parallelogrammo B E, æqualis eſt; erit vt A B, ad B H, ita D C, ad C E; Ac propterea ut B H, ad H G, ita C E, ad E F, &c. eadẽ de cauſa: Erunt latera parallelogrãmorũ B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipſa ſimilia. Ductis iã diametris A H, D E; cũ latera A B, B H, triãguli A B H, æqualia ſint lateribus D C, C E, triãguli D C E; & angul⁹ A B H, angulo D C E, æqualis, ut oſtẽſum eſt; erũt triãgula A B H, D C E, æqualia inter ſe. Quare cũ triãgula A B H, D C E, dimidia ſint parallelogrãmorũ B G, C F; erũt parallelogrãma B G, C F, inter ſe æqualia. Similiter demõſtrabim⁹, ſimilia & æqualia eſſe parallelogrãma oppoſita A C, G E; & A F, B E. Si ſolidũ ergo parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia. Quod erat demonſtrandum.

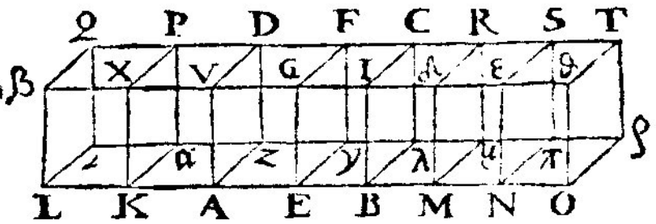


16. undec.
10. undec.
34. primi.
34. primi.
10. undec.
4. primi.
34. primi.

25. THEOR. 22. PROPOS. 25.

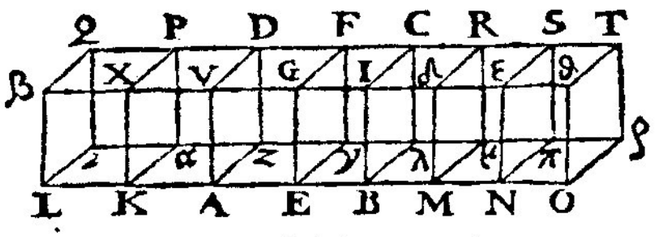
SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodũ baſis ad baſim, ita ſolidũ ad ſolidũ.

SECETVR parallelepipedũ A B C D, plano E F, parallelo oppoſitis planis A D, B C. Dico ut eſt baſis A G, ad baſin B G, ita eſſe ſolidũ A E F D, ad ſolidũ B E F C. Intelligatur enim parallelepipedũ A B C D, productũ in utramq; partẽ quantumlibet, ſumãturq; in A B, protracta quotcunq; rectæ A K, K L, ipſi A E; & quotcunq; rectæ B M, M N, N O, ipſi E B, æqua. Deinde per pũcta K, L, M, N, O, ducantur plana K P, L Q; M R, N S, O T, parallela planis A D, E F, B C, p ſcholion ,ppoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidũ A E F D, cõtinetur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum erit parallelepipedũ, ex definitione, habebitq; plana oppoſita, parallelogrãma, ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda A K P D, K L Q P; E B C F, B M R C, M N S R, N O T S; E L Q F, E O T F; habebũtq; plana oppoſita, parallelogrãma, ſimilia, & æqualia. Quoniam uero parallelogrãma A G, K V, L X, cũ ſint ſup æquales baſes A E, A K, K L, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;, cũ anguli unius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma A Y, K Z, L α. Cũ igit æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma A D, K P, L Q; Erũt tria plana A G, A Y, A D, ſolidi A E F D, æqualia, & ſimilia tribus planis K V, K Z, K P, ſolidi A K P D; & tribus planis L X, L α, L Q, ſolidi K L Q P: Sunt autem tria in unoquoque



24. undec.
36. primi.
29. primi.

24. undec. que ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodem, nempe A G, ipſi Z F; & A Y, ipſi V F; & A D, ipſi E F, &c. Igitur per defin. 10. huius libri, æqualia ſunt ſolida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida E B C F, B M R C, M N S R,

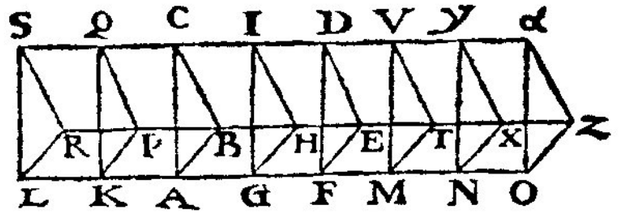


N O T S. Quare quam multiplex eſt baſis L G, baſis A G, tam multiplex erit ſolidum L E F Q, ſolidi A E F D; Et quam multiplex eſt baſis O G, baſis B G, tam multiplex erit ſolidum O E F T, ſolidi B E F C. Quoniam uero ſi baſis L G, (multiplex baſis A G, primę magnitudinis,) æqualis eſt baſi O G, (multiplici baſis B G, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum L E F Q, (multiplex ſolidi A E F D, tertiæ magnitudinis) ſolido O E F T, (multiplici ſolidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus L G, O G, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſint & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi L E F Q, ſex parallelogrammis ſolidi O E F T: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut baſis A G, prima magnitudo, ad baſin B G, ſecundam magnitudinem, ita ſolidum A E F D, tertia magnitudo, ad ſolidum B E F C, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, ut eſt baſis D Y, ad baſin C Y; & ut baſis A Y, ad baſin B Y; & ut baſis D G, ad baſin C G. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

HAEC propoſitio accommodari etiam poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma A B C D E F, cuius plana aduerſa ſint triangula A B C, D E F; ſecetur q; plano G H I, aduerſis

uerſis planis parallelo. Dico ut eſt baſis A I, ad baſin F I, ita eſſe ſolidum A B C I H G, ad ſolidum F E D I H G. Intelligatur priſma A B C D E F, in utramque partem quantumlibet productum, & ex A F, protracta utrinq; capiantur quot cũq; rectæ A K, K L, ipſi A G;



& quotcunque rectæ F M, M N, N O, ipſi F G, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana K P Q, L R S; M T V, N X Y, O Z α, parallela planis A B C, G H I, F E D, per ſcholion propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela A B C, G H I, ſecantur plano A I; erunt communes ſectiones A C, G I, parallelæ: Sunt autem & A G, C I, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum A D. Igitur parallelogrammum eſt A I. Rurſus quia plana parallela A B C, G H I, ſecantur plano A H; erunt communes ſectiones A B, G H, parallelæ: Sunt autem & A G, B H, parallelæ, ob parallelogrammum A E. Igitur parallelogrammum eſt A H. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur C H. Quoniam uero latera A C, A B, trianguli A B C, æqualia ſunt lateribus G I, G H, trianguli G H I, cum A C, ipſi G I, & A B, ipſi G H, ſit æquale; & anguli C A B, I G H, ſunt quoque æquales, eo quod rectæ C A, A B, parallelæ ſint rectis I G, G H, & non in eodem plano: Erunt triangula A B C, G H I, æqualia inter ſe, & æquiangula. Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Ac idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum A B C I H G, contentum duobus planis oppoſitis A B C, G H I, æqualibus & ſimilibus, atque parallelogrammis A I, I B, B G, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt A B C Q P K, K P Q S R L; F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O, L R S I H G, O Z α I H G. Quoniam vero parallelogramma A I, K C, L Q, æqualia ſunt & ſimilia; necnon A H, K B, L P; & C H, Q B, S P; Erũt omnia plana priſmatis A B C I H G, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatum A B C Q P K, K P Q S R L. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt priſmata A B C I H G, A B C Q P K, K P Q S R L. Eadem ratione æqualia erunt

16. undec.

16. undec.

34. primi.

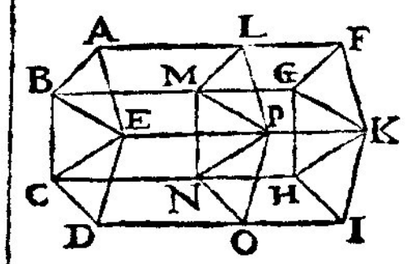
10. undec.

4. primi.

4. ſexti.

prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; Et quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma OZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia uero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis;) æquale quoq; est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sint & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin 6. lib. 5. ut basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, ut est basis AH, ad basin FH: & ut basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT secundo prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secenturq; plano LMNOP. Dico rursus, ut est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit ut basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit ut basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, 1. *sexti. ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, ut CN, ad NH; Et ut CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LM-*



LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se. Vt autem unum ad unum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit ut prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, ut basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate. 12. *quinti.*

POTEST *tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua usi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in utranque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia; propterea quod latera eorum sint parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; ac proinde angulos æquales cõprehendant, &c. Vnde, ut prius, ostendentur prismata ex una parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.* 16. *undec.* 10. *undec.*

COROLLARIVM.

Ex his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante; Sectionem esse figuram æqualem, & similem planis oppositis: Velut demonstratum est, in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

PROBL. 4. PROPOS. 26. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, cõtẽto trib⁹ angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existẽtibus. Ducat ex F, ad planũ p CD, CE, ductũ perpẽdicularis FG; 11. *undec.*

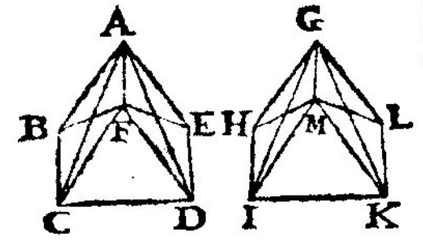
connectanturq; rectæ D F, D G, E F, E G, C G. Deinde
23. *primi.* abſcindatur A H, æqualis ipſi C D, fiatq; angulus H A I, angulo D C E, æqualis; & recta A I, rectæ C E, æqualis. Rurſus in plano per A H, A I, ductum conſtituatur angulus H A L, angulo D C G, qui in plano per C D, C E, ducto exiſtit; & recta A L, rectæ C G, æqualis. Ex L, vero ad planum, in quo ſunt
12. *undec.* tres A H, A L, A I, erigatur perpendicularis L K, quæ ipſi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulum ſolidum A, contentum tribus planis angulis H A I, H A K, K A I, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis enim rectis H K, H L, I K, I L; cum latera A H, A L, trianguli A H L, æqualia ſint lateribus C D, C G, trianguli C D G; & anguli H A L, D C G, æquales, per conſtructionem; Erunt baſes
4. *primi.* H L, D G, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus H A L, D C G, ab æqualibus H A I, D C E, reliqui æquales ſunt L A I, G C E: Cum igitur & latera A L, A I, trianguli A L I, æqualia ſint lateribus C G, C E, trianguli
4. *primi.* C G E, per conſtructionem; æquales quoque erunt baſes L I, G E. Quia igitur latera L H, L K, æqualia ſunt lateribus G D, G F; & anguli H L K, D G F, recti, ex defin. 3.
4. *primi.* huius lib. erunt & baſes H K, D F, æquales. Quare cum & latera A H, A K, trianguli A H K, ſint æqualia lateribus
8. *primi.* C D, C F, ex conſtructione; Erunt quoque anguli H A K, D C F, æquales. Denique quia latera L I, L K, ſunt æqualia lateribus G E, G F; & anguli I L K, E G F, recti, ex
4. *primi.* defin. 3. huius lib. Erunt baſes I K, E F, æquales: Cum igitur & latera A I, A K, trianguli A I K, lateribus C E, C F, trianguli C E F, ſint æqualia, ex conſtructione; Erunt quo-
8. *primi.* que anguli I A K, E C F, æquales. Sunt ergo tres anguli plani H A I, H A K, K A I, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis D C E, D C F, F C E, angulum ſolidum C, componentibus; Atque proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaq; rectam lineam, eiuſq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendū.

SCHO

SCHOLION.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in uno eodemq; exiſtentes plano, (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramiſq; quædã multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilaterę, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; cõſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

VT ſi angulo ſolido A, *contento quinque angulis planis* B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, *conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendendæ ſunt angulis planis rectæ* B C, C D, D E, E F, F B, *ut fiat pentagonum* B C D E F, *quod in tria triangula reſoluatur* B C F, F C D, D E F. *Deinde ſolido angulo* A, *contento tribus planis angulis* B A C, C A F, F A B, *conſtituendus ſolidus angulus æqualis* G, *contentus tribus angulis planis* H G I, I G M, M G H. *Et ſolido angulo* A, *contento tribus planis angulis* C A F, F A D, D A C, *æqualis ſolidus angulus* G, *contentus tribus angulis planis* I G M, M G K, K G I. *Et denique angulo ſolido* A, *contento tribus angulis planis* D A E, E A F, F A D, *æqualis ſolidus angulus* G, *contentus tribus planis angulis* K G L, L G M, M G K. *Ita enim fiet totus angulus ſolidus* G, *toti angulo ſolido* A, *æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.*

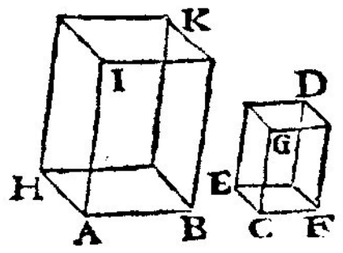


PROBL. 5. PROPOS. 27. 27.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere:

SIT

SIT a data recta A B, describendum parallelepipedum simile, similiterq; positum parallelepipedo C D. Fiat ad rectam A B, eiusq; punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani H A I, I A B, B A H, æquales sint tribus angulis planis E C G, G C F, F C E. Deinde ut est C F, ad C G, sic fiat A B, ad A I; & ut C G, ad C E, ita A I, ad A H; eritq; ex æquo, ut C F, ad C E, ita A B, ad A H. Post hæc, perficiatur parallelepipedū A K, completis nimirum parallelogrammis B H, H I, I B, & per I, B, H, ductis planis I K, B K, H K, quæ parallela sint parallelogrammis B H, H I, I B. Dico parallelepipedum A K, parallelepipedo C D, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli B A H, F C E, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut B A, ad A H, ita F C, ad C E, ex constructione; erunt parallelogramma H B, E F, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma H I, E G; & I B, G F. Tria igitur plana B H, H I, I B, solidi A K, similia sunt, similiterq; posita tribus planis F E, E G, G F, solidi C D. Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi A K, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi C D; Ac proinde, ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida A K, C D. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum.



26. *undec.*

12. *sexti.*

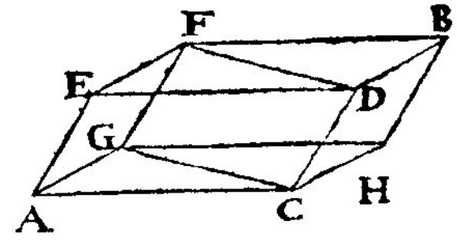
24. *undec.*

28. THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum A B, in quo plana opposita sint A H,

A H, E B, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ C G, D F. Quoniam igitur utraque C D, G F, parallela est, & æqualis ipsi A E, cum sint parallelogramma C E, G E; erunt & inter se parallelæ, & æquales C D, G F. Ac proinde, quæ ipsas coniungunt C G, D F, parallelæ erunt, & æquales, ideoq; in uno plano. Dico planū quod per C G, D F, ducitur, secare bifariam parallelepipedum A B. Cum enim plana A H, E B, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula A G C, G C H; E F D, F D B, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales G A C, C H G; F E D, D B F, proportionalia, Igitur similia quoque erunt dicta triangula. Cum igitur & parallelogrammum A F, æquale sit & simile parallelogrammo C B; & A D, ipsi G B; & C F, commune: Erunt duo triangula A G C, E F D, & parallelogramma A F, A D, C F, prismatis A C G F E D, æqualia & similia duobus triangulis H C G, B D F, & parallelogrāmis C B, B G, C F, prismatis H G C D B F; propterea que prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum A B, sectum erit parallelepipedum A B, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



34. *primi.*

9. *undec.*

33. *primi.*

6. *sexti.*

24. *undec.*

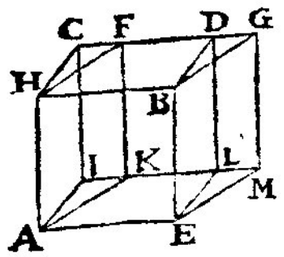
THEOR. 24. PROPOS. 29.

29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin A B, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem

eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda A C D E, A F G E, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in ijſdem collocentur lineis, nempe A I, A K, E L, E M, in recta I M; & H C, H F, B D, B G, in recta C G. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. Cum enim æqualia ſint parallelogramma A L, A M, ſuper eadem baſi A E, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quæ quæ triangula AIK, ELM. Quoniam uero omnia latera trianguli A I K, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli H C F; erit triangulum A I K, triangulo H C F, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. lib. 1. oſtendimus; Ac proprterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoq; inter ſe erũt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & ſimile. Rurſus quia parallelogrammum AC, æquale eſt, & ſimile parallelogrammo E D; & eadem ratione parallelogrammum A F, parallelogrammo E G; Sed & I F, ipſi L G, cum baſes I K, L M, ſint æquales, (Nam cum rectæ I L, K M, æquales ſint ipſi A E, erunt quoque inter ſe æquales; quare communi dempta K L, æquales erunt I K, L M.) Erunt omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis E L M G D B. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido A H F K L D B E, æqualia fient parallelepipeda A C D E, A F G E. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



35. *primi.*

34. *primi.*

4. *ſexti.*

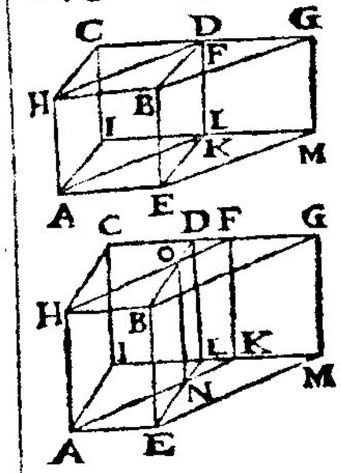
24. *undec.*

36. *primi.*

34. *primi.*

SCHOLION.

HAEC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem fere medijs, dummodo loco trianꝑgulorum aſſumantur priſmata, ut ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel ultra L, eodem modo demonſtrabuntur, ut in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu ſi ex parallelogrammis æqualibus A L, A M, auferatur triangulum commune A L E, erunt reliqua triangula A I K, E L M, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata A I K F C H, E L M G D B. Addito ergo priſmate cõi A K E B H D, æqualia fiẽt parallelepipeda A C D E, A F G E.



IN tertio uero caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus A L, A M, dematur triangulum commune A N E, erunt reliqua trapezia A I L N, N K M E, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune K L N, tota triangula A I K, E L M, æqualia fient. Vnde, ut prius, æqualia erunt priſmata A I K F C H, E L M G D B; a quibus ſi auferatur priſma commune K L N O D F; (Nam communis ſectio planorum A F, D E, eſt recta N O.) remanebit ſolidum comprehenſum planis A I L N, N O H A, A I C H, H C D O, C D L I, D L N O, æquale ſolido contento planis E N K M, M K F G, G F O B, F K N O, B G M E, E B O N. Si igitur addatur vtrique priſma cõmune A E N O B H; fient parallelepipeda A C D E, A F G E, inter ſe æqualia.

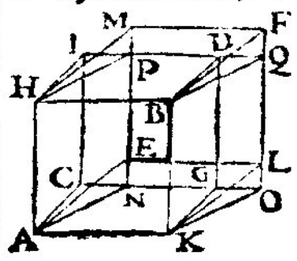
THEOR. 25. PROPOS. 30.

30.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ nõ ĩ ijſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin A B, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadẽ plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda A I L K, A M F K, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes A C, A E, K G, K L; H I, H M, B D, B F, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque C I, G D, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque C G, I D, productæ,

ctæ, &c. Dico parallelepipeda A I D K, A M F K, esse æqualia. Cum enim plana C D, E F, opposita basi A B, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum C G, secet E M, L F, protractas in punctis N, O; Et I D, easdem in punctis P, Q; adiungantur-



34. *primi.* que rectæ A N, K O, H P, B Q. Quia igitur rectæ P Q, M F, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo F P; & M F, ipsi H B, est æqualis; erunt & P Q, H B, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter
33. *primi.* parallelogrammum H I D B. Igitur & H P, B Q, parallelæ sunt & æquales, ideoq; parallelogrammum est H P Q B. Eadem ratione parallelogramma erunt H P N A, A N O K, K O Q B: Est autem & parallelogrammum N O Q P. Igitur parallelepipedum est A P Q K. Quamobrem paral-
29. *undec.* lelepipedum A I D K, æquale est parallelepipedo A P Q K, cum utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem C O, I Q. Eodem modo eidem parallelepipedo A P Q K, æquale erit parallelepipedum A M F K, cū utriusque eadem sit basis A B, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem N M, O F. Quare parallelepipeda A I D K, A M F K, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CONVERTETVR *hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.*

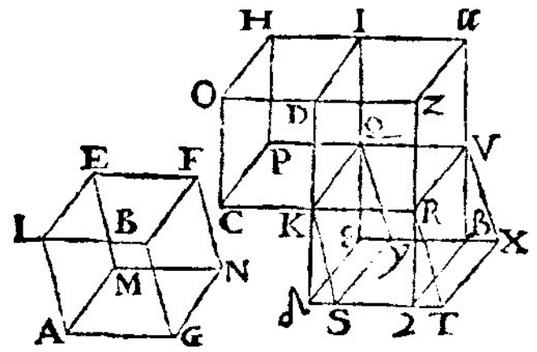
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM *si unum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo po-* 29. vel 30. *undec.*
natur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

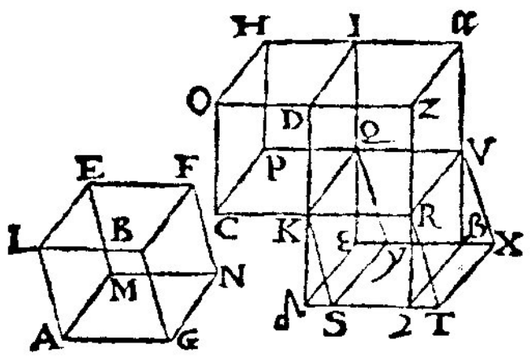
SVPER æquales bases A B, C D, in eadē altitudine sint constituta parallelepipeda A E F G, C H I K. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint. n. primū insistentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad basin A B; & insistētes C P, K Q, O H, D I, ad basin C D, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpēdiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur C K, in rectum, sitq; K R, æ-



qualis ipsi L B, & fiat angulus R K S, in plano O K, extenso æqualis angulo B L A, ponaturq; K S, æqualis ipsi L A; & perficiatur parallelogrammum K T, super quod, ad altitudinē perpendicularis K Q, construatur parallelepipedū Q S T V. Quoniam igitur latera K R, K S, æqualia sunt lateribus L B, L A, & anguli R K S, B L A, æquales; erunt parallelogramma K T, L G, æqualia & similia. Rursus quia latera K Q, K S, æqualia sunt lateribus L E, L A; & anguli Q K S, E L A, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod A Q, L E, rectæ ponantur ad plana K T, L G; erunt & parallelogramma Q S, E A, æqualia & similia. Eodem modo cum latera K R, K Q, æqualia sint lateribus L B, L E, & anguli Q K R, E L B, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoq; parallelogramma K V, L F, æqualia & similia. Quare cū tria plana K T, Q S, K V, parallelepipedi Q S T V, æqualia sint & similia trib⁹ planis L G, E A, L F, parallelepipedi A E F G; Tā aūt illa, quā hęc æqualia sint & simi- 24 *undec.*

24. *undec.* & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda Q S T V, E A G F, inter se æqualia.

CONVENIANT rectæ D K, T S, productæ in ♂; & I Q, X Y, in ε; compleaturq; parallelepipedum Q ♂ γ V. Itē H I, ℓ V, protractæ conuenient in α; & O D, γ R, in Z, perficiaturq; parallelepipedum I ♌ R α. Quoniam igitur parallelepipeda Q S T V, Q ♂ γ V, randē habent basin K V, suntq; in eadem altitudine, nempe inter eadē plana parallela K V, ♂ X, & insistentes ipsorum lineæ K S, K ♂, R T, R γ; Q Y, Q ε, V X, V ℓ, collocantur in eisdem rectis ♂ T, ε X; ipla



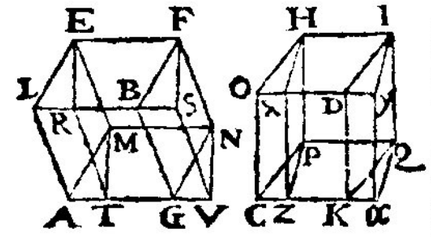
29. *undec.* inter se æqualia erunt. Est autē parallelepipedum Q S T V, parallelepipedo E A G F, æquale: Igitur eidem parallelepipedo E A G F, æquale erit parallelepipedum Q ♂ γ V.

35. *primi.* QVONIAM vero parallelogramma ♌ T, K γ, æqualia sunt inter se; & ♌ T, æquale est ipsi L G, erit & ♌ γ, ipsi L G, hoc est, ipsi C D, æquale; cum bases L G, C D, ponantur æquales. Quare erit, vt C D, ad D R, ita K γ, ad D R: Vt autē C D, basis ad basin D R, ita est solidū C H I K, ad solidum K I α R; cum parallelepipedum C H α R, secetur plano I K, planis oppositis C H, α R, parallelo: Et eadem ratione ut K γ, ad D R, ita est solidum Q ♂ γ V, ad solidum I K R α; cum & parallelepipedū I ♂ γ α, secetur plano K V, oppositis planis D α, ♂ ♌, parallelo. Igitur æqualia erunt parallelepipeda C H I K, Q ♂ γ V; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum I K R α. Quare cum parallelepipedum Q ♂ γ V, sit ostensum æquale parallelepipedo A E F G; æqualia quoque erunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Quod est propositum.

7. *quinti.*
25. *undec.*
9. *quinti.*

SINT iam neque insistentes lineæ A M, G N, L E, B F, ad basin A B; neque C P, K Q, O H, D I, ad basin C D, perpendiculares: Et a punctis E, F, M, N, demittantur E R, F S, M T, N V, ad planum, in quo basis A B, perpendiculares; Item a punctis H, I, P, Q, ad planum, in quo basis C D,

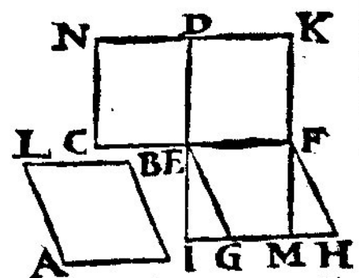
C D, perpendiculares H X, I Y, P Z, Q α. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ R S, S V, V T, T R: Item rectæ X Y, Y α, α Z, Z X, ut fiāt parallelepipeda E T-V F, H Z α I, quæ cū sint eiusdē altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. Sed parallelepipedum E T-V F, æquale est parallelepipedo A E F G, cum hoc eandem cum illo habeat basin E N, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum H Z α I, æquale est eadem ratione parallelepipedo C H I K, cum hoc eandem cum illo basin H Q, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda A E F G, C H I K. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat,



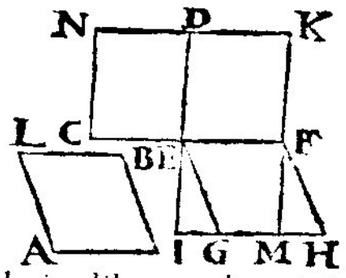
29. *uel* 30. *undecimi.*

SCHOLION.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases A B, C D, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturque



ficiaturque parallelogrammum E H, quod æquale erit, & simile parallelogrammo A B. Conuenia: autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam uero intelligantur super bases E H, I F, E K, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super A B, C D, constructis; sintq; insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super E H, æquale esse ac simile solido super A B, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint et similia planis huius, per constructionem: Sunt autem & æqualia parallelepipeda super E H, I F, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus E F, erectam super planum I K; Item plana basi opposita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H; atque insistentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eisdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedũ super I F, parallelepipedo super A B. Quoniam vero parallelogramma E H, I F, æqualia sunt; & E H, æquale est ipsi C D: æqualia erunt I F, C D. Erit igitur, ut I F, ad E K, ita C D, ad E K: Est autem vt I F, ad E K, ita solidum super I F, ad solidum super E K, quod solidum super I K, secetur plano super E F, erecto parallelo planis super D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K, cum solidum super C K, secetur plano super D E, erecto parallelo planis super C N, F K, erectis. Quare erit vt solidum super I F, ad solidum super E K, ita solidum super C D, ad solidum super E K; Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super I F, & C D. Ostensum est autem parallelepipedum super I F, æquale parallelepipedo super A B. Aequalia ergo erunt et parallelepipeda super A B, C D. Quod est ꝓpositũ.



29. undec.

35. primi
7. quinti.
25. undec.

9. quinti.

CONVERTETVR quoque hac propos. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia, super æquales bases, in eadẽ sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadẽ altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin:

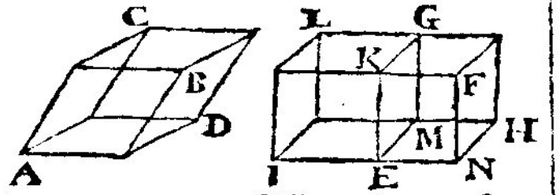
Si enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine; fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum. 31. undec.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; demonstrabimus eodem modo, partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.

SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiusdem altitudinis super bases A B, E F. Dico esse solidum ad solidũ, ut est basis ad basin. Super rectam enim E K, construatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, q̃ sit ęqualis angulo E N F. Constituent autem parallelogrãma E F, I F, totum parallelogrammum unum F I, ut in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producantur ad partes E G, perficiaturque totum unum parallelepipedum I F L H; erunt parallelepipeda A B C D, I K-L M, æqualia, cum habeant ęquales bases, per constructionem A B, I K; & eandem altitudinem, ex hypothesi. Quare erit ut solidum I K L M, ad solidum E F G H, ita solidũ A B C D, ad solidum E F G H: Est autem solidum I K L M, ad solidum E F G H, ut basis I K, hoc est, illi æqualis basis A B, ad basin E F. Igitur & solidum A B C D, erit ad solidum E F G H, ut basis A B, ad basin E F. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.



45. primi.

31. undec.

7. quinti.

25. undec.

SCHOLION.

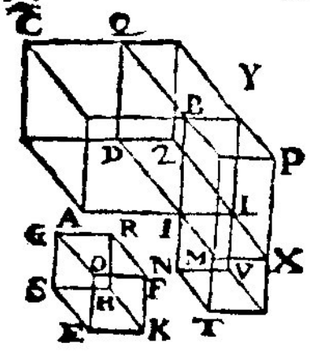
CONVERSO *modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, ut baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum; eritque ut baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum. Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.*

32. unde c. 9. quinti.

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda A B C D, EFGH, ſuper baſes ſimiles A B, E F, in quibus latera homologa ſint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & ſit I L, æqualis ipſi E K, uel G R; Item D I, ad M, & ſit I M, æqualis ipſi H K, uel G O; Item B I, ad N, & ſit I N, æqualis ipſi K F, uel G S. Deinde completis parallelogrammis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam uero latera I L, I M, æqualia ſunt lateribus G R, G O; & anguli contenti æquales, cum angulus L I M, ſit æqualis angulo A I D, qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis eſt angulo E K H, ſeu R G O: Erunt parallelogramma I X, G F, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt & æqualia L N, R S; Item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G H: Sunt autem tria cuiuſque ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt, & ſimilia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rurſus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur, ob ſimilitudinem parallelepipedorum A B C D, E F G H, eſt ut A I, ad E K, hoc eſt, ad I L, ita D I, ad H K, hoc eſt, ad I M; & B I, ad F K, hoc eſt, ad I N. Vt autem A I, ad I L, ita eſt parallelogrammum A D, ad D L; Et ut D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & ut B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit ut A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. Sed ut A D, baſis ad D L, baſin, ita eſt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q: & ut baſis D L, ad baſin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P: Et ut baſis B L, ad baſin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, ut parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedũ L N T X. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc eſt, ad E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad ſecundam D L Y Q, ex definitione 10. lib. 5. Vt autem A D C B, ad D L Y Q, ita eſt baſis A D, ad baſin D L; Et ut A D, ad D L, ita eſt recta A I, ad I L, hoc eſt, ad E K. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, eſt triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonſtrandum.



15. primi.

24. undec.

32. undec. 1. ſexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonſtratum eſt, quam prima linea ad quar-

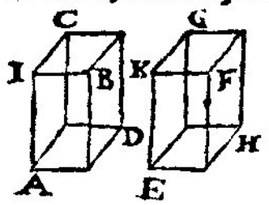
8. ſexti.

tam, ex definitione 10.lib.5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirũ laterum homologorũ.

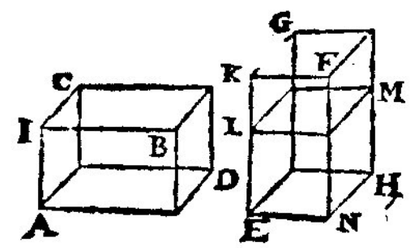
34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda A D C B, EHGF, super bases A D, E H. Dico bases A D, E H, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem solidi A DCB. Sint enim primo insistentes lineæ A I, E K, perpendiculares ad bases A D, E H, ita ut A I, E K, sint per defin. 4.lib.6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines A I, E K, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31.huius lib. ostendimus. Quare erit, ut basis A D, ad basin E H, ita altitudo E K, ad altitudinem A I. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines A I, E K, inæquales fuerint; sit E K, maior, ex qua abscindatur E L, ipsi A I, æqualis; & per L, ducatur planum L M, parallelum basi E H, per scholion propos. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida A DCB, E H G F; erit ut A D C B, ad solidum E H-M L, ita EHGF, ad idem solidum E H M L: Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin E H, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et ut solidum E HGF, ad solidum E H-



7. quinti.

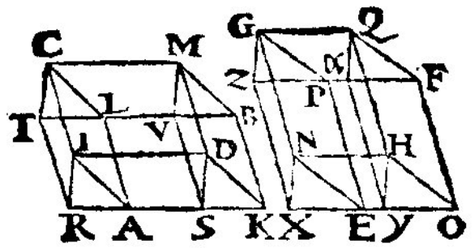
32. undec.

EHML, ita est, eadem ratione, basis K N, ad basin LN, cum hac ratione solida E H G F, E H M L, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur K N, L N; Erunt enim inter eadem plana parallela K N, G H. Igitur erit ut basis A D, ad basin E H, ita basis K N, ad basin L N: Sed ut K N, ad L N, ita est recta E K, ad rectam E L, hoc est, ad A I, ipsi E L, æqualem. Quare erit ut basis A D, ad basin E H, ita altitudo E K, ad altitudinem A I; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines. 1. sexti.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines E K, A I, sunt æquales; cum sit basis A D, ad basin E H, ut altitudo E K, ad altitudinem A I, ex hypothesi; erunt & bases A D, E H, æquales. Quare parallelepipeda A DCB, EHGF, cũ æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt. 31. undec.

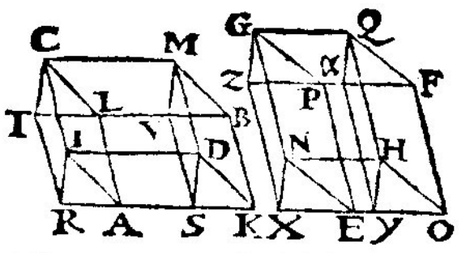
QVOD si altitudo E K, maior fuerit, abscindatur E L, ipsi A I, æqualis, & per L, ducatur planum L M, parallelum basi E H. Quia igitur ex hypothesi est, ut basis A D, ad basin E H, ita altitudo E K, ad altitudinem A I, hoc est, ad E L, ipsi A I, æqualem; Vt autẽ basis A D, ad basin E H, ita est solidum A DCB, ad solidum E H M L, cum altitudines A I, E L, æquales ponantur; Et ut E K, ad E L, ita est K N, ad L N; Vt autem basis K N, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur K N, L N; Erunt enim hac ratione inter plana parallela K N, G H: Erit ut solidum A DCB, ad solidum EHML, ita solidum E H G F, ad idem solidum E H M L; ideoque æqualia erunt solida A D C B, E H G F. 32. undec. 1. sexti. 32. undec. 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda A B C D, EFGH, æqualia, quorũ insistentes lineæ A I, K D, B M, LC; EN, OH, FQ, PG, nõ sint perpendiculares ad bases AB EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planum basis A B, perpendiculares I R, D S, M V, C T; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis E F, perpen-



V 4 diculares

diculares N X, H Y, Q α, G Z; connectanturque rectæ R S, T V, R T, S V; X Y, Z α, X Z, Y α: Eruntque perpend culares R I, X N, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib 6. Dico rursus, ut basis A B, ad basin E F, ita esse altitudinẽ X N, ad altitudinem R I. Cum enim æqualia sint solida A B C D, E F G H, ex hypothesi, sit autem



29. uel 30. undecimi. A B C D, æquale solido R V C D, eo quod habeant eandem basin C D, eandemque altitudinem R I; & E F G H, eadẽ ratione, æquale solido X α G H: Erunt & parallelepipeda R V C D, X α G H, æqualia Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases C D, G H; erit, ut iam demonstratum est, ut basis C D, ad basin G H, hoc est, ut basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Cõstructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis A B, ad basin E F, ita altitudo X N, ad altitudinem R I; Sit autẽ A B ipsi C D, & E F, ipsi G H, æqualis; Erit quoque ut basis C D, solidi R V C D, ad basin G H, solidi X α G H, ita altitudo X N, ad altitudinem R I. Quare, cum X N, R I, sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases C D, G H; erunt, ut iam ostensum est, æqualia parallelepipeda R V C D, X α G H: Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis A B C D, E F G H, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda A B C D, E F G H: Idemque ostendetur, si insistentes lineæ unius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius uero non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

24. undec.

29. uel 30. undecimi.

SCHOLION.

OMNIA hæc quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque

quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruẽtur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, uel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, uel æquales bases existentia. Quare æqualia erunt huiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia. 29. 30. uel 31. undec.

RVRSVS, *si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis, adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. Quare erit parallelepipedũ ad parallelepipedũ, ut basis ad basin; Atq; adeo prisma ad prisma, nempe dimidium unius parallelepipedi, ad dimidium alterius, ut eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe ut triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.* 32. undec. 15. quinti

PRAETEREA, *si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituẽtur duo parallelepipeda similia, quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.* 33. undec. 15. quinti

DENIQVE *si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem altitudinum cum prismatis. Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eædem sint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatũ & eorum altitudines reciprocæ.* 34. undec. 15. quinti

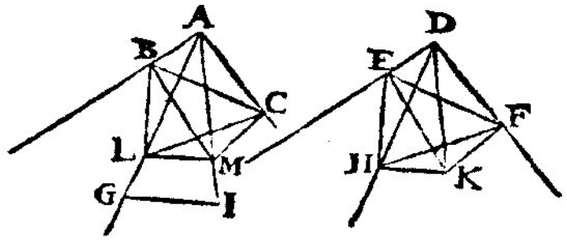
THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ uerticibus sublimes rectæ lineæ in-

sistant,

siſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ ſuerint perpendiculares; a punctis uero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum uerticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ A G, D H, ita ut angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A G, angulo F D H, ſit æqualis. A ſumptis autem punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, exiſtunt, perpẽdiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, eſſe æquales inter ſe. Nã ſi A G, D H, ſunt inæquales, auferatur a maiori A G, ipſi D H, æqualis linea A L; & ex L, ad planum anguli B A C, perpendicularis demittatur L M. Quoniam igitur G I, L M, rectæ ſunt ad planum anguli B A C, ipſæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli A G I. Quare L M, cadet in rectam A I. Ducantur iam ex punctis M, K, ad rectas A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F; & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta eſt ad planum anguli B A C, ipſa rectum angulum efficiet cum recta A M, in eodem plano ducta, per defin. 3. huius lib. Quare quadratum rectę

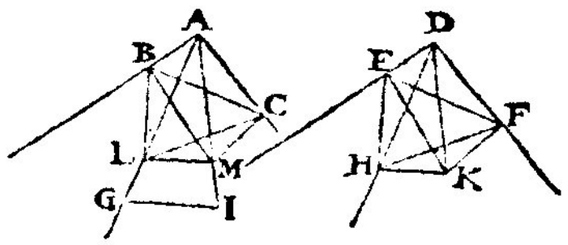


6. undec.

rectæ A L, æquale erat quadratis rectarum A M, M L: 47. primi.
Eſt autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A C, C M, cum & angulus A C M, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A C, C M, M L: At quadratis rectarũ C M, M L, æquale eſt quadratum rectę C L, cum angulus C M L, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A C, C L; Ac proinde angulus A C L, rectus erit. Rurſus quia quadratum rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A M, M L: Eſt autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A B, B M, cum angulus A B M, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A B, B M, M L: At quadratis rectarum B M, M L, æquale eſt quadratum rectæ B L, quod & angulus B M L, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ A L, æquale eſt quadratis rectarum A B, B L; propterea que angulus A B L, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti, anguli D F H, D E H. Quoniam igitur anguli A B L, L A B, trianguli A B L, æquales ſunt angulis D E H, H D E, trianguli D E H; ſuntque latera A L, D H, æqualia; Erunt & reliqua latera A B, B L, reliquis lateribus D E, E H, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ A C, C L, rectis D F, F H. Quare cum latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint lateribus D E, D F, trianguli D E F; & anguli cõtenti B A C, E D F, æquales, ex hypotheſi; erunt & baſes B C, E F, inter ſe, & anguli A B C, A C B, angulis D E F, D F E, æquales: Sunt autem & toti anguli A B M, A C M, totis angulis D E K, D F K, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli M B C, M C B, reliquis angulis K E F, K F E, æquales erunt; Ac propterea cum & latera B C, E F, ſint oſtenſa æqualia; erunt latera B M, C M, lateribus E K, F K, æqualia. Quia igitur latera A C, C M, trianguli A C M, æqualia ſunt oſtenſa lateribus D F, F K, trianguli D F K; & anguli A C M, D F K, ſunt recti; erunt & baſes A M, D K, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ B L, E H, erunt etiam earum quadrata æqualia: Quia uero quadratum rectæ B L, æquale eſt quadratis

47. primi.
48. primi.
47. primi.
47. primi.
48. primi.
26. primi.
4. primi.
26. primi.
4. primi.
47. primi.

dratis rectarum B M, M L; & quadratum rectæ E H, quadratis rectarum E K, K H, quod anguli B M L, E K H, recti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum B M, M L, æqualia quadratis rectarum E K, K H. Ablatis ergo quadratis rectarum B M, E K, quæ æqualia sunt, quod rectæ B M, E K, ostẽ sę sint æquales; reliqua quadrata rectarum L M, H K, æqualia erunt, ac proinde rectę L M, H K, ęquales. Quam ob rem, cum latera A L, A M, trianguli A L M, ęqualia sint lateribus D H, D K, trianguli D H K, & basis L M, basi H K, æqualis; erunt & anguli L A M, H D K, ęquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.



8. *primi.*

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani B A C, E D F, ponuntur æquales, & sublimes æquales A L, D H, constituunt angulos æquales L A B, H D E; Item L A C, H D F; demonstratum fuit, demissas perpendiculares L M, H K, esse æquales.

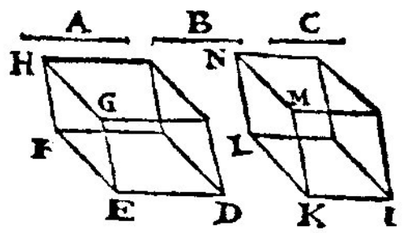
38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum uero prædicto.

SINT

SINT continue proportionales tres rectæ A, B, C. Constituaturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque D E F, D E G, F E G, ita ut recta D E, ipsi A, & F F, ipsi B; & E G, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis D F, F G, G D, perficiatur parallelepipedũ D H; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. Deinde ad rectam I K, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, ęqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis I K L, I K M, L K M, qui æquales sint tribus D E F, D E G, F E G; ita ut rectæ I K, K L, K M, æquales sint mediæ lineę B. Completis uero parallelogrammis I L, L M, M I, perficiatur parallelepipedum I N; quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum D H, æquale esse solido I N. Cum enim sit ut D E, ad I K, ita K M, ad E G, (quod D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli D E G, I K M, æquales: Erunt parallelogramma D G, I M, ęqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam uero anguli plani D E G, I K M, sunt æquales, quorum uerticibus insistunt sublimes lineæ ęquales E F, K L, quę æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex cõstructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium D G, I M, demissę, nimirum altitudines parallelepipedorum D H, I N, si bases sint D G, I M, inter se ęquales, per coroll. propos. præcedentis. Quare parallelepipeda D H, I N, cũ habeant bases D G, I M, ęquales, & ęquales quoque altitudines, inter se ęqualia erunt. Si tres igitur rectę lineę proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

25. *undec.*



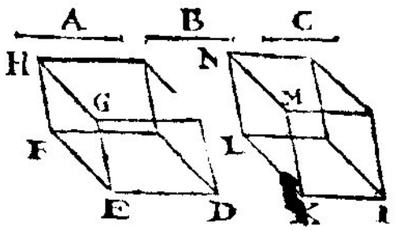
14. *sexti.*

31 *undec.*

SCHOLION.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: Erunt tres rectæ continue proportiona-

portionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam, veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F, I, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases D G, I M, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales D E G, I K M, ex constructione; habebunt latera circa illos angulos reciproca; hoc est, erit vt D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cum D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.



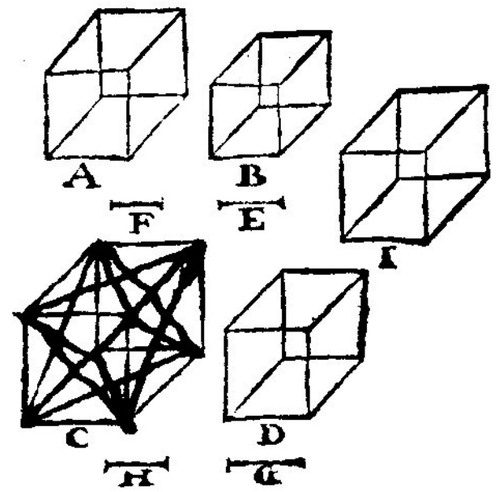
14. sexti.

39. THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; Vt quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia similiterque descripta; Item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim per scholion propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F; Item

duabus C, D, aliæ duæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B; Et ut C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.



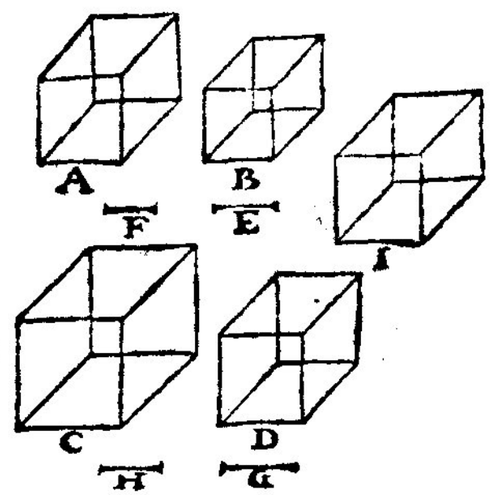
SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, super quam describatur parallelepipedum ipsi D, uel C, simile similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut iam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. Ac idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus & similibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt, Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

12. sexti. 17. undec.

9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primo ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad

ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Cum enim ſit
33. *undec.* proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: Erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidū B, & ſolidi C, ad ſolidum D, ęquales; quādoquidē triplicatæ ſunt proportionum ęqualium, nempe rectę A, ad rectam B; & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe, ut ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, ut recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B,
33. *undec.* triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, ęquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidū D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.



SCHOLION.

