ELEMENTI
DI
GEOMETRIA

-1879-

Clairaut

ELEMENTI DI GEOMETRIA

Stamperia Reale di Torino
-1879-

PAGINE
MANCANTI
dalla
33
alla
58

735

229

COLLEZIONE DI LIBRI

D'ISTRUZIONE E D'EDUCAZIONE

Volume 154.

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

DI

CLAIRAUT

NUOVA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE

APPROVATA DAL CONSIGLIO SUPERIORE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

PER USO

delle Scuole secondarie e speciali

TERZA EDIZIONE

Ampliata in conformità al Programma Ministeriale 10 luglio 1867

1879

STAMPERIA REALE DI TORINO

DI G. B. PARAVIA E COMP.

Librai-Editori

ROMA - TORINO - MILANO - FIRENZE.

PREFAZIONE

ALLA SECONDA EDIZIONE

Un trattato di Geometria fatto dal Clairaut e tradotto dal Giulio, dovrebbe essere senza più riconosciuto e scelto da tutti siccome il libro di testo ottimo e il più adatto per l'insegnamento di questa scienza nelle nostre scuole tecniche, se non vi fossero le indeclinabili esigenze di un programma ministeriale di esame. Le istruzioni che precedono quel programma sembrano in vero dettate da chi aveva davanti agli occhi come esemplare per lo scopo dello studio e pel metodo dell'insegnamento il Clairaut. Ma poscia nelle particolarità, che sviluppano quel programma, sono introdotte non poche proposizioni, che il Clairaut ommette e che per conseguenza lo rendono insufficiente per le nostre scuole.

Ridurre il Clairaut, coll'aggiunta di quelle proposizioni mancanti, a contenere tutto quanto si deve insegnare nelle scuole tecniche, o, con altre parole, ridurre il Clairaut anche nella quantità della materia, come lo è nell'indirizzo e nel metodo, secondo le viste del R. Ministero, ecco il fine che mi sono proposto in questa seconda edizione.

Ma poichè il solo toccare all'opera di quell'insigne Matematico, così egregiamente tradotta dal Professore torinese, sarebbe in me incompatibile audacia e grave offesa alla scienza ed alla memoria d'entrambi, così ho voluto raggiungere il mio fine, lasciando intatto e nella forma e nella sostanza quel prezioso lavoro; ed ecco in qual modo potei ciò ottenere.

Le proposizioni tutte del Clairaut sono lasciate nella loro integrità come nella edizione del Giulio, e ordinate come in quella secondo i numeri romani; le altre invece da me aggiunte sono interpolate nel testo colle prime e precedute dai numeri arabici; le note del Traduttore sono pure introdotte nel testo, ma senza numero e precedute da un asterisco. In questo modo riescirà facile a chiunque di aver, quando il voglia, tutto solo l'immortale lavoro del Matematico francese.

Per rendere poi più facile e più comodo, anche materialmente, lo studio di questa scienza, ho voluto mettere in testa a ciascuna proposizione in carattere corsivo il suo enunciato, prendendo eziandio questo, ogni volta che mi fu possibile, dall'indice compilato dallo stesso prof. Giulio, indice, il quale interpolato, nello stesso modo che il testo, con quello delle proposizioni da me aggiunte, potrà servire qual programma particolareggiato, che ogni professore ha debito di consegnare in principio d'anno a' suoi alunni.

Con questo mio lavoro ho inteso unicamente di fare cosa utile ai nostri alunni e vantaggiosa all'insegnamento tecnico, togliendolo dalle soverchie astrazioni dei corsi classici, e per questo spero di poter meritare la benevolenza dei professori ed una gradita accoglienza da tutti gli studiosi della geometria.

GIUSEPPE DA CAMIN.

PREFAZIONE DEL TRADUTTORE

Alessio Claudio Clairaut, nato a Parigi il 7 di maggio 1713, venne dal padre, maestro che era di matematiche, avviato, fin dalla più tenera fanciullezza agli studi geometrici, col fargli apparare sulle tavole di Euclide a conoscere l'abbicì. Di dieci anni studiava il *Trattato delle sezioni coniche* di L'Hospital, e tosto dopo l'*Analisi degli infinitesimi* dello stesso autore: e con tanto frutto, che non compiuto ancora l'anno dodicesimo, era ammesso a leggere dinnanzi all'Accademia delle scienze una sua scrittura *su quattro nuove curve*, e sei anni appresso sedea in quella dotta compagnia, con espressa deroga degli statuti, che vietavano di eleggere nissuno che non avesse compiuti i vent'anni: della qual deroga non era mai venuta prima, e non venne mai più dappoi occasione.

I presagi tratti da questa maravigliosa precocità non furon vani: e Clairaut, nella sua troppo breve (1), ma splendida carriera, seppe collocarsi fra' primi matematici del suo secolo.

---

(1) Egli morì di soli cinquantadue anni il 17 maggio 1765.

A pochi giovani è da Dio concessa tanta forza d'ingegno, che possano proporsi di emulare gli esempli di Clairaut: ma niuno ricuserà di prenderlo per guida in uno studio, in cui egli si mostrava provetto ad una età, alla quale gli altri appena sono giudicati capaci di tentare i primi passi. Gli *Elementi di Geometria* pubblicati da lui nel 1741, ottennero, e non cessaron mai di godere in Francia bellissima fama, grazie all'ordine, alla semplicità, e quindi alla chiarezza con cui sono dettati. L'Autore stesso, nella Prefazione che qui appresso si riproduce, ha reso ragione del pensiero che lo guidò nella scelta e nella esposizione delle proposizioni: io dirò poche parole intorno alla presente Traduzione, della quale, come di cosa mia, nè mi è permesso dir bene, nè voglio certamente dir male.

La sola traduzione italiana degli Elementi di Geometria di Clairaut, di cui io abbia contezza, fu pubblicata in Roma nel 1751. Assai negletta nella lingua, e poco degna dell'originale, essa è stata forse cagione che il libro di Clairaut non ottenesse fra noi successo pari al merito, e non penetrasse nelle nostre scuole: onde è potuto in parte provenire, che molti giovani infastiditi alla lettura di trattati di forma troppo più severa che l'età loro non comportasse, abbiano preso afa di uno studio, di cui sperimentavano le difficoltà, senza poterne ancora comprendere la vera bellezza, ed il valore.

Ora, che per la instituzione delle scuole tecniche e speciali lo studio della Geometria dee maggiormente diffondersi tra noi, mi è sembrato che una nuova traduzione dell'opera di Clairaut, condotta con qualche diligenza, dovesse venire favorevolmente accolta e dai maestri e dagli alunni. L'approvazione del Consiglio Superiore di pubblica istruzione mi dà speranza di non essermi male apposto.

Io mi sono fedelmente attenuto al testo dell'Autore, quanto il diverso genio della lingua mel consentì, sostituendo solo le nuove misure decimali alle antiche francesi, e mutando poche parole, dove il mutare mi paresse dover conferire a precisione od a chiarezza maggiore. In un luogo solo (Parte III, §§ XVIII e XIX) mi son fatto lecito di levar dal testo (conservandola però religiosamente in una nota a piè di pagina) una dimostrazione, che, a parere dell'Autore stesso, può dar fastidio ai principianti. Le poche note poi che son venuto aggiungendo, hanno per iscopo, o di dare qualche conoscenza del sistema metrico decimale, o di supplire alcuna definizione o proposizione ommessa dall'Autore, e tuttavia, a parer mio, necessaria. Nel che sono stato però molto parco, non piacendomi spacciare col favor del nome di Clairaut la merce mia, nè guastare con troppe racconciature la bella simmetria del suo lavoro.

Per quelli che vorranno seguire nelle Università gli studi della facoltà matematica, questo libro non darà certamente preparazione bastante all'esame di ammissione: ma questi son pochi, e non sarà difficile il dar loro quel soprappiù d'istruzione di cui avranno bisogno. A tutti gli altri, le proposizioni contenute in questi Elementi sono ben bastanti, e gioverà loro, senza alcun dubbio, assai più lo studiare da capo a fondo questo libretto, che il trascinarsi, come troppo sovente succede, con istento e con noia, pei primi libri di altri trattati, ottimi in se stessi, ma troppo ardui e troppo estesi per un primo studio elementare. Nell'indice delle materie sono ripetute tutte le definizioni, e le proposizioni principali dimostrate nel testo: quest'indice, che ho procurato di rendere quanto ho saputo più compiuto, riuscirà di somma utilità a chi se ne saprà valere come di un filo, che lo guidi nel ricalcare le proprie traccie, e nel riepilogare lo studio fatto.

La Geometria, come ogni altra scienza, e più che ogni altra scienza, malamente s'impara col solo sentirne dimostrare e col ripeterne in termini generali le verità, senza farne frequenti applicazioni: queste sole possono far comprendere pienamente il significato e l'uso delle proposizioni dimostrate. Egli è dunque di tutta necessità a voler fare in questo insegnamento verun frutto, che i professori, non contenti alla nuda esposizione del testo, qual ch'esso sia, lo vadano continuamente commentando, col proporre agli alunni quistioni svariate, da risolversi con costruzioni grafiche diligentemente condotte, o con computi numerici accuratamente riscontrati. Oltre alla misura dei terreni, che forma direi quasi l'ordito della tela tessuta dal Clairaut, le arti meccaniche somministreranno, per poco che altri ne vada in cerca, infinito numero di esempli atti ad illustrare le verità geometriche, ed a renderne per così dire palpabile l'utilità.

C. I. G.

PREFAZIONE DELL'AUTORE

Quantunque la Geometria sia per se stessa astratta, convien nondimeno confessare, che le difficoltà che incontrano coloro che cominciano ad applicarvisi, provengono il più delle volte dalla maniera con cui essa viene insegnata ne' libri elementari. Si suol cominciare con un gran numero di definizioni, di postulati, di assiomi e di principii preliminari, i quali non prometton altro al lettore che cose molto aride e noiose. Le proposizioni che vengono dopo non aggirandosi sopra argomenti interessanti, ed essendo per altra parte difficili a concepirsi, ne segue comunemente che i principianti si stancano o si disgustano prima di avere acquistata veruna idea distinta di ciò che si vuol loro insegnare.

Per temperare l'aridità naturale dello studio della Geometria, alcuni Autori hanno creduto che potesse bastare di esporre dopo ciascuna proposizione essenziale *l'uso che può farsene in pratica: così facendo dimostrano essi bensì l'utilità della Geometria, ma senza agevolarne di molto lo studio. Poichè ciascheduna proposizione precedendo alla indicazione dell'uso ch'essa può avere, la mente perviene solo alle idee sensibili dopo aver incontrata la fatica di concepire le idee astratte.*

Alcune riflessioni che io ho fatte sull'origine della Geometria mi dànno speranza di poter cansare questi inconvenienti, e di rendere più interessanti insieme e più intelligibili ai principianti le verità geometriche. Io ho considerato che questa scienza, come tutte le altre, debb'essersi formata per gradi; che verisimilmente la necessità è stata quella che ha fatto fare in essa i primi passi, e che questi primi passi non possono essere superiori alle forze de' principianti; poichè da principianti appunto sono stati fatti.

Preoccupato da questo pensiero, io mi son proposto di rintracciare ciò che può avere dato origine alla Geometria; ed ho procurato di spiegarne i principii con un metodo così naturale, che possa supporsi essere stato quello stesso dei primi inventori; in modo tuttavia di evitare tutti i falsi tentativi ch'essi hanno necessariamente dovuto fare.

La misura dei terreni mi è paruta la cosa più atta a far iscoprire le prime proposizioni della Geometria; e tale è in fatti l'origine di questa scienza; poichè Geometria significa misura dei terreni. *Alcuni Autori pretendono che gli Egiziani, vedendo continuamente i* *limiti de' loro poderi distrutti dalle inondazioni del Nilo, gettassero i primi fondamenti della Geometria, cercando mezzi di determinare esattamente il sito, l'estensione, la figura delle loro tenute. Ma quando ancora non volessimo prestar fede a questi Autori, potremmo noi dubitare che ne' primi tempi gli uomini non abbiano cercato metodi per misurare e per spartire le loro terre? Volendo poi perfezionare questi metodi, le ricerche particolari li hanno condotti a poco a poco a ricerche più generali; e finalmente coll' indagare le relazioni che passano fra grandezze di qualunque specie, formarono essi una scienza di oggetto ben più vasto di quello che si erano da principio proposto, ed alla quale conservarono tuttavia il nome che fin dalla sua origine le avevano imposto.*

Per seguire in quest'opera una via simile a quella degli inventori, io procuro di far tosto scoprire dai lettori i principii dai quali può dipendere la semplice misura de' terreni e delle distanze accessibili od inaccessibili ecc. Passo poi ad altre ricerche, le quali hanno tanta analogia colle prime, che la curiosità, naturale a tutti gli uomini, dee portarli a fermarvisi, e giustificando poi questa curiosità con qualche applicazione utile, fo passare così successivamente a rassegna quanto la Geometria elementare ha di più interessante.

Non si può negare, a parer mio, che questo metodo non sia atto, se non altro, ad incoraggiare coloro, ai quali potrebbe venir a noia l'aridità delle verità geometriche nude di applicazioni. Ma io spero ch'esso avrà *ancora quest'altra utilità ben più importante, di avvezzar cioè la mente a cercare e scoprire nuove cose. E perciò appunto mi astengo dall'esporre le proposizioni sotto forma di teoremi; cioè di proposizioni nelle quali si dimostra questa o quella verità, ma senza dar a vedere come si sieno potute scoprire.*

Se i primi scrittori di matematiche hanno presentate così le loro scoperte a guisa di teoremi, ciò hanno essi fatto senza dubbio per rendere più pellegrine le loro produzioni, o per isfuggire la fatica di riprender la serie delle idee che li avevano guidati nelle loro ricerche. Checchè ne sia, mi è sembrato assai miglior consiglio il tenere i miei lettori continuamente occupati nel risolvere problemi, cioè nel cercare i mezzi di fare qualche operazione o di scoprire qualche verità sconosciuta, determinando la relazione che passa tra certe grandezze date, ed altre grandezze incognite che occorre determinare. Seguendo questa via i principianti scorgono, a ciascun passo, qual è la ragione che determina l'inventore; ed essi vengono così ad acquistare più facilmente lo spirito d'invenzione.

Mi si opporrà forse che in qualche luogo di questi Elementi io dia troppo peso alla testimonianza degli occhi, poco curando il rigore delle dimostrazioni. Io prego coloro, che fossero per farmi un tale rimprovero, ad osservare ch'io passo così leggermente sopra quelle sole proposizioni, la verità delle quali si manifesta da sè, per poco ch'altri le consideri. Io pratico specialmente così sul principio, ove più spesso s'incontrano *proposizioni di questa fatta, perchè ho osservato, che coloro che hanno genio per la Geometria, volentieri vi si esercitano intorno; ed al contrario se ne distolgono, allorchè altri li opprime con dimostrazioni, per così dire, inutili.*

Niuno farà le maraviglie che Euclide prenda a dimostrare che due circoli che si tagliano non hanno lo stesso centro; che un triangolo contenuto dentro di un altro, ha la somma de' suoi lati più piccola che quella de' lati del triangolo nel quale è compreso. Questo Geometra aveva da convincere sofisti ostinati, che ponean loro gloria nel ripugnare alle verità più manifeste. E bisognava dunque che allora la Geometria avesse, come la Logica, il soccorso degli argomenti in forma per chiudere la bocca alle vane opposizioni. Ma le cose han mutato aspetto. Ogni ragionamento speso, dove basta il buon senso, è opera gittata, e non vale che ad oscurare la verità, ed a tediare i lettori.

Mi si potrebbe opporre ancora di aver tralasciate parecchie proposizioni che si sogliono comprendere negli Elementi, e di attenermi per le proporzioni alle sole cose principali e fondamentali.

A questo io rispondo, che si trova in questo trattato tutto ciò che giova pel mio disegno; che le proposizioni da me tralasciate sono quelle che non possono per se medesime essere di alcuna utilità, e niente conferiscono ad agevolare l'intelligenza delle altre che sono necessarie a sapersi. Quanto alle proporzioni poi, ciò ch'io ne dico dee bastare per far comprendere le proposizioni *elementari che da esse dipendono. Questo è argomento che tratterò più ampiamente negli Elementi d'Algebra che sto per dar fuori.*

Finalmente, avendo scelto la misura de' terreni per predisporre i principianti a questo studio, degg'io, per avventura, temere che si confondano questi Elementi co' soliti trattati di Geometria pratica? In questo errore non cadrà chi rifletta che la misura de' terreni non è il vero argomento di questo libro; ch'io me ne valgo solo come di occasione per iscoprire le principali verità geometriche. Avrei potuto medesimamente risalire a queste verità, esponendo la storia della fisica, dell'astronomia, o di qualsivoglia altra parte delle matematiche. Ma allora la moltitudine delle idee straniere che si sarebbero incontrate per via, avrebbe come affogate le idee geometriche, alle quali sole io doveva tener rivolta la mente del lettore.

ISTRUZIONI

per l'insegnamento di Matematiche nelle scuole tecniche

Il fine dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche è quello di fornire ai giovanetti in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri.

Nell'aritmetica è d'uopo che gli scolari acquistino facilità e sicurezza in ogni sorta di conteggio e nella interpretazione delle forme algebriche; cioè nella intelligenza delle operazioni che vi sono indicate e nella conseguente traduzione della formola in numeri. In particolar modo l'insegnante insisterà nel far ben comprendere i concetti di rapporti e di proporzionalità diretta ed inversa, acciocchè gli scolari posseggano un criterio certo per giudicare i casi, in cui è applicabile la regola del tre.

Quanto alle regole pratiche del conteggio non occorre che siano rigorosamente dimostrate. Se il maestro crede che le ragioni teoriche possano essere intese da tutti o dalla maggior parte, le esponga; in caso contrario se ne astenga e si restringa a dichiarare la regola, accompagnandola con numerosi e svariati esercizi.

Nel terzo anno si eserciteranno gli scolari a risolvere problemi numerici relativi a questioni di geometria, mirando principalmente ad applicare il calcolo decimale, la regola del tre ed il sistema metrico.

Nella geometria, mediante il metodo grafico-intuitivo, *il docente potrà dare semplici dimostrazioni del maggior numero delle proposizioni richieste dalle indicazioni.* Questo insegnamento dovrà essere accompagnato da un continuo esercizio di disegno lineare geometrico, cioè il maestro farà sì che gli scolari disegnino sulla carta con precisione le figure che egli delinea sulla tavola, e li abituerà a seguire sul disegno i ragionamenti che egli stima opportuno di fare. I quali ragionamenti del resto si ridurranno a ricavare dalla figura disegnata la prova intuitiva delle proprietà che le competono. Per tal modo la costruzione insegnata per la soluzione di un problema (come sarebbe quello di condurre la perpendicolare ad una retta da un punto dato fuori di essa) può condurre intuitivamente allo scoprimento di altre verità (luogo dei punti equidistanti da due dati, proprietà del triangolo isoscele, ecc.). *Non importa che la via battuta per dimostrare una proposizione sia rigorosamente scientifica;* importa bensì che gli scolari acquistino la cognizione di quella proposizione e la persuasione della sua verità.

La proporzionalità degli angoli agli archi; i rapporti fra le superficie di due rettangoli, la proporzionalità dei segmenti fatti su due lati di un triangolo da una retta parallela al terzo; la somiglianza dei triangoli e dei poligoni; i rapporti fra le loro aree, sono tutte proposizioni che si riducono col disegno ad evidenza quasi materiale, purchè il docente si restringa, come conviene, alla considerazione di rapporti commensurabili. Del teorema di Pitagora e di altre proposizioni analoghe si conoscono dimostrazioni intuitive: il docente le preferirà a quelle che si usano nell'insegnamento razionale della geometria.

Vi sono poi nel programma alcune parti (p. es., le misure relative al circolo, ai poliedri, ai corpi rotondi), dove nè è possibile seguire il metodo intuitivo, nè l'età e la coltura degli alunni consentono un procedimento rigoroso. Ivi basterà che questi apprendano l'enunciamento delle regole pratiche e le sappiano applicare speditamente.

Per ultimo si raccomanda al docente di aver sempre speciale riguardo all'utilità pratica delle cognizioni che vuole impartire; non lasci mai i suoi scolari inoperosi, ma sempre li tenga occupati o nelle operazioni grafiche o nei calcoli numerici; e non trascuri di far loro conoscere i metodi speciali di abbreviazione, gli stromenti ed i ripieghi, dei quali si fa effettivo uso sul terreno, o nelle operazioni delle arti e dei mestieri.

ELEMENTI DI GEOMETRIA

PARTE PRIMA

DEI MEZZI CHE DEBBONO NATURALMENTE ESSERE STATI IMPIEGATI PER LA MISURA DEI TERRENI

Prima d'ogni altra cosa pare che gli uomini han dovuto misurare le lunghezze e le distanze.

Come si misura una lunghezza.

I. Per misurare una lunghezza qualunque, una certa qual geometria naturale ci suggerisce questo spediente; cioè di confrontare la lunghezza che si vuol misurare con una lunghezza conosciuta, riportando questa su quella quante volte può esservi contenuta.

Linea retta è la più breve che possa condursi fra due punti.

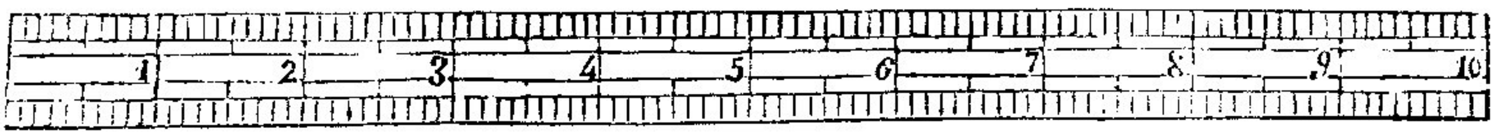
Come si misura la distanza fra due punti.

II. Per misurar poi la distanza che passa tra due punti, bisogna tirare una linea retta dall'uno all'altro punto, e su questa linea riportare la misura conosciuta: poichè tutte le altre linee che potrebbero condursi fra quei due punti, facendo necessariamente un deviamento più o meno grande, sono più lunghe che la linea retta, la quale non fa deviamento alcuno.

* **Unità di misura.** La lunghezza che si sceglie per confronto di tutte le altre dicesi *unità di misura*, od anche semplicemente *misura.* Presso di noi l'unità di misura è il *metro.*

Summultipli e multipli del metro. Occorrendo sovente di dover misurare lunghezze minori di un metro, e talora anche piccolissime, si agevolano i confronti impiegando, non il metro intero, ma una *parte aliquota* di esso, come un decimo, un centesimo, un millesimo di un metro.

La decima parte del metro	dicesi	Decimetro
La centesima	»	Centimetro
La millesima	»	Millimetro



La figura qui impressa rappresenta la vera lunghezza del *decimetro*, diviso in dieci centimetri ed in cento millimetri.

Quando all'incontro si dee misurare una lunghezza molto grande, si prende per unità un *multiplo* del metro, come a dire una linea lunga dieci, cento o mille metri.

Una misura di	10	metri	dicesi	Decametro
»	100		»	Ettometro
»	1000		»	Chilometro
»	10000		»	Miriametro

Così una lunghezza di 3458 metri può anche esprimersi dicendo che contiene tre chilometri, quattro ettometri, cinque decametri e otto metri.

Così ancora, secondo la notazione delle frazioni decimali, una lunghezza di metri 0,748, contiene sette decimetri, quattro centimetri ed otto millimetri.

Come s'indicano le misure decimali.

1. La misura *metro* s'indica colla lettera minuscola *m.*, il *decimetro*, il *centimetro* e il *millimetro* s'indicano rispet-

tivamente colle lettere *d.m.*, *c.m.*, *m.m.*; ed il ***Decametro***, l'***Ettometro***, il ***Chilometro*** e il ***Miriametro***, rispettivamente colle altre lettere ***D.m.***, ***E.m.***, ***C.m.***, ***M.m.***

Canne metriche.

2. Sono due canne ben diritte, della lunghezza ciascuna di tre metri, e divise in decimetri ed in centimetri.

Si usano quando occorre di misurare grandi distanze, come p. es., linee rette tracciate sul terreno, e si adoperano nel modo seguente: si mette una delle due canne nella direzione della linea da misurare con una sua estremità sopra una estremità della linea stessa; poscia mettesi a contatto coll'altra estremità di essa e secondo la stessa direzione l'altra canna; quindi, alzata la prima, la si porta all'altra estremità della seconda e sempre nella direzione della linea da misurare, e così si continua per tutta quella lunghezza. Moltiplicando per tre il numero delle canne portate sulla linea si ottiene il numero dei metri della sua lunghezza.

Superficie piana o piano.

3. Chiamasi *superficie piana* o *piano* quella superficie su cui collocata in qualsivoglia direzione una linea retta, questa la tocca sempre con tutti i suoi punti.

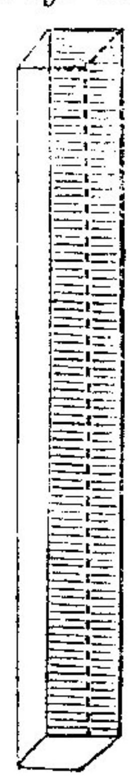
Regolo o riga.

4. Chiamasi *riga* quello strumento di legno o di metallo, di superficie piana, sottile e che ha i due lati più lunghi ben diritti. Colla riga si tirano le linee rette nel modo che tutti conoscono (fig. 1).

Quando la riga ha la sua grossezza uguale alla sua larghezza e i suoi quattro spigoli sono tutti diritti, prende più particolarmente il nome di *regolo* (fig. 2).

Fig. 1.

Fig. 2.



Modo di verificare una riga.

5. Tracciata lungo un lato della riga una linea sopra un foglio di carta, si posano sopra quella linea uno dopo l'altro gli spigoli

della riga; questi, se la riga è perfetta, dovranno sempre toccare con tutti i loro punti quella linea stessa.

Come si verifica un piano.

6. Presa una riga già verificata, si ponga con qualunque dei suoi lati e in qualsivoglia direzione sopra il piano; se questo è perfetto, quel lato deve toccarlo con tutti i suoi punti.

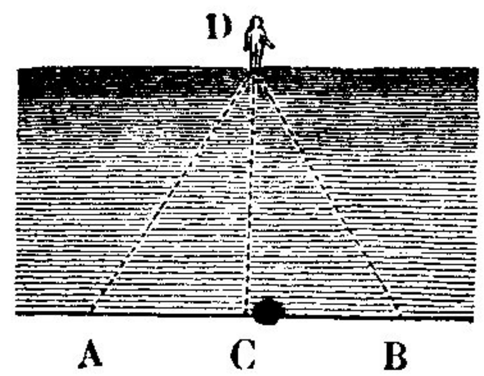
Quando il piano è verificato, esso stesso può servire alla sua volta a verificare i regoli con un'operazione affatto uguale alla precedente.

Perpendicolare.

Una retta la quale cadendo sopra un'altra non pende nè a dritta nè a sinistra, dicesi *perpendicolare*.

La perpendicolare misura la distanza di un punto da una linea.

Fig. 3.



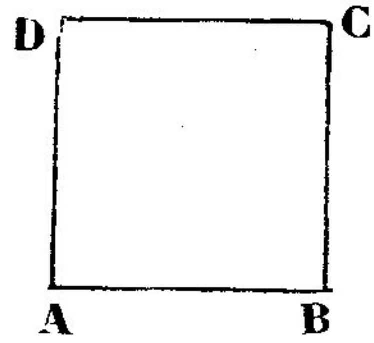
III. Accade pur sovente di dover misurare la distanza di un punto da una linea. Per esempio un uomo posto in D (fig. 3) sulla riva di un fiume, vuol sapere quanta sia la distanza del luogo dove egli sta dall'altra riva AB. È chiaro che in questo caso, per misurare la distanza cercata, bisogna prender la più corta di tutte le linee rette DA, DB ecc., che si posson tirare dal punto D alla retta AB. Ora è facile il vedere che questa linea più corta è la DC, che si suppone non pendere nè verso A, nè verso B. Questa, che chiamasi perpendicolare, è dunque quella sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC, del punto D dalla retta AB. Ma è pur manifesto, che per posare questa misura sulla linea DC, è necessario saper segnare questa linea sul terreno. È dunque necessario conoscere il modo di tirare perpendicolari.

Rettangolo è figura chiusa da quattro lati fra loro perpendicolari a due a due.

Quadrato è rettangolo i cui lati sono tutti uguali.

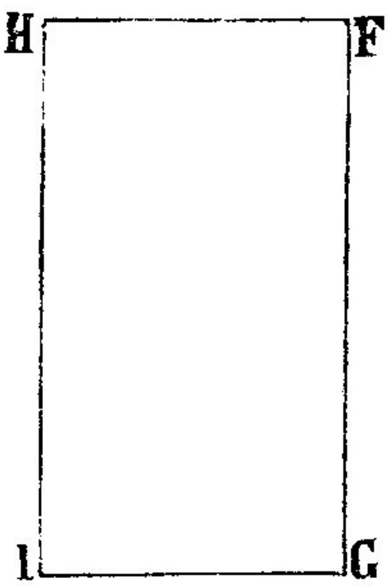
IV. Egual bisogno s'incontra in infiniti altri casi. Per esempio, si sa che a cagione della regolarità delle figure, quali sono ABCD, FGIH, chiamate *rettangoli*, e chiuse da quattro lati perpendicolari tra loro, si suol dare questa forma alle case, alle lor pareti interiori, a' giardini, alle camere, a' parati de' muri, ecc.

Fig. 4.



La prima di queste figure, cioè ABCD (fig. 4) che ha i quattro lati eguali, si chiama comunemente *quadrato*. L'altra FGIH (fig. 5), che non ha che i lati opposti eguali, ritiene il nome di *rettangolo*.

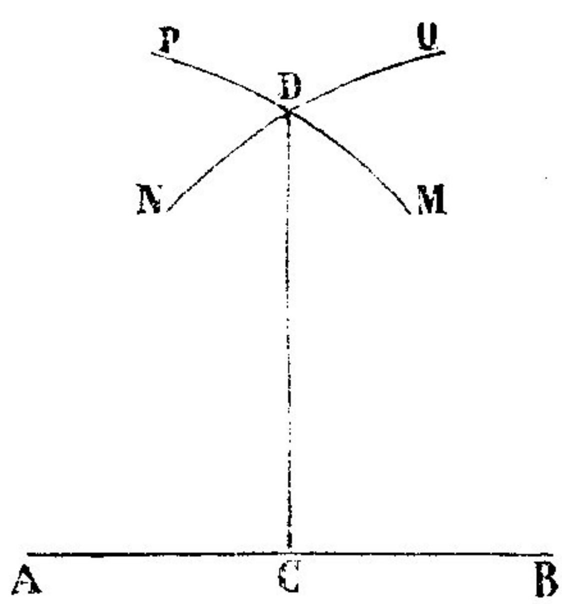
Fig. 5.



Come s'innalza una perpendicolare.

V. Quando si ha da tirare una perpendicolare, questa o dee *abbassarsi* sulla retta data da un punto preso fuori della retta stessa, o dee *innalzarsi* da un punto preso sulla retta medesima.

Fig. 6.



Se dal punto C (fig. 6), preso sulla linea AB, si voglia alzare la linea CD perpendicolare ad AB, bisognerà che questa linea non penda nè verso A, nè verso B.

Supponendo primieramente che C stia ad ugual distanza da A e da B, e che la retta CD non penda da alcun lato, è chiaro che ciascheduno dei punti di questa linea sarà egualmente distante da A e da B. Basterà dunque trovare un punto qualunque D, tale, che la sua distanza dal punto A sia uguale alla sua distanza dal punto B; perchè allora tirando per C, e per questo punto

D una linea retta CD, questa linea sarà la perpendicolare cercata.

Per avere il punto D, si potrà andar provando e riprovando, e quasi cercando a tentone: ma questa maniera di operare per via di tentativi non dà veruna soddisfazione all'intelletto, il quale si contenta de' soli metodi che gli lascian comprendere la ragione per cui conducono a far iscoprire ciò che si cerca. Ecco quello che si dee seguire nel caso presente:

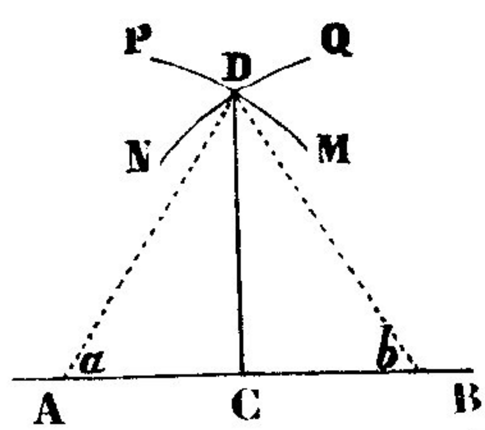
Si prenda una comune misura, per esempio una cordella se si opera sul terreno, od un compasso di una determinata apertura se l'operazione si fa sulla carta.

Presa questa misura si fissi nel punto A l'estremità della cordella o una punta del compasso, e facendo girare l'altra punta di questo o l'altra estremità della cordella si descriva l'arco PDM. Poi senza cangiar misura si faccia la stessa operazione al punto B, e si descriva l'arco QDN; questo col tagliare il primo arco in D, darà il punto cercato.

Infatti il punto D appartenendo egualmente ai due archi PDM, QDN, descritti con una stessa misura, la sua distanza del punto A sarà uguale alla distanza dal punto B. Dunque CD non penderà nè verso A, nè verso B. Dunque questa linea sarà perpendicolare sopra AB.

Se il punto C (fig. 7) non si trova ad ugual distanza da A e da B, bisogna prendere due altri punti *a* e *b* egualmente lontani da C, e servirsi di questi in luogo di A e di B, per descrivere gli archi PDM, QDN.

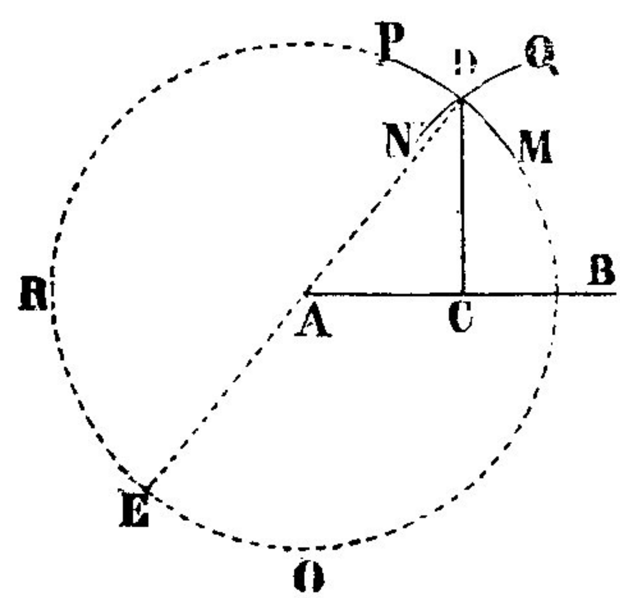
Fig. 7.



* **Obliqua**. Ogni retta come D*a* (fig. 7), che non è perpendicolare sopra un'altra retta AB, dicesi *obliqua:* il metodo già insegnato per condurre una perpendicolare ad una retta data, riposa dunque sul principio che le *oblique* egualmente lontane dalla perpendicolare hanno la stessa lunghezza.

VI. Se una delle tracce testè segnate col compasso o con la cordella, per esempio PDM (fig. 8) fosse stata continuata in O, in E ed in R, ecc., finchè ella ritornasse al medesimo punto P, la traccia tutta intera si chiamerebbe circonferenza di circolo o semplicemente circonferenza.

Fig. 8.



Se si descrive soltanto una parte PDM della circonferenza, questa parte si chiama arco del circolo.

Il punto fisso A si chiama centro dell'arco del circolo.

E l'intervallo AD il suo raggio.

Ogni retta, come DAE, che passi pel centro A e che termini da entrambe le parti alla circonferenza, chiamasi diametro. È chiaro che una tal linea è il doppio del raggio: e perciò il raggio si chiama talora semidiametro.

Dunque:

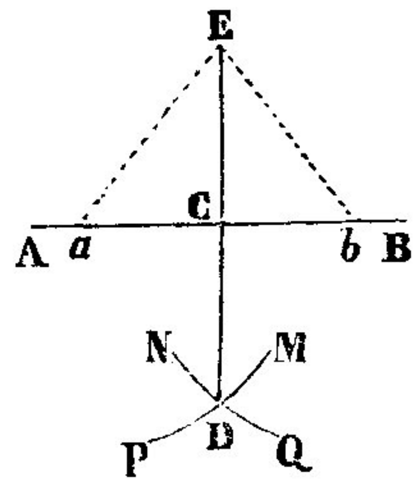
* **Circonferenza di circolo** è una linea curva di cui tutti i punti sono ugualmente lontani da un punto che dicesi *centro*.

Raggio è la distanza fra la circonferenza ed il centro; e due raggi per diritto formano un *diametro.*

Arco è una parte della circonferenza.

Come si abbassi una perpendicolare.

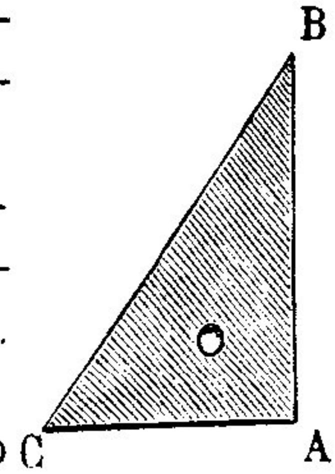
Fig. 9.



VII. La maniera che abbiamo insegnata per alzare una perpendicolare sopra una linea AB, ci conduce a trovar pure il modo di calare una perpendicolare da qualunque punto E (fig. 9), preso fuori di questa linea. Fissata in E l'estremità della cordella o la punta del compasso, e con un medesimo intervallo E*b*, si segneranno due punti *a* e *b* sulla linea AB; si cercherà poi, come nell'articolo precedente, un altro punto D, il quale sia ad egual distanza dal punto *a* e dal punto *b*; e per questo punto e per E si tirerà la retta DE, la quale avendo ciascuna delle sue estremità egualmente distante da *a* e da *b*, non penderà più verso l'uno di questi punti che verso l'altro, epperò sarà perpendicolare ad AB.

7. **Squadra** dicesi quella piccola tavoletta di legno sottile e di forma triangolare, avente due spigoli perpendicolari l'uno all'altro (fig. 10).

Fig. 10.

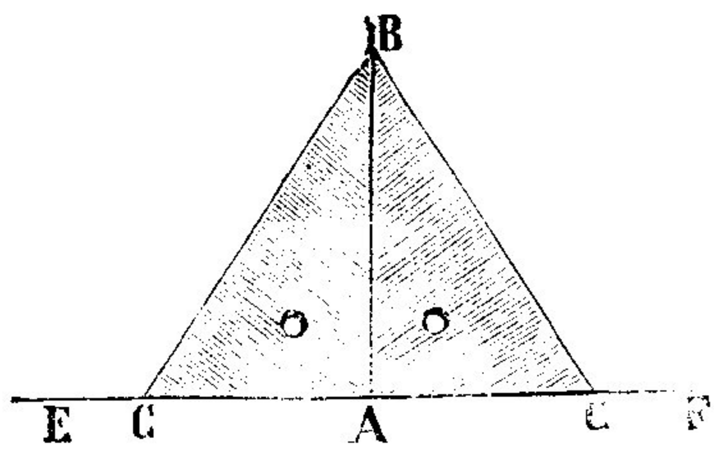


I due spigoli perpendicolari BA, CA, diconsi i *cateti della squadra*, e il terzo spigolo BC più lungo, chiamasi la *ipotenusa*.

Come si verifica una squadra.

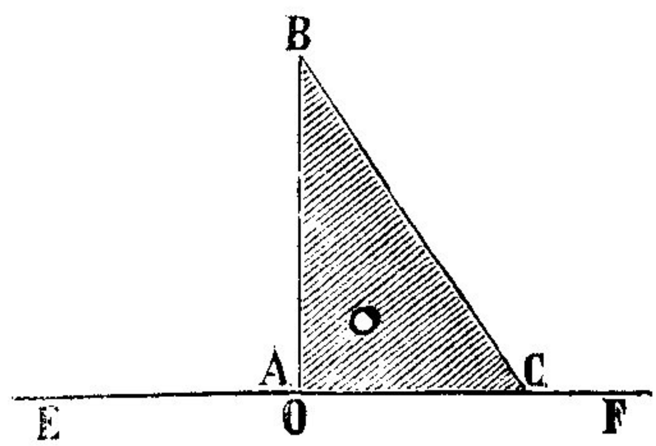
8. Prima di tutto si provano uno dopo l'altro i suoi tre spigoli, nel modo indicato al n°. 5, per verificare se sono diritti.

Fig. 11.



Poscia si prova se i due cateti sono perpendicolari l'uno all'altro nel modo seguente (fig. 11). Portato il cateto AC della squadra lungo una retta EF dalla parte di F, si tira una linea retta lungo l'altro cateto BA; quindi, levata la squadra da quella posizione, si mette in A lo stesso cateto AC lungo la stessa retta EF dalla parte di E, e si tira un'altra linea retta lungo BA. Se la squadra è perfetta le due linee rette devono confondersi in una sola.

Fig. 12.

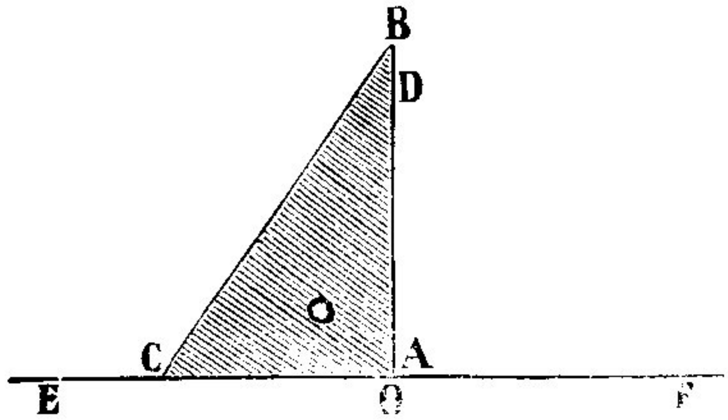


Condurre una perpendicolare mediante una squadra.

9. 1° Sia da innalzare dal punto O della EF una per-

pendicolare alla stessa EF (fig. 12). Ponesi in O la punta A della squadra, in cui concorrono i due cateti, e collocato il cateto AC nella direzione della EF, tirasi lungo l'altro cateto la linea retta BO, la quale sarà la perpendicolare domandata.

Fig. 13.



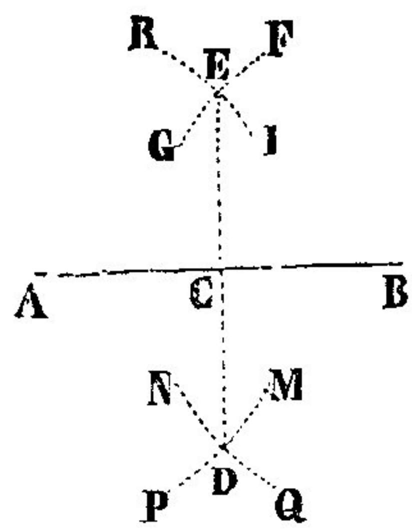
2° Sia da abbassare da D sopra la EF una perpendicolare (fig. 13). Posto il cateto CA della squadra sulla direzione EF, movesi la squadra lungo EF fino a che l'altro cateto BA tocchi il punto D, e tirasi lungo quel cateto la DO, la quale sarà la perpendicolare richiesta.

Come si verifica mediante la squadra se due rette EF, DO *sono perpendicolari.*

10. Posta la squadra con un suo cateto CA sulla direzione EF, si fa scorrere quel cateto lungo EF fino a che la punta A arrivi al punto O; se le due rette DO, EF sono perpendicolari, la DO deve trovarsi tutta lungo l'altro cateto BA.

Come si divide una retta in due parti uguali.

Fig. 14.



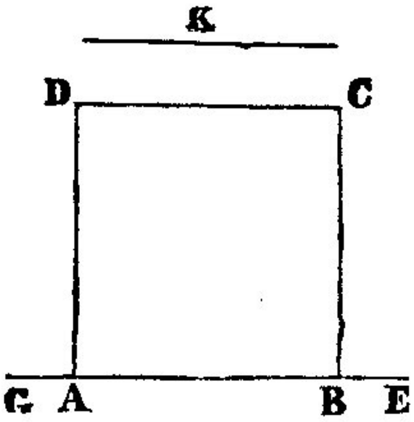
VIII. Dall' operazione precedente si ricava la soluzione di un nuovo problema.

Per dividere una linea retta AB (fig. 14) in due parti uguali, dai punti A e B presi come centri, e con un'apertura di compasso qualunque, si descrivano gli archi REI, GEF; dai medesimi centri e con la medesima apertura o con qualunque altra, si descrivano gli archi PDM, QDN; e la linea ED, la quale congiungerà i due punti d'intersezione E e D, dividerà la retta AB in due parti uguali AC e CB.

Come si costruisce un quadrato di cui sia dato il lato.

IX. Trovata la maniera di tirare delle perpendicolari, è facilissimo il servirsene per descrivere quelle figure che si chiamano rettangoli e quadrati, delle quali si è parlato nell'articolo IV. Si vede facilmente che per fare un quadrato ABCD (fig. 15), i cui lati sieno eguali a una linea data K, bisogna prendere sulla retta GE un intervallo AB eguale a K; poi a' punti A e B alzare (art. V) le perpendicolari AD, BC, ciascuna eguale a K, e per ultimo tirare DC.