EODEM *modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erũt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſque ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, ut demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & linea ſecunda æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.*

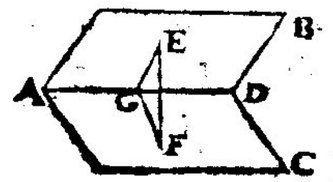
TOTA *vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia, ſunt vel triangula, uel parallelogramma, ut Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula*

ſingulis ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ ut hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt. Cum igitur priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur. 15. *quinti.*

THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

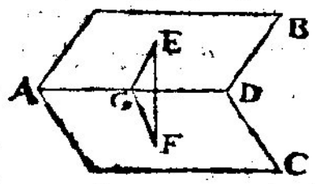
PLANVM AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem ſectionem AD. Nam ſi fieri poteſt, cadat extra ad punctum F; & ab F, in plano AC, ducatur 12. *primi.* ad rectam AD, perpendicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt, quod eſt abſurdū; cum duobus rectis ſint minores. Per 17. *primi.* pendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet. ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

HAEC *eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano*

AB, *demissa perpendicularis ad planum* AC, *non cadit in communem sectionem* AD, *sed in punctum* F, *extra sectionem; ducatur ex* E, *ad rectam* AD, *perpendicularis* EG; *quæ ex* 4. *defin. recta erit ad planum* AC. *Quare ex puncto* E, *extra planum* AC, *ductæ sunt ad ipsum planum* AC, *duæ perpendiculares* EF, EG. *Quod fieri nequit, ut in scholio propos.* 13. *huius lib. demonstrauimus.*

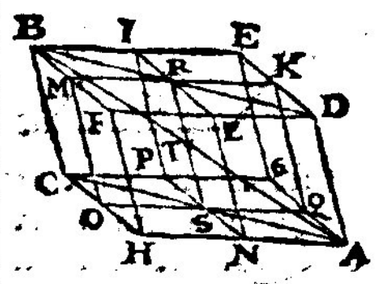


12. *primi.*

40. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariã secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB.



Dico rectã RS, & diametrũ AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualiũ AG, CH; & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. Atqui anguli AQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus

34. *primi.*
29. *primi.*
4. *primi.*
13. *primi.*

duobus sunt rectis æquales; Ac propterea AS, CS, vnã rectã lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectã. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC; ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, & æquales. Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoq; se mutuo secabunt, in puncto uidelicet T. Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Stigitur solidi parallelepipedi corũ, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

14. *primi.*
9. *undec.*
33. *primi.*
7. *undec.*
29. & 15. *primi.*
26. *primi.*

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

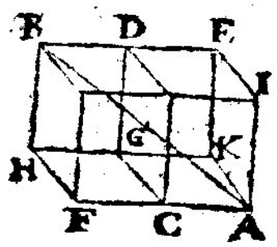
SCHOLION.

HVIC *theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos.* 34. *primi lib. demonstrauimus, videlicet.*

SI solidum pallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

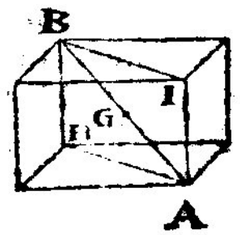
SECETVR *parallelepipedum* AB, *plano* CD, *per centrum, hoc est, per punctum medium diametri* AB, *quod sit* G. *Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planũ* CD, *oppositis planis* AE, BF, *parallelũ. Et quia plana parallela* BF, DC, EA, *secãtur rectis quascũq; pportionaliter; secantur aũt*

17. *undec.*



25. undec. *BA, bifariam in G; secabuntur quoq; latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariã. Cũ igitur sit vt basis KC, ad basin CH, ita solidum AD, ad solidum CB; erit parallelepipedum AB, sectum bifariam, plano CD, per centrum G, ducto.*

TRANSEAT *secundo plannm secans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G; immo per totam diametrum AB; cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI. Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*



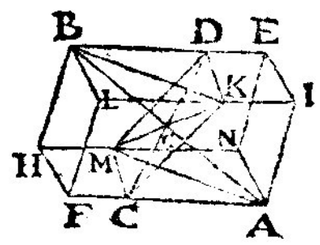
7. undec.
28. undec.

TERTIO *planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorũ ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; erunt communes sectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta a plano AKBM. Quare parallelogrammũ est AKBM; ideoq; tam rectæ AK, BM, quam rectæ AM, BK, inter se erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ; ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK. Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.) Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN, cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam uero recta KL, rectæ MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est æqualis, ut ostend-*

16. undec.
34. primi.
10. undec.
15. primi
4. primi.
4. sexti.

ostendimus; erit & reliqua IK, reliquæ HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tã anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia; & anguli BEI, FEK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, FIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, ut demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.

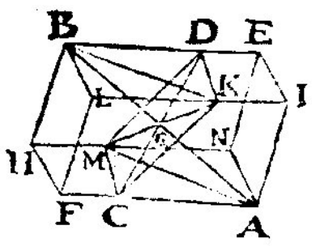
POSTREMO *planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neq; per ullos angulos eorum ductum, sed utcunque secet plana oppositA AHBI. Ostendemus autem, ut prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quam rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturque rectæ AM, BK, quæ parallelæ erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AH, BI, factæ a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, inter se sunt parallelæ; Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G; In solo enim centro G, recta AB, per hypothesin, secat planum CD, in quo existit recta CD. Simili argumento, cum AM, BK, sint ostensæ parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis*



16. undec.
9. undec.
7. undec.

illis plano, seq; mutuo secabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, transibunt, ibiq; se mutuo secabunt; atq; adeo bifariã, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus. Quia ergo latera BG, GD, triãguli BGD, equalia sũt lateribꝰ AG, GC, trianguli AGC; & angulus BGD, æqualis angulo AGC; Erit & basis BD, æqualis basi AC Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera ED, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1 docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterũ est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis; Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æquala esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, ut perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido

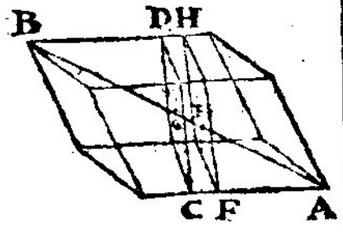
15. primi. 4. primi



4. primi

solido cõtẽto planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AE, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in F, ut sit F, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, ut demonstratum est. Ponitur autẽ & bifariam secari plano CD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Nõ ergo aliud punctũ, præter G, diuidet diametrũ AB, bifariã; Ac pinde G, cẽtrũ erit parallelepipedi. Qd demõstrandũ erat.



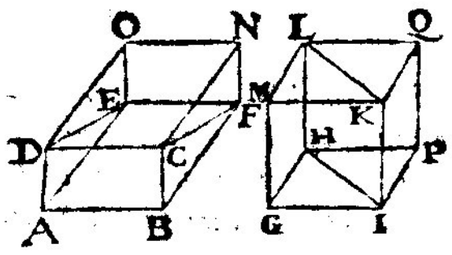
THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: AEqualia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorũ illud basin habeat parallelogrãmũ AB-CD, hoc uero, triãgulũ GHI; sitq; parallelogrãmũ AC, triãguli GHI, duplũ. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur.n. parallelepipeda AN, GQ; Quod quidẽ fiet, si plana triangulorũ extendãtur, perficianturq; parallelogrãma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erũt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdẽ altitudinis cũ prismatis. Nam plana horum solidorũ opposita esse

parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur parallelogrammum G P, duplum eſt trianguli G H I; Ponitur autem & parallelogrammũ A C, eiuſdem trianguli G H I, duplum: æqualia erunt parallelogramma A C, G P. Quare parallelepipeda A N, G Q, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes A C, G P, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum priſmata A B C D E F, G H I K L M, (Nam parallelepipeda A N, G Q, per diametros C F, D E; H I, L K, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

34. primi.



31. undec.

28. undec.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammũ ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS

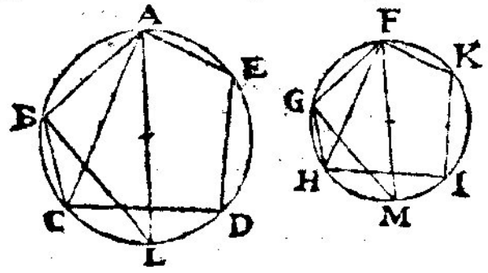
ELEMENTVM XII.

Et Solidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia A B C D E, F G H I K, deſcripta in circulis, quorum diametri A L, F M. Dico ita eſſe polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K, ut quadratum diametri A L, ad quadratum diametri F M. Subtendantur enim angulis æqualibus A B C, F G H, rectæ A C, F H, & connectantur rectæ B L, G M. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt ut A B, ad B C, ita F G, ad G H; erunt triangula A B C, F G H, æquiangula, cum circa angulos æquales A B C, F G H, habeant latera proportionalia: Eſt autem angulus A L B, angulo A C B; & angulus F M G, angulo F H G, æqualis. Igitur & anguli A L B, F M G, æquales erunt. Cum ergo & anguli A B L, F G M, æquales ſint, nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; erunt & reliqui B A L, G F M, æquales. Quare erit ut A L, ad A B, ita F M, ad F G; & permutando, vt A L, ad



6. ſexti.

21. tertij.

32. tertij.

32. primi.

4. ſexti.

A L, ad F M, ita A B, ad F G. Igitur eſt ut quadratum ex
22. *ſexti.* A L, ad quadratum ex F M, ita polygonum A B C D E, ſuper A B, ad polygonum F G H I K, ſuper F G; cum tam quadrata, quam polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, ut a diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico eſſe, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum A B C D, ad circulum E F G H. Si enim res non ita ſe habet; Sit ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ uel minor erit, uel maior circulo E F G H. Si.n. eſſet æqualis, haberet circulus A B C D, ad circulum E F G H, & ad I, eandem proportionẽ; ac propterea eſſet circulus A B C D, ad circulum E F G H, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor quam circulus E F G H, magnitudine ſcilicet K, ita ut circulus E F G H, æqualis ſit magnitudinibus I, & K, ſimul. Inſcribatur in circulo E F G H quadratũ E F G H; qđ quia dimidiũ eſt quadrati circa eũdẽ circulũ deſcripti, ut ad 41. primi oſtẽdimus, maius erit, q̃ dimidium circuli E F G H. Secentur bifariam peripheriæ E F, F G, G H, H E, in punctis L, M, N, O, adiunganturq; rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipſi E F, ut ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. Quia ergo triangulũ E L F, dimidiũ eſt parallelogrammi T E F V; maius erit triangulũ E L F, quã dimidiũ ſegmẽti circuli E L F. Eadẽ ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmẽtorũ, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quã dimidium omnium ſegmentorũ ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ E L, L F, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quã dimidium omnium ſegmentorũ ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam uero, ſi a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis ſegmentis plus quã dimidiũ, nẽpe triãgula E L F, F M G, &c. atque in hũc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta E L, L F, F M, &c. ſimul ſũpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonũ E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, ſimile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi A B C, A D C bifariã ſecentur in B, & D; & rurſus circunferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariã in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circũferẽtia A B C D, in quot diſtributa ẽ circũferẽtia E F G H. Nã iũctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ E L F M G N H O, ut patet. Quoniã igitur eſt polygonũ A P B Q C R D S, ad polygonũ E L F M G N H O, ut quadratũ diametri A C, ad quadratum diametri E G, hoc eſt, per hypotheſin, ut circulus A B C D, ad I: Eſt aũt polygonum A P B Q C R D S, minus circulo A B C D. Igitur & polygonum E L F M G N H O, minus erit quam I. Oſtenſum aũt eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo E F G H.

SIT ſecundo magnitudo I, maior circulo E F G H. Cum ergo ponatur circulus A B C D, ad I, eſſe ut quadratũ diametri A C, ad quadratum diametri E G; erit & conuertẽdo I, ad circulum A B C D, ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C. Ponatur ut I, ad circulum A B C D, ita circulus E F G H, ad magnitudinẽ aliquã, nẽpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo E F G H; maior quoque erit circulus

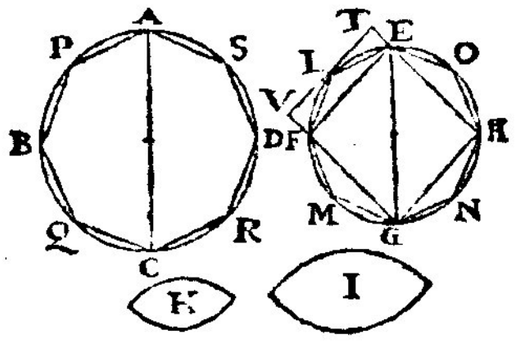
1. *decimi.*

1. *duodec.*

14. *quinti.*

circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo A B C D. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem. Non ergo maior eſt magnitudo I, circulo E F G H. Sed neq; minor eſt oſtenſa. æqualis igitur eſt. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; ſit autem ut circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis eſt magnitudini I; Erit quoque ut quadratũ diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H. Circuli igitur inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat oſtendendum.

7. quinti.



COROLLARIVM.

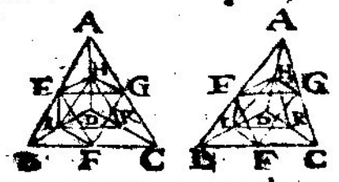
HINC fit, ita eſſe circulum ad circulum, ut polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcripto. Quoniam tã circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum eſt, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ueluti demonſtratũ eſt.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT

SIT pyramis, cuius baſis triangulum A B C, uertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectantutque rectæ E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum baſes triangula A E G, H I K, & uertices H, D; nec non in duo ſolida E B F G H I K, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammum E B F G, & triangula oppoſita E H G, B I F; huius uero baſis eſt triangulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum F G H I; & sum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis uertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis.



Cum enim latera A D, B D, trianguli A D B, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; erunt H I, A B, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, B D; & E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. Sunt autem & rectæ F G, H I, cum parallelæ ſint ipſi A B, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt G H, F I, cum ſint parallelæ ipſi D C. Quare parallelogramma ſunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam uero rectæ H E, H G, rectis D B, D C, ſunt parallelæ erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. Proportionalia igitur ſunt latera trianguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt triangulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, ſimilia per coroll. propoſ. 4. lib. 6. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, ſimilis eſt, per defin. 9. huius lib. Rurſus quia rectæ H I, H K, rectis A B, A C, ſunt parallelæ, erunt anguli I H K, B A C, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli H I K, A B C; & H K I, A C B. Quare latera trian

2. ſexti.

9. undec.

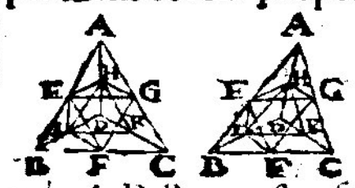
10. undec.

4. ſexti.

10. undec.

guli

guli H I K, lateribus trianguli A B C, circa æquales angulos sunt propoportionalia; ac propterea triangulum H I K, triangulo A B C, simile est: Sunt autem & triangula D H I, D I K, D K H, triangulis D A B, D B C, D C A, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo H I K D, similis est quoque eidem pyramidi A B C D, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triangula A H E, H D I, similia sunt triangulo A D B, ut ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales A H, H D, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula A H G, H D K, cum similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas A H, H D. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula A E G, H I K, cum similia sint ostensa triangulo A B C, & super rectas posita A E, H I, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A E I H. Non secus æqualia erunt & similia triangula E H G, I D K, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas H E, D I, quæ æquales sunt, ob parallelogrammum H E I D. Pyramides igitur A E G H, H I K D, æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.



4. *sexti.*

21. *sexti.*

34. *primi.*

34. *primi.*

RVRSVS, quia rectę E H, H G, G E, æquales sunt, & parallelæ rectis B I, I F, F B, ob parallelogramma E H I B, F G H I, B F G E; erunt triangula E H G, B I F, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib 1. Ac propterea & similia: Sunt autem & parallela; cum E H, H G, per quas ducitur planum E H G, parallelæ sint rectis B I, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum B I F G H E, contentum duobus triangulis E H G, B I F, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis E G F B, B E H I, I F G H, prisma est, ex definitione. Eodem modo prisma ostendetur solidum C F G H I K. Cum enim rectæ F C, C G, G F, æquales sint, & parallelæ rectis I H, H K, K I, ob parallelogrammum C F I K, C G H K, F G H I; erunt triangula C F G, H I K, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: Sunt autem & parallela, quod rectæ C F, C G, per quas ducitur planum C F G, parallelæ sint rectis K I, K H, per quas planum K I H, ducitur. Igitur solidum C F G H I K, contentum duobus triangulis C F G, K I H, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis C F I K, K H G C, I F G H, prisma est. Quoniam uero prismata E B F G H I, C F G H I K, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela B C G E, H I K; & parallelogrammum E B F G, basis illius, duplum est trianguli C F G, basis huius, per scholion propos. 41. lib. 1. Ipsa inter se æqualia erunt.

15. *undec.*

40. *undec.*

DENIQVE quia prisma E B F G H I, maius est pyramide E B F I, totum parte; Est autem pyramis E B F I, æqualis & similis pyramidi A E G H, necnon pyramidi H I K D, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorũ: Maiora erunt prismata E B F G H I, C F G H I K, pyramidib' A E G H, H I K D. Ac proinde illa quidẽ dimidiũ pyramidis A B C D, excedent, hæ uero a dimidio eiusdẽ deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor uero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

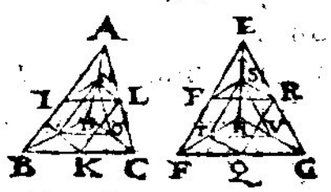
THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habẽtes bases; sit autẽ illarũ utraq; diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodẽ modo diuisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim,

basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; vt vult propositio præcedes: Eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea sit diuisa bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll propos. 4. lib. 6. Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG: Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autē LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ut mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, videlicet IBKLMN, ad unum prisma PFQRST, ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidū ad bases



22. sexti.

12. quinti.

ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC, basis, quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS, quæ his est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul, ad omnia prismata ī pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hęc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

12. quinti

LEMMA.

QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex uerticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares

17. undec.

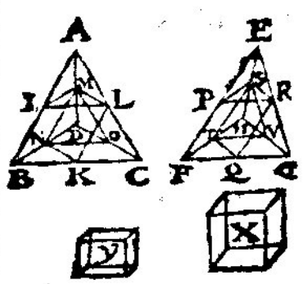
 lares

lares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, ut bases.

SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod uel minus erit, uel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidū X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata



3. *duodec.*

1. *decimi*

mata æqualia; & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidū X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quā tota pyramis ABCD; Erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora, quam solidum X. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH. 4. *duodec.*

SIT secundo solidū X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, ut est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidū X; Sit autem pyramis ABCD, ut ad solidum X, ita ad pyramidem EFGH, solido X, æqualē: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum. 14. *quinti* 14. *quinti* 7. *quinti.*

SCHOLION.

CONVERSO *modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscissionis ad oēs angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidē modo cōstitutā: Sed sic quoq; erat ad totā pyramidē. Pyramis ergo cōstituta*

9. quinti. *æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt absurdum.*

COROLLARIVM.

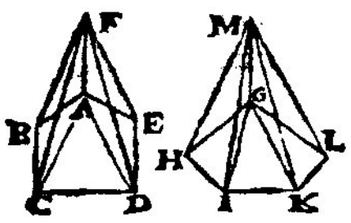
HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales, propterea quod eandem proportionem habeant eum baſibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, uel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando uſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia, erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. Quia uero eſt, ut baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; Erit componendo ut baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidē ACDF: Sed rurſus eſt ut baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM,



5. duodec.

5. duodec.

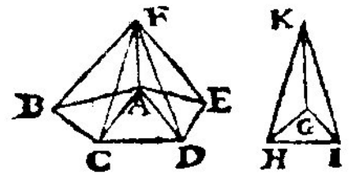
KLM, ad pyramidem GKLM; Et conuertendo ut baſis GKL ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. Rurſus quoniã eſt, ut baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erũt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, ut in hac formula uides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit ut baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM; Ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM.

5. duodec.

SCHOLION.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum unius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primum duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius uero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, ut eſt baſis ad baſin.



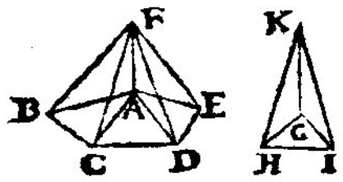
Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. Quoniam uero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatẽ, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; Et eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: Erit ut baſis ABCD, prima quantitas cũ quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quanti

5. duodec.

24. quinti

tas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem, vt modo est ostensum: & vt basis A D E, quinta quantitas, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A D E F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; Erit etiam vt basis A B C D E, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona A B C D E, ad basin triangularem G H I, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K; Erit quoque conuertendo, vt basis G H I, ad basin A B C D E, ita pyramis G H I K, ad pyramidem A B C D E F. Quam ob rem duæ pyramides quælibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, ut dictum est.

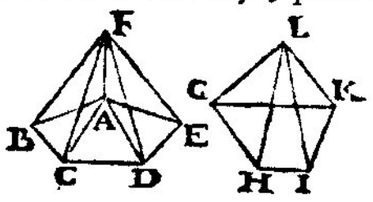
5. duodec.



24. quinti

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis A B C D E F, G H I K L, quarum bases sint polygonæ, sintque plura latera in vna basi, quam in altera. Dico rursus esse pyramidē ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono A B C D E, in triangula A B C, A C D, A D E, erit pyramis eius in totidē diuisa pyramides. Quia vero, ut iam est demonstratum, est vt basis A B C, triangularis prima quantitas, ad basin G H I K, polygonam, secundam quantitatē; ita pyramis A B C F, tertia quantitas ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; & vt basis A C D, quinta quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A C D F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; Erit etiam ut basis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D E, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis A B C D, prima quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem, ut proxime demonstratum est; Et est quoque vt basis A D E, quinta quantitas, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A D E F, sexta quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem, ut ante est ostensum; Erit etiam ut basis A B C D E, prima quantitas cum quinta, ad basin G H I K, secundam quantitatem, ita pyramis A B C D E F, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, si plura triangula fuerint in basi A B C D E.

24. quinti



24. quinti

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, ut bases; eandē habent altitudinē.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, uel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cū basibus, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

RVRSVS contra fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, uel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandem habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autē duo dem ōstrabuntur, ut in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

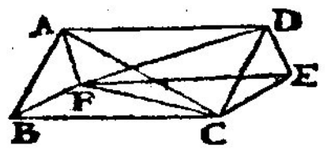
THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides

æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur in tribus paralielogrāmis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C E F; F D, in A D E F. Quoniam igitur

34. primi



5. duodec.

triangula A B C, A D C, æqualia sunt; estque ut basis A B C, ad basin A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, uertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constituta, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a uertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autem pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, A C F, D C F; hæc uero eisdem quatuor planis, nimirum basi A D F, & triangulis A D C, A C F, D C F. Igitur tres pyramides A B C F, A D C F, E F D C, seu C D E F, (quæ eadem est pyramidi E F D C, cum tam E F D C, quam C D E F, contineatur planis C D E, E F D, D C F, F C E, totum prisma componentes, ut perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma A B C D E F, in tres pyramides est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basim, &c. Quod erat demonstrandum.

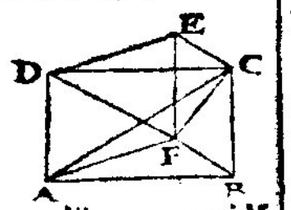
COROLLARIVM. I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis quod eandem cum illa habet & basim, & & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT enim primum pyramis A B F C, triangularem habens basin A B F; & prisma A B C D E F, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem A B F. Dico pyramidem esse tertiam partem prisma-

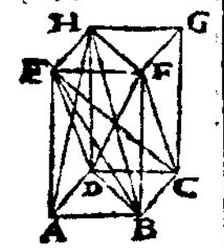
prismatis. Nam si ducatur recta D F, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales A B C F, A D C F, C D E F; ut demonstratum est; Ac propterea pyramis A B C F, hoc est, pyramis A B F C, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur A B F, F C A, A B C, C B F,) tertia pars erit prismatis A B C D E F. Cum igitur pyramis A B F C, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin A B F, constitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est quamlibet pyramidē esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.

7. duodec.



SIT secundo pyramis A B C D E, cuius basis rectilineum quodcunque A B C D, quotlibet laterum; & prisma A B C D E F G H, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi A B C D, & plano oppositō E F G H, in triangula numero æqualia A D B, B C D; E H F, F G H; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis A H, B H; D F, C F; erit, ut demonstratum est, pyramis A D B H, tertia pars prismatis A B F E H D; Item pyramis B C D F, tertia pars prismatis C D H G F B. Quare erit, ut pyramis A D B H, ad prisma A B F E H D, ita pyramis B C D F, ad prisma C D H G F B; Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma A B C D E F G H. Igitur pyramides A D B H, B C D F, simul tertiā partem constituent prismatis A B C D E F G H. sunt autem pyramides A D B H, B C D F, æquales pyramidi A B C D E; propterea quod pyramides A D B H, A D B E, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides B C D F, B C D E, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides A D B E, B C D E, componant totam pyramidem A B C D E; erit & pyramis A B C D E, tertia pars prismatis A B C D E F G H. Cum igitur pyramis A B C D E, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim A B C D, constitutæ, per coroll. propos. 5 huius lib. perspicuum est, quālibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin multilateram, eandemque altitudinem.

12. quinti



Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

FORMA modo pyramis tertia pars est prismatis habentis ba-

sem

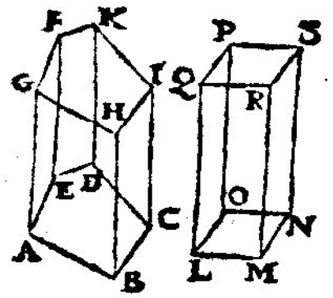
sem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLION. I.

Ex dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases; inter se sunt, ut bases.

QVAMVIS enim hoc demõstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; nec nõ de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus uniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera seu anguli in vnius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S, quorum bases sint figura multilatera. Dico, vt est basis A B C D E, ad basim L M N O, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis, habentes easdem bases: Ac proinde, per coroll. prædictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.



15. Quinti.

CON-

CONVERSO *modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholion propos. 5. demonstratum est.*

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, uel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, uel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLION. II.

CAETERVM *tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod uidelicet Campanus cum alijs putat: tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis unum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, ut in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, ut in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam uidelicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, ut parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corol-*

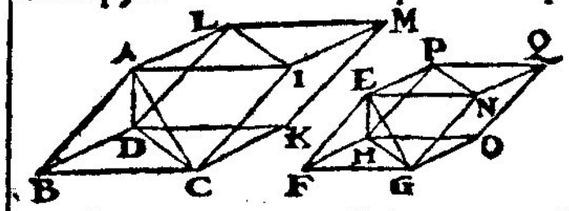
lario

lario prædicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiam partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quæ oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis; duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam priſmata, &c.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita ut baſes A B C, E F G, ſint ſimiles, & reliqua triangula unius ſimilia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma B I, BK, B L. Deinde ducantur



cantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ & æquales, conuenientes in M, connectaturque recta K M. Erit igitur cõpletum parallelepipedum B M, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cum plana ſolidi B M, ſint parallela, ut facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodem modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob ſimilitudinem pyramidum, anguli plani A B C, E F G, ſunt æquales, eſtque ut A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, ſimilia. Eodem modo cũ anguli A B D, E F H, ſint æquales, ſitque ut A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & ut D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, ſimilia. Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedi B M, reliquis tribus oppoſitis D M, A M, C M; quam tria F N, F O, F P, parallelepipedi F Q, reliquis oppoſitis tribus H Q, E Q, G Q, ſunt æqualia & ſimilia. Igitur ſex plana circunſcribentia ſolidum B M, ſimilia ſunt ſex planis ſolidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. ſimilia ſunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniã uero ductis rectis L I, P N, priſmata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem, quam priſmata dicta, earum tripla; habebũt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedi B M, ad parallelepipedum F Q, ſit triplicata proportionis homologorum laterũ B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

24. *undec.*

15. *quinti*

11. *quinti*

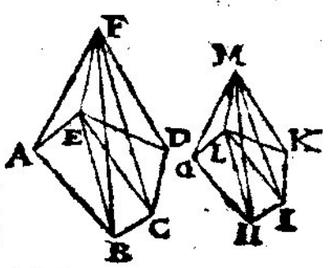
33. *undec.*

COROLLARIVM.

Ex hoc quoque eſt manifeſtum, ſimiles pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides ſimiles, quarum baſes rectilinea ſimilia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH.

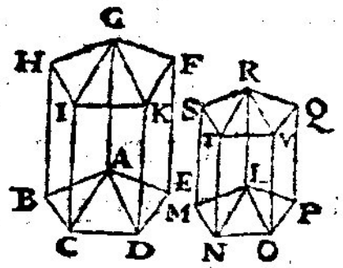
GH. Nam si ex anguli E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ
20. *sexti.* EB, EC; LH, LI, diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidũ similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autẽ EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorũ AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidũ similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH.
5. *sexti.* Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM;
8. *duodec.* Itẽ CDEF, IKLM. Quapropter, ut demonstratũ est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatã proportionẽ habebunt laterũ homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorũ ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unã & eandẽ proportionẽ, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoq; pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemq; proportionẽ, triplicatã scilicet illius; Atque idcirco erit, ut
12. *quinti.* una pyramis ABEF, ad unã pyramidem GHLM, ita oẽs pyramides nempe pyramis ABCDEF, ad oẽs pyramides, nimirũ ad pyramidẽ GHIKLM. Quam ob rẽ, cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM,
8. *duodec.* habeat triplicatã ꝓportionẽ homologorũ laterũ AB, GH; habebit quoq; pyramis ABCDEF, ad pyramidẽ GHIKLM, triplicatã proportionẽ eorundẽ laterũ homologorũ AB, GH. Quod est ꝓpositũ.



SCHOLION.

EADEM ratione, *prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia* ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. *Dico eorum proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum.* Nam *si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, vt de pyramidibus dictum*
20. *sexti.* *est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ*

rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cũ omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionẽ prismatis. Quoniã uero,



ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinẽ triangulorũ BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniã angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autẽ & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cũ latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrãmis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triãgulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex defin. solidorũ similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatã habẽt proportionẽ, singula ad singula, laterum homologorũ BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodẽ modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

Ex qbus oĩbus colligit, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triãgulares similes, et numero æquales, et homologas totis. Hoc. n manifestũ est ex demõstratione p̃cedẽtis coroll.

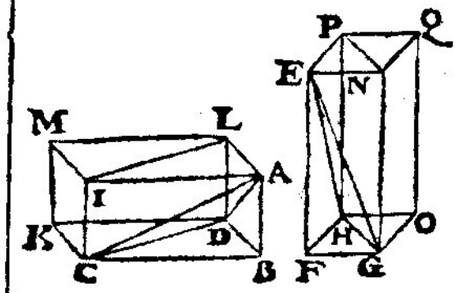
EODEM *modo inferĩ, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triãgulares bases habẽtia, & numero æqualia, et homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.*

THEOR.

7. THEOR. 9. PROPOS. 9.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes & altitudines; illæ ſunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum baſes ABC, EFG, & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedēti propoſ. dictum eſt, parallelepipeda BM, FQ, earundē altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt priſmata DBCILA, HFGNPE, cum ſint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter ſe æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum ſint priſmatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare baſes eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc eſt, erit ut baſis BI, ad baſin FN, ita altitudo ſolidi FQ, ad altitudinem ſolidi BM: Vt autem baſis BI, ad baſin FN, ita eſt triangulum ABC, ad triangulū EFG. Igitur erit quoque ut baſis ABC, ad baſin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.



34. *undec.*

15. *quinti*

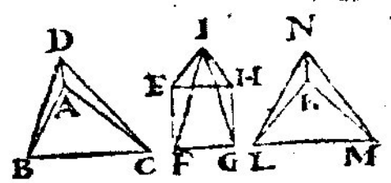
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, ut prius; cum ſit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum

15. *quinti*

pipedorū & altitudines eorundem reciprocæ; Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. AEqualium igitur pyramidū, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum. 34. *undec.*

SCHOLION.

EADEM *ratione AEqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiū reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at uero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulū KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammū facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem, ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; erit ut baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualiū baſes & altitudines reciprocantur.*

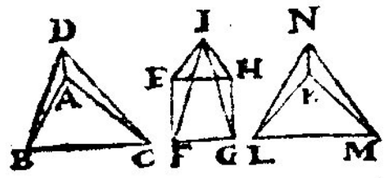


SED *reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo*

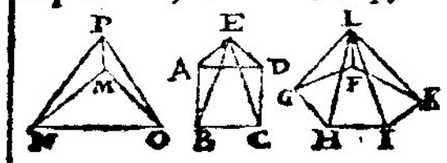
9. *duodec.*

tudo pyramidis KLMN, eadem quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem esse ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque ut basis ABC, ad basin KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. Quamobrem æquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod est propositum.

9. duodec.



SINT secundo pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangulæ. Fiat rursus triangulũ MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cũ pyramide ABCDE: Eritq; ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponit pyramidi FGHIKL. Igit & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, ut nũc demõstrauimus, erit ut basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basin FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinẽ pyramidis ABCDE; (ponunt̃ .n. hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualiũ ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocãtur.



SID reciprocẽtur iam bases harum pyramidum atq; altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta .n. eodẽ modo figura, cum basis MNO, æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur aũt ut ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis ABCDE; Erit quoq; ut MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP. Quare ut ante ostẽdimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL: Est aũt pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex scholio propos. 6. huius lib. Igit & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositũ.

OMNIA hæc facile quoq; demonstrabũtur cõuenire prismatis quibuscunq;. Nam si prismata fuerint æqualia, erũt & eorũ pyramides earundẽ altitudinẽ cũ ipsis, & super easdẽ bases, æquales;

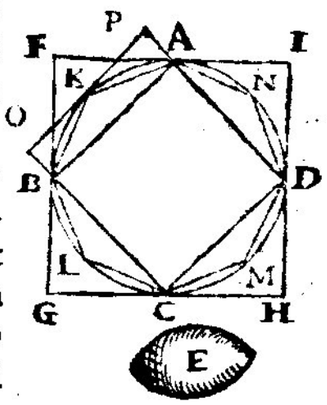
æquales; cũ sint eorũ tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. huius lib. Vel certe dux tertiæ, si nimirũ prismatũ bases fuerint parallelogrãma, & eorũ uertices, lineæ rectæ, ut in scholio eiusdẽ propos. ostensum est. Quare, ut modo demonstrauimus, bases harũ pyramidũ atq; altitudines reciprocantur. Cũ ergo hæ bases & altitudines eædem sint quæ prismatũ; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

RVRSVS, si prismatũ bases, & altitudines reciprocẽtur, reciprocabũtur quoq; bases, & altitudines pyramidũ easdẽ bases & altitudines cum prismatis habentium. Quare, ut demonstratũ est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cum earum sint triplæ, uel certe sesquialtera, æqualia quoq; sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 9.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

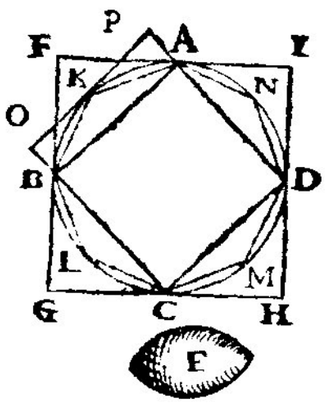
HABEANT conus & cylindrus basin eandẽ circulũ ABCD, & altitudinẽ eandẽ. Dico conũ cylindri esse tertiã partẽ. Si .n. conus nõ credatur esse tertia pars cylindri, nõ erit cylindr⁹ coni triplus, sed uel maior, uel minor triplo coni. Sit primũ maior quã tripl⁹ coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eũdẽ, quadratũ FGHI; intelligãturq; super hęc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniã igitur quadratũ ABCD, dimidiũ est quadrati FGHI, ut ad propos. 9. lib. 4. ostẽdimus; estq; ut basis ad basin, ita pallelepipedũ ad parallelepipedũ eiusdẽ altitudinis; Erit & parallelepipedũ basis ABCD, dimidiũ parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedũ basis ABCD, maiꝰ erit, q̃ dimidiũ cylindri,



32. undec.

cuius basis circulus ABCD Secẽtur bifariã peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propos. 27 lib. 3. ostendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulũ AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, ut basis ad basin, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omniũ segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini, E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis; erit reliquum prisma basis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinẽ cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.

SIT secundo cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelligantur q; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, ut ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus; estq; ut basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiungantq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, ut ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia



41. primi.

2. decimi.

6. duodec.

41. primi.

6. duodec.

midia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam uero si a cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam maiorem esse ostendimus, quam dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul tum pta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum; erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea q; conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

1. decimi.

SCHO-

SCHOLION.

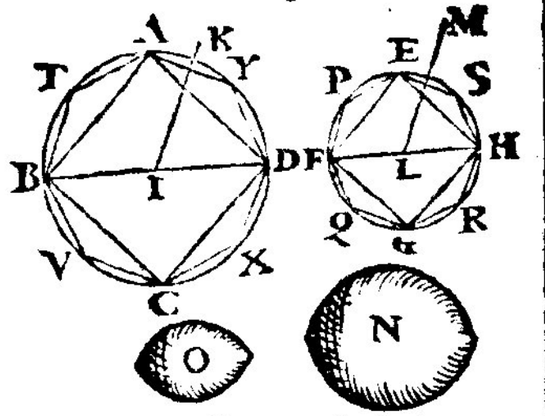
Quamvis propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit ut perspicuum esti eius demonstratione diligenter intuenti. Itaque propositio uniuerse ita proponi poterit.

Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cũ ipso & basim & altitudinem habentis, licet nõ sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases.

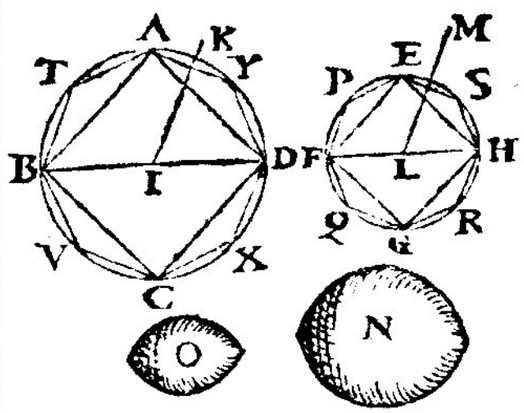
Sint sub eadẽ altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli ABCD, EFGH, altitudines uero æquales I K, L M. Dico ut est basis ad basim, ita esse conũ ad conũ, & cylindrũ ad cylindrũ. Si n. hoc nõ credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquã magnitudinẽ, nempe ad N, quæ uel maior erit, uel minor cono EFGHM. Si n. esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea esset conus ad conũ, ut basis ad basin: qđ nõ conceditur. Sit ergo primũ N, minor quã conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribat in circulo EFGH, quadratũ EFGH, diuidãturq; peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariã in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quo igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis sup basin EFGH, eiusdem



7. quinti.

eiusdem altitudinis; & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur, per coroll. propos. 2. huius lib. est ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N; & ut polygonum ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

1. *decimi.*



6. *duodec.*

SIT secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo coni EFGHM; Sed neque minor est ostensa; AEqualis igitur est. Quapropter cum ponatur, ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

14. *quinti.*

7. *quinti.*

QVONIAM autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque ut basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo usi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases. Quod erat demonstrandum.

15. *quinti.*

SCHOLION.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, ut eius demonstratio manifeste indicat, ita ut propositio vniuerse proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CON-

CONVERTETVR *hæc propoſitio quoq; hac modo.*

SI coni & cylindri inter ſe ſint, ut baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD *quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.*

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, uel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, uel ſcaleni, ſiue unus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habeant, quam baſes, quæ æquales ponuntur, uel certe una & eadem.

ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, uel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

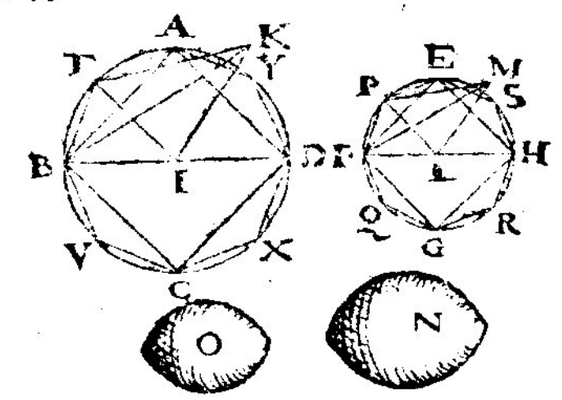
10. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſib⁹.

SINT ſimiles coni, & cylindri, quorum baſes circuli A B C D, E F G H, axes uero I K, L M, & diametri baſiũ B D, F H. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H. Eritque N, uel minor, uel maior cono E F G H M. Si enim eſſet æqualis, haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni A B C D K, ad conum E F G H M, eſſet quoque triplicata proportionis diametri B D, ad diametrum F H; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus E F G H M, magnitudine O; Fiatq; eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita ut rurſus pyramis E P F Q G R H S M, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ K B, K T; M F, M P, ut habeantur duo triangula

7. quinti.

gula B K T, F M P, pyramidum A T B V C X D Y K, E P F Q G R H S M; & cõnectantur rectæ T I, P L. Quoniam igitur coni A B C D K, E F G H M, ſimiles ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. ut diameter B D, ad diametrũ F H, ac propterea ut ſemidiameter B I, ad ſemidiametrum F L, ita axis I K, ad axem L M; Ac permutãdo ut B I, ad I K, ita F L, ad L M. Cũ igitur anguli B I K, F L M, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum baſes; Erunt triangula B I K, F L M, æquiangula; Ac propterea ut K B, ad B I, ita M F, ad F L. Vt autem B I, ad B T, ita F L, ad F P; ob ſimilitudinem triangulorum B I T, F L P. (Cum enim anguli B I T, F L P, inſiſtentes ſimilibus arcubus B T, F P, ſint æquales, ut in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtenſum eſt; ſitq; ut B I, ad I T, ita F L, ad L P, ob æqualitatẽ tã linearũ B I, I T, quam F L, L P; erunt triangula B I T, F L P, ſimilia.) Igitur ex æquo, ut K B, ad B T, ita M F, ad F P. Rurſus quia latera K I, I B, trianguli K I B, æqualia sũt lateribus K I, I T, trianguli K I T, & anguli dictis lateribus cõprehẽſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cũ axis I K, rectus ponatur ad circulũ A B C D; erunt baſes K B, K T, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ M F, M P; Ac propterea rectæ K B, K T, rectis M F, M P, proportionales erũt, cũ utrobiq; ſit proportio æqualitatis. Quoniã uero, ut K B, ad B T, ita K T, ad eandẽ B T, Itẽ ut M F, ad F P, ita M P, ad eandẽ F P: Erat autẽ ut K B, ad B T, ita M F, ad F P; Erit quoque ut K T, ad B T, ita M P, ad F P; Et cõuertẽdo ut B T, ad T K, ita F P, ad P M. Quare cũ ſit ut T K, ad K B, ita P M, ad M F; & ut K B, ad B T, ita M F, ad E P; Et ut B T, ad T K, ita F P, ad P M, ueluti oſtẽsũ eſt; habebũt triãgula B K T, F M P, latera proportionalia, ideoque æquiãgula erũt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendentur reliqua triangula ambientia pyramides A T-



15. quinti.

6. sexti.

4 sexti.

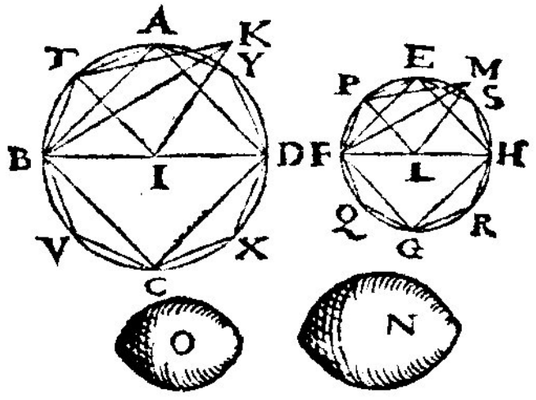
6. sexti.

4. primi.

7. quinti.

5. sexti.

ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum B T, F P, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum B I T, F L P; Et ut BI, ad
15. *quinti.* F L, ita B D, ad F H. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoq; proportionem triplicatã diametrorũ B D, F H. Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Erit ergo ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono
14. *quinti.* ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. ostensa autẽ est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.



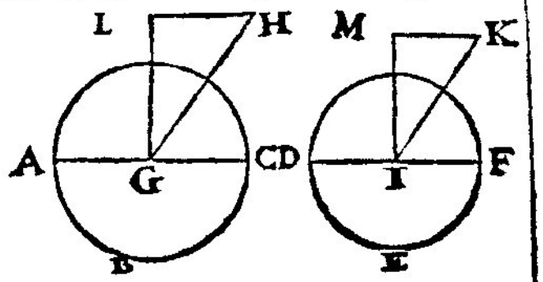
SIT secundo N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidẽ EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, propor-

proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM; erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quaproter conus
14. *quinti.* EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor est ostensa. AEqualis igitur est; ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad *7. quinti.* conum EMGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

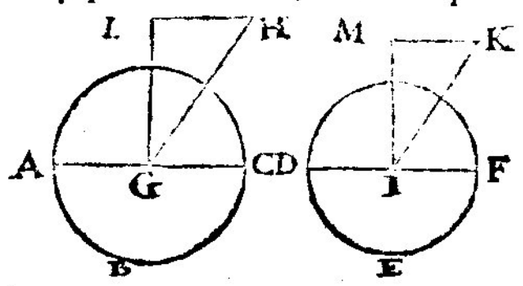
QVONIAM uero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habe-
15. *quinti.* bit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

HAEC propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cũ in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes uero GH, IK, & diametri basium AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere



habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur super easdem bases duo coni, & cylindri recti eisdem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducanturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF; erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta; Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad



18. undec. bases demissæ cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe rec-

38. undec.

32. primi. ti, ex defin. 3. lib. 11. reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam uero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axium uertices ducta ip-

29. primi. si AC, parallela, ideoq; angulus L, rectus: Eodemq; argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur

4. sexti. GHL, IKM, æquiangula sunt; atq; idcirco erit ut GH, ad GL, ita IK, ad IM; & permutando, ut GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axem IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum, quod coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axem erit, ut diameter AC, ad DF, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, si-

12. duodec. miles erunt, ex definitione. Quare proportionem habebunt diametrorũ triplicatã. Quia uero tã conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinẽ,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, ut constat ex coroll.

7. quinti. propos. 11. huius lib. Erit ut conus & cylindrus ABCL, ad conũ & cylindrũ DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conũ & cylindrũ DEFK; ideoq; proportio coni & cylindri ABCH, ad conũ & cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13. 11.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH parallelo aduersis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramq; partem, una cum eius axe, & rectangulo EC, ad cuius reuolutionẽ descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumãturq; in axe producto quotcũq; rectæ EK, KL, æquales ipsi EI; Itẽ quotcunq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidẽ ad reuolutionẽ rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componentes totum cylindrum SQ-XY. Quoniam uero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Tα, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex corollario propos. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IB, primæ magnitudinis æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudi-



11.

gnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus Ω H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propoſ. 11. huius lib. liquet. Si uero



axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, ut cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

ETSI hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamen eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facile accommodabis, ſi modo adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni, ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita ut quemadmodum in conis rectis rectangulũ circa quie ſcen latus circunfertur, ſic quoque in conis ſcalenis circunferantur ſemidiametri L S, K R, E A, &c. ſemper æquidiſtantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta S Y, ſemidiametros coniungente; hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, ut conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de ſectione cylindri.

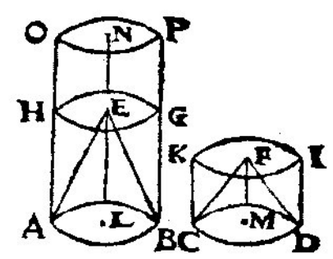


11. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.