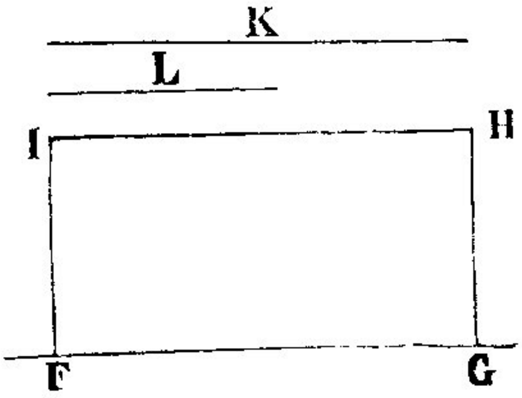
Fig. 15.



Come si costruisca un rettangolo di cui si conoscano la lunghezza e la larghezza.

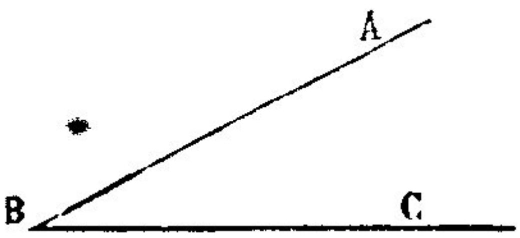
X. Se si vuol descrivere un rettangolo FGHI (fig. 16), di cui la lunghezza sia K, e la larghezza L, si prenderà FG uguale a K; si alzeranno poi le perpendicolari FI, GH ciascuna eguale a L, e finalmente si tirerà HI.

Fig. 16.



11. **Angolo.** La inclinazione di una retta sopra un'altra dicesi *angolo;* le due rette AB e CB che concorrono in B sono i due lati o le due gambe dell'angolo e il punto B n'è il vertice. S'indica l'angolo leggendo le tre lettere e mettendo nel mezzo quella al vertice: l'angolo ABC o anche l'angolo CBA (fig. 17)

Fig. 17.

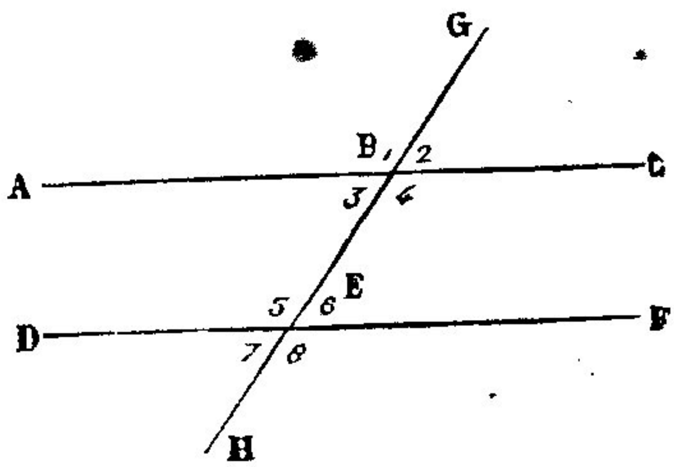


12. **Parallele**. Due rette collocate nello stesso piano, e che prolungate anche all'infinito non s'incontrano mai, diconsi *parallele.*

13. *Come si denominano gli angoli formati da due parallele tagliate da una terza.*

Due parallele AC, DF tagliate da una retta GH nei punti B ed E formano in que' due punti *otto angoli,* i quali secondo la loro posizione, presi a due a due, prendono i seguenti nomi (fig. 18):

Fig. 18.



1° *Interni dalla stessa parte.* Sono gli angoli 4 e 6; 3 e 5.

2° *Esterni dalla stessa parte.* Sono gli angoli 2 e 8; 1 e 7.

3° *Interni esterni dalla stessa parte.* Sono gli angoli 2 e 6; 4 e 8; 1 e 5; 3 e 7. Questi angoli si dicono anche *corrispondenti.*

4° *Alterni interni.* Sono gli angoli 3 e 6; 4 e 5.

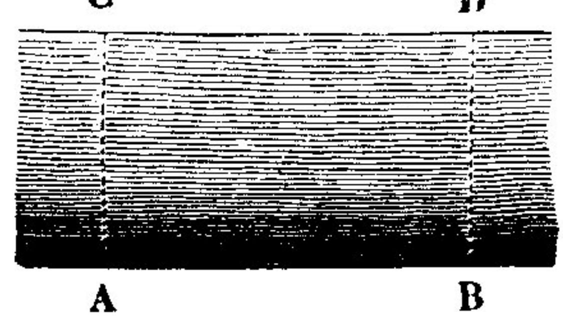
5° *Alterni esterni.* Sono gli angoli 2 e 7; 1 e 8.

Le parallele sono rette da per tutto egualmente distanti.

Come si conduca per un punto dato una parallela ad una retta data.

XI. Nel fare alcuni lavori, come parapetti, canali, strade ecc., occorre di tirare linee rette *parallele,* cioè tali, che la loro distanza sia da per tutto misurata da perpendicolari di eguale lunghezza. Or per menare queste parallele il metodo più facile parmi quello, di cui ci siam serviti per descrivere rettangoli. Sia AB (fig. 19), per esempio, un lato di un canale, e sia CA la larghezza che gli si vuol dare; o per proporre il quesito d'una maniera più geometrica e più generale: suppongasi, che si voglia tirare per C la retta CD parallela ad AB; si prenderà a piacimento un punto B sulla linea AB, e si opererà, come se avendo la base AB e l'altezza AC, si volesse fare un rettangolo ABCD. Così facendo le linee CD, AB prolungate all'infinito, saranno sempre parallele; ovvero, quel che è l'istesso, non s'incontreranno mai tra loro.

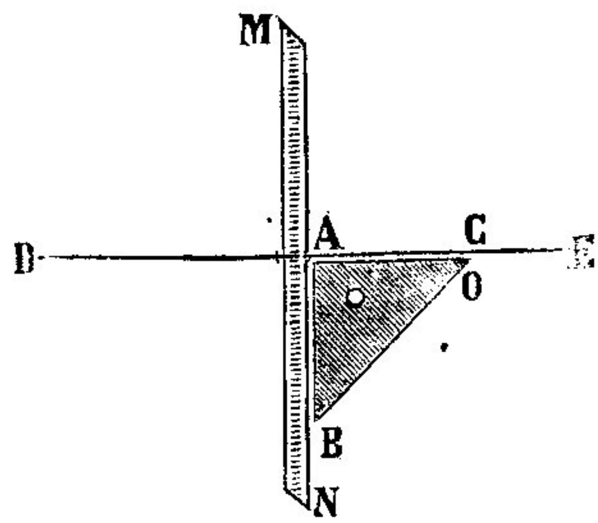
Fig. 19.



Condurre una parallela ad una retta mediante la squadra

14. 1° Ponesi un cateto AC della squadra nella direzione della retta DE; quindi, appoggiato contro l'altro cateto AB un regolo MN, si fa scorrere lungo di esso la squadra; fermata la squadra ad un punto qualunque del suo movimento e tirata una retta lungo il cateto AC, essa sarà parallela a DE (fig. 20).

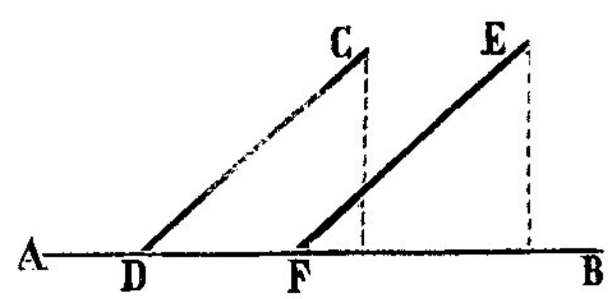
Fig. 20.



15. E se si volesse che la parallela passasse per un punto dato qualunque, p. es., O, dovrebbesi muovere la squadra lungo il regolo fino a che il cateto AC tocca quel punto O, e quindi condurre una retta lungo il cateto AC.

2° Posto un cateto della squadra (fig. 21) per diritto sulla AB, si conduca lungo la sua ipotenusa FE; quindi mossa la squadra lungo BA fino in D si conduca l'altra retta DC, la quale sarà parallela alla DC.

Fig. 21.



Gli angoli corrispondenti sono uguali.

16. È evidente che la inclinazione della FE verso l'AB deve essere la stessa che quella della DC verso la stessa AB; è evidente cioè che gli angoli CDB, EFB (che non sono altro che uno degli angoli della squadra) devono essere uguali; e poichè quelli sono gli *angoli corrispondenti*, è vera la proposizione enunciata.

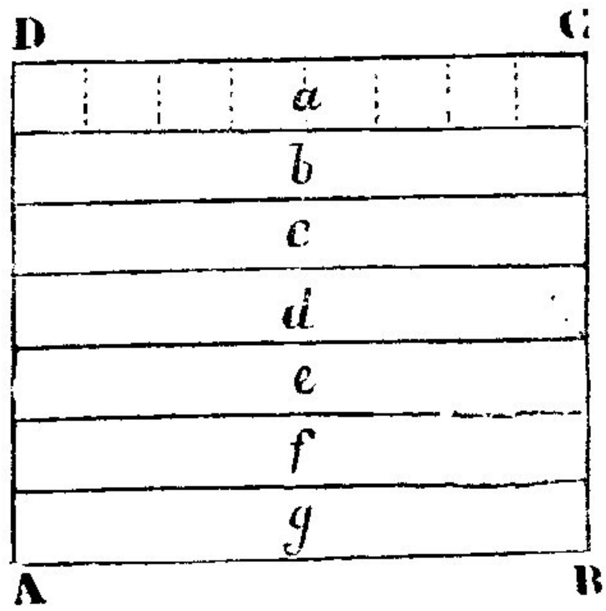
La superficie di un rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

XII. La regolarità delle figure rettangole fa sì ch'esse vengano spesso in uso, come già abbiam detto, epperò occorre sovente di conoscere la loro grandezza; si domanderà, per esempio, quanta tappezzeria vi voglia per parare una camera; ovvero quanti quadrelli sian necessarii per ammattonare una casa che abbia forma di rettangolo ecc.

Per ciò, ognun vede, che il mezzo più semplice e più naturale è di servirsi di una comune misura, la quale applicata più volte alla superficie che dee misurarsi, tutta successivamente la copra; il qual metodo è sostanzialmente lo stesso, di cui ci siam valsi per determinare la lunghezza delle linee.

Ora è evidente, che la comune misura delle superficie non può esser altro che una superficie, come a dire quella di un metro quadrato, di un decimetro quadrato ecc.; così dunque misurare un rettangolo viene a dir lo stesso che determinare il numero dei metri quadrati, o dei decimetri quadrati ecc., che la sua superficie contiene.

Fig. 22.



Rechiamone, per maggior chiarezza un esempio. Supponiamo che il rettangolo ABCD (fig. 22) abbia 7 metri di altezza BC, sopra una base AB di 8 metri; si potrà riguardare questo rettangolo come diviso in sette fascie, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ciascuna delle quali conterrà manifestamente 8 metri quadrati; sarà dunque il valore del rettangolo 7 volte 8 metri quadrati, cioè 56 m.q.

Ora si insegna negli elementi di aritmetica, che col moltiplicare due numeri tra di loro si viene a prendere uno di essi tante volte, quante unità sono contenute nell'altro; onde si scorge che corre una perfetta analogia tra la moltiplicazione ordinaria e l'operazione fatta per misurare il rettangolo; e che si determina il numero dei metri quadrati o dei decimetri quadrati, che la sua superficie contiene, moltiplicando il numero dei metri o dei decimetri contenuti nella sua altezza, per il numero dei metri o dei decimetri contenuti nella base. Infatti così operando si viene appunto a prendere tante volte il numero dei metri quadrati contenuti in ciascuna delle fascie in cui il rettangolo s'intende diviso, quante sono le fascie medesime: cioè, si viene a determinare il numero dei metri quadrati contenuti nel rettangolo intero.

Che s'intende per metro quadrato, per decimetro quadrato, ecc.

* Per *metro quadrato* dee intendersi la superficie di un quadrato di cui ciascun lato abbia un metro di lunghezza: similmente il *decimetro quadrato*, il *centimetro quadrato*, il *millimetro quadrato* sono quadrati che hanno per lato un decimetro, un centimetro, un millimetro rispettivamente.

Come crescano le superficie de' quadrati crescendo i loro lati.

* Ne segue che un quadrato, il quale abbia il lato doppio di quello di un altro quadrato, avrà la superficie quattro volte maggiore: se il lato d'un quadrato è tre volte quello d'un altro, la superficie è nove volte maggiore ecc., come si vede nella tavola seguente:

Lato	Superficie	Lato	Superficie	Lato	Superficie
—	—	—	—	—	—
1	1	6	36	11	121
2	4	7	49	12	144
3	9	8	64	13	169
4	16	9	81	14	196
5	25	10	100	ecc.	ecc.

Per questa ragione i numeri 1, 4, 9, 16 si chiamano i *quadrati* de' numeri 1, 2, 3, 4...; e viceversa questi si dicono le *radici quadrate* dei primi: ne risulta che per formare il quadrato di un numero convien moltiplicarlo per se stesso, e così il quadrato di 78 è 6084, perchè 78 volte 78 fanno 6084: e viceversa il 78 è la radice quadrata di 6084.

tosto viene in capo ad ognuno di rappresentare la figura ABCDE (fig. 56), che si ha da misurare, con una figura simile *abcde* (fig. 57) più piccola, nella quale verbigrazia il lato *ab* sia di 100 centimetri, se il lato AB è di 100 metri, il lato *bc* di 45 centimetri, se BC è di 45 metri e via discorrendo; e poi di conchiudere che se la superficie della figura ridotta *abcde* è di 60000 centimetri quadrati, quella della figura ABCDE deve essere di 60000 metri quadrati.

Fig. 56.

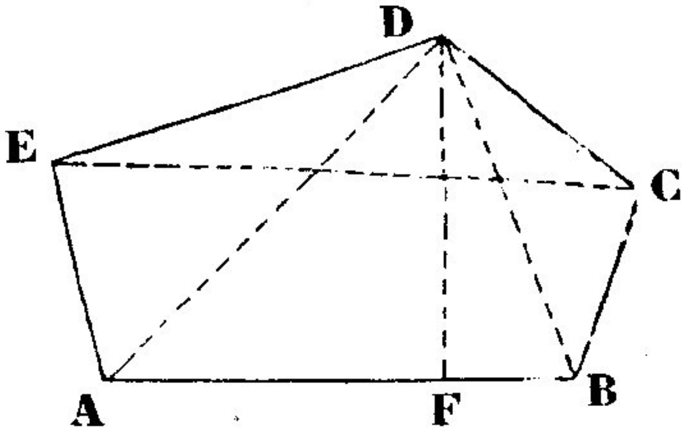
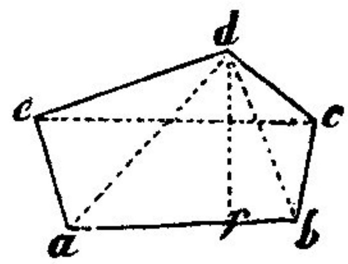


Fig. 57.



Ma prima d'andar più innanzi conviene esaminare in che consista la similitudine di due figure.

XXXIV. Per poco che vi si rifletta si riconoscerà che due figure ABCDE, *abcde* (fig. 56 e 57) per esser simili devono essere tali che gli angoli A, B, C, D, E della grande sieno rispettivamente uguali agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e* della piccola; e di più che ciascuno dei lati *ab*, *bc*, *cd* ecc. della piccola, contenga tante unità di lunghezza di una data specie, quante unità di lunghezza di un'altra specie sono contenute nel lato corrispondente AB, BC, CD ecc. della grande. Per esempio, che i lati *ab*, *bc*, *cd* ecc. contengano tanti decimetri, o centimetri, o millimetri, quanti sono i metri contenuti nei lati AB, BC, CD ecc. rispettivamente.

Che cosa s'intenda per proporzionalità de' lati nelle figure simili.

XXXV. Per esprimere questa seconda condizione, i geometri dicono essere necessario che i lati AB, BC, CD ecc. sieno proporzionali ai lati *ab*, *bc*, *cd* ecc., ovvero che il lato AB contenga *ab* nella maniera medesima che BC contiene *bc* ecc., ovvero che il lato AB sia tanto grande rispetto ad *ab* quanto è BC rispetto a *bc* ecc., o ancora che vi sia la stessa ragione o lo stesso rapporto tra AB ed *ab* che tra BC e *bc* ecc., o finalmente che AB sia ad *ab* come BC a *bc* ecc. Tutte maniere di esprimere la medesima idea, le quali bisogna rendersi famigliari, per intendere la lingua de' geometri.

Modo di costruire una figura simile ad una figura data.

XXXVI. Dopo aver veduto in che consista la similitudine di due figure, cerchiamo quale sia la maniera, che più naturalmente ci si presenta, di descrivere una figura simile ad un'altra. Fingiamo che un disegnatore debba copiare una figura riducendola nello stesso tempo dal grande al piccolo.

Fig. 58.

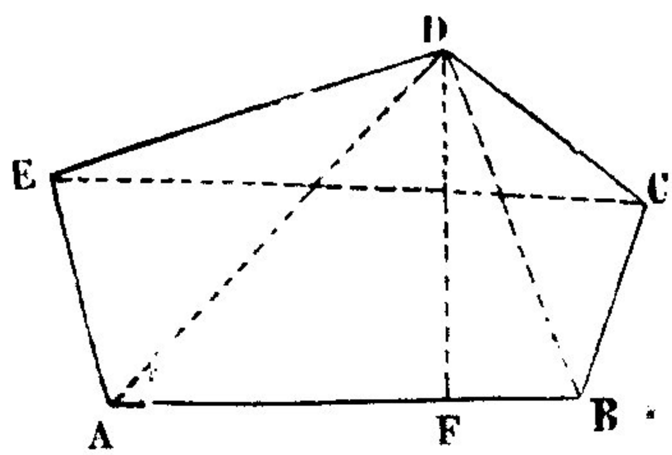
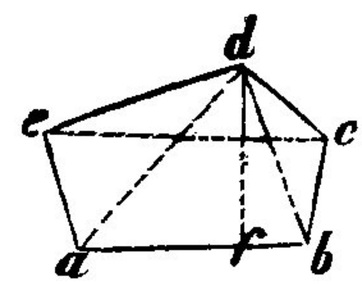


Fig. 59.



Primieramente prendendo *ab* per rappresentare la base AB della figura ABCDE che ha da copiare, egli inclinerà i lati *ae* e *bc* sopra *ab* nella medesima maniera che AE e BC sono inclinati sopra AB, osservando che le lunghezze di *ae* e *bc* sieno a quella di *ab*, come le lunghezze di AE e BC sono a quella di AB; cioè a dire, che se per esempio AE è la metà di AB, farà pure *ae* metà di *ab;* e nel modo medesimo determinerà la lunghezza di *bc* relativamente a BC.

Determinati così i punti *e* e *c*, egli tirerà due rette *ed* e *cd*, inclinate sopra *ea* e sopra *cb*, nella medesima maniera che ED e CD sono inclinate sopra EA e sopra CB; e prolungando queste linee finchè esse s'incontrino in *d*, terminerà così la figura *abcde*.

Per fare una figura simile ad un'altra non è necessario di misurare tutti gli angoli e tutti i lati.

XXXVII. Riflettendo ora a questa costruzione, si riconoscerà ch'essa non è appoggiata che sull' egualità che passa tra gli angoli E, A, B, C ed *e, a, b, c*, e sulla proporzionalità de' lati EA, AB, BC co' lati *ea, ab, bc*, e così si trova la figura compita senza che si sia fatto l'angolo *d* uguale all'angolo D, ed i lati *ed*, *cd* proporzionali a' lati ED, CD. Questa considerazione potrebbe far temere che l'angolo *d* non riuscisse veramente eguale all'angolo D, nè i lati *ed, cd* proporzionali a' lati ED, CD, e conseguentemente la figura *abcde* non si trovasse simile perfettamente alla figura ABCDE: ma questo dubbio può ben tosto dissiparlo l'esperienza: oltrechè, per poco che vi si attenda, si scorgerà che dall'egualità rispettiva de' quattro angoli E, A, B, C ed *e, a, b, c*, e dalla proporzionalità de' tre lati EA, AB, BC ed *ea, ab, bc*, risulta necessariamente l'egualità degli angoli D, *d*, e la proporzionalità de' lati ED, CD ed *ed, cd*.

Con tutto ciò, per torre ogni dubbio, facciamo vedere che tutte le condizioni richieste per la similitudine delle figure, sono necessariamente dipendenti le une dalle altre; il che ci tornerà agevole considerando i triangoli, che sono le figure più semplici, e di cui tutte le altre sono necessariamente composte: e questo esame ci condurrà a conoscere tutte le proprietà e tutti gli usi delle figure simili.

Se due angoli di un triangolo sono rispettivamente uguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo angolo del primo sarà pure uguale al terzo angolo del secondo triangolo.

Fig. 60.

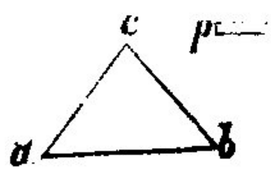
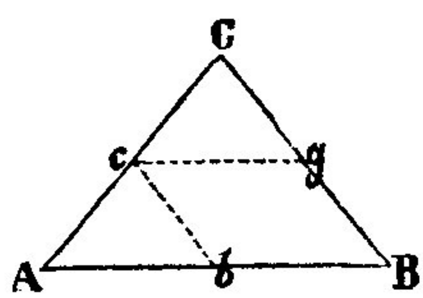


Fig. 61.



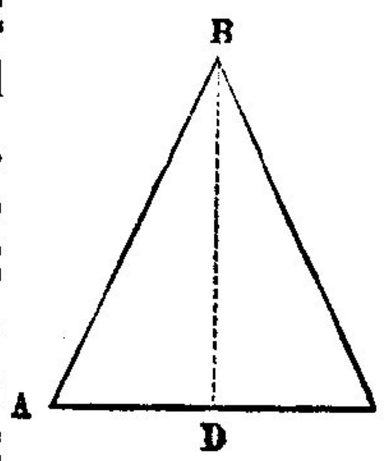
XXXVIII. Supponiamo che sulla base *ab* (fig. 60) si costruisca il triangolo *abc*, facendo gli angoli *cab*, *cba*, rispettivamente uguali agli angoli CAB, CBA del triangolo ABC (fig. 61); si può dimostrare in primo luogo, che il terzo angolo *acb* sarà uguale al terzo angolo ACB.

Sia infatti collocato il triangolo *abc* sul triangolo ABC, in modo che il punto *a* si trovi sul punto A, *ab* su AB, *ac* su AC, egli è chiaro che il lato *cb* sarà parallelo a CB. Imperocchè se prolungando il lato *cb*, esso venisse ad incontrarsi nel lato CB, ne seguirebbe che questi due lati sarebbero inegualmente inclinati sopra AB, cioè che gli angoli *cba* e CBA sarebbero disuguali, la qual cosa è contraria alla supposizione fatta.

Ora, siccome dall'ugualità degli angoli *cba*, CBA, ne segue che le linee *cb*, CB sono parallele; così dal parallelismo di queste ne segue pure che gli angoli *acb*, ACB sono uguali, che è ciò che si doveva dimostrare.

La perpendicolare abbassata dal vertice sulla base d'un triangolo isoscele divide il triangolo in due triangoli uguali.

Fig. 62.



22. Sia il triangolo isoscele ABC, si abbassi dal vertice B sulla base AC la perpendicolare BD; essa divide quel triangolo nei due triangoli DBA e BCD, nei quali gli angoli BAC e BCA sono uguali (XXXI), gli angoli BDA e BDC sono ancora uguali, essendo BD perpendicolare; saranno adunque uguali anche i due terzi angoli ABD e DBC (XXXVII), e per conseguenza i due triangoli DBA e BCD sono uguali (21, 2ª e 3ª), come si doveva dimostrare.

23. Essendo gli angoli ABD, DBC uguali, si conchiude: 1° *la perpendicolare abbassata dal vertice del triangolo isoscele sulla base, divide l'angolo al vertice per metà.*

Ed essendo AD = DC, si conchiude: 2° *la perpendicolare abbassata dal vertice d'un triangolo isoscele sulla base, divide la base per metà.*

Due triangoli che hanno gli angoli uguali, hanno pure i lati proporzionali.

XXXIX. Si dimostra ancora che ne' due triangoli *acb* e ACB (fig. 60 e 61), i quali hanno i medesimi angoli, i lati corrispondenti od omologhi sono proporzionali.

Supponiamo, per modo di esempio, che *ab* sia la metà di AB; ci toccherà dimostrare che così pure *ac* sarà la metà di AC, e *bc* la metà di BC. Immaginiamoci il triangolo *acb*, portato in A*cb*, come nell'articolo precedente; se si conduce la *cg* parallela ad AB, è chiaro che questa linea sarà uguale a *b*B, ovvero ad A*b*, e che *g*B sarà pure uguale a *cb*; or siccome gli angoli C*gc* e C*cg* sono rispettivamente uguali agli angoli *cb*A e *c*B*b*, il triangolo C*cg* sarà uguale al triangolo *c*A*b* (art. XXX), dunque si avrà C*c* uguale ad A*c*, e C*g* uguale a *cb*, ovvero a *g*B. Dunque A*c*, ovvero *ac*, sarà la metà di AC, e *cb* la metà di CB.

Fig. 63.

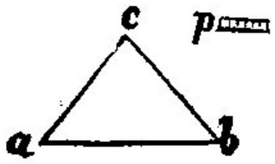
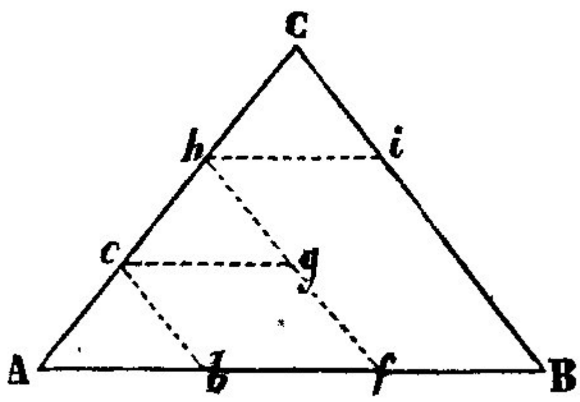
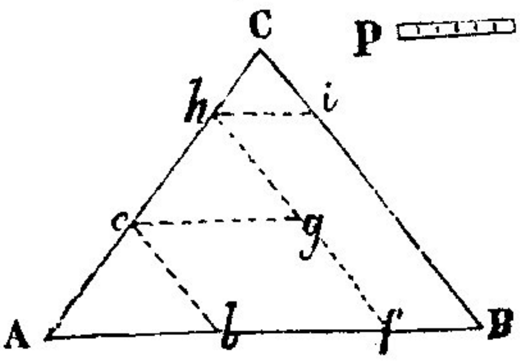


Fig. 64.



Se *ab* (fig. 63) fosse contenuta tre, quattro o qualsiasi altro numero di volte in AB (fig. 64), sarebbe egualmente facile di dimostrare che *ac* sarebbe pure contenuta un egual numero di volte in AC, e *cb* in CB. Perchè dai punti di divisione *b*, *f*, della base AB, tirando *bc*, *fh* ecc. parallele a BC, si potranno collocare lungo di AC tre, quattro ecc. triangoli A*cb*, *chg*, *h*C*i* ecc. uguali al triangolo *acb*.

Fig. 65.



Che se *ab*, in luogo di essere contenuta esattamente un certo numero di volte in AB, non vi fosse contenuta che con qualche frazione, come per esempio due volte e mezza; si proverà che *ac* sarà pure contenuta due volte e mezza in AC, e *bc* due volte e mezza in BC.

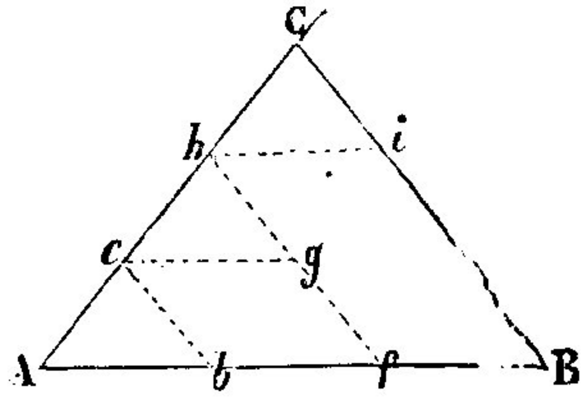
Infatti, dopo che per mezzo delle parallele *bc*, *fh*, si saranno collocati lungo AC i due triangoli A*cb*, *chg*, uguali ad *abc*, si potrà ancora, tra le due parallele *hf* e CB, collocare un triangolo C*hi*, i lati del quale saranno la metà de' lati di cAb; poichè, per quel che si è supposto, fB sarà la metà di Ab, e la base hi del triangolo Chi sarà uguale a fB, a cagione delle parallele hf, CB. Dunque in generale quando due triangoli ABC, abc, hanno i medesimi angoli, questi triangoli sono simili ed hanno i loro lati proporzionali, o quel che torna al medesimo, i lati AB, BC, AC d'uno di questi triangoli ABC, contengono tante volte una certa misura P (fig. 65), quante volte i lati ab, bc, ac dell'altro triangolo abc contengono un'altra misura p (fig. 63). Essendo P, per cagion d'esempio, il metro, con cui si suppone che siasi misurato il triangolo ABC, sarà p il decimetro, il centimetro od il millimetro, secondo che il triangolo simile abc si vorrà costruire in iscala dieci, cento o mille volte minore.

Modi di dividere una retta in qualsivoglia numero di parti uguali.

XL. Da questa proposizione si deduce naturalmente la soluzione di un problema spesso utile nella pratica.

Si dimanda di dividere una retta data in un numero dato di parti uguali. Ciò si potrebbe ottenere col provare e riprovare tante volte, finchè si colga la giusta misura: ma non mai con quella certezza che dànno i metodi geometrici.

Fig. 66.



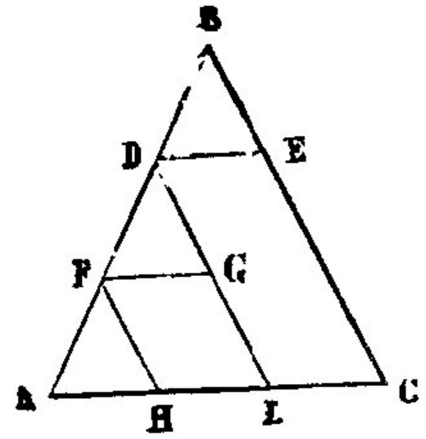
Supponiamo, per esempio, che si abbia a dividere la retta AB (fig. 66) in tre parti uguali; si tirerà una retta indefinita AC, che faccia un angolo qualunque con AB, e si porteranno su questa retta tre parti uguali Ac, ch, hC, con un'apertura di compasso presa ad arbitrio, indi si tirerà CB, poi cb, hf parallele a questa linea. Così AB si troverà divisa a' punti b ed f in tre parti uguali, come chiaramente appare dalla dimostrazione dell'articolo precedente.

La retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

24. Questa proposizione si dimostra seguendo un metodo ed un ragionamento affatto eguale a quelli seguiti nelle proposizioni precedenti.

Sia la FH parallela alla BC; devo dimostrare che la AH sarà contenuta nella HC tante volte, quante la AF è contenuta nella FB.

Fig. 67.

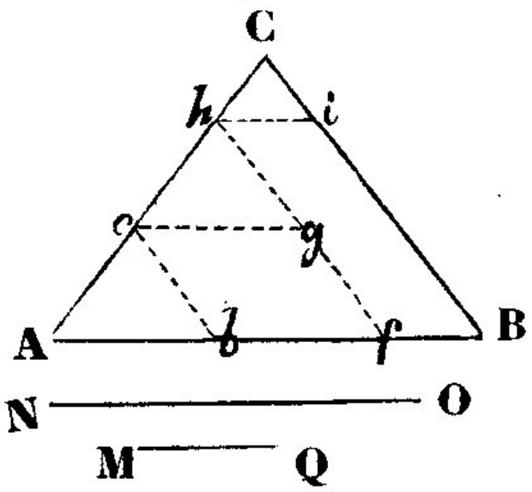


Supponiamo che la AH sia contenuta in HC due volte, HL, LC; sarà anche la FA contenuta in FB due volte. Conduco da L la LD parallela a BC e da F e D le FG e DE parallele ad AC.

Essendosi prese HL e LC uguali ad AH ed essendo FG$=$HL e DE$=$LC, si avrà pure AH$=$FG$=$DE. Di più, gli angoli FAH, DFG, BDE sono eguali (16) e per la stessa ragione sono uguali gli angoli AHF, FGD, DEB; dunque i triangoli AFH, FDG, DBE sono eguali (21, 3ª); dunque AF $=$ FD $=$ DB; dunque la AF è contenuta nella FB due volte; il che si doveva dimostrare

Che cosa sia una quarta proporzionale dopo tre rette date e come si trovi.

Fig. 68.



XLI. Se si volesse dividere una rètta in un tal numero di parti che abbia de' rotti, come due e mezzo, tre e un quarto ecc., ovvero se si proponesse in generale di dividere la linea AB (fig. 68) in un punto b, in modo che AB sia ad Ab, come la linea NO alla linea MQ, si vede subito che la soluzione del problema dipenderebbe dall'art. XXXIX, cioè, che bisognerebbe tirare per A una retta qualunque; prendere su questa retta le lunghezze Ac ed AC, uguali rispettivamente ad MQ e ad NO, e poi tirare

CB e la parallela *cb:* ed allora il punto *b* sarà il punto cercato.

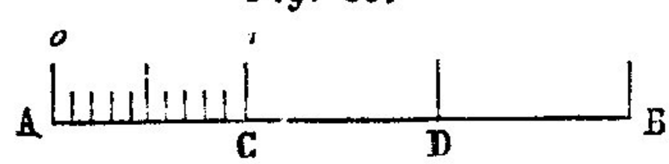
I geometri enunciano questo problema così: trovare una linea quarta proporzionale dopo tre linee date NO, MQ ed AB.

Piano o Tipo.

* Quando si delinea sulla carta una figura simile a quella di un terreno, come a dire, di un campo, di una selva, di una tenuta od anche di una città o del suo territorio, in modo da rappresentarne in piccolo tutti gli accidenti, questa figura piccola chiamasi *Piano* o *Tipo*.

Scala del piano.

Fig. 69.



* Per dare a conoscere a chi osserva un piano la vera grandezza del terreno che si è voluto rappresentare, si segna sulla carta medesima una retta divisa in parti uguali, ognuna delle quali sia contenuta nelle linee o lati del tipo tante volte, quante volte l'unità di lunghezza di cui si è fatto uso nel misurare il terreno (il metro per esempio) è contenuta ne' lati corrispondenti di questo: e questa retta così divisa dicesi la *Scala* del piano. Così, se siavi sul terreno una linea lunga 50 metri, e questa sia rappresentata sul tipo o piano da una linea lunga 50 centimetri, si segnerà in un angolo della carta una retta o scala divisa in centimetri, e ciascuno di questi rappresenterà una lunghezza di un metro sul terreno; epperò, se misurando col compasso un'altra linea del piano essa risulterà lunga 23 centimetri, ciò darà a conoscere che la linea corrispondente sul terreno è lunga 23 metri. Un tal piano si direbbe costrutto in iscala di un centimetro per metro, o di un centesimo dal vero, o di uno al cento: esso sarebbe in iscala del millesimo, o di uno al mille, se ciascun millimetro di lunghezza sul piano rappresentasse un metro sul terreno (fig. 69).

Spesse volte invece di disegnare effettivamente sul piano la scala, questa viene solamente indicata scrivendo sovra esso che la scala è di uno al cento, o di uno al mille ecc.

Così la carta geografica del Regno pubblicata dallo Stato maggiore generale è nella scala di uno a 250000.

Regoli divisi.

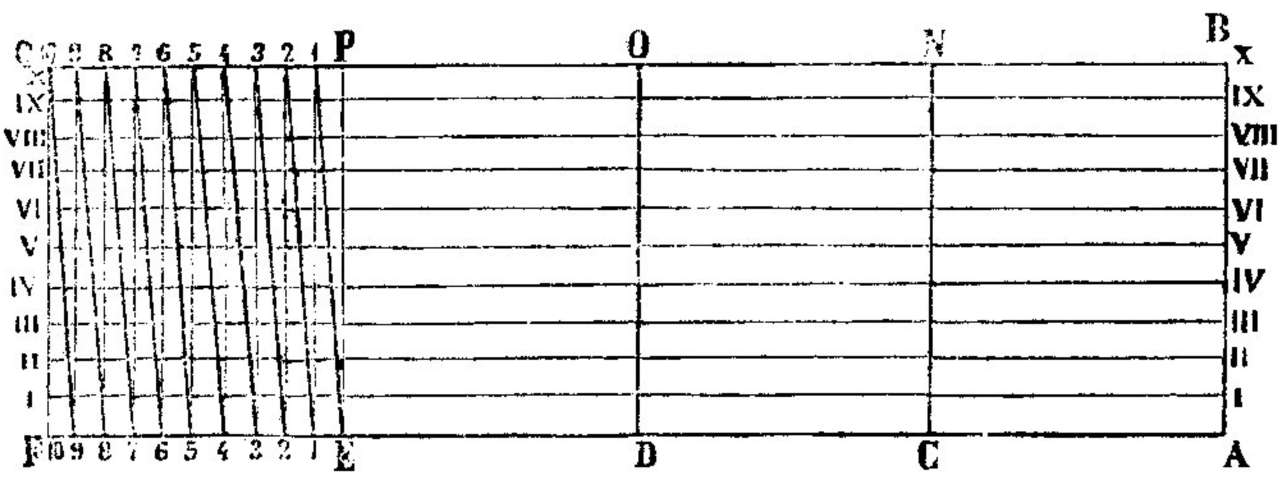
25. Chiamansi così que' regoli, i quali nella loro lunghezza sono divisi in parti uguali secondo una data unità primitiva di misura: tali sono, per es., i *bracci* divisi in *quarte* e in *quartini*, i *metri* divisi in *decimetri* e in *centimetri*, i *doppi decimetri* divisi in *centimetri* e in *millimetri*.

I regoli divisi possono servire comodamente da scala; a questo fine basta stabilire il rapporto che si vuole che abbiano le linee del piano colle divisioni del regolo, come fu già indicato più sopra.

Scala trasversale o ticonica.

26. La scala adesso descritta dicesi *semplice*; chiamasi *scala trasversale* o *ticonica* la seguente:

Fig. 70.



Condotta la AF e riportate sopra di essa quante unità di misura AC, CD ecc. occorrono, s'innalza all' estremità F la perpendicolare FQ, e prendonsi sopra di essa 10 parti uguali qualunque; indi compiuto il rettangolo AFQB, si tirano le parallele indicate coi numeri romani, e divisa parimente una delle unità, per es. EF, in 10 parti uguali, si conducono le parallele e le trasversali, come vedesi nella figura. Vedesi facilmente che i segmenti delle rette parallele alla EF, intercetti dalla diagonale E1 e dalla EP, avendo per base P1 lo stesso rapporto che le parti della EP ad essi corrispondenti hanno colla stessa EP, sono:

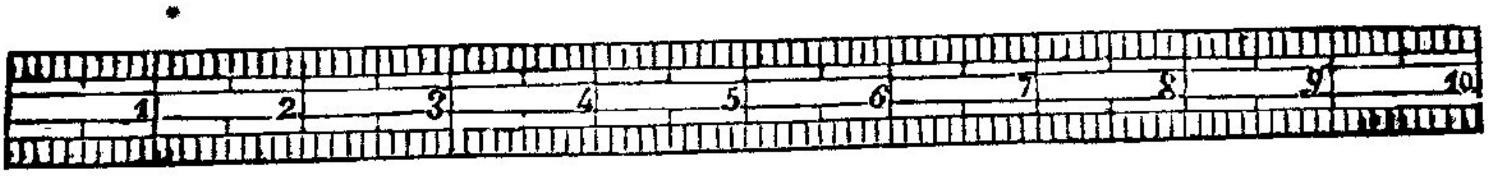
0,1; 0,2; 0,3.... della base P1, o della E1, e per conseguenza sono: 0,01; 0,02; 0,03... dell'unità EF.

Pertanto con questa costruzione si hanno 1, 2, 3.... unità della misura nelle verticali OD, NC, ecc.; si hanno 1, 2, 3....decimi dell'unità stessa sulle trasversali E1, 1,2; 2,3.... e finalmente si hanno 1, 2, 3.... centesimi dell'unità sulle parallele I,I; II,II; III,III; ecc.

Modo di usare delle scale semplici.

27. Sia una di queste rappresentata dal *decimetro* della fig. 71 e supponiamo che vogliasi il rapporto di 1 a 1000.

Fig. 71.



In questo caso ciascun millimetro della scala rappresenterà un metro, ciascun centimetro un decametro ecc.

Vogliasi tirare una retta lunga metri 42. Si pone una punta del compasso sopra lo 0 (zero) e lo si apre fino a che l'altra punta arrivi alla seconda divisione dopo il num. 4.

E, viceversa, se vogliasi conoscere la lunghezza di una retta del tipo, aperto il compasso della lunghezza di quella retta, si porta sul regolo; supposto, per es., che una punta essendo allo 0 della scala, l'altra punta arrivasse alla 5ª divisione dopo il numero 6, l'apertura del compaso sarebbe di 65 millimetri, e per conseguenza la retta sarebbe di 65 metri.

Modo di usare della scala ticonica.

28. Vogliasi, per es., avere una lunghezza 2,76. Si mette una punta del compasso sul punto d'incontro della NC (linea delle 2 unità) colla linea VI,VI (linea dei 6 centesimi), e l'altra punta sul punto d'incontro della stessa VI,VI, colla trasversale 7, 8 (linea dei 7 decimi).

Viceversa se, portato il compasso sulla scala, si trovasse che una sua punta cade nel punto d'incontro della BA colla linea VIII,VIII, e l'altra va a cadere nel punto d'incontro di essa linea VIII,VIII colla trasversale 2,3, si dovrebbe conchiudere, che la lunghezza ricercata è di 3,28.

Le altezze dei triangoli simili sono proporzionali ai lati di questi.

XLII. Egli è evidente che due triangoli simili ABC, *abc* (fig. 72 e 73) avranno non solamente i loro lati proporzionali, ma che le perpendicolari CF, *ef*, abbassate dai ver-

Fig. 72.

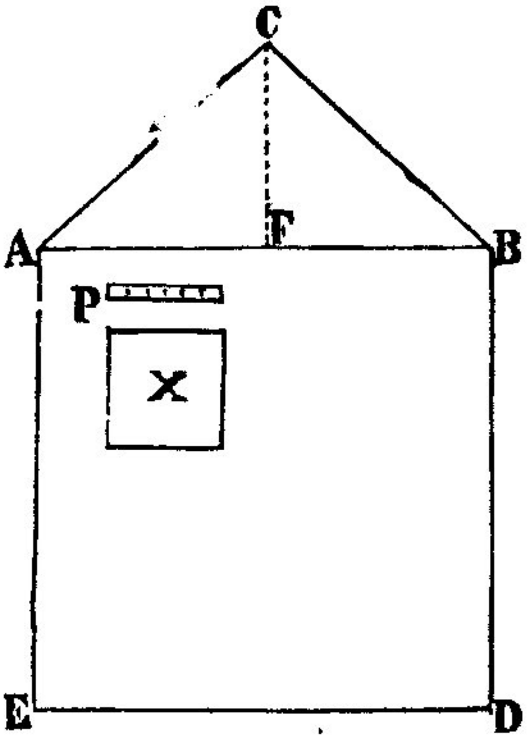
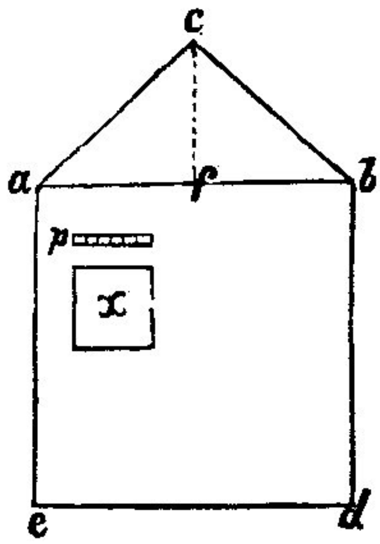


Fig. 73.



tici C, *c*, sulle basi AB, *ab*, staranno ancora nella stessa proporzione de'lati: ciò è sì facile a dimostrare, che non occorre di fermarvici sopra.

Le aree dei triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi.

XLIII. Quanto alle aree de'triangoli simili ABC, *abc* (fig. 71 e 72), si vede che quella del primo conterrà tante volte il quadrato X fatto sulla misura P, quante volte l'area del secondo contiene il quadrato *x* fatto sulla misura *p*. Infatti, per l'articolo precedente, CF ed AB conterranno la linea P tante volte, quante *ef* ed *ab* conterranno la linea *p*; la metà del prodotto di CF per AB, misura di ABC (art. XIV), darà dunque un medesimo numero che la metà del prodotto *cf* per *ab*, misura di *abc*; ma CF ed AB essendo state misurate con la linea P, il loro prodotto esprimerà tanti quadrati eguali ad X: dove che *cf* ed *ab*, essendo state misurate con la linea *p*, daranno un prodotto che esprimerà tanti quadrati eguali ad *x*.