SINT

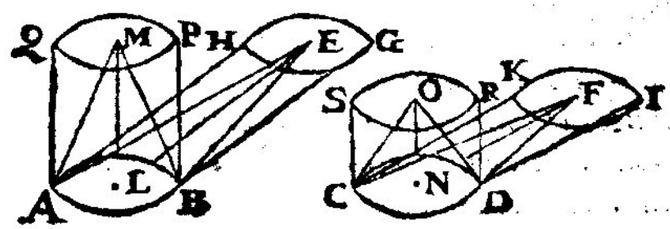
SINT ſuper baſes æquales A B, C D, duo coni A B E, C D F, & duo cylindri A B G H, C D I K, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipſi ſunt altitudines) L E, M F. Dico eſſe conum A B E, ad conũ C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, ut eſt altitudo L E, ad altitudinem M F. Extendatur enim cylindrus A B G H, ad partes G H, una cum eius axe L E, & rectangulo A E; abſcindaturque axis E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, ut fiat cylindrus G H O P, eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. propterea que cylindrus A G, ad ipſos eandem habet proportionem: Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, ut axis, ſeu altitudo L E, ad axem ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, ut altitudo L E, ad altitudinem M F. 7. *quinti*. 13. *duodec.*



QVIA uero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, ut altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat. 10. *duodec.* 15. *quinti*

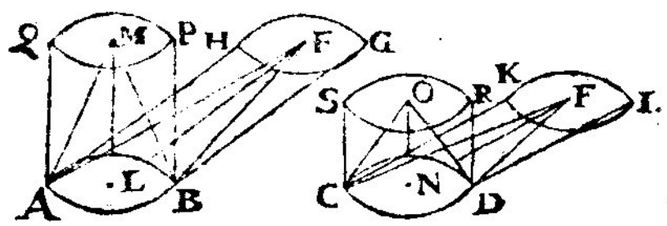
SCHOLION.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E, C D F, & cylindri A B G H, C D I K, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conum A B E, ad



conum

conum C D F, & cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, esse, vt est altitudo L M, ad altitudinem N O. Super basin A B, cõstituatur cylindrus rectus A B P Q, sub altitudine L M; Item super basin C D, cylindrus rectus C D R S, sub altitudine N O. Quoniam igitur est cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrum rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinem N O: Est autem cylindro A B P Q, cylindrus A B G H; Item cylindro C D R S, cylindrus C D I K, aequalis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Eris quoque cylindrus A B G H, ad cylindrum C D I K, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod est propositum.



14. duodec.

10. duodec.

QVONIAM autem coni, cum sint tertiæ partes cylindrorum, eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus A B E, ad conum C D F, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases A B, C D, fiant coni recti A B M, C D O, earundem altitudinum cum cylindris A B P Q, C D R S.

15. quinti

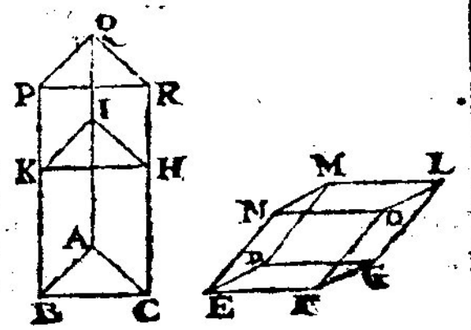
IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus A B E, & cylindrus A B G H, fuerit scalenus, alter vero, nimirũ conus C D O, et cylindrus C D R S, rectus. Nã cũ cylindrus scalenus A B G H, æqualis sit cylindro recto A B P Q; sit autẽ cylindrus rectus A B P Q, ad cylindrũ rectum C D R S, vt altitudo L M, ad altitudinẽ N O, vt Euclides demõstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus A B G H, ad cylindrũ rectum C D R S, ut altitudo L M, ad altitudinem N O. Quod est propositum.

10. duodec.

QVONIAM vero coni eandẽ habent proportionẽ, quam cylindri, cum illi horũ sint tertiæ partes; Erit etiã conus scalenus A B E, ad conũ rectũ C D O, vt altitudo L M, ad altitudinẽ N O. Quod nihilominus ostẽdetur eadẽ ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.

EADEM quoq; hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases cõstitutis. Sint. n. super

super bases æquales A B C, D E F G, prismata A B C H I K, D E F G L M N O, & pyramides sub eisdẽ altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidẽ ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ A I, C H, B K, prismatis A B C H I K, ad basin A B C, perpendiculares, ita ut B K sit altitudo prismatis A B C H I K; Productis autem rectis A I, C H, B K, sumantur I Q, H R, K P, æquales altitudini prismatis E L; & ductis rectis P Q, Q R, R P, compleatur prisma H I K P Q R, eiusdẽ altitudinis cũ prismate E L. Eruntq; prismata H I K P Q R, E L, cum habeant & bases, & altitudines æquales, inter se æqualia, ex coroll 2. propos. 7. huius lib. Ac propterea prisma A B C H I K, ad virunq; eandẽ habebit proportionem. Quia vero, ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma A B C H I K, ad prisma H I K P Q R, est vt planũ B I, ad planum K Q; Et vt planũ B I, ad planum K Q, ita est recta B K, ad K P; Erit prisma A B C H I K, ad prisma H I K P Q R, hoc est, ad prisma E I, ut B K, altitudo prismatis A B C H I K, ad K P, altitudinem prismatis H I K P Q R, hoc est, prismatis E L. Quod est propositũ.



7. quinti

1. sexti.

QVOD si insistẽtes lineæ A I, C H, B K, nõ sint perpendiculares ad basin A B C, cõstituẽdũ erit sup basin A B C, aliud prisma, cuius insistẽtes sint perpẽdiculares ad basin, et æquales altitudini prismatis A B C H I K. Nam cũ ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitq; prisma constitutũ ad prisma E L, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma A B C H I K, ad prisma E L, ut altitudo illius, ad altitudinem huius.

15. quinti

QVONIAM vero pyramides eandem habent proportionem cũ prismatis, quod illæ sint horum tertiæ partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, ut est altitudo ad altitudinem.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HAEC *omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.*

OMNIA *quoque hæc facile conuerti poſſunt hoc modo.*

CONI & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM *alias pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ.* 31. *lib.* 11. *oſtenſum eſt.*

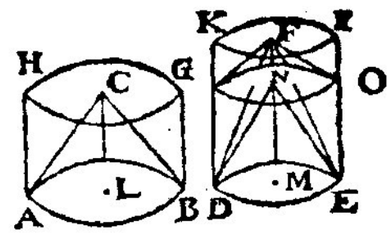
12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

SINT æquales coni A B C, D E F, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE: axes, altitudinesve LC, M F. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines L C, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. prop. 11. huius lib. Quare erit ut baſis AB ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinē æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi L C æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, ut in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docemus, ut fiāt duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DE-

IK; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. Eſt autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: Itē ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines. *7. quinti.*



11. duodec.

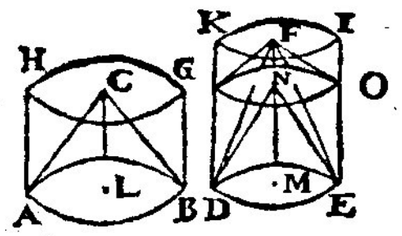
14. duodec.

IN conis uero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes; Quare ut oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam conſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo uſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, ut in figura. *10. duodec.*

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, ſint æquales, cum ſit ut baſis AB, ad baſin DF, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; Eſt autem, ut baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit. *11. duodec.* *14. duodec.* *9. quinti.*

AT uero in conis hæc erit demonſtratio. Si conorum A B C, D E F, baſes & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cum eædem ſint baſes, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo, conos eſſe æquales, quo oſtendimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

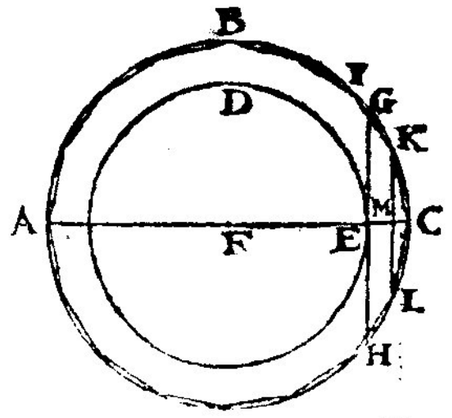
NON *difficile erit idem oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ.* 11. *huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altudines rectorum & ſcalenorum. Quare, ut demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ.* 11. *huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.*

IDEM *facile concludetur, licet unus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex iis, quæ in ſcholio propoſ.* 14. *huius lib. docuimus.*

13. ## PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrũ F, oportetq; in maiori A B C, inſcribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero paricõtinentur, non tangens minorem D E. Extendatur per cẽtrum F, recta A C, ſecans circulum D E in E, puncto, & per E, ducatur G H, ad A C, perpẽdicularis, quę tãget circulum D E, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib 3. Quoniam igitur arcus A G C, maior eſt arcu C G, ſi ex A G C, auferatur dimidiũ A B, & ex reſiduo B C, dimidiũ B I, & ex reſiduo I C, dimidium I K, & ſic deinceps; relinquetur tandẽ minor arcus, quã C G. Sit igitur iam arcus C K, arcu C G, minor, & ſubtendatur recta C K. Dico rectã C K, eſſe unum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus B I, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus C I; & quadrãs A B, in totidẽ partes æquales diuidatur, in quot diuiſus eſt quadrans B C; nec nõ ſemicirculus A H C, in totidem partes, quot cõtinet ſemicirculus A B C; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ ſubtendantur, quæ æquales quidem erunt ipſi rectæ C K, eo quod arcus arcui C K, æquales ſubtendant: Deſcriptum erit polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita oſtendetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis K L, ſecans ipſam A C, in M. Quoniam igitur anguli G E M, K M E, recti ſunt, erunt rectæ G H, K L, parallelę. Quare cũ recta G H, tangat circulum D E, in ſolo puncto E; recta K L, erit tota extra dictum circulũ, nec unquam ipſum continget, quod nunquam cum recta G H, conueniat. Multo igitur minus recta C K, quæ longius a circulo D E, abeſt, quam K L, circulum D E, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cum æqualia ſint lateri C K, ideoque æqualiter cum C K, a centro



1. *decimi.*

29. *tertij.*

28. *primi.*

4. *tertij.*

tro F, diſtent, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo,&c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cũ diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulũ minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea K L, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum D E.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidũ polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphæræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatque in maiori A B C D, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram E F G H. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintque communes ſectiones factæ in ſphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circunducti congruent ſectionibus A B C D, E F G H. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cum ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, ſe ſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, ut ſint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. Deinde in maiori circulo A B C D, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, ut facilius

16. *duodec*

facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circunferentiam uſque circuli A B C D, quæ circulum E F G H, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, applicetur in circulo A B C D, recta æqualis A ε. Quia uero, ſi arcui C γ, intelligatur ſubtendi recta, ut fiat triangulum G C γ, latus C γ, oppoſitum maiori angulo, nempe recto, maius eſt latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod ſi ex quadrãte C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & ſic deinceps; relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, ſeu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, ſubtenſa minor quam recta A ε, hoc eſt, quam G γ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, eſſe unum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, ut ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet, multo minus recta C K, ſubtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rurſus ducta diametro K N, erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientque communes ſectiones, circulos, ut iam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint A O C, N O K. Quia uero anguli O I C, O I K, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. quadrãtes erunt O C, O K; atque adeo, cum circuli A B C D, A O C, N O K, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus C L; Et quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, quæ in commu-

1. *quarti*

19. *primi*

1. *decimi.*

12. *undec.*

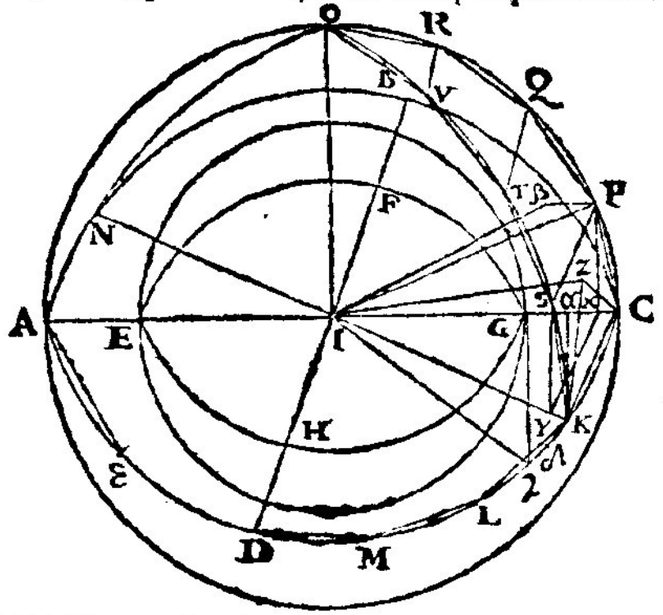
18. *undec.*

29. *tertij.*

cõmunes sectiones AC, NK, cadẽt; eruntq; inter se parallelę.

38. & 6. undec. 27. tertij.

QVONIAM igitur triãgulorũ PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint periphæriæ AOP, NOS, quibus insistũt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, ęqualibus demantur arcus æquales CP, KS; reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erũt duo anguli PCX, PXC, triãguli PCX, ęquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; ęquales quoque erunt & parallelæ PS, XY. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, ęquales; Ac proinde erit, ut IX, ad XC, ita IY, ad YK) Erunt parallelæ quoq; PS, CK, inter se, cum utraq; parallela sit ipsi XY; ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectę QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cũ eidẽ CK, sint parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterũ QTVR: Est autẽ & triangulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem cõstructio exhibeatur



26. primi.

33. primi 2. sexti.

9. undec.

7. undec.

2. undec.

beatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio; ut tota sphęra maior repleatur quadrilateris, & triãgulis, quę similia sint prædictis inter quadrãtes OC, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circunscriptum dictis quadrilateris, atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

DVCATVR ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectę ZC, ZK. Quoniam igitur, ex defin. 3 lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint; erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, ęqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, ęqualia erunt, ideoq, & ipsę rectę ZC, ZK, ęquales. Similiter ostendemus rectas, quę ex Z, ad P, S, ducẽtur, ęquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK; Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam uero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

47. primi.

12. secundi

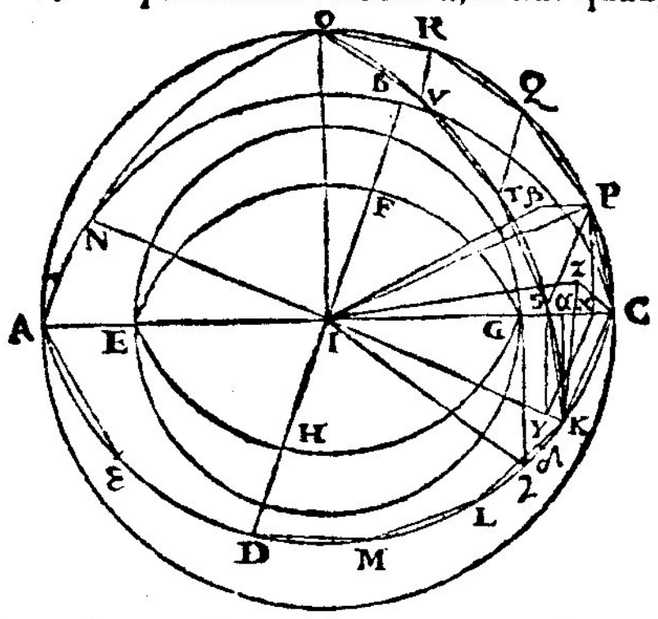
DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI. & Aα, maior sit, quã AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quam ob rem cũ sit, ut AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC. ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorũ sint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. Est autem rectangulũ sub AC, αC, æquale quadrato rectę CK; & rectangulum sub Aα, αC, ęquale quadrato rectę Kα; quod rectæ CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum

8. sexti.

17. sexti.

gulum A K C.) Igitur & quadratum rectæ C K, minus erit duplo quadrati rectæ K α. Ac propterea cum quadratum rectę C K, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectę Z C; erit quadratum rectæ K α, maius quadrato rectæ Z C.

47. primi.



Quoniã uero quadratũ rectæ I C, æquale est quadratis rectarũ I Z, Z C; & quadratũ rectæ I K, quadratis rectarum I α, α K: Suntq; æqualia quadrata rectarũ æqualiũ I C, I K; Erunt & quadrata rectarum I Z, Z C, æqualia quadratis rectarũ I α, α K. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ α K; & ex illis minus, uidelicet rectæ Z C, erit reliquum quadratum rectæ I Z, maius quadrato reliquo rectæ I α; ideoque recta I Z, maior quam recta I α. Quapropter cum punctum α, non tangat sphęram minorem E F G H, quod per coroll. propos. præcedentis recta K α, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani C K S P, longius absint a sphęra E F G H, quam punctum Z, ut mox ostendemus, non tanget planum C K S P, sphæram E F G H.

Sed & expeditius ex ipsa fere cõstructione figurę ostendemus, planum C K S P, non tangere sphęram minorem E F G H, si prius ducatur recta I γ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam C K, minorem esse recta G γ: Est autem C K, maior, quam Z C, quod angulus C Z K, obtusus sit, ut mox demonstrabitur; Multo maior erit G γ, quam Z C; Ac proinde quadratum rectę G γ, maius quadrato rectæ Z C. Quia uero quadratum rectę I γ,

19. primi.

I γ, æquale est quadratis rectarum I G, G γ; & quadratum rectæ I C, quadratis rectarum I Z, Z C; sunt autem quadrata rectarum I γ, I C, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum I G, G γ, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ G γ, & hinc quadrato rectæ Z C; relinquetur quadratum rectæ I G, minus quadrato rectæ I Z; Ac propterea recta I G, minor, quam I Z Quam ob rem, cum I G, sit sphæræ minoris E F G H, semidiameter; existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, ut prius, planum C K S P, sphæram E F G H, nequaquam continget.

47. primi

Ducatur rursus ex I, ad planum P S T Q, perpendicularis I β, eritque β, centrum circuli circa P S T Q, descripti, ut demonstratum est: Connexis autem rectis β P, I P, cum angulus I β P, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. erit quadratum rectæ I P, æquale quadratis rectarum I β, β P. Quia uero & quadratum rectæ I C, (quod æquale est quadrato rectæ I P, ob æqualitatẽ rectarũ I C, I P) æquale est quadratis rectarũ I Z, Z C; erunt quadrata rectarũ I β, β P, quadratis rectarum I Z, Z C, æqualia: est uero quadratum rectæ Z C, maius quadrato rectę β P, quod & linea Z C, maior sit, quã linea β P, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratũ rectæ I β, reliquo quadrato rectę I Z, maius erit; ideoq; & linea I β, maior quam linea I Z: Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram E F G H, existet, quam punctum Z, propterea que multo minus planum P S T Q, quam C K S P, tanget sphæram minorem E F G H. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa eadem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

47. primi.

COROLLARIVM.

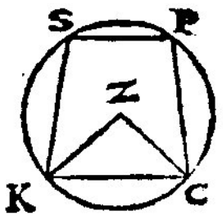
Ex ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra

in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; ut constat, si intelligatur harũ sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionẽ triplicatã laterũ homologorum, hoc est, semidiametrorũ sphærarũ, ut cõstat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, ut una pyramis ad
12. quinti unam pyramidem, ita omnes pyramides, id est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, hoc est, ad solidũ polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrũ unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semi-
15. quinti diametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

SCHOLION.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera, quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonstranda.

PRIMO *itaque ostendendum est, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterũ ex cẽtro Z, circulus. Quoniã igitur in figura superiori, est ut IK, ad KC, ita IΥ, ad ΥX, (quod per coroll propos 4. lib. 6. triangula ICK, IXΥ, similia sint.) Est autem IK, maior quam IΥ; erit & KC, maior quam ΥX. Cum igitur ΥX, æqualis sit ostensa ipsi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib.*

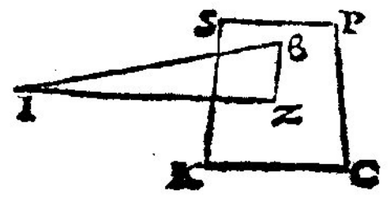


14. quinti

28. tertij. *3. Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Ac idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut per-*
sp[illegible] est ex coroll. 2. ultimæ propos. lib. 6.

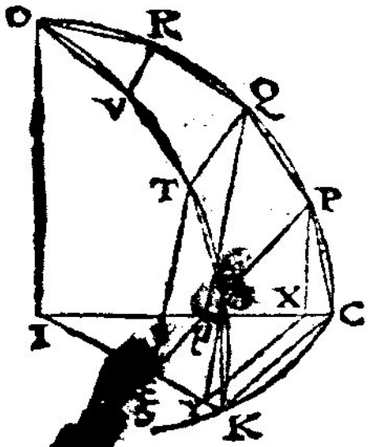
[illegible]O demonstrandum est, omnia alia puncta quadri-

quadrilateri CKSP, longius a centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ IΘ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est ex defin. 3. lib. 11. Erit latus illi oppositum Iθ,



19. primi. *maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.*

TERTIO, *ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, eruntque inter se se parallelæ, vt de rectis PX, SΥ, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ, erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum*



38. undec. 6. undec. *fuit parallelas esse & æquales PS, XΥ. Quia uero μξ, ipsi CK, parallela est, quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in*
2. sexti. 20. primi. *μ, & ξ, velusi diximus de recta XΥ; erũt quoque μξ, XΥ, parallelæ. Quare erit, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ut IΥ, ad ΥX, ita Iξ, ad ξμ: est autem IΥ, maior quam I[illegible]tur & ΥX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XΥ, maior erit quam QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.*

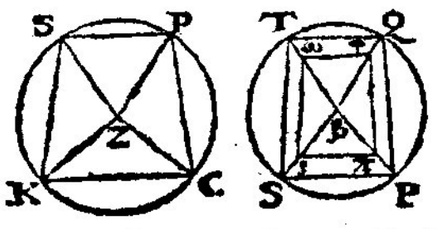
HOC *ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur q; e centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur [illegible] non credatur maior, quã βP, erit vel æqualis, vel*

primum æqualis. Quia ergo latera Z K, Z C, *æqualia ponuntur lateribus* ß S, ß P; *& basis* K C, *maior est basi* P S; *erit angulus* K Z C, *maior angulo* S ß P: *Eadem ratione maior erit angulus* S Z P, *angulo* T ß Q. *At quoniam bases* K S, C P, *basibus* S T, P Q, *sunt æquales; erunt anguli* K Z S, C Z P, *angulis* S ß T, P ß Q, *æquales. Igitur quatuor anguli ad* Z, *maiores erunt quatuor angulis ad* ß: *Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdū. Non igitur æqualis est recta* Z C, *rectæ* ß P.

25. primi.

8. primi.

SIT *secundo* Z C, *minor, quam* ß P. *Et abscindantur* ß π, ß ρ, ß ω, ß φ, *ipsis* Z C, Z K, Z S, Z P, *æquales, connectanturq; rectæ* π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, *quæ parallelæ erunt rectis* P S, S T, T Q, Q P, *eo quod rectæ ex cē tris sectæ sint proportionaliter; Ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut* ß S, *ad* S P, *ita* ß ρ, *ad* ρ π. *Cum ergo* ß S, *maior sit, quam* ß ρ, *erit &* S P, *maior quam* ρ π. *Eademq; ratione maiores erunt* S T, T Q, Q P, *rectis* ρ ω, ω φ, φ π; *Ac propterea cū* P S, *minor sit quā* C K, *&* S T, P Q, *æquales rectis* K S, C P; *&* T Q, *minor quā* P S, *erunt rectæ* π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, *minores rectis* C K, K S, S P, P C. *Quare cū rectæ* ß π, ß ρ, ß ω, ß φ, *rectis* Z C, Z K, Z S, Z P, *sint æquales; erunt anguli ad* Z, *maiores angulis ad* ß: *Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis æquales ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta* Z C, *quam* ß P: *Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.*



2. sexti.

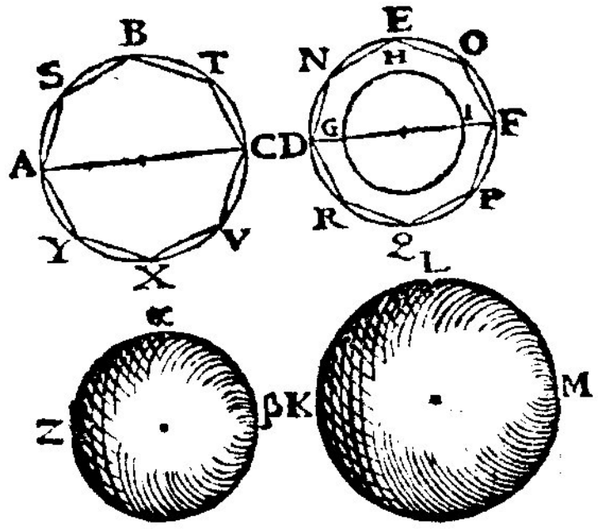
14. quinti.

15. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suārum diametrorum.

SINT duæ sphęrę A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. Dico sphęram A B C, ad sphęram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Nisi enim hoc non concedatur, habebit sphęra A B C, ad aliam

aliam sphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem quam D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrū D F. Habeat primum sphera A B C, ad sphæram G H I, minorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrū D F; intelligaturq; sphæra G H I, concentrica sphæræ D E F. Inscribatur in sphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem sphæram G H I; Atq; huic simile polyedrum A S B T C V X Y, inscribatur in sphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ A B C, ad sphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit ut sphæra A B C, ad sphæram G H I, ita polyedrū A S B T C V X Y, ad polyedrū D N E O F P Q R. Quare cum sphæra A B C, maior sit polyedro A S B T C V X Y; erit & sphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra A B C, ad sphæram G H I, minorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.

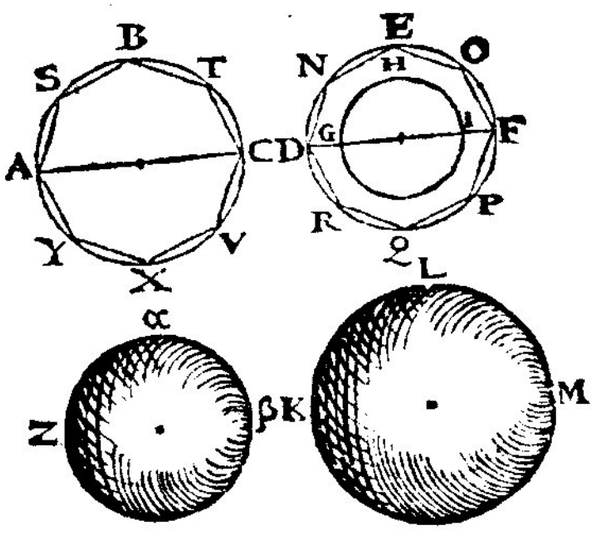


17. duodec.

14. quinti.

HABEAT secundo sphæra A B C, ad sphæram K L M, maiorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit ut sphæra A B C, ad sphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, ut sphæra K L M, ad sphærā A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y:

BTCVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propos. polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphæra KLM, ad sphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita sphęra DEF, ad aliam sphæram Zαβ. Habebit igitur & sphæra DEF, ad sphærā Zαβ, proportionem triplicatā diametri DF, ad diametrū AC.



Et quia sphæra KLM, maior ponitur, quam sphæra DEF, erit quoq; sphæra ABC, maior, quam sphæra Zαβ. Quapropter sphæra DEF, ad sphæram Zαβ, minorem sphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est nō posse sphæram ad spheram alia sphera minorem, proportionem habere triplicatam diametrorū. Non ergo habebit sphęra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatā diametri AC, ad diametrum DF; Sed neq; ad minorem habet, ut demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaq; inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendū.

COROLLARIVM.

Hinc fit, ita esse sphæram ad sphæram, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tā sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS

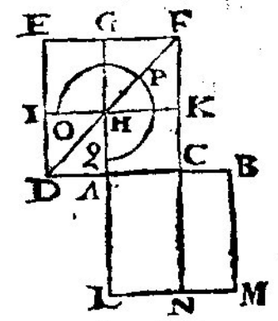
ELEMENTVM XIII.

Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplū potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

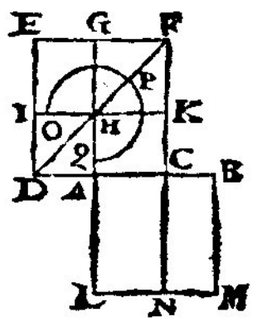
SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentū AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratū rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur.n. super CD, quadratū CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrū in H, pūcto, p qđ ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, pficiatur quadratū AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarū AD, AC. Quia ergo est ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulū CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cū ponatur AB, dupla ipsi AD, sitq; AL, ipsi AB; & AH ipsi AD, æqualis; erit quoq; AL, ipsius AH, dupla: Est autem ut



3. defin. sex.
17. sexti.

1. *sexti.* tem ut A L, ad A H, ita rectangulum A N, ad A K, rectangulum. Duplum igitur est A N, ipsius A K. Quoniam autem

43. *primi.*



A K, ipsi I G, est æquale; erit A N, æquale duobus A K, I G. Additis igitur æqualibus C M, K G; erit quadratũ A M, gnomoni O P Q, æquale. Quare cum quadratum A M, quadruplum sit quadrati A I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea A B, dupla ponatur lineæ A D; erit & gnomon O P Q, eiusdem quadrati A I, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni O P Q, addatur ipsum quadratum A I, quintuplum efficietur quadratum C E, quadrati A I.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A B, quadruplum est quadrati rectæ A D, quod linea A B, dupla lineæ A D, ponatur; Est autem quadratũ rectæ

2. *secundi.* A B, æquale rectangulis sub A B, A C, & sub A B, B C, comprehensis; Et rursus, quod sub A B, A C, æquale est ei, quod sub A D, A C, bis; (sicut enim A B, ipsius A D, est dupla, ita quoq; erit rectangu-

1. *sexti.*



lum sub A B, A C, rectanguli sub A D, A C, duplum, cum utriusque rectanguli eadem sit altitudo A C. Ac propterea rectangulum sub A D, A C, bis sumptum æquale erit rectangulo sub A B, A C.) Quod uero sub A B,

17. *sexti.* B C, æquale est quadrato rectæ A C, cum sit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B. Igitur quadratum rectæ A C, una cum rectangulo sub A D, A C, bis, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ A D; Ac proinde quadrata rectarũ A C, A D, vna cum rectangulo sub A D, A C, bis, quintupla

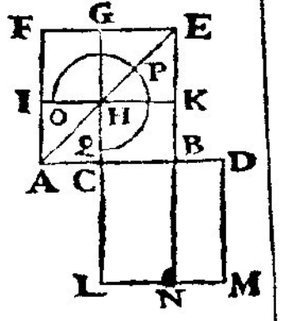
4. *secundi.* erunt quadrati eiusdem rectæ A D. Quo circa cum quadratum rectæ C D, æquale sit quadratis rectarum A C, A D, una cum rectangulo sub A D, A C, bis; Erit & quadratum rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta A B, in C, possitque quintuplum segmenti A C; sumatur autem ipsius A C, dupla C D, quę, ut post ostendemus, maior erit reliquo segmento B C. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquam partem prioris lineæ. Describatur super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ex C, ducatur ipsi A F, parallela C G, secans diametrum in punsto H, per quod agatur I K, parallela ipsi A B. Producta deinde G C, perficiatur quadratum C M, protrahaturq; E B, ad N. Erũtq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. C I, K G, quadrata rectarum A C, C B. Quia igitur quadratum B F, quintuplum ponitur quadrati C I; Si tollatur quadratum C I, relinquetur gnomon O P Q, eiusdem quadrati C I, quadruplus: Est autem & quadratũ C M, quadruplũ quadrati C I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla sit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rursus quoniam C D, ponitur ipsius A C, dupla; estq; L C, ipsi C D; & C H, ipsi A C, æqualis; erit & L C, ipsius C H, dupla. Cum igitur



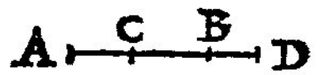
1. *sexti.* sit ut L C, ad C H, ita rectangulum L B, ad rectangulum C H; erit quoque illud huius duplum: Est autem C K, ipsi H F, æquale. AEquale igitur est L B, ipsis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo sunt tres rectæ C D, C B, B D; estq; rectangulum B M, sub C D, B D, comprehensum æquale ipsi K G, quadrato rectæ C B; Erit ut C D, ad C B, ita C B, ad B D. Quamobrem, ex definitione, recta C D, secta est in B, extre-

43. *primi.*

17. *sexti.*

B, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum C B.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ A B, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; eſtq; quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, A C, una cum rectãgulo ſub A C, C B, bis; Erunt & quadrata rectarum C B, A C, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub A C, C B, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectæ A C: Eſt autem & quadratum rectæ C D, eiuſdem quadrati rectæ A C, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub A C, C B, bis, quadrato rectæ C D. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis æquale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub A C, C B; cum utriuſque rectanguli eadem ſit altitudo C B; Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulo ſub A C, C B, bis.) Erit & quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub C D, C B, quadrato rectæ C D, æquale: At quadratum rectæ C D, æquale eſt rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D. Igitur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulis ſub C D, C B, & ſub C D, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub C D, C B, relinquetur quadratum rectæ C B, æquale rectangulo ſub C D, B D; ideoque erit ut C D, ad C B, ita C B, ad D B. Quare ex defin. recta C D, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtq; ſegmentum maius C B. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



4. *ſecundi.*

1. *ſexti.*

2. *ſecundi.*

17. *ſexti.*

LEMMA.

QVOD autem recta C D, maior ſit neceſſario, quam C B, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ C D, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ A C; Addito quadrato rectæ

rectæ A C, erunt duo quadrata rectarum C D, A C, quintupla eiuſdem quadrati rectæ A C. Eſt autem quadratum rectæ A D, maius quadratis rectarum A C, C D, cum æquale ſit quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo ſub A C, C D, bis. Igitur quadratum rectæ A D, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ A C; Ac propterea maius quadrato rectæ A B, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ A C. Quare recta A D, maior erit, quam recta A B; ideoque dempta communi A C; maior erit reliqua C D, quam reliqua C B. Quod eſt propoſitum.

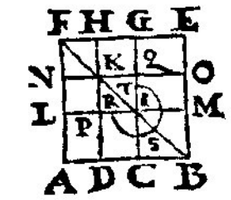
4. *ſecundi.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

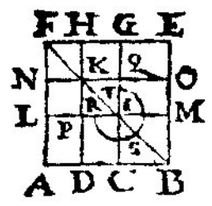
3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentũ A C, bifariã diuidatur in D. Dico quadratũ rectę B D, quintuplũ eſſe quadrati rectæ C D. Deſcribatur ſuper A B, quadratũ A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducãtur ipſis A F, B E, parallelæ C G, D H, ſecãtes diametrũ in I, K, punctis, per quæ agantur ipſis A B, E F, parallelæ L M, N O, quæ ſecẽt rectas C G, D H, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. L G, P Q, D O, quadrata rectarũ A C, C D, B D. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum L G, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum C E, æquale quadrato L G. (Nam cum ſit ut A B, ad A C, ita

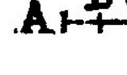


ita A C, ad C B, erit rectangulum ſub A B, C B, nempe
17. ſexti. C E, æquale quadrato rectę A C, nimirum ipſi L G,) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia uero æ-



qualia ſunt quadrata NH, PQ, ob æqua-
34. primi. litatem rectarum A D, C D; erunt earum
36. primi. latera H K, I Q, æqualia; ac proinde re-
43. primi. ctæ E O, O M, ipſis oppoſitæ æquales erunt. Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: Eſt autem I O, ipſi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi C O; gnomon R S T, rectangulo C E, erit æqualis. Cum igitur C E, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus; Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

ALITER. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum ſub A B, B C, una cum quadra-
6. ſecundi. to rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulũ



ſub A B, B C, quadruplum eſt quadrati rectæ C D; (Nam cum ſit, ut
17. ſexti. A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum ſub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4 lib. 2. quadruplum ſit quadrati rectę C D; erit & rectangulum ſub A B, B C, quadruplum eiuſdem quadrati rectę C D.) Ac propterea rectangulum ſub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratũ rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

CONVERSVM *huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.*

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quin-

ti quintuplum poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta A B, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum A C, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus. (cum enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum poſit quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus.) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G: At gnomoni R S T, æquale eſt rectangulum C E, ut ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato L G, rectæ A C, æquale erit idem rectangulum C E, ſub A B, B C, comprehenſum: Ac proinde erit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, recta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum. 17. ſexti.

ALITER. Cum A C, diuiſa ſit bifariam in D, & ei addita C B; erit rectangulum ſub A B, B C, una cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cum quadratum ex recta linea B D, deſcriptum quintuplũ ponatur quadrati ex recta C D, deſcripti; erit & rectãgulũ ſub rectis lineis A B, B C, deſcriptum, una cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum ſub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale eſt rectangulum ſub A B, B C. Quamobrem erit, ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde recta A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione. 6. ſexti. 17. ſexti.

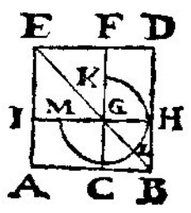
THEOR.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur ; Quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul utraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque ſegmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipſi BD, parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Quoniam igitur eſt, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB, erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale ſit ipſi CD; erit gnomon KLM, una cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectę AB, una cum quadrato CH, rectæ BC, eiuſdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.



17. ſexti.

ALITER. Quoniam eſt, ut AB, ad AC, ita AC, ad CB; erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum ſub AB, BC, bis, una cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, ſimul æqualia quadrato rectę AC, una cum rectangulo ſub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC. Quocirca ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodque a minore ſegmento, ſimul utraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

17. ſexti.

7. ſecundi

SCHO-

SCHOLION.

CONVERSVM *etiam huius uerum eſt, nidelicet.*

SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, una cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti; Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.

SECTA *ſit recta* AB, *inæqualiter in* C, *ita ut quadratum totius* AB, *& quadratum minoris ſegmenti* BC, *utraq; ſimul tripla ſint quadrati maioris ſegmenti* AC. *Dico rectam* AB, *ſectam eſſe extrema ac media ratione. Conſtructa enim figura, ut prius; cum quadrata* AD, CH, *tripla ſint quadrati* IF; *Dempto quadrato* IF, *erit gnomon* KLM, *una cum quadrato* CH, *duplus eiuſdem quadrati* IF. *Eſt autem gnomon* KLM, *una cum quadrato* CH, *æqualis duobus rectangulis* AH, CD. *Igitur & rectangula* AH, CD, *dupla ſunt quadrati* IF; *Ac propterea cum æqualia ſint* AH, *&* CD; *erit* AH, *ſub* AB, BC, *æquale ſit quadrato* IF, *rectæ* AC; *ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *Ac proinde* AB, *diuiſa erit in* C, *extrema & media ratione.* 17. ſexti.

ALITER. *Cum quadrata rectarum* AB, BC, *tripla ſint quadrati rectæ* AC; *Sint uero quadrata rectarum* AB, BC, *æqualia quadrato rectæ* AC, *& rectangulo ſub* AB, BC, *bis; erit & quadratum rectæ* AC, *una cum rectangulo ſub* AB, BC, *bis, triplum quadrati rectæ* AC. 7. ſecundi.



Dempto ergo quadrato rectæ AC, *relinquetur rectangulum ſub* AB, BC, *bis duplum quadrati rectæ* AC; *Et proinde rectangulum ſub* AB, BC, *ſemel, æquale quadrato rectæ* AC. *Quare ut prius, erit ut* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *ideoque* AB, *in* C, *ſecta erit extrema ac media ratione.* 17. ſexti.

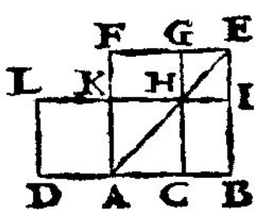
THEOR.

4.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

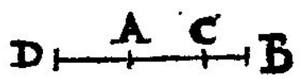
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio, recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, ſitq; maius ſegmentum A C, & adijciatur ei in rectum A D, æqualis maiori ſegmento A C. Dico rectam B D, ſecari in A extrema ac media ratione, eſſeq; maius ſegmentum A B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipſi B E, parallela C G, ſecans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipſi B D, parallela I K, & ex D, ducatur ipſi A F, parallela D L, occurrens ipſi I K, productæ in L. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. C K, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur eſt ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum I F, contentum ſub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C: Eſt autem C K, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; additoq; communi B K, erit rectangulum B L, contentum ſub B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; Ac proinde erit ut B D, ad A B, ita A B, ad D A. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum A B.



17. *ſexti.*
36. *primi.*
17. *ſexti.*

ALITER. Quoniam eſt ut A B, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo ut D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo ut D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt, ad A D. Secta igitur eſt B D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturq; naturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLION.

SIMILITER *cum Campano & hoc demonſtrabimus.*

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahatutque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RECTA enim linea B D, extrema ac media ratione ſecetur in A, cuius maius ſegmentum A B, minus autem ſegmentũ A D; & ex maiori ſegmento A B, detrahatur recta A C, æqualis minori ſegmento A D. Dico maius ſegmentum A B, diuiſum eſſe in C, extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſſe rectam A C, quæ æqualis eſt minori ſegmento A D. Facta enim prioris figuræ conſtructione, cum ſit ut B D, ad A B, ita A B, ad A D; erit rectangulum B L, contentum ſub B D, A D, æquale quadrato B F, rectæ A B; & ablato communi B K, 17. *ſexti.* *erit A L, æquale ipſi I F: Eſt autem A L, ipſi C K, æquale.* 36. *primi.* *AEquale igitur eſt I F, cõtentum ſub A B, C B, quadrato C K, rectæ A C; Ac proinde erit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B.* 17. *ſexti.* *Quare A B, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione. cuius ſegmentum maius eſt A C, minus uero ſegmentũ recta C B. Quod eſt propoſitum.*

ALITER. Quoniam eſt ut tota B D, ad totam A B, ita A B, detracta ex B D, ad A D, hoc eſt, ad A C, detracta ex A B, erit quoque ita A D, reliqua ipſius B D, hoc eſt, A C, ad C B, reliquam ipſius A B, ut tota B D, ad totam A B, hoc eſt, ut A B, ad A C; Ac propterea diuiſa erit A B, in C, extrema & media ratione. 19. *quinti.*

RVRSVS & hoc demonſtrabimus, quod ſequitur.

SI

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim A B, extrema ac media ratione in C, sitq; D E, dimidium totius, & D F, dimidium maioris segmenti A C. Dico D E, in F, secari extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse D F. Cum enim sit ut A B, tota ad D E, totam, ita A C, ablata ad D F, ablatam, cum utrobique sit propertio dupla; erit quoque reliqua C B, ad reliquam F E, ut tota ad totam; Ac proinde & C B, dupla erit ipsius F E. Quoniam uero est ut A B, ad A C, ita D E, dimidia illius ad D F, dimidiam huius: Item ut A C, ad C B, ita D F, dimidia illius ad F E, dimidiam huius; Est autem ex defin. lineæ secta extrema ac media ratione, A B, ad A C, ut A C, ad C B: Erit quoq; D E, ad D F, ut D F, ad F E; Ac proinde ex eadē defin. D E, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

19. quinti.
15. quinti.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrunque segmentorum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis A B, in C, extrema & media ratione. Dico utrunque segmentum A C, C B, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur .n. maiori segmento A C, recta A D, æqualis dimidiæ totius A B. Quoniã igitur quadratũ rectæ C D, quintuplũ est quadrati

1. tertij dec.

drati rectę A D; habebit quadratum rectæ C D, ad quadratũ rectæ A D, proportionem, quã numerus ad numerũ. Quare commensurabilia erunt quadrata rectarũ C D, A D; propterea q; ipsæ rectæ C D, A D, cõmẽsurabiles quoq; existẽt, saltem potentia: Est autem A D, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis A B. Igitur & C D, Rationalis erit. Quia uero quadrata rectarum C D, A D, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent.n. proportionem quam 5. ad 1. uel 25. ad 5.) erunt rectæ C D, A D, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex C D, Rationali detrahatur A D, Rationalis potentia tantum commẽsurabilis; erit reliqua A C, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.



6. decimi.
9. decimi.
74. decimi.

RVRSVS applicato ad A B, rectangulo A E, contento sub A B, C B; cum sit ut A B, ad A C, ita A C, ad C B; erit rectangulum A E, æquale quadrato rectæ A C. Quamobrem quadratum Apotomæ A C, nimirum rectangulum A E, applicatum secundum lineam Rationalem A B, facit alterum latus B E, hoc est, rectam C B, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

17. sexti.
98. decimi.

SCHOLION.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

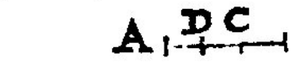
SIT recta A B, extrema ac media ratione diuisa in C, sitq; maius segmentum A C, lineæ Rationalis. Dico minus segmentũ C B, esse Apotomen. Diuisa.n. A C, bifariam in D; erit C D, dimidia ipsius Rationalis A C, Rationalis, cũ sit ipsi A C, commen-

commensurabilis. Quoniam autem quadratum rectæ B D, *quintuplum est quadrati rectæ* C D; *habebunt quadrata rectarum* B D, C D, *proportionem, quam numerus ad numerum, ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ* B D, C D, *commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur* C D, *sit Rationalis, erit quoq;* B D, *Rationalis. Quia uero quadrata rectarum* B D, C D, *non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ* B D, C D, *longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex* B D, *Rationali detrahatur* C D, *Rationalis potentia tantum commensurabilis; erit reliqua* C B, *Irrationalis, quæ uocatur Apotome.*

3. tertij dec.

6. decimi.

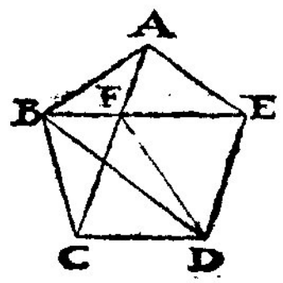
74. decimi.



7. THEOR. 7. PROPOS. 7

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectę B E, A C, B D; & ex puncto F, ubi se intersecant rectæ B E, A C, recta ducatur F D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales: Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, cum æqualia sint ostensa latera B E, B D;



4. primi.

5. primi.

B D; Toti igitur anguli A E D, C D E, æquales erunt. Rursus quia latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli B A C; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi: Erit & basis B E, basi A C, æqualis, & anguli A B E, A E B, angulis B A C, B C A, æquales. Cum ergo æquales sint anguli A B E, B A C, trianguli A B F; erunt quoque latera B F, A F, æqualia; Ac propterea si ipsa demãtur ex rectis æqualibus B E, A C, erunt reliquæ lineæ F E, F C, æquales. Itaque cum latera F E, E D, trianguli F E D, æqualia sint lateribus F C, C D, trianguli F C D; & basis communis F D; erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli A E B, B C A, ostensi æquales. Aequales igitur sunt toti anguli A E D, B C D; Ac proinde cum angulo A E D, ostensus sit æqualis angulus C D E, & angulo B C D, æquales ponantur anguli A B C, B A E; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoq; æquianguluin erit ipsum pentagonum.

6. primi.

8. primi.

SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera A B, A E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus C B, C D, trianguli C B D; & anguli quoque ipsis cõtenti, æquales, ex hypothesi; Erunt & bases B E, B D, & anguli A E B, C D B, æquales; Sunt autem & anguli B E D, B D E, æquales, quod æqualia ostensa sint latera B E, B D. Igitur toti anguli A E D, C D E, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli B A E, C D E; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, ut iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

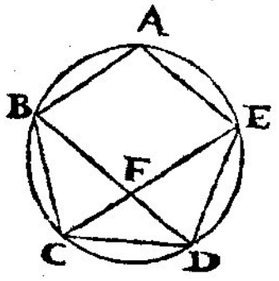
4. primi.

5. primi

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pẽtagono æquilatero & æqui angulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, & D, rectæ DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema & media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. Descripto enim circulo circa pentagonum, erũt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia uero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque, ipsis contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. Quare erit ut BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, ut ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquiãguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



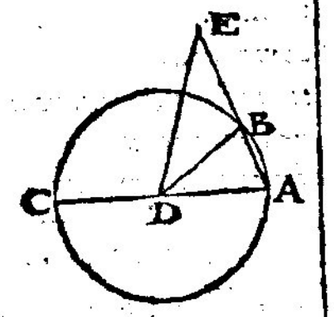
14. quarti.
28. tertij.
4 primi.
32. primi.
33. sexti.
6. primi.
27. tertij.
32. primi.
4 sexti.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur,

secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius periphæriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erunt & anguli BDE, BED, æquales: quibus cum æqualis sit externus ABD; erit angulus ABD, duplus anguli BED: Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: Ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. Cum ergo ãngulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. Igitur erit ut EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis, ad BA; Ac idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmẽtum est hexagoni latus. Quoderat demonstrandum.



33. sexti.
5. primi
32. primi.
5. primi
32. undec.
32. primi.
4. sexti.

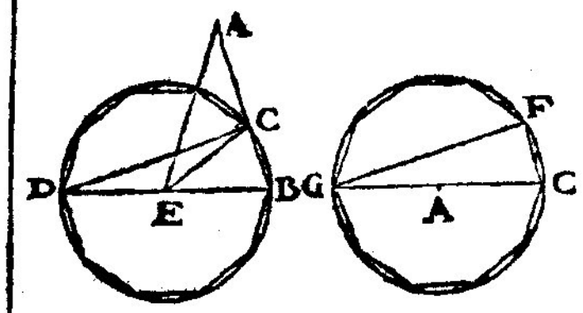
SCHOLION.

QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum; Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14 propoſ. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus. Videlicet.

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitque primo AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentũ CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coapietur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulũ cadat. Et ducta ex B, per centrum F, diametro BED, cõnectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro FB, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeãt latera



6. ſexti.

latera circa communem angulum B, proportionalia; eritque angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni; erunt anguli CAE, CEA, æquales; quibus cum æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A: Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli. Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus erit. Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.

5. primi. 32. primi 5. primi. 32. primi 33. ſexti.

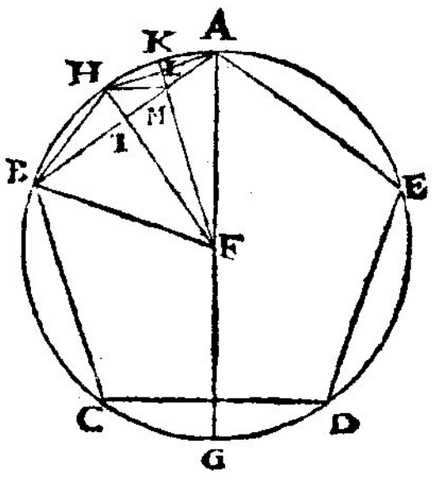
SIT ſecundo CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritque ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntque latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, nimirum recti: Erunt quoque latera BD, CG, inter ſe æqualia. Quam ob rẽ cum diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cum recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.

31. tertij. 26. primi

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo A B C D E, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris A B, æquale esse quadrato lateris hexagoni, una cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiso deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, secans rectam A B, in I: eritque recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu A H, bifariam in K, adiungatur recta F K, secans rectam A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniam igitur arcus A H, B H, æquales sunt; erunt & anguli ipsis insistentes A F H, B F H, æquales. Quare cum latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia sint lateribus B F, F I, trianguli B F I; & anguli ipsis contenti, æquales quoque; erunt & bases A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus A B C G, A E D G, demantur æquales arcus A B C, A E D; relinquentur arcus C G, D G, inter sese æquales, ideoq; erit arcus C G, dimidium arcus C D: Est autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cum arcus A B, C D, æquales sint;



27. tertij.

4. primi

sint; erunt quoque eorum dimidij arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cum arcus A H, duplus sit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiusdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales sunt, & est arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiusdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K; & idcirco angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: Sed quia (cum anguli F A B, F B A, ob æqualitatem laterum F A, F B, æquales sint, ipsisque æqualis externus B F G;) idem angulus B F G, duplus est quoque anguli F A B; erunt idcirco anguli B F M, F A B, æquales; Ac propterea triangula A B F, F B M, cum habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. Quocirca erit ut A B, ad B F, ita B F, ad B M; ideoque rectangulum sub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F. Rursus quia latera A L, L M, trianguli A L M, æqualia sunt lateribus H L, L M, trianguli H L M, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti: erunt & bases A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales: Est autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, quod & latera H A, H B, æqualia sint. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; Ac propterea triangula A B H, A H M, cum habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. Quam ob rem erit ut A B, ad A H, ita A H, ad A M; ideoque rectangulum sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: ostensum est autem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt quadratis rectarum B F, A H: At uero rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum B F, A H, lateris uidelicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c.

Quod erat demonstrandum.

1. quinti.
33. sexti.
5. primi
32. primi.
4. sexti.
17. sexti.
4. primi
5. primi.
32. primi.
4 sexti.
17. sexti.
2. secundi

COROLLARIVM. I.

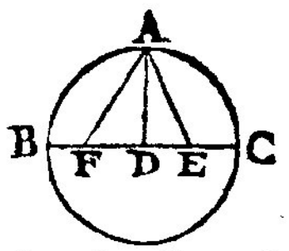
HINE sequitur, lineam rectam, quæ ex centro ducta diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Demonstratum enim est diametrum A G, ex puncto A, ductam diuidere arcum C D, quem latus oppotum C D, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

SCHOLION.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterum describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrum D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariã in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F, adiungaturque recta A F. Dico rectam A F, esse latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cum enim C D, secta sit bifariam in E, eique addita D F; erit rectangulum sub C F, D F, vna cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoque quadrato rectæ E A, quæ ipsi E F, est æqualis: Est autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarum A D, D E. Igitur rectangulum sub C F, D F, vna cum quadrato rectæ D E, æquale est quadratis rectarum A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E,



6. secundi

47. primi.

D F, relinquetur rectangulum sub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc est, quadrato rectæ C D. Quam obrem erit vt C F, ad C D, ita C D, ad D F; propterea que recta C F, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum C D, sit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum D F, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni A D, una cum quadrato lateris decagoni D F, æquale est quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli; Est autem eisdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.

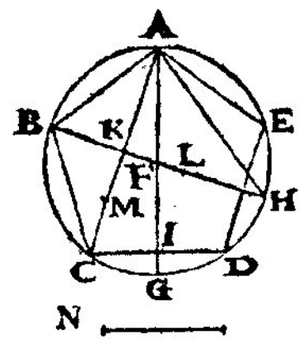
27. sexti.

10. tertij &
47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

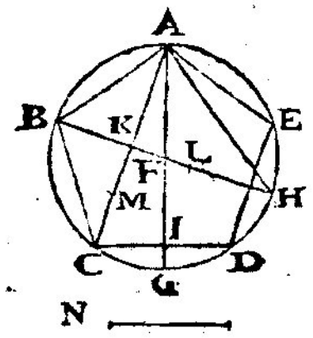
SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, latus C D, in I, connectanturque rectæ A C, A H. quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro F H, quarta eius pars F L; Itẽ ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota B L, composita, cum sit commensurabilis utrique F L, B F, Rationalis erit. Rursus quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bifariam in B; secabit quoque recta A C, bifariam



16. decimi.

bifariam in *K*, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo A C I, A F K, cum habeant angulos A I C, A *K* F, rectos, & angulum C A I, communem, æquiangula inter ſe erunt. Quam ob rem erit, ut C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando ut C I, ad F *K*, ita C A, ad F A: Vt autem C A, ad A F, ita eſt C M, quarta pars ipſius C A, ad F L, quartã partem ipſius F A. Erit igitur ut C I, ad F *K*, ita C M, ad F L; & permutando, ut C I, ad C M, hoc eſt, ut C D, dupla ipſius C I, ad C *K*, duplam ipſius C M, ita F K, ad F L; Atque componendo, ut C D, C *K*. ſimul ad C K, ita F *K*, F L, ſimul, nimirum recta K L, ad F L; Ac propterea erit, ut quadratum rectæ compoſitæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C *K*, ita quadratum rectæ K L, ad quadratum rectę F L. Quia uero ſi A C, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta uidelicet recta B D,) maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi C D; Erit quadratum rectę compoſitę ex C D, maiori ſegmento, & C K, dimidia totius, quintuplũ quadrati rectæ C K, dimidię ſcilicet totius. Quare & quadratum rectę K L, quintuplum erit quadrati rectę F L, ideoque quadratum rectę K L, commenſurabile erit quadrato rectę F L; Ac proinde rectę K L, F L, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autẽ F L, oſtenſa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit. Deinde quia qualium partium 4. eſt B F, talium 1. eſt F L; ac propterea qualium 5. eſt B L, talium 1. eſt F L; erit quadratum rectę B L, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratum rectę F L, (ut in his numeris patet 1. 5. 25. habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. eſt quadratum rectę F L, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectę K L. Qualium igitur 25. eſt quadratum rectę B L, talium 5. eſt quadratum rectę K L; ac proinde quadratum rectę B L, quintuplum erit quadrati rectę K L. Quia ergo quadrata rectarum B L, K L,



32. primi
4. ſexti.
5. quinti
22. ſexti.
8. tertiidec.
1. tertiidec.
6. decimi.
20. ſexti.

K L, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut paret ex coroli. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. uel 5. ad 1.) Erunt rectæ B L, *K* L, longitudine incommenſurabiles; ideoque, cum oſtenſę ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali B L, dematur Rationalis *K* L, potentia tantũ commenſurabilis; erit reliqua B *K*, Irrationalis, quę dicitur Apotome, ei uero congruens erit K L. 9. decimi. 74. decimi

Iam uero recta B L, poſſit plus, quam recta *K* L, quadrato rectę N. Quoniã igitur quadratum rectę B L, ęquale eſt quadratis rectarũ K L, & N; Qualium autem partiũ 5. fuit quadratum rectę B L, talium 1. fuit quadratum rectę *K* L; Erit reliquum quadratum rectę N, talium partiũ 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarũ B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerũ. Quare cõmenſurabilia erunt; propterea; rectę ipſę B L, & N cõmenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem B L, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia uero quadrata rectarum B L, & N, proportionẽ non habent, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ; (ut perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quod proportio eorum ſit, quę 5. ad 4.) Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quapropter cum tota recta B L, Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt B L,) poſſitque plus, quam congruens A L, quadrato rectę N, ſibi longitudine incommenſurabilis, ut oſtenſum eſt; Erit B K, Apotome quarta, ex definitione. 6. decimi. 9. decimi.

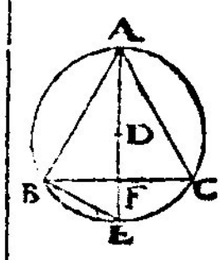
Postremo quia recta A B, eſt media proportionalis inter B H, B *K*, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quod triangulum A B H, habeat angulum B A H, rectum, a quo ducta eſt A K, ad baſin perpendicularis) erit quadratum rectę A B, ęquale rectangulo ſub B H, B K. Quocirca cum ſuperficiem contentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſſit recta linea A B; Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum. 31. tertij. 17. ſexti. 95. decimi.

THEOR.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C Dico quadratum lateris A B, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ ſecet, ex coroll. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectã B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripherię ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectę A E, æquale eſt quadratis rectarũ A B, B E, quod angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit: eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea A E, dupla ſit lineę B E, erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, B E, talium partiũ 1. erit quadratum rectę B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectę A B. Quare quadratum rectę A B, triplum eſt quadrati rectę B E, quę æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.



47. primi. 31. tertij. 47. primi.

COROLLARIVM.

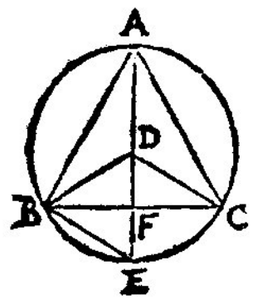
HINC facile colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, a latere trianguli B C. Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quod quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ B F, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ D E, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ D E, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius D E; erit F E, dimidia ipſius D E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.

SCHOLION.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex uno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque uiciſſim bifariam, & angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariã & angulũ B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari a latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cum latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales quoque: Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod eſt primum.



8. primi

DEINDE, cum latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: Erunt & baſes B F, C F, & anguli ad F, æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum. 4. primi.

POSTREMO, cum anguli B A E, C A E, demonſtrati ſint eſſe æquales; erunt & arcus B E, C E, æquales. Quare 26. tertij.

cum

cum B E C, *arcus sit tertia pars circunferentiæ, erit* B E, *sexta pars eiusdem; Ac propterea recta* B E, *latus hexagoni, atque semidiametro proinde* B D, *æqualis, ex coroll. propos.* 15. *lib.* 4.

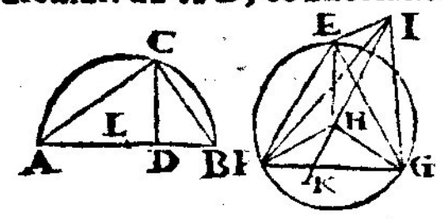
5. *primi* *Igitur anguli* B D E, B E D, *æquales erunt. Quoniam ergo anguli* B D F, B F D, *trianguli* D B F, *æquales sunt angulis* B E F, B F F, *trianguli* E B F, *& latus* B F, *commune; Erunt & latera* D F, E F, *æqualia.*

26. *primi*

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT data sphęrę diameter A B, circa quam semicirculus describatur A C B; & ex A B, auferatur tertia pars B D, ut sit A D, ipsius D B, dupla; at uero A B, eiusdem D B, tripla; & ipsius A D, sesquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectę A C, B C. Ad interuallum rectę H E, quę æqualis sit ipsi D C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur E F G, adiunganturque rectę H F, H G, quę singulę æquales erunt ipsi D C, cum æquales sint ipsi H E, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quę æqualis ponatur rectę A D, & ex I, demittantur rectę I E, I F, I G. Dico solidum contentum quatuor triangulis F E C, I E F, I F G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi,



4. *primi.* & 3. defin. lib. 11. erit basis A C, basi I E, æqualis Non aliter ostendemus eandem rectam A C, æquale esse rectis I F, I G. Rursus quia tres lineę A D, D C, D B, proportionales sunt

sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. ut A D, ad D B, ita quadratū rectę A D, ad quadratū rectæ D C; & cōponēdo, ut A B, ad D B, ita quadrata rectarū A D, D C, simul ad quadratū rectæ D C: Sunt autē quadrata rectarū A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; ut A B, ad D B, ita quadratū rectæ A C, ad quadratum rectæ D C; Ac proinde cu A B, sit ipsius D B, tripla, erit quoq; quadratū rectę A C, triplum quadrati rectę H E, cū H E, æqualis sit ipsi D C: Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ H E. Quadratū ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectę E F. Quare cū recta A C, ostensa quoque sit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis E F G, uertex uero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris E F, uel A C.

47. *primi.*

12. *tertij dec.*

EXTENDATVR perpendicularis I H, usque ad K, ut sit H K, ipsi D B, & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres I H, H E, H K; erunt quoq; I H, H E, H K, proportionales. Quare cum H E, sit ad I K, perpēdicularis, & media proportionalis inter I H, H K, semicirculus circa I K, descriptus in plano rectarū I K, H E, transibit per E, ut mox ostendetur; Eodemq; argumento tam semicirculus circa eandem rectam I K, descriptus in plano rectarum I K, H F, transibit per F, quam semicirculus circa eandem I K, descriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum circunductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc sphęra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

QVONIAM vero tres rectę A B, A C, A D, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit ut A B, ad A D, ita quadratū rectę A B, ad quadratū rectę A C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autē recta A B, sesquialtera rectę A D, qđ qualiū partiū 3.

est

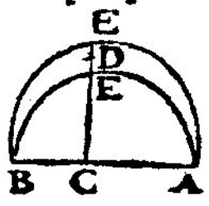
eſt AB, taliũ 2. ſit A D. Igitur & quadratũ rectę A B, ſeſquialteri ũ erit quadrati rectę A C; Ac propterea cum A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis, perſpicuum eſt, diametrum ſphęrę potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus; & data ſphęra cõplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD *autem ſemicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.*

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media propotionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT *enim ad* A B, *perpendicularis* C D, *& media proportionalis inter* A C, *&* C B. Dico *ſemicirculum circa* A B, *deſcriptum tranſire per* D. Nam *ſi tranſeat citra* D, *uel ultra, nimirum per punctum* E; *erit quoque* C E, *media proportionalis inter* A C, *&* C B, *ex coroll. propoſ.* 13. *lib.* 6. *Quare tam quadratum rectæ* C D, *quam quadratum rectæ* C E, *æquale erit rectangulo ſub* A C, C B; *Ac proinde quadrata rectarum* C D, C E, *inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ* C D, C E, *æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per* D.

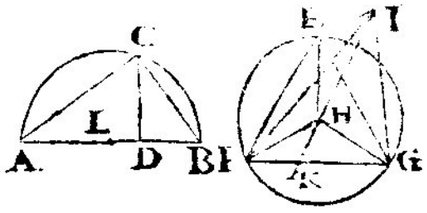


17. *ſexti.*

HINC *manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa* I K, *in plano rectarum* I K, H E, *tranſire per* E, *cum* H E, *ſit ad* I K, *perpendicularis, & media proportionalis inter* I H, H K.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ A B, oſtenſa ſit ſeſquialtera lateris pyramidis E F; erit quadratum rectæ E F, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratum rectæ A B: At qualium partium 6. eſt quadratum rectę E F, talium partium 2. eſt quadratum rectæ H E, quod quadratum rectę E F, triplum ſit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter ſphæræ A B, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri H E, cum proportio quadratorum ſit, quę 9. ad 2.



12. *dertijde*

COROLLARIVM II.

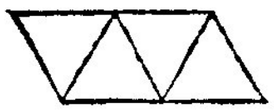
RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi A C B, eritque L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin E F G, ducitur perpendicularis; cum A D, æqualis ſit ipſi I H, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt quod centrum ſphærę) eſſe ſextam partem diametri ſphęræ, nempe rectæ A B. & tertiam partem ſemidiametri A L. Quoniam A D, dupla eſt ipſius D B; Qualium partium 4. eſt A D, talium 2. erit D B; ac proinde talium 6. tota A B, & ſemidiameter A L, talium 3. Quare ſi A D, eſt 4. & A L, 3. erit L D, 1. & idcirco L D, ſexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis H I, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim H I, eadem, quę AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2.
ut hic apparet 9.
6. 4.

SCHOLION.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totam soliditatem. Hanc uero praxim, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

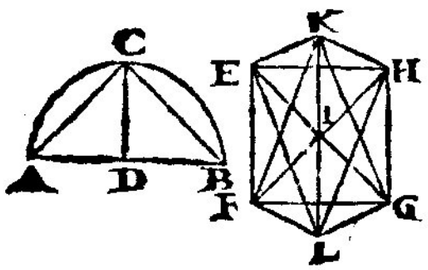


15. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphęræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectę AC, BC, quę æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quę æqualis sit ipsi AC, uel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectę IE, IF, IG, IH, æquales, cum sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, ut in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in utranque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectę KE, KF, KG, KH; LF,

4. *primi.*



LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quęritur. Quoniam latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At uero EIH, eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) Erit & basis EK, basi EH, æqualis: Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triãgula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singul s. Constitutum igitnr iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphęra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphęrę AB, potentia duplam esse lateris EF, uel AC.

8. *primi.*

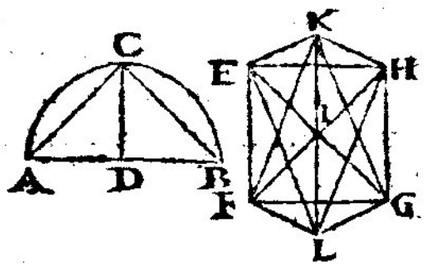
4. *primi.*

QVONIAM IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectę KI, IE, IL, æquales sint, ideoq; eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate prącedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circunductus, manente fixa diametro KL, describet sphęram, quę complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc sphęra æqualis sit datę sphęrę, cuius diameter AB; (Nam cum rectę AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectę AC, duplum quadrati rectę AD, quam quadratum rectę EF, quadrati rectę EI; Erunt & rectę AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totę diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphęrę ipsarum æquales existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphęra.

47. *primi.* QVIA vero quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti.



4. *undec.* 18. *undec.* Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas EG, HF; recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum; Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad plannm EFGH. Immo eadem ratione, ut paucis rē complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphærę duplum sit quadrati lateris octaedri, ut ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existat quadratis laterum octaedri FK, KH. Ita enim efficitur, ut angulus, FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

48. *primi.*

COROLLARIVM. II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, uertices uero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana unius sunt similia & æqualia planis alterius, ut constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, ut est demonstratum.

COROLLARIVM. III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. Quo

13. *tertijde* niam igitur diameter sphærę est potentia sesquialtera lateris tetraedri

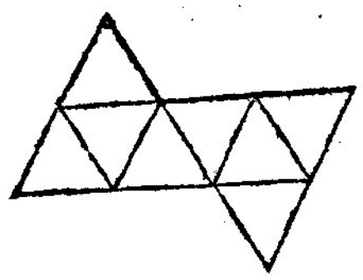
edri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphęræ. Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. est quadratum diametri sphęræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri. 14. *tercidec*

COROLLARIVM. IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectę FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse. 15. *undec.*

SCHOLION.

QVOD *si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis cōponetur octaedrum secundum totam soliditatem, ut ait Albertus Durerus.*



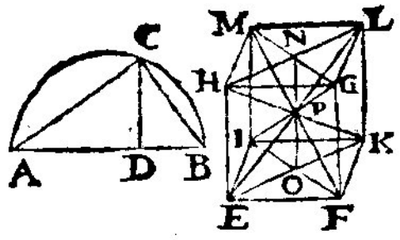
PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM constituere; & sphæra complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, ut sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur

perpendiculares E I, F K, G L, H M, æquales quoque ipſi B C, quarum extrema coniungantur rectis I K, K L, L M, M I. Quoniam ergo anguli I E F, K F E, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. erunt rectæ

6. *undec.*



E I, F K, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis poſita ſit ipſi B C, hoc eſt, ipſi E F. Igitur & E F,

33. *primi.*

I K, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammum eſt E F K I; In quo, cum lineæ E I, I K, K F, æquales ſint ipſi E F, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum E I K, F K I,

34. *primi.*

æquales ſint oppoſitis rectis K F E, I E F. Igitur E F K I, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt F K L G, G L M H, H M I E; Atque idcirco & I K L M, quadratum

24. *undec.*

erit, cum ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito E F G H. Eſt enim E L, ſolidum parallelepipedum, quod eius plana

15. *undec.*

oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit E L. Quem dico comprehendi ſphæra diametri A B. Sint enim planorum oppoſitorum E F K I; G H M L, diametri E K, F I, G M, H L, per quæ ducantur plana E K L H, F I M G. Quia igitur

28. *undec.*

tam planum E K L H, quam F I M G, cubum bifariam ſecat; utrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum uidelicet P, in quo, ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet N O, per idem punctum P, incedet. Quia uero plana E K L H, F I M G, rectangula ſunt, (Cum enim H E, perpendicularis ſit duabus rectis E I, E F, ob quadrata E M,

4. *undec.*

E K; perpendicularis quoque erit ad planum E K, ideoq; ad rectã E K, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E K L H, nec nõ & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo ſunt plana E K L H, F I M G,) & æqualia, quod latera unius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri E L, H K, F M, G I, æquales, ut conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1.

Ac

Ac proinde & ſemidiametri P E, P L, P H, P K; P F, P M, P G, P I, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circunductus, fixa manente diametro E L, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem: quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri A B, ita demonſtrabitur.

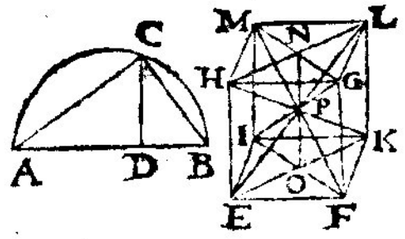
Cvm quadratum rectæ E K, æquale ſit quadratis æqua- 47. *primi.*
libus rectarum æqualium E F, F K, ac proinde duplum quadrati rectæ E F, hoc eſt, quadrati rectæ K L: Erunt quadrata rectarum E K, K L, tripla quadrati rectę K L: Eſt autem quadratis rectarum E K, K L, æquale quadra- 47. *primi.*
tum rectæ E L, quod angulus E K L, ſit rectus in rectangulo E K L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ K L, hoc eſt, quadrati rectæ B C: At uero eiuſdem quadrati rectæ B C, triplum eſt quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ A B, B C, B D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. ut eſt A B, ad B D, ita erit quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B C. Cum ergo A B, ipſius B D, ſit tripla, erit quoque quadratum rectæ A B, quadrati rectæ B C, triplum.) Igitur quadrata rectarum E L, A B, æqualia ſunt; Ac propterea ipſæ rectæ E L, A B, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarum ſphæræ, æquales exiſtunt.

Qvia uero oſtenſum eſt quadratum diametri E L, triplum eſſe quadrati lateris cubi K L; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplum eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

Ex demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi E L, H K, F M, G I, æquales eſſe, ſeſeq; mutuo bifariã ſecare in cẽtro P. Quod vero & recta N O, cõiungẽs cẽtra N, & O, quadratorũ oppoſitorum G H M L, E F K I, in eodẽ cẽtro P, bifariã diuidatur, hac rõne oſtẽdẽ. Duo anguli O F P, O P F, triãguli O F P, æquales sũt duobus angulis

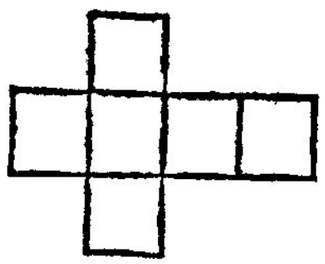
29. primi. 16. undec. 15. primi. NMP, NPM, trianguli NMP: (Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas EL, OM, quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum E F K I, G H M L; & angulus O P F, æqualis est oppositæ ad uerticem N P M) Sunt autem & latera P F, P M, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera P O, P N, æqualia erunt; ac proinde recta N O, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.



COROLLARIVM. II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentijs laterum tetraedri & cubi simul sumptis. Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: Qualium uero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quē admodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est A C, cubi uero B C. Perspicuum autem est, diametrum sphæræ A B, posse & rectam A C, & rectam B C, cum angulus A C B, sit rectus. 13. tertijde. 15. tertijde. 47. primi.

SCHOLION.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiusspiam, ut constat.

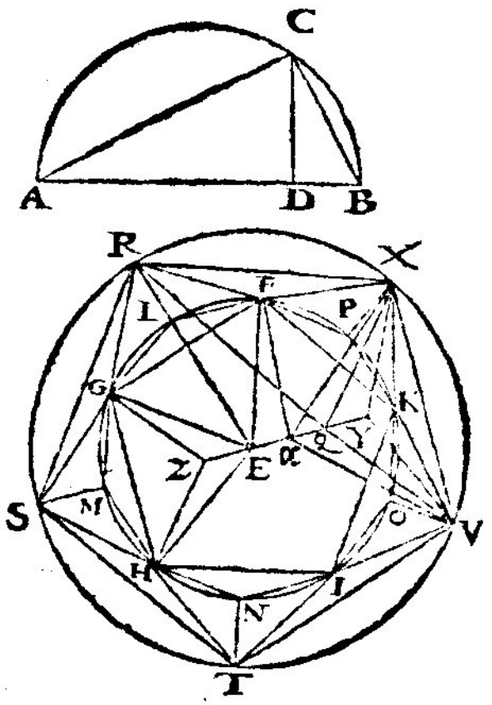
16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphæra

sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, ut AB, ipsius BD, tupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At uero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hęc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Erunt; omnes inter se æquales; sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, ut uitaremus confusionem, non duximus.) binæ inter se æquales erunt; Ac proinde, cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoq; erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. Quia uero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: Eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto: conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana unum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere unum planum; nec non planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritq; æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta 11. quarti. 6. undec. 33. primi. 15. undec.

puncta R, S, T, V, X, rectis R S, S T, T V, V X, X R. Quia igitur L R, P X, æquales ſunt & parallelæ; ſi concipiatur duci recta L P, erunt quoque L P, R X, æquales & parallelæ; Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem L P, quintam partem circuli F G H I K, nempe duas decimas partes F L, F P. Igitur & R X, quintam partem auferet circuli R S T V X. Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas R S, S T, T V, V X, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum eſt R S T V X, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni F G H I K. Demittantur ex angulis pentagoni R S T V X, ad angulos pentagon F G H I K, rectæ R F, R G, S G, S H, T H, T I, V I, V K, X K, X F. Quia igitur perpendicularis L R, æqualis ponitur ſemidiametro E F, hoc eſt, lateri hexagoni circuli F G H I K; & eſt L F, latus decagoni; erit quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum L R, L F: Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ F R, quod angulus F L R, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ F R, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta F R, lateri pentagoni L P, ſeu F G, hoc eſt, ipſi R X, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ R G, S G, S H, &c. reliquis lateribus utriuſque pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula R F X, R F G, R G S, S G H, S H T, T H I, T I V, V I K, V K X, X K F, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia, cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri. Poſt hæc, perpendicularis E Q, in utramque partem extendatur,



6. *undec.* 33. *primi.* 28. *tertijde.*

10. *tertijde*

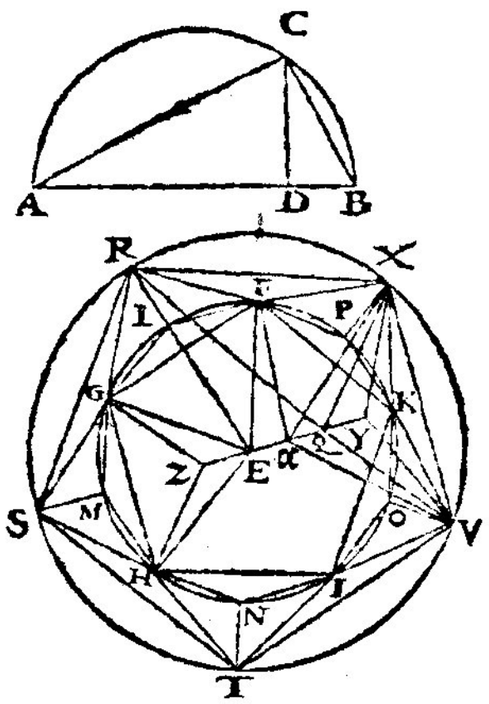
47. *primi.*

rẽdatur, ſintq; rectę Q Y, E Z æquales ſingulę, lateri decagoni circuli F G H I K, uel R S T V X; & connectantur rectæ V Q, V Y, X Q, X Y; G E, G Z, H E, H Z. Quoniã ergo Q X, ſemidiameter eſt circuli R S T V X, hoc eſt, latus hexagoni; & Q Y, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; erit quadratum lateris pentagoni, X V, æquale quadratis rectarum Q X, Q Y: Eſt autem eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ X Y, quod angulus X Q Y, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela ſint oſtenſa, ſitque E Q, ad illius planum recta, ex conſtructione; erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale eſt quadrato rectæ X V, propterea que recta X Y, rectæ X V, æqualis. Eodemque modo eidem X V, æqualis oſtendetur V Y; Ac proinde triangulum V Y X, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, ut uitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo V Y X, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum G Z H, (cum E G, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiameter, & E Z, latus decagoni, anguluſque G E Z, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula uiginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturq; ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſaedrum. Quod dico cõprehendi ſphæra diametri A B.

10. *tertijde.* 47. *primi.*

Diuisa recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia ſunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cum Q V, Q X, ſint ſemidiametri circuli R S T V X:

VX : Sunt autem & anguli ∝ Q V, ∝ Q X, æquales, nempe
4. *primi.* recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt & baſes ∝ V, ∝ X, æquales. Eademque ratione, ſi ducantur rectæ ex ∝, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ ∝ R, ∝ S, ∝ T, æquales & inter ſe, & ipſis ∝ V, ∝ X. Rurſus quia latera ∝ Q, Q X, trianguli ∝ Q X, æqualia ſunt lateribus ∝ E, E F, trianguli ∝ E F, cum Q X, E F, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuiſa ſit bifariam in ∝: Sunt autem & anguli ∝ Q X, ∝ E F, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib 11. Erunt quoq; baſes ∝X, ∝ F,



4. *primi.* æquales : Eodemque modo ſi ex ∝, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, oſtendentur ∝ G, ∝ H, ∝ I, ∝ K, æquales ipſi ∝ X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniã uero Q E, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni eiuſdem circuli, erit Q Z, diuiſa in E, extrema ac media
9. *tertiydec.* ratione, maiuſcꝫue ſegmentum erit Q E. Quare minus ſegmentum Z E, aſſumens E ∝, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta ∝ Z, quintuplum poteſt eius, quod ex E ∝,
8. *tertiydec.* deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta ∝ F, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ E ∝. (Nam cum quadratum rectæ E F, quadruplum ſit quadrati rectæ ∝ E. ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta E F, dupla ſit ipſius E ∝; erunt quadrata rectarũ E F, E ∝, ſimul quintupla quadrati rectæ E ∝. Cũ ergo
47. *primi.* quadratis rectarũ E F, E ∝, æquale ſit quadratũ rectæ ∝ F; erit quoq; quadratũ rectę ∝ F, quintuplũ quadrati rectę E ∝.) Igit' æqualia sut quadrati rectarũ ∝ Z, ∝ F, ac proinde rectæ ipſæ ∝ Z, ∝ F, ęquales erũt. Cũ igit' Z Y, bifariã ſecet' in ∝, (propterea quod

quod ſi æqualibus ∝ E, ∝ Q, æquales rectæ addantur E Z, Q Y, totæ Z ∝, Y ∝, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex ∝, ad omnes angulos Icoſaedri æquales. Quo circa ſphęra deſcripta circa diametrum Z Y, ex centro ∝, per omnes angulos Icoſaedri conſtituti tranſibit. Hanc ergo ſphæram dico æqualem eſſe ſpheræ diametri A B

C V M ſit ut ∝ Z, ad ∝ E, ita Y Z, dupla ipſius ∝ Z, ad
15. *quinti.* Q E, duplam ipſius ∝ E; Ac propterea ut quadratum rectæ ∝ Z, ad quadratum rectæ ∝ E, ita quadratum rectæ Y Z,
22. *ſexti.* ad quadratum rectæ Q E; ſit autem quadratum rectæ ∝ Z, oſtenſum quintuplum quadrati rectæ ∝ E : Erit quoque quadratum rectæ Y Z, quintuplum quadrati rectæ Q E, hoc eſt, quadrati rectæ B C; quod recta Q E, æqualis ſit poſitæ ſemidiametro E F, hoc eſt, rectæ B C : Eſt autem & eiuſdem quadrati rectæ B C, quintuplum quadratum rectę A B. (Nam cum, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. ſit ut A B, ad B C, ita B C, ad B D; erit ut A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectę B C, ex coroll. propoſ. 20 lib. 6. Ac proinde exiſtente A B, quintupla ipſius B D, erit etiam quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectę B C.) Quadrata igitur rectarum Y Z, A B, ęqualia ſunt, ideoq; & rectę Y Z, A B; Ac propterea & ſphęrę circa ipſas, ęquales erunt.

Q V O N I A M denique diameter ſphęrę A B, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipſius oſtendendum eſt, latus Icoſaedri eſſe lineam Irrationalem, quę Minor uocatur.) poteſtque quintuplum quadrati rectę B C, hoc eſt, rectę illi ęqualis E F; erit quoque ſemidiameter E F, circuli F G H I K, Rationalis. (Nam quadrata rectarum A B, E F, cum habeãt proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5 ad 1. uel 10. ad 2. erunt commenſurabilia; 6. *de. imi* Ac propterea & rectę A B, E F, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cum ergo A B, ſit Rationalis, erit & E F, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli F G H I K, Rationalis erit; Ac propterea F G, latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quę uocatur Minor. Icoſaedrum igitur conſtituimus, & ſphęra ſumus complexi, qua & ante dictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quę uocatur Minor. quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM I.

Ex dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplã semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est, quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

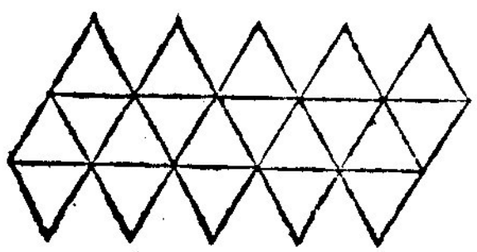
COROLLARIVM. II.

Item manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM. III.

Constat denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nã recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, ut in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sint arcus HL, IP; continet enim uterque tres decimas partes totius circunferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eadẽq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLION.



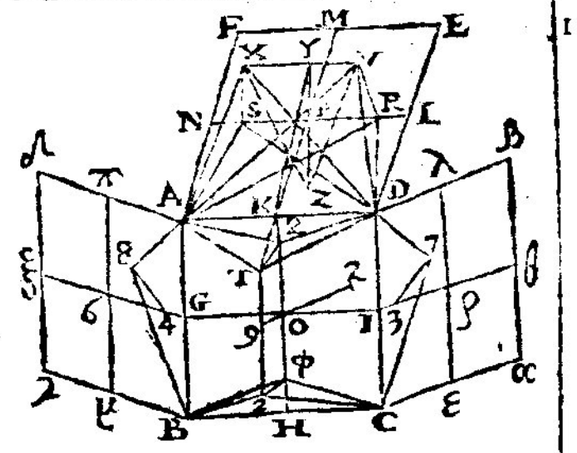
Quod si ex aliqua materia conficiantur uiginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, ut hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

17. # PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demõstrare, qđ Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome.

Sit

Sit una basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, ut sit communis horum sectio recta AD. (Insistũt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, ut cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaque cunctis lateribus bifariã in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secãtibus sese in O, P, cẽtris quadratorum, ut constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorũ educantur extra cubũ perpẽdiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse unũ ex duodecim pẽtagonis æquilateris, & æquiãgulis Dodecaedri cõstituẽdi. Qđ enim pentagonũ ATDVX, sit in uno plano, ita ostendetur. Cũ RV, SX, sint ad quadratũ ADEF, rectæ, ipsæ erũt parallelæ; Ac ꝓinde, cũ sint æquales, (quia segmẽta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint.) erũt quoq; cõiungẽtes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: Est aũt & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eo qđ AN, DL, parallelæ sint & æquales. Igit & AD, VX, parallelæ sũt; Ac ꝓpterea rectę cõiungẽtes AX, DV, in eodẽ cũ ipsis erũt plano; ideoq; trapeziũ ADVX, in uno existet plano: Est aũt & triãgulũ ATD, in uno plano. Dico qđ & in eodẽ plano cũ trapezio ADVX. Ex P, ducat PY, parallela ipsi RV, q̃ erit recta ad quadratũ ADEF, qđ ad idẽ recta sit RV: Et cõnectant rectę KT, AY. Q m igiur est ut OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionẽ rectæ



18. *unde.*

6. *undec.*

33. *primi.*

33. *primi.*

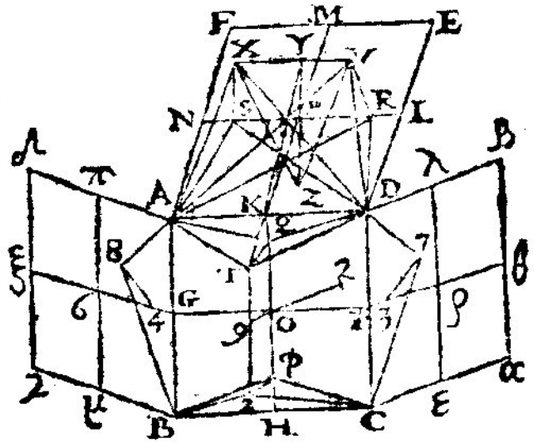
9. *undec.*

7. *undec.*

8. *undec.*

rectæ O K : Est autem K P, ipsi O K, æqualis ; (sunt enim dimidia latera cubi ;) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quę posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento; Erit quoque ut K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad unum angulum K, composita, ita ut homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quod utrumque rectum sit ad
6. *undec.* quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quod utrunque rectum sit ad quadratum A D E F : Erunt reliqua latera K Y,
33. *sexti.* K T, in rectam lineam collocata ; Ac propterea recta T Y, in
1. *undec.* uno erit plano, ideoq; planum A T D, & planum A D V X, unum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in uno existit plano.

Quod vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, segmenta minora rectarum æqualium rectarum .) & anguli A N S, A K Q, recti ; si ducatur recta A Q, erunt bases A S, A Q, æquales. Rursus cum latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia lateribus A Q, Q T, triāulig A Q T; (Nam rectæ A S, A Q, ostensæ sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqualium rectarum)& anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3 lib. 11. Erūt
4. *primi.* quoq; bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q, ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si uero ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualē. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V, æqualia ; quibus etiam æquale ostendemus reliquum V ,
4. *tertiædec.* hac ratione. Quadrata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ S X : Est autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadra-



4. *primi.*

quadrata rectarum A N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ S X. Cum ergo quadratis rectarum A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S ; erit quoque quadratum rectæ A S, triplum quadrati rectæ S X; Ac proinde quadrata rectarum A S, S X, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ S X : Est autem quadratis rectarum A S, S X, æquale quadratum rectæ A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoque erit quadrati rectæ S X, hoc est, quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ X Y; Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ V X, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ X Y, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod V X, dupla sit ipsius X Y ; Erunt quadrata rectarum A X, V X, æqualia ; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cū & X A, A T, T D, D V, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum A T D V X.

47. *primi.*

47. *primi.*

34. *primi.*

Quod autem & æquiangulū sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis A R, A V ; cum P N, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita P R, æqualis maiori segmento P S; erit quoque N R, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit N P. Quadrata igitur rectarum N R, R P, simul tripla sunt quadrati rectę N P, hoc est, quadrati rectæ A N : Est autem quadratum rectæ R V, æquale quadrato rectę R P. Ergo & quadrata rectarum N R, R V, tripla sunt quadrati rectę A N; Ac proinde quadrata rectarum N R, R V, A N, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ A N: Sunt autem quadrata rectarū N R, A N, æqualia quadrato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarum R V, A R, quadrupla sunt quadrati rectæ A N. Cum ergo quadratis rectarū A R, R V, æquale sit quadratum rectę A V ; Erit quoque quadratum rectæ A V, eiusdem quadrati rectę A N, quadruplum. At uero eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum est quadratū rectæ A D, ex scholio propos. 4 lib. 2. quod A D, dupla sit ipsius A N. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum A V, A D, ideoq; & rectę A V, A D, æquales. Simili argumento, ductis rectis D S, D X, ostendemus D X, D A, æquales esse; ac propterea tres rectę A D, A V, D X, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera T A, T D, triāguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, V X, trianguli D X V; & bases A D, D X, æquales quoque : Erunt & anguli A T D,

5. *tertiædec.*

4. *tertiædec.*

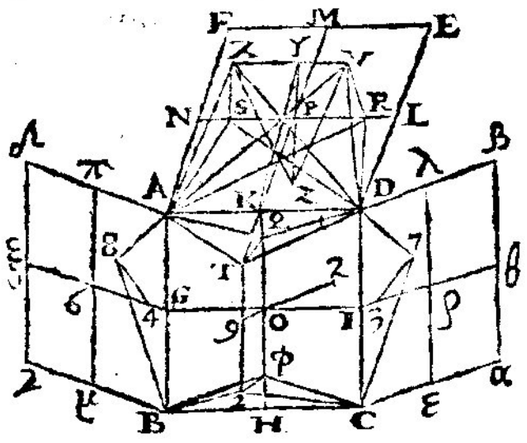
47. *primi.*

47. *primi.*

8. *primi.*

DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV; Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV; ipsum erit æquiangulum. 7. *tertij dec.*

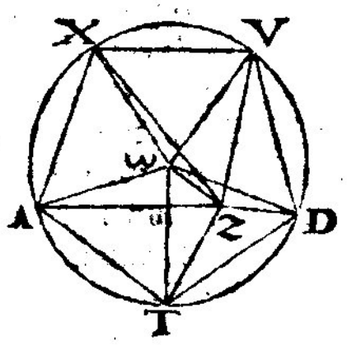
QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in cõmunibus sectionibus CD, AB, quorũ singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris φ, σ, Secentur deinde OH, OK, φI. σG, extrema ac media ratione in pũctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QQ, 3ρ, 4σ, coniungãturq; rectę T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, TZB8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus cõmunibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona tangẽtia reliqua nouẽ cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubum, & præcedentes figuras, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quę per rectas planorũ latera bifariã secantes ducuntur, nempe planũ ADEF, & eius oppositũ, planis ductis per rectas KM, LN; Itẽ planũ ABCD, & eius oppositũ, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniã igitur plana secãtia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basib⁹ cubi, quę rectę sunt ad plana ADEF, ABCD: Erunt & communes eorũ sectiones ad eadẽ cubi plana rectę. Quare cũ YP, recta sit ad planũ ADEF, ipsa producta uersus Z, erit communis sectio 19. *undec.*

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodẽ pacto, si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa, communis sectio planorum quę per rectas GI, HK, ducuntur. Quia uero dictæ cõmunes sectiones, & diametri cubi ie mutuo bifariã secãnt; secent se mutuo bifariã in Z: Secant autem seſe diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctũ igitur Z, centrum erit sphęrę circa cubum descriptę; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se, quales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallelę sunt KP, OZ, quod utraque recta sit ad plānum ABCD; Item parallelę sunt OK, ZP, quod utraque recta sit ad planum ADE; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse coniuncta) parallelogrãmum, ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectę PZ: (Est enim YX, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectę ZX. Igitur & quadratũ rectę ZX, triplum erit quadrati rectę ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum cõprehendẽtis. (Nam ut diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; Ac proinde ut quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratũ semidiametri ad quadratum dimidij lateris. Cum ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur est quadratum rectę ZX, quadrato semidiametri sphęrę, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadẽ ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis, Vel certe, quia cum latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, triãguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cum.n. PY, sit perpendicularis 34. *primi* 4. *tertij dec.* 47. *primi.* 15. *primi* 22. *sexti.* 15. *tertij dec.*

dicularis ad LN, erit quoque eadem ad ſibi parallelam VX, perpendicularis.) Erunt baſes ZX, ZV, æquales: Eademq; ratione ſemidiametro ſphęrę ęquales erunt rectę ductę Z A, Z D. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductę ex Z, centro ſphęrę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphęrę. Vt autem oſtendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ perpẽdicularis demittatur Zω, cõnectanturque rectę ωA, ωT, ωD, ω V, ω X. Quoniam igitur quadratũ rectę Z A, ęquale eſt quadratis rectarum Z ω, ωA; & quadratum rectę ZX, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, ęqualia, quod rectę Z A, Z X, oſtenſæ ſint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω Λ, quadratis rectarum Z ω, ω X, ęqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato rectę Z ω, ęqualia relinquentur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoque rectæ ipſæ ωA, ωX, æquales erũt. Non aliter oſtendentur rectæ ω V, ω D, & inter ſe, & ipſis ω A, ω X, æquales, quod & rectę ZV, ZD, ęquales ſint oſtẽſæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circunferentiam plures rectę lineę ęquales, quam duę; punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æquali; ideoque quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erũt quadratis rectarum Z ω, ω T. Cum ergo illis duobus æquale ſit quadratum rectę Z A; his uero quadratum rectę Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, Z T; proptereaq; & rectę Z A, ZT, ęquales. Quare ſphęra complectens cubum ex centro Z, deſcripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemq; modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem ſphęra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



4. primi.

47. primi.

9. tertij.

47. primi

Posterem o cum ſit ut NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit quoque ut NL, dupla ipſius NP, ad RS duplam ipſius PS, ita RS, dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL,

15. quinti.

RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentũ erit SR: Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratũ commenſurabile eſt quadrato diametri ſphærę, quę Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) Igitur maius ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quę uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

6. tertijdec.

COROLLARIVM I.