XLIV. Questa proprietà delle aree de' triangoli simili, conduce ad una proposizione, che negli elementi di geometria si suol enunciare così: I triangoli simili ABC, *abc* (fig. 74 e 75) stanno tra loro, come i quadrati ABDE, *abde* de' loro lati omologhi o corrispondenti AB, *ab*.

Fig. 74.

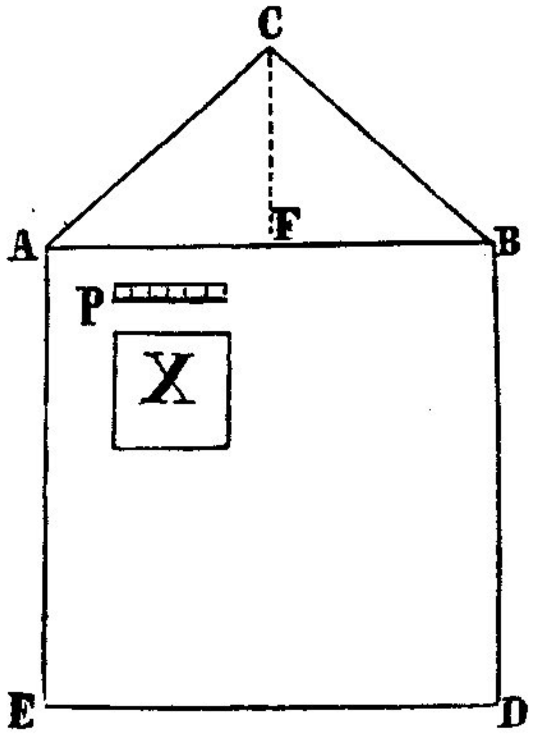
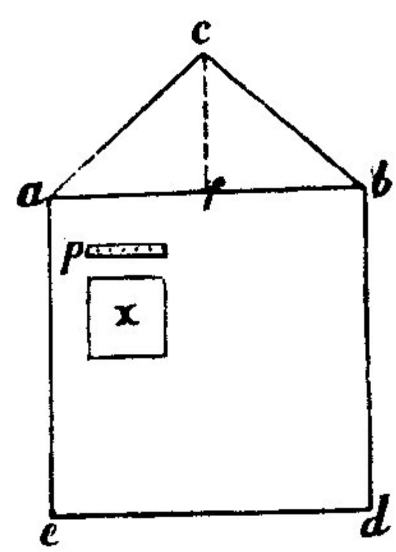


Fig. 75.



Infatti poichè i due triangoli ABC, *abc* contengono lo stesso numero di volte i quadrati X, *x*, rispettivamente, le aree dei due triangoli staranno tra loro come quelle di questi due quadrati. Similmente i due quadrati ABDE, *abde*, contenendo pure un egual numero di volte i quadrati X, *x*, staranno pure tra loro come questi due quadrati. Dunque finalmente il triangolo ABC starà al triangolo *abc*, come il quadrato ABDE stà al quadrato *abde*.

Ne segue che se per esempio il lato AB sarà doppio del lato *ab*, il triangolo ACB sarà quadruplo del triangolo *acb*: e che se AB sarà triplo di *ab*, il triangolo ACB sarà nove volte maggiore del triangolo *abc* ecc.: perchè AB essendo doppia di *ab*, il quadrato ABDE risulta quadruplo del quadrato *abde* ecc.

Proprietà delle figure simili dedotte da quelle de' triangoli simili.

XLV. Per passare da' triangoli alle altre figure, supponiamo che a ciascuno de' triangoli simili ABD, *abd* (fig. 76 e 77, si congiungano i triangoli simili ADE, *ade*; BDC, *bdc*, si vedrà che nelle figure totali ABCDE, *abcde*,

Fig. 76.

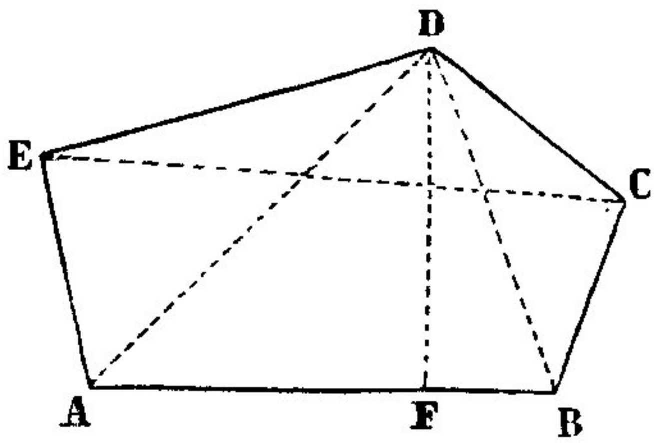
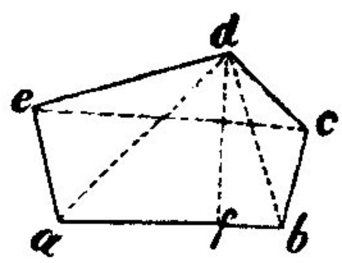


Fig. 77.



1° Gli angoli A, B, C, D, E, saranno rispettivamente eguali agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; la qual cosa è manifesta, poichè questi angoli saranno o angoli corrispondenti di triangoli simili, o composti di angoli corrispondenti;

2° Che la relazione de' lati omologhi o corrispondenti BC, *bc*, DE, *de* ecc. delle due figure ABCDE, *abcde*, sarà la medesima per tutti: cioè se il lato *ab*, è contenuto un certo numero di volte in AB, *bc* sarà contenuto lo stesso numero di volte in BC, e *cd* lo stesso numero di volte in CD ecc.;

3° Si vedrà ancora che tirando nelle due figure delle linee corrispondenti, come le diagonali CE, *ce*, o le perpendicolari DF, *df* ecc., queste linee saranno sempre tra loro nella medesima ragione che i lati omologhi delle due figure.

Dunque le figure ABCDE, *abcde*, saranno intieramente simili in tutte le loro parti.

Confermasi la verità che per fare una figura simile ad un'altra non è necessario di misurarne tutti gli angoli e tutti i lati.

XLVI. Descritta così la figura *abcde*, perfettamente simile alla figura ABCDE, egli è evidente che se si vorrà di nuovo descrivere una figura del tutto uguale ad *abcde*, e per conseguenza ancora simile ad ABCDE, sarà inutile di misurare tutti i lati e tutti gli angoli di *abcde*, e basterà (se, per esempio, la data figura è un pentagono) pigliare i tre lati *ab*, *ea*, *bc*, ed i quattro angoli *e*, *a*, *b*, *c*, per esser certi di ricopiare la medesima figura *abcde*, simile ad ABCDE: onde riesce dimostrato ciò che si è assunto altrove (art. XXXVII). Ma si può ancora andar più lontano, poichè è chiaro che vi saranno sempre più modi differenti di combinare quel numero di angoli e di linee che si debbono necessariamente misurare in una qualunque figura per farne un'altra simile. Ma non istancherò i lettori coll'entrare in più minuti particolari.

Le aree delle figure simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi.

XLVII. Si può dimostrare come un ragionamento simile

Fig. 78.

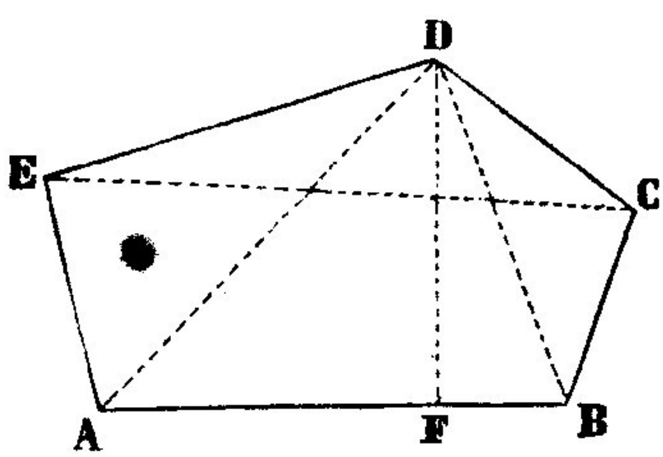


Fig. 79.

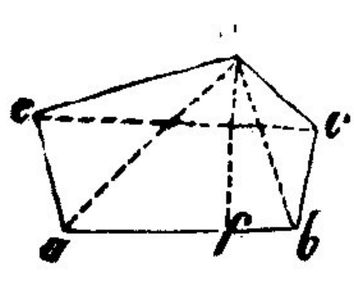


Fig. 80.

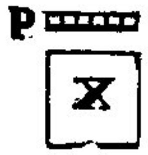
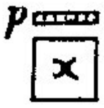


Fig. 81.



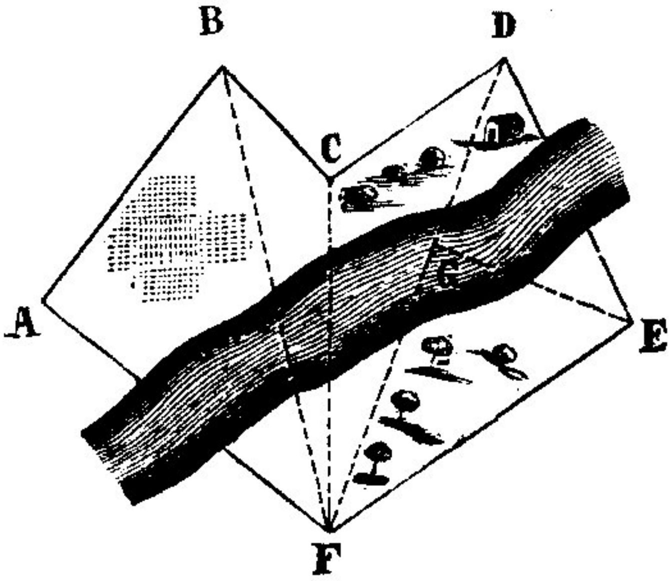
a quello dell'articolo XLIII che il numero de' quadrati X, contenuti nella figura A B C D E (fig. 78) è il medesimo che quello de' quadrati x contenuti nella figura *abcde* (fig. 79); e così le aree delle figure simili sono tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi.

Le figure simili differiscono unicamente per la scala su cui sono state descritte.

XLVIII. Tutto quello che abbiamo detto delle figure simili si può ridurre a questo solo ed unico principio, che le figure simili non differiscono tra loro che per la scala su cui sono state descritte.

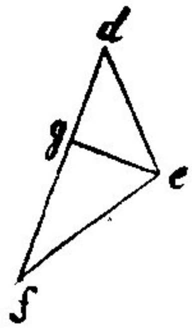
Uso delle figure simili nelle misure dei terreni.

Fig. 82.



XLIX. Ora, per meglio vedere l'uso che si dee fare dei triangoli simili e delle riduzioni in iscala minore, per aver la misura de' terreni su' quali non si potrebbe comodamente operare, figuriamoci che ABCDEF (fig. 82) rappresenti il recinto di un parco, di uno stagno ecc., del quale si voglia determinare la superficie. Primieramente si misurerà uno de' lati della figura, per es. FE, e si vedrà quanti metri contenga questo lato: e fatta una scala di parti eguali, di quella grandezza che meglio piacerà, si tirerà sulla carta una linea *fe* (fig. 83) uguale a tante parti della scala quanti metri si conterranno in FE: poi facendo gli angoli *def*, *dfe* uguali agli angoli DEF, DFE, si avrà il triangolo *edf*, nel quale si abbasserà *eg* perpendicolare su *df*. Fatto ciò, e misurate per mezzo della scala le linee *df* ed *eg*, si conchiuderà che quante parti conterranno queste linee, altrettanti metri conterranno DF ed EG. Così moltiplicando DF per la metà di EG, si avrà il valore del triangolo EDF; e misurando nella stessa

Fig. 83.



maniera gli altri triangoli DCF, BCF, ABF, si troverà determinata l'intera area della figura.

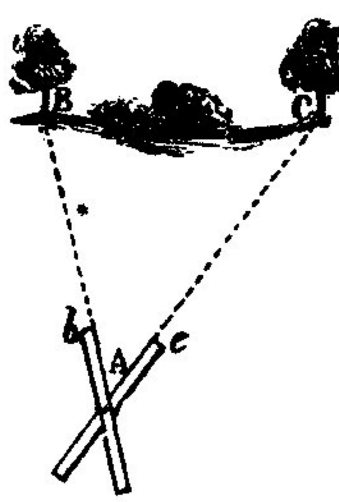
Modo di misurare le distanze inaccessibili.

L. Accade spesso nella pratica di dover misurare la distanza di un luogo F da un altro luogo inaccessibile D: nuovo problema, ma del quale già abbiamo dato anticipatamente la soluzione nell'articolo precedente. Poichè per misurare la distanza DF, per esempio, basterà valersi della similitudine de' triangoli *def* e DEF; infatti egli è chiaro che misurata una base qualunque, come EF, se dai punti F ed E si potrà vedere il punto D, si potranno pure misurare gli angoli DEF, DFE, per mezzo dei quali si costruirà un triangolo *def* simile a DEF, ed il problema sarà risoluto; cioè a dire, si avrà la distanza FD.

Imperfezione dello strumento indicato nel numero precedente.

LI. L' uso dello strumento descritto nell'articolo XXVIII, e composto di due regoli uniti al punto A (fig. 84), intorno al quale essi girano liberamente, può sovente dar luogo a gravi errori, sia perchè l'apertura dell'angolo si altererà nel trasportare lo strumento dal terreno sulla carta, sia perchè la forma che si dovrà dare all'istrumento per facilitarne l'uso impedirà che possa questo applicarsi sul piano ove dovrà farsi la riduzione.

Fig. 84.



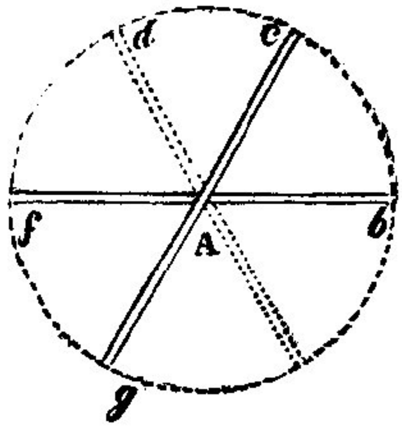
Aggiungiamo a questo che ogni nuovo angolo BAC, che in questa maniera si prende, richiede che si trasporti di nuovo l'istrumento sulla carta; e l'unico mezzo che esso ci somministra per paragonare tra loro due angoli è di portarli l'uno sopra l'altro: onde veniam bensì a riconoscere se quegli angoli sono eguali o disuguali, ma non già a scoprire il loro rapporto nè la loro grandezza assoluta.

Misura di un angolo.

Ogni angolo ha per misura l'arco di circolo descritto dal vertice come centro e compreso tra i due lati dell'angolo.

LII. Era dunque necessario di cercare una misura fissa per gli angoli, come una già se n'aveva per misurare le lunghezze: e questa fu facile a trovarsi. Infatti, tenendo immobile il regolo A*b* (fig. 85), si faccia prima coincidere con esso l'altro regolo A*c*; poi si faccia girare questo secondo regolo intorno al punto A; è chiaro che se si pone all'estremità *c* del regolo mobile A*c* una penna od uno stile in maniera da render sensibile la traccia del movimento del punto *c*, questa traccia, che sarà un arco di circolo, darà l'esatta misura dell'angolo per ciascun'apertura particolare de' lati A*b*, A*c*, cioè a dire che a cagione dell'uniformità della curvatura del circolo succederà necessariamente che ad un'apertura doppia, tripla, quadrupla di *c*A*b* risponderà un arco duplo, triplo, quadruplo di *cb*.

Fig. 85.



29. La verità dimostrata nel numero precedente s'esprime comunemente dicendo: *gli angoli al centro di un circolo sono proporzionali agli archi della circonferenza compresi tra i loro lati.*

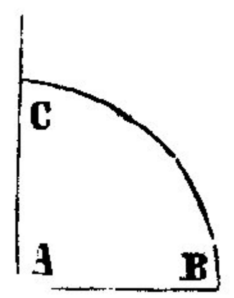
Divisione della circonferenza.

LIII. Supponendo dunque che la circonferenza *bcdfg* (fig. 85), descritta dalla rivoluzione intera del punto *c*, sia divisa in un numero qualunque di parti uguali, il numero delle parti comprese tra le linee A*c* ed A*b* misurerà esattamente l'apertura di queste linee o l'angolo *c*A*b* ch'esse formano.

I Geometri sogliono dividere il circolo in 360 parti, che chiamano gradi, ciascun grado in 60 minuti, ciascun minuto in 60 secondi ecc. Così un angolo *b*A*c*, per esempio, sarà di 70 gradi, 20 minuti se l'arco *bc*, che gli serve di misura, comprenderà 70 delle 360 parti del circolo, e di più 20 sessassentesime parti, ossia un terzo, di un grado.

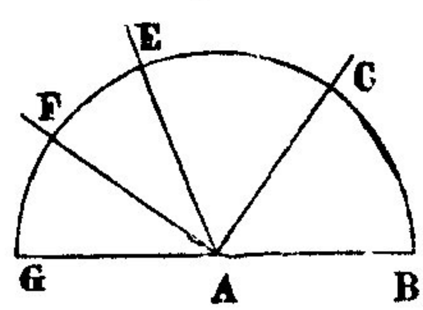
Angolo retto; acuto; ottuso.

Fig. 86.



LIV. Ne segue che un angolo CAB di 90 gradi, chiamato comunemente angolo retto, è quello di cui i lati AC e AB comprendono un quarto BC della circonferenza, e sono perpendicolari tra loro.

Fig. 87.



LV. Si chiama angolo acuto ogni angolo che sia più piccolo di un angolo retto, cioè minore di 90 gradi. Tali sono gli angoli CAB, FAG, EAG (fig. 87).

LVI. Al contrario si chiama angolo ottuso quello che ha più di 90 gradi, come FAB, EAB (fig. 87).

Angoli supplementari.

30. Diconsi *supplementari* o di *supplemento* due angoli i quali, sommati insieme, dànno due retti ossia 180°. Così, p. es., l'angolo di supplemento dell'angolo di 130° è l'angolo di 50°; l'angolo di 80° è supplementare all'angolo di 100° ecc.

Angoli complementari.

31. Diconsi invece *complementari* o di *complemento* due angoli la cui somma è uguale ad un retto, ossia a 90°. Così l'angolo di 32° è complementare dell'angolo di 58°; l'angolo di 50° complementare all'angolo di 40°, ecc. ecc.

Angoli adiacenti.

32. Si dicono *adiacenti* due angoli formati da una retta che cade sopra un punto di un'altra, il quale non sia uno dei due estremi di questa.

Angoli opposti al vertice.

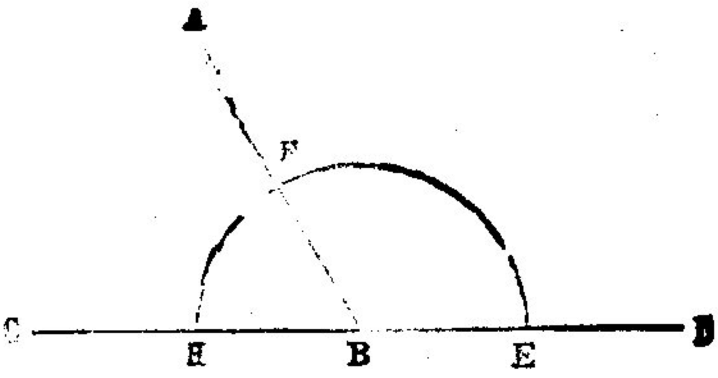
33. Si dicono *opposti al vertice* due angoli che hanno il loro vertice nello stesso punto comune di due rette che si tagliano e le loro aperture rivolte in senso opposto.

La somma dei due angoli adiacenti è uguale a due retti, o, con altre parole: *gli angoli adiacenti sono supplementari.*

34. Sieno i due angoli adiacenti ABC, ABD. Fatto centro

in B con raggio qualunque si descriva la semicirconferenza HFE; è facile di vedere che la somma di que' due angoli è misurata dalla semicirconferenza stessa, e che per conseguenza è uguale a 180° ossia a due retti (fig. 88).

Fig. 88.

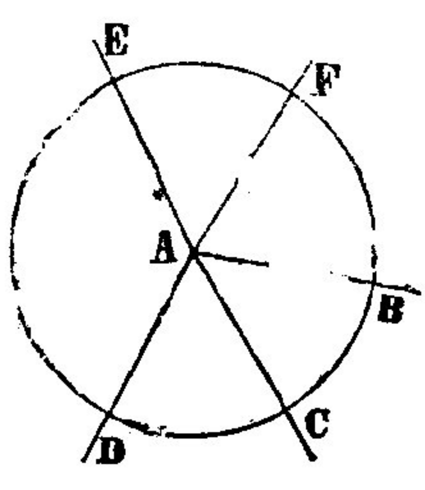


La somma degli angoli che possono farsi dalla stessa parte di una retta e col vertice nello stesso punto è sempre uguale a 180°.

LVII. Egli è evidente che tutti gli angoli, come GAF, FAE, EAC, CAB (fig. 87) che si possono fare dalla medesima parte su una retta GB, e che hanno il medesimo vertice A, presi insieme sono eguali a 180 gradi, ovvero a due angoli retti, poichè la loro somma è misurata dalla metà della circonferenza.

La somma degli angoli fatti tutt'intorno ad uno stesso punto è sempre uguale a 360°.

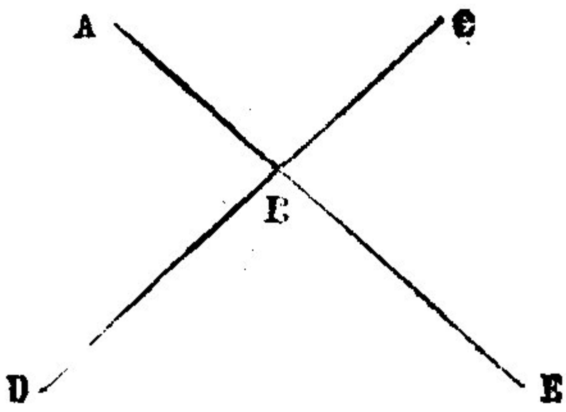
Fig. 89.



LVIII. Così pure la somma di tutti gli angoli EAF, FAB, BAC, CAD, DAE (fig. 89) che si possono fare intorno ad un punto A, che serve loro di vertice comune, è uguale a 360 gradi, ovvero a quattro angoli retti, poichè è misurata dalla circonferenza intera BCDEF.

Gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.

Fig. 90.



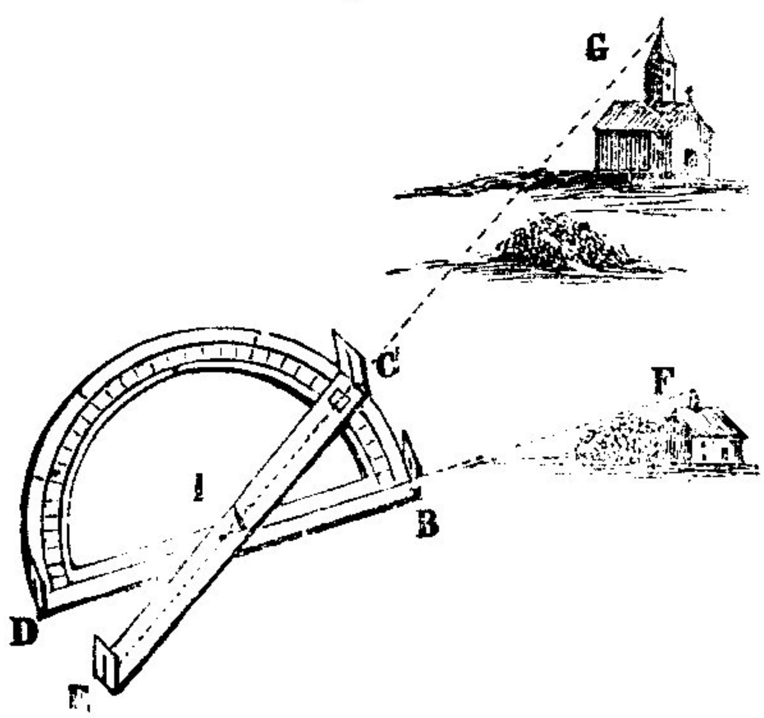
35. Dico che ABC = DBE, e ABD = CBE. Infatti, ABC e DBE hanno lo stesso supplemento, ABD; e ABD e CBE hanno pure lo stesso supplemento, ABC; dunque sono uguali (fig. 90).

Descrizione ed uso del grafometro per la misura degli angoli.

LIX. Dopo aver trovato che gli angoli possono misurarsi per via di archi di circolo, vediamo come debba procedersi in questa misura, cioè come si operi per vedere quanti gradi contenga un angolo che si ha da misurare.

Si adopera a quest'uso un istrumento che si chiama semicircolo graduato o *grafometro*. Questo istrumento è composto di due righe EAC, DAB (fig. 91), che s'incrociano in A, e che portano ciascuna due *traguardi* o *pinnule* nelle loro estremità: una di queste righe EC è mobile intorno ad A e chiamasi *alidada* o *diottra*, e l'altra è * fissa, secondo il diametro del semicircolo DCB diviso in 180 gradi ecc.

Fig. 91.



* I traguardi o pinnule sono fessure strettissime e ben diritte intagliate nelle estremità delle righe o diottre EC, DB, ripiegate ad angolo retto sulle righe medesime e sul piano del semicircolo graduato. Quando lo strumento dee servire a misurare angoli compresi tra rette condotte ad oggetti troppo lontani perchè possano bene osservarsi ad occhio nudo, ai due traguardi di ciascuna diottra si sostituisce un cannocchiale.

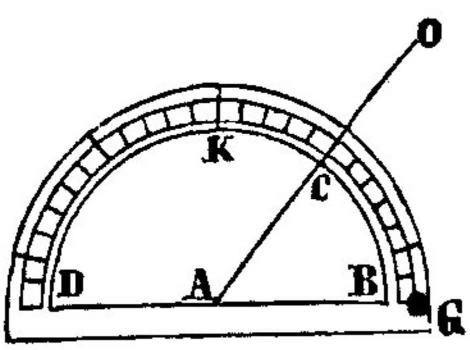
Volendosi misurare l'angolo compreso fra due rette condotte da un punto A a due oggetti qualunque F, G; si colloca lo strumento col suo centro in A, voltandolo in guisa che l'occhio posto in D, veda uno dei due oggetti pei traguardi D e B: poscia, senza muovere l'istrumento, si gira la riga o diottra mobile CE fintantochè l'occhio collocato in E, veda l'altro oggetto G pei traguardi E e C; ed allora la riga mobile mostra, sul semicircolo diviso in gradi, il numero de' gradi, minuti ecc., che contiene l'angolo proposto GAF.

Rapportatore grafico.

36. È un semicerchio di ottone o di sostanza trasparente, che ha la sua circonferenza divisa esattamente in 180°, indicati ordinariamente mediante numeri di 5 in 5 o di 10 in 10, secondo la grandezza del semicerchio.

Uso del rapportatore per fare un angolo uguale ad un angolo dato.

Fig. 92.

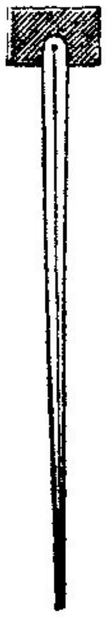


LX. Se si vuol segnare sulla carta un angolo di un numero determinato di gradi, si adopera un semicircolo K (fig. 92), diviso in 180 gradi senza alidada nè pinnule, e posando il centro A sul vertice dell'angolo che si vuol segnare, e la linea AB sulla linea AG, che si prende per uno de' lati dell'angolo, si nota il punto C, che corrisponde al numero de' gradi che si vuol dare all'angolo proposto; poi per questo punto e pel centro A, tirando la linea ACO, si forma l'angolo OAG, che contiene il numero richiesto dei gradi.

Uso del rapportatore per misurare un angolo dato.

Ponesi lo strumento sopra l'angolo da misurare, in modo che il vertice di questo sia sopra il centro di quello, e uno de' lati dell'angolo sia sulla direzione del diametro dello strumento. L'altro lato segnerà sulla circonferenza il numero de' gradi dell'angolo.

Fig. 93.

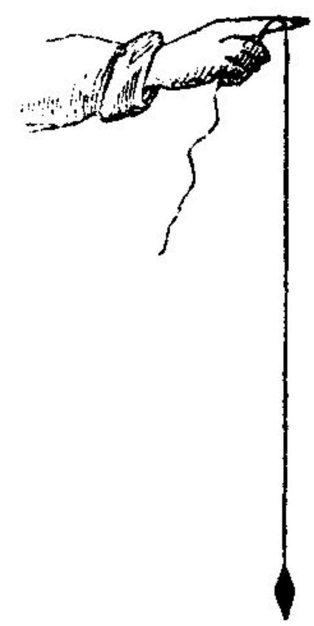


Biffe o paline.

37. Sono bastoncini ben diritti e sottili, lunghi un metro e mezzo circa, i quali terminano da una parte in punta per poter essere infissi nel terreno, e nell'altra sono fessi per ricevere un piccolo pezzo di carta che serve di *mira* (fig. 93).

38. **Verticale** è la linea che ogni corpo pesante descrive, quando cade liberamente.

Fig. 94.



Filo a piombo. Dicesi qualunque filo flessibile e sottile, ad un capo del quale sta unito un pezzo di piombo o qualunque altro corpo pesante (fig. 94).

Uso del filo a piombo. Serve a segnare la direzione della verticale.

Preso il filo per il capo libero, si aspetta che il piombo cessi dall'oscillare e si metta in riposo; la direzione del filo è allora la direzione della verticale.

Squadro agrimensorio.

39. È un cilindro vuoto d'ottone di circa 8 centimetri di diametro e un decimetro di altezza; nella superficie convessa di esso nel senso dell' altezza sono praticate quattro fessure alla distanza l' una dall'altra di 90°, e tra l'una e l'altra di queste ve ne sono altre quattro più piccole e distanti fra loro come le altre di 90°, e dalle contigue maggiori di 45° (fig. 95).

Fig. 95.

Il detto cilindro, chiuso nella sua parte superiore da un cerchio di ottone, finisce nella inferiore con un manico cavo, col quale s' inserisce in un bastone terminato da una punta di ferro destinata ad infiggerlo nel terreno.

Le fessure dello strumento diconsi *traguardi*.

Modo di verificare uno squadro.

40. Piantato verticalmente sul terreno lo strumento, si traguarda lungo due fessure diametralmente opposte il filo di un piombino, e lungo le due fessure minori contigue alle prime si traguarda il filo di un altro piombino. Si fa poscia girare il cilindro intorno al bastone e se traguardando il primo filo per tutte le fessure successive, si traguarda anche il secondo filo per le corrispondenti fessure

contigue, ciò significa e che le fessure sono tagliate verticali, e che sono ad angolo retto fra loro; due condizioni necessarie alla perfezione dello strumento.

Modo di usare dello squadro per tracciare una linea retta fra due punti distanti sul terreno.

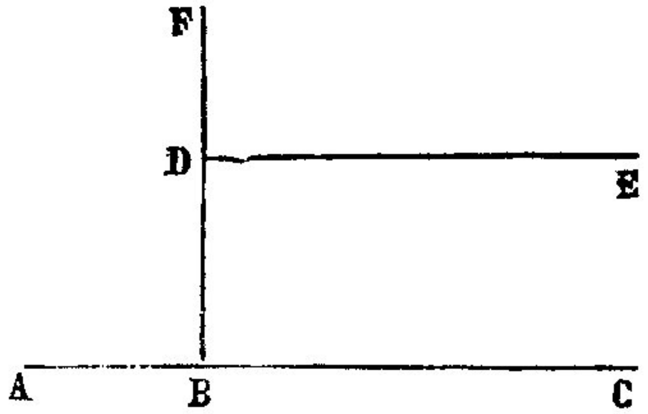
41. Piantato lo squadro sopra uno dei due punti, si traguarda l'altro; quindi si piantano nella direzione di questa visuale delle paline distanti l'una dall'altra qualche metro. La linea, che si farà passare per li punti segnati dalle paline, sarà la retta domandata.

Modo di innalzare collo squadro da un punto preso sopra una retta una perpendicolare alla retta stessa.

42. Piantato lo squadro su quel punto, girasi in modo da traguardare lungo due fessure diametralmente opposte la retta data; quindi traguardando per le due fessure distanti 90° da quelle due prime, si piantano alcune paline nella direzione di questo traguardo; la retta, che si farà passare per i punti segnati dalle paline, sarà la perpendicolare domandata.

Modo di condurre una parallela ad una retta data, mediante lo squadro.

Fig. 96.



43. Si innalza alla retta data AC, in un punto qualunque B, una perpendicolare BF (42); quindi in un punto D di questa s' innalza una retta DE ad essa perpendicolare; questa seconda retta DE sarà parallela alla prima AC (16) (fig. 96).

Squadro graduato.

44. Lo *squadro graduato*, detto anche *pantometro*, ha la forma di uno squadro comune; esso è diviso in due parti cilindriche, collocate una sopra l'altra; la superiore movesi circolarmente e a cerniera intorno alla inferiore. Questa è divisa in 360°, e porta due traguardi corrispondenti

allo 0° e al 180° della sua circonferenza; la superiore ha pure due traguardi diametralmente opposti fra loro.

Modo di usare dello squadro graduato.

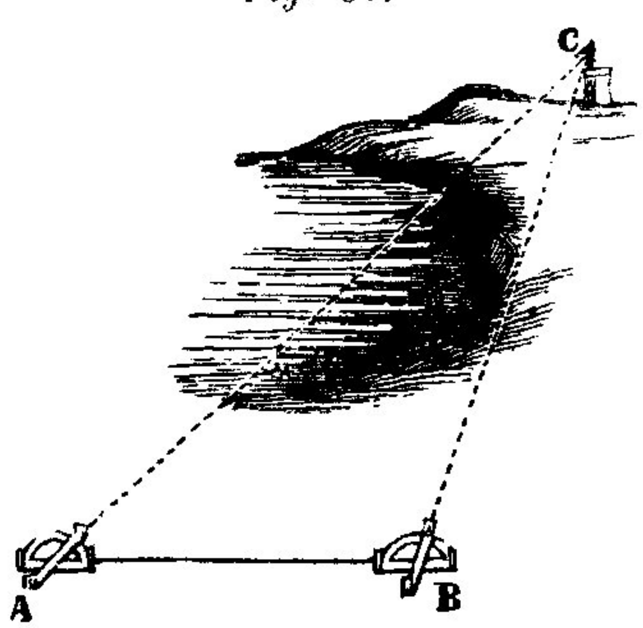
45. Dalle cose anzidette è facile l'immaginare il modo di usare di questo stromento per misurare gli angoli, per formare angoli di un dato numero di gradi, per innalzare perpendicolari, per condurre parallele ecc. ecc.

Limitiamoci alla prima operazione indicata, cioè a quella di misurare un angolo.

Piantasi ben diritto il bastone dello squadro sul vertice dell'angolo da misurare; si gira lo strumento fino a che per le due fessure inferiori e per le due superiori si traguardi una delle gambe dell'angolo; quindi si gira la parte superiore fino a che per le sue due fessure si traguardi l'altra gamba dell'angolo; l'angolo che formano le due visuali sarà indicato sullo stromento dalla distanza angolare de' due traguardi, e sarà la misura dell'angolo richiesta.

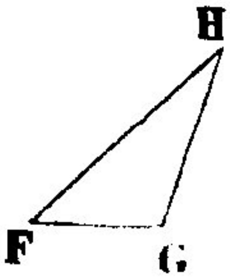
Modo di segnare sulla carta un triangolo simile ad un altro triangolo dato sul terreno.

Fig. 97.



LXI. Supponiamo ora, che avendo preso una base FG (fig. 98) sulla carta, si voglia fare su questa base un triangolo FGH simile al triangolo ABC (fig. 97) preso sul terreno; si adoprerà il grafometro per sapere quanti gradi contenga ciascuno degli angoli CAB, CBA; e col semicircolo graduato si faranno gli angoli HFG, HGF, rispettivamente uguali a questi: ed allora trovandosi così determinato il punto H, nel quale

Fig. 98.

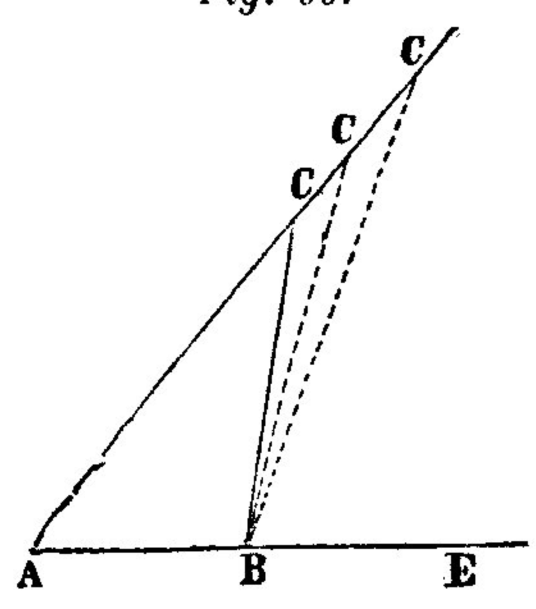


si uniscono i lati FH e GH, come pure l'angolo FHG, si avrà il triangolo FGH intieramente simile al triangolo ABC.

In ogni triangolo la grandezza di uno degli angoli dipende da quella degli altri due.

LXII. Siccome importa moltissimo nella pratica, come abbiamo già detto, che gli angoli sieno esattamente misurati, non basta prendere questa misura cogli strumenti anche più perfetti; bisogna ancora trovare il mezzo di verificarla per correggerla, ove sia necessario. Or questo mezzo è semplice e facile. Infatti nel triangolo ABC (fig. 97) di leggieri si scorge, che la grandezza dell'angolo C dee dipendere da quella degli angoli A e B. Perchè, secondo che si accresceranno o si sminuiranno questi angoli, cangerà ancor la posizione delle linee AC, BC e conseguentemente varierà l'angolo C, che queste linee fanno tra loro. Or se quest'angolo dipende dalla grandezza degli angoli A e B, si può presumere che il numero de' gradi contenuti negli angoli A e B, dee far conoscere il numero de' gradi che son contenuti nell'angolo C; e così la misura di quest'angolo potrà servire a verificare le operazioni che si saranno fatte per determinare gli angoli A e B; e vi sarà luogo a credere che gli angoli A e B sono stati esattamente misurati, quando l'angolo C risulti di quel numero di gradi appunto che si conviene relativamente alla grandezza degli angoli A e B.

Fig. 99.

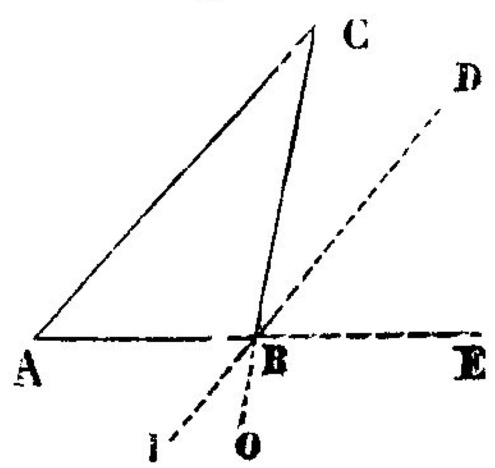


Per comprendere in qual modo dalla grandezza degli angoli A e B, si possa ricavare quella dell'angolo C, consideriamo quel che avverrebbe a quest'angolo, se le linee AC, BC (fig. 99) si avvicinassero, ovvero si scostassero l'una dall'altra. Supponiamo, per esempio, che BC, girando intorno al punto B, si scosti da AB per avvicinarsi a BE; dimodochè l'angolo ABC continuamente vada allargandosi; l'angolo C al contrario si stringerà sempre più; la qual cosa dà luogo a dubitare, che in questo caso la diminuzione dell'angolo C sia uguale all'accrescimento dell'angolo B, e che così la somma de' tre angoli A, B, C rimanga sempre la medesima, in tutte le diverse inclinazioni delle linee AC, BC, sopra la linea AE.

Gli angoli alterni-interni sono uguali fra loro.

LXIII. Or questa induzione presunta porta con sè la sua dimostrazione. Perchè tirando ID, parallela ad AC (fig. 100), si vedrà primieramente che gli angoli ACB e CBD, chiamati alterni-interni, sono uguali: ciò è evidente, poichè le linee AC e IB essendo parallele, piegheranno egualmente su CBO, e così l'angolo IBO sarà uguale all'ang. ACB (16). Ma l'ang. IBO sarà anche uguale all'angolo CBD (33): perchè la linea ID non piegherà più su CO da un lato che dall'altro. Dunque l'angolo DBC uguale all'angolo IBO, sarà uguale all'angolo ABC suo alterno-interno.

Fig. 100.



La somma de' tre angoli di un triangolo è sempre uguale a due angoli retti.

LXIV. Si vedrà in secondo luogo che l'angolo CAE sarà uguale all'angolo DBE, per causa delle parallele CA e DB. Dunque li tre angoli ABC, CBD, DBE, sono rispettivamente uguali ai tre angoli ABC, ACB, BAC del triangolo; ma i tre angoli ABC, CBD e DBE, presi insieme, sono uguali a due angoli retti (art. LVII): dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo è uguale a due retti; e come tutto ciò che abbiam detto può applicarsi a qualunque triangolo, riesce dimostrata questa proprietà generale, cioè che la somma de' tre angoli di un triangolo è costantemente la medesima, ed uguale a due angoli retti, ossia a 180 gradi.

Ciascun angolo di un triangolo è uguale alla differenza tra 180° e la somma degli altri due angoli del triangolo.

LXV. Dunque per avere il valore del terzo angolo di un triangolo, quando se ne saranno misurati due, basterà sottrarre da 180 la somma dei gradi contenuti nei due angoli conosciuti. Proprietà che somministra una maniera assai comoda di verificar la misura degli angoli di un triangolo, e di cui si vedranno infiniti altri usi di mano in mano che andremo innanzi. Contentiamoci qui di trarne le conseguenze più immediate.

LXVI. Un triangolo non può avere più d'un angolo retto, ed a più forte ragione non può aver più d'un angolo ottuso.

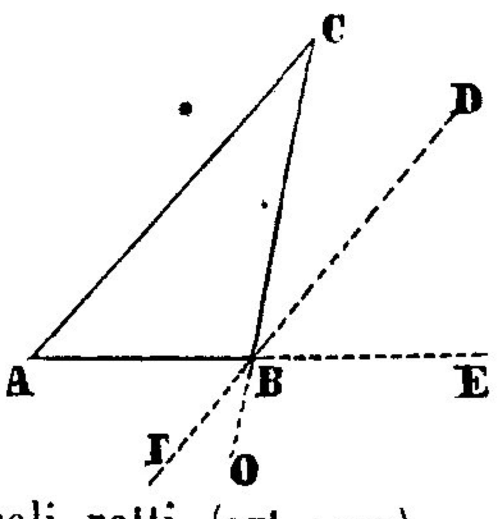
LXVII. Se uno de' tre angoli di un triangolo è retto, la somma degli altri due angoli è sempre uguale ad un retto.

Queste due proposizioni sono così chiare, che non hanno bisogno di dimostrazione.

L'angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni opposti.

LXVIII. Se si prolunga uno de' lati del triangolo ABC (fig. 101), per esempio il lato AB, l'angolo esterno CBE sarà uguale alla somma dei due angoli interni opposti BCA, CAB. Perchè all'angolo CBA, o si aggiungano i due angoli BCA e CAB, o l'angolo CBE; la somma sarà sempre uguale a 180 gradi, cioè a due angoli retti (art. LXIV).

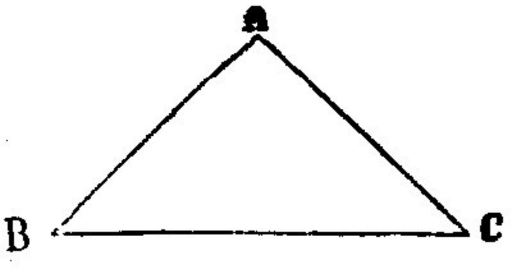
Fig. 101.



Quando si conosce uno degli angoli di un triangolo isoscele, si conoscono pure gli altri due.

LXIX. Infatti, se si conosce l'angolo al vertice A, sottraendo il numero de' gradi che questo contiene da 180, misura di tutti e tre gliangoli del tri-

Fig. 102.



angolo, la metà della differenza sarà la misura di ciascuno degli angoli alla base B, C (fig. 102).

Se l'angolo che si conosce è uno di questi angoli B, C, il doppio del suo valore sottratto da 180 gradi darà l'angolo al vertice A.

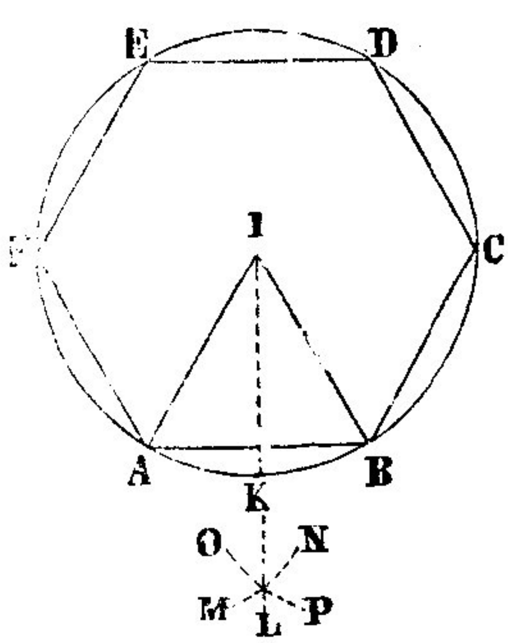
Ciascun angolo nel triangolo equilatero è di 60°.