Cvm ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: ſit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſſe latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

Sic quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum ęquale rectis AV, DX, ſubtẽdentibus angulos X, & V, eiuſdẽ pentagoni.

Quoniam uero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum latus pẽtagoni; ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

8. tertijdec.

5. tertijdec.

COROLLARIVM III.

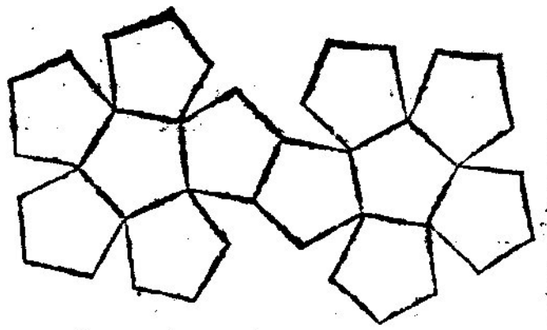
Constat etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt VX, TS, quæ uidelicet parallela ſunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cũ parallela ſint cubi lateribus parallelis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariam & ad rectos angulos, a lineis rectis,

rectis, quæ centra basiũ cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ ut demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OQ; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZP, angulus QZP, rectus est, cum opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos. Oēs enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, ut perspicuum est.

COROLLARIVM. IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ut dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentũ erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit ut ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; ideoque ut dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariã, ad duplã ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariã, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus uero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. 15. *quinti.*

SCHOLION.



QVOD *si ex aliqua materia cõficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq; ut hæc figura indicat, cõponetur Dodecaedrum secundum totam solidita-tem, si rite inter se complicentur.*

18. # PROBL. 6. PROPOS. 18.

LATERA quinque figurarum exponere,

nere, & inter se comparare.

SIT sphęræ diameter AB, quę in C, secetur bifariam; In D, uero ita, ut BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, ut BE sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circunferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturque rectę AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hęc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH; connectaturque recta BI. Postremo BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.

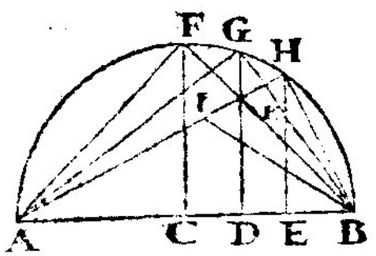
QVOD igitur attinet ad expositionem laterũ prædictarũ figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdẽ lib. ut BA, ad AD, ita quadratũ rectę BA, ad quadratũ rectę AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera; cum talium partium 2 sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectę BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; Ac proinde cum diameter sphęræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; Erit AG, latus Tetraedri. 13. *tertiidec.*

RVRSVS quoniã AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodẽ coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ut BA, ad AC, ita quadratũ rectę BA, ad quadratũ rectę AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autẽ BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratũ rectę BA, duplũ quadrati rectæ AF. Quare cum diameter sphęræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri. 14. *tertiidec.*

DEINDE cũ BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque ut AB, ad BD, ita quadratũ rectę AB, ad quadratum rectę BG, ex prędictis duobus corollarijs lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectę AB, triplum quadrati rectę BG. Quocirca cum sphęræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi. 15. *tertiidec.*

PRAETEREA quia, ex eidem corollarijs, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco ut AB, ad BE,

ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectę B H: Est autem, ex constructione A B, ipsius B E, quintupla: Erit quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectę B H. Cum igitur diameter sphęræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll 1. propos. 16. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. Igitur latus pentagoni potent & B H, & H I, simul; Ac proinde cum quadratum rectę B I, æquale sit quadratis rectarū B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiusdem. Quam ob rem B I, latus est Icosaedri.



10. *tertij dec.* 47. *primi.* 16. *tertij dec.*

Denique, cum B G, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphęra descriptarum.

Quod uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphęrę esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia uero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi, perspicuum est, qualium partium 6.

Diamet.	6.	fuerit quadratum diametri, talium 4. esse
Tetraed.	4.	quadratum lateris Tetraedri; talium uero
Octaed.	3.	ro 3. quadratum laterius Octaedri; & denique
Cub.	2.	quadratum lateris cubi, talium 2.

Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia uero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphęrę diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum; Ac propterea diameter sphęrę, & latera dictarum figurarum lineę sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphęrę ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia.

6. *decimi.*

tionalia: Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Erunt huiusmodi lineę, nimirum diameter sphęrę, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. 9. *decimi.*

At uero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc uero, Apotome, ut demonstratum est; nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphęrę commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

Sed neque inter se ullo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, erit quoque latus Icosaedri, Apotome. 104. *decimi* Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia 106. *decimi* esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, quod latus Icosaedri Minor sit. 106. *decimi* Quod est absurdum. Nā ex scholio propos. 112. lib. 10 Apotome, & Minor sunt lineę Irrationales prorsus inter se differentes, ita ut neutra sit eadem alteri.

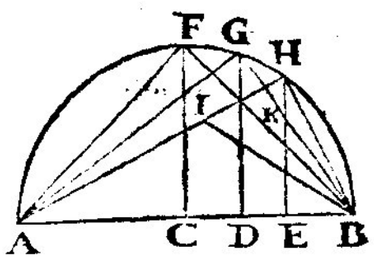
Itaque quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphęrę, ideoque Rationalia existant; duo uero posteriora incommensurabilia & inter se, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, ut latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quę forte causa fuit, cur Euclides non eodem

eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quam AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD, & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum nōcupla proportio ſit duplicata proportionis triplę ut hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectę AB, talium 3. eſt quadratum rectę BG, quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cū æqualia ſint quadrato rectę BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectę BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectę GD. Quoniam uero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratū rectæ GD, maius eſt quadrato rectæ BH, ideoque recta GD, maior, quam recta BH. Rurſus quia diameter ſemihæræ AB, componitur ex BH, ſemidiametro circuli, quo Icoſaedrum conſtituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiuſdem circuli, per coroll. 2. propoſ. 16 huius lib. conſtat latus decagoni HI, minus eſſe tertia parte rectæ AB, hoc eſt minus recta BD. Nam ſi HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus



20. *ſexti.*

15. *tertiidec.*

8. *quinti.*

10. *quinti*

duabus tertijs partibus, nempe ipſi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipſi BD; Atque adeo, cum quadratum rectæ AB, noncuplum ſit oſtenſum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod eſt abſurdum. quintuplū enim eſt demonſtratū. Non ergo HI, tertia pars eſt ipſius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipſius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc eſt, quam AD; erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam noncuplum quadrati rectæ BD. Quod magis eſt abſurdum. Non igitur maior eſt HI, tertia parte ipſius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, ut oſtendimus. Minor ergo eſt quam tertia pars, hoc eſt, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores ſint rectis BH, HI, ut demonſtratum eſt, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: Eſt autem quadratum rectę BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus ſcilicet Icoſaedri.

47. *primi*

MAIVS denique eſſe latus Icoſaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuiſæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BK, & minus GK; erit rectangulum ſub BG, BK, maius rectangulo ſub BG, GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG, GK: Eſt autem rectangulis ſub BG, BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectę BG; Et duobus rectangulis ſub BG, GK, æqualia ſunt duo quadrata rectæ BK (Nā cū ſit, ut BG, ad BK, ita BK, ad GK; erit quadratū rectæ BK, æquale rectangulo ſub BG, GK; ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, GK.) Maius igitur quoq; eſt quadratū rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ BH. (Cum enim quadratum rectæ AB, triplum ſit quadrati rectæ BG, & quin-

2. *ſecundi*

17. *ſexti.*

& quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectę B G, quam quinque quadrata rectę BH, ęqualia eidem quadrato rectę A B, ideoque tria illa his quinque ęqualia.) Igitur & quinque quadrata rectę B H, maiora erunt sex quadratis rectę B K; Ac proinde unum quadratum rectę B H, maius erit uno quadrato rectę B K. (si namque ęquale esset quadratum rectę B H, quadrato rectę B K, uel minus; forent quinque quadrata rectę B H, minora sex quadratis rectę B K. quod est absurdū, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quam recta B K; Ac propterea cum B I, maior sit quā B H, multo maior erit B I, latus uidelicet Icosaedri, quam B K; latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

INTERPRETES *hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis cōtineatur, inter se æqualibus, hac fere ratione.*

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus;

Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idē punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes unius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis 21. undec. *continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erūt. Multo ergo minus ex pluribus, quā quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus cōstabit.

Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cum enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnū rectum, ac propterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoque ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cum enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod contineat vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectum, ac propterea duas partes sextas unius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo cōponetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

NAM *si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramis contenta quatuor huiusmodi triangulis.*

SI *vero quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.*

SI *denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrū uiginti triangulis eiusmodi contentum.*

QVOD

QVOD si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, ut constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

POSTREMO, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia vero bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3 fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis: Ad eundem modũ & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum cõponentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem unius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt angulum solidum constituendum, vt numerus

numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum unius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidũ cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triãgula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius triãguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidũ angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorũ vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

ELEMENTI DECIMITERTII FINIS.

EVCLIDIS

EVCLIDIS

ELEMENTVM XIIII.

ET SOLIDORVM QVARTVM,

Vt quidam arbitrantur: vt alij uero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

ASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus, longissimo peregrinationis tempore cum eo uersatus est. Cumq; dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non recte tradidisse Apollonium; quæ a se emendata, ut pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex cuiusque problematis indagatione magnam equidem cæpi

cæpi uoluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse uidemur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus: ut qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum uel maxime in Geometria uersatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Obeam uero, quæ tibi cum patre fuit, uitæ consuetudinem, quaque nos complecteris, beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, ut prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo uero subsequentes a plerisque Hypsicli Alexandrino recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrũ, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori uero exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium unius intra aliam; ut hi duo libri sint instar appendicis eiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones unius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque uero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, ut aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuersum disserere proponendo uaria theoremata, atque problemata, quibus & predicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maxime nobis adiumento fuisse Campanum, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operam, & sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quam plurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; uerumetiam integrum librũ, qui decimusseptimus est ordine adiunxit, in quo proprietates illustres

stres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & Dodecaedri, facile intelligi potest ex ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

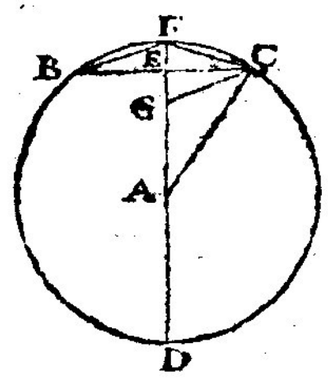
QVONIAM uero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, ideoque a nobis discrepant, annotauimus in margine ordinem utriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior uero Campani seriem indicat. Quando autem in margine unicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota O, intelligēdum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige; si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanū, illam propositionem deesse.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

Ex centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineę compositę ex latere hexagoni, & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in utramq; partem, ut perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF, connectantur rectę AC, CG, CF, BF. Quoniam
3. *tertij.* igitur pependicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, triāguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti, erunt bases CF, BF, æquales, ideoque & arcus CF,

CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circunferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; 28. *tertij.*
atq; adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti, recti; erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia uero arcus CF, quinta pars est semi circunferentiæ DCF, cum sit totius circunferentiæ decima pars; 4. *primi.*



Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: Est autem an- 33. *sexti.*
gulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circunfe- 20. *tertij.*
rentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: Atqui angulus CGF, externus, æqualis est 32. *primi.*
internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, ut ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; ac proinde & latera AG, CG, æ- 6. *primi.*
qualia: Est autem CG, recta ostensa æqualis rectę CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque idcirco e contrario erit AE, ducta uidelicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis

cularis est ad B C, diuidere arcum B C, bifariam in F.

COROLLARIVM. II.

Hinc quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse utrique lineæ simul, ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam ut in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni, æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni, esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

4. 2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item ut A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cum enim sit ut A B, ad A E, ita A E, ad E B; & ut C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulũ sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit ut rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim utrobique Æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 4. lib. 5. ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: Et componendo, ut quadruplum rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratum rectæ C F, ad quadratum rectæ C F:



17. sexti.

CF: Sed quod quater continetur sub A B, E B, una cum quadrato rectæ A E, æquale est quadrato lineæ compositæ ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, una cum quadrato rectæ C F, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, ut quadratum lineæ compositæ ex A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F; Ac proinde, ut recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et componendo, ut composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, ut dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F: Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cum sit ut tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F ablatam, erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, ut tota ad totam. Quare ut A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cum utraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit ut A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineę extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

8. secundi. 22. sexti. 15. quinti. 19. quinti.

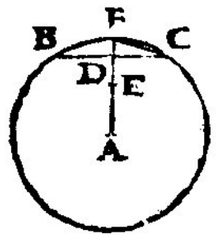
COROLLARIVM

Ex hac propositione & præcedenti inferemus hoc theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus uero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ

ductæ ; minus uero segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C ; erit F C, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos.1. huius lib.arcus B C, nempe quinta pars totius circunferentiæ, bifariam secetur in F ; Ac proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus uero segmentum F C, latus decagoni. Quare ut in hac propos. ostensum est, erit ut tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum ; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum : Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & ED, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per coroll. propos. 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri, perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari, minus uero E D, dimidio lateris decagoni.



9. *tertijdec.*

1. *quartide.*

2.

4.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterũ describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, bifariam in G, & H ; erit arcus C G, decima pars totius circunferentiæ,



rentiæ, ideoque recta subtensa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectę FG; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratũ rectæ AG, quadruplum quadrati rectę FG: Sunt autem quadrato rectę A G, æqualia quadrata rectarũ AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG; quadrupla sunt quadrati rectæ FG ; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiusdem rectæ FG. Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris uidelicet pentagoni ; Erunt quoque quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur ; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, &c. Quod erat demonstrandum.

47. *primi*

10. *tertijde.*

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur ; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circunscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum unum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti ; eritq; ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. Perspicuum est autem, quadrata rectarũ AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.

3. *quartide.*

PROBL. 4. PROPOS. 4.

0.

3.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione ; maius illius segmẽtũ erit latus decagoni eiusdẽ circuli.

SECETVR A B, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum A C. Dico A C, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim A D,

latus decagoni eiusdem circuli, ad, vrgaturq; in rectum ipsi AB, eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A extrema ac media ratione, cuius maius segmentum BA: Ponitur autem & AB, secta in C, similiter. Igitur erit ut BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque ut BD, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit ut AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB; erit & AC, eiusdē circuli latus decagoni.

9.tertiydec.

2.quartide.

D A C B

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori segmento AC; eritq; tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli; erit, per ea, quę demonstrauimus ad propos 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

5.tertiydec.

2. 5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius unum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius unum triangulum GHI. Dico eundē circulum circunscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circumscribentes esse æquales. Circunscribat enim circulus KLMNO,

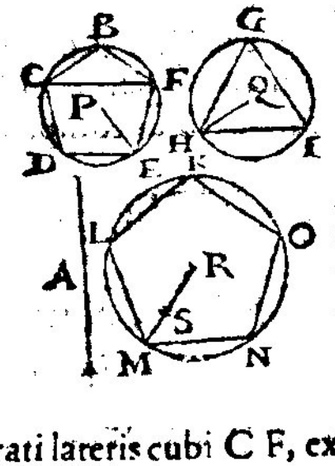
NO, pentagonum KLMNO, ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita ut quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri; ideoque quod ibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectę PE, QH, RM; Secenturq; RM, extrema ac media ratione in S; eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit, per coroll. 2. propos. 17. lib 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi CF, secti extrema ac media ratione, erit ut tota CF, ad totā RM, ita BF, maius segmentū ad RS, maius segmentum; Ac propterea ut quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 4. lib. 5. ut triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13 æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: Quia uero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectę RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinq; quadratis rectæ RS. Sed quoniam, (cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ

16.tertiyde

4.quartide.

2.quartide.

22.sexti.

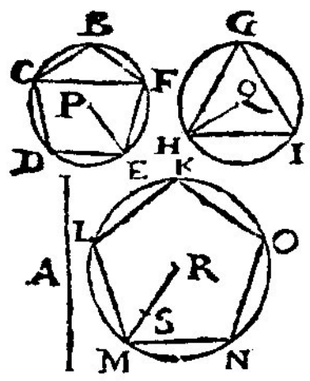


16.tertiyde.

3.quartide

ctæ CF,& tria quadrata rectę BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE;& quinque quadrata rectæ MN,æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri Q H; (Nam cũ MN,æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; ſit autem quadratũ ipſius G H, æquale tribus quadratis ſemidiametri Q H; Erunt quinque quadrata rectæ GH,hoc eſt, rectæ M N, æqualia quindecim quadratis rectę Q H.) Erunt quoque quindecim quadrata rectæ P E,æqualia quindecim quadratis rectæ Q H; ac propterea unũ quadratum rectæ PE, uni quadrato rectæ QH,& idcirco ſemidiameter PE,ſemidiametro Q H, æqualis. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehendit,&c. Quod erat demonſtrandũ.

12. vertijde.



3. 6.

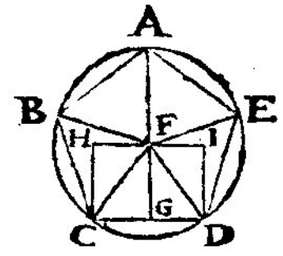
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale.

Ex centro F,circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus CD,perpendicularis FG. Dico rectangulum contentum ſub FG,& CD, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. cum bina latera unius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque unius baſibus aliorum æqualis.

qualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi CD, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Eritque rectangulum C I, contentum ſub H C, hoc eſt, ſub F G, & C D. Quoniam uero rectangulum C I, duplum eſt trianguli FCD, atque adeo cuiusliber reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectãgulũ CI, quinquies ſumptũ, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint uni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli C I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

41. primi.



ALITER. Facta eadem figurę conſtructione, cum rectangulum C I, duplum ſit trianguli F C D, hoc eſt, æquale triangulo F C D, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptum æquale triangulo F C D, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Dodecaedri. Cum enim unum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Ac idcirco triangulum F C D, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei Dodecaedri.

41. primi.

3. 7.

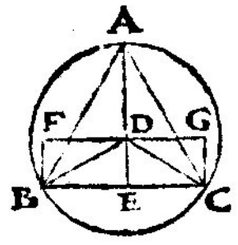
THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendicu-

lari

lari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circunscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes triangulí angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera unius binis lateribus aliorum æqualia, & basis unius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad IC; eritq; rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam uero rectangulum BG, duplum est rectanguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum rectangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulũ BG, iter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula qualia sint uni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit uiginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



41. primi.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, cum rectangulum EG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt uiginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt unum. Igitur rectangulũ BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

41. primi.

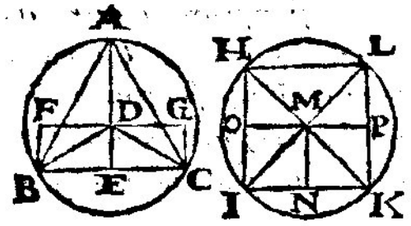
COROLLARIVM.

IVAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. Quare erit superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut rectangulum illud, trigesima uidelicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

6. quarti. 7. quartide. 15. quinti.

SCHOLION.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporũ regularium, Tetraedri uidelicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, uel Octaedri, siue quadratum cubi, circunscribentis perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro uero, & cubo duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circunscriptum a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, ut de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. Quoniam rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt unum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.



7 quartide

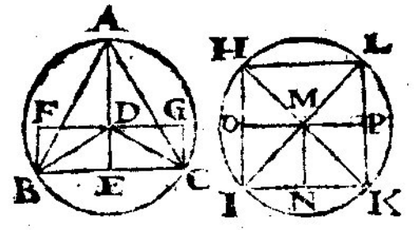
SIT secundo idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, æquale esse superficiei Octaedri. Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli

41. primi.

4. primi.

DBC

D B C, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale uigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed uigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiant unum. Igitur rectangulum B G, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.



SIT *tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex cẽtro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atq; per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt ſub MN, & IK, ſumptũ duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. Quoniam rectangulũ IP, duplum eſt triãguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale uigintiquatuor eiuſmodi triãgulis. Quare cum uigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex quadrata, id eſt, totam ſuperficiẽ cubi, quod quatuor talia triãgula unum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.*

41. *primi.*

ALITER. *Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt.n. IP, PH, æqualia, cũ recta OI, ſit dimidiũ lateris HI, nẽpe æqualis ipſi MN) cõſtituẽt duodecim talia rectãgula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiẽ cubi.*

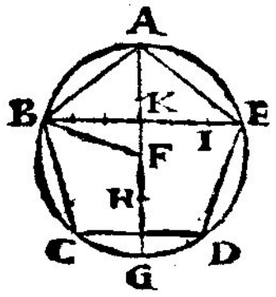
4. 8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentũ ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; ſextis partibus lineæ ſubtendẽtis angulũ pentagoni æquilateri in eodẽ circulo deſcripti; æquale eſt dicto pẽtagono.

IN circulo, cuius centrũ F, deſcribatur pentagonũ æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor

tuor æquales partes, quarum tres ſint A H: Angulum uero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarũ quinq; ſint BI, & una IE, ita ut BI, ſit quintupla ipſius IE. Dico rectangulum comprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, continet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia uero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres ſextas rectæ BE; atq; adeo cum BI, cõtineat quinq;, continebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrẽ erit ut AH, ad AF, ita KB, ad KI; atq; idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub mediis AF, KB. Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eãdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas cõſtituta. Igitur & rectãgulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdẽ triãguli ABF: Eſt aut & rectãgulũ ſub AH, KI, duplũ rectãguli ſub AH, IE; propterea qđ & baſis KI, dupla ſit baſis IE, (cõtinet.n. KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, unã.) eadẽq; ſemp altitudo AH. Igit æqualia ſunt triãgulũ ABF, & rectãgulũ ſub AH, IE; ideoq; & eorũ quintupla æqualia erũt. At uero pẽtagonũ ABCDE, quĩtuplũ ẽ triãguli ABF, qđ pẽtagonũ in quinq; huiuſmodi triãgula reſoluat, ductis rectis e cẽtro F, ut ꝓpoſ. 6. huiꝰ lib. docuim⁹; Rectãgulũ uero ſub AH, BI, quintuplũ eſt rectãguli ſub AH, IE, qđ & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eadẽq; ſemp altitudo AH. Igit pentagonũ ABCDE, & rectãgulũ ſub AH, BI, æqualia sũt. Rectãgulũ ergo cõtẽtũ ſub triꝰ, &c. Quod erat demonſtrãdũ.



16. *ſexti.*

41. *primi.*

1. *ſexti.*

1. *ſexti.*

COROLLARIVM.

QVONIAM uero, ſi pẽtagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphera deſcripti; BE, eſt latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & unũ latus triãguli Icoſaedri in eadẽ ſphæra cõſtituti, (comprehenſi uidelicet eodem circulo, quo & pentagonũ Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum

5. *quartidc.*

(cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum F G, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirũ ſub B I, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

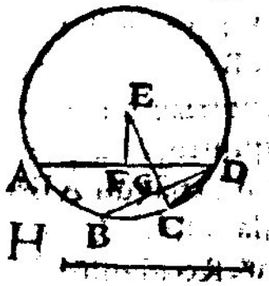
4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam, latus cubi ad latus Icoſaedri.

1. quartidc. IN circulo ABCD, circunſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & trianguli A D; & ex centro E, ducantur ad A D, BD, per

3. tertij. pendiculares EF, EG, ſecabunturque AD, BD, bifariam; & EG, protracta ſecabit quoque arcum BD, bifariam in C, ex



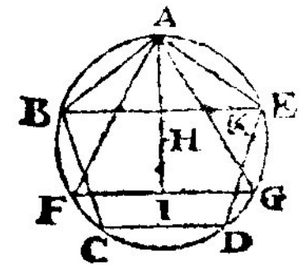
coroll. 1 propoſ. 1. huius lib. atque adeo connexa recta C D, latus erit decagoni eiuſdem circuli. Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe ut H, latus cubi, ad A D, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. Recta autem EG, ſecta quoque extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt EF, ex coroll propoſ. 2. huius lib. Erit, ut H,

2. quartide, 16. ſexti. tota ad BD, maius ſui ſegmẽtum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub mediis BD, EG. Quia uero eſt, ut H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum

1. ſexti. ſub A D, E F, cum baſes ſint H, AD, altitudo uero ſemper eadem EF; Erit quoque ut H, ad AD, ita rectangulum ſub

ſub B D, E G, (quod oſtenſum eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub A D, E F. Quare cum, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, ut rectangulum ſub BD, E G, ad rectangulum ſub A D, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, ut H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. Circunſcribat pentagonum Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint B K. Dico rurſus eſſe, ut B E, latus cubi ad F G, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam rectangulum ſub A I, B K, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub A I, I F, æquale eſt triangulo A F G, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum F G, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: Erit ut rectangulum ſub A I, B K, ad rectangulum ſub A I, I F, ita pentagonum ABCDE, ad trian gulum A F G: Eſt autem ut rectangulum ſub A I, B K, ad rectangulum ſub A I, I F, ita B K, ad I F, cum baſes ſint B K, I F, & altitudo eadem ſemper A I. Erit igitur quoque ut pentagonum A B C D E, ad triangulum A F G, ita B K, ad I F. Ac proinde, (ſi primum, & tertium; nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, æquemultiplicentur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulũ A F G, & recta I F, æquemultiplicentur per numerum 20.) erit quoque ut pentagonum A B C D E, duodecies ſumptũ, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum A F G, uigeſies ſumptum, nempe ad ſuperficiẽ Icoſaedri, ita recta B K, duodecies ſumpta ad rectam I F, uigeſies ſumptam: Atqui recta B K, duodecies ſumpta æquualet lateri cubi B E, decies ſumpto; (Nam cum B K, contineat quinque ſextas par

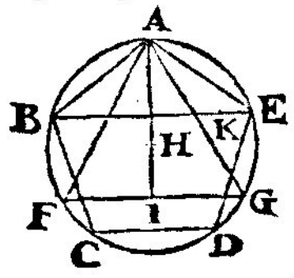


5. quartide.

1. ſexti.

4. quinti.

tes ipsius BE ; continebit eadem B K, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem B E, quæ efficiunt decem integras rectas B E .) Recta uero I F, uigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri F G , decies sumpto (eo quod FG, sit ipsius I F, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiē Icosaedri, ut latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri F G , decies sumptum; Ac propterea , cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri , quā unū latus cubi ad unum latus Icosaedri ; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, ut latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.



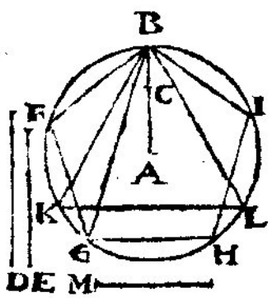
15. *quinti*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

4. 9.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione ; Erit ut recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentē id, quod a tota, & id quod a minori segmento , ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC . Sit quoque D, latus cubi, & E , latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti . Ex A , centro, ad interuallum A B, circulus describatur , in quo constituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem sphæra descripti , ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam uero A C, maius segmentum semidiametri A B, sectæ extrema ac media



dia ratione, est latus Decagoni in circulo B F G H I, in quo nimirum A B, latus est Hexagoni ; poterit B F, latus pentagoni & totam A B, latus uidelicet hexagoni , & maius segmentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M , totam A B , & minus segmentum B C, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus . Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri , ut est B F, potens totam A B , & maius segmentum A C , ad M , potentem totam A B , & minus segmentum B C . Quoniam quadratum lateris trianguli æquilateri B K, triplum est quadrati semidiametri A B: Item quadrata rectarum A B , B C, tripla sunt quadrati rectæ A C ; Erit ut quadratum rectæ B K , ad quadratum rectæ A B , ita quadrata rectarum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale , ad quadratum rectæ A C . Vtrobique enim proportio est tripla . Permutando ergo erit, ut quadratum rectæ B K ; ad quadratum rectæ M , ita quadratum rectæ A B, ad quadratū rectę A C: Est autem ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F . (Nam cum rectæ B G, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B F , ex coroll. 1 propos. 17. lib. 13. eo quod B G, est latus cubi, & B F, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ ; Erit ut tota A B , ad maius segmentum A C, ita tota B G, ad maius segmentum B F : Ac proinde ut quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F.) Igitur erit quoque , ut quadratum rectæ B G, ad quadratum rectæ B F, ita quadratum rectæ B K , ad quadratum rectæ M : Et permutando, ut quadratū rectę B G, ad quadratū rectæ B K, ita quadratum rectæ B F, ad quadratū rectæ M ; Ac propterea erit ut recta B G, ad rectam B K, ita recta B F, potens totam A B, & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C. Cum igitur proposita latera D, E, cubi, & Icosaedri , eandem habeant proportionem quam rectæ B G, B K, ut mox ostendemus ; perspicuum est, ut se habet recta B F, potens totam A B , & maius segmentum A C, ad rectam M, potentem totam A B, & minus segmentum B C, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur

4. *quartidec.*
10. *tertijdec.*
12. *tertijdec.*
4. *tertijdec.*
2. *quartidec.*
22. *sexti.*
22. *sexti.*

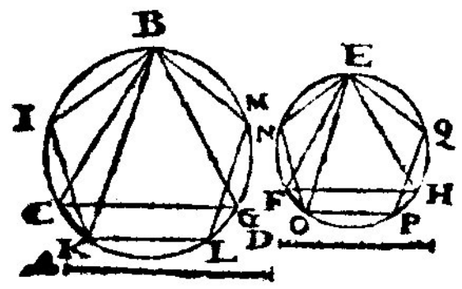
extrema ac media ratione, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

QVOD vero propoſita latera cubi & Icoſaedri D, & E, eiuſdem ſphæræ eandem habeãt proportionem, quam recta BG, BK; demonſtrabimus hoc propoſito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæra: Item D, latus cubi, & EF, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe ut A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icoſaedrorum BCG, EFH, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pẽtagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectanturque rectæ BK, CK; EO, FO. Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri 5. quarti de. *triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoque ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rurſus quia arcus BIK, ENO, ſimiles ſunt; (Nam uterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus BMGK, EQPO; (uterque enim tres quintas partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quam anguli BKC, EOF, inter ſe, cum tam illi, quam hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32.*



32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. Quare erit, ut BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

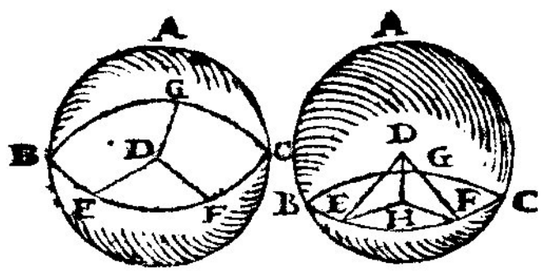
PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & F, latera cubi & Icoſaedri in una ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, ut vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

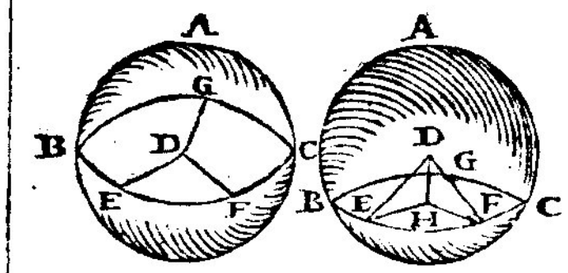
SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphæræ, ita ut centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cum ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit figura plana



BEFCG, *unica linea contenta, circulus, eiusque centrum* D, *idem cum centro sphæræ.*

TRANSEAT *secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autẽ ex* D, *centro sphæræ ad planum secans perpendicularis* DH, *emittãturq; ex* H, *rectæ utcunque* H E, H F, *ad extremitatem usq; communis sectionis; & connectantur rectæ* D E, D F. *Quoniam igitur anguli* D H E, D H F; *ex defin.* 3. *lib.* 11. *recti sunt; erit tam quadratum rectæ* DE, *quadratis rectarum* D H, H E, *quam quadratum rectæ* D F, *quadratis rectarum* D H, H F, *æquale: Sunt autem quadrata rectarum* D E, D F, *æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* D H, H E, *quadratis rectarum* D H, H F, *æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ* A E, *reliquo quadrato rectæ* H F, *æquale erit. Quare & rectæ* H E, H F, *æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex* H, *ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* HE, HF. *Figura igitur plana* BEFCG, *unica linea contenta, circulus erit; eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* D H, *cadit. Quod erat propositum.*



47. primi.

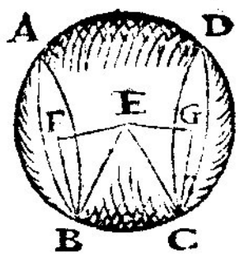
COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si uero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circunferentiam circuli esse æquales, ut perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.

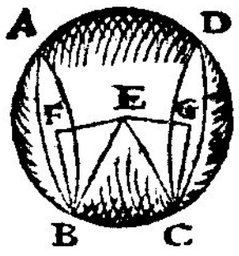
IN *sphæra* A B C D, *cuius centrum* E, *sint circuli æquales* A B, D C. *Dico ipsos æqualiter a centro* E, *distare. Ducantur enim ex* E, *ad eorum plana perpendiculares* E F, E G, *quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ* F B, G C, *ad circunferentias circulorum utcunque, connectanturque rectæ* E B, E C. *Quoniam igitur anguli* E F B, E G C, *recti sunt, ex defin.* 3. *lib.* 11. *Erit tam quadratum rectæ* EB, *quadratis rectarum* EF, FB, *quam quadratum rectæ* EC, *quadratis rectarum* E G, G C, *æquale: Sunt autem quadrata rectarum* EB, EC, *æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum* E F, F B, *quadratis rectarum* E G, G C, *æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium* F B, G C, *cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ* E F, *reliquo quadrato*



47. primi

rectæ E G, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares E F, E G. Quam ob rem circuli A B, D C, *æqualiter distant a centro E.*

S E D iam æqualiter distent circuli A B, D C, *a centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, ut prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, F B, æqualia esse quadratis rectarũ E G, G C; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, E G, cum circuli æqualiter ponantur distare a centro, reliquum quadratum rectæ F B, reliquo quadrato rectæ G C; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum* A B, *D C. Circuli igitur* A B, *DC, æquales sunt. Quod est propositum.*



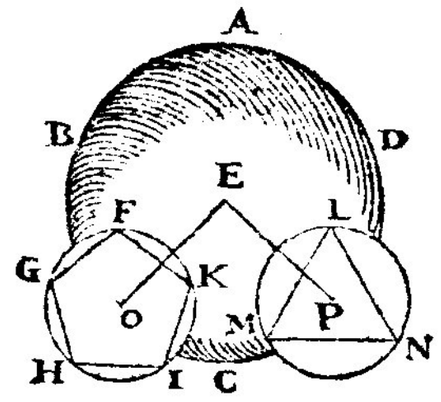
4. 10.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icosaedrũ in eadem cum ipso sphæra descriptum, est ut cubi latus ad latus Icosaedri, in una eademque sphæra.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum F G H I K: Item Icosaedrum, cuius unum triangulum L M N. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosaedri, in una eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphęra A B C D, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra F G H I K, L M N,

L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. Quia uero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triãgulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea per lemma 1. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpẽdiculares ex E, in plana circulorum deductę, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erũt.



Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pẽtagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in 12. pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propos 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinib⁹ pyramidum Dodecaedri. Quoniam autem est, ut basis F G H I K, ad basin L M N, ita pyramis F G H I K E, ad pyramidem L M N E, cum utriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 4. lib. 5 demonstrauimus, ut duodecim bases Dodecaedri, tota uidelicet superficies Dodecaedri, ad basin L M N, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem L M N E. Rursus quia est, ut tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin L M N, ita Dodecaedrum ad pyramidem L M N E; erit, per idem scholion, ut tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrũ ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiẽ, ut cubi latus ad Icosaedri latus eiusdẽ cũ ipsis sphæræ; atque adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. ut latus cubi ad

6. duodec.

9. quartidc

bi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ unius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, ut latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandũ.

COROLLARIVM.

9. quartidecimi. *10. quartidecimi.* *11. quartidecimi.*

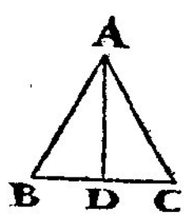
QVONIAM uero oſtenſum eſt quoque, ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri unius eiuſdemque ſphæræ, ut eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, ut latus cubi ad latus Icoſaedri in una eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri, ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcumque ſectã extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

10. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis A D. Quoniam ob æqualitatem laterum A B, A C, anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autẽ & latus A D, commune, uel A B, A C, æqualia. Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia ſunt; ac propterea latus B C, hoc eſt, latus A B, duplum rectæ B D; & idcirco



5. primi. *26. primi*

circò quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Cum igitur quadrato rectæ A B, æqualia ſint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B D; A c proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ A B, uel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D: Quare quadratum rectæ A B, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat. *47. primi*

COROLLARIVM.

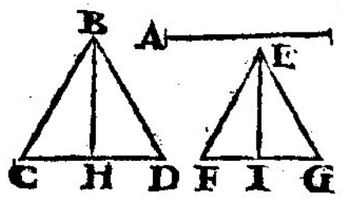
HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt B D, & C D, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus B C, ſecari bifariam a perpendiculari A D. Quare cum latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli A C D; & baſis B D, baſi C D, æqualis; Erũt & anguli B A D, C A D, æquales, id eſt, angulus B A C, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari A D. *8. primi.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

10. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediã. Sit enim B C D, unum triangulũ Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducãturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. Quoniã igitur quadratũ diametri A, ſeſquialterũ eſt quadrati lateris Tetraedri B C, & duplũ quadrati lateris Octaedri E F; habebũt quadrata rectarũ A, B C, E F, proportionẽ, quã numeri 6. 4. 3. ideoq; cõminenſu-



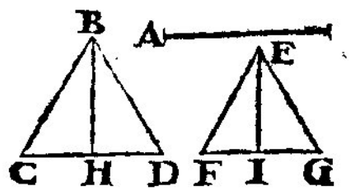
14. tertiidec *14. tertiidec*

commensurabilia erunt. Quare & lineæ ipsæ A,BC,EF,cõmensurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF; & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.

6. *decimi.*

12. *quarti-decimi.*

RVRSVS, quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectæ BH, quam quadratum rectę EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum BC, BH, quã quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quam numeri 4, 3. ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineę ipsæ BC, BH, quam lineę EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia uidelicet toti, commensurabilis. Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. Quoniam uero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quã 1, ad 3, cum ostensum sit talium partium 1. esse tam CH, quam FI, qualium 3. est tam BH, quam EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles: Ac proinde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplæ sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars.) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulũ EFG, totius superficiei quarta pars) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri,



6. *decimi.*

12. *decimi*

9. *decimi.*

12. *quartide*

22. *decimi.*

traedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphæræ diameter fuerit Rationalis, &c. Quod erat ostendendum.

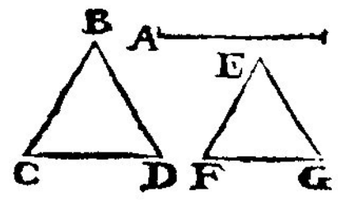
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius propositionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, esse superficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia sunt ostensa, demonstratum est, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, esse Rationales potentia tantum commensurabiles; Ac propterea rectangula sub CH, BH, & sub FI, EI, hoc est, triangula BCD, EFG, ipsis æqualia, esse Media. Cum igitur eadem sit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius unum latus sit Rationale; perspicuum est, quod intertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri: Superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

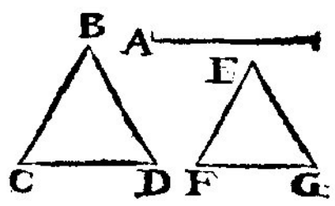
SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri uero basis triangulum EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At uero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. Quoniã quadratum diametri A [illegible] sesquitertium est quadr[illegible]ae dri CD; duplũ [illegible]ati lateris Octaedri FG; hi, ut qualium partium 6. fuerit quadratũ diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD, & talium 2. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectę CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (quia tam



13. *tertiidec.*

14. *tertiidec.*

20. & 19. sexti. tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cum sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli E F G.

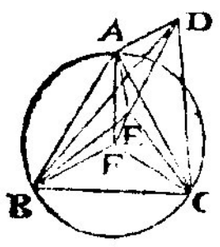


RVRSVS, quoniã ostensum est triangulũ BCD, sesquitertiũ trianguli EFG; Ac propterea qualium partiũ 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulũ EFG; Efficitur, ut triangulũ EFG, octies sumptũ, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulũ BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Scribitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

0. 15. THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus [illegible] C, D A B, D B C, D C A, in sphæra, cuius centrum E; d[illegible] angulo D, per E, centrum [illegible] E F, incidens in basim A [illegible] ipsam, ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & D F, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis E A, E B, E C; F A, F B, F C; quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiem, æquales sunt; erunt duo latera E A, E D, trianguli E A D, æqualia duobus lateribus



E C, E D, trianguli C E D; Sunt autem & bases A D, C D, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt; 8. primi. Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erunt, eo quod tã A E D, A E F, quam C E D, C E F, duobus rectis æquiualeant. 13. primi. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, si considerentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia sunt lateribus E C, E F, trianguli E C F; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt 4. primi. F B, F C, si considerentur triangula E B F, E C F. Quare cum tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circunferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F, centrum basis A B C, seu circuli 9. tertij. eam circunscribentis.

QVIA uero, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli A B C, demissa in centrum circuli cadit; efficitur, ut recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri A B C. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet unus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

0. 16. THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDR[illegible]M in sphæra descriptum, diuidi [illegible] pyramides æquales, & similes [illegible] tri[illegible]dinum; basis uero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentũ octo triangulis equilateris & equalib⁹ E A D, E A B, E B C, E C D, F B C, F B A, F A D, F D C, & in sphera descriptũ, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides equales & similes equa-

lium

lium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę. Ductis enim ex G, centro sphęrę ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quę ęquales sunt, cum sint semidiametri sphę-



14 tertijdec. rę ductę uidelicet e centro ad superficiē sphæræ: quoniam quadratum diametri sphęrę duplum est quadrati lateris Octaedri A E; & quadruplum quadrati semidiametri A G, ex scholio. propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphęrę, talium partium 2. erit quadratum rectę A B, & talium partium 1. quadratum rectę A G; Ac proinde quadratum rectę A B, duplum erit quadrati rectę A G. Cum ergo quadratum rectę A G, ęquale sit quadrato rectę B G; erit quadratum rectę A B, ęquale duobus quadratis rectarum A G, B G; Ac propterea angu-
48. primi. lus A G B, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli A G D, D G C C G B, recti. Quam ob rem A G, C G, &
14. primi. B G, D G, in rectū erunt coniunctę; atque adeo rectę A C,
2. undec. B D, sese secantes in G, in uno existent plano; Ac propterea
7. undec. rectę earum extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A B C D, in uno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarum basis communis A B C D, uertices uero E, & F; quę pyramides ęquales sunt & similes, ex defin. 10. lib. 11. cum quęlibet constet ex quatuor triangulis ęquilateris Octaedri, quę ęqualia sunt & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse ęquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę. Quoniam ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, ęquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, [illegible] oque quadratum lateris A E, ęquale duobus qu[illegible]metrorū A G,
48. primi. E G. Ac propterea angulus A G E, [illegible] erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuo secantibus in G, ad rectos
4. undec. angulos insistit, ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad basin pyramidum. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A B C D F. Cum ergo

ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuū est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quin A C, est diameter sphæræ; erit eius quadratum duplū 14. tertijde.
quadrati lateris A D; Ac propterea ęquale duobus quadratis laterum A D, D C. Quare angulus A D C, rectus est: Eo- 48. primi.
dem modo recti erunt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri A B, constat, ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrū 14. tertijde.
ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa uidelicet constructione octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, uisum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 0. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente uigintiseptē sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphæræ.

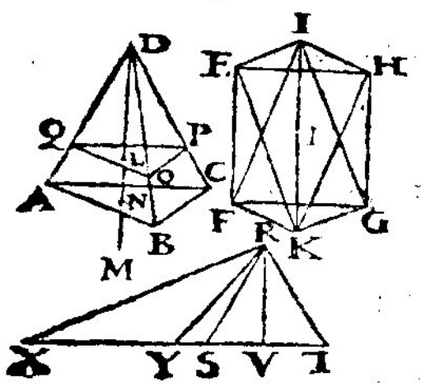
VEL, ut Campanus loquitur.

TETRAEDRVM sphæræ imposi-

tum ad octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia triũ quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea superquintupartiente uigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHIK, in una eademque sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ DM, incidens in basin ABC, ad pũctum N. Erit igitur N, centrũ basis ABC, & DN, perpendicularis ad eã dem basin. Quia uero pars diametri LN, inter centrum sphæræ & basin tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia pars semidiametri, per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Erit DL, semidiameter tahũ partium 3. qualium 1. est LN; Ac propterea DN, talium 4. Ducatur deinde, ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum plano ABC; eruntque rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac propterea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt, ex definitione 9. lib. 11. Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secãt rectas DN, DC, proportionaliter; erit ut DN, ad DL, ita DC,

15. *quartidecimi.*



16. *undec.*

17. *undec.*

DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, ut 4. ad 3. (cum ostẽsum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit ut 4. ad 3. Ac proinde, cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam; erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, ut 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. ut constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. ut constat ex 2. propos. lib. 8. Rursus quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, ut 64. ad 36. ut in ijsdem numeris constat

8. *duodec.*

20. *sexti.*

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpẽdicularis RV. Eritq; latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC Igitur linea RV, est potens uigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

12. *quarti decimi.*

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, ut 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, ut sit TY, tahũ partiũ 32. qualiũ 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniã uero proportio DC, ad DP erat, ut 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, tahũ partiũ 36. qualiũ DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) Ac propterea qualiũ patiũ TY, est 32. Quare linea TY. cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrũ ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, ut rectangulũ contentũ sub recta RV, (quæ potest uigintiseptẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris DC) & sub recta TY, (quæ cõtinet octo nonas partes eiusdẽ lateris) ad quadratũ diametri sphęrę DM.

CVM enim ductis rectis RX, RY, triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV, TY. Ac propterea erit ut triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulũ sub RV, TY, ad idem triangulũ RST: Est autem triangulum RTX, ad triangulum RST, ut basis TX, ad basin ST, nimirum ut 64.

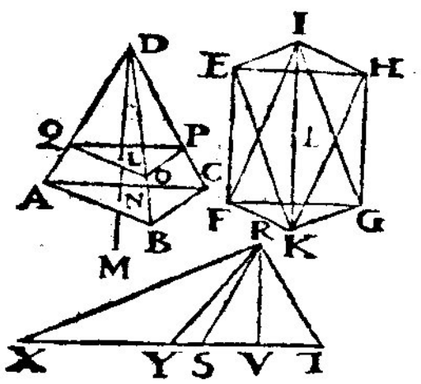
1. *sexti.*

41. *primi.*

7. *quinti.*

1. *sexti.*

ut 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub R V, T Y, ad trian gulum RST; hoc eſt, ad triangulum D Q P, ſiue Q O P, ſibi æquale, erit, ut 64. ad 27. Fuit autem & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, ut 64. ad 27. Erit ergo ut rectangu lum ſub R V, T Y, ad triangu lum Q O P, ita pyramis A B-C D, ad pyramidē Q O P D: At uero ut triangulū Q O P, ad quadratum diametri ſphę rę D M, ita eſt pyramis Q O-P D, ad octaedrum E F G H-I K. (Nam cum D N, recta ſit ad planum A B C, recta quoque erit ad planū Q O P, ex ſcholio propoſ 14. lib. 11. ideoque ſphærę ſemidiameter D L, altitudo erit pyramidis, ſeu tetraedri Q O P D: Octaedrum autem E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum baſis communis quadratum E F G H, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphęrę L I, L K. Pyramides ergo Q O-P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. erit ut baſis Q O P, ad baſin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. oſtendimus, ut baſis Q O P, ad duplum baſis E F G H, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc eſt, ad Octaedrū E F G H I K.) Ex ęquo igitur erit, ut rectangulum ſub R V, potente uiginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri D C, & ſub T Y, octo nonis eiuſdem lateris D C, contentum, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis, ſeu tetraedrum A B C D, ad octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo ſphęræ impoſitum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



16. quartidecimi.

SCHOLION.

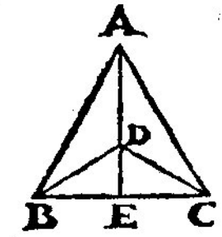
QVONIAM *uero* D C, *talium partium* 4. *fuit, qualium* 3. D P; *continebit* D P, *ſeu illi æqualis* R T, *tres quartas partes lateris tetraedri* D C: *Ac proinde, cum recta* R T, *ſit potentia ſeſquitertia rectæ* R V, *erit* R V, *potentia ſubſeſquitertia ipſius* R T, *nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rurſus quia* T Y, *fuit talium partium* 32. *qualium* 27. S T, *ſeu* D P; (*tres uidelicet quartæ partes lateris tetraedri.*) *erit* T Y, *ſuperquintupartiens uigeſimas ſeptimas partes ipſius* S T, *nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoque tetraedrum* A B C D, *ad octaedrum* E F G H I K, *ut rectangulum ſub* R V, *quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub* T Y, *quæ ſuperquintupartiens eſt uigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, ut uolebat Campanus.*

12. quartidecimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18. 0. 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta A E, quæ perpendicularis erit ad B C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico A E, triplam eſſe rectæ D E, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cum latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia ſint lateribus D B, D C, trianguli B D C; e centro enim ducuntur; ſit autem & baſis A B, baſi B C, æqualis: Erunt triangula A D B, B D C, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare, ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum eſt trianguli B D C. Quoniam uero rectangulum ſub A E, E B,



triangulo ABC;& rectangulũ ſub DE, EB, triãgulo BDC, æquale eſt,ex ſcholio propoſ.41.lib. .. cũ baſis triãguli BC, dupla ſit baſis BE,utriuſq; rectanguli : Erit quoq; rectangulum ſub AE, EB,triplum rectanguli ſub DE, EB : Eſt autẽ ut rectangulum ſub AE, EB,ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdem altitudinis EB,ita baſis AE,ad baſin DE. Igitur & AE,tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo,&c. Quod erat oſtendendum. 1. *ſexti.*

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE,ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD,inter angulum,& cẽtrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE;qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD,earundem partium 2.continebit : Ac propterea AE,ſeſquialtera erit ipſius AD.

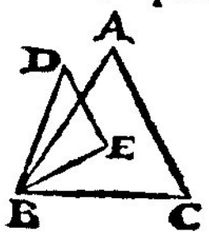
EX quibus rurſus fit,rectam AD, rectæ DE,duplam eſſe.

0. 17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum ſphæræ inſcribatur ; erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunq; octaedri deducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti,triangulum aquilaterum ABC, in quod e centro ſphæræ D,perpendicularis demittatur DE; ducaturq; ſemidiameter ſphæræ DB. Dico ſemidiametrum DB,potẽtia triplam eſſe perpẽdicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum ABC,circũſcribit, cadat,erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octaedri AB;& quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4.lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB,6,& quadratum ſemidiame



14.*tertÿde.*

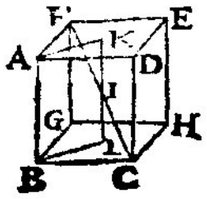
midiametri ſphærę DB,3. Quia uero quadratũ lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triãgulum ambientis,rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE,talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare cum quadratum rectę DB,æquale ſit quadratis rectarũ BE,DE; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphęræ inſcribatur, &c. Quod demonſtrandum erat. 12.*tertijde.* 47.*primi.*

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati : Perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH,in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad unam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi,id eſt, toti ſuperficiei cubi.

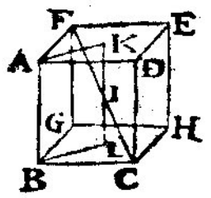


15.*tertÿde.*

PRODVCTA autem HI, ad baſin oppoſitam BCHG, vſque in punctum L; cum KL, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholion propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE; 6. *undec.*

ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis A E, B H, communes ſectiones, lineas rectas A K, B L, quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit A B L K; atque adeo recta K L, æqualis lateri cubi A B. Quoniam uero perpendicularis K L, e centro ſphæræ I, cadit in baſes A E, B H, ad puncta K, & L; erunt K, & L, centra circulorum dictas baſes ambientium in ſphæra, per coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. Quare K L, in centro I, bifariam ſecabitur a dicta diametro C F, ut in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. oſtendimus; Ac propterea, cum K L, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit I K, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

16. *undec.*



COROLLARIVM

Ex dictis colligitur, ſolidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum cõprehendentis, æquale eſſe cubo. Cum enim quadratum diametri ſphęræ triplum ſit quadrati lateris cubi; erunt duo quadrata A E, B H, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphęrę: Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod fit ex I K, dimidio lateris cubi in A E, tertiã partem quadrati diametri ſphærę, æquale eſſe ſolido, quod fit ex I L, dimidio lateris cubi in B H, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeant & baſes, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo ſolida compleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

15. *tertiȳde.*

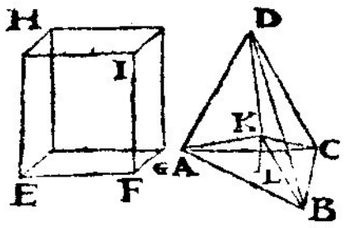
31. *undec.*

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, ut dicamus, ſolidũ, quod fit ex latere cubi in tertiã partem quadrati diametri ſphęrę, æquale eſſe cubo. Nam cubus B E, producitur ex B A, latere cubi in quadratum A E, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuũm eſt.

SCHOLION

VNIVERSE autem Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quod-

quodcunque A B C D, contentum planis A B C, A B D, A C D, B C D; ſolidum autem E F G H, contentum ſub E I, tertia parte ſuperficiei corporis A B C D, & ſub altitudine F G, quæ æqualis ſit perpendiculari K L, ducta ex centro K, ad baſin A B C. Dico ſolidum E F G H, æquale eſſe dato corpori regulari A B C D. Nam ductis ex centro K, rectis K A, K B, K C, K D, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint; ipſi æqualiter a centro diſtabunt, per lemma 2. propoſ. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam uero priſma contentum ſub baſi A B C, & altitudine K L, triplum eſt pyramidis A B C K, per coroll. 1. propoſ. 7. lib 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine K L, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine K L, (nimirũ compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis A B C D. Quamobrem, cum idem priſma triplum ſit priſmatis E F G H, quod & illius baſis tripla ponatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida E F G H, A B C D, æqualia. Quod eſt propoſitum.

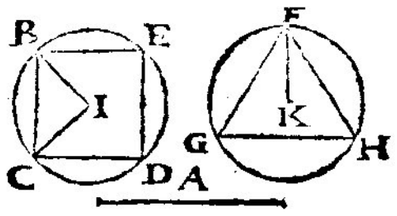


THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius unum quadratum B C D E, & octaedrum, cuius unum triangulum F G H. Dico eundem circulum circunſcribere & quadratum B C D E, & triangulum F G H, hoc eſt, circulos B C D E, F G H, ipſa circunſcribentes, eſſe æquales.

les. Sint enim rectæ e centris IB, KF. Quia igitur quadratū
15.tertijde. diametri A, triplum est quadrati lateris cubi BC; & quadratum lateris BC, duplum quadrati rectæ BI; (Nam ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantē;
47.primi. Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cū rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata; duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratum rectę BI. Rursus quia quadratum diame-



14.tertijde. tri A, duplum est quadrati lateris octaedri FG; & quadratū
12.tertijde. lateris FG, triplum quadrati rectæ FK, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectæ FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

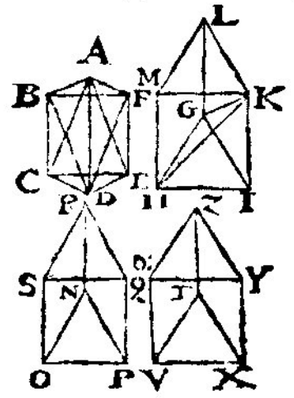
HINC fit, lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi quam octaedri circunscribunt, æquales esse. Si enim ex cētro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circunscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. qui
21. quarti decimi. cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basiū coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. Quod est propositū.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidē sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum

plum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

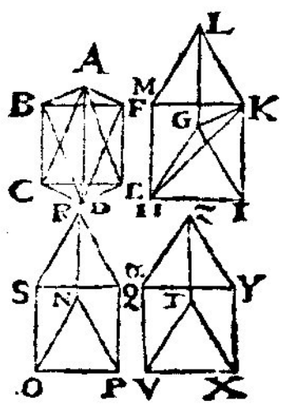
IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrū ad triplū tetraedri, ut latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrū in quatuor pyramides, quarum latus cōmune est ipsa diame



ter AD, & uertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDA & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratū BCEF, existunt continentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniam uero quęlibet harum pyramidū constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triāgulis, quę qm̄ latus ipsorū commune est AD, diameter, & reliqua latera ipsius octaedri latera existunt, inter se qualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Constituatur super GHI, basin tetraedri, prisma GHIKLM, eiusdem cū tetraedro altitudinis; quod ipsius tetraedri triplum erit, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Rursus, super basin octaedri NOP, & TVX, basi tetraedri æqualem, constituantur duo prismata NOPQRS, TVXYZα, eiusdem cum octaedro, seu pyramide ACDE, altitudinis. Qm̄ igitur GHI, hoc est, TVX, basis tetraedri sesquitertia est ipsius NOP, basis octaedri: Erit quoq; prisma TVXYZα, prismatis NOPQRS, sesquitertiū, cū prismata eiusdem altitudinis sint, ut bases, ex ijs, quę ad propos. 7 lib. 12. demōstrauimus. Est aūt & octaedrū ABCDEF, eiusdem prismatis NOPQRS, sesquitertium; (Nā prisma æquale est tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. qualiū quatuor cōtinere diximꝰ octaedrū) Igit æquale est octaedrum prismati TVXYZα. Quia uero prisma TVXYZα, ad prisma GHIKLM, proportionē habet, quā altitudo illius ad altitudinē huiꝰ, ex scholio propos. 14. lib. 12. Est aūt altitudo prismatis TVXYZα, quod
8. primi.
14. quarti decimi.

octaedro

octaedro æquale est, eadem quę octaedri, ex constructione: Erit quoque octaedrum ad prisma G H I K L M, hoc est, ad triplum tetraedri G H I K, ut altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Est autem altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra basium oppositarum coniungens, ęqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra basium oppositarum connecteti, per coroll. propos. 21. huius lib. Atque ut latus cubi ad altitudinem tetraedri, ita est latus octaedri ad latus tetraedri. (Nam tam quadratū lateris cubi ad quadratū altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, est, ut 3. ad 4. Posito enim quadrato diametri sphęræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propos. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. ideoque quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, est ut 3. ad 4. Rursus posito quadrato diametri sphæræ 6. erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratū lateris tetraedri 4. &c.) Est igitur octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Si itaque octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod demonstrandum erat.



18. *tertiȳde.*

18. *tertiȳde.*

COROLLARIVM.

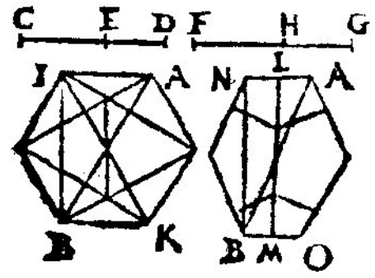
Ex dictis infertur, ita esse altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Ostensum enim est, ita esse latus cubi, quod quidem æquale est altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita esse diametrum sphæræ ad latus tetraedri, ut latus octaedri ad latus cubi. Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet sesquialteram.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea proposita potuerit totam aliquam

aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

POSSIT recta A B, rectam C D, & eius segmentum maius C E; Item rectam F G, & eius segmentū minus H G. Dico C E, esse latus Icosaedri, & H G, latus Dodecaedri, eius sphæræ, cuius A B, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter A B, descriptū Icosaedrum A I B K, & Dodecaedrum A N B O. Latera deinde Icosaedri opposita A I, B K, connectantur recta I B, quę subtendet unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, ut cōstat ex propos. 16. lib. 13. quod etiam uidere licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia uero A I, B K, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. 13. erunt anguli A I B, I B K, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera A I, I B, trianguli A I B, æqualia sint lateribus K B, B I; & bases quoque A B, I K, ęquales; Erūt anguli A I B, I B K, æquales) recti erunt; ideoque quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum A I, I B: Erat autem idem quadratū rectæ A B, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarū C D, C E: Igitur quadrata rectarum I B, I A, æqualia sunt quadratis rectarum C D, C E; Ac propterea cum C E, sit maius segmentum ipsius C D, diuisę extrema ac media ratione; Item I A, maius segmentum ipsius I B, similiter diuisæ; (Nam I B, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est, I A, latus Icosaedri. Constat autem, rectę subtendentis angulum pentagoni,



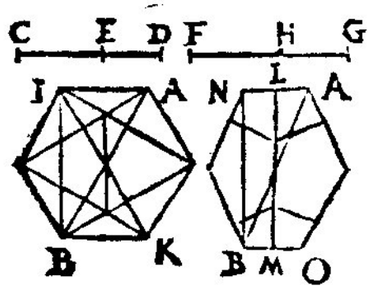
29. *primi.*

8. *primi.*

47. *primi.*

tagoni,

8. *tertijdec.* tagoni, si secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit C E, maius segmentum ipsi I A, lateri Icosaedri. Cum enim sit
2. *quartide.* ut C D, ad C E, ita I B, ad I A; erit quoque ut quadratum



22. *sexti.* rectæ C D, ad quadratum rectæ C E, ita quadratum rectæ I B, ad quadratum rectæ I A; Ac componendo, ut quadrata rectarum C D, C E, ad quadratum rectæ C E, ita quadrata rectarum I B, I A, ad quadratum rectæ I A: Ostensa sunt autem quadratis rectarum C D, C E, æqualia quadrata rectarum I B, I A. Igitur & quadrato rectæ C E, æquale est
14. *quinti.* quadratum rectæ I A; ideoque rectæ C E, I A, æquales sunt. Quod est propositum.

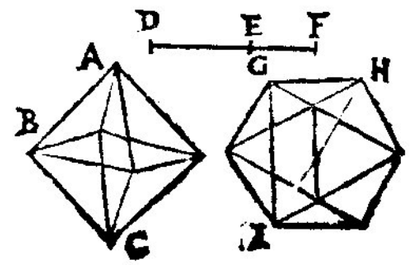
RVRSVS latera Dodecaedri opposita A N, B O, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta L M, & ipsa latera recta N B, coniungantur. Quoniam igitur N L, B M,
33. *primi.* æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. erunt quoque L M, N B, æquales & parallelæ: Est autem recta L M, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & N B, ad eadem perpendicularis erit; Ac proinde quadratum rectæ propositæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B,
47. *primi.* N A. Quare cum idem quadratum rectæ A B, æquale sit positum quadratis rectarum F G, H G; æqualia erunt quadrata rectarum N B, N A, quadratis rectarum F G, H G. Ac propterea, cum H G, sit minus segmentum ipsius F G, sectæ extrema ac media ratione; Item N A, minus segmentum ipsius N B, hoc est, ipsius L M, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit H G, minus segmentum ipsi N A, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus C E, maius segmentum æquale esse ipsi I A, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri;

saedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus A B, octaedri A B C, & maius segmentum D E, & minus E F, rectæ D F, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem sphæræ inscriptum Icosaedrū G H I, cuius latus G H, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi G I, & diameter H I. Dico quadratum lateris G H, duplum esse quadrati minoris segmēti E F. Cum enim G H, sit latus pen-



tagoni, cuius unum angulū subtendit recta G I; erit G H, maius segmētum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione; Ac proinde composita recta ex G I, G H, secabitur similiter in G, puncto, extrema ac media ratione. Quia uero quadratū diametri H I, æquale est quadratis rectarum G I, G H, quod angulus I G H, rectus sit, ut in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum D E, E F, ponitur; Erunt, ut quadratum diametri H I, ad quadratum lateris A B, ita quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F: Est autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla sunt quadratorum rectarum D E, E F. Atqui ut quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F, ita est quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ E F. (Nam cum sit ut G I, ad G H, ita D E, ad E F: Erit quoq;

8. *tertijdec.*

5. *tertijdec.*

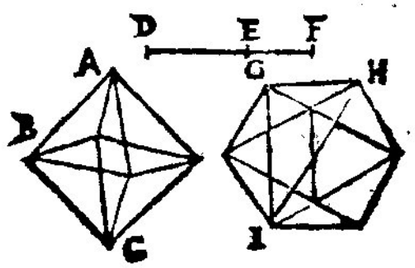
47. *primi.*

14. *tertijdec.*

2. *quartide.*

ut qua-

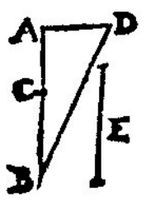
22. *sexti.* ut quadratum rectæ G I, ad quadratum rectæ G H, ita quadratum rectæ D E, ad quadratum rectę E F; & componendo, ut quadrata rectarum G I, G H, ad quadratũ rectæ G H, ita quadrata rectarum D E, E F, ad quadratũ rectæ E F. Et permutando, ut quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum D E, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ E F. Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque est quadrati rectæ E F. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quæ æqualis sit minori segmẽto A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D; sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua A D, uel A C, latus est Dodecaedri. Cũ enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, uel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmẽti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratũ igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D; Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autem recta B D, duplum rectę E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D latus Dodecaedri ponitur. Sugitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.



4. *tertijdec.* 14. *tertijdec.*

COROLLARIVM.

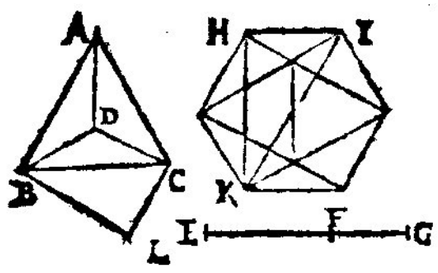
QVONIAM uero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, ut constat ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit. 18. *tertijdec.*

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri A B C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse sesquialteram minoris segmenti F G. Subtendat enim recta H K, unum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta I K, diameter. Quia igitur H I, est maius segmentum re- 8. *tertijdec.*

ctæ H K, diuiſæ extrema ac media ratione; Erit quoque
5. *tertijdec.* compoſita K H I, diuiſa eodem modo in H, maiusque ſeg-
22. *primi.* mentum H K, & minus H I. Fiat ex rectis B C, E F, F G,
48. *primi.* triangulum BCL, ita ut B L, recta ipſi EF, & C L, ipſi F G,

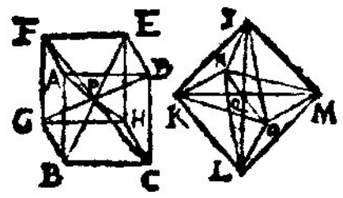


2. *quartide.* ſit æqualis: Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, ut propoſ. 23. huius lib. oſtẽdimus; Eſtq; ut B L, ad LC, ita KH, ad HI. Igitur triangu-
6. *ſexti.* la BLC, KHI, æquiangula ſunt; Ac propterea ut KI, ad IH,
4. *ſexti.* ita BC, ad CL; & permutãdo, ut KI, ad BC, ita HI, ad CL:
13. *tertijdec.* Atqui I K, diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & HI, latus Icoſaedri erit potẽtia ſeſquialterũ ipſius CL, hoc eſt, minoris ſegmenti F G. Si latus itaq; Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadẽ cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, ut ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item ut latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

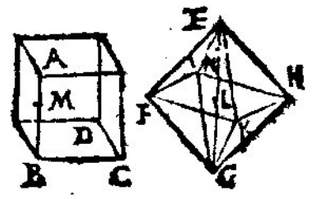
SINT in eadem ſphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiẽ Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines: (cum enim circuli deſcripti circa pyramides, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac



ac propterea æqualiter a centro ſphæræ diſtent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. Quoniam autem idem circulus cõplectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter diſtant baſes pyramidum cubi, & Octaedri a centro ſphęrę, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, ut una pyramis cubi ad unã pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. demonſtrauimus, ut ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies uidelicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus, ex eodẽ ſcholio, ut cubus ad octuplũ pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrũ, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur. 21. *quartidecimi.*

SINT rurſus in eadem ſphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphęrę, ſeu Octaedri E G, & centrũ L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex ſemidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam uero quadratũ I F K H, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarũ pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. ſeſquialterum eſt quadrati B D, lateris cubi B C: Eſt autem & recta AB, rectę B M, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabũtur baſes I F K H, BD, & altitudines A B, BM: Ac propterea parallelepipedũ ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim B D, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectę EN, tripla eſt; erit & parallelepipedũ ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E L, triplũ parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine E N, ut in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E L, triplum eſt pyramidis I F K H E, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo 18 *tertijdec.* 34. *undec.*

ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, ex ſcholio 4 propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo L N dupla ſit altitudinis E N; Item Octaedrum E F G H I K, duplum eſt pyramidis I F K H E. Aequale igitur erit parallelepipedũ ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & altitudine B M, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, ut altitudo B M, ad altitudinem L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita eſt A B, ad E L. (Cum enim ſit ut A M, ad M B, ita E N, ad N L; & componendo, ut A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, ut A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedũ ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo A B C D; Et parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, æquale Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoque ut cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.



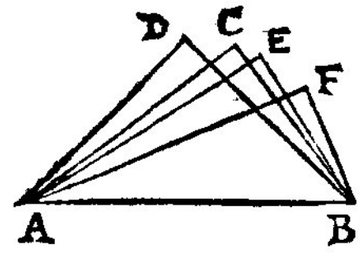
16. quartidec.

SCHOLION.

Quia demonſtratum eſt, diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita ut, ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, ut in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, da

13. tertiædec.

ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ A C, continens duas tertias partes quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A C, E C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.



RVRSVS cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A D, B D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam A D, latus eſſe Octaedri. 14. tertiædec.

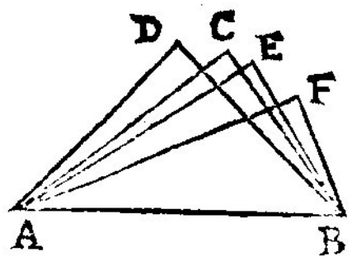
DEINDE, quoniam docuimus diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars ſit quadrati diametri A B; Vel ſi quadrato diametri A B, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum A C. B C, ita ut quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter A B, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtũ eſt, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C: Quemadmodum e cõtrario, ſi ex quadrato diametri A B, tollatur quadratum lateris cubi B C, remanet quadratum lateris Tetraedri A C. 15. tertiædec.

PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totã quãpiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum; Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri A B, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. demonſtrata ſunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarũ A E, B E, proportionem habentium, quam recta quæuis extre- 23. quartidecimi.

ma ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Rectam minorem BF, esse Icosaedri latus.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totã aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.

23 'quartidecimi.

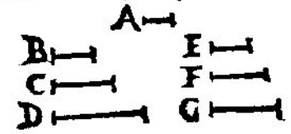


HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt: Sequentes autem quinque posit. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita ut A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartę ad quartam, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundę ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A: Erit ut recta C, ad rectam A, ita quadratum rectę B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, ut recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectę A: Et conuertendo, ut recta A, ad rectam F, ita quadratum rectę A, ad quadratum rectę E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectę A, ut recta C, ad rectam A; & quadratum rectę A, ad quadratum rectę E, ut recta A, ad rectam F; Erit ex æquo, quadratum rectę B, ad quadratum rectę E, ut recta C, ad rectam F: Est autem proportio quadrati rectę B, ad quadratũ rectę E, duplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & proportio rectę C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est primum.



20. *sexti.*

quadr. B. *Recta C.*
quadr. A. *Recta A.*
quadr. E. *Recta F.*

20. *sexti.*

20. *sexti.*

RVRSVS cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectę B, ad rectam A; habeat autem & cubus rectę B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectę B, ad rectam A; Erit ut recta D, ad rectam A, ita cubus rectę B, ad cubum rectę A. Eadem ratione erit ut recta G, ad rectam A, ita cubus rectę E, ad cubum rectę A; Et conuertendo ut recta A, ad rectam G, ita cubus rectę A, ad cubum rectę E. Quia ergo est cubus rectę B, ad cubum rectę A, ut recta D, ad rectam A; & cubus rectę A, ad cubum rectę E, ut recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectę B, ad cubum rectę E, ut recta D, ad rectam G: Est autem propoportio cubi rectę B, ad cubum rectę E, triplicata proportionis rectę B, ad rectam E. Igitur & propotio rectę D, ad rectam G,

33. *undec.*

Cubus B. *Recta D.*
Cubus A. *Recta A.*
Cubus E. *Recta G.*

33. *undec.*

triplicata eſt proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod eſt ſecundum. Itaque ſi ſint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

Hoc idem demonſtrauimus ad propoſ. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno al. quo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta perpendicularis A D, quæ bifariam ſecabit latus BC, ut in coroll. propoſ. 12. huius lib. demonſtratum eſt; Ac propterea B D, dimidium eſt lateris A B. Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cum enim rectangulo ſub A D, B D, æquale ſit triangulum A B C, ut perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Sit autem eidem rectangulo ſub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. Quoniam uero quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris



13. *ſexti.*

17. *tertij.*

20. *ſexti.*

ris A B ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter A D, & D B, æquale eſſe triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadē ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiuſuis A B C D, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppoſitum F G, deducta diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum A C ad triangulum E F G, ut latus trianguli E F, ad perpendicularem E H.



Poſita enim inter E H, F H, media proportionali I K, cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum ſit quadrati lateris cubi A B; ſit autem & duplum rectanguli ſub latere E F, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum ſub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc eſt, tres rectæ F H, A B, E F, continue erunt proportionales: Sūt autem & tres rectæ F H, I K, E H, continue proportionales, ex

18. *tertiūdec.*

1. *ſexti.*

17. *ſexti.*

ex conſtructione. Igitur cum omnium antecedens ſit F H, erit proportio rectę E F, ad rectam E H, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ A B, ad rectam I K, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cum & quadratum A C, rectæ A B, ad quadratum rectæ I K, hoc eſt, ad triangulum E F G, (eſt enim ex coroll. propoſ. 29. huius lib. quadratum rectæ I K, æquale triangulo E F G,) proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ A B, ad rectam I K; Erit quadratum cubi A C, ad triangulum Tetraedri E F G, ut latus E F, ad perpendicularem E H. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

28. *quarti decimi.*

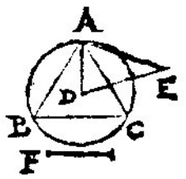
F H. / A B. I K. / E F. E H.

20. *ſexti.*

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterũ eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis uero, ſiue altitudo Tetraedri potẽtia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadẽ ſphæra deſcripti.

SIT Tetraedri triangulum A B C, & altitudo, ſeu axis Tetraedri D E, latusque cubi eiuſdem ſphęrę F. Dico latus Tetraedri A B, eſſe potentia ſeſquialterum axis D E: Axem uero D E, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum deſcripto circulo A B C; ad centrũ D, in quod uidelicet cadit axis D E, ut cõſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur A D, ſemidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris A E, hoc eſt, lateris A B, æquale eſt quadratis rectarum A D, D E, & triplũ quadrati ſemidiametri A D; Fit, ut poſito quadrato lateris A B, ſeu A E, partium 6. quadratum rectæ A D, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.



5. *quarti.*

47. *primi.*

12. *tertij dec.*

QVO-

QVONIAM uero latus Tetraedri A B, potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris A B; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

18. *tertij dec.*

COROLLARIVM. I.

QVIA uero, poſito quadrato lateris A B, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9. quod diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri. Earundem uero partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis D E; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatã, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialterã axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, ut in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2 propoſ. 15. lib. 13.

13. *tertij dec.*

20. *ſexti.*

COROLLARIVM. II.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo baſis ad latus oppoſitũ ductam. Quia uidelicet tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex uno angulo ad latus oppoſitum deductæ; quam ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.

12. *quarti decimi.*

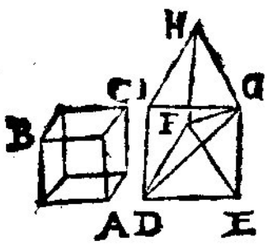
THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.

DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus A B C, & Tetraedrum D E F G. Dico cubum Tetraedri eſſe triplũ. Conſtituatur ſuper D E F, baſim Tetraedri priſma D E F G H I, eandẽ habẽs cũ Tetraedro altitudinẽ. Quũ igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi A B C, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri D E F, ut latus Tetraedri ad ꝑpendicularẽ ductã ex angulo quouis baſis D E F, ad latꝰ oppoſitũ. Vt aũt latꝰ Tetraedri ad

30. *quinti decimi.*

ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, ſeu priſmatis ABC; Erit baſis priſmatis ABC, ad baſim priſmatis DEFGHI, ut huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 9. lib. 12. demonſtrauimus, æqualia erunt priſmata ABC, DEFGHI, cum ipſorum baſes & altitudines reciprocentur. Atqui priſma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.



COROLLARIVM.

VNDE priſma, eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubũ ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

E LEMENTI DECIMIQVARTI FINIS.

EVCLIDIS

EVCLIDIS

ELEMENTVM XV.

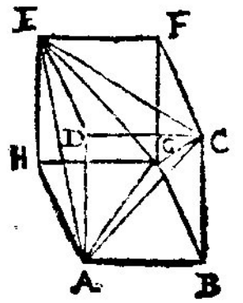
ET SOLIDORVM QVINTVM, ut nonnulli putant. Vt uero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. I.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat deſcribere pyramidem, ſeu Tetraedrum. Ab uno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, EC, a quarum extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potentia duplæ ſint laterum æqualium quadratorum, ut in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; perſpicuum eſt, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; Ac propterea pyramidem,

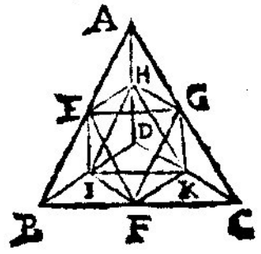


dem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia uero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

IN data pyramide octaedrũ describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describẽdũ octaedrũ. Diuisis omnibus lateribus bifariã in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIdem KG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt. Quoniam uero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterum ABD, ACD: æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.



4. *primi.*

COROLLARIVM.

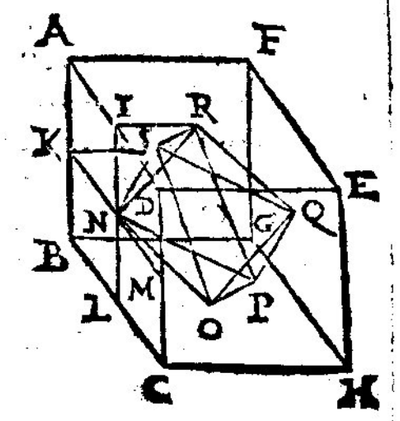
QVONIAM uero tria plana IKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, ut in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE; necnon

non in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. 3. *duodec.*

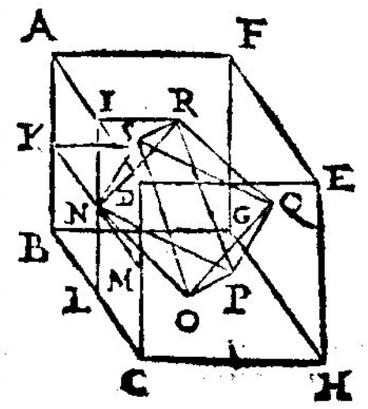
PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo octaedrum describere. 3.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrũ est quadrati ABCD, ut constat ex demõstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, ut perspicuum est ex prędicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorũ quidẽ quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniã uero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, ut dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo 10. *undec.*



4 *primi* gulo recto *I* A F, in quadrato A E; Erunt baſes N R, N S, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, ut quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus uidelicet rectæ egreddiuntur, centra exiſtunt. Ita enim uides duas rectas N I, R I, ductas eſſe ad I, dimidium lateris A D, quod cõmune eſt quadratis A C, A E, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ N K, S K, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris A B, quod commune eſt quadratis A C, A G, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam obrẽ conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt N O Q P S P; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earũ centris. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.



1. *quintide* 2. *quintide* ALITER. In cubo dato inſcribatur pyramis; In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumq; erit, quod propõnitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera uero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri, perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi, atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

COROLLARIVM.

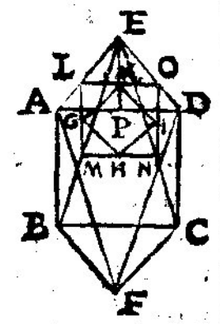
QVIA uero diametri Octaedri in cubo deſcripti N Q, R O, ſi ducerẽtur, ſe mutuo ſecãt ad angulos rectos, ex coroll. 1 propoſ. 14. lib 13. quæ quidẽ coniungũt centra baſium cubi oppoſitarũ: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſiũ cubi oppoſitarũ connectentes nõ ſolũ ſe ſe mutuo bifariam, ut docuimus coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, ut hic oſtendimus, diuidere.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4. 4.

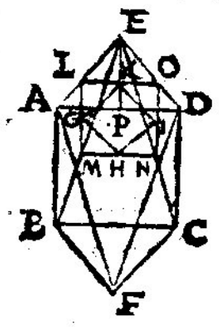
IN dato octaedro cubum inſcribere.

DATVM octaedrum ſit ABCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulæ continentur, quarum uidelicet uertices ſunt ſex anguli octaedri, & quælibet duę octaedrum conſtituũt; ſit una earum pyramis ABCDE, cuius baſis ABCD, quadratum, triangula uero æquilatera A B E, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum ſimilia ſint triãgulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod latera habeant communia. Eſt enim E M, latus commune triangulis LME, E M N; Et E N, commune triangulis E M N, N E O; Et denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc uero ipſi N E O; & hoc ipſi O E L, æquale eſſe. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter ſe æquales ſunt. Quia uero ducta recta EKP, tripla eſt rectę KP; Eſt autem ut EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, tripię erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione ſecantur, quadrilaterumque conſtituent L M N O. Rurſus quia LO, LM, parallelę ſunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipſis exiſtentibus plano; æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus eſt, cum ABCD, quadratum ſit, ut oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. & in propoſ. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non ſecus demonſtrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos eſſe. Quoniam uero tam planum per LO, L M, quam per N M, NO, ductum, parallelum eſt plano



18. *quartide* 2. *ſexti.* 10. *undec.* 15. *undec.*

A B C D; ipſa quoque inter ſe parallela erunt, atque adeo, cum conueniant in punctis M, & O, unum planum efficiẽt, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratũ erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera E L, E K, trianguli E L K, æquilia ſint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoq; ipſis cõtẽti, æquales, quod recta E K, ex angulo E, p centrũ K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariã ſecet angulũ A E D, per coroll. ppoſ. 12. lib. 13. Erunt & baſes K L, K O, æquales, hoc eſt, recta L O, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac proinde rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cum ſint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G H, I, K, connectentes. Quia uero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; (cum enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus ſint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per coroll. 2. propoſ. 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubũ deſcripſimus. Quod faciendũ erat.



4. primi.

4. primi.

13. primi

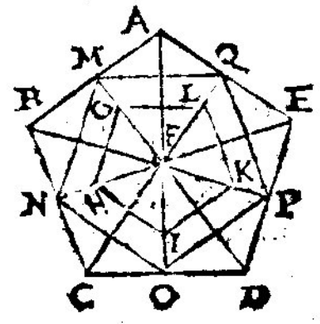
5.
6.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrũ īſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum uidelicet baſes ſunt pentagona ex

ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, uertices uero, duodecim anguli Icoſaedri, una pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonum A B C D E, triangula uero æquilatera A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis G H, H I, I K, K L, L G. Rurſus ex uertice F, per centra triangulorum rectæ deducantur F M, F N, F O, F P, F Q; quæ, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 3 bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q; ita ut decem rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint: quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pẽtagoni, æquales quoque erunt rectę M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erunt, quod & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſę. Cum enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B N, trianguli F B N, æqualia ſint, contineantq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; erunt baſes F M, F N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam uero & rectę F G, F H, F I, F K, F L, nimirum ſemidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circunſcribentium, æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, ut demonſtratum eſt; Erunt & rectę G H, H I, I K, K L, L G, æquales. Rurſus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, quã anguli B N M, M N O, O N C, æquales ſunt duobus rectis, Sunt autẽ anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq; ratione reliq anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterũ & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, exiſtens. Deniq; cum rectę F M, F N, F O, F P, F Q, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia F G, F H, F I, F K, F L, duplę ſunt ipſarum G M,



4. primi.

8. primi

4. primi.

4. primi

13. primi.

4 primi

GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propos. 18. lib. 14. parallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. Quia uero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, & rectas MN, NO, OP, ducto, conueniũtq; in recta HI; ipſa unum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis undecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pẽtagona Dodecaedrum conſtituet: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum uiginti anguli Dodecaedri in centris uiginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

2. *ſexti.*
10. *undec.*
15. *undec.*

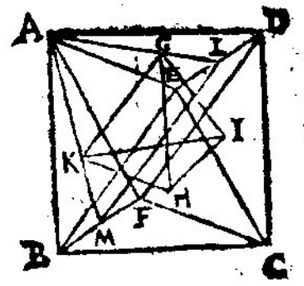
COROLLARIVM.

ITAQVE cum omnes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemm. 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circunſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidẽ deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri ſuperiori ABCDE, ſumantur G, & H, centra triangulorũ ex aduerſo ſibi reſpondentiũ AED, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium CFD, AFB: quę quidem centra coniungantur ſex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, ut fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, I, rectæ AL, AM, ſecantes latera oppoſita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M per ſcholiũ propoſ. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, quæ ipſi BE, uel FD, æqualis & parallela erit, cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales ſint, & parallelæ, nimirũ dimidia laterum DE, BF, oppoſitorum in quadrato EF. Quoniam uero rectæ AL, AM, ſectæ ſunt proportionaliter in G, & I, punctis, quod AG, AK, duplę ſint ipſarum GL, KM, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, ſimilia. Quare erit ut AL ad LM, ita AG, ad GK, & permutando, ut AL, ad AG, ita LM, ad GK: Eſt autem AL, ipſius AG, ſeſquialtera quod GL, ſit tertia pars ipſius AL, ideoque AG, eiuſdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc eſt ipſi æqualis DF, ſeſquialtera erit ipſius GK. Hac eadem arte oſtendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium ſeſquialtera eſſe latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes interſe eſſe æquales, hoc eſt, triangula æquilatera æqualia ex ipſis conſtare, ideoq; e Tetraedrum conſtitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor baſium octaedri, deſcriptum erit, ex defin. 11. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.



33. *primi.*
2. *ſexti.*
4. *ſexti.*
18. *quarti decimi.*

ALITER. In octaedro dato inſcribatur cubus, & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli conſiſtant in centris baſium octaedri; Et in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perſpicuum eſt, pyramidis angulos tangere baſes octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipſi octaedro eſſe inſcriptam.

4. *quintide.*
1. *quintide.*

COROLLARIVM. I.

9. *undec.* 15. *undec.*

QVIA uero oſtenſum eſt, utramque G K, D F, parallelam eſſe ipſi L M; ac propterea & G K, ipſi D F, atque adeo ipſi B F, parallelam eſſe: Atque eadem ratione K H, ipſi FC, EA, parallelã eſſe; Atque ideireo planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum eſſe plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per B F, E A, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri eſſe parallela, binis nimirum ſingula; Conſtat, ſi tetraedrum octaedro inſcribatur, quatuor baſes tetraedri, octo baſibus octaedri parallelas eſſe, ſingulas uidelicet binis oppoſitis.

COROLLARIVM. II.

PRAETEREA, cum octaedrum circunſcribat & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris baſium octaedri conſtituantur; Atque adeo recta coniungens centra baſium octaedri oppoſita, ſit diameter cubi, hoc eſt, ſphæræ circunſcribentis & cubum, & tetraedrum in cubo deſcriptum, ut conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti, per coroll. 1. propoſ. 21. lib. 14. uel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

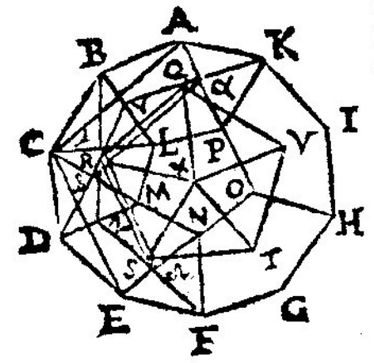
PROBL. 7. PROPOS. 7.

0. 7.

IN dato Dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima, rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos ſubtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectę ducantur K Y, D Y, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y K, Y D, rectas A P, C M, bifariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdē propoſitionis, quod & arcus

& arcus A K P, C D M, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant, (conſtat enim rectas A K, P K; Item C D, M D, arcus ſubtendere æquales.) Igitur A α, C β, parallelæ ſunt rectæ B Y; atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales nempe dimidia rectarum A P, C M, quæ æquales ſunt, cum late a K A, K P, lateribus D C, D M, æqualia ſint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipſas connectentes A C, α β, æquales erunt, & parallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectæ C L, E N, per centra R, S, rectæ ducantur B Z F Z, cõnectanturque rectæ C E, γ δ, æquales eſſe ipſas C E, γ δ: Sunt autem A C, C E, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos. Igitur & α β, γ δ, æquales erunt. Quapropter, cũ & rectæ Y α, Y β, Z γ Z δ, æquales ſint. (Nam Y Q, Y R, Z R, Z S, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum B L, D M, a centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circunſcribunt, atq; adeo æquales. Item Q α, R β, R γ, S δ, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium A P, C M, C L, E N, a centris eorundem circulorum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales erunt,) Erunt quoque anguli α Y β, γ Z δ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ Y Q, Y R, Z R, Z S, æquales ſint; æquales quoque erunt rectæ Q R, R S, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula Q X R, R X S, S X T, T X V, V X Q, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur; (Habet enim Dodecaedrum uiginti angulos ſolidos.) quę quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato



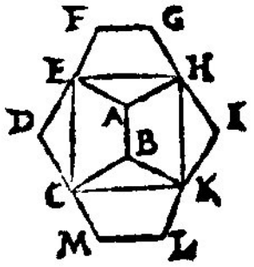
28. *tertij.* 28. *primi.* 4. *primi.* 33. *primi.* 4. *primi.* 14. *tertij.* 14. *tertij.* 8. *primi.* 4. *primi.*

ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubũ describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, ſm latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſm angulos EAH CBK. In his uero pẽtagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propoſ. 7. lib. 3. rectæ AB CE, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt AB, HK. Quare, & EC, HK, inter se parallelæ erunt; Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemq; cum ipsis plano; Ideoq; parallelogrammum erit EHKC; quod & æquilaterum esse Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC; BC, BK; IH, IK, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesi; æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. Quia uero planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis æquales: Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, nec non & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorũ Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum ex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angu-



9 *undec.*
33. *primi.*
7. *undec.*
28. *tertij.*
4. *primi.*
22. *tertij.*
34. *primi.*

los pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sint; cubum constituent intra Dodecaedrũ descriptum, propterea quod duodecim eius latera iaceant in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis resideant. In dato igitur Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum. 4. *primi.*

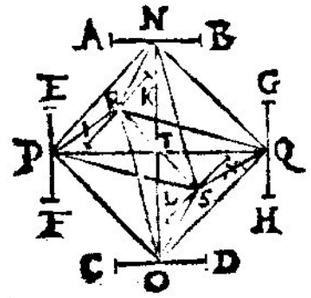
COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostendum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propoſ. 17. lib. 13. nimirum AB, CD; EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectę igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum contingentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. Quo circa duodecim rectę subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STQ, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli 4. *primi.*

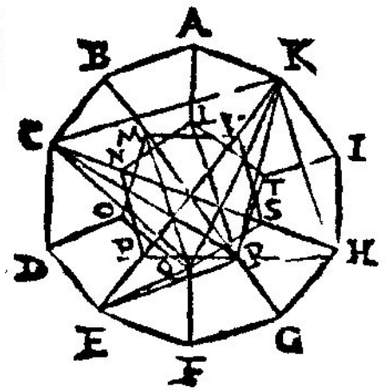


guli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex construction. In dato igitur Dodecaedro octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KALMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, K, R, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At uero K, lateri LT, communi pentagonis ALT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, ut sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphęræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; quoniam Dodecaedri in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus, per lemma 1. propos. 1 c. lib. 14. Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, ARE, KQE, RQM CQH. Quocirca cũ in omni triangulo rectangulo quadratũ lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium, CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR,



17 *tertij de.*

31. *tertij.*

47. *primi.*

KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum sub rectis comprehensos, æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptũ erit intra Dodecaedrum. Itaque in dato Dodecaedro Pyramidẽ descripsimus. Quod faciendũ erat. 4. *primi.*

ALITER. In proposito Dodecaedro cubus describatur; & in hoc cubo pyramis, factumque erit quod propositum. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, necnon & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. 8. *quintidec.* 1. *quintiae.*

O.

PROBL. 11. PROPOS. 11. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrũ; ex in hoc Dodecaedro cubus, factumque erit, quod propositum. Cum enim anguli cubi residean in angulis Dodecaedri; anguli uero Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam fabricem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat. 5. *quintidec.* 8. *quintidec.*

O.

PROBL. 12. PROPOS. 12. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidẽ describere.