LXX. Il triangolo equilatero non essendo altro che un triangolo isoscele, del quale ciascun lato può prendersi per base, ogni suo angolo è di 60 gradi, cioè eguale alla terza parte di 180.

Modo di descrivere un esagono regolare.

LXXI. Di qui si ricava facilmente la descrizione dell'esagono regolare o poligono di sei lati, che abbiamo promessa (art. XXIV).

Fig. 103.



Infatti il lato dell'esagono dovrà essere la corda di un arco di 60 gradi, sesta parte di 360, ossia della intera circonferenza. Supponendo dunque che questa corda sia AB (fig. 103), e tirando dal centro I, alle estremità A e B, i raggi AI e IB, l'angolo AIB sarà di 60 gradi; e perchè i due lati AI e IB saranno uguali, il triangolo AIB sarà isoscele. Ma l'angolo al vertice essendo di 60 gradi, ciascuno degli altri due angoli sarà pure di 60 gradi, cioè uguale alla metà di 120. Dunque (art. LXX) il triangolo AIB sarà equilatero. Dunque AB sarà uguale al raggio del circolo. Onde segue, che per descrivere un esagono, basta prendere una apertura di compasso uguale al raggio, e portarla sei volte in giro sulla circonferenza, poichè in questo modo si avranno i sei lati dell'esagono.

Modo di descrivere il dodecagono regolare.

LXXII. Descritto l'esagono ABCDEF (fig. 103), si descriverà facilmente il dodecagono, cioè il poligono di dodici lati.

Per ciò fare si dividerà l'arco AKB, ovvero l'angolo AIB in due parti uguali, ed AK, corda della metà dell'arco AKB, sarà uno de' lati del dodecagono.

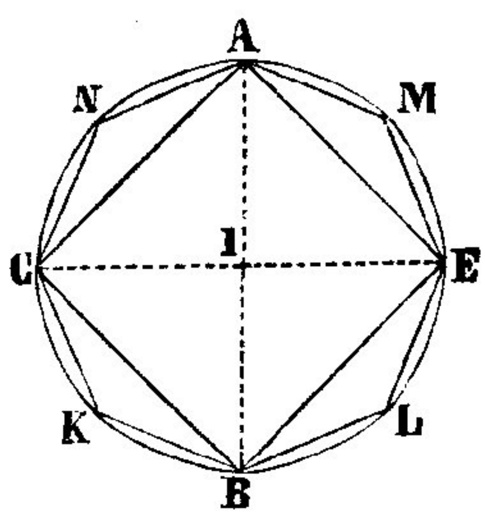
Modo di dividere un arco od un angolo in due parti uguali.

LXXIII. Per dividere l'arco AKB (fig. 103) in due archi uguali AK e KB, si opererà nella medesima maniera, come per dividere la corda AB in due parti uguali; cioè, dai punti A e B come centri, e con un raggio qualunque, si descriveranno gli archi MLN, OLP, e pel punto L intersezione de' due archi, e pel centro I, si tirerà la retta LI, la quale dividerà in due parti eguali e l'arco AKB e la corda AB.

LXXIV. Ripetendo la stessa operazione, e dividendo l'arco AK in due archi uguali, la corda di uno di questi sarà il lato di un poligono di 24 lati. E così di mano in mano si avranno i poligoni di 48, di 96, di 192 ecc. lati.

Costruzione dell'ottagono regolare e de' poligoni regolari di 16, 32, 64 ecc.

Fig. 104.



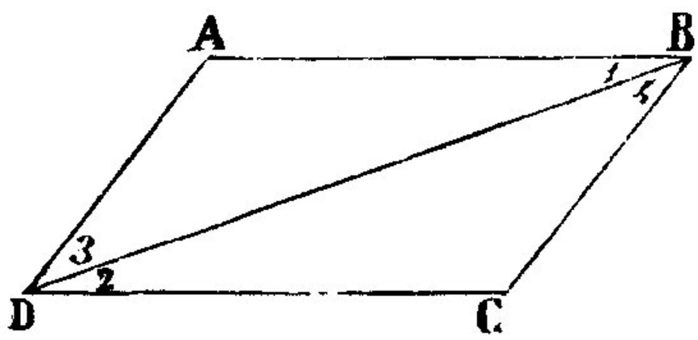
LXXV. Per descrivere un ottagono regolare, cioè un poligono di otto lati, converrà prima descrivere un quadrato dentro il circolo, e ciò si farà col tirare due diametri AIB, CIE (fig. 104), che si seghino ad angoli retti, e col congiungere le loro estremità, tirando le linee AC, CB, BE, AE.

Infatti, a cagione della regolarità del circolo e dell'egualità de' quattro angoli formati dalle perpendicolari AIB, CIE, i quattro lati AC, CB, BE, EA, saranno necessariamente uguali e si troveranno ugualmente inclinati l'uno verso l'altro, ciò che non può avvenire che nel quadrato.

Descritto il quadrato, si dividerà col metodo precedente ciascun arco CKB, BLE ecc. in due parti uguali: e condotte le corde AM, ME, EL ecc. si avrà l'ottagono.

Se poi si divide ancora ciascun arco CK, KB ecc. in 2, in 4, in 8 ecc. parti uguali, si avranno i poligoni di 16, di 32, di 64 ecc. lati.

Fig. 105.



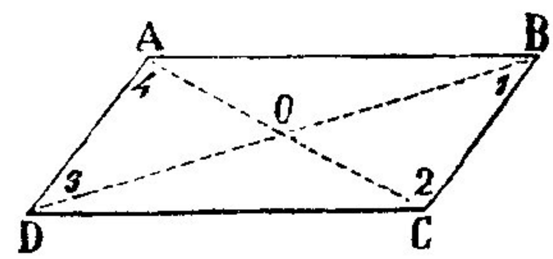
La diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali.

46. Questa proposizione che l'autore non dimostrò, perchè vedesi vera intuitivamente, si può facilmente dimostrare nel modo seguente.

I due triangoli ABD, BDC (fig. 105) hanno il lato DB comune, gli angoli 1 e 2 uguali, e gli angoli 3 e 4 uguali (LXIII); dunque sono uguali (21, 3ª).

47. Dunque anche il lato BC$=$AD, e il lato AB$=$DC, e per conseguenza la proposizione: *i lati opposti di un parallelogramma sono uguali.*

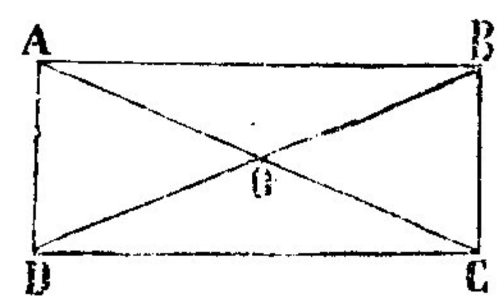
Fig. 106.



Le diagonali di un parallelogramma si tagliano per metà.

48. I due triangoli BOC, AOD sono uguali (21, 3ª); perchè gli angoli 1 e 3 sono uguali fra loro, e così gli angoli 2 e 4 (LXIII); e il lato BC$=$AD. Dunque anche BO$=$OD e CO$=$OA (fig. 106).

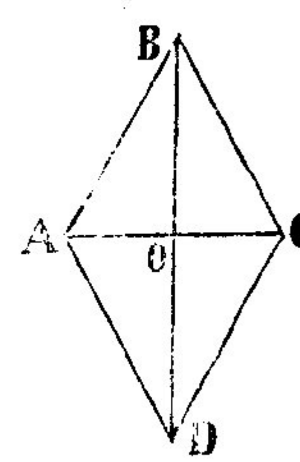
Fig. 107.



Le diagonali nel rettangolo sono uguali.

49. I due triangoli DAB, ABC sono uguali (21, 2ª). Infatti il lato DA$=$BC, il lato AB è comune; e l'angolo DAB$=$ABC; dunque anche DB$=$AC (fig. 107).

Fig. 108.



Le diagonali nel rombo si tagliano ad angolo retto.

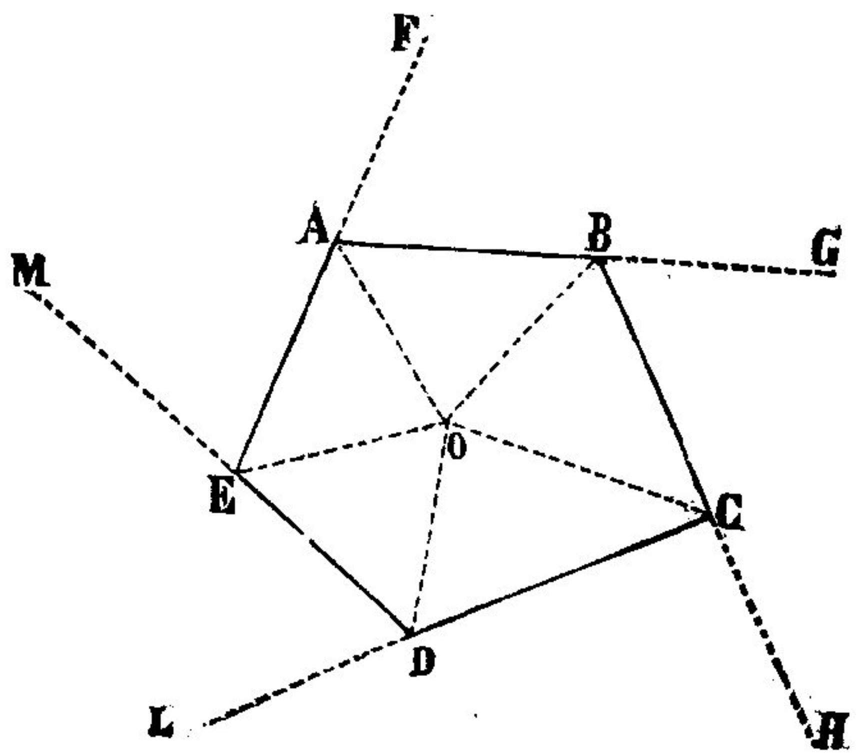
50. Infatti, essendo il punto B ugualmente distante da A e C, ed essendo O il punto di mezzo della retta AC, la BO sarà ad essa retta perpendicolare (V) (fig. 108).

Le diagonali nel quadrato si tagliano per metà, ad angolo retto e sono uguali.

51. Infatti, il quadrato deve godere delle proprietà del parallelogramma, del rombo e del rettangolo, appartenendo a ciascuna di queste tre figure.

La somma degli angoli interni di un poligono convesso qualunque è uguale a tante volte 2 retti, quanti sono i suoi lati, meno quattro.

Fig. 109.



52. Preso un punto O dentro il poligono e condotte le rette OA, OB, OC, OD, OE a ciascuno degli angoli, si divide il poligono in tanti triangoli quanti sono i suoi lati. La somma degli angoli di tutti que' triangoli è uguale a tante volte due retti quanti sono i lati del poligono. Ma gli angoli del poligono sono uguali agli angoli de' triangoli, meno tutti gli angoli col vertice in O, e gli angoli col vertice in O sono uguali a 4 retti (LVIII); dunque la somma degli angoli del poligono è uguale a tante volte due retti, quanti sono i suoi lati, meno quattro, come si voleva dimostrare. — Dunque la somma dei quattro angoli d'un quadrilatero è uguale a $2 \times 4 - 4 = 4R = 360^\circ$; dei cinque angoli di un pentagono è uguale a $2 \times 5 - 4 = 6R = 540^\circ$; dei sei angoli di un esagono qualunque è uguale a $2 \times 6 - 4 = 8R = 720^\circ$ ecc.

Dunque ciascun angolo del *pentagono* regolare è di $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$; ciascun angolo dell' esagono regolare è di $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$ ecc. ecc. (fig. 103).

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso qualunque è uguale a quattro retti.

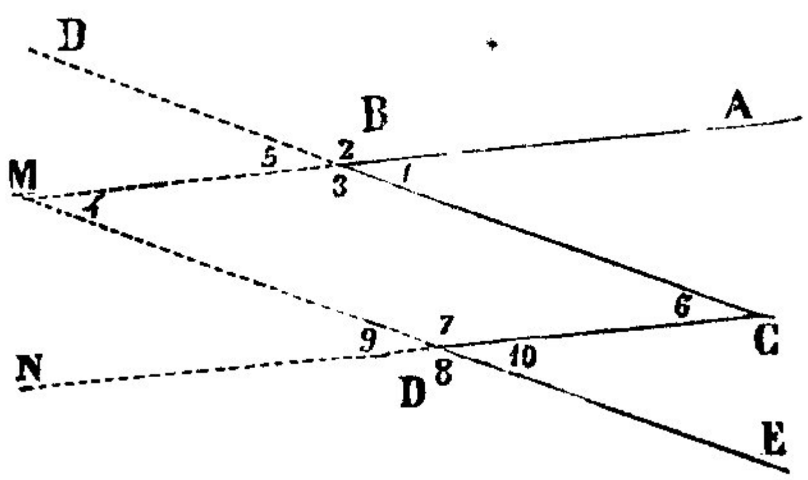
53. I due angoli in A, esterno ed interno del poligono, sono supplementari, e quindi dànno due retti; così i due angoli in B, in C ecc.

Dunque la somma degli angoli interni ed esterni del poligono è uguale a tante volte due retti quanti sono i lati; ma la somma degli angoli interni è uguale a tante volte due retti quanti sono i lati, meno quattro; dunque la somma degli angoli esterni è uguale a quattro retti.

Due angoli fatti da lati rispettivamente paralleli, se coll'apertura rivolta dalla medesima parte, o in senso contrario sono uguali, se altrimenti sono supplementari (fig. 110).

54. Sieno le due rette AM, DC rispettivamente parallele alle due CN, ME; dico che gli angoli 1 e 5, formati in B dalle due prime, saranno uguali ai due 10 e 9 formati in D dalle due seconde e supplementari dei due 8 e 7; e così che i due 2 e 3 in B saranno uguali ai due 7 e 8 in D e supplementari dei due 10 e 9.

Fig. 110.



Infatti: 1° Poichè l'angolo 4 è uguale tanto all'angolo 1, quanto all'angolo 10 (16), ne segue che l'angolo 1 è uguale all'angolo 10.

2° E poichè l'angolo 1 è uguale all'angolo 5 (35), sarà anche l'angolo 5 uguale all'angolo 10.

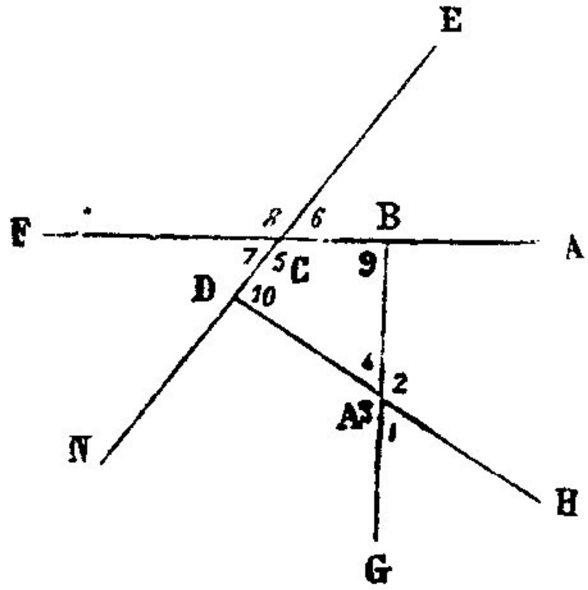
3° E poichè finalmente gli angoli 10 e 9 sono supplementari rispettivamente dei due 8, 7, anche i due 1 e 5 saranno supplementari dei due 8 e 7.

55. La figura BMDC è un parallelogramma; per la dimostrazione adesso fatta l'angolo 3 è uguale all'angolo 7, e l'angolo 6 è uguale all'angolo 4; da ciò si conchiude: *gli angoli opposti di un parallelogramma sono uguali.*

Due angoli formati da rette rispettivamente perpendicolari, se coll' apertura rivolta dalla stessa parte o in senso contrario sono supplementari; se altrimenti sono uguali (fig. 111).

56. Sieno le due rette GB, HD rispettivamente perpendicolari alle due FM, NE, dico che gli angoli 1, 4 formati in A dalle due prime saranno supplementari dei due 5 e 8 formati in C dalle due seconde ed uguali ai due 6 e 7. E così i due 2 e 3 in A saranno supplementari dei due 6 e 7 in B ed uguali ai due 1 e 4.

Fig. 111.



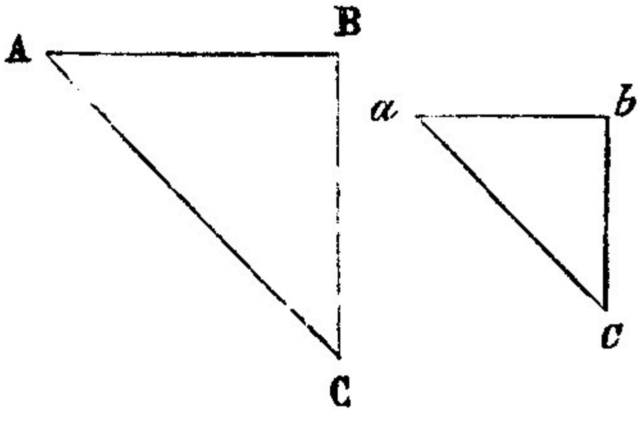
Infatti: 1° La somma dei quattro angoli 4, 10, 5 e 9 del quadrilatero ABCD è uguale a quattro retti (52); ma i due 10 e 9 sono già retti, perchè le due rette AB, AD sono perpendicolari alle due NE, FM; dunque la somma degli altri due 4 e 5 sarà uguale a due retti, e quindi i due angoli 4 e 5 sono supplementari.

2° Ma dell' angolo 4 è supplementare anche l'angolo 2, dunque gli angoli 5 e 2 sono uguali.

Due triangoli che hanno i lati rispettivamente paralleli sono simili (fig. 112).

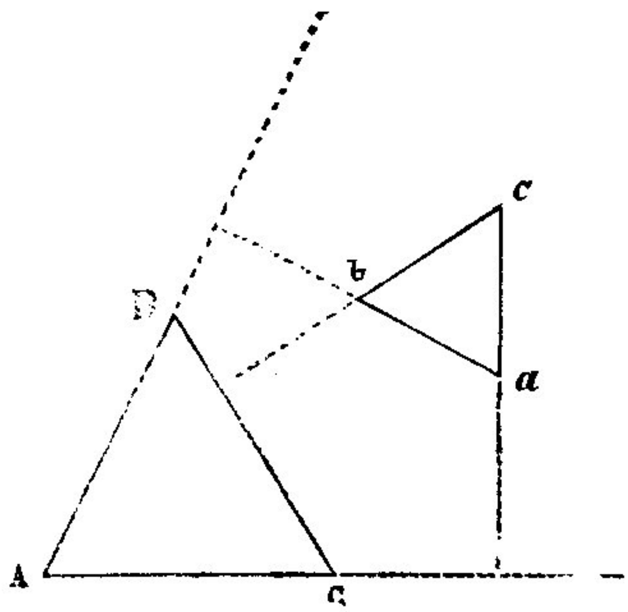
57. È questa una immediata conseguenza della proposizione dimostrata al numero 54. Infatti gli angoli A, B, C del triangolo ABC sono rispettivamente uguali agli angoli *a*, *b*, *c* del triangolo *abc*, perchè formati da rette rispettivamente parallele, e coll' apertura nello stesso verso; dunque i due triangoli sono simili (XXXIX).

Fig. 112.



Due triangoli che hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono simili (fig. 113).

Fig. 113.



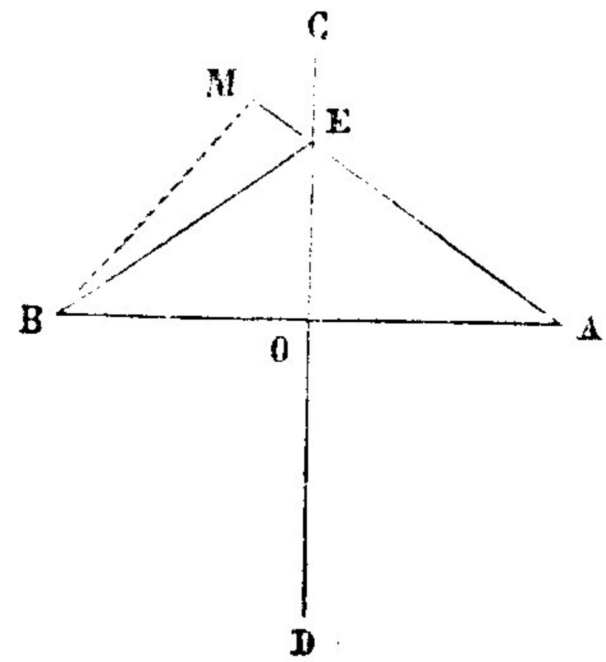
58. Infatti gli angoli A, B, C del triangolo ABC per la proposizione dimostrata al num. 56, sono rispettivamente uguali agli angoli *a*, *b*, *c* del triangolo *abc*, dunque i due triangoli sono simili (XXXIX).

Punti equidistanti da due punti.

59. *Sono i soli punti della perpendicolare condotta dal mezzo della retta che unisce i due punti.*

Sieno i due punti B ed A; condotta per essi la retta BA, e dal mezzo O di questa tirata la perpendicolare CD, dico che essa passa per tutti i punti egualmente distanti da B ed A fig. 114). Infatti: 1° tutti i punti della CD sono ugualmente distanti da B e da A. Preso, per es., il punto E, e condotte le due rette EB, EA, si hanno i due triangoli EBO, EAO uguali (21, 2ª); perchè hanno il lato EO comune, il lato OB uguale ad OA e gli angoli EOB, EOA, formati dalla perpendicolare, uguali.

Fig. 114.

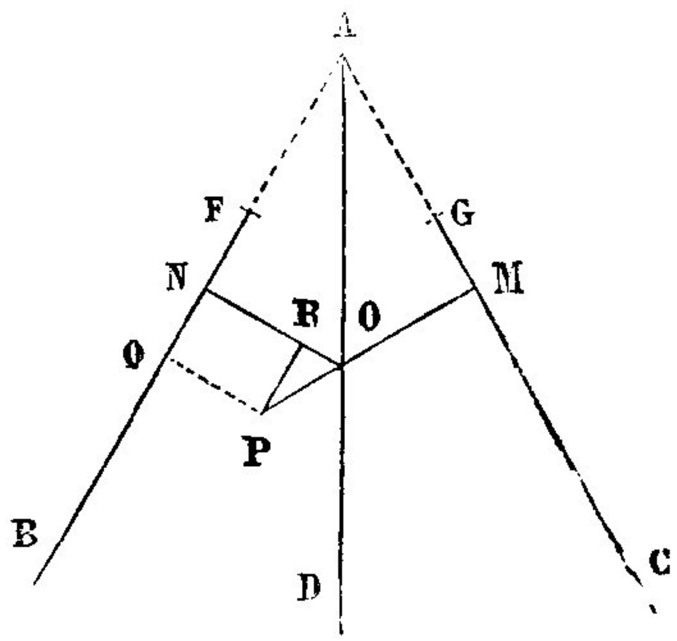


Dunque sarà anche EB = EA, cioè il punto E della perpendicolare è egualmente distante da B e da A; e come pel punto E, si può dimostrare per qualunque altro punto della perpendicolare, dunque tutti i punti della perpendicolare sono ugualmente distanti da B e da A.

2° Qualunque punto M preso fuori della perpendicolare è disugualmente distante da B e da A. Infatti, condotte le rette MB, MA ed EB, sarà, nel triangolo MBE, il lato MB minore dei due BE e ME sommati insieme, e quindi anche dei due EA e ME sommati insieme, ossia di MA.

Punti equidistanti da due rette.

Fig. 115.



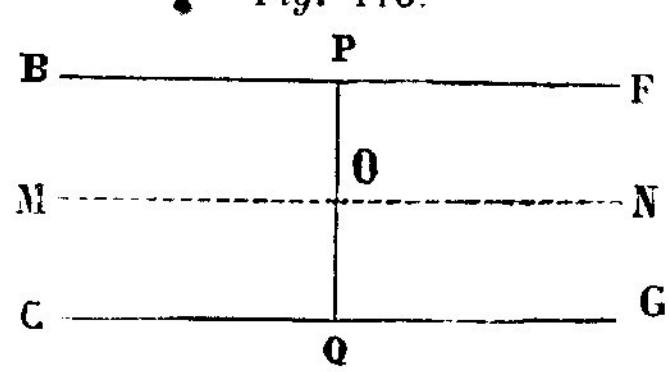
60. *Sono i soli punti della retta che divide per metà l'angolo formato dalle due rette.*

Sieno le due rette BF, CG concorrenti in A: condotta la AD a dividere l'angolo per metà, dico che essa passa per tutti i punti egualmente distanti dai due lati BF e GC (fig. 115).

Infatti: 1° tutti i punti di essa AD sono egualmente distanti dalle due rette. Preso, per es., il punto O e abbassate da quello le due rette OM, ON perpendicolari ai due lati, si hanno i due triangoli MOA, NOA uguali (21, 3ª), perchè hanno il lato OA comune; l'angolo OAM uguale all'angolo OAN; l'angolo retto OMA uguale all'angolo retto ONA e quindi anche il terzo angolo AOM uguale al terzo angolo AON (xxxviii); dunque OM è uguale ad ON, dunque il punto O è egualmente distante dalle due rette (Parte 1ª, III).

2° Qualunque punto P preso fuori della retta AD è disugualmente distante dalle due rette BF, CG. Infatti, condotte le perpendicolari PQ, PM, ON, sarà PQ uguale NR (45), e quindi minore di ON e di OM e tanto più di PM.

Fig. 116.



61. Se le due rette BF, CG sono parallele, la retta che contiene tutti i punti egualmente distanti da esse è la parallela MN, condotta per il punto O, metà della PQ perpendicolare alle due rette (fig. 116).

PARTE SECONDA

DEL METODO GEOMETRICO PEL CONFRONTO DELLE FIGURE RETTILINEE

INTRODUZIONE

Chi abbia posto mente alle cose dette intorno alla via per cui si è potuto trovare il modo di misurare i terreni, dee pure aver notato che le scambievoli posizioni delle linee tra loro somministrano cose degne per se stesse di essere osservate, indipendentemente dall'utile che può ritrarne la pratica; ond'è a credere che queste impegnassero i primi Geometri a spingere più in là le loro scoperte; poichè, non il bisogno soltanto, ma spesso ancora la curiosità trae gli uomini a nuove ed attente ricerche.

E dee pure aver contribuito al progresso della geometria il naturale talento di quella precisione rigorosa, senza la quale la mente non è mai soddisfatta.

E così, allorchè misurando le figure, i Geometri si sono avveduti che in infiniti casi le scale ed i semicircoli non dànno che valori prossimi delle linee o degli angoli, essi hanno dovuto cercar metodi che supplissero al difetto di questi stromenti.

Noi torneremo dunque a considerare le figure rettilinee; ma nelle operazioni che faremo per rinvenire le giuste relazioni che passano tra loro, ci serviremo solamente della riga e del compasso.

Spesso accade o di dover unire in una sola più figure simili, o di risolvere una figura in altre della medesima specie; ma per procedere ordinatamente convien cominciare dai rettangoli: poichè tutte le figure rettilinee sono aggregati di triangoli, e ciascun triangolo è la metà di un rettangolo, di egual base e di eguale altezza.

Due rettangoli di eguale altezza stanno tra loro come le basi.

I. Per far confronto di due rettangoli, bisogna saper trasformare un rettangolo qualunque in un altro che abbia egual superficie, ma diversa altezza. Poichè quando due rettangoli si saranno così mutati in due altri che abbiano eguali altezze, non differiranno più in altro che nelle loro basi; più grande sarà quello che avrà base maggiore, ed esso conterrà tante volte il più piccolo, quante volte la sua base conterrà quella del rettangolo minore; la qual cosa suole esprimersi così: Due rettangoli che hanno la medesima altezza, stanno tra loro nella stessa ragione delle basi.

Come si sommano, si sottraggono, si dividono i rettangoli di uguale altezza.

II. Per sommare due rettangoli di eguale altezza basta collocarli uno a lato all'altro.

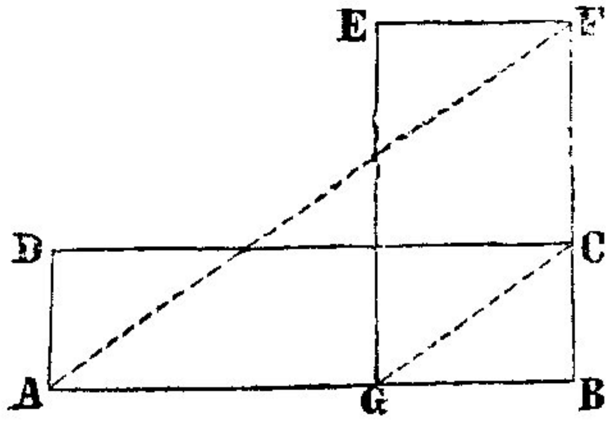
III. Così pure facilmente si sottrarrà il più piccolo dal più grande.

IV. E per partire un rettangolo in un numero determinato di rettangoli uguali, basterà dividere la sua base in quello stesso numero di parti uguali, ed innalzare una perpendicolare in ciascun punto di divisione.

Modo di trasformare un rettangolo in un altro equivalente di data altezza.

V. Sia ora proposto di trasformare il rettangolo ABCD (fig. 117) in un altro BFEG, che abbia la medesima superficie e l'altezza BF. L'area

Fig. 117.



di qualsivoglia rettangolo avendo per valore il prodotto dell'altezza per la base, è necessario che il rettangolo cercato BFEG, la cui altezza BF è maggiore di BC, abbia la sua base più piccola che AB; cioè, che se BF, per esempio, è doppia di BC, bisogna che BG sia la metà soltanto di AB; se BF è il triplo di BC, BG dee essere il terzo di AB, ecc.

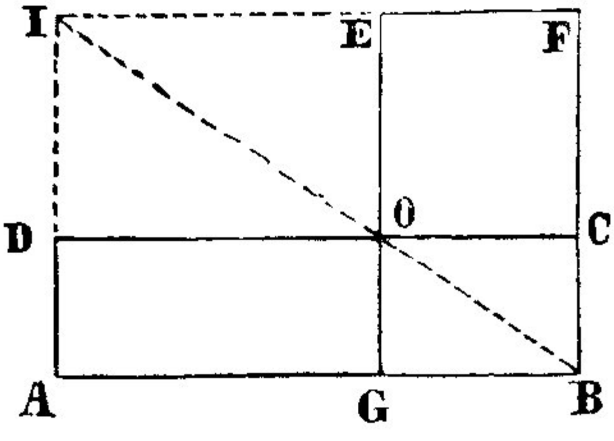
Se poi la BF in luogo di contenere un numero intiero di volte la BC, la contenesse un certo numero di volte, più una frazione, come due volte e un terzo, per fare il rettangolo BFEG di superficie eguale a quella del rettangolo ABCD, sarebbe necessario che la base BG fosse pure contenuta due volte e un terzo alla base AB. Ed è facile il vedere, che, generalmente affinchè due rettangoli ABCD, BFEG sieno equivalenti, cioè di egual superficie, bisogna che la base BG dell'uno sia contenuta nella base AB dell'altro, come l'altezza BC di questo nell'altezza BF del primo.

Il problema proposto si risolverà dunque dividendo la linea AB in maniera, che AB stia a GB come BF a BC. Ciò si potrà fare (Parte 1ª, art. XLI) tirando la linea FA, e dal punto dato C la parallela CG; e GB sarà la base del rettangolo domandato.

Altro modo di risolvere lo stesso problema.

VI. Per trasformare il rettangolo ABCD in un altro rettangolo BFEG (fig. 118), che abbia un'altezza data BF, si può ancora procedere in modo meno ovvio ma più comodo, operando così: prolungato AD, fino ad incontrare in I la retta FEI condotta pel punto F parallelamente ad AB, si tirerà la diagonale BI; e pel punto O, ove questa incontrerà il lato DC, si tirerà GOE parallela a FB; ed il rettangolo BFEG sarà equivalente al rettangolo ABCD.

Fig. 118.



Infatti, se dal triangolo IAB si tolgono i due triangoli IDO, OGB, si avrà per residuo il rettangolo ADOG; e se dal triangolo IBF, eguale ad IAB, si tolgono i triangoli IOE, OBC rispettivamente eguali ad IDO, OGB, si ha per residuo il rettangolo EOCF; dunque i due rettangoli ADOG, EOCF sono equivalenti. Ma al primo di questi rettangoli aggiungendo OCGB, ne risulta il rettangolo dato ABCD; ed al rettangolo EOCF aggiungendo lo stesso OCGB ne risulta il rsttangolo EGBF: dunque i due rettangoli ABCD, EGBF sono equivalenti.

Se due rettangoli sono equivalenti hanno le altezze inversamente proporzionali alle basi, e viceversa.

VII. Questa seconda maniera di trasformare un rettangolo in un altro equivalente, conferma il principio che avevamo da prima assunto, e che potea forse sembrare appoggiato ad una semplice induzione.

Dall'egualità de' due rettangoli ABCD, BFEG, si aveva concluso che AB dovea stare a BG come BF a BC; la qual cosa possiamo ora dimostrare rigorosamente per via dell'articolo precedente.

Infatti, per esser simili i triangoli IAB e OGB (fig. 118), la base AB del primo starà alla base GB del secondo, come l'altezza IA all'altezza OG, o come BF, eguale ad IA, sta a BC eguale ad OG. Dunque AB starà a GB come BF a BC, conforme al principio dell'articolo V.

VIII. Dall'essere equivalenti i due rettangoli ABCD, BFEG, quando l'altezza BF del secondo sta all'altezza BC del primo, come la base AB del primo alla base BG del secondo, ne risulta pure, che quando quattro linee BF, BC, AB, BG sono tali che la prima sta alla seconda, come la terza alla quarta, il rettangolo che ha per altezza e per base la prima e la quarta di queste linee è equivalente al rettangolo che ha per altezza e per base la seconda e la terza.

Proporzione.

IX. Quando quattro quantità, come le linee predette

BF, BC, AB, BG, sono tali che la prima sta alla seconda come la terza alla quarta, si dice che queste quattro quantità sono in proporzione, o che formano una proporzione. Così 6, 9, 18, 27 sono in proporzione; perchè 6 è contenuto tante volte in 9, quante 18 in 27. Così pure sono in proporzione i quattro numeri 15, 25, 75, 125.

Termini di una proporzione.

X. Fra le quattro quantità che formano una proporzione, la prima e l'ultima si chiamano i *termini estremi*, o semplicemente gli *estremi;* la seconda e la terza si chiamano i *termini medii*, o semplicemente i *medii*.

Come si enunçiano le proposizioni dei numeri VII *e* VIII.

Poste queste definizioni, le proposizioni degli articoli VII e VIII si enuncieranno così:

XI. In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medii.

XII. Se quattro quantità sono tali che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medii, queste quattro quantità formano una proporzione.

Regola del tre, ossia *modo di trovare questo termine di una proporzione.*

XIII. Queste due proposizioni sono di grandissimo uso, e se ne ricava, tra le altre cose, la dimostrazione della regola che in aritmetica si suol chiamare *Regola del tre*. Per dare un' idea di questa regola, noi ne porgeremo un esempio, che è la migliore maniera di farsi intendere.

Supponiamo, che 24 lavoratori abbiano fatto 30 metri di lavoro in un determinato tempo; si dimanda quanti metri ne faranno 64 lavoratori in un tempo eguale.

È evidente che per sciogliere il quesito bisogna trovare un numero che stia al 64, nella ragione stessa che il 30 sta al 24. Ora, per l'art. XI, questo numero sarà tale, che il suo prodotto per 24 uguaglierà il prodotto di 30 per 64. Ma il prodotto di 30 per 64 è 1920. Dunque il numero cercato sarà quello, che moltiplicato per 24 dà 1920, e per poco che il lettore conosca la natura delle operazioni dell'aritmetica, facilmente scorgerà che questo numero dee essere il quoziente della divisione di 1920 per 24, cioè a dire 80. I sessantaquattro lavoratori faranno dunque nel tempo indicato ottanta metri di quel lavoro.

In generale per trovare il quarto termine di una proporzione, di cui sieno dati i tre primi, bisogna fare il prodotto del secondo e del terzo, cioè dei medii, e dividere questo prodotto pel primo termine della proporzione.

Utilità e necessità di questa regola.

XIV. L'esempio che abbiamo scelto è così facile ch'esso forse non basterà a rendere manifesta la necessità del metodo precedente, potendo in questo caso il solo naturale accorgimento far trovare il numero cercato. Si vede infatti che il 30 supera il 24 di un quarto, e che così bisogna, che il numero cercato superi pure di un quarto il 64, e questo numero per conseguenza è 80. Ma vi ha de' casi ne' quali più difficilmente si troverebbe la ragione che passa tra i due primi termini della proporzione.

Per esempio, si cerca un quarto proporzionale a questi tre numeri 259, 407, 483.

Per trovarlo, secondo il metodo precedente, si moltiplica 483 per 407, ed il prodotto che è 196581, si divide per 259: si trova così 759 pel quarto termine cercato.

Non si sarebbe potuto trovare in altro modo questo quarto termine, se non per via di tentativi. Vero è che considerando attentamente i numeri proposti si sarebbe venuto a capo di scorgere che 148, eccesso di 407 su 259, contiene quattro settime parti di 259, e che così è necessario aggiungere a 4 3 il numero 276 che contiene quattro settime parti dello stesso 483. Ma la generalità e la certezza del metodo precedente ci esimono dal dover fare replicati tentativi, i quali molte volte potrebbero riuscire infruttuosi.

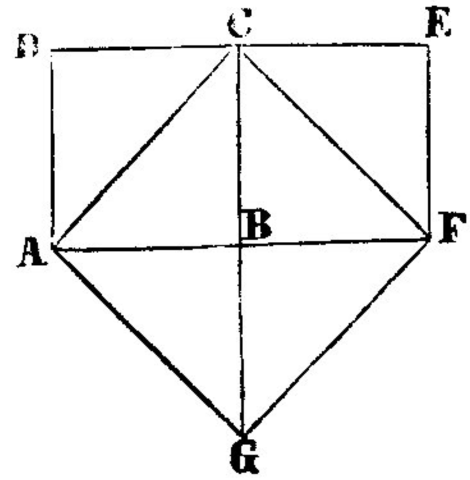
Come si sommano due quadrati.

XV. Quando si vorranno sommare insieme due quadrati, si opererà nella medesima maniera come per due rettangoli, i quadrati essendo rettangoli che hanno l'altezza uguale alla base. Si trasformerà dunque uno de' quadrati, per esempio, il più piccolo, in un rettangolo che abbia per altezza il lato del quadrato maggiore, e collocandolo accanto a questo quadrato, le due figure verranno ad unirsi in un rettangolo solo.

Come si forma un quadrato doppio di un quadrato dato.

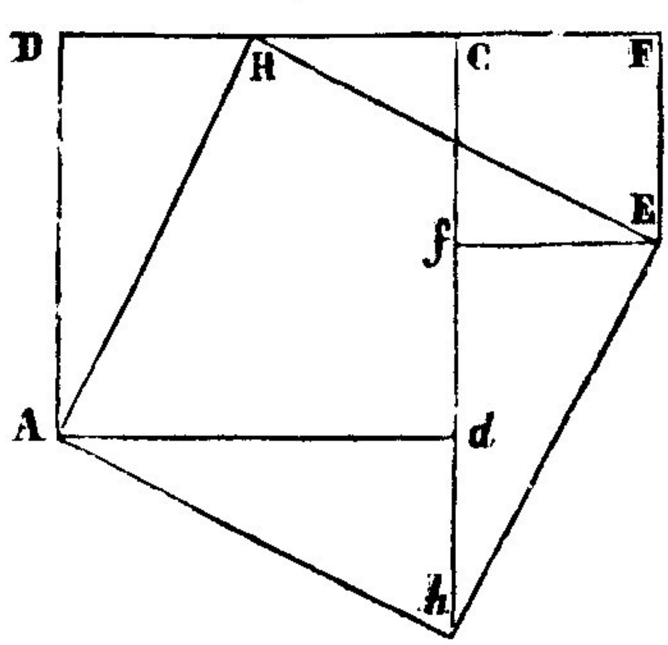
XVI. Si può ancora proporre di formare un quadrato eguale alla somma di due quadrati dati: il qual problema facilmente si risolve nel modo seguente:

Fig. 119.



Supponiamo in primo luogo, che i due quadrati ABCD, CBFE (fig. 119), che vogliono ridursi in un solo quadrato, sieno uguali fra loro; è facile l'avvertire, che segnando le diagonali AC e CF, i triangoli ABC e CBF presi insieme avranno superficie equivalente a quella di uno dei dati quadrati. Dunque trasportando al dissotto di AF i due altri triangoli DCA e CEF, si farà il quadrato ACFG, nel quale il lato AC sarà la diagonale del quadrato ABCD, e che avrà la superficie eguale alla somma di quelle dei due quadrati proposti.

Fig. 120.



Come si forma un quadrato eguale alla somma di due quadrati dati.

XVII. Supponiamo ora che si voglia fare un quadrato uguale alla somma dei due quadrati disuguali ADC*d*, CFE*f* (fig. 120), ossia trasformare la figura ADFE*fd* in un quadrato equivalente.

Per seguire un metodo analogo a quello che ci è così ben riuscito nel caso particolare che precede, cerchiamo se sia possibile trovare sulla linea DF un punto H, tale

1° Che tirando le linee AH e HE, e facendo girare i triangoli ADH, EFH, attorno i punti A ed E finchè vengano nelle posizioni A*dh*, E*fh*, questi due triangoli si congiungano in *h*;

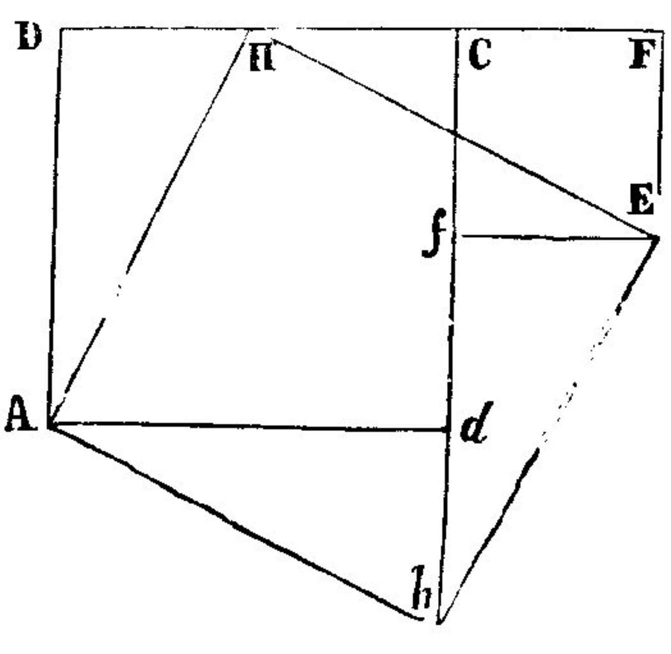
2° Che i quattro lati AH, HE, E*h*, *h*A sieno eguali, e perpendicolari gli uni agli altri.

Or questo punto H si trova facendo DH uguale al lato CF ovvero EF. Poichè supponendo DH eguale a CF, ne segue primieramente, che se si fa girare ADH attorno al suo angolo A, sinchè prenda la posizione A*dh*, il punto H arrivato in *h*, sarà distante dal punto C per un intervallo uguale a DF.

Ancora: dall'essersi supposti eguali DH e CF, ne segue pure che HF sarà uguale a DC, e così girando il triangolo EFH attorno di E per prendere la posizione E*fh*, il punto H arriverà al medesimo punto *h*, distante da C per un intervallo uguale a DF.

Dunque la figura ADFE*fd* sarà trasformata in una figura di quattro lati AHE*h*. Dunque resta da vedere soltanto, se questi quattro lati siano uguali e perpendicolari tra loro.

Fig. 120.



Or l'egualità di questi quattro lati è evidente, poichè A*h* ed *h*E non sono altro che i lati stessi AH e HE trasportati in una nuova posizione; e l'ugualità di questi due ultimi si ricaverà da questo, che essendo DH uguale a CF, ovvero ad FE, ed AD ad HF, i due triangoli ADH, HEF saranno eguali in tutte le loro parti.

Resta finalmente da vedere se i lati della figura AHE*h* formino angoli retti frà loro. Or di ciò è facile l'assicurarsi, riflettendo, che mentre HAD gira attorno di A, per arrivare in hAd, di necessità il lato AH dee descrivere un angolo eguale a quello descritto dal lato AD. Or il lato AD fa un angolo retto DAd passando in Ad. Dunque il lato AH farà pure un angolo retto HAh passando in Ah.

Quanto agli altri angoli H, E, h, si vede pure che debbono esser retti; poichè non è possibile che una figura, terminata da quattro lati uguali, abbia un angolo retto, senza che gli altri tre riescano parimente retti.