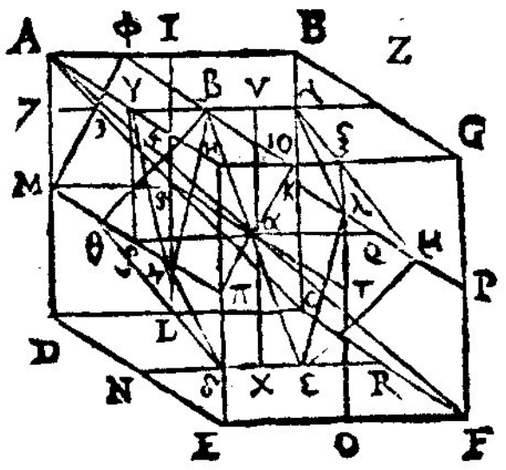
IN dato Icosaedro cub' describat, & huic cubo pyramis; factumq; 11. *quinti decimi.*

11. *quinti de* 1. *quintide.* ctumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi tan gant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angul cubi uniantur, manifestum est, angulos pyramidis att re centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde py dem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaed pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum descri bere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedr Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nus inter se coeuntibus, qu rursus bifariam secen in S, V, T, ρ, Q, X, con xis rectis ST, VX, Q quę se mutuo in centros bifariam secant, & ada gulos rectos, ut in com propos. 3. huius lib. cumus, suntque laterib cubi, sicut & priores s æquales Iam dimidia ctarum YZ, Mπ, secent extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, ut sint maiora segm ta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam go Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, βV, se menta minora rectarū æqualium YV, βπ, æqualia quoq 4. *tertiȳdec.* Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadra ctæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiusd 47. *primi* quadrati rectę Yβ. Quare, cum quadratis rectarum Y 29. *primi.* ρκ, æquale si quadratum rectæ Yκ, quod angulus Yρκ ctus sit; Erit & quadratum rectę Yκ, triplum quadrati ctæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, rec 4. *donec.* est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum; rectus erit gu

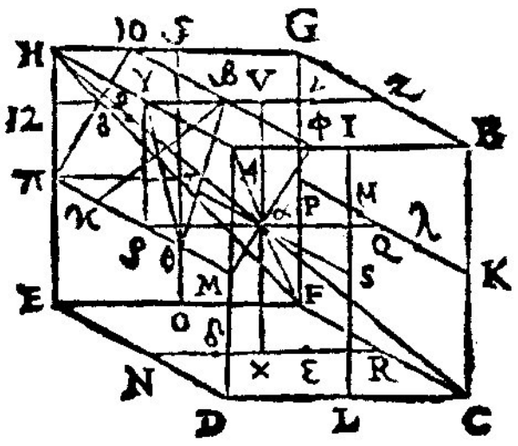


gulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratum rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatā, dupla erit recta βκ, rectæ Yβ. Quadupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius κ, quod minora segmenta βρ, κρ, rectarum æqualiū Mρ, πρ, æqualia sint. Erit igitur ut Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ, ad θκ, duplam ipsius ρκ: Est autem Yβ, maius segmentum ad ρκ, rectam minori segmento βV, æqualem, ut tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit ut tota ad maius segmentum; Ac proinde θκ, erit maius segmentum rectæ βκ; sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus βκ, maius esse segmentum rectæ βϑ, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Yϑ. Quare æquales erunt βϑ, βκ, constituentes triangulum isosceles βθκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. ut postea demonstrabimus; Ac proinde κ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumscribente descripti, ut perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipsi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φο, ut sit planum extensum φπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi uero diametro AF, in puncto 4 & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque MS, quæ parallela est utrique 33. *primi.* φ, 73. Quoniam igitur, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum A73. simile est triangulo AMS; ac proinde ut AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit ut MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Est autem Aφ, maius segmentum rectæ MA, diuisę extrema ac media 4. *sexti.* ratione. (quod æquales sint Aφ, Yβ, nec non & MA, YV, 34. *primi.* dimidia cubi latera. Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmētum erit rectę M7. extrema ac media ratione sectæ; Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. ma- 5. *tertiȳdec.*

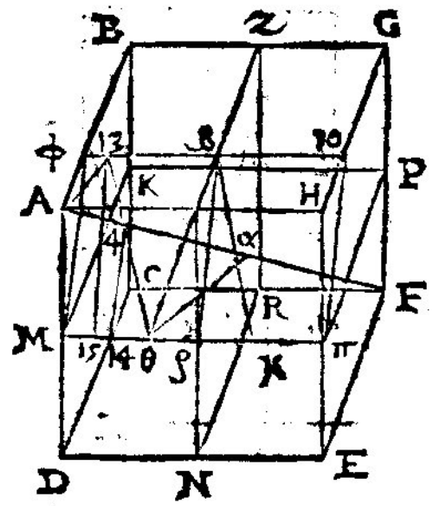
iusque

2. *sexti.* sque segmentum erit M 7. Atqui ut M 7. ad 7 A; ita est S
ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione
33. *primi.* 3. maiusque segmentum est S 3. Quia uero S α T, paral
la est ipsi M π, quod & recta ducta π T, æqualis & paral
sit ipsi MS; si per S α T, planum ducatur parallelum plan
17. *undec.* φ π, ducto per M π, secabuntur rectæ AS, A α, in eaide
nes, in punctis 3. & 4. Atq; idcirco, cum AS, secta sit in 3.
trema ac media ratione, secta erit eodem modo A α, sem
diameter cubi, in 4. maiusq; segmentum erit α 4. Iisdem a
gumētis ostēdemus, ducta diametro H F, quadrati EFG
& diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in
cto extrema ac media ratione a plano φ π, ut perspicuū est



si cubus inuertatur,
in hac figura secūda a
paret. Sunt enim lin
menta omnino simi
lineamentis prioris fi
ræ, licet bases cubi se
mutauerint, ita ut q
dratum AC, locū qu
drati HF, & quadratu
HF, locū quadrati, A
obtineat in hac secun
figura. Ostēdamus ni
si rectæ iungātur θ 4. β 4. β 9. χ 9. rectilineū β 4 χ θ
no φ π, existēs, pentagonum esse æquilaterū, & æquiāgu
Invertatur rursum cubus, ut quadrata A DEH, A
GH, quę nimirū continent triangulū β θ χ, siue planum
hunc situm habeant, quē mōstrat tertia hæc figura. Dein
in plano φ π, recta coniuncta θ 4 extēdatur usq; ad recta
φ 10. in punctū 13. Quoniā igitur ducta recta K P, &
15. *undec.* rectis MK, π P, planū MP, parallelū est plano AG, (quod
32. *undec.* rectę PK, KM, parallelæ sint rectis GB, BA,) secatq; cubi
satiā; ideoq; per cētrū α, trāsit, per ea, quę in scholio propo
39 lib. 11. ostensa sunt; si per rectas α 4 A, 9 4 13. planū e
16. *undec.* tendatur, fient α θ, A 13. communes sectiones planorū M
AG, parallelæ; Ac proinde triangula α 4. A 13 4. æquiāg
4. *sexti.* la erūt; Eritq; ut α 4. ad 4 A, ita 4. ad 4 13. Quare cū α A
in 4. secta sit extrema ac media rōne, ut ostēdimus; eodē mo
do e

erit secta 9 13. in 4. Rursus plano NZ, per centrū α, tran
unti, parallelū ducatur planū per punctū 4. ex scholio pro-
of 15. lib 11. secans planū φ π, rectā 4 14. Est aūt eidē plano
Z, parallelū planum DB.



15. *undec.*

17. *undec.*

ectæ igitur α A, ρ M, in
ſdem rationes secabūtur
punctis 4. & 14. Quocir
& ρ M, in 14. secta erit
trema ac media ratione,
unusq; erit segmentū 14
, ideoque æquale minori
, ipsius M ρ. Quare cum
ρ 14. maiori segmēto ip
us ρ M, auferatur 9, mi-
us segmentū; Erit, ut de-
onstrauimus ad propos.
lib. 13. ρ 14. diuisa in 9, extrema ac media ratione, maiusq;
gmētū erit ρ 9. Postremo acta ϱ 13. recta 13 15. rectę 4 14,
rallela, secabūtur rectę 9 13. 9 15. ꝓportionaliter; Ac pro-
de & 9 IX. secta erit in 14. extrema ac media rōne, maiusq;
gmētū erit 9 14. Quapropter erit ut ρ 9, maius segmētum
9 14. minus, ita 9 14. maius ad 14 15. minus: Vt autem
14. ad 14 15. ita est tota 9 15. ad 9 14. maius segmētū. Igit
ut ut ρ 9, ad 9 14. ita 9 15. ad eandē 9 14. Ac propterea re-
ρ 9, uel ρ χ, & 9 15. æquales erūt. Quīn uero planū NZ, &
anū illi parallelū per 4 14. ductū, secātur plano φ π; erunt
es sectiones β ρ, 4 14 parallelæ, ideoq; & 13 15. β ρ, paralle
erūt, anguluſq; externus β ρ χ, interno 13 15 9, æqualis.
igitur & latera β ρ, ρ χ, lateribus 13 15. 15 9, sint ęquales
Equales erūt quoq; rectæ β χ, 13 9; Ac proinde & earum
gmēta maiora 9 χ, 9 4 (Ostensum n. est 9 χ, esse maius segmē
ipsius β χ.) æqualia erūt. Eadē arte & β 4. ipsi β γ, in prima
gura ostēdet ęqualis, si simili situ triāgulū Isosceles form
r super basin β γ, cui° uertex cōsistat in pūcto, qđ rectā IS di
dit extrema ac media rōne. Eodēq; modo etiā 9 χ, β γ, æ-
ales erūt χ 9. β 9. A Equilaterū ergo est pēragonū β 4 9 χ 9.
d & ęquiāgulū, ut mox ostēdem°. Si igit hac arte duodecim
āgula, nimirū ad singulas rectas Mπ, YZ. NR, IL, ξO, KP,
na ipsi β 9 χ, similia, & ęqualia cōstruāt (ita n. ad Mπ, duo

2. *sexti.*

2. *quartide.*

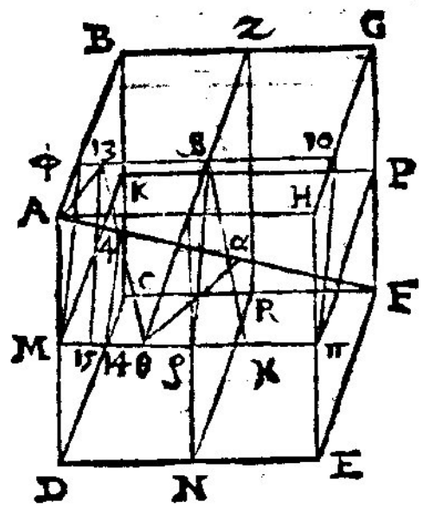
16. *undec.*

29. *primi.*

4. *primi*

hu usmodi

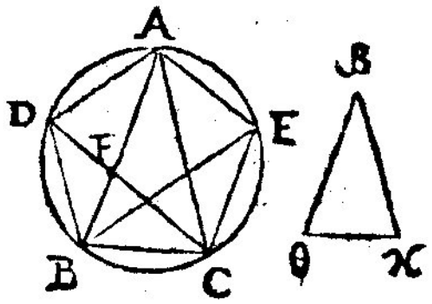
huiusmodi triangula uides ſθκ, ϑθκ) & ipſorũ officio de
decim pentagona ipſi ſ 4. ϑ κ 9. ſimilia & æqualia fabri
tur, conſtituetur Do
caedrum, cuius duoda
quidem anguli in ſex re
lineis, Mπ, YZ, NR, li
ξO, KP, bini nimir
in ſingulis, octo uero
liqui in octo ſemidiam
tris cubi conſiſtunt, ne
pe in punctis, quæ ipſa
trema ac media ration
uidunt, qualia ſunt p
cta 4. & 9. in ſemidiam
tris Aα, Hα, ſecundz



gurx; Ac propterea quodammodo inſcriptum eſſe dic
cubo huiuſmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie
non omnes eius anguli uel in angulis, uel in lateribus,
denique in planis cubi conſtituantur, ſed duodecim qui
in ſex planis cubi, octo uero in punctis, quæ octo ſemid
metros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſidea
Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Q
erat faciendum.

LEMMA.

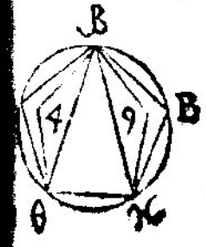
QVOD autem triangulum ſ◆κ, cuius ba
◆κ, maius ſegmentum exiſtit utriuſque lateris ſ
ſκ; extrema ac media
tione diuiſi, ſimile ſit
quod Euclides conſtru
propoſ. 10. lib. 4. ita d
monſtrabimus. Deſcrib
tur circa triangulum ſ
ſceles ABC, quale Eucl
conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBC



diuid

liiſsque angulis A B C, A C B, bifariam rectis BE,
D, perficiatur pentagonum æquilaterum, & æqui-
angulum A D B C E, ut propoſ. 11. lib. 4. tradidimus,
tentque ſe mutuo rectæ A B, C D, in F. Quoniam
rgo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, ma
ſque eius ſegmentum eſt A F, æquale lateri B C;
rit ut A B, tota ad maius ſuum ſegmentum B C, ita
ϑ, tota ad maius ſuum ſegmentum ϑ κ. Eodemque
odo, ut tota AC ad maius ſegmentum CB, ita ſϑ,
ta ad maius ſegmentum κθ: Eſt autem quoque ut
B, ad AC, ita ſθ, ad ſκ, utrobique enim eſt proper
æqualitatis. Triangula igitur ſϑκ, A B C, pro-
tionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqua-
que erunt anguli, B; Item κ, C, & ſ, A; pro-
ereaque uterque angulorum θ, κ, duplus erit anguli
& triangula ſθκ, A B C, ſimilia.

PENTAGONVM uero ſ 4 ϑ κ 9, æquilate-
m, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtende-
s. Deſcribatur circa triangulum ſϑκ, circulus
ſA ϑ κ B, qui ſi tranſeat per puncta 4,
et 9, perſpicuũ eſt ex ijs, quæ ad propoſ.
16. lib. 4. docuimus, pentagonũ æquian
gulũ eſſe. Si uero non incedat per puncta
4, et 9. Deſcribatur in circulo dicto, iux
doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquila-
um & æquiangulum ſA ϑ κ B. Quoniam igitur
rectæ Aϑ, Aſ, quam rectæ 4ϑ, 4ſ, æquales
t rectæ ϑκ, cum & ſ 4 ϑ κ 9, & ſA ϑ κ B, pen-
onum ſit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ ϑA,
quam duæ ſA, ſ4, æquales, quod fieri non poſ-
emonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo cir-



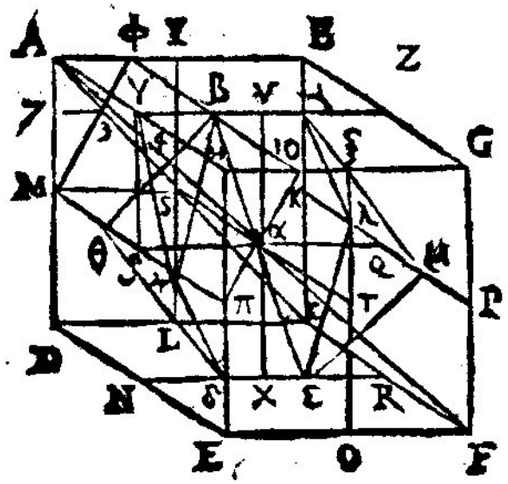
 culus

culus triangulo ſß θ ϰ, circunſcriptus per puncta
& 9. Ac proinde pentagonũ ſß4θϰ9, æquiangulũ

SCHOLION.

Ex his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

I. DIAMETER Dodecaedri duo latera po
teſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri, & cubi, in qu
decaedrum deſcribitur.



DVCATVR enim prima figura diameter D decaedri ſß ε, intelligatur coniuncta recta γε, equ lis exiſtens & parallela teri cubi V X, quod & V X ε, æquales ſint, & par lela. Quoniam igitur an lus ſß V X, rectus eſt; reli quoque erit angulus ſ ad γ, conſtitutus; Ac inde quadratum diame ſß ε, æquale erit quadra laterum ſß γ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.

29. primi.

47. primi

II. SI latus cubi ſecetur extrema ac media ratio
ne, minus ſegmentum latus eſt dodecaedri in cu
bo deſcripti: Maius uero ſegmentum latus cu
bi in hoc dodecaedro deſcripti.

IN eadem enim prima figura, cum ſit ut γ V, ad ſß V, i
γ Z, dupla ipſius γ V, ad ſß γ, duplam ipſius ſß V; Sit au
ſß V, minus ſegmentum ipſius γ V, ſecta extrema ac media ra
tione: Erit & ſß γ, minus ſegmentum lateris cubi γ Z, ſecti
trema ac media ratione; compoſita vero ex γ ſß, γ Z, hoc eſt
recta ſß ϰ, (qua dupla fuit oſtenſa ipſius γ ſß, ideoque com
ſita ex γ ſß γ Z, æqualis) maius ſegmentum. Conſtat au
ex conſtructione ſß γ, eſſe latus Dodecaedri, & ſß ϰ, ſeu ſ

15. quinti.

ſſe latus cubi in dicto Dodecaedro deſcripti, cum ſubtendat an 8. quintide.
ulum pentagoni ſß 9 ϰ, vel ſß 4 9.

III. LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri uidelicet in ipſo deſcripti, & Dode aedri circa eundem cubum deſcripti.

NAM in prima rurſus figura, latus cubi γ Z, componitur latere Dodecaedri ſß γ, in ipſo deſcripti, & ex recta cõpoſita γ ſß, γ Z; quam conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo cir-unſcripti. Cum enim γ Z, cubi latus ſubtendat angulum pen-agoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. tertiidec.
propoſ. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius ſeg-entum lateris γ Z, ſecti extrema ac media ratione: Erit ſß θ, iſtens quoq; maius ſegmentum eiuſdem lateris γ Z, ut iam de ōſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris γ Z, circunſcripti.

IIII. RECTA duos angulos pentagonorum Do-ecaedri communi lateri oppoſitos connectens ſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum in-cribitur.

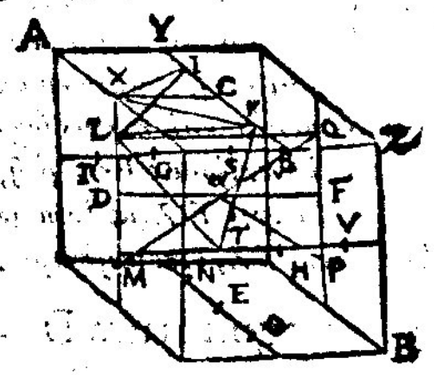
IN prima enim figura, recta connectens puncta ſß, ſδ, in qui us conſtituuntur duc anguli pentagonorũ cõmuni lateri θ ϰ, ppoſiti, æqualis ẽ rectæ V X, (quod & ſß V, ſδ X, æquales ſint, & arallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrũ deſcribitur. 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.

CVBVS datus, in quo deſcribendum ſit Icoſaedrũ, ſit B, per cuius baſium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cu-rectæ lineæ parallelæ agantur nuſquã inter ſe conuenien-s, & harũ medietates extrema ac media ratione ſecẽtur, ita maiora ſegmẽta prope cẽtra ſint, in punctis I, K; L, M; N; ; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor

uicinioribus connectatur, ut L, cum I, K, T, & R : R, cu
L, M, I, & N, &c. ut constituantur uiginti triangula I K
I K Q, L M R, L M T, N O M, N O P, P Q V, P Q
R S I, R S N, T V K, T V O, I L R, I S Q, K T L, K Q
O P V, O T M, N O P, N M R; quorum priora duodec
subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora uero o
eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectam
iam rectæ X C XI, X K. Quoniam igitur latera X C, C
trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, triang
29. primi. X C K; & anguli contenti, recti, quod X C, parallela sit
A Y, Erunt & bases X I, X
4. primi æquales. Deinde quia li
L X, recta est ad planum A
per defin. 4. lib. 11. recta q
quæ erit ad lineas X I, X
Ac propterea cum latera L
X I, trianguli L X I, æqu
sint lateribus L X, X K, tri
gul. L X K, & anguli con



4. primi ti, recti; æquales erunt bases L , L K. Rursus quon
47. primi. quadratum rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L
X I; Et quadratum rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quad
tum uero rectæ X I, quadratis rectarum X C, C I, est æq
le: Aequale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis re
rum X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X
C Y, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera
tur quadratum rectæ L I, æquale est tribus quadratis rec
rum C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla su
quadrati rectæ C I. (Cum enim quadrata rectarum C
4. tertiidec. I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rec
C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis da
bus, erunt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadru
eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L
quadruplum est quoque quadrati rectæ C I; Ac propter
cum eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadr
rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt qua
ta rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aeq
terum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G,
stratum.

No

NON aliter ostendemus, reliqua undecim triangula, un-
im reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atq;
o inter se æqualia, cum eorum latera I K, L M, N O, P Q,
S, T V, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum
to triangulorum, octo angulis cubi suppositorum, com-
unia sunt dictis duodecim triangulis; ut in triangulo K T L,
us K L, commune est triangulo I K L; & latus K T, triã
lo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuum
, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim
angulis. Quare omnia uiginti huiusmodi triangula Ico-
drum component cubo inscriptum, cum eius angul om-
s duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in
gulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus.
uod erat faciendum.

SCHOLION.

COLLIGEMVS *ex hoc propositione sequentes.*

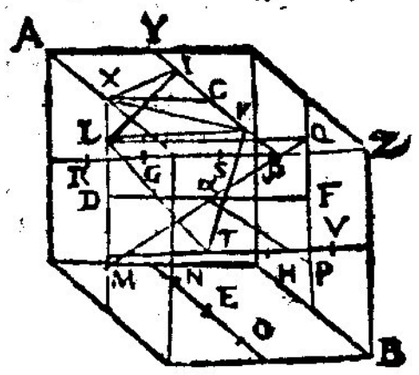
I. DIAMETER Icosaedri potest & latus Ico
edri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DVCTA enim recta L Q, quæ lateri cubi D F, paralle- 33. primi
est, & æqualis, quod & D L, F Q, parallelæ sint, & æqua-
s; manifestum est, quadratum diametri Q M, æquale esse qua- 47. primi
ratis rectarum L M, lateris Icosaedri, & L Q, lateris cubi,
quo Icosaedrum descriptum est, cum angulus M L Q, sit re- 29. primi
us, quod & L D F, rectus sit, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13.

II. BIFARIÆ sectiones sex oppositorum la-
erũ Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqua
bus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad
ngulos rectos secantibus.

NAM *huiusmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cum*
niungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt late-
bus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad
ngulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod qui-

dem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta a



Quoniam latera α F, F Q
trianguli α F Q, æqualia su
lateribus α F, F P, triang
α F P, angulosque comprehe
dunt rectos; æquales erunt
ctæ α Q, α P. Eademqu
tione æquales erunt omnes
ctæ ex α, ad angulos Icosae
prodeuntes. Igitur α, c
trum est Icosaedri.

4. primi

III.

Si latus cubi extrema ac media ratione
cetur, maius segmentum latus est Icosaedri
dicto cubo descripti.

CVM enim C I, sit maius segmentum rectæ C Υ; sitque
C I, ad C Υ, ita K I, dupla ipsius C I, ad ß Υ, duplam ipsius C
erit quoque K I, latus Icosaedri, segmentum maius lat
cubi ß Υ.

15. quinti
2. quartidec.

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangu
opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extr
ma puncta duabus diametris connectantur, fient duo triang
la inter se æqualia, angulosque alternos habentia æquales,
4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Qua
qualibet latera opposita parallela erunt; Atque ideirco,
triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter
erunt parallela.

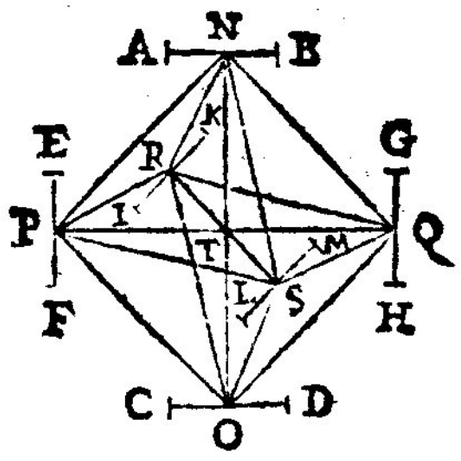
15. undec.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrũ describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum e
Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD; EF, GH; IK, L
quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iugant tres re
ctæ NO, PQ, RS, æquales se se in centro T, bifariam, & a
angul

gulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos præce
ntis ostensa sunt; ducanturque rectæ N P, NR, NS, NQ;
P, O R, O S, O Q; P R,
S; Q R, Q S, constituen-
octo triãgula SNP, SPO,
O Q, SQN; RNP, RPO,
OQ, RQN. Quia igitur la
a TN, TS, triãguli TNS,
ualia sunt lateribus T N,
P, triãguli TNP, (cum sint
ctarum æqualium dimidia)
gulosq; continent rectos,
dictum est; Æquales erũt
ses NS, NP: Eodemq; mo-



4. primi

reliquæ omnes lineæ æquales erunt & hisce duabus, & in-
se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se
quania; Ideoq; Octaedrum constituunt. Quod in Icosae-
o descriptum est, cum eius anguli resideant in bifariis se-
ionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaq;
osaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

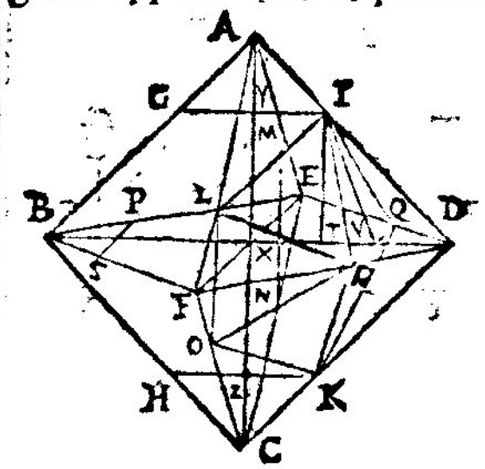
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in
descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Ico
edri incidentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti.
quare T, cẽtrũ Icosaedri, ubi se intersecãt, cẽtrũ quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrũ describere.

DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosae
rum, sit A B C D E F. Cum a quolibet angulo quatuor
teria exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed
bi e regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos qua-
ratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bi-
a iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt
A, B C; D A, D C, iuxta angulos oppositos B, D,
uadrati A B C D; A F, A E; C E, C F, iuxta an-
ulos oppositos A, C, quadrati A E C F: (Nam la-

rera A B, A D; C B, C D, quadrati A B C D, iuxta eosdem a
gulos A, C, iam sumpta fuere,) E B, E D; F D, F B, iuxta an-
gulos oppositos E, F, quadrati E B F D; (Nam latera E A,

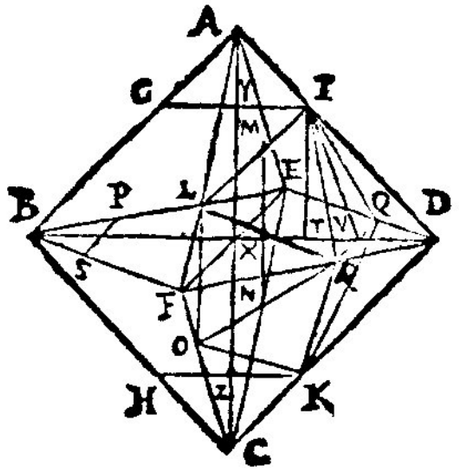


E C; F C, F A, quadrati A E
C F, iuxta eosdem angulo
E, F, iam accepta sun
quæ omnia secentur extre
ma ac media ratione, ha
lege, ut maiora segmenta
sint prope angulos a qui
bus egrediuntur, in duce
eim punctis G, H, I, K, L,
M, N, O, P, Q, R, S, &
singulis ad quinque prox
mas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, ut ex R, rect
R Q, R I, R L, R O, R K. Et ex I, rectę I Q, I R, I M, I L,
I G, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figu-
ra, ad euitandam linearum confusionem: Post hæc, ductis
tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, se se in centro X,
secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1 pro-
pos 14 lib 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q,
Y, & V; connectaturque recta I V, agaturque I T, paralle
ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D
æqualia sunt lateribus D R, D I; (Sunt enim D Q, D R;
minora segmenta rectarum æqualium D E, D F,) & angulos
comprehendunt æquales, nempe triangulorum Octaedri
A D E, A D F; Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cum
sit, ut B G, ad G A, ita D I, ad I A; erit G I, rectæ B D, pa-
rallela. Eademque ratione Q R, ipsi E F, parallela; Ac
proinde ut D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X
secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est
A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quod triangulum A Y I, simile
sit triangulo A X D, per coroll. propos. ... lib. 6.) Est autem
A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare
Y I, minus segmentum est rectæ X A. Non aliter ostende-
mus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoque G I, rectam bi-
fariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cum uero la-
tera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q,
D R, trianguli D Q R, (nimirum minora segmenta minori-
bus

4. *primi.*
2. *quartidec.*
2. *sexti.*
4 *sexti.*

s segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehen
nt rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F. Aequa-
erunt bases G I, Q R. Eadem ratione his æquales ostenden-
ntur rectæ H K, P S, M N, L O, quæ nimirum subtendũt
liquos quadratorum A B C D, D E B F, A E C F, angulos, in
gulis uidelicet quadratis binos oppositos, complectun-
rque duo segmenta laterum minora. Deinde quia Y I,
inus segmentum ipsius X A, ostensum, maius est segmen
m maioris segmenti X Y, diuisi extrema ac media ratione,
demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem X Y, re
XV, æqualis, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualiũ
ctarum X A, X D) & Y I, rectæ X T; erit X T, maius 34. *primi.*
gmentum ipsius X V, & ideirco T V, segmentum minus
ũsdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc
t, ipsius I T, (cum & recta I T, æqualis sit ipsi X Y) & T V, 34. *primi.*
inoris segmenti, tripla sunt quadrati rectæ X T, maioris 4. *tertiæ.*
gmenti; Atque adeo quadratum rectæ I V, æquale exi 47. *primi.*
ens quadratis rectarum I T, T V, triplum est eiusdem qua
rati rectæ X T, hoc est, rectæ R V, quæ æqualis est ipsi
T, seu ipsi Y I, ex demonstratis, cum R V, Y I, dimidia
nt æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadra-
o rectæ R V, ipsi quadrato rectæ I V; erunt quadrata recta
um I V, V R, quadrupla quadrati rectę R V: At quadra-
s rectarũ I V, V R, æquale est quadratum rectæ I R, quod 47. *primi.*
nguli I V R, I V Q, comprehensi lateribus æqualibus 8. *primi.*
V, V R; I V, V Q, & subtensi basibus æqualibus I R, I Q,
quales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectę I R,
uadruplum est quadrati rectę V R; Ac propterea cũ eiusdem quadrati rectę V R, quadruplum quoque sit, per scho-
ium propos. 4. lib. 2. quadratum rectę Q R; Aequalia erũt
uadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectę ipsæ æqua-
s: Erat autem I Q, ipsi I R, æqualis. Triangulum igitur
qu laterum est I Q R. Non secus demonstrabimus, æqui
tera esse triangula simile situm cum I Q R, habentia,
mpe A Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O
L O, S L O; P M N, Q M N; atq; adeo triangulo I Q R,
qualia, cum latera omnium sint æqualia inter se. Cum enim
quilibet horum triangulorum unum latus subtendat an-
ulum rectum quadrati comprehensum duobus segmentis
minoribus

minoribus laterũ Octaedri; Duo uero reliqua ſubtendu
duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cont
tos ſingulos duobus ſegmentis laterũ Octaedri, maiore
minore: Erunt latera unius trianguli lateribus aliorũ æqu



lib; ac propterea & ip
triangula æqualia, per co
roll. prop of. 8. lib. 1. Vt
triangulis IQR, GIL, a
tera KQ, GI, ſubtend
tia angulos rectos QDR
GAI, quadratorũ DEB
ABCD, comprehenſos a
nonibus ſegmentis DQ
DR; AG, AI, æqualia ſũ
Eodem modo latera IQ
IL æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ
IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum
illic continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maio
& minore; hic uero ſegmentis AL, AI, maiore & mino
quoque. Nonſecus latera IR, GL, æqualia erunt. Aequa
igitur ſunt triangula IQR, GIL, per coroll. propoſ. 5. lib
Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GI
æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habend
Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur
angulis Octaedri, bina uidelicet ſingulis. Ex his conſequ
reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, u
licet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IM
in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC, KOR, in CF
ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqu
lia, cum horum latera cum illorũ lateribus communia ſi
Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in ſingulis
ctionibus laterum Octaedri conueniunt ad conſtitution
anguli ſolidi, (ut uides in quinque RQI, RIL, RL
ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus
Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſa
dri duodecim anguli duodecim ſectiones laterum
Octaedri poſſideant. In dato itaque Octae-
dro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod
faciendum erat.

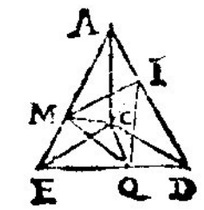
COR

COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æqui
teri ſecentur extrema ac media ratione, ita ut unius maius ſeg-
entum, alterius uero minus ſit prope angulum ab ipſis compre-
enſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe mi-
oris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, ma-
s ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE;
t autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum
oteſt minoris ſegmenti AI, cum quadratum rectæ GI, æqua-
ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: 47. primi.
erſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmen-
minoris AI.

COROLLARIVM. II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo
ſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſae-
i. Suſcipiatur namque Octaedri ſuperioris triangulum AED,
quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri I-
Q, ſitque C, centrum trianguli AED. ex
uo rectæ educantur CA, CE, CD; CI,
M, CQ. Quoniam igitur latera CA,
M, trianguli CAM, æqualia ſunt lateri-
us CE, EQ, trianguli CEQ, (quod
æc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta
qualium rectarum) angulosque comprehen-
unt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, ut
ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtendimus; Erunt baſes CM, CQ,
quales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM,
Q. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



COROLLARIVM. III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idem centrum
ſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, cen
o Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſae-
ri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera
A, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus XF, FO, trianguli
FO. (Nam XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO,
gmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac
edia ratione.) angulosque complectantur æquales, ſemirectos ui
elicet; (cum AC, EF, diametri ſint quadratorum ABCD, EA-
C; ac proinde, per dem õſtrata in ſcholio propoſ. 14. lib. 1. angulos
uadratorum bifariam ſecent.) Aequales erunt & baſes XG, XO. 4. primi.
odemque argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ
d angulos Icoſaedri æquales eſſe. Igitur X, centrum Octaedri, cen-
rum quoque eſt Icoſaedri.

PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

16. quintidecimi. 5. quintidecimi.

INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentrice sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 15. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quamquam non proprie, ut ex definitione 31. lib. 11 apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

DETVR Pyramis A B C D, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur A E F, B E G, C E H, D E I, quæ

15. quartidecimi.

cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdem bases B C D, A C D, A B D, A B C. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, A I T, B F L B H S, C I M, C F K, C G S, secantes bases oppositas B D, C D, A B, A D, B C, bifariam & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 3. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ A F, B G, C H, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium rectis lineis coniungantur, ut N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H.

Dico

Dico solidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum esse. Cum enim latera A F, F K, trianguli A F K, æqualia sint lateribus A F, F L, trianguli A F L, quod F K, F L, cum perpendiculares sint ad B D, C D, ex centro F, ducæ, ostendãt æquales distantias rectarum æqualium B D, C D, a centro F) angulosque cõtineãt rectos, ex 3. defin. lib. 11. Æquales erũt & bases A K, A L & anguli K A F, L A F. Rursus quia latera A N, A H, triãguli A N H, æqualia sunt lateribus A N, A G, triangulI A N G, (sunt enim A H, A G, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium A B D, A C D,) angulos item comprehendunt æquales, ut demonstrauimus; Æquales erunt bases N H, N G. Haud secus ostendentur æquales rectæ Q G, Q H, si rectæ ducantur D G, D H, nec non & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; ut perspicuum est. Si enim recta ducatur F T, cum latera A F, F T, æqualia sint lateribus A F, F K. (Sunt namque F T, F K, distantiæ rectarum æqualium B C, B D, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cũ latera A N, A I, æqualia sint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, semidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualiũ A B C, A B D:) angulosque contineant æquales: Æquales erunt bases N I, N H, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, ut tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum N F.

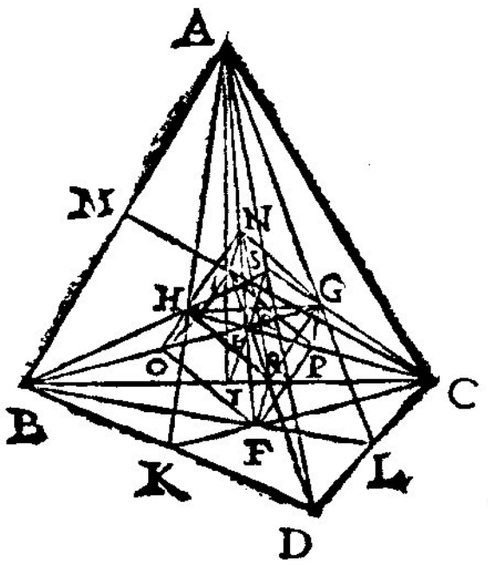
4. primi.

4. primi.

4. primi.

ASSVMATVR quadrilaterũ N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniã in pyramide latera B C, A D, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, ut constat ex figura propos. 2. huius

huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet punct
H, illius, & punctum T, puncto F, cum & in illa sint late
ra opposita, siue non coeuntia B C, A D. Quocirca cum
idem sit centrum pyramidis, & Octaedri in ipsa descripti, u



mox demonstrabimus, tra
sibit ST, per E, centrum P
ramidis, æqualesque erun
ES, ET, nempe semidiame
tri Octaedri. Deinde qu
BS, CS, perpendiculare
sunt ad AD, p scholiũ, appo
12. lib. 13. erunt HS, GS
17. quarti decimi. ex centris H, & G, tertiæ pa
tes perpendicularium BS
CS. Quare latera BS, CS
trianguli BSC, proportiona
liter secantur, atque idcirc
2. sexti. HG, parallela est lateri BC,
secatque latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem par
est trianguli BSC,) proportionaliter; Ideoque & SR, tertia
pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE
15. quarti decimi. Rursus quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC,
erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 15
lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1
erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoque eius dimi
dium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua
EQ, talium partium erit 1, atque idcirco EQ, tertia pars
erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius
AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED,
2. sexti. proportionaliter secentur, recta NQ, parallela erit lateri
AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod
quidē pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque
cum EQ, sit tertia pars ipsius DE, tertia pars erit ER,
ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem
SE. Quoniam igitur utraque HG, NQ, ex SE, duas
tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE,
2. undec. a rectis HG, NQ; Ac idcirco & ipsæ HG, NQ, in eo
dem se se puncto inter secabunt. Quare in eodem sunt pla
no, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem
cum

um ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ.
Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem &
rectangulum, nunc demonstremus.

Cum ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atque adeo
triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. pro-
pos. 4. lib. 6 Erit ut SH, ad HG, ita SB, ad BC; & per- 4. sexti.
mutando, ut SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem
H, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit
lateris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse
partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint
æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æqua-
les. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus
HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; Aequa
les erunt quatuor anguli HNG, NGQ, GQH, QHN. 8. primi.
Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, ut ostendi-
mus ad propos. 32 lib. 1. recti erunt; ideoque quadratum
erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua qua-
drilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo Py-
ramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor
basium anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis,
quatuor uero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus
perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases du-
ctarum resident, ut constat. In data itaque pyrami-
de cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM. I.

Constat ex his, idem esse centrum pyramidis, & cu-
bi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI,
cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyrami-
dis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyra-
midis transeunt.

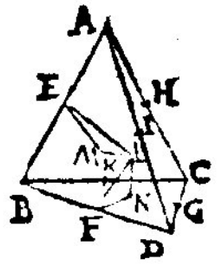
COROLLARIVM. II.

Inferrvr quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectio-
nes oppositorum laterũ pyramidis, transire per centrum pyramidis,
eiusque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER,
ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta di-
midium sit lateris cubi, ut constat; Recta RS, dupla ipsius
ER,

E R, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur R S, ostensa sit tertia pa
ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, contingentem S, & I,
farias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, tran
per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi R S.

LEMMA.

*IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octa
dri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit Pyram*



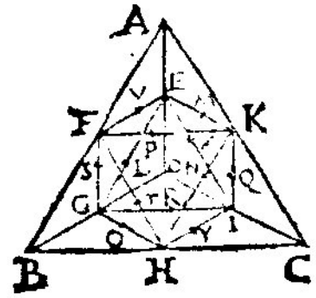
*A B C D, cuius omnia sex latera b
fariam secentur in E, F, G, H, I, K,
ex L, centro Pyramidis in bases A
D, B C D, perpendiculares demitt
tur LM, LN, quæ in centra circu
rum dictas bases circunscribentiu
cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Co
iunctis autem rectis L E, EM, LF, F N; quoniam
tera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt late
bus L N, N F, trianguli L N F. (cum enim circu
bases A B D, B C D, circunscribentes sint æquale
æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. pr
pos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ L
L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M
N F, distantiæ rectarum æqualium A B, B D, a cen
tris M, & N, circulorum æqualium) angulosque co
prehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. Aequales eri
4. primi rectæ L E, L F. Eademque ratione hisce æquales erunt
& inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cum an
guli Octaedri in pyramide descripti constituantur in
punctis E, F, G, H, I, K, ut ex 2. propos. huius lib.
constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes
lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cum igi
tur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit cen
trum*

pyramidis, & octaedri in ea descripti.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, inscribatur octaedrũ E F- 2. quintide.
HIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac
dia ratione, hac lege, ut bina sumantur ex singulis angu
sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadra-
rum octaedri cadentia, ut in propos. 16. huius lib. dixi-
mus, qualia sunt EG, EK; HK, HG;
F, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in



punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T,
X, Y. Nam si quodlibet horum pun
ctorum cum quinque proximis cõiun
gimus lineis rectis, ut M, cum V, L,
N, P, & Q, &c. descriptum erit icosae
drum in dicto octaedro, ut constat
ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos
in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum octae
dri. Cum ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basium Py-
ramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Ico
saedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet
in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus
pyramidis ducta sint. Nam in basi A B C, existunt latera
E H, HK, KF; In A B D. latera E F, F G, G E; In B D C. latera
F H, H I, I G; In A D C, denique latera I K, K E, E I. Quare
dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per
defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases
M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor
basibus Pyramidis existunt, ut con-
stat. In data igitur Pyram. de
Icosaedrum descripsi
mus. Quod e-
rat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

19.*quintide* 5.*quintide.* PYRAMIDI datæ inscribatur Icosaedrum, & in hoc Dodecaedrum habens uiginti suos angulos in centris uiginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, ut in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, ut constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifarijs sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituunt; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifarijs sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quamobrem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

8.*quintide.* 18.*quintide*

13. PROBL. 21. PROPOS. 21.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum

um bases circunscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares equales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLION.

ITAQVE, *cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, ut sint in uniuersum uiginti inscriptiones; unum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque Pyramide, ut perspicuum est ex propos.* 13. 17. *&* 20. *huius lib. Similiter unus tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, ut ex propos.* 18. *huius lib. est manifestum. Nam, ut proprie solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui uel in angulis, uel in lateribus, uel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, ut defin.* 31. *lib.* 11. *exposuimus: Quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Piramide, non conuenit.*

CAETERVM *inter omnia quinque solida regularia, unum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, ut constat ex propos.* 17. *huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Deniq; in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.* 16.*quintide* 5.*quintide.* 8.*quintide.* 1.*quintide.*

NEQVE *uero pratereundum est, Dodecaedrum, sibiq;*

inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli Pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant, conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido conſtat, ſphæram Dodecaedro circunſcriptam complecti quoque cubum atque Pyramidem, cum ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.

1.quintide. 8.quintide.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, ut demonſtratum eſt: In centris quidem baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris uero baſium octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium Pyramidis, propoſ. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionesue quinque ſolidorum regularium, unius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrũ, propoſ. 2. 18. 19. 20: In octaedro uero, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde, Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 13. In Icoſaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10. 9. 8. 7. deſcripſimus. At uero poſteriori unica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphera depingatur, docuimus.

ELEMENTI DECIMIQVINTI FINIS.

ELEMEN-

ELEMENTVM DECIMVMSEXTVM,

Quo uariæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinq; corporibus.

LIBER TERTIVS.

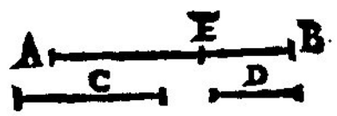
QVEMADMODVM *in lib. 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionẽ in lib. 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla in hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem in præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; ut imperfecta quodammodo uideri poſſit tractatio hæc quinq; corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Do-

decaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

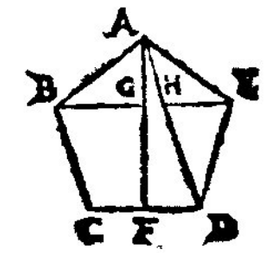
LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cum enim, ut in ſcholio ultimę propoſ. lib. 13. docuimus, Dodecaedrum, cubuſq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuidatur autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit ut C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, ut AE, maius ſegmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedeum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illũ angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quę ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, per coroll. propoſ. 8. lib. 15 eſt parallela; ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentũ DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

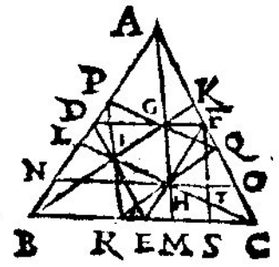


2. ſexti.
8. tertijdec.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum unius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triãgulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit A B C, cuius lat
secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, q
bus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, u
gantur rectæ GH, HI, IG, constituentes G H I, triangu
Icosiedri in dicta pyramide descripti, ut constat ex pro
13. lib. 13. Secentur deinde latera trianguli A B C, extre
ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis LK, CL, AM
co has rectas suis sectionibus producere triangulum Ico
dri GHI, hoc est, rectam BK, transire per puncta G, I
rectam C L, per puncta H, I; & rectam A M, per puncta



H. Ducta enim per H, recta N
ipsi B C, parallela: erit triangu
FHO, triangulo FEC, simile, ex
roll. propos. 4. lib. ideoque & a
laterum, cum & FEC, æquilater
sit, quippe quod simile sit triang
ABC, per idem coroll. Quare H
recta æqualis est rectæ F H, ma
segmento rectæ F E, seu D F, ipsi æqualis: (Est enim
DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subten
angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, d
dijs scilicet æqualium laterum eiusdem trianguli compre
4. primi. fos; ideoque æqualia sint.) Est autem & N H, æqualis
34. primi. DF, in parallelogrammo DH, propterea quod FH, DF
2. sexti. rallelæ sint rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, com
5. tertijdec. sita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, secta erit i
extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres par
BC, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum ex
ma ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ dem
strauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; hoc
do constat, ipsam A M, transire per puncta G, H. Haud
cus ostendemus BK, per puncta G, I; & C L, per puncta
I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ latera
AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, A M, suis sectio
bus producent triangulum Icosaedri G H I.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL para
Quoniã igitur A F, æqualis est rectæ DF, seu rectæ FE, cu
maius segmentũ fuit FH, hoc est, FO, illi æqualis; Erit quo
5. tertijdec. FO, maius segmẽtũ rectæ AF; ac proinde tota AO, secta
F, extr

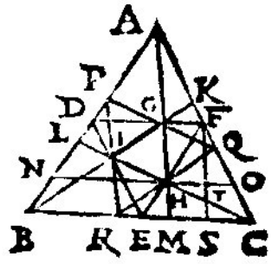
extrema ac media ratione: Est autem ut A F, ad FO, ita 2. sexti.
G, ad GH, ob triangulum AHO; & ut AG, ad G H, ita
Q ad Q C, & A P, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igi-
& rectę AH, AC, AL, secantur in G, Q, P, extrema ac
dia ratione, suntque maiora segmenta AG, AQ, A P.
et; ergo AQ, A L, segmenta maiora rectarum æqualiũ
C AB, æquales erunt. Quia uero est ut AQ, maius seg- 2. quartide.
entum, ad Q C, minus, ita A L, tota ad A P, maius segmẽ
um, Et est A Q, recta rectę A L, æqualis: Erit & Q C, re-
æqualis rectę A P. Quare & recta A P, minus segmentũ
is lateris A B, manusque reliqua A P; ac propterea recta
Q, secabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Ea-
ē ratione recta PR, quæ per I, ducatur parallela rectæ A M,
secabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in
unctum P, cadet. Non aliter recta R Q, per H, ducta paral
la rectæ BK, latera A C, CB, secabit extrema ac media ra-
ione, atque adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam uero
ingula latera trianguli P Q R, cum subtendant angulos æ-
quales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, 4. primi.
nimirum maiore & minore segmento singulos, æqualia in-
ter se habebunt; erit triangulum P Q R ex ipsis compositum, æ-
quilaterum cuius quidem latera bifariam secantur ab angu
is trianguli Icosaedri GHI: (Cum enim in triãgulo A C L,
recta P Q, parallela sit lateri C L, secabuntur P Q, L C, in eas
dem rationes, ex ijs, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus: Diuiditur autem C L, bifariam in H, ob triangulum
A C L, in quo F H, parallela est lateri A L, secans proportiona 2. sexti.
liter latera C A, CL. Igitur & P Q, bifariam secatur in G. Ea-
demque est ratio de reliquis Q R, R P.) Ac propterea trian-
gulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero
P Q R, cuius anguli diuidunt latera basis pyramydis extre-
ma ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G,
H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab an-
gulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM

Ex his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema

quoque

quoque ac media ratione. Cum enim, ut constat ex propos. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis D descripti; ducatur ex angulo F, trian



2. sexti. li FEC, quod triangulo DEF, est æqu
recta FS, parallela rectæ AM, secans
34. primi. HO, in S, & T. Cum igitur MC, bifari
fecetur in S, ob triangulum AMC; fi
MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogr
mum GS; Erit & SC, æqualis eidem
minori segmento rectæ DF; Ac prop
cum totæ DF, EC, æquales sint; erit q
reliqua ES, reliquæ DG, maiori segm
to æqualis: Ideoq; EC, in S, secta erit extrema ac media ratio
2. sexti. Deinde quia FE, FS, similiter secantur; secatur autem FE, extr
ac media ratione; secabitur & FS, in T, extrema ac media ra
34. primi. ne, maiusque segmentum erit FT, recta æqualis existens la
Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Ic
dri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ di
EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, de
sa. Quod est propositum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyram
dis extrema ac media ratione secti, duplu
est potentia lateris Icosaedri in ea pyram
de descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac m
dia ratione secētur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, A
producentibus GHI, basim Icosaedri i
la pyramide descripti, inscriptam trian



lo æquilatero PQR, cuius anguli lat
trianguli ABC, secent extrema ac me
ratione ī P, Q, R, & ipsa latera PQ, Q
RP, bifariam diuidantur in G, H, I, ut in propos. præced
ti demonstratū est. Dico AP, minus segmentum lateris P
ramidis duplum esse potētia lateris Icosaedri HI. Cū. n. PQ
dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. prop
16. lib. 15. quadrupla uero potentia rectæ HI, ex scholio p
pos. 4. lib. 2. qđ PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi
qualis HI, ob parallelogrammū PH; Erit PQ, potentia
AP

P, 2. & HI, 1. Quāobrē AP, dupla erit potētia rectæ HI. inus ergo segmentū lateris, &c. Quod erat demonstrādū.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his latus Icosaedri in pyramide descripti, esse potomen. Cum enim diameter sphęræ potentia sesquialtera sit la ris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyra- idis Rōnale, cū diametro potētia sit cōmēsurabile. Quare minus gmētū lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apoto- e erit; Atq; adeo cū minori segmēto lateris Pyramidis latus Ico edri potentia sit commensurabile; (ostendimus enim minus seg entum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Ico- edri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

13. tertiȳde. 6. decimi. 6. tertiȳdec. 6. decimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potētia dimidiū est late ris Pyramidis ī eo descriptæ: Latus uero Py ramidis duplū est longitudine lateris octae- dri sibi inscripti: latus deniq; cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, ut cōstat ex propos. 1. lib. 15. Sit aūt quadratū huius diametri duplū basis cubi, hoc est, quadrati lateris cu- bi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi di- midium esse potētia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide de scriptum, ut liquet ex propos. 2 lib. 15. Est autem latus trian guli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius se- ctiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, ut constat ex 4 propos. lib. 4. Perspicuum est, latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

DENIQVE quia diameter sphæræ, seu octaedri po- tentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æqua le diametro octaedri sibi inscripti, cū diameter octaedri cōiū gat cētra basiū cubi oppositarū, ut in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latꝰ cubi potētia esse duplū lateris octaedri in eo de-

14. tertiȳde.

eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est
teris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

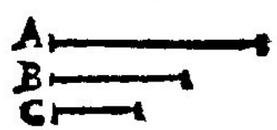
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia
teris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quo
in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, ut docuimus pr
pos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segme
tum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in
5. *sextidec.* describitur; existat den que latus cubi dimidium potenti
teris Pyramidis sibi inscriptę: Aperte colligitur, latus d
decaedri maius esse segmentum rectę, quæ potentia dim
dia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demo
strandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum
& Dodecaedrum: Latus Icosaedri mediu
proportionale erit inter latus cubi, & Do
decaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B
latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Di



B, latus Icosaedri medio loco esse pro
portionale inter A, latus cubi, & C,
latus Dodecaedri. Cum enim ex is
quæ in scholio propos. 14. lib. 15. de
monstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit
teris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scho
lio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum

eiusdem lateris cubi: Planum sit, ita esse A, totam ad B,
ius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus.
in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod
endendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodeplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demonata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diamem basis cubi inscripti tertiam esse partem lateris Pyramis BC,) Et quadrata proportione habeant laterum dupli- 20. *sexti.*
am: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quati diametri basis cubi in ea descripti, cum noncupla proortio sit triplę duplicata, ut in his numeris 1.3.9. apparet. uare, cum quadratum diametri basis cubi duplum sit ip sbasis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, ut si ponatur sis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum sdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis . Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodeuplum est rectæ extrema ac media ratione ctæ, cuius maius segmentum latus est Do caedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus oque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, ut cuimus in scholio ppos. ultimę lib. 15. Erit latus Pyramis potentia octodecuplum lateris cubi sibi & Dodecaedro 8. *sextidec.*
inscripti:

inſcripti : Huius autem lateris cubi extrema ac media ratio-
ne ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1 propoſ. 17. lib. 13.
latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum o-
bus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octo-
cuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius ma-
ius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.
Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum mino-ris ſegmenti lateris octaedri extrema ac me-dia ratione diuiſi.

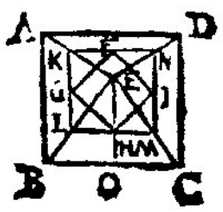
VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniun-
gens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angu-
lum continentium prope minora ſegmenta, (qualis ſunt ip-
ſa recta GI, ſubtendens angulum rectum GAI, minoribus ſe-
mentis AG, AI, comprehẽſum;) latus eſt Icoſaedri in octa-
47. *primi.* dro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſſit
duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit unius
minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcriba-
tur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadru-plum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT una ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis
quadratum ABCD, triangula uero ad E, uerticem, ABE,
EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra F,
G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NA, rec-
AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ

, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro
ſcripti, ut demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam au-
n ducta recta EHO, ſeſquialtera eſt rectæ



H, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. qualium
rtium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH:
qui ut EO, ad EH, ita eſt EB, ad EL. Igi-
r qualium partium 3. continet EB, talium
erit EL, ſeu LM, ſibi æqualis; Ac propte-
a quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & qua-
atum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque
quadratum lateris cubi GH, uidelicet FGHI, talium par
m 2. cum quadratum LN, duplum ſit quadrati GI, ſi-
nſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. de-
onſtrauimus. Eſt enim LN, quadratum ex diametro
adrati GI, deſcriptum; cum GI, diameter (ſi ducatur)
qualis ſit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, po-
tia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi GH, cum
rum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus
tur octaedri potentia quadruplum, &c. Quod erat de-
onſtrandum.

2. *ſexti.*

33. *primi.*

COROLLARIVM.

QVIA uero latus cubi extrema ac media ratione diuiſum eſ
it maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per co
ll. 2. propoſ. 13. lib. 15. Inſcribunturque Dodecaedrum, & cu
s ſibi inſcriptus, eidem octaedro, ut docuimus in ſcholio pro
ſ. ultimæ lib. 15. Perſpicuum fit, octaedri latus eſſe potentia qua
uplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diui
, cuius maius ſegmẽtum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti.
t.n. eiuſmodi recta latus cubi eidem octaedro inſcripti, cuius qua
uplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum ſt eius rectæ extrema ac media ratione ſe-tæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri n Icoſaedro deſcripti.

QVO-

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectę lateri cubi æquales, ut constat ex propos. 14. lib. 13 eiusque scholio. Et in bifarijs sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residunt sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15 eiusdem lib. 15 Fit, diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cũ per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostẽdimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti: Atqui diameter sphæræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat. 14. *vertijde.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus uero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, uel maioris segmenti ad minus, (quod tota

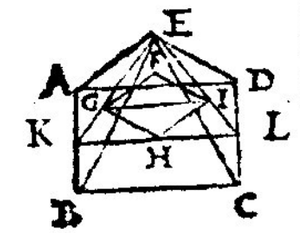
tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse ut latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, ut tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, ut maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

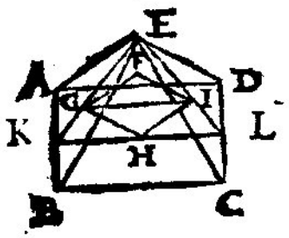
THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT una sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad uerticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, ut docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam uero Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, ut in scholio propos. ultimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, ut constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialterę erunt rectarũ EG, EI, per coroll. propos. 18.



2. *sexti.* lib. 14. Ac propterea G I, parallela erit rectæ K L, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit, ut E K, ad K L, ita E G, ad G I; & permutando, ut E K, ad E G, ita K L, ad G I; ideoque cum E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. Cum ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quod & B K, C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

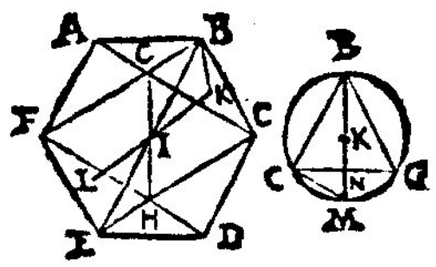


33. *primi*

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum I A B C D E F G H, cuius diameter BE, & centrum *I*; triangula uero opposita & parallela, per coroll 4. propos. 14. lib. 13. B C G, E F H, quorum centra K L. Ducatur ex centro I, ad planũ BCG, perpendicularis I K, cadens. ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in cẽtrũ *K*. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholiũ propos. 14. lib. 11. caderque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quã obrem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, ut constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit K L, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cum ergo eadẽ ratione reliquæ



quæ diametri cubi per idem centrũ I, transeant, erit I, quoq; centrum cubi inscripti, deoque I K, I L, semidiametri æquales: Coniuncta autem *K* B, semidiametro circuli triangulum B C G, circunscribentis, erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum B K, K I. Igitur & quadratum diametri B E, quadruplum existens quadrati semidiametri B I, ut in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis, & *K* L. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris B K, K I, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi *K* L, (quod triplum est quadrati lateris cubi,) ex quadrato diametri Icosaedri B E, remanet quadratum diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri B C. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum B C G, circulus, extensaque B K, usque ad M, quæ secet C G, in N, ducatur quoque recta C M. Quoniam igitur B N, per centrum K, ducta perpendicularis est ad C G, per ea, quæ ostendimus in scholio propos. 12. lib. 13. erit recta B C, potentia sesquitertia rectæ B N; Vt autem B C, ad B N, ita est B M, ad B C, quod B C, sit media proportionalis inter B M, & B N, ex coroll. propos. 8. lib. 6. cum angulus B C M, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur B M, potentia quoque sesquitertia est rectæ B C; Ac propterea quadratum diametri B M, sesquitertium est quadrati lateris B C. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

47. *primi.*

15. *tertiidec.*

12. *quartidecimi.*

31. *tertij.*

COROLLARIVM.

HINC fit diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri B E, æquale esse quadratis diametri cubi K L, & diametri circuli triangulum B C G, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti duplum potens lateris octaedri, coniungit biſarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, ut manifeſtum eſt ex propoſ. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones coniungentis diuiſæ extrema ac media ratione minus ſegmentum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniungat biſarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. *tertiædec.*

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodem Icoſaedro deſcribantur, ut docuimus in ſcholio propoſ. ultimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidem circundantis: poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris Pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circunſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris

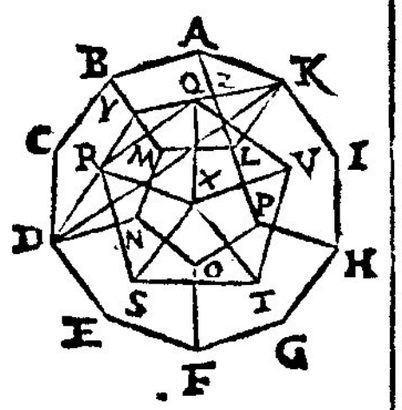
13. *tertiædec.*

lateris Icoſaedri, ut in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circundantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

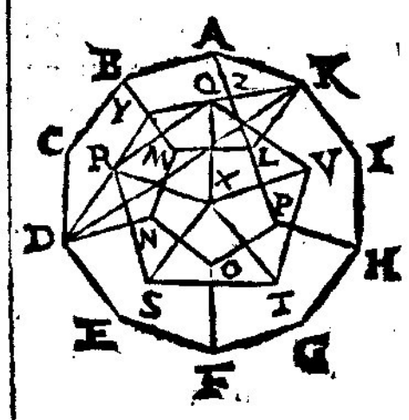
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, ut minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

SIT dimidium Dodecaedri contentum ſex pentagonis A B M L K, L K I H P, P H G F O, O F E D N, N D C B M, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet uidelicet duo proxima) iungantur rectis Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni L M N O P, ut oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem baſim B M, per centra R, Q, rectæ demittantur D Y, K Y, quæ quoniam biſariam, & ad rectos angulos ſecant latus B M, per coroll. 2. propoſ. 10 lib 12. conuenient in puncto Y. Quod ſi ſubtendatur recta A L, angulo K; ſecabitur



2. *sextidec.* cabitur perpendicularis K Y, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri L M, ad latus Icosaedri sibi inscripti Q R, ut K Z, minus segmentum perpendicularis K Y, ad rectam Q Y, inter centrum Q, & latus B M, interceptam. Subtensa enim recta D K, quæ, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrū propositum describitur; erit L M, latus Dodecaedri, minus segmētum ipsius D K, si extrema ac media ratione secetur, ex eodē scholio propos. 13. lib. 15. Quoniā uero latera Y D, Y K, trianguli Y D K, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim R D, Q K, semidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & Y R, Y Q, distantię nimirū rectę B M, a centris R, & Q, eorundem circulorū æqualium) parallela erit Q R, ipsi D A; Ideoq; 2. *sexti.* triangulū Y R Q, triangulo Y D K, simile, per coroll. pro- 4. *sexti.* pos. 4. lib. 6. Quā ob rē erit, ut D K, ad K Y, ita Q R, ad Q Y: 2. *quartide.* Vt autē D K, tota ad totā K Y, ita est L M, minus segmentū ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit Q R, ad Q Y: Et permutando, ut L M, latus Dodecaedri, ad Q R, latus Icosaedri sibi inscripti, ita K Z, minus segmentum perpendicularis K Y, ad Q Y, inter centrum Q, & latus B M, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

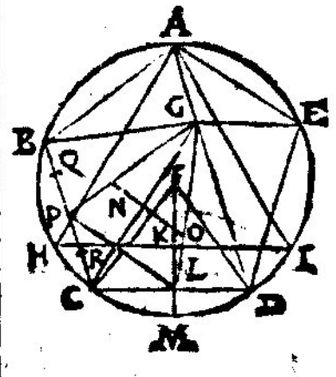
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA

CIRCA pentagonum A B C D E, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentia angulum solidum Icosaedri G, ex ijs, quæ in propos. 16. lib 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur A H I. Quoniam igitur arcus A B C, A E D, æquales sunt, cum quili bet duas quintas partes totius circunferentiæ contineat, necnon & duo arcus A B H, A E I, cum sint tertiæ partes eiusdem circunferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales, propterea quæ rectæ H I, C D, parallæ, per scholium propos. 27 lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur F K L, secans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ F C, 3. *tertij.* F D. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, G O L, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta G O, in punctum L, in quo diuisa est C D, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta N O, quæ, ut constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique B P, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento B Q, ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cum enim F L, perpendicularis a latere trianguli æquilateri H I, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod F L, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari F K, per corollariū propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento F K, æqualis recta K M, per corollariū propos. 12. lib. 13. Erit ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum K M, sectum quoque in L, a minori segmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ suiipsius



segmento L M. Quoniam uero iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, describpti, idemque centrum F, habentis, ex scholio ultimo lib. 4. ideoque similis illi; erunt trianguli F C D, F P L, (si recta duceretur F P,) similia, per scholium propos. 20 lib. 6. Quare ut F C, ad C D, ita erit F L, ad L P; & permutando, ut F C, ad F L, ita C D, ad L P: Atqui F C, hoc est, sibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore segmento dimidij ipsius F M, nempe minore segmento rectæ K M, ut ostendimus. Recta igitur C P, uel sibi æqualis B Q, excedet quoque rectam L P, minore segmento dimidij ipsius B C, nimirum minore segmento rectæ B P, quod fuit B Q; ideoque reliqua C Q, rectæ P L, æqualis erit. Rursus quia G P, G L, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod G N, G O, duplæ sint ipsarum N P, O L, per coroll. propos. 18 lib. 14.) parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, simile, ex coroll propos. 4. lib. 6. Igitur erit ut G P, ad P L, ita G N, ad N O; & permutando, ut G P, ad G N, ita P L, ad N O: Est autem G P, ipsius G N, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & P L hoc est, sibi æqualis C Q, sesquialtera erit ipsius N O; Ac proinde, cum C Q, sesquialtera quoque sit rectæ Q R. (Nam qualium partium 3. est C Q, talium 2. est C R, per constructionem; Ac propterea earundem 2. Q R,) æqualis erit Q R, ipsi N O, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.



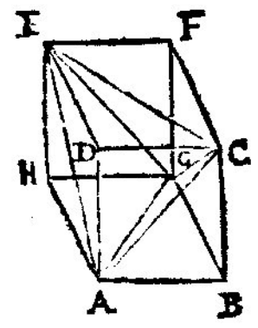
4. sexti.

2. sexti.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ Pyramidis triplus est.

In cubo A F, descripta sit pyramis A C E G. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, uertices uero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non resident quatuor anguli pyramidis æquilateræ inscriptę: (Nam super basin A C E, fundatur pyramis A C E D; super basin A E G, pyramis A E G H; super basin C E G, pyramis C E G F; & super basin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine, & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus, & similibus triangulis, dimidijs scilicet quadratorum cubi, ut patet, & uno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam exempli causa, pyramis A B C G, basim habens A B C, dimidium basis cubi B D, altitudinem uero eandem, quam cubus, rectam uidelicet B G, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7 lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinem habentis. Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circunstantes quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Atque proinde reliquam pyramidem æquilateram A C E G, cubo inscriptā eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.



32. undec.

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, ut docuimus in scholio propos. ultimæ lib. 15. Cubus uero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, ut demonstratum est; perspicue colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptæ pyramidis; quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

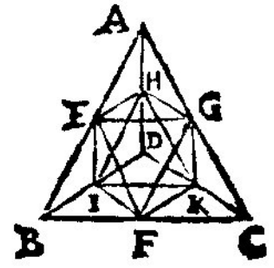
32. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum E I K G H F. Dico Pyramidem octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrum circunſtent quatuor pyramides pyramidi A B C D, ſimiles, ut propoſ. 3. lib. 12. demonſtratum eſt fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri E G H, E F I, F G K, H I K; quales ſunt pyramides E G H A, E F I B, F G K C, H I K D: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ A B C D, per coroll. propoſ. 1. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis A B C D, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatã; Erit pyramis A B C D, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis A B C D, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, ut in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A B C D; Ac idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis A B C D, conficient. Quare & reliquum octaedrum E I K G H F, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis A B C D. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



8. *duodec.*

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

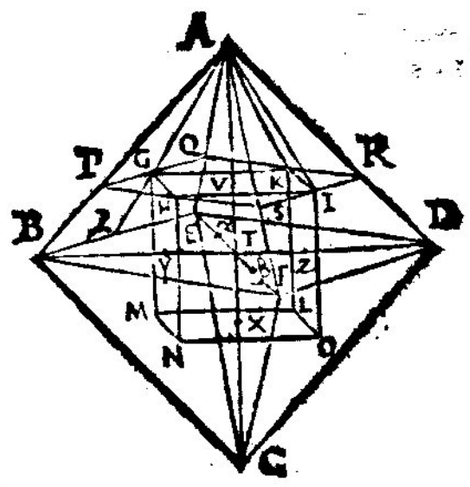
QVE-

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, ut conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptę triplus, & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, ut qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt. Quod erat oſtendendum. 20. *ſextide.* 21. *ſextide.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.

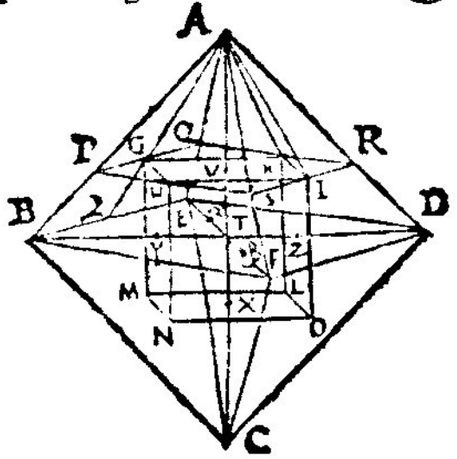
IN octaedro A B C D E F, cubus deſcriptus ſit G H I K L M N O, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri B E D F A, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor baſium octaedri, rectæ P Q, Q R, R S, S P, lateribus B E. E D, D F, F B, parallelæ, quadratum cõſtituentes P Q R S, ut in propoſ. 4. lib. 15. eſt demõſtratum; quod quidem parallelum erit quadrato B E D F. Ducatur quoq; octaedri diameter A C, perpendicularis exiſtens ad quadratum B E D F, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi G I, M O, in punctis V, X, per ſcholion propoſ. 14 lib. 11. Eſt autem V, centrũ quadrati P Q R S: (cum enim plana B E D F, P Q R S, parallela ſecent rectas æquales A B, A E, A D, A F, proportionaliter; erunt & A P, A Q, A R, A S, æquales. Intelli-



15. *undec.*

17. *undec.*

47. primi. Intelligantur ductæ rectæ V P, V Q, V R, V S. Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium A P, A Q, æqualia sunt quadratis rectarum A V, V P; A V, V Q, quod anguli A V P, A V Q, recti sint, per defin. 3. lib. 11. demp-



to communi quadrato rectæ A V; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum V P, V Q, propterea quod & rectæ ipsæ V P, V Q, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas V R, V S. Quare V, centrum est quadrati P Q R S. Igitur & centrum erit quadrati G H I K, in illo descripti, per scholium ultimum lib. 4. Secantur enim latera P Q, Q R, R S, S P, bifariam in G, K, I, H, ut constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis L M N O; Nec non & alias diametros ductas B D, E F, per Y, Z, α, β, centra reliquarum basium transire. Ducta iam recta A γ, per G, centrum trianguli æquilateri A B E; erit A G, dupla ipsius G γ, per coroll. propos. 18. lib. 14. Cum ergo plana P R, B D, parallela secent rectas A γ, A T, proportionaliter; dupla quoque erit A V, ipsius V T. Eodem modo dupla probabitur C X, ipsius X T; Ac proinde cum æquales A T, C T, similiter secentur in V, & X; æquales erunt A V, C X: nec non V T, X T. Recta igitur V X, coniungens centra basium cubi oppositarum bifariam secatur in T. Quare cum ad eundem modum Y Z, α β, bifariam secentur in T; erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectę centra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariam secent in centro. Iam uero, quoniam V X, ipsius V T, dupla est; dupla autem fuit & A V, eiusdem V T; æqualis erit A V, ipsi V X, nempe altitudini cubi. Quare pyramis G H I K A, ductis rectis A I, A K, tertia pars est cubi, seu prismatis G O, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. cum utriusque eadem sit basis G I, & altitudines æquales A V, V X: Est autem

17. undec.

6. duodec. pyramis P Q R S A, pyramidis G H I K A, dupla, quod & basis P Q R S, dupla sit basis G H I K, illi inscriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia uero pyramides B E D F A, P Q R S A, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus A B, lateris A P, sesquialterum, quod & recta A γ, proportionaliter secta ipsi A B, sesquialtera sit ipsius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, ut 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. ut in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum existens pyramidis B E D F A, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis P Q R S A, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratum est. (Nam numerus 8 duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum A B C D E F, ad cubum G O, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterũ est. Quod erat ostendendum.

8. duodec. 2. sexti.

COROLLARIVM. I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, utriusque esse centrum.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem uidelicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

11. sextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

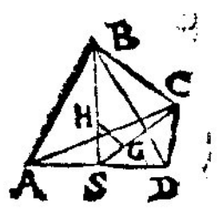
OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVO-

QVONIAM ut oſtendimus ad finem lib. 15. cubus, ſibiq; inſcripta Pyramis in eodē octaedro deſcribuntur; Eſt
23. *ſextide.* autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſqui
20. *ſextide.* alterum; Et cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis triplus: Qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc eſt tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.

IN Pyramide A B D C, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe noncuplam. Aſſumantur enim G, H, centra duarum baſium A C D, A B D, communis latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa uero recta G H; cum B H, C G, duplæ ſint rectarum H S, G S, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde


2. *terij.* proportionaliter ſecentur B S, C S, parallelæ erunt B C,
H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, trian-
4. *ſexti.* gulo B C S, ſimile. Erit ergo ut B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, ut B C, ad H G, ita C S, ad G S: Eſt autem
18. *quartidecimi.* C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, ut in propoſ. 15. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta uero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, ut perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium diameter fuit baſis G N H Q, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circunſcribentis, G H, uero diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim ut diameter unius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio utraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, ut diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem B C, diameter baſis cubi circumſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, ut oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At uero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circunſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, ut hic 1. 3. 9. 27. uidere licet. Quam ob rem, cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat, quam 27. ad 9. uidelicet triplam; Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

33. *undec.*

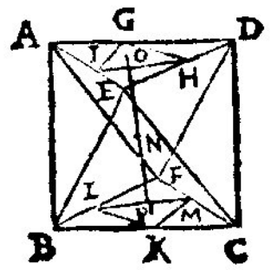
20. *ſextide.*

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quã duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptũ Icoſaedrum. Dico Octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, ut ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cum enim ut ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; Sint duę baſes Icoſaedri, G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F

BCF; Atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim utriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 13. lib. 15.) ad basim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadet in centrum O, trianguli ADE, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 13.



quod quidem O, centrum quoque est trianguli GHI, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cū ergo plana opposita ADE, BCF, parallela sint, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per scholion propos. 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiusque proprterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri, & Icosaedri sibi inscripti. Quia uero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icosaedrū in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis NO: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At uero prisma, cuius eadem basis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON, duplum est prismatis, cuius basis eadem ADE, altitudo uero ON, per ea, quæ in scholio propos. 4. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis ADE, & altitudo OP, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim ADE, & sub altitudine OP, constituti; prisma uidelicet, cuius basis tertia pars est trianguli ADE, altitudo uero eadem OP. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem ADE, & sub altitudine OP; cum per ea, quę docuimus ad propos. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, ut bases. Quare duo prismata, quorum unius basis ADE, & altitudo OP, alterius autem basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia sint octaedro ABCDEF. Non secus demonstrabimus prisma, cuius basis GHI, altitudo uero OP, æquale

esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea que triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis GHI, altitudo autem eadem OP, æquale esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt. æqualis erit tertia pars prismatis super basem GHI, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo uero eadem OP; Atque idcirco duo prismata, quorum unius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem OP, alterius uero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt. Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam uero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hęc prismata, Icosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. ut bases prismatum octaedro æqualium; quatuor tertias partes trianguli ALE, continentes, (cum unius basis sit ADE, nempe tres tertiæ partes ipsius ADE, complectens, alterius uero basis tertia pars ipsius ADE, ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum unius basis tripla sit trianguli GHI, nimirū nouem tertias partes ipsius GHI, continens, alterius uero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint autem; ut quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli GHI, ita duæ tertię partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarū, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidiam decem tertiarum: Et ut duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius GHI, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 4. lib. 12. sex tertię partes ipsius ADE, (hoc est, duę bases octaedri triplum duarum tertiarum unius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius GHI, (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum unius basis complectentes, cum quindecim tertias cōplectantur; Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hęc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, ut



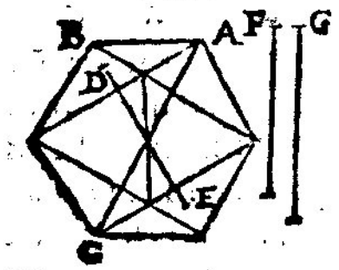
15. quinti.

duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptũ Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit A C; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionẽ Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex



proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſium oppoſitarum; Erit D E, diameter dodecaedri in Icoſaedro A B C, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidentes. Propoſitis iam rebus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc eſt, in eadem ſphæra, in qua Icoſaedrum A B C, deſcripto, cum utriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icoſaedrum uidelicet,

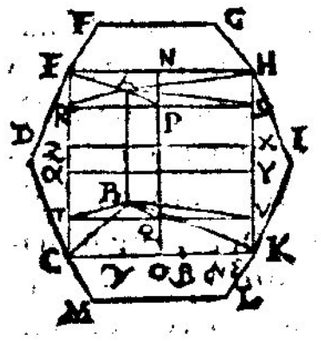
licet A B C, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nẽpe Icoſaedri A B C, ad tertiam, uidelicet ad Dodecaedrum diametri D E, ſibi inſcriptum, componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrũ diametri D E, in Icoſaedro A B C, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrũ A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem ſphæra comprehenſum ſit ut F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi. (Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icoſaedrum A B C, eiuſdem diametri eſt, ut G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrũ diametri A C, ut F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At uero Dodecaedrum eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrũ diametri D E, in Icoſaedro uidelicet A B C, deſcriptum proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 13. Manifeſtum eſt, proportionem Icoſaedri A B C, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrũ diametri D E, cõponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectã D E. Quare Icoſaedrũ ad ſibi inſcriptum Dodecaedrũ proportionem habet compoſitã, &c. Quod erat demonſtrandum. 11. *quarti decimi*.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmẽto eius lineæ,

quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 13. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad unum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BALMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His uero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cuius ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circunſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorũ duo CBK, EAH, triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo uero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quantum denique eſt baſis cubi inſcripti ECAH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, per 10. defin. lib. 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita ut Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circunſtantibus conflatum, æquari eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEH baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at uero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quam cadunt



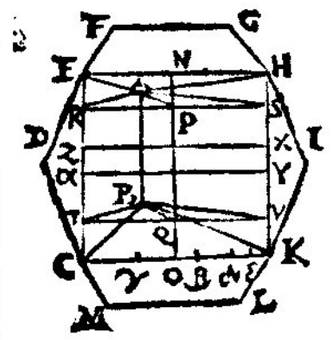
4. *primi.*

4. *primi.*

cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, ut conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit utraque recta AB, PQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, uel HQ, & utraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, ut liquet ex eadem propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cum & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. Quoniam autem AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT; parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 11. cum latera unius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione. 33. *primi.* 15. *undec.*

IAM uero, cum oſtenſum ſit, rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum utriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia uero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; utriuſque uero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, uel QB, conſtituta, quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, uel RH; 6. *duodec.* 1. *ſexti.* AEqualis erit pyramis TVXZB, utrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadem QB, uertex uero linea recta, pars uidelicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, ut demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7.

propoſ.7.lib.12. Item eiuſdem priſmatis,cuius baſis T X, & altitudo Q B,uertex uero pars rectæ A B, æqualis ipſi V X, duas tertias partes continet priſma,cuius baſis T Y,& altitudo eadem Q B,uertex uero pars rectæ A B,æqualis ipſi V Y, ex ſcholio propoſ.25.lib.11. quod & baſis T Y, duas partes
1. ſexti. tertias complectatur baſis T X. Igitur & priſma, cuius baſis T Y,& altitudo Q B,uertex uero pars rectę A B, æqualis ipſi V Y, æquale erit duabus pyramidibus E R S H A, C T V. K B; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati A B T V. S R, efficiet priſma æquale ſolido C B K H A E, habens baſin rectangulum contentum ſub latere cubi T V, & ſub recta cõpoſita ex V Y,duas tertias partes minoris ſegmenti V X, cõprehendente,& ex V S,maiore ſegmento,ideoque a baſe cubi deficientem rectangulo α X, contento ſub latere cubi α Y,& ſub X Y, tertia parte minoris ſegmenti V X. Nõ diſſimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtituris. Sex igitur huiuſmodi priſmata æquabunt ſex illis ſolidis,exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiusmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadem altitudine Q B, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni A B, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi,& ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi,& ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi,altitudo uero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorũ trium parallelepipedorũ,hoc eſt,altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmenti lateris cubi ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinẽ dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere



ficere minore ſegmento eius lineę,quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur enim C K, latus cubi extrema ac media ratione in ß: Itemq; C ß, maius ſegmentum,& ß K,minus bifariam in γ, δ; atq; ex ß K, abſcindatur ß ε, æqualis ipſi ß γ, ſeu C γ, ita ut C γ,uel γ ß, uel ß ε, dimidia pars maioris ſegmenti C ß, æqualis ſit ipſi Q B, & C ε,toti altitudini præfati parallelepipedi. Quoniam igitur eſt,ut tota C K,ad maius ſegmentum C ß,ita maius ſegmentum C ß,ad minus ß K, erit quoque ut C O,dimidia ipſius C K, ad C γ,uel ß ε,dimidiam ipſius C ß, ita C γ,uel ß ε, ad ß δ,dimidiam ipſius ß K; Ac proinde ſi C O, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum C γ,uel ß ε, & minus ß δ. Quare & ß δ, minus ſegmentum ſecabit ß ε, maius ſegmentum extrema ac media ratione,ut demonſtratum ad propoſ.5 lib.13.eritq; maius ſegmentum ß δ, minus autem δ ε; Ac propterea rurſus δ ε,minus ſegmentum ſecabit rectam δ K, maiori ſegmento ß δ,æqualem,extrema ac media ratione,minuſque ſegmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi C K, minore ſegmento ε K,rectæ δ K, uel ſibi æquali ſegmenti eiuſdem lateris cubi; altitudinem uero ab altitudine cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonſtrandum. 15. quinti

COROLLARIVM.

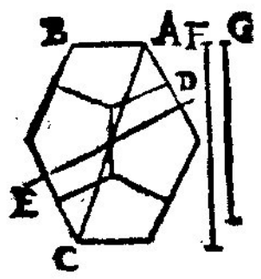
VNDE elicitur,Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis,quorum unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ,quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit; Alterius uero & longitudo,& latitudo lateri cubi æqualis eſt,altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum

addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, qua cubus, altitudo uero a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrū descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, ut Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscripti constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo uero alter cubus, ut demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cū cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniūgens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra



centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdē diametri DE, intra Dodecaedrū uidelicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum uero diametri DE, ad Icosaedrum eiusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam uidelicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum. 11. *quarti decimi*.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum

rum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ parti minoris segmẽti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, ut ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis in qua describitur, nona pars est, cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, ut magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in uerbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo ut si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

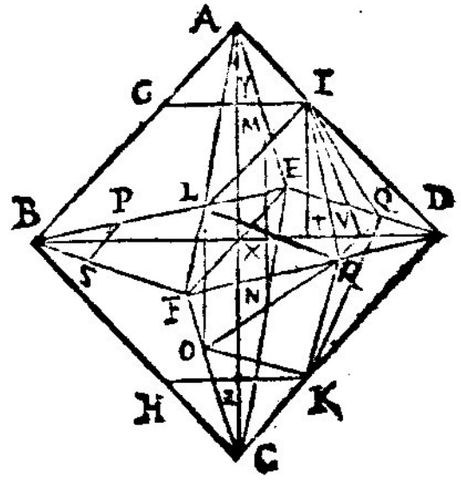
25. *sextide.*

THEOR.

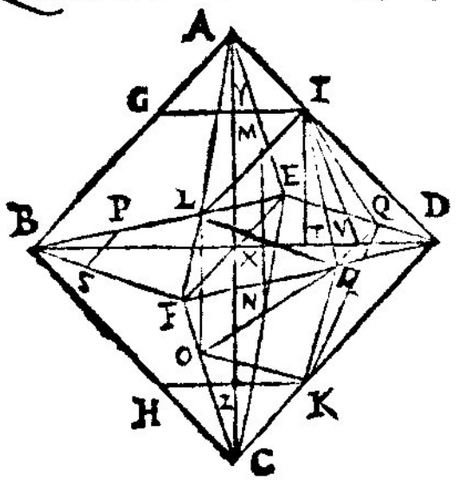
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. lib. 15. ubi demonstratum est, uiginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt impositi, secantia uidelicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualẽ esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrũ ABCDEF, superare Icosaedrũ sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo uero IT, maius segmẽtum semidiametri AX. Cũ enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ solidũ octaedri D, cõstituẽtibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, IQR, KQR, & commune triangulum DQR, constituentur duæ pyramides super communẽ basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquale, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius uidelicet segmẽtum semidiametri octaedri. (Nam quemad-



quemadmodum A X, secta est a recta G I, in Y extrema ac media ratione, ita quoque secta est C X, a recta H K, in Z. Quare si ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo



34. primi. nimirum pyramidis K D-Q R; erit ea æqualis rectæ Z X, maiori segmento semidiametri C X, hoc est ipsi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptum cõsistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita ut octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia uero triangulum D Q R, dimidium est quadrati lateris D Q, (cum D Q, D R, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoque quadruplum trianguli D Q R. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum D Q R, & altitudo eadẽ I T, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis D Q R, & altitudo I T, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, uel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; AEquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum cuius basis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo I T, maius segmentum semidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri tu-

pra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, uel parallelepipedo. Octaedrũ ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum; octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ Q R, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri, recta uide licet I T, seu Y X: Fit, ut octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet idem Icosaedrum in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta Y Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit. 31. sextide. 21. sextide.

INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS duarum basium cuiuscunq; solidi regularis, unius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, unius ad alteram, inuenire. I.

SIT

SIT *Pyramis* ABCD, *cuius latere* BD, *bifariam sectio in E, ex angulis* A, *&* C, *lateri* BD, *oppositis rectæ ducantur* AE, CE; *quæ cum perpendiculares sint ad* BD, *communem sectionem planorum* ABD, CBD, *in quibus existunt, ut ostensum est in scholio propos.* 12. *huius lib. angulum inclinationis* AEC, *basium* ABD, CBD, *continebunt, ex defin.* 6. *lib.* 11. *Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur* FGH, *triangulum æquilaterum super rectam* FG, *lateri pyramidis æqualem constructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirum* ABD, *æquale, in quo ducta* HI, *perpendicularis ad* FG, *cõstituatur super* FG, *triangulũ* FGK, *habẽs utrunq; latus* FK, GK, *æquale perpẽdiculari* HI, *hoc ẽ, utriq; perpẽdiculari* AE, CE, *cũ perpendiculares* HI, AE, CE, *sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulũ* FKG, *æqualẽ esse angulo inclinationis* AEC, *basiũ* ABD, CBD. *Cũ.n. latera* KF, KG, *æqualia sint lateribus* EA, EC; *& basis* FG, *basi* AC: *Æquales erũt anguli* FKG, AEC. *Dico insuper angulum inclinationis* AEC, *acutũ esse. Cum.n. latus* AD, *uel illi æquale* AC, *sesquitertium sit potentia utriusq; perpendicularis* AE, CE; *qualium partium* 4. *ponetur quadratũ rectæ* AC, *talium* 3. *erit quadratũ utriusq; rectæ* AE, CE; *ideoq; earundẽ partium* 6. *erunt ambo simul quadrata rectarũ* AE, CE. *Quare cũ in triangulo* ABC, *quadratum lateris* AC, *minus sit quadratis simul laterum* AE, CE, *acutus erit angulus* AEC, *ut in scholio propos.* 13. *lib.* 2. *demonstrauimus.*

8. primi.

12. quarti decimi.

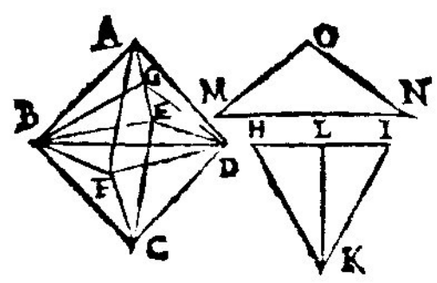
COROL-

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illę perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia. 8. primi

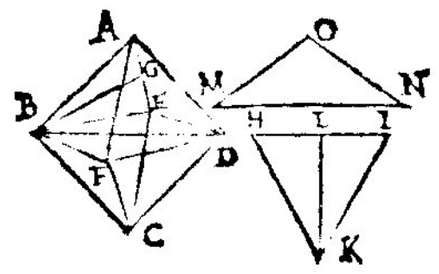
ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire. 11.

EXHIBEATVR *Octaedrum* ABCDEF, *cuius diameter* BD. *Ex angulis* B, *&* D, *ad latus* AE, *triangulis* ABE, ADE, *commune, bifariamque sectũ in* G, *rectæ ducantur* BG, DG; *quæ cũ perpendiculares sint ad* AE, *communem sectionem planorum* ABE, ADE, *in quibus existunt (quod in triangulis* BGA, BGE, *anguli ad* G, *æquales sint, &c.) continebunt angulum* BGD, *inclinationis basium* ABE, ADE, *per defin.* 6. *lib.* 11. *Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac uia. Sumatur* HIK, *triangulum æquilaterum super rectam* HI, *lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet* ABE, *æquale, in quo ducta* KL, *perpendiculari ad* HI, *constituatur super recta* MN, *quæ æqualis sit diametro octaedri* BD, *hoc est, diametro quadrati* ABCD, *ex* AB, *latere octaedri descripti triãgulũ* OMN, *habẽs utrunq; latus* MO, NO, *perpẽdiculari* KL, *æquale,*



8. primi

æquale, hoc est, utrique perpendiculari BG, DG, cui perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GD; & basis MN, basi BD; AEquales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cum enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB; latus uero AB, potentia sesquitertium rectæ BG: qualium partium S. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, ut in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.



8. primi.

13. tertiidecimi.

12. quarti decimi.

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes.

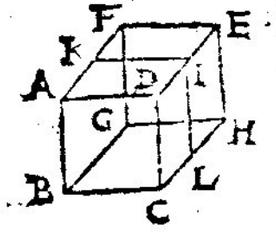
8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.

S

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EE, EH, (quod & KF, IE, inter se, necnon & IE, LH, inter se æquales existant, et parallelæ) ideoq; angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam uero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare ut angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, ut modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



33. primi.

10. unde

COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

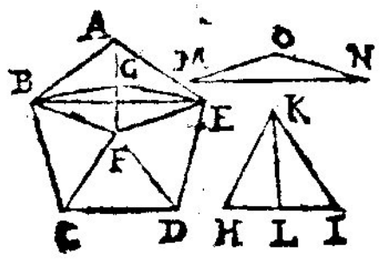
IIII.

ANGVLVM inclinationis duarũ basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum ABCDE, ex quinque Icosaedri lateribus cõpositum, uertex autem F. Diuiso itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium

Pp

bentium, angulis B, *&* E, *lateri* A F, *oppositis rectæ* B G, E G, *quæ cum ex demonstratis in problemate* 2. *huius scholij perpendiculares sint ad* AF, *communem sectionem planorum* ABF, AEF, *in quibus ducuntur, comprehendent* B G E, *angulum inclinationis basium* A B F, A E F, *per* 6. *defin. lib.* 11. *Hunc igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuius triangulo Icosaedri, ipsi uidelicet* ABF, *æquale, in quo ducta recta* KL, *ad HI, perpendiculari, constituatur super recta MN, quæ rectæ* BE, *angulum pentagoni* A, *subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens utrunque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, utrique perpendiculari* B G, E G, *cum perpendiculares* KL, BG, EG, *in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo B GE, inclinationis basium* ABF, AEF, *æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus G B, G E,* 8. primi. *& basis MN, basi BE; Æquales erũt anguli MON,* B G E. *Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, esse obtusum. Cum enim* B G, *angulum rectum faciat* 19. primi. *AGB; erit recta AB, maior quam recta B G; ad eundemque modum* AE, *maior erit quam EG. Quare rectæ* AB, AE, *maiores quoque erunt rectis O M, O N, cum hæ rectis GB, G E, positæ sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON,*



ita ut rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum unum, ac insuper unius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior) multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE. 21. prim

COROLLARIVM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, E G, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est B E; omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, æquales existant. 8. prim. 4. prim

V.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, unius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15. *quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angulos quatuor basium* Dodecaedri *ad unum latus cocuntium; sint huiusmodi pentagona* A B C D E, E F G H A, A H I K B, B K L M C, *ad latus* AB, *conuenientia; duo quidem* ABCDE, A H I K B, *secundum idem latus commune* A B; *alia autem duo* A E F G H, B C M L K, *secundum angulos* E A H, C B K. *His porro pentagonis inscriptum sit*

quadratum cubi ECKH, *cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum* D, B, I, A. *Diuiso autem latere* AB, *bifariam in* N, *ducantur ex* N *in planis pentagonorum* ABCDE, AB KIH, *ad* AB, *perpendiculares* NO, NP, *secantes latera* EC, HK, *in* O, *&* P. *ad angulos quoque rectos, cum rectæ* EC, HK, *ipsi* AB, *sint parallelæ, per coroll. propos.* 8. *lib.* 15. *Comprehendunt igitur* NO, NP, *angulum* ONP, *inclinationis basium* ABCDE, ABKIH. *Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. Super rectam* QR, *lateri Dodecaedri* AB, *æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum* QRSTV, *hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi* ABCDE, *æquale, cuius angulo* T, *recta subtendatur* VS, *æqualis existens rectæ* EC, *cum & latera* TV, TS, *lateribus* DC, DE, *æqualia sint, angulosque contineant æquales. Diuisa deinde recta* QR, *bifariam in* X, *ducatur a puncto* X, *ad* QR, *perpendicularis* XY: *propterea que perpendicularis ad* VS, *cum* VS, *sit parallela ipsi* QR, *per coroll. propos.* 8. *lib.* 15. *Ac postremo super recta* VS, *triangulum fabricetur* VZS, *habens utrunque latus* ZV, ZS, *perpendiculari* XY, *æquale. Dico angulum* VZS, *æqualem esse angulo inclinationis* ONP. *Ductis enim rectis* NE, NH, VX; *cum latera* EA, AN, *æqualia sint lateribus* HA, AN; *Item lateribus* VQ, QX, *angulosque comprehendant æquales; Æquales erunt & bases* NE, NH, NH, VX, *& anguli* ANE, ANH, QXV; *ideoque & residui ex rectis, anguli uidelicet* ENO, HNP, VXY, *æquales erunt. Quoniam igitur anguli* ENO, EON, *trianguli* ENO, *æquales sunt angulis* HNP, HPN, *trianguli* HNP; *nec non & angulis* VXY, VYX, *trianguli* VXY; *(sunt enim* EON, HPN, VYX, *ostensi recti.) Et latus* NE, *lateribus* NH, VX, *æquale demonstratum: Æqualia erunt reliqua latera* NO, OE, *reliquis lateribus* NP, PH; *Item lateribus* XY, YV. *Quare rectæ* ZV, ZS, *æquales existentes ipsi* XY, *rectis* NO, NP, *æquales erunt. Iam uero, quia* OE, PH, *æquales sunt, ac parallelæ: erit quoque recta coniuncta* OP, *æqualis & parallela ipsi* EH, *ideoque æqualis ipsi* EC, *hoc est, rectæ* VS. *Quam ob rem, cum latera* ZV, ZS, *lateribus* NO, NP, *æqualia sint; basis item* VS, *basi* OP; *Æqualis erit angulus* VZS, *angulo inclinationis* ONP. *Dico etiam, angulum hunc* ONP, *inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta* Bα, *ipsi* NO, *parallela; cum sit quoque* NB, *ipsi* Oα, *paralleła, per coroll. propos.* 8. *lib.* 15. *Parallelogrammum erit* NOαB, *ideoque recta* Bα, *ipsi* NO, *æqualis. Quia uero* BC, *latus pentagoni oppositum angulo* Cα B, *qui rectus est, (æqualis nimirum interno* CON, *) maius est latere* Bα, *hoc est, recta* NO, *uel utraque* ZV, ZS, *quæ ipsi* NO, *ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ* TV, TS, *maiores duabus rectis* ZV, ZS. *Cadit igitur punctum* Z, *intra triangulum* TVS, *ita ut rectæ* TV, TS, *rectas* ZV, ZS, *includant omnino; Atque proinde angulus* VZS, *ideoque illi æqualis* ONP, *maior est angulo pentagoni*

4. primi.

4. primi.

26. primi.

33. primi.

8. primi.

34. primi.

29. primi

19. primi

28. primi.

ni T: Hic uero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis; quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, uel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est, recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis; Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera uidelicet cubi, inter se etiã sint æquales. 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.



ROMAE,

Apud Vincentium Accoltum.

M. D. LXXIIII.

Cum licentia Superiorum.