Il quadrato della ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati de' due cateti.

XVIII. Se ora si osserva che i due quadrati $ADCd$, $CFEf$ hanno per lati rispettivamente i due lati minori AD, e DH del triangolo rettangolo ADH, e che il quadrato $AHEh$, uguale alla somma degli altri due, è descritto sul lato maggiore AH del medesimo triangolo, il qual lato si nomina comunemente l'*ipotenusa* del triangolo rettangolo, verrà a scoprirsi questa famosa proprietà de' triangoli rettangoli; che il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti sugli altri due lati. Questi altri due lati si sogliono chiamare i *cateti*.

Fig. 121.

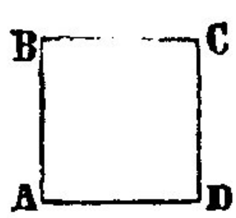


Fig. 122.

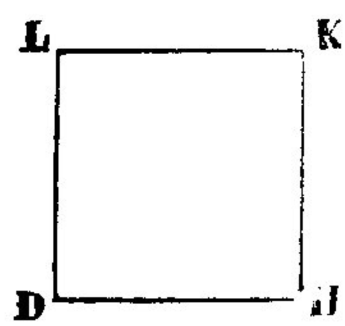
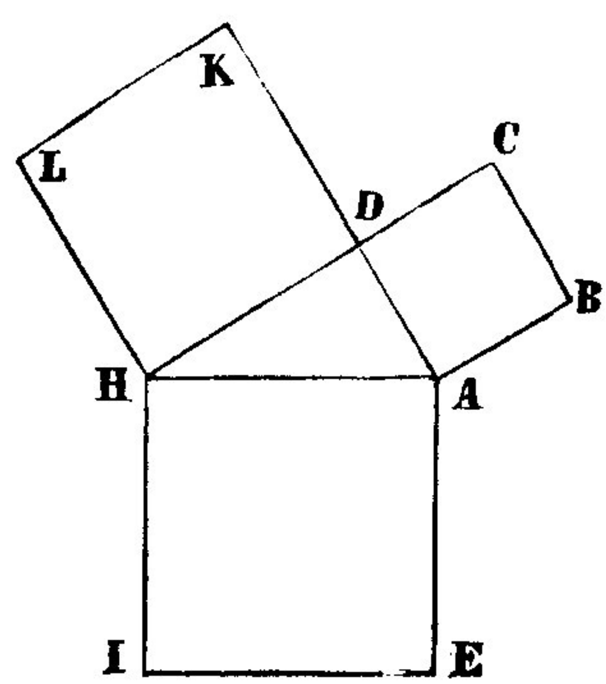


Fig. 123.



Modo semplice di formare due quadrati in un solo.

XIX. Dunque allorchè si vorrà fare un quadrato equivalente a due quadrati HDLK, ABCD (fig. 121 e 122), sarà inutile di metterli a lato uno all'altro, e di scomporli, come s'è fatto nell'articolo XVII. Basterà portare i loro lati in

AD, DH (fig. 123), in modo che facciano un angolo retto, e tirare la linea AH: poichè questa linea sarà il lato del quadrato cercato AHIE, eguale alla somma dei due quadrati proposti.

La figura fatta sull'ipotenusa è uguale alla somma delle figure fatte sui due cateti.

Fig. 124.

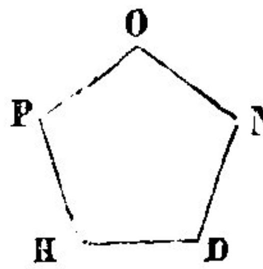
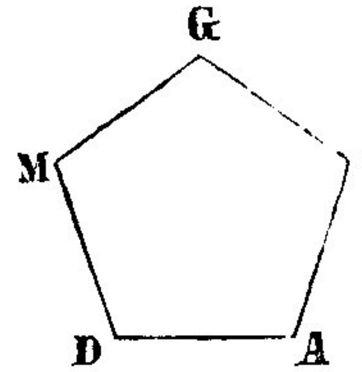
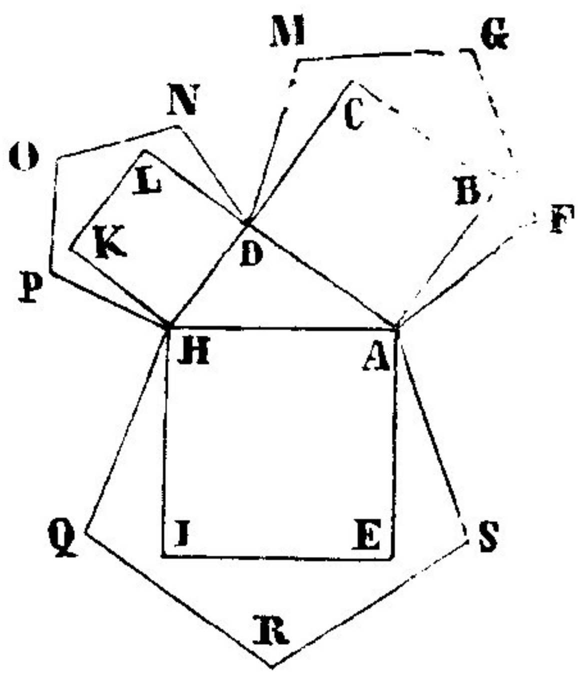


Fig. 125.



XX. Date due figure simili DAFGM, DHPON (fig. 124 e 125, se si vorrà farne una terza simile alle prime, ed uguale in superficie alla somma di esse, basterà portare le basi AD, DH di queste figure su i due lati di un angolo retto ADH (fig. 126), e l'ipotenusa AH del triangolo ADH sarà la base della figura cercata.

Fig. 126.



Per comprendere la ragione di questo precetto, si costruiscano i quadrati ABCD, DHKL, AHIE sulle basi delle tre figure simili; risulta dall'articolo XVIII, che il quadrato AHIE sarà eguale alla somma dei due altri quadrati ABCD, DHKL. Or le figure simili sono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi (Parte I, articolo XLVII): dunque il quadrato ABCD sarà contenuto tante volte nella figura DAFGM, quante volte è il quadrato DHKL nella figura DHPON, ed il quadrato AHIE nella AHQRS; onde facilmente si conchiude, che la figura AHQRS sarà uguale alla somma delle altre due. Supponiamo, per esempio, che ciascuno di questi quadrati sia la metà della figura nella quale è compreso; nessuno dubiterà che la figura AHQRS non sia eguale alla somma delle altre due, poichè la sua metà sola è uguale alla metà delle due figure DHPON, DAFGM. Il medesimo succederebbe se i quadrati ABCD, DHKL, AHIE fossero i due terzi, i tre quarti, ecc., delle figure DAFGM, DHPON, AHQRS.

Come si sommino tre o più figure simili in una sola.

XXI. Se si vorranno unire in una somma tre, quattro, ecc., figure simili, o, quel che è lo stesso, tre, quattro, ecc., quadrati, il metodo sarà sempre il medesimo. Quando si voglia, per es., sommarne tre, si faccia un quadrato uguale alla somma dei due primi; poi questo nuovo quadrato si sommi col terzo; e così si avrà un quadrato uguale alla somma dei tre quadrati proposti.

Come si fa un quadrato cinque, sei e più volte maggiore di un quadrato dato.

XXII. Ne segue che per fare un quadrato cinque, sei, sette, ecc., volte più grande di un altro, basta seguir il metodo precedente; pel problema inverso poi, cioè per fare un quadrato che sia la quinta, la sesta, ecc., parte d'un quadrato proposto, varrebbe ancora lo stesso modo, purchè si ricordasse la maniera data per trovare una quarta proporzionale a tre linee date. Ma nella terza parte di questa opera daremo un metodo più diretto e più comodo per sciogliere questa specie di problemi.

59. **Quadrato di un numero** dicesi il prodotto di quel numero moltiplicato per se stesso una volta.

Radice quadrata di un numero intendesi il numero che moltiplicato per se stesso una volta produce il numero dato. Così per es., essendo $9 \times 9 = 81$; l'81 dicesi il quadrato del 9 e il 9 dicesi la radice quadrata dell'81.

Quantità incommensurabili si dicono quelle che non si possono misurare con una stessa unità di misura qualunque.

Il lato del quadrato e la sua diagonale sono incommensurabili.

XXIII. L'addizione delle figure simili ci somministra una prova irrecusabile della necessità di abbandonare l'uso delle scale, quando si vogliono fare le operazioni in modo suscettivo di rigorosa dimostrazione.

Fingiamo, per esempio, che si abbia da fare un quadrato doppio di un altro. Chi ignorasse il metodo dell'articolo XVI, dovrebbe attenersi a quello che segue:

Egli dividerebbe il lato del quadrato dato in un gran numero di parti: per esempio in 100. Moltiplicherebbe 100 per 100, e troverebbe 10000 pel valore dell'area del dato quadrato; epperò sarebbe 20000 il valore dell'area del quadrato domandato.

Ma dal valore di quest'area non se ne ricaverebbe tuttavia la maniera di descrivere il quadrato richiesto. Sarebbe necessario ancora conoscere il suo lato espresso per un numero, il quale dovrebbe esser tale, che moltiplicandolo per se medesimo, o, come si suol dire, quadrandolo, il prodotto desse 20000.

Or vano sarebbe il cercare questo numero, poichè 141 moltiplicato per se medesimo darà 19881 che è minore di 20000, e 142 darà 20164 che è maggiore di 20000; e però i numeri 141 e 142 sono il primo minore, il secondo maggiore di quello che si vorrebbe trovare.

Altri potrà forse darsi a credere, che dividendo il lato del quadrato proposto in più di 100 parti, si possa trovare pel lato del quadrato di superficie doppia del primo, un numero intero di quelle parti. Ma qualunque prova si faccia, si troverà sempre di aver cercato indarno due numeri,. de' quali uno esprima il lato (o come si suol dire la *radice*) di un quadrato, e l'altro il lato ovvero la radice di un quadrato doppio del primo.

XXIV. Di fatti si dimostra in aritmetica, che se due numeri non sono multipli l'uno dell'altro, cioè se uno non contiene l'altro un numero intero di volte, il quadrato del più grande non sarà neppure multiplo del quadrato del più piccolo. Così, per esempio, 5, non potendosi dividere esattamente per 4, il suo quadrato 25 non può neppure dividersi esattamente per 16 quadrato di 4.

Facendo dunque i quadrati di due numeri, dei quali uno sia più grande dell'altro, ma men che doppio di esso, si otterranno due altri numeri, de' quali uno sarà minore del quadruplo dell'altro, ma che non potrà mai essere nè il doppio nè il triplo di esso. Dunque ancora se si divide il lato di un quadrato in qual numero di parti si voglia, il lato del quadrato doppio che, secondo quello che si è dimostrato nell'articolo XVI, sarà la diagonale di questo quadrato, non conterrà un numero intero di queste parti: la qual cosa si esprime nel linguaggio geometrico, dicendo che il lato del quudrato e la sua diagonale sono *incommensurabili.*

Altre linee incommensurabili tra loro.

XXV. Si può di più osservare che vi ha un'infinità di altre linee che non hanno alcuna comune misura; perchè se si scrivono le due serie

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	ecc.
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	ecc.

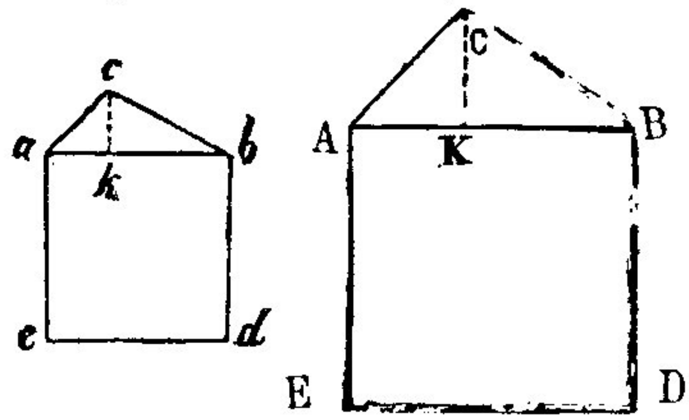
la prima delle quali esprime i numeri naturali, e l'altra i loro quadrati, si vede che come i numeri che sono tra il 5 ed il 9, tra il 9 ed il 16, tra il 16 ed il 25, ecc., non hanno alcuna radice esatta, così i lati di due quadrati, de' quali l'uno sia triplo, o quintuplo, o sestuplo, ecc., dell'altro, sono incommensurabili tra loro.

I lati delle figure simili sono proporzionali anche quando sono incommensurabili.

XXVI. Dall'essere alcune linee incommensurabili rispetto ad altre, potrà, forse alcuno rivocare in dubbio l'esattezza delle dimostrazioni, di cui ci siamo serviti a provare la proporzionalità delle figure simili. Perchè paragonando queste figure (Parte I, art. XXXIV e segg.), noi abbiamo sempre ammesso che esistesse una scala, atta a misurarne tutte le parti: la qual supposizione sembrerà non potersi generalmente ammettere a motivo di quel che ora abbiamo detto. Bisogna dunque che ci rifacciamo sulle nostre stesse pedate a fin di ricercare, se le nostre proposizioni reggano tuttavia, o se debbano essere in alcuna parte emendate.

XXVII. E cominciando dalle cose dette nell'art. XXXIX della prima parte, veggiamo se sia vero assolutamente che due triangoli, come *abc*, ABC, (fig. 127 e 128), che hanno gli stessi angoli, abbiano i loro lati proporzionali. Supponiamo, per es., che essendo *ab* la base del primo, quella del secondo sia una retta AB, uguale alla diagonale d'un quadrato del quale *ab* sia lato, e cerchiamo se in questo supposto la ragione di AC ad *ac* sarà la medesima che quella di AB ad *ab*.

Fig. 127. *Fig.* 128.



Ancorchè non possa dubitarsi che per quanto grande sia il numero delle parti in cui si supporrà divisa la linea *ab*, la AB non potrà mai contenere esattamente un numero intero di queste parti; con tutto ciò facilmente si comprende che quanto più grande sarà questo numero, tanto più AB si approssimerà a poter essere esattamente misurata dalle parti di *ab*. Supponiamo *ab* divisa in 100 parti; il numero di queste parti contenute in AB, si troverà compreso tra 141 e 142 (art. XXIII). Contentiamoci di 141, e trascuriamo il piccolo residuo. È chiaro (Parte I, art. XXXIX) che AC pure conterrà 141 centesime parti di *ac*.

Supponiamo ora *ab* divisa in 1000 parti; il numero di queste parti che si conterranno in AB sarà compreso tra 1414 e 1415. Prendiamo 1414 e trascuriamo il residuo. Si troverà medesimamente che AC conterrà 1414 millesime parti di *ac*; ed in generale AC conterrà sempre altrettante parti di *ac* con un residuo, quante parti di *ab* si conterranno in AB con un residuo.

Inoltre questi residui, come abbiamo osservato, saranno tanto più piccoli, quanto il numero delle parti *ab* sarà più grande. Sarà dunque permesso di trascurare questo residuo, se s'immagina la divisione di *ab* portata all'infinito, ed allora si potrà dire, che il numero delle parti di *ac*, contenute in AC, sarà uguale al numero delle parti di *ab* contenute in AB, e che così AC sarà ad *ac*, come AB ad *ab*.

Egli è dunque rigorosamente dimostrato che qnando due triangoli hanno i medesimi angoli, essi hanno ancora i lati proporzionali, abbiano o non abbiano questi una comune misura.

La proposizione (Parte I, art. XLV), per cui si stabilisce la proporzionalità dei lati omologhi nelle figure simili, si giustifica nel modo medesimo.

Le aree delle figure simili stanno tra loro come i quadrati dei lati, anche quando questi sono incommensurabili.

XXVIII. Col mezzo di simili ragionamenti si vedrà pure che le proposizioni spiegate negli articoli XLIV e XLVII della prima Parte, nelle quali si è mostrato che le aree dei triangoli e delle altre figure simili stanno tra loro come i quadrati de' lati omologhi, sono in generale sempre vere, quand'anche i lati di queste figure sieno incommensurabili.

Fig. 129.

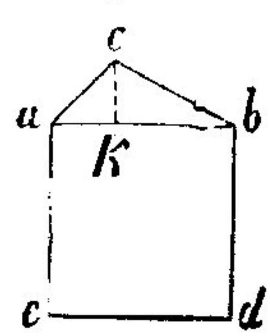
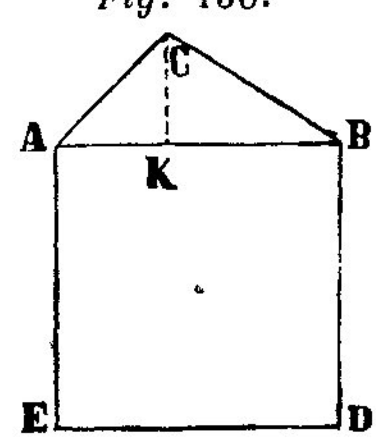


Fig. 130.



Prendiamo per esempio i triangoli simili *abc*, ABC (fig. 129 e 130), dei quali supporremo le altezze incommensurabili colle basi. In questo caso non vi sarà alcun quadrato, per quanto sia piccolo, che possa servire di misura comune a questi triangoli, ed a' quadrati fatti sulle loro basi; cioè a dire, che le aree *abc* ed *abde* saranno incommensurabili tra loro, e così pure le aree ABC ed ABDE; ma non sarà men vero tuttavia che il triangolo ABC starà al quadrato ABDE, come il triangolo *abc* al quadrato *abde*.

Ciò si dimostra osservando che quanto più le parti della scala, di cui si farà uso per misurare AB e CF saranno piccole, e più potranno trovarsi numeri approssimati che esprimano la ragione di ABC ad ABDE. Dunque dividendo sempre la base *ab* del triangolo *abc* nel medesimo numero di parti in cui si divide la base AB del triangolo ABC, e trascurando i residui, si vedrà che i medesimi numeri serviranno sempre ad esprimere il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e quello del triangolo *abc* al quadrato *abde*. Spingendo col pensiero la divisione della scala fino all'infinito, i residui diventeranno assolutamente nulli; e si potrà dire, che i numeri i quali esprimeranno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, esprimeranno pure il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e che così il triangolo *abc* starà al quadrato *abde*, come il triangolo ABC al quadrato ABDE.

Il medesimo avverrà per tutte le figure simili.

FINE DELLA SECONDA PARTE.

PARTE TERZA

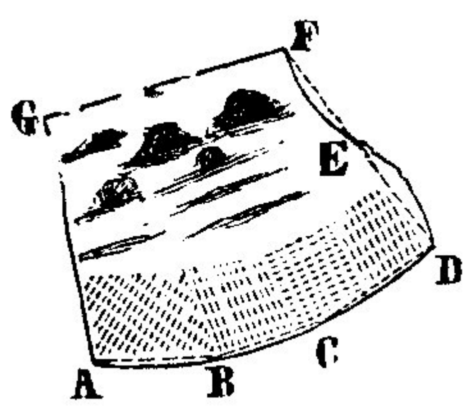
DELLA MISURA DELLE FIGURE CIRCOLARI E DELLE LORO PROPRIETÀ

INTRODUZIONE

Trovate le regole per misurare qualsivoglia figura rettilinea, i Geometri han pur voluto ricercare il modo di misurar quelle che son limitate da linee curve. I terreni, ed in generale gli spazi, de' quali si cerca la misura, non sono sempre terminati da linee rette.

Vero è che pei bisogni della pratica le figure curvilinee e le figure mistilinee, cioè limitate in parte da linee rette ed in parte da linee curve, si possono ridurre a figure tutte rettilinee, come già abbiamo detto. Poichè per misurare una figura come ABCDEFG (fig. 131) si può riguardare il lato AD come formato dalla unione di due, di tre, o più linee rette; poi sostituendo la retta FD alla curva FED, si ha la figura rettilinea ABCDFG, la quale sì poco differisce dalla figura data, che senza error sensibile può riguardarsi come ad essa equivalente, e misurarsi coi metodi finquì insegnati.

Fig. 131.



Ma i Geometri non rimarranno soddisfatti di questo modo

Fig. 132.

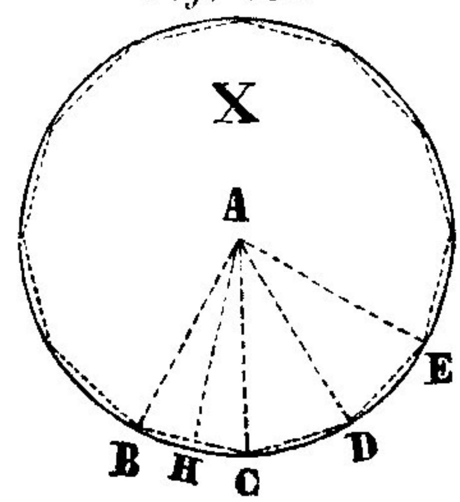
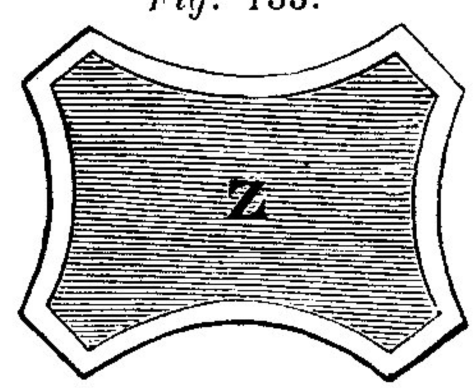
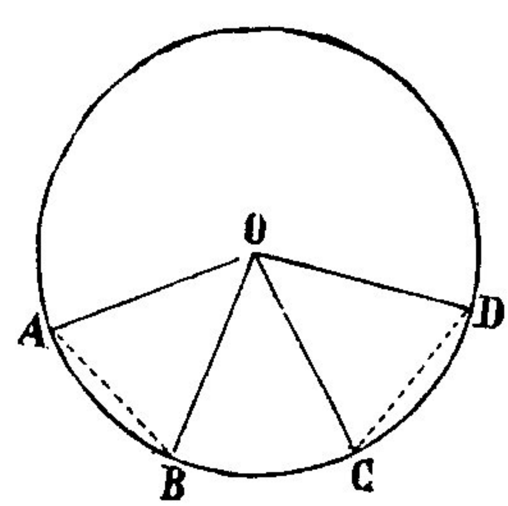


Fig. 133.



di operare: essi vogliono operazioni rigorose, e vi sono inoltre de' casi nei quali la trasformazione di una figura curvilinea o mistilinea in una figura tutta rettilinea richiederebbe che il suo contorno si dividesse in un numero così grande di parti, che il metodo indicato riuscirebbe impraticabile. Così non converrebbe attenersi a questo metodo quando si dovesse misurare, per esempio, la figura Z (fig. 133) ovvero l'intiero circolo X (fig. 132). Bisognerà dunque prendere un'altra strada per trovare la misura di questa sorte di spazii. Noi parleremo soltanto di quelli, il contorno de' quali non contiene altre curve che archi di circolo.

Fig. 134.



In un circolo ad archi uguali corrispondono corde uguali e reciprocamente.

62. 1° Sieno uguali i due archi AB, CD; saranno uguali anche i due angoli al centro AOB, COD (29), e quindi uguali anche i triangoli AOB, COD (21, 2ª), e quindi uguali anche le corde AB, CD.

2° Sieno uguali le due corde AB, CD; saranno uguali anche i due triangoli AOB, COD (21, 1ª), e quindi uguali anche gli angoli AOB, COD, e quindi uguali anche gli archi AB, CD (29) (fig. 134).

Le corde equidistanti dal centro sono uguali; di due corde è maggiore quella che è meno distante dal centro; il diametro è la corda massima del circolo.

63. Proposizioni queste che riescono evidenti appena enunciate.

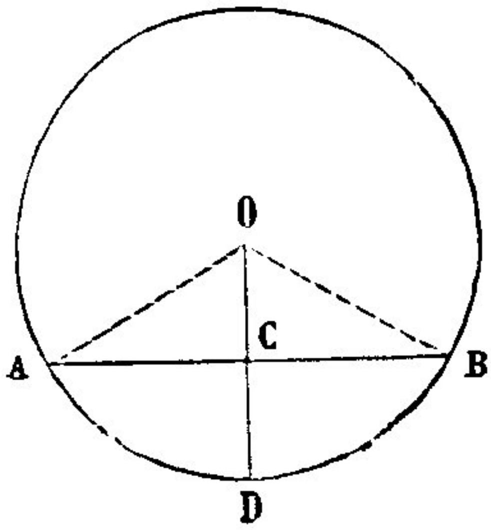


Fig. 135.

Il raggio perpendicolare alla corda divide la corda e l'arco da essa sotteso per metà.

64. Infatti, condotti i due raggi OA, OB, si ha il triangolo isoscele AOB, del quale AB è la base e OC la perpendicolare alla base. Dunque AC = CB, e l'angolo AOD = BOD, e quindi l'arco AD = DB (23, 1ª e 2ª) (fig. 135).

La perpendicolare innalzata dalla metà della corda passa pel centro.

65. Poichè il centro O è ugualmente distante da A e da B, esso deve essere uno dei punti della perpendicolare innalzata dal punto di mezzo della AB (59).

Le corde parallele comprendono sulla circonferenza archi uguali.

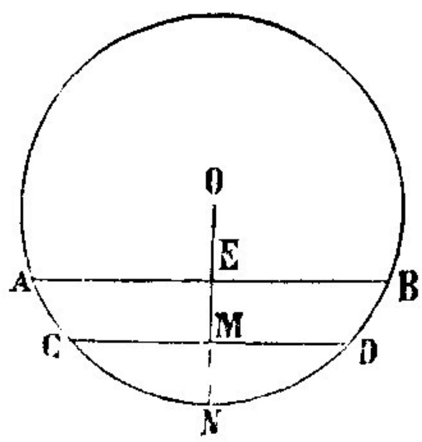


Fig. 136.

66. Sieno AB e CD due corde parallele; dico che l'arco AC è uguale all'arco BD. Infatti, abbassata dal centro O la ON perpendicolare alle due corde, si avrà l'arco AN uguale all'arco BN, e l'arco CN uguale all'arco DN; e sottraendo si avrà ancora: AN — CN = BN — DN, ossia arco AC = arco BD (fig. 136).

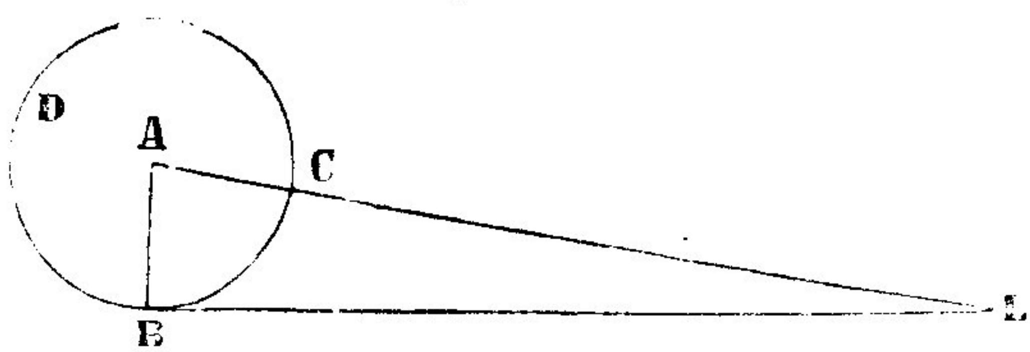
L'area del circolo ha per misura il prodotto delle circonferenze per la metà del raggio.

I. Supponiamo che s'abbia a misurare l'area del circolo X (fig. 132). Si osserverà che iscrivendo in esso un poligono regolare BCDE ecc., quanto maggiore sarà il numero de' lati di questo poligono, tanto più esso si approssimerà al circolo. Ora si è veduto che l'area di qualsivoglia poligono regolare (Parte 1ª, art. XXII) è uguale a tante volte il prodotto del lato BC per la metà dell'apotema AH, quanti sono i lati del poligono; o, in altre parole, che quest'area ha per misura il prodotto del contorno intiero BCDE ecc. per la metà dell'apotema. Dunque, poichè accrescendo all'infinito il numero de' lati del poligono, la sua area, il suo contorno ed il suo apotema uguaglieranno l'area, il contorno ed il raggio del circolo, così l'area di questo avrà per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.

L'area del circolo è uguale a quella di un triangolo che abbia per base una retta eguale alla circonferenza ed il raggio per altezza.

II. Ne segue che la superficie di un circolo BCD (figura 137) equivale a quella di un triangolo ABL che abbia

Fig. 137.



per altezza il raggio AB e per base una retta BL, eguale alla circonferenza BCD.

Ragione della circonferenza al diametro è il numero che esprime quante volte la circonferenza di un circolo è maggiore del suo diametro.

Questa ragione non si può trovare esattamente; però si trova con approssimazione quanto grande si voglia.

III. Per misurare la superficie di un circolo basta dunque conoscerne il raggio e la circonferenza. Il raggio facilmente si misura; non così la circonferenza. Tuttavia per molti usi pratici si potrà inviluppare un filo intorno al circolo e prendere la lunghezza di questo filo disteso in linea retta per misura della circonferenza.

Fin ad ora non si è potuto misurare geometricamente la circonferenza del circolo, cioè determinare esattamente la ragione che essa ha al raggio. Si trova bensì questa ragione approssimata fino ai centomillesimi, ai milionesimi o generalmente con errore quanto piccolo si voglia, ma senza poterne però determinare rigorosamente il valore.

Ragione d'Archimede.

IV. L'approssimazione più semplice che si sia trovata è quella di Archimede. Diviso il diametro in sette parti, la circonferenza contiene più che 21 e meno che 22 di queste parti: e la giusta misura è più vicina alle 22 che alle 21.

Ragione decimale.

67. Il rapporto della circonferenza al diametro calcolato in numeri decimali con approssimazione portata fino alla settima cifra decimale è 3,1415926 : 1; il che vuol dire che un circolo di diametro 1 ha una circonferenza di lunghezza 3,1415926.

Il rapporto di Archimede sopraindicato, cioè 22/7 ridotto in numero decimale è 3,142857, numero che, come si vede, differisce dal rapporto decimale fin dalla terza cifra; da ciò risulta che, prendendo quel rapporto, si ottiene l'approssimazione solamente fino ai centesimi.

Però questa approssimazione nella massima parte dei casi più comuni è sufficiente.

Le circonferenze di due circoli stanno fra loro come i loro raggi.

V. Del resto egli è chiaro, che se si conoscesse esattamente la ragione della circonferenza di un dato circolo al suo raggio, si conoscerebbe pure quella di qualsivoglia altra circonferenza al suo raggio, dovendo questa ragione essere la medesima in tutti i circoli. Infatti è chiaro, che tutte le operazioni, che si saranno fatte per misurare una circonferenza in parti del suo raggio, si dovranno ripetere precisamente nello stesso modo per misurare qualunque altra circonferenza, e che così si troverà per tutte le circonferenze lo stesso numero di parti dei loro rispettivi raggi.

Le aree di due circoli stanno fra loro come i quadrati dei raggi.

VI. Egli è evidente che i circoli debbon pur godere della proprietà generale di tutte le figure simili (Parte 1ª, articolo XLVII), voglio dire che le loro superficie staranno fra loro come i quadrati delle loro dimensioni omologhe; ma siccome i circoli, propriamente parlando, non hanno lati, invece di questi si debbono considerare i loro raggi; cioè, insomma, le aree di circoli sono proporzionali ai quadrati de' loro raggi.

Se non paresse evidente che questa proposizione è conseguenza delle cose dette nell'art. XLVII della prima parte, e se ne volesse una dimostrazione particolare, si osserverebbe che torna assolutamente al medesimo il far confronto delle aree dei due circoli BCD, EFG (fig. 138 e 139), ovvero di quelle de' triangoli ABL, AEM, che hanno per base le rette BL e EM, eguali alle circonferenze BCD, EFG sviluppate, e per altezze i raggi AB ed AE, poichè le aree di questi triangoli sono rispettivamente equivalenti a quelle de' circoli BCD, EFG. Or per l'articolo citato questi triangoli stanno tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi AB, AE, raggi dei circoli BCD ed EFG ecc. Dunque ecc.

Fig. 138.

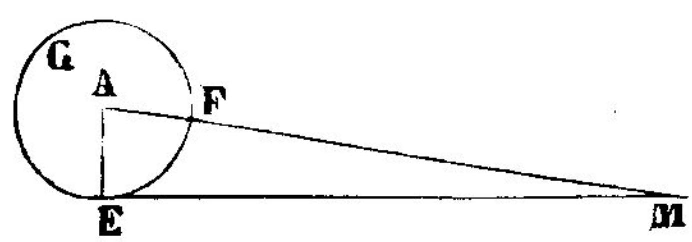
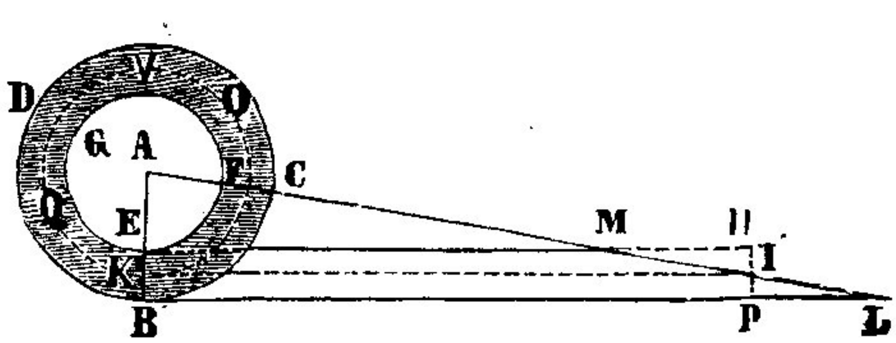


Fig. 139.



Modo di formare un circolo equivalente alla somma di due circoli dati.

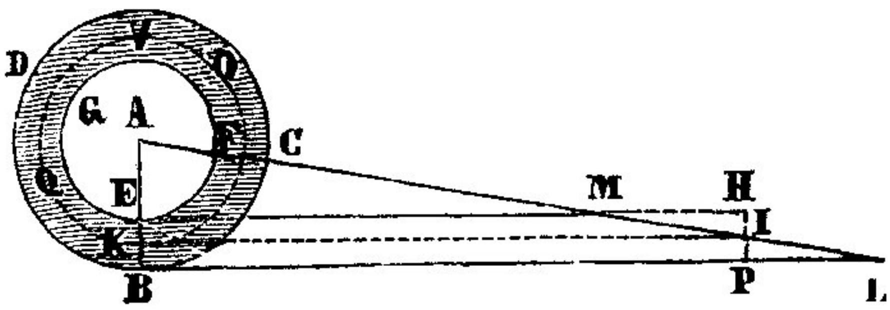
VII. I circoli a cagione della loro similitudine godono, come tutte le altre figure simili, della proprietà che prendendo i tre lati di un triangolo rettangolo per raggi, e descrivendo tre circoli, quello che avrà per raggio l'ipotenusa eguaglierà i due altri presi insieme.

Così si potrà sempre trovare un circolo uguale alla somma di due circoli dati senza dover misurare ciascuno di questi circoli. Se si volesse, per esempio, fare una vasca circolare, la quale contenga tant' acqua quanta ne contengono due altre vasche circolari della stessa profondità, si otterrebbe facilmente l'intento col mezzo dato.

Corona circolare è lo spazio compreso fra due circonferenze concentriche.

Sua misura.

Fig. 140.



VIII. Se si avrà da misurare la superficie di una corona V (fig. 140) compresa tra due circoli concentrici EFG, BCD, cioè tra due circoli che hanno lo stesso centro, il primo pensiero che si presenterà sarà di misurare separatamente le superficie de' due circoli e di sottrarre la più piccola dalla più grande. Ma è facile accorgersi che il problema si può risolvere in modo più spedito.

Immaginiamo infatti un triangolo ABL che abbia per altezza il raggio AB, e per base la retta BL uguale alla circonferenza BCD. Tirando pel punto E la retta EM parallela a BL, questa retta sarà uguale alla circonferenza EFG; poichè, a cagione della similitudine de' triangoli AEM, ABL vi sarà la medesima proporzione tra AB e BL che tra AE ed EM. Or per ipotesi BL è uguale alla circonferenza di cui AB è il raggio; dunque EM uguaglierà la circonferenza che avrà per raggio la linea AE. E similmente ogni altra linea KI parallela a BL sarà sempre eguale alla circonferenza della quale il raggio sia AK.

Dall' ugualità tra la circonferenza EFG e la retta EM ne segue necessariamente che la superficie del triangolo AEM è eguale a quella del circolo EFG. Dunque lo spazio rettilineo EBLM sarà uguale all' anello proposto V. Ma questo spazio EBLM si può ancora facilmente cangiare in un rettangolo EBPH, dividendo ML in due parti uguali

MI e IL, e tirando pel punto I la retta **HIP** perpendicolare alla BL, poichè il triangolo aggiunto **MHI** sarà manifestamente uguale al triangolo sottratto PLI.

Dunque se pel punto I si tira la IK parallela a BL, la quale dividerà **EB** in due parti uguali, l'anello proposto eguale allo spazio EBLM, ovvero a EBPH avrà per misura il prodotto EB per KI, circonferenza, di cui AK sarà il raggio.

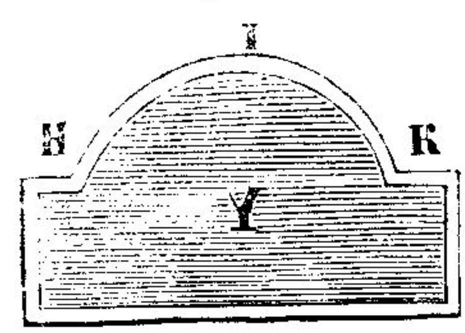
Dunque per misurare l'anello V bisogna moltiplicare la sua larghezza EB per la circonferenza KOQ descritta col raggio AK, medio aritmetico tra AE ed AB, cioè tale che di tanto supera il primo AE di quanto è superato dal secondo AB.

68. La figura EBLM, che rappresenta l'area della corona V, è un trapezio, di cui l'altezza è EB e i due lati paralleli sono le due rette BL, EM esprimenti le due circonferenze de' raggi AB, AE. Dunque la misura della corona si avrà dal *prodotto della sua larghezza* EB *per la semisomma delle due circonferenze di due raggi* AB *e* AE (pag. 38).

Segmento di circolo è lo spazio compreso tra un arco e la sua corda.

Settore di circolo è lo spazio compreso tra un arco e i due raggi condotti alle sue estremità.

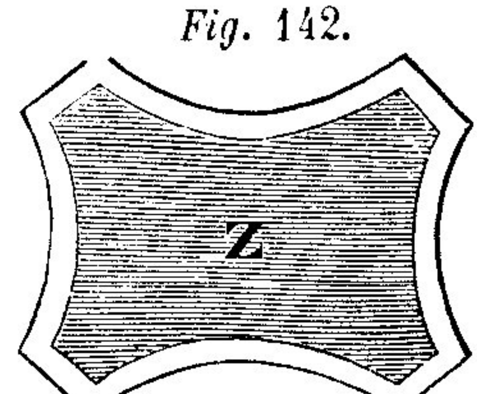
Fig. 141.



Come si misura una figura chiusa in parte da linee rette ed in parte da archi di circolo.

IX. Se si trattasse di misurare una figura Y (fig. 141) chiusa da archi circolari e da linee rette, ovvero una figura Z (fig. 142) tutta chiusa da archi di circolo, la difficoltà si ridurrebbe a misurare segmenti di circolo, cioè spazii, come ABCE (fig. 143) terminati da un arco ABC e dalla corda AC. Perchè le figure intieramente limitate da archi di circolo, ovvero da archi e da

Fig. 142.

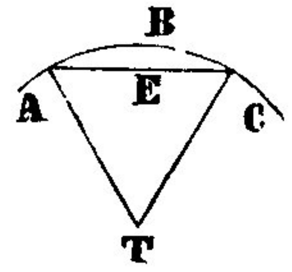


linee rette, possono tutte esser considerate come figure rettilinee accresciute o diminuite di alcuni segmenti.

Misura del segmento e del settore.

X. La misura di un segmento qualunque ABCE (fig. 143) è facile a trovare, allorchè si sa quella del circolo. Perchè tirando le linee AT, CT al centro T dell'arco, si formerà una figura ABCT chiamata settore, di cui l'area sarà al circolo come l'arco ABC all'intiera circonferenza, e che per conseguenza avrà per misura il prodotto della metà del raggio AT per l'arco ABC. Misurato così il settore, sottraendone il triangolo ACT, si avrà la misura del segmento ABCE.

Fig. 143.

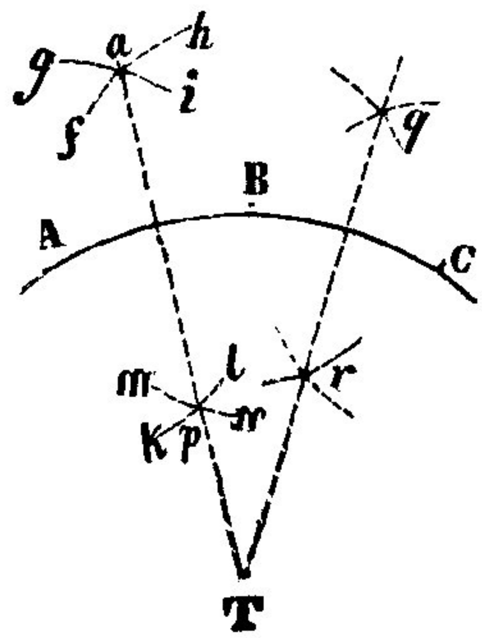


Come si trovi il centro di un arco di circolo dato.

XI. Spesso accade di dover misurare una figura come Y (fig. 141), limitata da un arco HIK, di cui non sia dato il centro; or senza conoscere questo centro non si può misurar la figura, perchè il metodo precedente esige che si conosca il raggio. Proponiamoci dunque ora di trovare il centro di un arco di circolo qualunque.

Sia ABC (fig. 144) l'arco di circolo proposto; presi ad arbitrio due punti A e B su quest'arco, da questi punti, come centri, si descrivano i quattro archi *gai*, *fah*, *lpk*, *mpn*, i due primi con uno stesso raggio preso ad arbitrio, ed i due altri col medesimo raggio o con un altro raggio qualunque; è chiaro, che il centro cercato dell'arco ABC sarà sulla retta *op*, che congiunge i punti d'intersezione *a*, *p*.

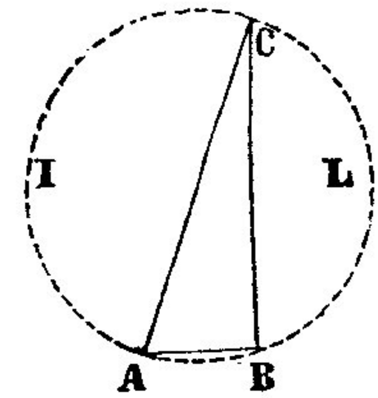
Fig. 144.



Scegliendo poscia un terzo punto C sull'arco ABC, ed operando sui punti B, C, come s'è fatto sui punti A, B, si avrà un'altra retta *qr*, sulla quale dovrà ancora trovarsi il centro domandato. Dunque questo centro sarà il punto T, dove s'incontrano le linee *ap*, *qr*.

Per tre punti dati si può sempre far passare una circonferenza di circolo.

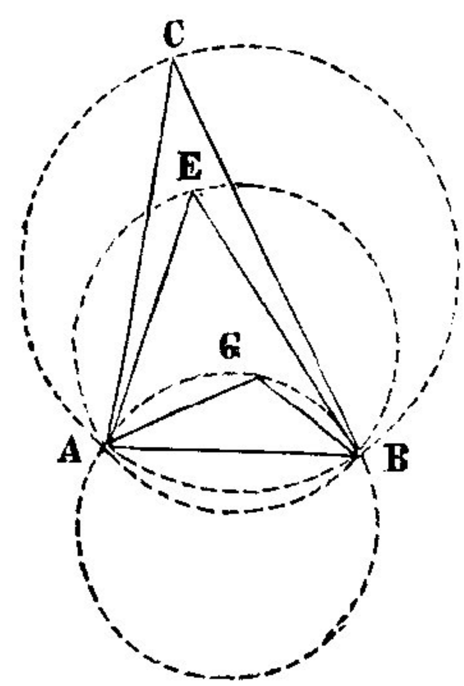
Fig. 145.



XII. Così, comunque si collochino tre punti, purchè non sieno in linea retta, si potrà sempre far passare un arco di circolo per questi tre punti; o, quel ch'è l'istesso, qualunque sia la ragion de' lati AB, AC, BC di un triangolo ACB (fig. 145), si potrà sempre circoscrivere un circolo a questo triangolo.

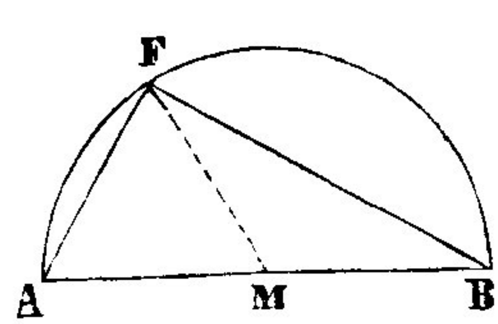
Le rette condotte da qualunque punto della semicirconferenza alle due estremità del diametro sono tra loro perpendicolari.

Fig. 146.



XIII. Il metodo dato per circoscrivere un circolo a un triangolo applicato successivamente a diversi triangoli ACB, AEB, AGB (fig. 146), più o meno alti rispetto alla lor base AB, mostrerà, che passando da un triangolo ACB, che abbia l'angolo al vertice molto acuto, ad altri triangoli AEB, AGB, che abbiano l'angolo al vertice più aperto, il centro del circolo circoscritto continuamente si accosta ad AB, e che questo centro passa al dissotto di AB quando l'angolo al vertice AGB ha una certa apertura. Or, vedendo questo centro passare al dissotto di AB per certi triangoli, dopo aver veduto che per altri esso trovasi al di sopra della base stessa AB, si dee provare il desiderio di sapere quale sia il triangolo AFB

Fig. 147.



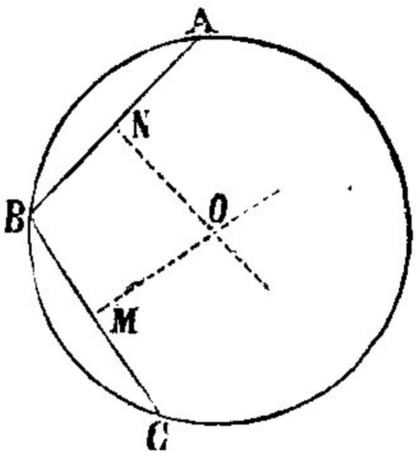
(fig. 147), per cui il circolo circoscritto ha il suo centro sulla stessa AB.

Notiamo, che in questo caso particolare, la porzione del circolo circoscritto al triangolo deve essere un semicircolo; poichè trovandosi il centro sulla base AB, le estremità della quale sono, secondo l'ipotesi nella circonferenza, il centro M dovrà essere situato nel punto di mezzo di AB, epperò questa retta sarà un diametro del circolo.

Notiamo ancora, che se da qualunque punto F del semicircolo si conducono le linee FA, FB, l'angolo AFB sarà retto. Perchè tirando FM, i due triangoli AFM, MFB saranno isosceli: dunque li due angoli AFM, MFB saranno rispettivamente uguali agli angoli FAM, FBM, o quello che torna allo stesso, l'angolo totale AFB uguaglierà la somma dei due angoli FAM, FBM; ma i tre angoli AFB, FAM, FBM presi insieme sono uguali a due retti: dunque l'angolo AFB sarà retto.

Così dunque, se si descrive sopra una base qualunque AB un triangolo rettangolo, questo triangolo avrà la proprietà di essere iscritto in un circolo, il centro del quale è sulla base.

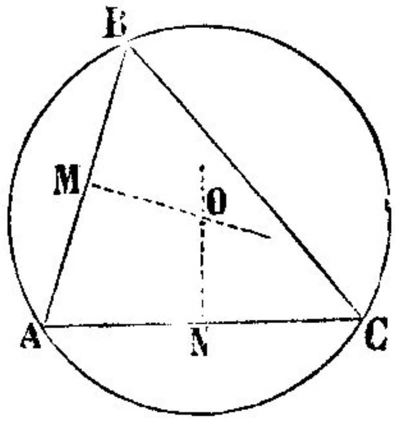
Fig. 148.



69. Valendosi della proposizione dimostrata al num. 64, si può trovare il centro di un arco o di un circolo nel modo seguente:

Condotte nell'arco AC due corde AB e BC, s'innalzano dai punti di mezzo M e N due perpendicolari; il punto O, in cui concorrono le due perpendicolari, sarà il centro ricercato (fig. 148).

Fig. 149.



70. E collo stesso principio si può circoscrivere un circolo ad un triangolo dato ABC (fig. 149).

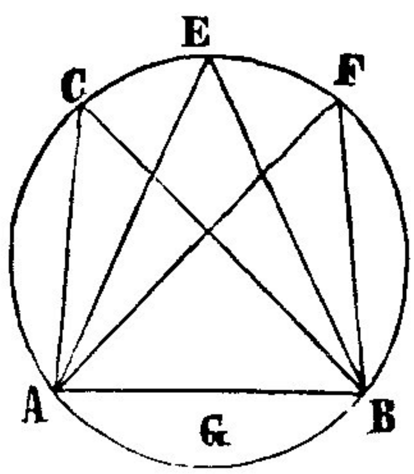
Divisi per metà in M e in N due lati AB ed AC, s'innalzano due perpendicolari a que' due lati, il punto O in cui esse concorrono sarà il centro del circolo.

Infatti il punto O deve essere egualmente distante dai tre punti C, A, B (59), e per conseguenza la circonferenza descritta con raggio uguale a quella distanza comune, deve passare per tutti tre i punti C, A, B.

71. **Angolo inscritto**, dicesi l'angolo che è formato da due corde condotte da uno stesso punto della circonferenza.

L'angolo inscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi due lati.

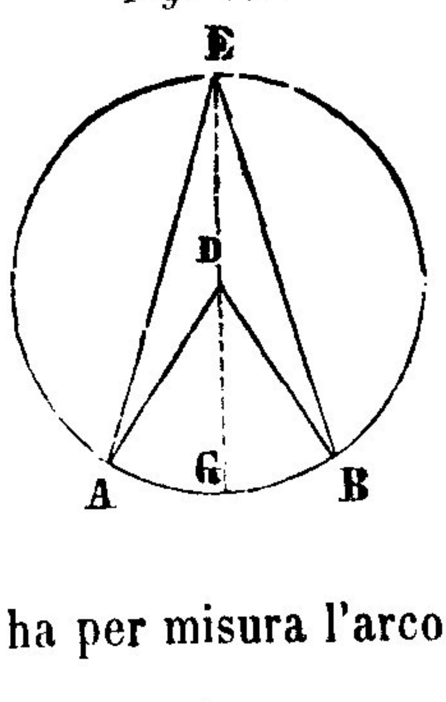
Fig. 150.



XIV. Questa proprietà del circolo, per cui tutti gli angoli che hanno il vertice sulla semicirconferenza e che si appoggiano sul diametro sono retti, porta a cercare, se gli archi di circolo maggiori o minori della semicirconferenza, abbiano qualche proprietà analoga; se per esempio, gli angoli ACB, AEB, AFB (fig. 150), inscritti nel segmento ACEFB, sieno uguali tra loro, come sono quelli inscritti nel semicircolo.

Per assicurarcene, cercheremo prima il valore di uno di questi angoli, e vedremo poi se gli altri abbiano il medesimo valore. Prendiamo, per esempio, l'angolo AEB (fig. 151), il cui vertice E trovasi sul mezzo dell'arco AEB. Siccome la linea EDG, che passa pel centro D, divide questo angolo in due parti uguali AEG, GEB, basterà misurare l'angolo AEG, ossia, basterà sapere qual parte sia l'angolo AEG di un altro angolo già misurato, per esempio, dell'angolo ADG. Dico che quest'angolo ADG è già misurato, poichè sappiamo ch'esso ha per misura l'arco AG (Parte I, art. LII).

Fig. 151.



Ora il triangolo AED essendo isoscele, l'angolo AEG è la metà dell'angolo ADG. Infatti gli angoli AED, EAD (Parte I, art. XXXI) sono uguali; ma (Parte I, art. LXVIII) questi due angoli presi insieme sono uguali all'angolo esterno ADG; dunque l'angolo AED, ovvero AEG, è la metà dell'angolo ADG.

Per la medesima ragione l'angolo DEB sarà la metà dell'angolo GDB. Dunque l'angolo totale AEB sarà uguale alla metà dell'angolo ADB. Dunque la sua misura sarà la metà dell'arco AGB.

XV. Misurato così l'angolo AEB (fig. 150), per sapere se esso è uguale a qualsivoglia altro angolo inscritto nel medesimo segmento, bisogna esaminare se un tal angolo preso ad arbitrio, per esempio AFB (fig. 152), sia esso pure la metà dell'angolo al centro ADB. Di ciò è facile assicurarsi, tirando pel centro la retta FDG, poichè si vedrà, che l'angolo AFB sarà composto di due altri AFG, GFB, che saranno per l'articolo precedente metà degli angoli ADG, GDB; onde si concluderà, che l'angolo totale AFB, sarà la metà dell'angolo ADB. Applicando lo stesso discorso a tutti gli angoli ACB, AEB, AFB (fig. 153), i quali hanno il loro vertice alla circonferenza, e che posano sul medesimo arco AGB, si dovrà concludere, che questi angoli sono tra loro uguali, come avevamo congetturato nell'articolo precedente.

Fig. 152.

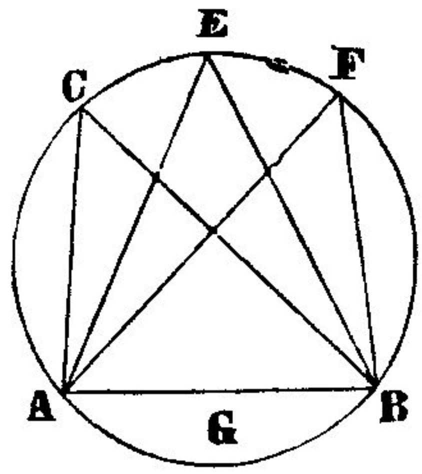
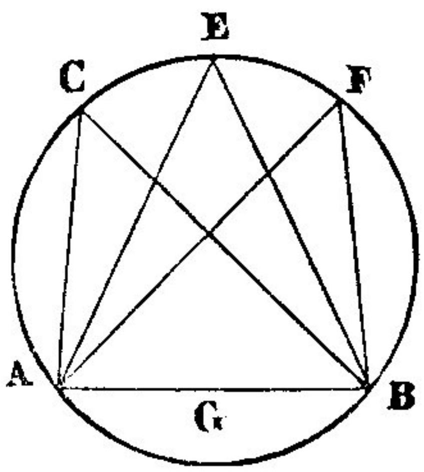
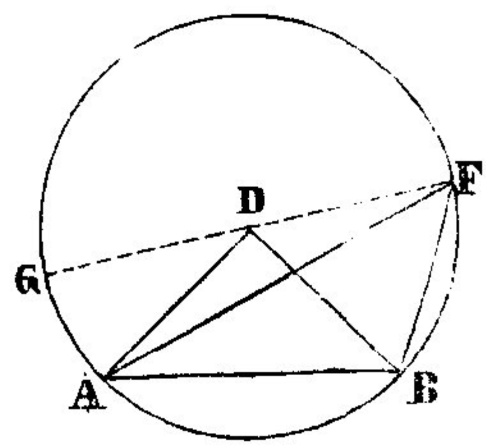


Fig. 153.



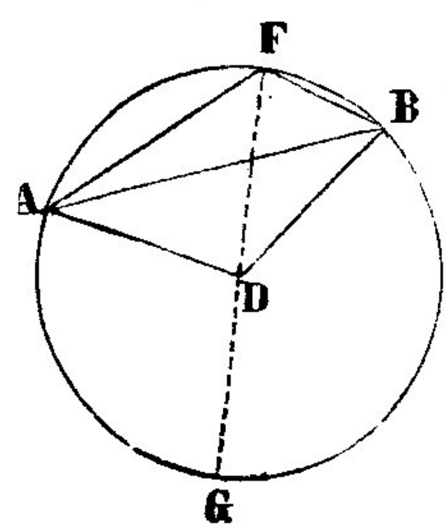
XVI. Tra gli angoli che hanno il vertice nell'arco ACEFB (fig. 153) ve ne ha di quelli, de' quali potrebbe dubitarsi se siano compresi nella dimostrazione precedente. Tali sono gli angoli come AFB (fig. 154), pei quali la retta FDG, tirata pel centro, non è contenuta nell'angolo ADB. Tuttavia, notando sempre che l'angolo GFA è la metà dell'angolo GDA, e l'angolo GFB la metà dell'angolo GDB, si vedrà che l'angolo AFB, eccesso dell'angolo GFB sopra l'angolo GFA, sarà pure la metà dell'angolo ADB, eccesso dell'angolo GDB sopra GDA.

Fig. 154.



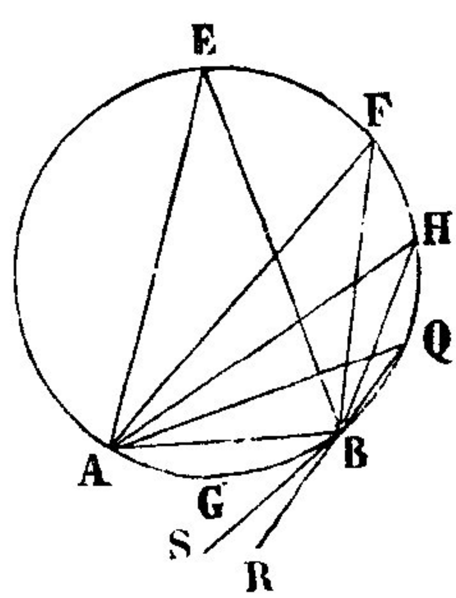
XVII. Secondo le figure, di cui ci siamo fin ora serviti, potrebbe credersi che la dimostrazione precedente valga soltanto pei segmenti maggiori del semicircolo; ma è facile il vedere, che qualunque angolo AFB (fig. 155), inscritto in un segmento minore del semicircolo, sarà sempre composto di due altri GFB, GFA, metà degli angoli BDG, ADG rispettivamente: e che per conseguenza quest'angolo AFB avrà per misura la metà della somma de' due archi BG, AG, cioè a dire la metà dell'arco AGB.

Fig. 155.



* Dopo di aver veduto, che gli angoli AEB, AFB, AHB (fig. 156), inscritti in un medesimo segmento, sono tutti eguali, si è pur voluto ricercare che cosa diventi l'angolo AQB, allorchè il suo vertice si confonde col punto B, estremità della base AB; svanisce egli allora questo angolo? Ma non par possibile, ch'esso venga tutto in un tratto ad annientarsi senza ristringersi grado grado: e non si vede, quale sarà il punto, oltre il quale quest'angolo cesserà di esistere: come dunque arriveremo noi a trovarne la misura? esta

Fig. 156.



è una difficoltà, che non si può risolvere, senza ricorrere alla geometria dell' infinito, di cui tutti gli uomini hanno almeno un'idea imperfetta, che noi tenteremo qui di schiarire.

Osserviamo che, quando il punto E si avvicina a B passando successivamente in F, H, Q, ecc., la retta EB continuamente si accorcia, e l'angolo EBA, che essa fa colla retta AB, sempre più si apre. Ma per quanto siasi accorciata la linea QB, l'angolo QBA sarà pur sempre un angolo, e per renderlo sensibile basterà prolungare quella linea accorciata QB, verso R. Avverrà egli lo stesso, allorchè la linea QB a forza di sempre diminuire sarà alla fine svanita? quale allora è diventata la sua posizione? quale è divenuto il suo prolungamento?

Egli è evidente che questo prolungamento non è allora altro che la retta BS che tocca il circolo in un sol punto B, senza incontrarlo in nessun altro punto, e che per questa ragione si chiama *tangente*.

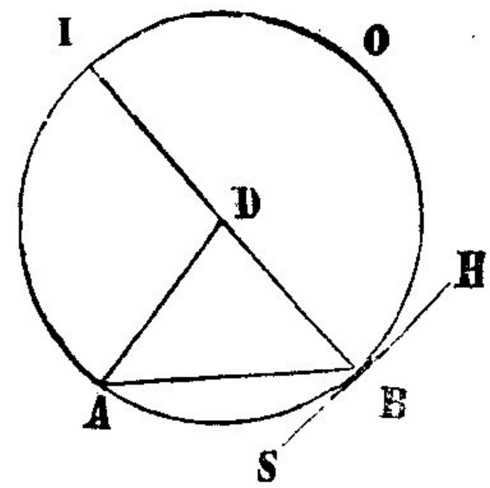
Di più è chiaro, che mentre la linea EB viene continuamente a scemare, fino ad annientarsi; la retta AE, che diventa successivamente AF, AH, AQ, ecc., si avvicina sempre ad AB, e finalmente si confonde con essa. Dunque l'angolo alla circonferenza AEB, dopo esser diventato AFB, AHB, AQB, si confonde in ultimo luogo con l'angolo ABS, compreso tra la corda AB e la tangente BS, e questo angolo, che si chiama angolo al segmento, deve sempre conservare la proprietà di aver per misura la metà dell'arco AGB.

Tuttochè questa dimostrazione sia forse un po' troppo astratta pei principianti, pure ho creduto bene di recarla, perchè a coloro che vogliono inoltrarsi co' loro studii fino alla Geometria dell'infinito, sarà utilissimo l'avvezzarsi di buon'ora a simli considerazioni. Un' altra dimostrazione della medesima proposizione, dedotta dalla proprietà più notabile delle tangenti al circolo, si troverà ne' due seguenti articoli XIX e XX (Nota tratta dal testo dell'autore).

Tangente.

XVIII. Una retta la quale come la SBH (fig. 157) tocchi la circonferenza in un punto B, senza penetrare nell'interno del circolo, epperò senza incontrare la circonferenza in verun altro punto si chiama *tangente*.

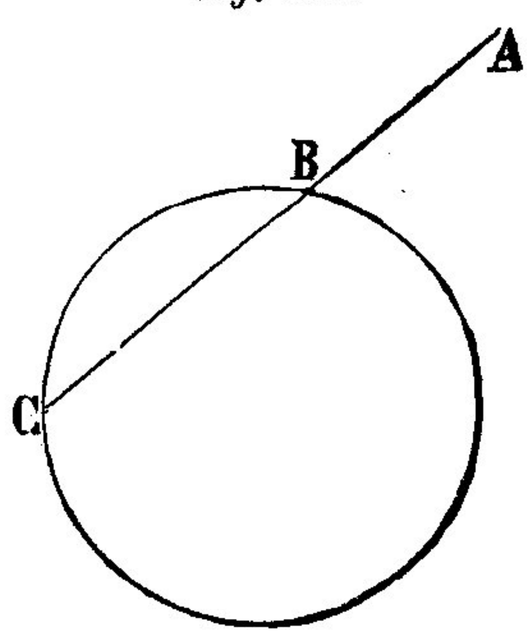
Fig. 157.



Segante.

70. Una retta la quale come ABC parte da un punto fuori del circolo e taglia in due punti B e C la circonferenza, dicesi *segante* (fig. 158).

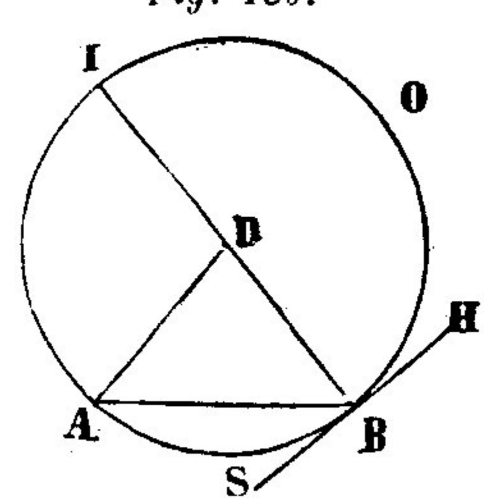
Fig. 158.



La tangente è perpendicolare al diametro condotto pel punto di contatto.

XIX. La tangente al circolo in qualunque punto B (fig. 159) è perpendicolare al diametro IDB, che passa per questo punto. Poichè essendo la curvatura del circolo si uniforme, che un diametro qualunque IDB lo divide in due semicircoli IAB, IOB uguali simmetricamente situati rispetto a questo diametro, ne segue, che le due parti BS, BH della tangente comune a questi due semicircoli, debbono pur essere egualmente poste rispetto a questo diametro, cioè far con esso angoli eguali: or ciò non potrebbe avvenire se IDB non fosse perpendicolare alla tangente HBS.

Fig. 159.



Altra dimostrazione della stessa proposizione.

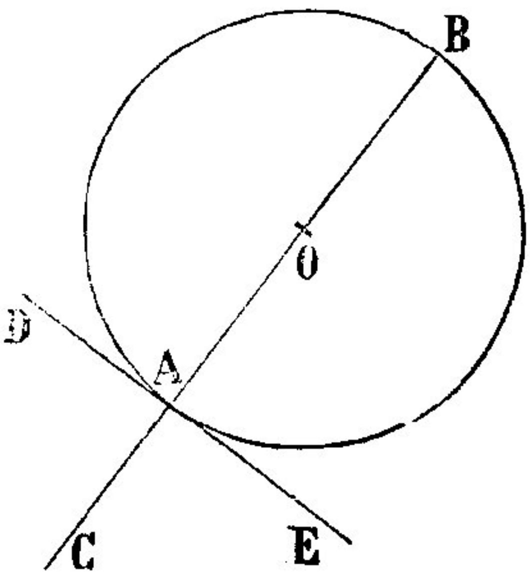
* Ciò si dimostra ancora osservando, che la tangente SBH toccando la circonferenza in un punto solo B, tutti gli

altri punti di essa sono esterni al circolo: epperò le loro distanze dal centro D sono maggiori del raggio DB: è dunque DB la più breve distanza del centro D dalla retta SH, epperò la DB (Parte I, art. III) è perpendicolare alla SH.

Da un punto preso sulla circonferenza condurre una tangente.

71. Sia il punto A: condotta da A la segante CAB, che passa pel centro O, si conduce da A una perpendicolare DE ad essa segante; la DE sarà tangente del circolo nel punto A (art. XIX).

Fig. 160.



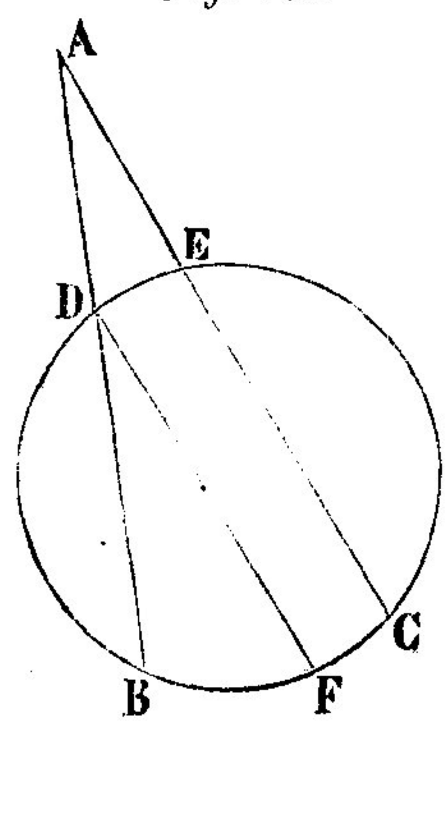
L'angolo della corda e della tangente ha per misura la metà dell'arco compreso.

XX. Quindi si vede che l'angolo ABS (fig. 159), compreso fra la corda AB e la tangente BS, ha per misura la metà dell'arco AB.

Infatti l'angolo ADB, insieme coi due angoli uguali DAB, DBA, fa due retti (Parte I, art. LXIV). Dunque la metà dell'angolo ADB, insieme coll'angolo DBA, fa un retto. Ma l'angolo DBA insieme coll'angolo ABS dà pure un retto. Dunque l'angolo ABS è uguale alla metà dell'angolo ADB. Dunque la misura di ABS sarà la metà dell'arco AB.

L'angolo formato da due seganti ha per misura la semidifferenza tra i due archi compresi dalle seganti sulla circonferenza.

Fig. 161.



72. Dico che l'angolo BAC ha per misura metà dell'arco BC, meno metà dell'arco DE (fig. 161).

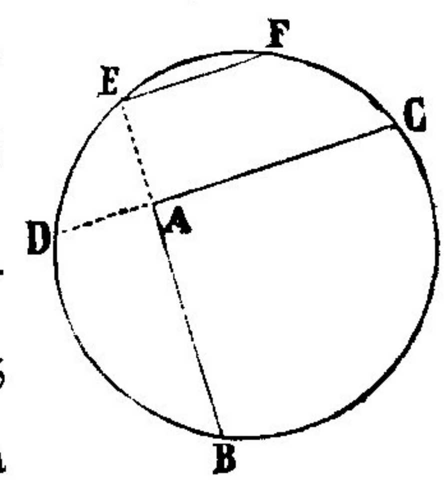
Infatti, condotta DF parallela alla AC, l'angolo BDF sarà uguale al suo corrispondente BAC. Ma BDF, angolo inscritto, ha per misura $\frac{BF}{2}$ ossia

$\frac{BC-AC}{2}$ ossia $\frac{BC-DE}{2}$ (66). Dunque anche l'angolo BAC avrà per misura $\frac{BC-DE}{2}$.

L'angolo col vertice dentro del circolo, ma non nel centro, ha per misura la semisomma degli archi compresi da' suoi due lati e dal loro prolungamento fino alla circonferenza (fig. 162).

73. L'angolo BAC ha per misura $\frac{BC+DE}{2}$. Infatti, condotta da E la EF parallela alla DC, si ha l'angolo FEB $=$ BAC.

Fig. 162.

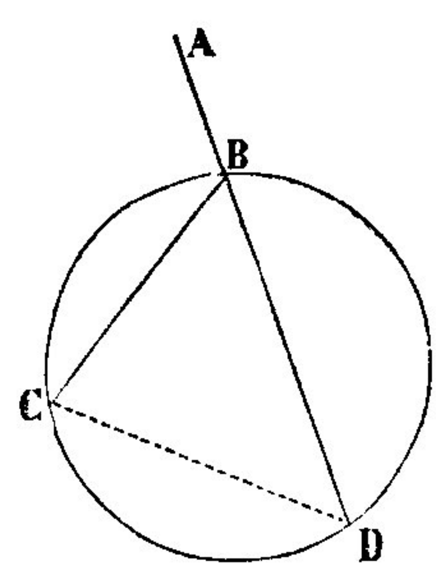


Ma FEB, angolo inscritto, ha per misura $\frac{BF}{2}$ ossia $\frac{BC+CF}{2}$ ossia $\frac{BC+DE}{2}$; dunque anche BAC avrà per misura $\frac{BC+DE}{2}$.

L'angolo formato alla circonferenza da una corda e da una segante, ha per misura metà dell'arco sotteso dalla corda, più metà dell'arco sotteso dal prolungamento della segante (fig. 163).

74. L'angolo ABC ha per misura $\frac{BC}{2}+\frac{BD}{2}$. Infatti, unito C con D, risulta il triangolo BCD, di cui l'angolo ABC è esterno. Si avrà adunque (Parte I, LXVIII) angolo ABC $=$ ang. BDC $+$ ang. BCD; ma l'ang. BDC ha per misura $\frac{BC}{2}$ e l' angolo BCD ha per misura $\frac{BD}{2}$, dunque l'ang. ABC avrà per misura $\frac{BC}{2}+\frac{BD}{2}$.

Fig. 163.

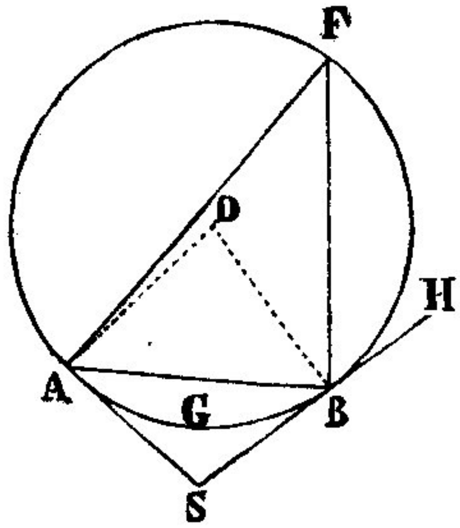


Descrivere un segmento di circolo capace di un angolo dato.

XXI. Questa proprietà del circolo, che l'angolo ABS ha per misura la metà dell'arco AGB, ci somministra la soluzione del seguente problema.

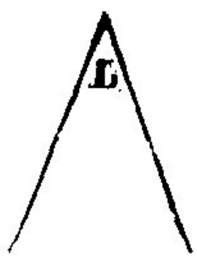
Descrivere sopra AB (fig. 164) un segmento di circolo capace dell'angolo dato L (fig. 165), cioè a dire, un segmento AFB, nel quale tutti gli angoli AFB alla circonferenza sieno eguali all'angolo L.

Fig. 164.



Per sciogliere questo problema bisogna fare in A e in B gli angoli BAS ed ABS, uguali tra loro ed all'angolo L, ed alzare sopra AS e sopra BS le due perpendicolari AD e BD; il punto D, dove queste s'incontreranno, sarà il centro dell'arco cercato AFB.

Fig. 165.



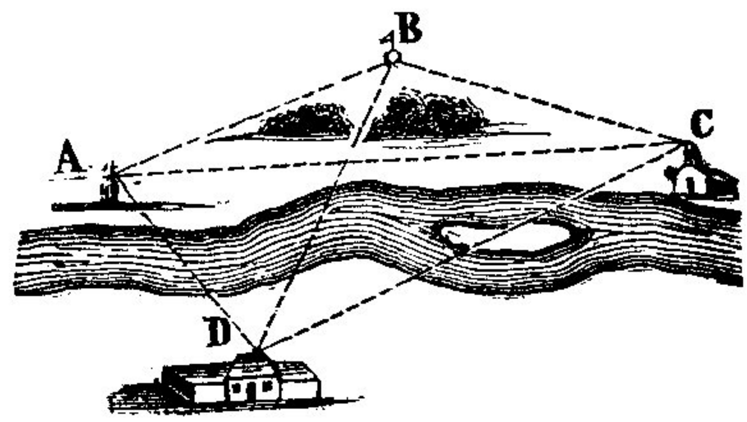
Imperocchè per l'articolo XIX le rette BS ed AS saranno tangenti al circolo, del quale il centro è D ed il raggio è AD ovvero BD, poichè BD ed AD sono perpendicolari a BS e ad AS. Di più per l'articolo precedente l'angolo ABS ha per misura la metà di AGB, e, per l'articolo XV, l'angolo AFB è pure misurato dalla metà di AGB. Dunque quest'angolo AFB sarà eguale ad ABS, cioè all'angolo L, come si domandava.

Come si trovino le distanze di un luogo da tre altri dei quali si conoscano le distanze scambievoli.

XXII. La scoperta delle esposte proprietà de' segmenti di circolo, è verisimilmente dovuta alla semplice curiosità de' Geometri. Ma interviene tuttodì che molte scoperte giudicate da principio inutili, si mostrano coll'andar del tempo utilissime; e così si sono fatte nella pratica felici applicazioni di queste proprietà del circolo. Io ne riferirò qui una sola, di uso assai frequente in geografia.

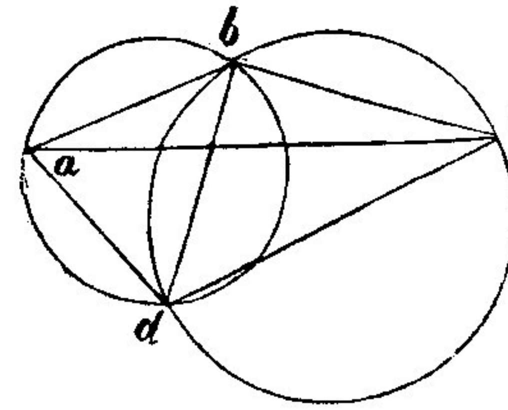
Siano A, B, C (fig. 166) tre luoghi de' quali si conoscono le scambievoli distanze AB, BC, AC; e per via di sole operazioni che possano farsi senza muoversi da un punto D, dal quale si possano vedere tutti e tre, vogliansi determinare le distanze DA, DB, DC di quei luoghi dal punto stesso D.

Fig. 166.



Si segnino sulla carta tre punti *a*, *b*, *c* (fig. 167), i quali sieno tra loro situati nello stesso modo che i tre punti A, B, C, o per parlare geometricamente, si faccia il triangolo *abc* simile al triangolo ABC.

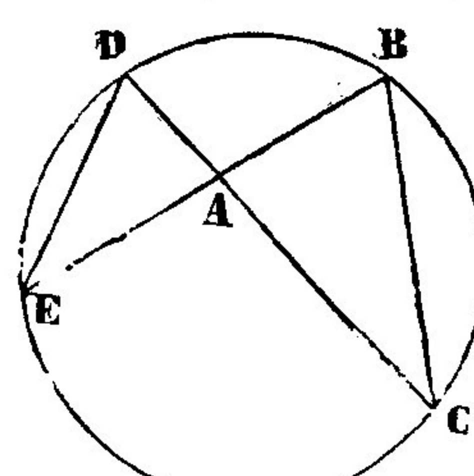
Fig. 167.



Misurati poi col grafometro i due angoli ADB, BDC, facciasi sopra *ab* il segmento di circolo *bda* capace dell'angolo BDA, e sulla retta *bc* il segmento di circolo *bdc* capace dell' angolo BDC: il punto *d*, dove si incontreranno questi circoli, segnerà sulla carta la posizione del luogo D; cioè le linee *da*, *db*, *dc* saranno nell'istessa proporzione rispetto ad *ab*, *bc*, *ac*, che le distanze cercate DA, DB, DC, rispetto alle distanze date AB, BC, AC; la qual conclusione non abbisogna di dimostrazione, dopo ciò che abbiamo veduto trattando delle figure simili.

Quando due corde si tagliano in un circolo, il rettangolo costrutto sulle due parti di una delle corde è equivalente al rettangolo costrutto sulle due parti dell'altra.

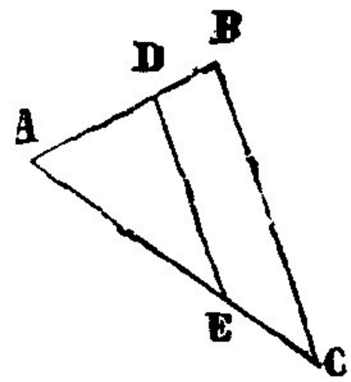
Fig. 168.



XXIII. Si potrebbe far vedere facilmente che in molti altri casi ancora la pratica si giova delle proprietà del circolo finquì dimostrate. Ma sarà miglior consiglio passare ad altre proprietà, le quali si deducono dalle precedenti, e che hanno esse pure la loro utilità.

Per proceder con ordine, osserviamo in primo luogo, che due angoli qualunque EDC, EBC (fig. 168), che si appoggiano sul medesimo arco EC, essendo eguali, ne segue che i triangoli DAE, BAC hanno gli angoli eguali, cioè (Parte I, art. XXXIX) che questi triangoli sono simili.

Fig. 169.



Infatti, per la ragion medesima che l'angolo EDC è uguale all'angolo EBC, l'angolo DEB sarà pure uguale all'angolo DCB, poichè entrambi questi angoli insistono sull'arco BD; e quanto agli angoli DAE, BAC, essi sono manifestamente eguali, sia perchè sono compresi tra le medesime linee, sia perchè due triangoli, che hanno due angoli rispettivamente eguali, hanno necessariamente il terzo angolo eguale (Parte I, art. XXXVIII).

Per applicare più facilmente ai triangoli ADE, ABC le proposizioni dimostrate relativamente ai triangoli simili, noi supporremo il triangolo DAE (fig. 169) sovrapposto al triangolo BAC, in guisa che AD cada sopra AB, ed AE sopra AC, cosicchè DE sia parallela a BC. Ci ricorderemo allora:

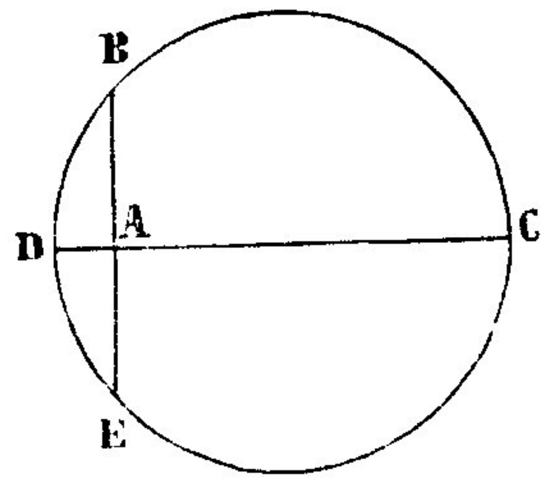
1° Che se due triangoli ADE, ACB sono simili, i quattro lati AC, AE, AB, AD sono in proporzione (Parte I, art. XXXIX).

2° Che in ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de'medii (Parte II, art. VIII), onde conchiuderemo, che il rettangolo, ovvero il prodotto di AC per AD, è uguale al rettangolo di AE per AB; proprietà del circolo molto notabile, e che si può enunziare così: Se in un circolo si conducono ad arbitrio due rette, che si seghino, il prodotto delle due parti della prima è uguale al prodotto delle due parti dell'altra.

Il quadrato fatto sopra una perpendicolare al diametro è equivalente al rettangolo fatto sulle due parti del diametro.

XXIV. Se le due rette BE, DC (fig. 170) si segano ad angoli retti, e l'una di queste due rette è un diametro DC, è chiaro che le due parti AB, AE dell'altra retta BE saranno eguali tra loro; di modo che la proprietà precedente, in questo caso particolare, si enuncierà così: se sul diametro DC di un circolo si alza una perpendicolare qualunque AB, il quadrato di questa perpendicolare sarà uguale al rettangolo di AD per AC.

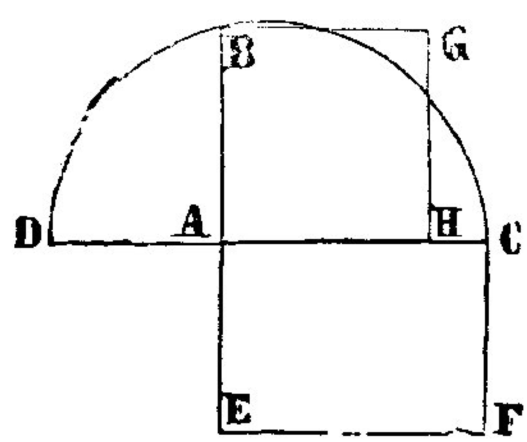
Fig. 170.



Modo di trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente.

XXV. Spesso avviene, che si ha bisogno di trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente. L'articolo precedente ci somministra a tal uopo un mezzo facile. Sia ACFE (fig. 171) il rettangolo proposto; si prolunghi AC in D tanto che AD sia uguale ad AE, e si descriva il semicircolo DBC, che abbia DC per diametro; prolungando poscia il lato EA, finchè incontri il semicircolo in B, sarà AB il lato del quadrato cercato ABGH, equivalente al rettangolo ACFE.

Fig. 171.



Che cosa sia la media proporzionale fra due rette date e come si trovi.

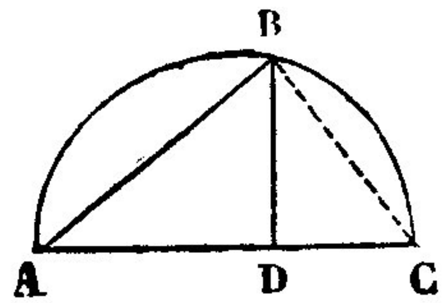
XXVI. Questo stesso problema vien sovente proposto in altri termini, cioè si domanda di trovare una linea che sia *media proporzionale* tra due linee date. Per media proporzionale s'intende una linea, la quale contenga tante volte la più piccola delle due linee date, quante volte essa stessa è contenuta nella più grande: cioè a dire che se, per es., AB è media proporzionale tra AD ed AC, si potrà dire che AD sta ad AB, come AB ad AC. Ora è ben facile di vedere che questo problema è l'istesso che il precedente: poichè (Parte II, art. VIII) il prodotto degli estremi AD ed AC, o, vogliamo dire, il rettangolo di queste due linee sarà uguale al prodotto dei medii AB ed AB, cioè al quadrato di AB.

Dunque allorchè si vorrà trovare una media proporzionale tra due linee date, si trasformerà in un quadrato il rettangolo che ha queste due linee per lati, ed il lato del quadrato sarà la linea cercata.

Altro modo di trovare una media proporzionale.

XXVII. Si può ancora trovare una media proporzionale tra due linee in un'altra maniera, la quale deriva dalla proprietà del circolo spiegata nell'articolo XIII. Supponiamo che AC (fig. 172) sia la più grande delle due linee date, e AD la più piccola, e si alzi DB perpendicolare sopra AC; dal punto B, ove essa incontrerà il semicircolo ABC descritto sulla AC come diametro, si tiri la corda AB; sarà questa media proporzionale tra AD ed AC. Infatti, condotta la BC, è chiaro, che il triangolo ABC sarà rettangolo in B. Dunque (Parte I, art. XXXVIII) questo triangolo sarà simile al triangolo ABD, poichè questi due triangoli hanno l'angolo A comune. Ma se i triangoli ADB ed ABC sono simili, hanno i loro lati proporzionali. Dunque AD è ad AB, come AB ad AC. Dunque AB è media proporzionale tra AD ed AC.

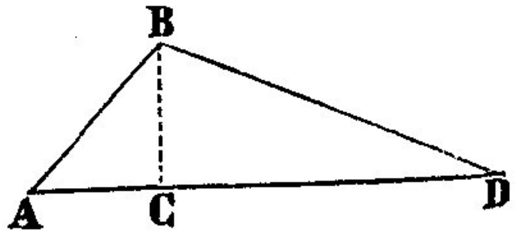
Fig. 172.



75. In un triangolo rettangolo ABD (fig. 173), abbassata da B la perpendicolare sull'ipotenusa, che sarà divisa nelle due parti AC, CD (le quali si chiamano *segmenti dell'ipotenusa*) si hanno i sei elementi seguenti:

1. ipotenusa AD; 2. cateto AB; 3. cateto BD; 4. perpendicolare BC; 5. segmento AC, e 6. segmento CD. Di più si sa che l'angolo B deve essere retto.

Fig. 173.

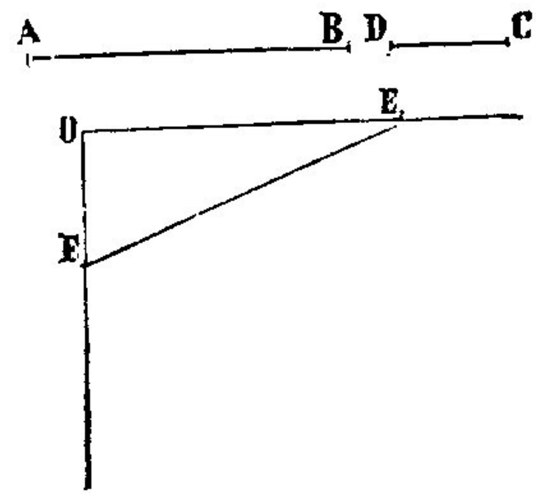


Ora dalle proposizioni che abbiamo dimostrato, si può ricavare il modo di costrurre il triangolo rettangolo, quando sieno dati solamente *due* dei sei suoi elementi. Ciò risulterà dalla soluzione dei seguenti problemi.

76. **Formare il triangolo rettangolo** essendo dati fig. (174):

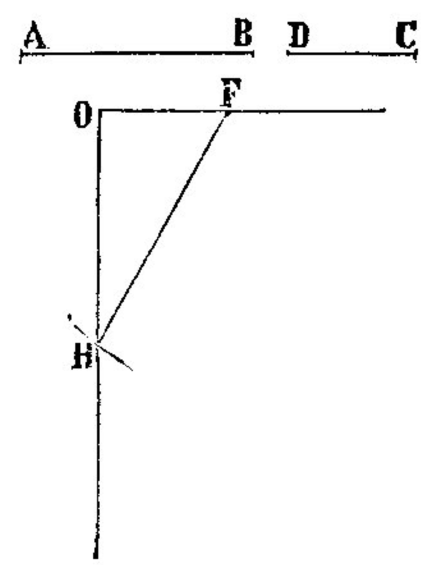
1° *I due cateti.* Siano AB e DC i due cateti dati; formisi un angolo retto O; sulle due gambe di questo prendansi due parti OE, OF, uguali ai due cateti dati AB e DC; si unisca F con E; FOE sarà il triangolo domandato.

Fig. 174.



2° *La ipotenusa e un cateto* (fig. 175). Sia AB la ipotenusa e DC il cateto dato. Formato l'angolo O retto, prendasi sopra una delle sue gambe la parte OF uguale a DC; quindi, fatto centro in F, con raggio uguale ad AB si descrive una circonferenza, che taglierà l'altra gamba in H; unito H con F, HOF sarà il triangolo domandato.

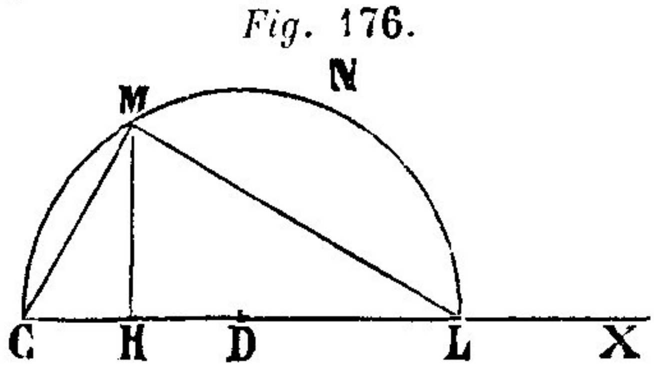
Fig. 175.



3° ***La ipotenusa e un suo segmento.***

Sopra una indefinita CX prendasi, partendo da C, la parte CL, uguale all'ipotenusa data ed una parte CH uguale al segmento dato. Fatto centro in D, punto di mezzo di CL, descrivasi la semicirconferenza CNL, si innalzi da H una perpendicolare, che incontrerà la circonferenza in M; si unisca M con C e con L; CML sarà il triangolo domandato. Infatti l'angolo CML è retto (XIII) (fig. 176).

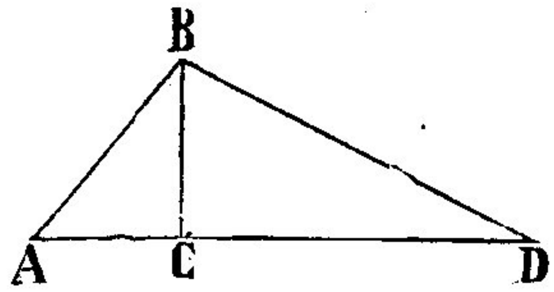
Fig. 176.



4° ***Un cateto e il suo segmento***: AB e AC (fig. 177).

Si forma col cateto e col suo segmento dati, usando della costruzione fatta nel problema 2°, il triangolo rettangolo ABC. Prolungata la AB, s'innalza in B una perpendicolare alla AB; prolungasi quella perpendicolare fino all'incontro in D della AC, pure prolungata; si avrà il triangolo ABD, che sarà il domandato.

Fig. 177.



5° *Un cateto e la perpendicolare*; AB e BC.

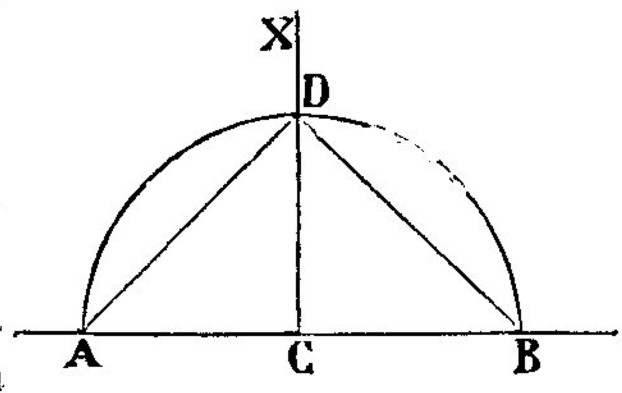
Formasi col cateto AB e colla perpendicolare BC dati, usando della costruzione del problema 2° il triangolo rettangolo ABC; poscia si opera come nel problema 4° (fig. 177).

6° *Un segmento e la perpendicolare*: AC e BC.

Formasi col segmento AC e colla perpendicolare BC dati, usando della costruzione del problema 1°, il triangolo ABC, poscia si opera come nel problema 4°.

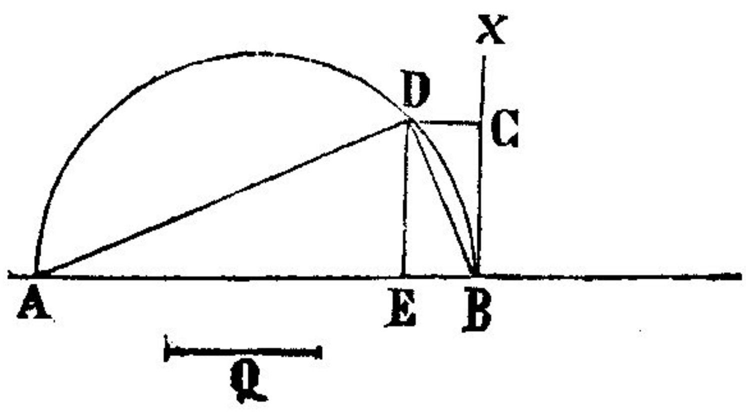
7° *La ipotenusa e la perpendicolare.* Se la perpendicolare è uguale alla metà dell'ipotenusa AB, s'innalza da C, punto di mezzo di essa ipotenusa, una perpendicolare CX; e quindi si descrive sopra la stessa B una semicirconferenza. Unito il punto D, in cui la semicirconferenza taglia la perpendicolare, colle due estremità A e B della ipotenusa, il triangolo ADB sarà il triangolo domandato (fig. 178).

Fig. 178.



Sia la perpendicolare Q minore della metà dell'ipotenusa AB. Descritta sopra AB la semicirconferenza, e prolungata la AB, s'innalza in B una perpendicolare BX, prendesi sopra di essa una parte BC$=$Q;

Fig. 179.



da C si conduce la CD parallela alla AB; essa incontrerà la semicirconferenza in un punto D; unito D con A e B, il triangolo ADB sarà rettangolo, coll'ipotenusa AB e avrà la perpendicolare DE=Q; dunque sarà il triangolo domandato. È evidente che la perpendicolare non può mai essere maggiore della metà dell'ipotenusa.

8° *I due segmenti dell'ipotenusa.* Sopra la indefinita CX prendansi le due parti CH e HL uguali ai due segmenti dati; poi si opera come nel problema 3° (fig. 176).

Come si trasformi una figura rettilinea qualunque in un quadrato equivalente.

XXVIII. Se si vorrà trasformare una figura rettilinea qualunque in un quadrato equivalente, la soluzione di questo problema si farà dipendere dall'articolo XXV, riducendo prima la data figura in un rettangolo: ciò sarà facile, poichè ogni figura rettilinea può scomporsi in triangoli, e ciascun triangolo è equivalente ad un rettangolo di egual base e di metà altezza; tutti questi rettangoli poi si ridurranno in un rettangolo solo, trasformandoli in altri rettangoli che abbiano tutti l'altezza comune (Parte II, articolo VI).

Come si trasformi in un quadrato equivalente una figura limitata da archi di circolo.

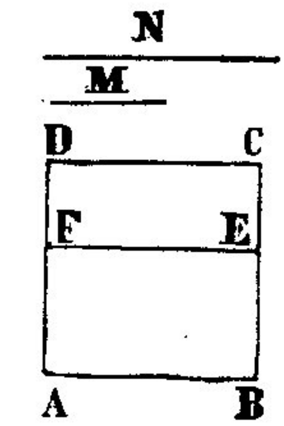
XXIX. Le figure limitate da archi di circolo, potranno nello stesso modo trasformarsi in quadrati, quando si sarà misurata la lunghezza degli archi che ne formano il perimetro; poichè queste figure potranno allora trasformarsi in rettangoli, come le rettilinee. Per questo si ricorrerà agli articoli IX e X, ne' quali abbiamo insegnato a misurare le figure circolari.

Come si costruisca un quadrato, il quale stia in ragione data ad un altro quadrato.

XXX. Dalla proprietà del circolo spiegata nell'art. XXIV si ricava ancora un metodo facilissimo per fare un quadrato, il quale stia ad un quadrato dato in ragion data: problema di cui nell'art. XXII della seconda Parte abbiam promessa la soluzione.

Supponiamo, per esempio, che vogliasi fare un quadrato che stia al quadrato ABCD (fig. 180), come la linea M alla linea N. Si dividerà (Parte I, articolo XLI) il lato CB nel punto E in modo che CB stia a BE, come la linea N alla linea M. Tirando EF parallela ad AB, il rettangolo ABEF avrà la medesima superficie che il quadrato domandato: ed il problema si risolverà trasformando questo rettangolo in un quadrato.

Fig. 180.



Modo di costruire un poligono, il quale stia in ragion data ad un altro poligono simile.

XXXI. Se poi si volesse fare un poligono HIKLM (fig. 182), che stesse al poligono simile ABCDE (fig. 181), in ragione della linea X alla linea Y, si farebbe prima

Fig. 181.

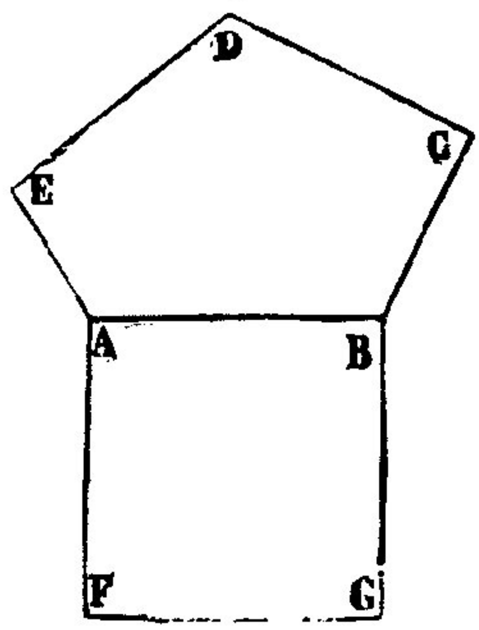


Fig. 182.

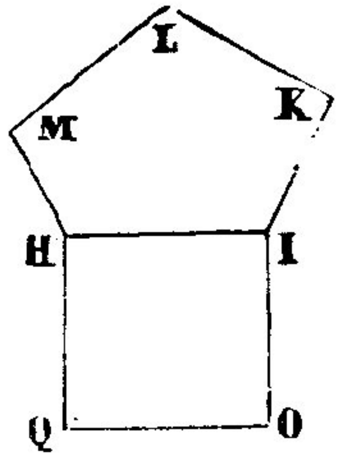
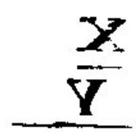


Fig. 183.



sul lato AB del poligono dato il quadrato ABGF. Si cercherebbe col metodo ora insegnato un altro quadrato HIOQ, che stesse al quadrato ABGF, come la linea X alla linea Y. Ed allora descrivendo sul lato HI di questo quadrato un poligono HIKLM, simile al primo ABCDE, questo nuovo poligono sarebbe quello che si domanda. La ragione è facile a vedere, se si ricorda (Parte I, art. XLVII), che le figure simili stanno tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi.

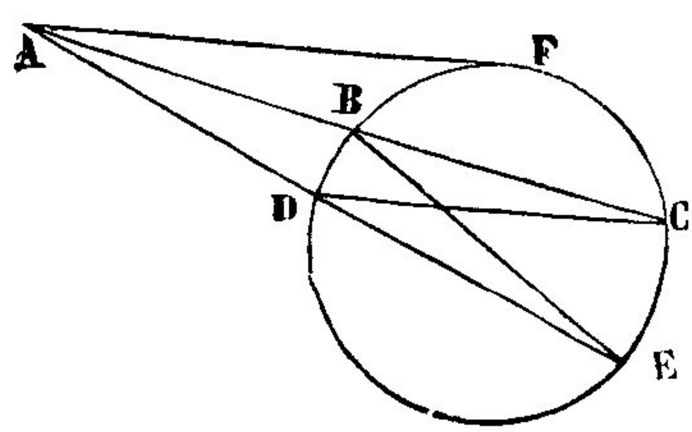
Modo di fare un circolo il quale stia in ragion data ad un circolo dato.

XXXII. Per fare un circolo, la cui area stia a quella di un circolo dato, come X all'Y, si costruisca un quadrato che stia al quadrato fatto sul raggio del primo circolo, come X all'Y; ed il lato del nuovo quadrato sarà il raggio del circolo domandato.

Il rettangolo fatto sulle seganti condotte da uno stesso punto e sulle loro parti esterne sono equivalenti.

XXXIII. Ecco un'altra proprietà del circolo dedotta da quella che ha dato il mezzo di risolvere il problema antecedente.

Fig. 184.



Se da un punto A (fig. 184) preso fuori d'un circolo si conducano ad arbitrio due seganti, cioè due rette ABC, ADE, che seghino la circonferenza, ciascuna in due punti, e poscia si tirino le rette CD, BE i triangoli ACD, AEB saranno simili. Infatti l'angolo A è comune ai due triangoli, i quali hanno inoltre gli angoli alla circonferenza C ed E uguali. Ora dall'esser simili i triangoli CAD, EAB, ne segue che le quattro linee AB, AD, AE, AC sono in proporzione, e conseguentemente che il rettangolo costrutto sulle due rette AB, AC, è equivalente al rettangolo costrutto sulle due rette AD, AE. Riesce così dimostrato che: Se da un punto qualunque A, preso fuori di un circolo, si tirano ad arbitrio due rette AC, AE, che attraversino questo circolo; il prodotto della segante AC per la sua parte esteriore AB, sarà uguale al prodotto della segante AE, per la sua parte esteriore AD.

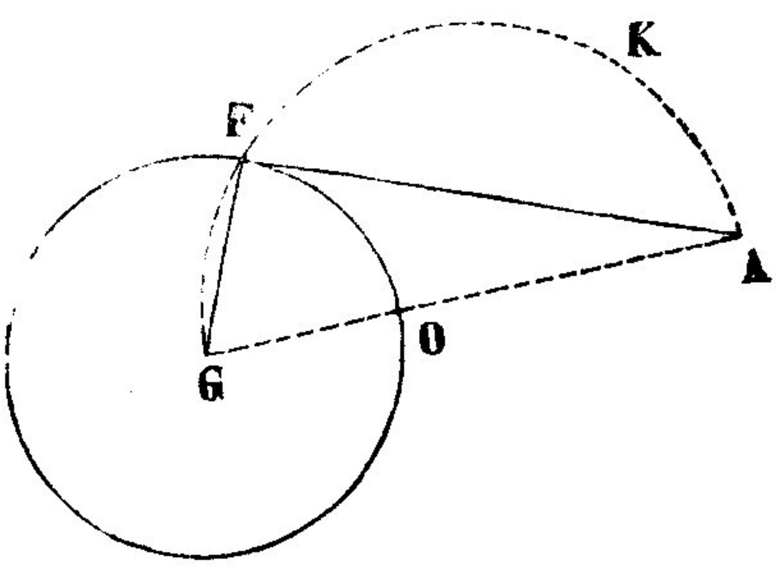
Il quadrato fatto sulla tangente è equivalente al rettangolo fatto sulla segante condotta da uno stesso punto e sulla sua parte esterna.

XXXIV. Quando una delle rette in luogo di segare il circolo lo tocca soltanto, come AF (stessa figura), la proprietà precedente si cangia in quest'altra: il quadrato della tangente AF è uguale al prodotto della segante qualunque AE e della sua parte esterna AD. Ciò è facile a dimostrare; poichè riguardando la retta AF, che tocca il circolo, come una linea che lo taglia in due punti infinitamente vicini, le linee AB, AC si mutano entrambe nella AF, ed in vece del prodotto di AB per AC, si ha il quadrato di AF.

Come si conduca una tangente ad un circolo, la quale passi per un punto dato fuori di esso circolo.

XXXV. La proposizione dimostrata nell'articolo precedente ci dà bensì il valore del quadrato della tangente AF, ma non ci insegna a tirare questa tangente dal punto dato A. Ciò tuttavia si farà facilmente ricordandosi (art. XIX) che il raggio FG (fig. 185) è perpendicolare alla tangente FA. E così non occorre altro che trovare sul circolo dato il punto F, tale che l'angolo AFG sia retto; epperò descrivendo sopra AG come diametro un semicircolo, il punto ov'esso incontrerà il circolo FKO, sarà (art. XIII) il punto cercato F.

Fig. 185.



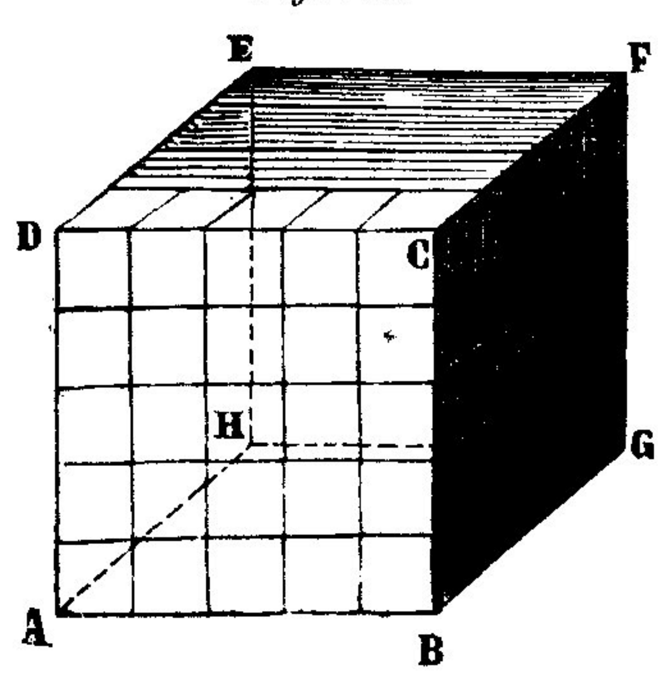
FINE DELLA PARTE TERZA.

PARTE QUARTA

DELLA MANIERA DI MISURARE I SOLIDI E LE LORO SUPERFICIE

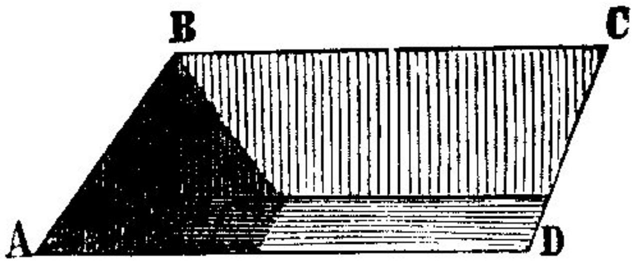
I principii, che abbiamo stabiliti nelle tre prime parti di quest'opera, sarebbero sufficienti a sciogliere problemi assai più difficili di quelli che siam per proporci: ma attenendoci al metodo che abbiam finora seguito passeremo alla misura dei solidi, cioè, delle estensioni finite che hanno tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità od altezza.

Fig. 186.



Questa ricerca è stata senza dubbio uno de' primi oggetti che hanno tratto a sè l'attenzione de' Geometri. Per esempio, si sarà voluto sapere quante pietre riquadrate vi fossero in un muro (fig. 186), di cui si conoscevano l'altezza AD, la larghezza AB, e la profondità ovvero grossezza BG. Si sarà voluto determinare la quantità d'acqua contenuta in una fossa o conserva ABCD (fig. 187), si sarà voluto trovare la solidità di una torre, di un obelisco, di una casa, d'un campanile, ecc.

Fig. 187.



Per procedere rispetto alle figure che hanno tre dimensioni con lo stesso ordine che abbiam tenuto per quelle che ne hanno due sole, esamineremo prima i solidi terminati da' piani.

Nè occorre fermarci sulla misura della superficie di questi corpi, la quale componendosi di figure rettilinee variamente unite, si misura come è stato detto nella Parte prima.

Cubo, *è un solido terminato da sei facce quadrate eguali: è la comune misura di tutti i solidi.*

I. Per misurare la solidità de' corpi è naturale di riferirli tutti al solido più semplice, come per misurare le superficie, si sono tutte riferite al quadrato. Ora il cubo è il solido più semplice, e tiene tra i solidi lo stesso luogo che il quadrato tra le superficie, essendo esso uno spazio come *abcdefgh* (fig. 188), di cui la lunghezza, la larghezza e la profondità sono uguali, ossia una figura terminata da sei facce uguali e quadrate.

Fig. 188.

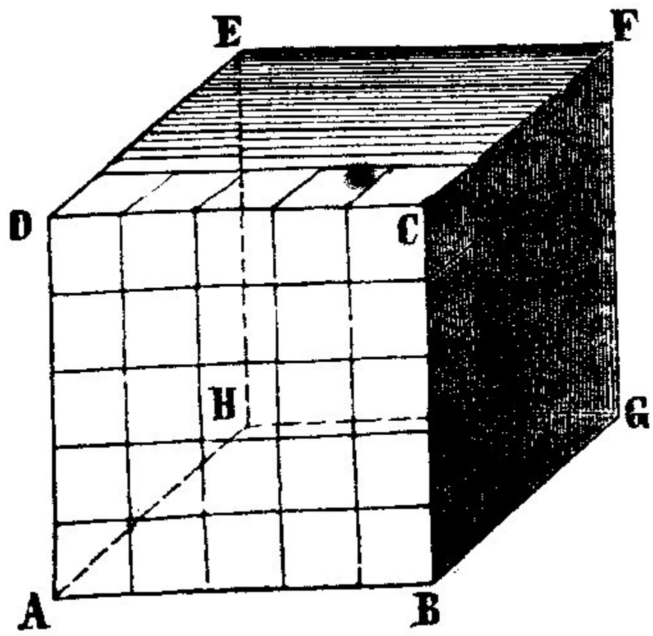
Si chiama lato del cubo il lato de' quadrati che lo terminano.

Per metro cubo s'intende un cubo che ha per lato un metro; così ancora un centimetro cubo è un cubo che ha per lato un centimetro.

Parallelepipedo, *è solido terminato da sei facce rettangole: sono paralleli i piani che serbano dappertutto la medesima distanza.*

II. I solidi, che più frequentemente si hanno da misurare sono figure come ABCDEFGH (figura 189), terminate da sei facce rettangole ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH. Si chiamano questi solidi parallelepipedi, perchè le loro facce opposte conservando in tutti i loro punti la distanza medesima l'una dall'altra, sono dette parallele, come parallele sono dette le linee, che serbano da per tutto la stessa distanza.

Fig. 189.



Misura dei parallelepipedi; *si ottiene facendo il prodotto di tre spigoli contigui, ossia della lunghezza, larghezza ed altezza.*

III. Ora l'analogia che passa tra i solidi di questa specie, e le superficie rettangole, somministrerà un mezzo facile di trovarne la misura.

Si misurino separatamente la lunghezza AD (fig. 189), la larghezza AB, e la profondità BG della figura proposta, prendendo per unità il metro, oppure il decimetro, o il centimetro, ecc. Si moltiplichino tra di loro i numeri così trovati, ed il prodotto esprimerà quanti metri cubi o decimetri o centimetri cubi conterrà il parallelepipedo proposto. L'esempio seguente mostrerà come si faccia questa operazione.

Supponiamo che la lunghezza AD sia di 6 metri, la larghezza AB di 5, e la profondità BG di 4; il rettangolo ABCD (Parte I, art. XI) avrà sei volte cinque, ovvero 30 metri quadrati. Se dipoi s'immagina che le linee BG, CF, DE, AH, che misurano tutte egualmente la profondità del solido, siano ciascuna divise in quattro parti uguali, e che pei punti di divisione corrispondenti si facciano passare altrettanti piani paralleli, questi piani divideranno il parallelepipedo proposto in quattro altri parallelepidi, che avranno ciascuno un metro di profondità, e che saranno tutti uguali. Ora la sola vista della figura dimostra che il primo di questi parallelepipedi contiene 30 metri cubi. Dunque il solido totale ABCDEFGH conterrà quattro volte 30 ovvero 120 metri cubi.

Quanti decimetri cubi, centimetri cubi, e millimetri cubi si contengano nel metro cubo.

* Con questa regola è facile di vedere che un metro cubo contiene mille decimetri cubi; che un decimetro cubo contiene mille centimetri cubi, e questo mille millimetri cubi.

Che cosa s'intenda per litro: *quali siano i multipli e sotto multipli del litro.*

Un vaso la cui capacità interna equivale ad un decimetro cubo si chiama *litro*, e si prende per unità delle misure di capacità. Per analogia con ciò che si pratica rispetto ai multipli, ed alle parti aliquote del metro, una misura di dieci litri si chiama *decalitro*: una misura di cento litri *ettolitro*: ancora la decima, la centesima, la millesima parte del litro si chiamano *decilitro*, *centilitro*, *millilitro.*

L'unità di peso chiamasi gramma: *come sia determinato il gramma, e quali ne siano i multipli e sotto-multipli.*

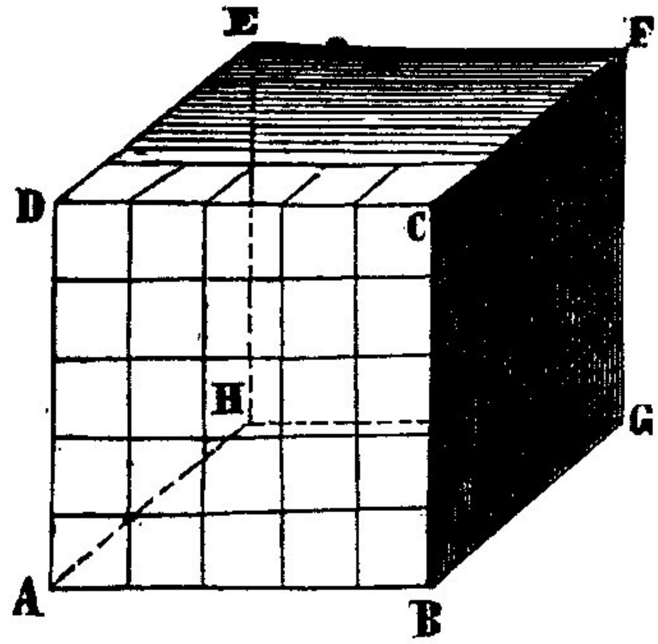
* Il peso di un *millilitro* o *centimetro cubo* d'acqua, si chiama *gramma*, e seguendo sempre la medesima regola come pei multipli del metro, il *decagramma*, l'*ettogramma*, il *chilogramma* e il *miriagramma* sono pesi di dieci, di cento, di mille e di diecimila grammi; il *decigramma*, il *centigramma*, il *milligramma* sono rispettivamente eguali alla decima, alla centesima, ed alla millesima parte del gramma.

Ogni parallelepipedo può riguardarsi come generato dal movimento di un rettangolo, il quale si mantenga sempre parallelo a se stesso.

IV. Non ci tratterremo a spiegare i varii mezzi che si possono praticamente usare per costruire parallelepipedi, perchè questi mezzi sono per lo più sì facili a trovare, che non vi ha chi non possa immaginarli da sè. Daremo bensì la formazione seguente del parallelepipedo, la quale è più utile a considerare delle altre.

Si concepisca un quadrato ovvero un rettangolo ABGH (fig. 190), il quale si muova parallelamente a se medesimo in modo che i suoi quattro angoli A, B, G, H percorrano le quattro rette eguali AD, BC, GF, HE, perpendicolari al piano del rettangolo ABGH. Se nel muoversi così questo rettangolo lasciasse dietro di sè la traccia di tutte le posizioni per cui è venuto successivamente a passare, il complesso di tutte queste posizioni formerebbe il parallelepipedo ABCDEFGH.

Fig. 190.



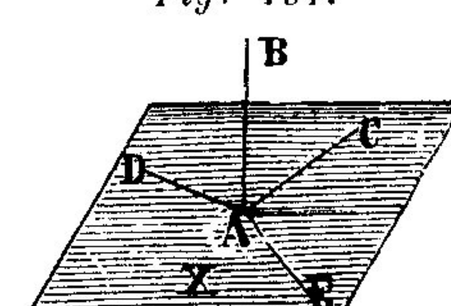
Retta perpendicolare ad un piano è quella che non pende da niuna parte sul piano. E la stessa definizione vale pel piano perpendicolare ad un altro piano.

V. È presso che inutile l'avvertire che sotto nome di linea perpendicolare ad un piano noi intendiamo una retta, che non pende da nissuna parte sopra questo piano; e similmente che un piano, il quale non pende più da un lato che da un altro sopra un secondo piano, è detto perpendicolare a questo secondo piano: le quali due definizioni sono analoghe a quelle che abbiamo date di una retta perpendicolare ad un'altra retta.

La perpendicolare ad un piano è perpendicolare a tutte le rette condotte pel piede di essa in quel piano.

VI. Ne segue che la retta AB (fig. 191), perpendicolare al piano X, dee essere perpendicolare a tutte le rette AC, AD, AE, ecc. che passano pel piede A di questa retta, e sono contenute in questo piano. Poichè

Fig. 191.



egli è evidente, che se pendesse verso una di queste linee, essa sarebbe pure inclinata verso qualche parte del piano, epperò non sarebbe più ad esso perpendicolare.

Costruzione atta a dimostrare come una retta possa essere perpendicolare ad infinite altre condotte pel piede di essa, e tutte contenute in un piano.

VII. Per rappresentarsi in modo ben sensibile, come la retta AB possa essere perpendicolare a tutte le linee che passano per la sua estremità, si potrà fare una figura in rilievo nel modo seguente:

Fig 192.

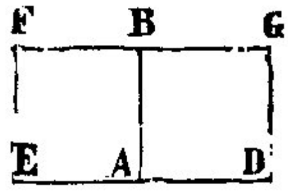
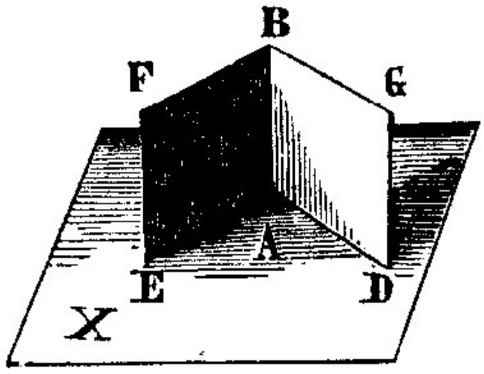


Fig. 193.



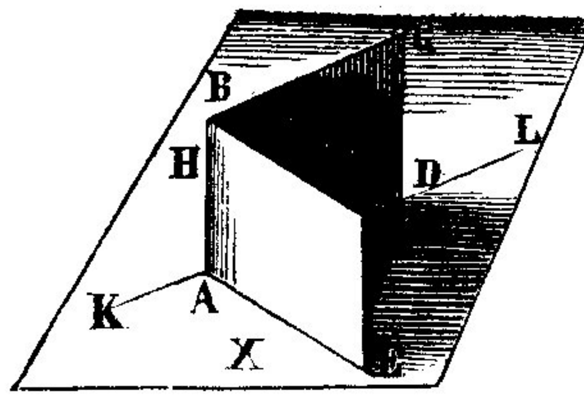
Si costruirà di cartone un rettangolo FGDE (fig. 192), diviso in due parti uguali dalla retta AB, perpendicolare a' lati ED, FG; si piegherà poi questo rettangolo secondo la linea AB, e così piegato si porrà sul piano X (fig. 193). Egli è evidente, che qualunque apertura si dia alle due parti FBAE, GBAD, del rettangolo piegato EADGBF, le rette AD, AE resteranno sempre applicate sul piano X, senza che la linea AB cangi di posizione riguardo a questo piano: dunque questa retta AB sarà perpendicolare a tutte le linee, le quali partono dal suo piede, e che saranno nel piano X, poichè i lati AE, AD del rettangolo piegato, si applicheranno successivamente nel loro moto su ciascuna di queste linee.

Modo pratico per innalzare ed abbassare perpendicolari sopra un piano.

VIII. Da questa costruzione si deduce una pratica molto comoda per alzare da un punto dato di un piano una linea perpendicolare a questo piano, o per calare sul piano stesso una perpendicolare da un punto preso fuori di esso. Infatti, sia che il punto dato cada in quel piano, come in

A (fig. 194), o fuori di esso, come in H, si potrà sempre fare avanzare il rettangolo EFBGDA sul piano X, sinchè la piegatura AB tocchi il punto dato, e in tutti e due i casi sarà AB la perpendicolare domandata.

Fig. 194.



Se una retta è perpendicolare a due rette condotte pel suo piede in un piano, essa è pure perpendicolare a questo piano.

IX. Ne segue ancora, che una retta AB (fig. 194) sarà perpendicolare a un piano X tutte le volte che essa sarà perpendicolare a due rette AE, AD segnate in questo piano. Perchè allora AB potrà riguardarsi come la piegatura di un rettangolo, del quale uno de' lati piegati si applichi sopra AE, e l'altro sopra AD. Or questa piegatura non potrà non essere perpendicolare al piano X.

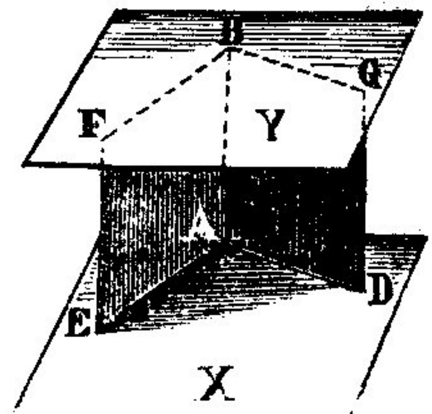
Modo pratico di condurre un piano perpendicolare ad un piano dato.

X. Se sulla retta KL (fig. 194) contenuta nel piano X si volesse innalzare un piano a questo perpendicolare, si potrebbe far uso ancora del rettangolo piegato GBFEAD; poichè posando sulla linea KL il lato AD di una delle parti ADGB di questo rettangolo piegato, il piano ADGB sarebbe il piano domandato.

Modo pratico di condurre un piano parallelo ad un piano dato.

XI. Si vedrà ancora facilmente che posando un terzo piano Y (fig. 195) su i due lati FB, BG del medesimo rettangolo piegato, questo piano Y sarà esso pure perpendicolare alla linea AB, e per conseguenza parallelo al piano X.

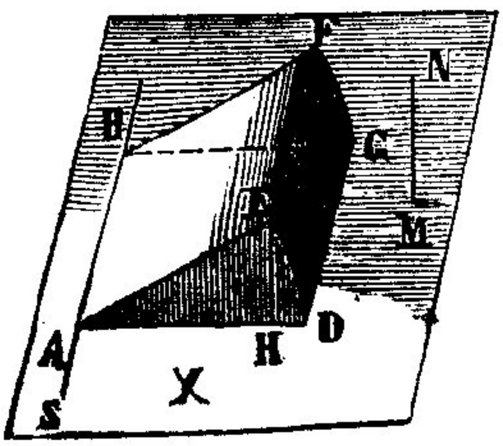
Fig. 195.



Dunque se sopra un piano X si alzino tre perpendicolari EF, AB, DG di eguale lunghezza, il piano Y, che passerà pei tre punti F, B, G, sarà parallelo al piano X.

Come si misuri la scambievole inclinazione di due piani.

Fig. 196.



XII. Quando due piani non sono paralleli, è pur facile determinar l'angolo ch' essi fanno tra loro per mezzo dello stesso rettangolo piegato. Si applichi una delle due parti ABGD (fig. 196) di questo rettangolo sul piano X; egli è evidente che l'angolo EAD ovvero il suo eguale FBG, misurerà l'inclinazione del piano EABF sul piano DABG. Or se si avverte che AB è la comune sezione di questi piani, cioè la retta, secondo la quale essi s' incontrano, e che EA e AD sono perpendicolari ad AB, se ne ricaverà la seguente regola:

Dati due piani non paralleli, si cerchi la linea retta che è loro comune sezione; poi da un punto qualunque di questa retta si tirino due rette ad essa perpendicolari, e contenute ciascuna in uno di questi piani; l'angolo, che faranno tra loro queste due perpendicolari, misurerà l'angolo che i due piani dati fanno tra loro.

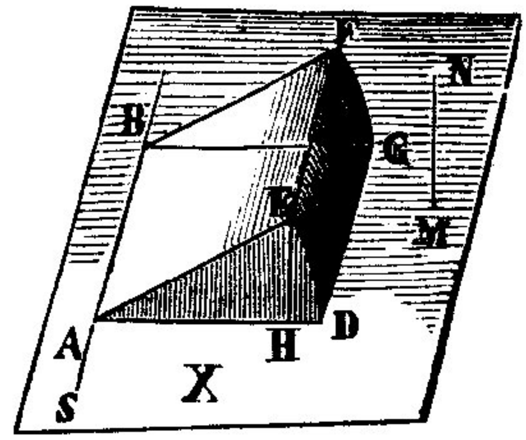
Come si misuri l' inclinazione di una retta sovra un piano.

XIII. Se si suppone ora che il piano ABFE (fig. 196) giri attorno alla piegatura AB, la retta AE, che col suo punto estremo E descrive un arco di circolo ED, non uscirà mai da un piano EAHD, perpendicolare al piano X, e l' inclinazione della retta EA sul piano X sarà misurata dall'angolo EAD. Da ciò si conchiude che l'inclinazione di una retta qualunque EA sul piano X, ha per misura l'angolo EAH compreso tra questa linea EA e la linea AD, che passa per A e per H, cioè per quel punto del piano X, ove cade la perpendicolare EH, abbassata su questo piano da un punto qualunque E della data retta AE.

Altra maniera di abbassare una perpendicolare sopra un piano.

XIV. La figura stessa, di cui ci siamo serviti nell'articolo precedente, ci suggerisce un nuovo mezzo di abbassare da un punto E, dato fuori del piano X una perpendicolare EH a questo piano.

Fig. 197.



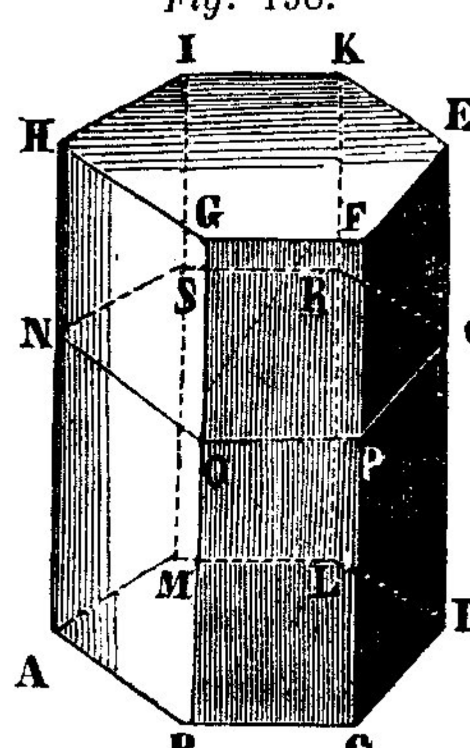
Nel dato piano X si conduca una retta qualunque BAS, e dal punto dato E si abbassi sovra di essa la perpendicolare EA. Ciò fatto, dal punto A ove cade questa perpendicolare, si tiri nel piano X la AD perpendicolare ad AB, e finalmente dal punto dato E abbassando sulla retta AD la perpendicolare EH, sarà questa la perpendicolare al piano X.

Altra maniera di innalzare una perpendicolare sopra un piano.

XV. Quindi si trae un'altra maniera di alzare in un punto M (stessa figura) dato nel piano X una perpendicolare MN a questo piano.

Avendo abbassato da un punto qualunque E preso fuori del piano X la perpendicolare EH a questo piano, si tirerà pel punto dato M la retta MN parallela ad HE, e sarà questa la perpendicolare domandata.

Fig. 198.



Prismi retti; *sono solidi ne' quali due facce opposte,* o basi *sono poligoni eguali e paralleli, e tutte le altre facce sono rettangoli.*

XVI. Dopo il parallelepipedo, il solido più semplice è il prisma retto. Questo è una figura come ABCDLMHGFEKI (fig. 198), di cui due facce opposte e parallele ABCDLM, HGFEKI, che chiamansi basi del prisma, sono due poligoni eguali, e collocati in guisa che i lati GF, FE, ecc. dell'uno siano paralleli a'lati rispettivamente eguali BC, CD, ecc. dall'altro; tutte le altre facce come ABGH, BCFG ecc. sono rettangoli.

Generazione dei prismi retti.

XVII. I Geometri suppongono queste figure generate come i parallelepipedi da una base ABCDLM la quale si muova parallelamente a se medesima, in guisa che i suoi angoli A, B ecc scorrano lungo tante rette perpendicolari al piano della base.

I prismi retti si distinguono con nomi che indicano il numero de' lati delle loro basi.

XVIII. Per distinguere le differenti specie di prismi retti, alla parola *prisma* si aggiunge il nome del poligono che gli serve di base. Il prisma esagono, per es., è quello di cui la base è un esagono.

I volumi di due prismi retti di egual base stanno tra loro come le loro altezze.

XIX. Per trovare la misura di qualsivoglia prisma retto, gioverà l'osservare che di due prismi retti di egual base, quello che avrà maggiore altezza avrà pure maggiore solidità; e le solidità dei due prismi staranno nella medesima ragione che le loro altezze.

I volumi di due prismi retti di eguale altezza stanno tra loro come le aree delle loro basi.

XX. Si osserverà ancora che due prismi retti che abbiano la medesima altezza, ma basi differenti, cosicchè la base dell'uno contenga un certo numero di volte la base dell'altro, saranno tra loro nella medesima ragione che le loro basi. La verità di questa proposizione risulta dalla generazione de' prismi spiegata nell'articolo XVII.

Sieno *abcdefghiklm* (fig. 200) ed ABCDEFGHIKLM (fig. 199) due prismi di eguale altezza, e sia la base *abcdlm* del più piccolo contenuta quattro volte, per es., nella base ABCDLM. Poichè i due prismi sono prodotti da' movimenti di queste due basi, ne segue, che un piano qualunque parallelo a quello su cui posano i due prismi li taglierà secondo due poligoni rispettivamente uguali alle loro basi, cioè a dire, che la sezione del gran prisma sarà sempre quadrupla di quella del piccolo. Dunque il prisma ABCDEFGHIKLM potrà essere riguardato come composto di falde o fette tutte quadruple di quelle del prisma *abcdefghiklm*, e per conseguenza la solidità del primo prisma sarà quadrupla di quella del secondo.

Fir. 199.

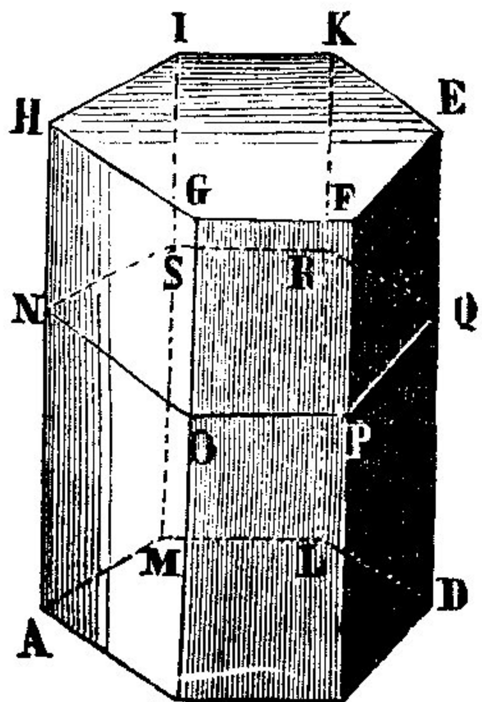
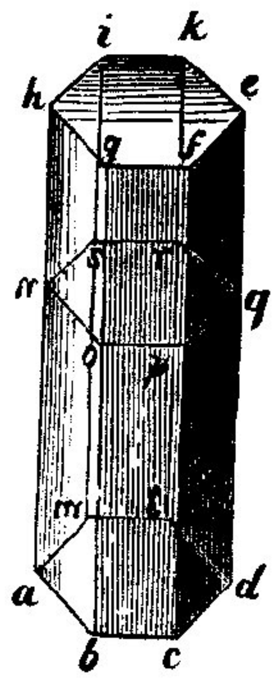


Fig. 200.



Misura dei prismi retti; *si ottiene dal prodotto dell' area della base per altezza.*

XXI. Da queste due osservazioni si trae tosto la regola seguente per la misura dei prismi retti.

Si misurerà in metri, o decimetri, ecc. quadrati, l'area della base del prisma proposto, poi si moltiplicherà il numero che si sarà trovato pel numero de' metri, o decimetri, ecc. contenuti nell'altezza del prisma, ed il prodotto darà il numero de' metri, o decimetri, ecc. cubi, contenuti nel prisma proposto, e ne esprimerà la misura.

Nei prismi obliqui sono parallelogrammi quelle facce, che sono rettangoli nei prismi retti.

XXII. Il nome di prisma si dà ancora ai solidi che hanno due basi poligone eguali e parallele, come i precedenti, ma ne' quali le altre facce non sono rettangoli, ma bensì parallelogrammi. Questi nuovi prismi si chiamano *prismi obliqui*, per distinguerli dagli altri che abbiamo chiamati *prismi retti*.

Generazione dei prismi obliqui.

XXIII. I prismi obliqui si concepiscono generati da una base *abcki* (fig. 202), la quale si muova parallelamente a se medesima, ed in guisa che i suoi angoli seguano le linee parallele *ag*, *bh*, *cd*, ecc. elevate fuori del piano della base, ad essa non perpendicolari.

Ogni prisma obliquo è equivalente ad un prisma retto di egual base e di eguale altezza.

Fig. 201.

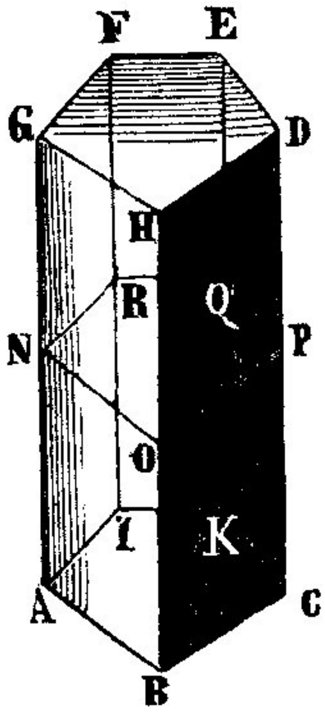
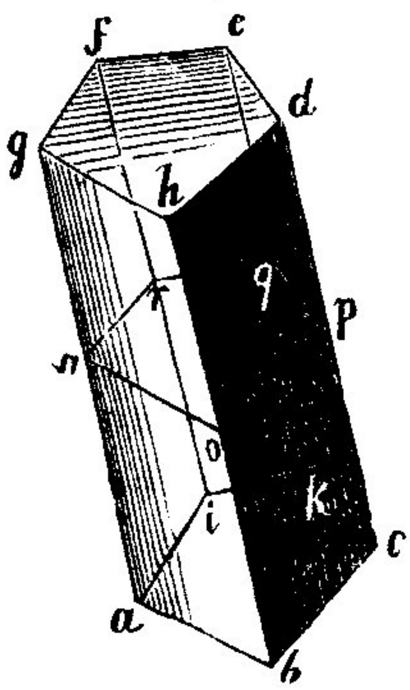


Fig. 202.



XXIV. L'analogia di questa generazione con quella dei prismi retti (art. XVII), dà facilmente la misura della solidità de' prismi obliqui. Infatti, se accanto ad un prisma obliquo *abcdefghik* (fig. 202) s'immagina collocato un prisma retto ABCDEFGHIK (fig. 201) che abbia la medesima base ed i due prismi sieno compresi tra due piani paralleli, la solidità di questi due corpi sarà assolutamente la medesima.

Infatti se per un punto qualunque P dell'altezza si fa passare un piano parallelo alla base, le sezioni NOPQR, *nopqr*, fatte da questo piano ne' due prismi, potranno riguardarsi come le basi stesse ABCKI, *abcki* passate in una delle infinite posizioni ch'esse occuperanno successivamente nel generare i due prismi, e così queste due sezioni saranno poligoni uguali.

Or se tutte le falde in cui questi due prismi possono essere tagliati per mezzo de' medesimi piani, sono eguali, eguali pur saranno le somme di queste falde, cioè le solidità dei prismi.

Questa proposizione si suole ordinariamente esprimere così: I prismi obliqui sono eguali a' prismi retti, allorchè hanno la medesima base e la medesima altezza. Si chiama altezza del prisma la perpendicolare calata dal piano superiore sull' inferiore, o sopra il prolungamento di esso.

E lo stesso vale pei parallelepipedi obliqui rispetto ai parallelepipedi retti.

XXV. E siccome i parallelepipedi debbono annoverarsi tra i prismi, le cose or dimostrate si applicheranno pure ai parallelepipedi obliqui, cioè a dire alle figure come *abcdefgh* (fig. 203), generate dal movimento di un quadrato, di un rettangolo ovvero di un parallelogrammo i cui angoli seguano quattro rette parallele alzate obliquamente sulla base. Così il parallelepipedo obliquo *abcdefgh* sarà uguale al parallelepipedo retto ABCDEFGH (fig. 204), se la base *abgh* è uguale od equivalente alla base ABGH, e se la perpendicolare calata dal piano *dcfe* sul piano *abgh* è uguale alla perpendicolare calata dal piano DCFE sul piano ABGH.

Fig. 203.

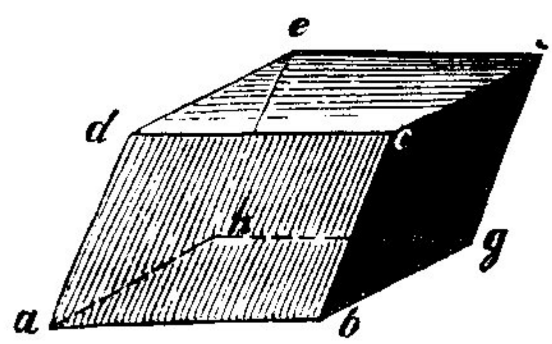
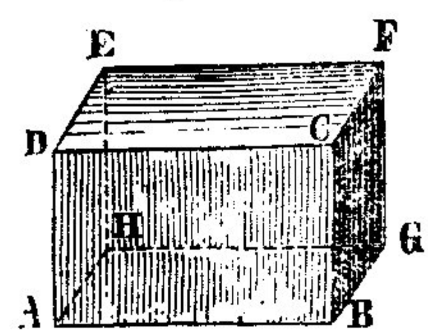


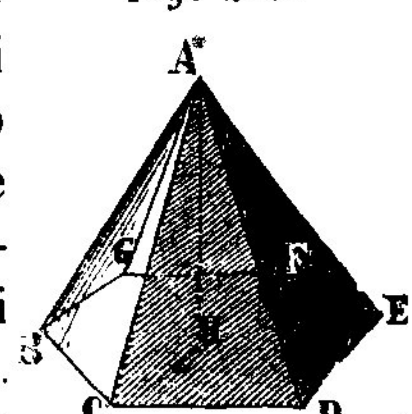
Fig. 204.



Piramidi; *sono solidi ne' quali una faccia, che dicesi base, è un poligono di qualsivoglia numero di lati, e tutte le altre facce sono triangoli.*

XXVI. Dai parallelepipedi e dai prismi passiamo ora alle piramidi, cioè ai corpi che, come ABCDEFG (fig. 205), sono limitati da un certo numero di facce triangolari che partono tutte da uno stesso vertice A, e che terminano ne' lati di una base poligona qualunque BCDEFG. Egli è necessario di considerare questa specie di solidi non solamente perchè si incontrano negli edifizi e in altri simili lavori; ma ancora perchè tutti i solidi terminati da' piani ponno scomporsi in piramidi,

Fig. 205.



come le figure rettilinee si scompongono in triangoli. Per accertarsene basta tirare da un punto preso ad arbitrio, nell'interno del corpo proposto, tante rette ai vertici di tutti gli angoli del corpo.

Le piramidi come i prismi si distinguono con nomi che indicano il numero de' lati delle loro basi.

XXVII. Le piramidi come i prismi si distinguono le une dalle altre esprimendo il nome della figura che loro serve di base.

Quali sieno le piramidi rette, e le piramidi oblique.

XXVIII. Allorchè la piramide ha per base una figura regolare, ed il suo vertice si trova sulla perpendicolare eretta nel centro H della sua base come nella figura 206, la piramide dicesi *retta;* al contrario è detta *obliqua* allorchè il vertice non è sulla perpendicolare innalzata nel centro della base, come nella fig. 207.

Fig. 206.

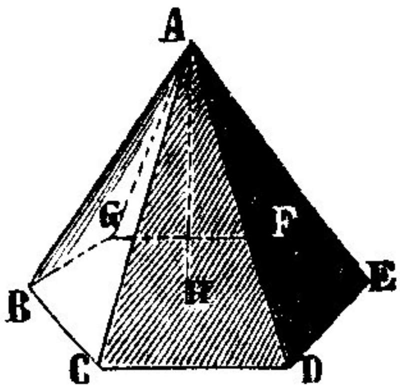
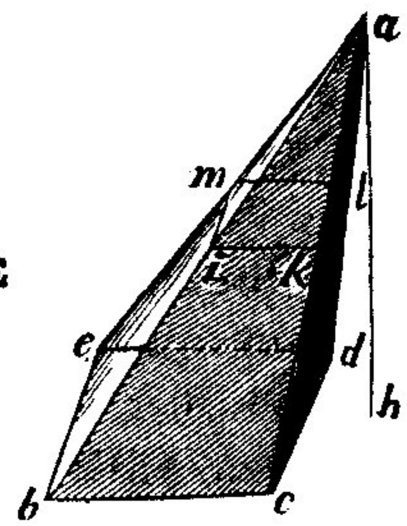


Fig. 207.



L'analogia porta supporre che le piramidi di egual base e di eguale altezza sieno equivalenti.

XXIX. Prima di esporre la maniera di misurare le piramidi tanto rette quanto oblique, faremo su queste figure alcune riflessioni generali, alle quali conduce la conoscenza delle proprietà de' prismi.

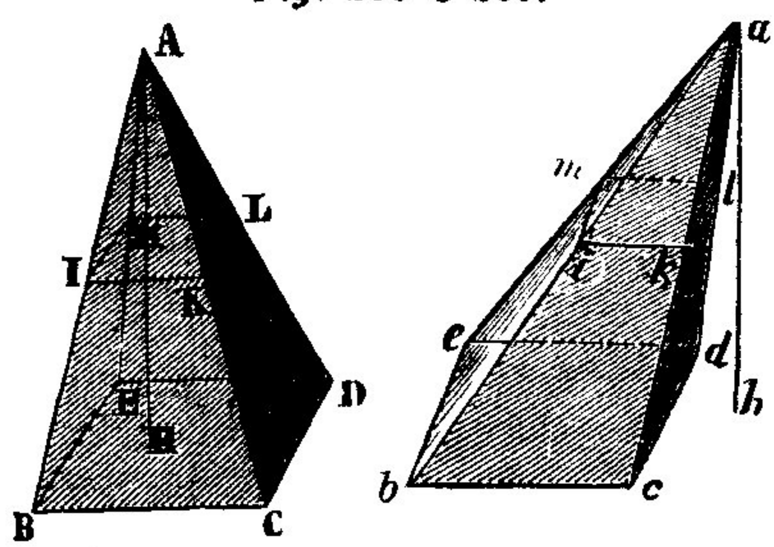
L'eguaglianza de'prismi che hanno egual base ed eguale altezza, ricorderà al lettore che una proposizione analoga è stata dimostrata pei parallelogrammi, e quindi pei triangoli.

Queste tre proposizioni rappresentandosi alla mente, l'analogia dee portarci a credere che quella proprietà che è comune a' parallelogrammi ed ai triangoli, può essere comune ancora a' prismi ed alle piramidi; epperò è lecito congetturare che le piramidi che hanno egual base ed eguale altezza hanno pure solidità eguale.

Riflessioni che confermano questa congettura.

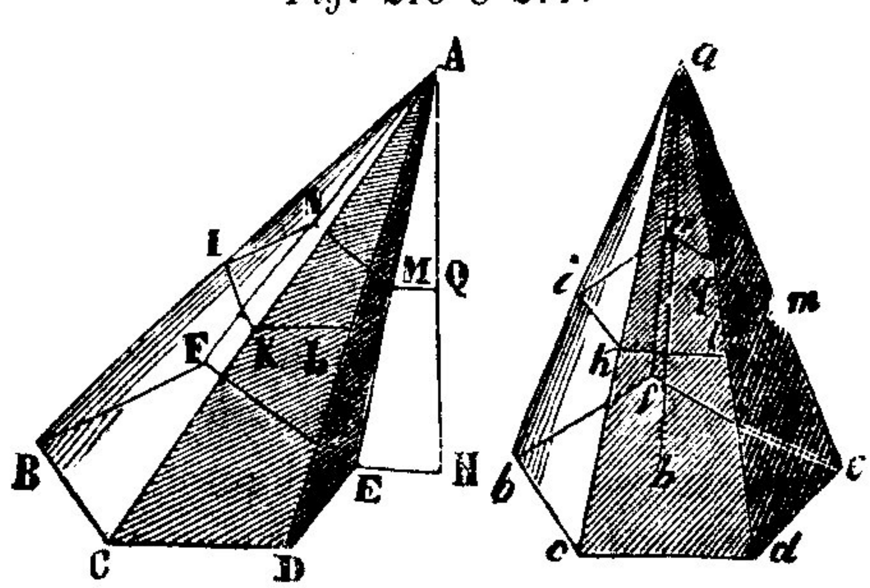
XXX. Le seguenti riflessioni confermeranno questa congettura.

Fig. 208 e 209.



Sieno ABCDE, *abcde* (fig. 208 e 209), due piramidi, le quali abbiano eguali altezze AH, *ah*, e le cui basi siano due figure uguali, per es. due quadrati uguali BCDE, *bcde*: se si immaginano queste due piramidi tagliate da un'infinità di piani paralleli alle loro basi, si scorgerà facilmente che le sezioni fatte nelle due piramidi da ciaschedun piano saranno due quadrati eguali IKLM, *iklm*, e conseguentemente che le due piramidi potranno riguardarsi come somme di un medesimo numero di falde, uguali ciascuna a ciascuna; se ne concluderà che la somma delle falde è la medesima da una parte e dall'altra, cioè che le due piramidi hanno la medesima solidità.

Fig. 210 e 211.



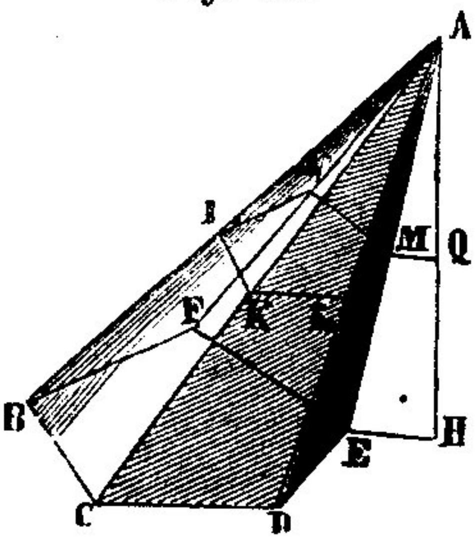
Se le basi delle due piramidi fossero altri poligoni regolari o irregolari BCDEF, *bcdef* (fig. 210 e 211) eguali tra loro, non si può dubitare che tutte le sezioni corrispondenti IKLMN, *iklmn* delle due piramidi non dovessero essere eguali tra loro, e per conseguenza anche in questo caso si conchiuderebbe che i volumi delle due piramidí sarebbero eguali.

Necessità di una dimostrazione più rigorosa.

XXXI. Tutto ciò è facile a concepirsi dopo la dimostrazione che abbiam data dell'ugualità de' prismi che hanno la stessa base e la stessa altezza: tuttavia la similitudine tra qualunque sezione **IKLMN** d'una piramide e la base **BCDEF**, e l'ugualità delle falde **IKLMN** e *iklmn*, sono proposizioni, le quali ancorchè riescano sensibili ad ognuno, hanno, rigorosamente parlando, bisogno di dimostrazione, per la qual cosa ci occorre entrare in alcune considerazioni sulla simililitudine delle figure solide.

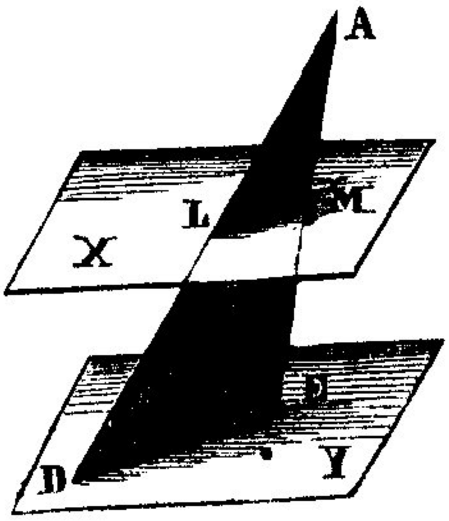
In che consista la similitudine di due piramidi.

Fig. 212.



XXXII. Riprendiamo la piramide ABCDEF (fig. 212), e supponendola tagliata da un piano IKLMN parallelo alla base, proponiamoci di dimostrare che la sezione fatta da questo piano nella piramide è un poligono simile al poligono BCDEF, e che la piramide AIKLMN è essa pure simile alla piramide ABCDEF, cioè che gli angoli tutti compresi fra le linee di queste due figure sono rispettivamente eguali, e che tutti i lati della piccola piramide sono proporzionali ai lati corrispondenti della piramide maggiore.

Fig. 213.



Due piani paralleli sono incontrati da un terzo piano secondo rette parallele tra loro.

XXXIII. Osserviamo in primo luogo che se due piani X ed Y (fig. 213) sono paralleli, e tagliano ne' punti D, E, L, M le due rette qualunque ALD, AME che s'incontrano nel punto A, le rette LM, DE, che congiungono i punti L, M, D, E, saranno parallele tra loro; infatti se queste due linee non fossero parallele, i loro prolungamenti s'incontrerebbero in qualche luogo; ma se s'incontrassero, i piani, ne' quali le due rette sono contenute e dai quali non possono uscire, s'incontrerebbero anch'essi, purchè venissero sufficientemente prolungati. Dunque non sarebbero più paralleli come si sono supposti.

Un piano parallelo alla base stacca dalla piramide intiera una piramide minore, di cui tutte le facce sono simili a quella della piramide intiera.

XXXIV. Dato dunque che il piano IKLMN (fig. 212) sia parallelo al piano BCDEF, ne seguirà che tutte le linee ML, LK, KI, IN, MN saranno parallele alle linee ED, DC, CB, BF, FE, e conseguentemente, che i triangoli ALM, AKL, AIK ecc. saranno simili ai triangoli ADE, ACD, ABC ecc. Prendendo adunque uno de'lati di questi triangoli, per esempio AM, per comune misura, o per iscala di tutti i lati della piccola piramide, ed il lato corrispondente AE per iscala de' lati della grande, si vedrà facilmente che i lati ML, LK, KI ecc. del poligono IKLMN saranno proporzionali a' lati ED, DC, CB ecc. del poligono BCDEF.

Si vedrà ancor facilmente, che tutti gli angoli IKL, KLM ecc saranno rispettivamente eguali agli angoli BCD, CDE ecc., poichè i primi saranno formati da linee parallele ai lati de'secondi. Dunque i due poligoni IKLMN, BCDEF, saranno simili.

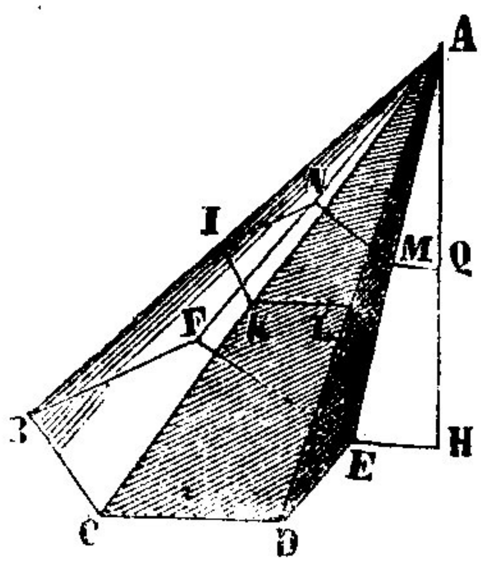
La piramide recisa è simile alla piramide intiera.

XXXV. Tutti i lati AM, AL, AK ecc. essendo proporzionali a' lati AE, AD, AC ecc., e tutti gli angoli ALM, ALK ecc. rispettivamente eguali agli angoli ADE, ADC ecc. a cagione della similitudine de'triangoli ALM, ADE; ALK ADC ecc., le due piramidi AIKLMN, ABCDEF saranno intieramente simili.

Le altezze di due piramidi simili sono proporzionali ai lati omologhi delle piramidi medesime.

XXXVI. Conducasi dal punto A (fig. 214) la perpendicolare AH al piano della base BCDEF, e sia Q il punto ove questa perpendicolare incontra il piano del poligono IKLMN sufficientemente prolungato; egli è chiaro, che le rette AQ, AH, altezze delle due piramidi AIKLMN, ABCDEF, saranno tra loro nella medesima ragione che i lati omologhi AM, AE; AL, AD ecc.; cioè, che prendendo le altezze AQ, AH, per iscale delle due piramidi, i lati AM, AL ecc. conterranno tante parti di AQ, quanti i lati AE, AD ecc. contengono parti di AH.

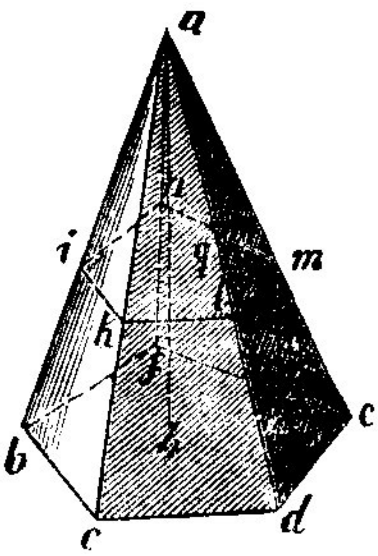
Fig. 214.



Le piramidi di egual base e di eguale altezza sono equivalenti.

XXXVII. Tornando ora a considerare le due piramidi ABCDEF, *abcdef* (fig. 214 e 215), si vedrà che le due sezioni IKLMN, *iklmn*, essendo simili alle basi eguali BCDEF, *bcdef*, saranno simili tra loro. Si vedrà di più che queste due sezioni saranno uguali fra loro, poichè le scale di queste due figure sono le rette uguali AQ, *aq*, altezze delle piramidi AIKLMN, *aiklmn*.

Fig. 215.

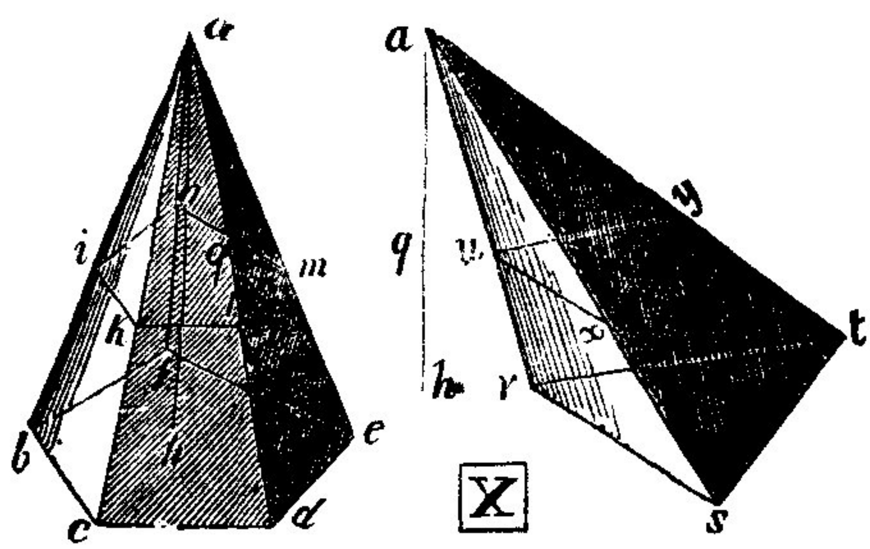


Dunque, senza conoscere la solidità delle piramidi, si può già affermare con certezza che se queste hanno la medesima altezza e la medesima base, esse sono uguali, come avevamo congetturato (art. XXIX).

Le piramidi di base equivalente e di altezza eguale sono pure equivalenti.

XXXVIII. Se le basi di due piramidi, in luogo di essere eguali, saranno solamente equivalenti, le piramidi saranno ancora equivalenti in solidità. Infatti, sieno *abcdef* (fig. 216) e *arst* (fig. 217), due piramidi di eguale altezza *ah;* tagliando queste due piramidi con un piano qualunque parallelo alla base, egli è evidente che l'istessa proporzione avrà l'area *iklmn* all'area *bcdef*, che l'area *uxy* all'area *rst;* poichè *i k l m n*, *b c d e f* essendo (Parte I, articolo XXXIV) figure simili, non differiscono (Parte I, art. XLVIII) che per le loro scale *aq*, *ah* ecc.; e così le figure *uxy*, *rst*, essendo parimente simili, non differiscono esse pure che per le loro scale, che sono ancora le linee *aq*, *ah*.

Fig. 216 e 217.



Ma se le basi *rst*, *bcdef* sono eguali in superficie, le loro parti proporzionali *uxy iklmn*, sono uguali: dunque tutte le falde delle due piramidi *arst*, *abcdef* avranno la medesima estensione: dunque tutte esse insieme, cioè a dire le piramidi medesime, saranno eguali in solidità.

Le piramidi di eguale altezza stanno tra loro come le loro basi.

XXXIX. Se la base *bcdef* della prima piramide contiene un numero determinato di volte la base *rst* della seconda, la solidità della prima piramide *abcdef* conterrà il medesimo numero di volte la solidità della seconda *arst*.

Perchè in questo caso la base *bcdef* essendo divisa in più parti equivalenti alla base *rst*, si potrà concepire la piramide *abcdef* come composta di più altre piramidi, che abbiano per basi le parti di *bcdef*. Or ciascuna di queste nuove piramidi sarà equivalente alla seconda piramide *arst* per l'articolo precedente: dunque ecc.

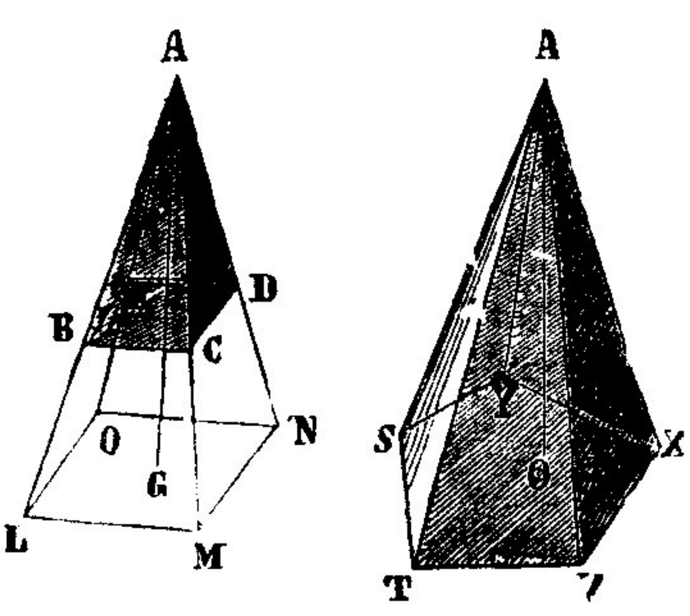
Che se la base *rst* non venisse esattamente contenuta nella base *bcdef*, ma esistesse tra queste basi una misura comune X, si potrebbe ciascuna di queste due basi *bcdef*, *rst* dividere in parti uguali ad X, ed apparirebbe manifestamente che le due piramidi *abcdef*, *arst* possono riguardarsi come composte di tante piramidi tutte tra loro eguali, quante sono le parti eguali ad X contenute nelle loro basi, e che per conseguenza le piramidi *abcdef*, *arst* stanno tra loro come le loro basi.

Finalmente se queste basi fossero incommensurabili, si dimostrerebbe ancora che le piramidi sarebbero tra loro nella ragion delle basi, per via di una induzione simile a quella che abbiamo usata (Parte II, art. XXVIII) per confrontare le figure piane di lati incommensurabili; cioè a dire che si diminuirebbe all'infinito la misura X, in modo che potesse assumersi per misura comune delle basi *rst*, *bcdef*.

Basta saper misurare una sola piramide per dedurne la misura di tutte le altre.

XL. Or che sappiamo che le piramidi d'eguale altezza sono proporzionali alle loro basi, la misura della loro solidità non ci riuscirà gran fatto difficile, poichè basterà saper misurare una sola piramide per misurare tutte le altre.

Fig. 218 e 219.



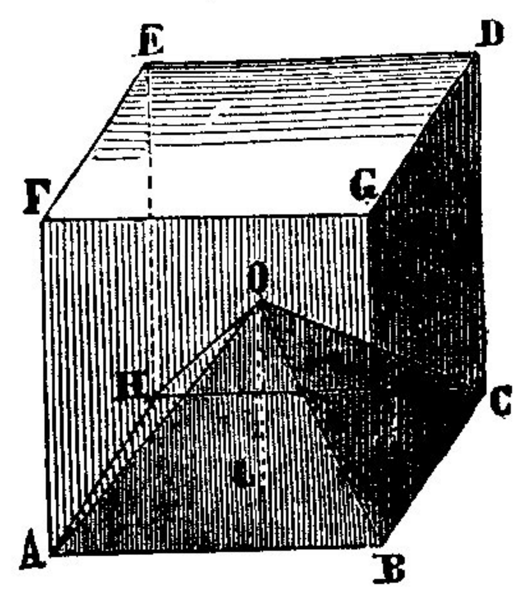
Supponiamo, per esempio, che sappiasi misurare la piramide ABCDE (fig. 218), e si domandi la misura della piramide ASTVXY (fig. 219), che non ha nè la medesima base nè la medesima altezza della prima. Facciasi una piramide simile alla piramide ABCDE, e d'altezza eguale a quella della piramide ASTVXY; ciò sarà facile, poichè basterà (art. XXXV) prolungare i lati AB, AC, AD, AE, e tagliarli col piano LMNO, la cui distanza AG dal vertice A, sia eguale all'altezza AO.

Ciò fatto, poichè per ipotesi sappiamo misurare la piramide ABCDE, sapremo pure misurare la piramide simile ALMNO. Perchè quali che siano le operazioni per le quali si misura la piramide ABCDE, si potranno sempre fare le medesime operazioni per misurare la piramide simile ALMNO, mutando solo la scala.

Ottenuta così la misura della piramide ALMNO, essa determinerà quella della piramide proposta ASTVXY: perchè per l'articolo precedente queste due piramidi stanno tra loro, come le loro basi LMNO, STVXY, e già abbiamo insegnato nella seconda Parte a trovare il rapporto di queste due basi.

Il cubo si compone in sei piramidi eguali, e ciascuna di esse ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza.

Fig. 220.



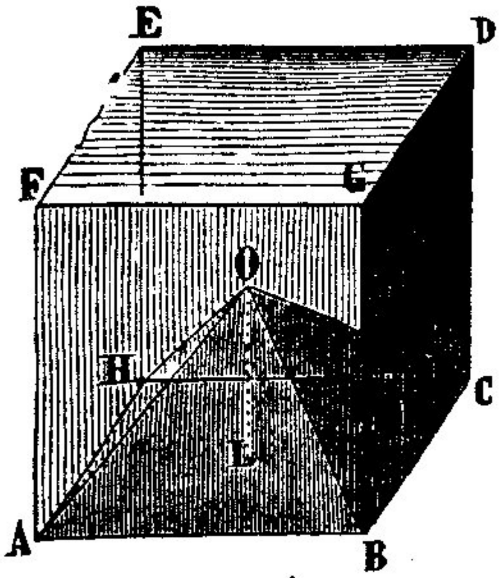
XLI. Poichè dalla misura di una sola piramide si deduce quella di tutte le altre, proponiamoci la piramide semplicissima che si forma tirando da quattro angoli A, B, C, H, d'una faccia di un cubo ABCDEFGH (fig. 220), quattro linee al punto O, centro di questo cubo, cioè a dire al punto che è ad egual distanza da tutti i vertici A, D, B, E ecc.

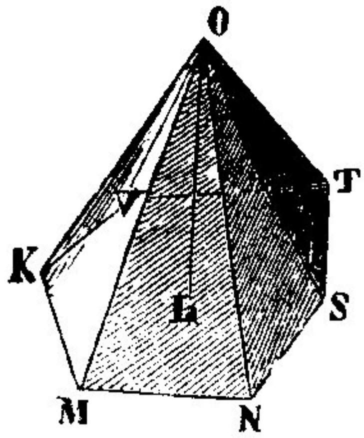
Or subito si scorge che questa piramide è la sesta parte del cubo, poichè si può il cubo risolvere in sei piramidi uguali, prendendo successivamente per base ciascheduna delle sue facce. Ma il volume del cubo ha per valore il prodotto dell'altezza AF per la base ABCH. Dunque per avere il volume della piramide bisognerà prendere la sesta parte del prodotto di AF per ABCH; ovvero, quel che torna allo stesso, moltiplicare la sesta parte dell'altezza AF per la base ABCH; e siccome la sesta parte dell'altezza AF del cubo è il terzo dell'altezza OL della piramide OABCH (poichè la sua altezza OL è la metà del lato del cubo), la misura della piramide OABCH sarà il prodotto del terzo della sua altezza per la base.

Ogni piramide ha per misura il prodotto della base per la terza parte dell'altezza.

XLII. Supponendo ora, che si abbia da misurare una piramide qualunque sia O K M N S T V (fig. 222); si immagini un cubo di lato AB, o AE (fig. 221) doppio dell'altezza OL della piramide proposta, e si concepisca dentro questo cubo una piramide OABCH, col vertice nel centro del cubo, e che abbia per base una delle facce ABCH di esso. Questa nuova piramide avrà la medesima altezza della prima, e per conseguenza (art. XXXIX) la solidità di OABCH sarà a quella di OKMNSTV, come la base ABCH alla base KMNSTV; or per l'articolo precedente il prodotto del terzo dell'altezza comune OL per la base ABCH è il valore della piramide OABCH; dunque il prodotto del terzo della medesima altezza comune OL per la base KMNSTV sarà il valore della piramide proposta OKMNSTV.

Fig. 221 e 222.





Così si scopre questo generale teorema, che ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base nel terzo della sua altezza.

Ogni piramide è la terza parte di un prisma di egual base e di eguale altezza.

XLIII. Poichè (art. XXI) la solidità di un prisma ha per misura il prodotto della base per l'altezza, egli è chiaro per l'articolo precedente, che ogni piramide è il terzo di un prisma di egual base e di eguale altezza.

Angolo solido o angolo poliedro.

77. È l'angolo formato da angoli piani aventi tutti il vertice in un medesimo punto, che è il vertice dell'angolo solido.

Per formare un angolo solido occorrono almeno tre angoli piani.

78. Proposizione evidente; in questo caso l'angolo solido dicesi *triedro.*

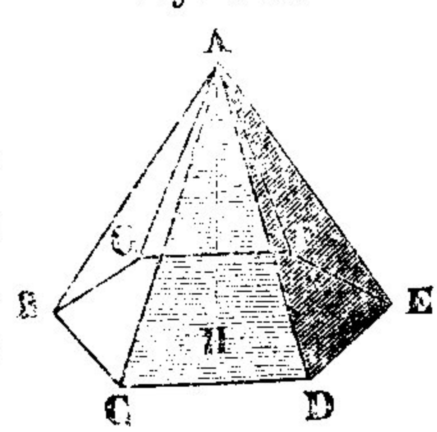
In un angolo triedro uno degli angoli piani è sempre minore della somma degli altri due.

79. Proposizione che si conosce vera per intuizione.

In un angolo solido la somma di tutti gli angoli piani è sempre minore di quattro angoli retti.

80. Anche questa proposizione si rende evidente col metodo grafico-intuitivo (fig. 223). Infatti, basta far vedere che i 5 angoli in A diventano evidentemente tanto più piccoli, quanto più il punto A si allontana dal piano BCDEFG; e che quegli angoli sono uguali a 4 angoli retti, quando il punto A si trova sul piano stesso BCDEFG (Parte I, art. LVIII).

Fig. 223.



Poliedro regolare.

81. È qualunque solido, la cui superficie è formata da poligoni regolari uguali fra loro, e di cui gli angoli sono formati da un ugual numero di angoli piani di que' poligoni.

Poliedri regolari ve ne sono cinque soltanto.

82. Cioè: 1° quello formato da 4 triangoli equilateri uguali e in cui ciascun angolo solido è formato da tre angoli di que' triangoli; dicesi **tetraedro regolare.**

2° Quello formato da 8 triangoli equilateri uguali, in cui ciascun angolo solido è formato da quattro angoli di que' triangoli; dicesi **ottaedro regolare.**

3° Quello formato da 20 triangoli equilateri uguali, in cui ciascun angolo solido è formato da cinque angoli di que' triangoli; chiamasi **icosaedro regolare**.

4° Quello formato da 6 quadrati uguali, in cui ciascun angolo solido è formato da tre angoli di que' quadrati; dicesi **esaedro regolare o cubo**.

5° Quello formato da 12 pentagoni regolari uguali, in cui ciascun angolo è formato da tre angoli di que' pentagoni; dicesi **dodecaedro regolare**.

Con un numero di angoli; di triangoli equilateri maggiore di cinque o di quadrati maggiore di tre, o di pentagoni regolari maggiore di tre; o con soli tre di esagoni, ettagoni.... regolari, è impossibile formare un angolo solido (79), perchè la loro somma darebbe o quattro retti o più; dunque è impossibile anche formare alcun altro poliedro regolare oltre i cinque nominati.

Ne' solidi terminati da superficie curve, oltre alla misura del volume, si dee cercare ancora la misura della superficie.

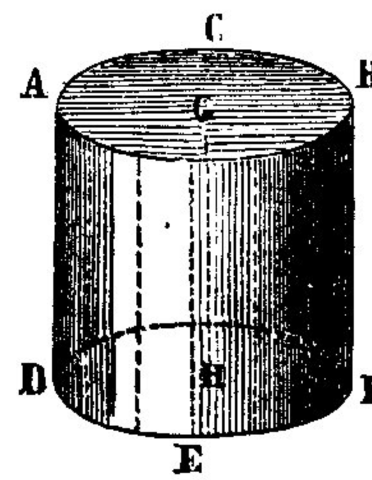
XLIV. Dalla misura de' solidi terminati da superficie piane, passiamo a quella de' corpi terminati da superficie curve. E come nella terza Parte abbiamo trattato delle sole figure, il cui contorno non contiene altre curve che archi di circolo, così limitiamoci qui pure ai soli corpi, di cui le curvature sono circolari.

Nell'esame di questi corpi dovremo proporci due oggetti, cioè la misura delle loro superficie, e quella delle loro solidità; perchè essendo le superficie di questi corpi o intieramente curve, o in parte piane o in parte curve, non potremo rimandare per la loro misura alla prima Parte, come abbiamo fatto pei corpi terminati da sole superficie piane.

Cilindro; *è un solido terminato da due basi parallele, eguali e circolari, e da un piano ripiegato intorno alle circonferenze delle due basi — si distinguono i cilindri retti dai cilindri obliqui.*

XLV. Il più semplice di tutti i corpi terminati da superficie curve è il cilindro. È questo un solido come ABCDEF (fig. 224), le cui due basi ABC, DEF sono due circoli uguali, congiunti con una superficie curva, che può riguardarsi come formata da un piano piegato attorno alle loro circonferenze.

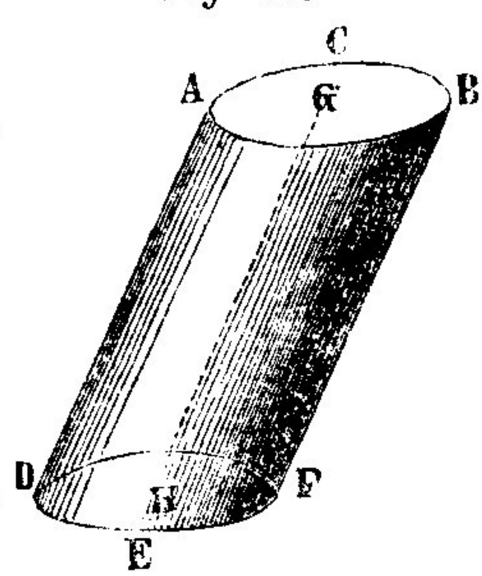
Fig. 224.



Allorchè i due circoli sono collocati in modo, che il centro G del primo cada sulla perpendicolare innalzata nel centro H del secondo, il cilindro si chiama retto.

Il cilindro si chiama al contrario obliquo, allorchè la linea tirata per i due centri G e H (fig. 225) è obliqua rispetto a' piani ABC, DEF.

Fig. 225.



Generazione del cilindro retto.

XLVI. La formazione geometrica di questi solidi, analoga a quella de' prismi e de'parallelepipedi (art. XVII), consiste nel far muovere un circolo parallelamente a se stesso in modo, che tutti i suoi punti descrivano linee rette parallele, elevate fuori del piano di questo circolo.

La superficie curva di un cilindro retto è eguale a quella di un rettangolo di altezza eguale a quella del cilindro, e di base eguale alla circonferenza della base del cilindro.

XLVII. Sovente occorre in pratica di misurare la superficie di un cilindro retto: questa misura si otterrà come segue:

Divise le due circonferenze ABC, DEF (fig. 224) in uno stesso numero di parti eguali, sicchè i punti di divisione di sotto corrispondano a quelli di sopra, si tirino tante linee rette che congiungano gli angoli corrispondenti dei due poligoni regolari che potrebbero inscriversi nelle due basi, congiungendo a due a due i successivi punti di divisione. Egli è chiaro, che si avrà allora un prisma, la superficie del quale sarà composta di altrettanti rettangoli compresi sotto la superficie del cilindro, quanti sono i lati inscritti in ciascuna delle circonferenze ABC, DEF. Or tutti questi rettangoli avendo l'altezza eguale ad AD, la loro misura totale sarà il prodotto dell'altezza AD per la somma di tutte le basi, cioè a dire pel contorno del poligono compreso o iscritto nel circolo DEF, ovvero ABC.

Ma siccome al crescere del numero de' lati di questo poligono, il contorno di esso si approssimerà sempre più alla circonferenza, e la superficie del prisma a quella del cilindro, ne segue che fingendo questo numero infinito, il prisma più non differirà dal cilindro. Dunque la superficie curva del cilindro retto è uguale ad un rettangolo che abbia AD per altezza, e per base una linea retta uguale alla circonferenza DEF.

Questa proposizione può servire a trovare, per esempio, quanta stoffa sia necessaria per rivestire una colonna cilindrica, o per parare l'interno di una torre rotonda.

La superficie curva di un cilindro obliquo non può determinarsi coi metodi della geometria elementare.

XLVIII. Quanto alla superficie del cilindro obliquo, essa non può misurarsi nella medesima maniera: perchè in luogo di rettangoli si troveranno de' parallelogrammi di diversa altezza. Solo per via di metodi complicati e difficili si è arrivato a conoscere il valore approssimato di tali superficie; ma i problemi di questo genere non possono esporsi in un libro elementare.

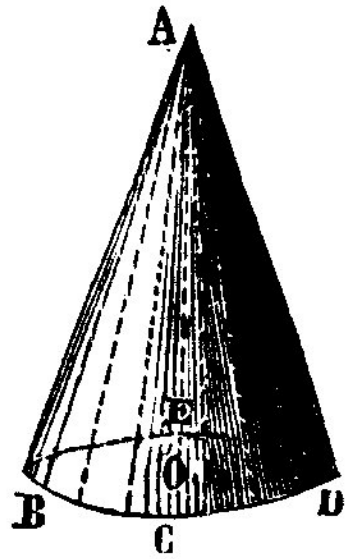
I cilindri di egual base e di eguale altezza sono equivalenti.

XLIX. La solidità de' cilindri sì retti che obliqui, si trova facilissimamente, essendo manifesto che tutto ciò che abbiam detto de' prismi, conviene egualmente a' cilindri, se si considera che questi si confondono coi prismi in essi inscritti, quando il numero de' lati di questi prismi si concepisce infinitamente grande.

E così i cilindri, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono eguali in solidità.

La solidità di un cilindro ha per volume il prodotto della superficie della base per l'altezza del cilindro.

Fig. 226.



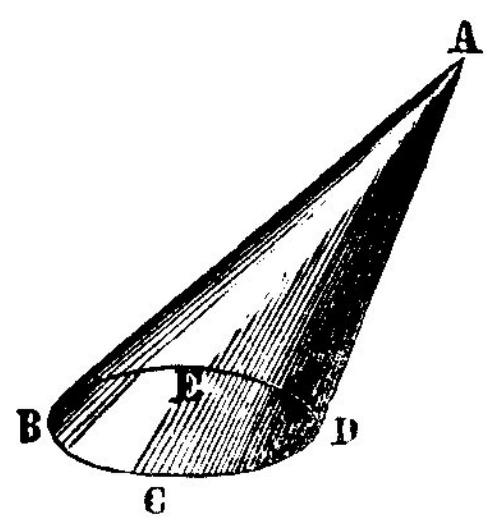
L. E la misura di un cilindro qualunque si ha facendo il prodotto della sua base per la sua altezza.

Cono; *può riguardarsi come una piramide che ha per base un circolo.*

LI. Dopo il cilindro il cono è il più semplice fra i solidi terminati da superficie curve; chiamasi cono una figura come ABCDE (fig. 226), che ha per base un circolo e sulla superficie della quale si possono segnare un'infinità di linee rette, le quali passano tutte pel punto A, che chiamasi vertice, e incontrano la circonferenza BCDE, detta base. Il cono può dunque riguardarsi come una piramide che ha per bàse un circolo.

Si distingue il cono retto dal cono obliquo.

Fig. 227.



LII. Se, come nella figura 226, il vertice A del cono è sulla perpendicolare eretta nel centro O della base, il cono dicesi retto; se la retta condotta dal vertice al centro della base è obliqua al piano di questa (fig. 227), il cono dicesi obliquo.

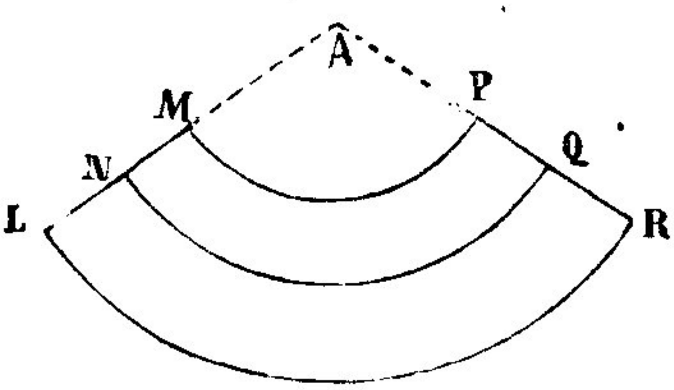
La superficie curva di un cono retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per la metà del lato del cono.

LIII. Per misurare la superficie di un cono retto ABCDE (fig. 226), questo si riguarderà come l'ultima delle piramidi che si possano in esso inscrivere; cioè, divisa la circonferenza della sua base BCDE in una infinità di piccoli lati, e tirate tante rette da tutti i punti di divisione al vertice del cono A, si troverà che la superficie conica è il complesso di un' infinità di piccoli triangoli isosceli, l'altezza dei quali è eguale al lato AB del cono, e dei quali tutte le basi insieme unite sono eguali alla circonferenza BCDE; onde è facile conchiudere, che la misura di questa superficie si troverà moltiplicando la metà del lato AB per la circonferenza BCDE della base.

Sviluppando sopra un piano la superficie curva di un cono retto si ottiene un settore circolare.

LIV. Tutti i lati AB, AC, AD ecc. di un cono retto (fig. 226) essendo eguali tra loro, se con un raggio eguale a questi lati si descriverà l'arco di circolo RL (fig. 228) di lunghezza eguale alla circonferenza BCDE della base del cono, tirando alle estremità L, R di quest'arco i raggi AL, AR, si formerà un settore LAR, il quale potrà invilupparsi sulla superficie curva del cono e la coprirà esattamente. Ciò conferma la regola ora insegnata per misurare questa superficie curva: poichè secondo l'art. x della Parte terza, la superficie del settore LAR, eguale a quella del cono, si trova moltiplicando la lunghezza dell'arco LR (eguale alla circonferenza BCDE), per la metà del raggio (eguale al lato AB).

Fig. 228.



La superficie curva di un cono obliquo non può determinarsi coi soli metodi della geometria elementare.

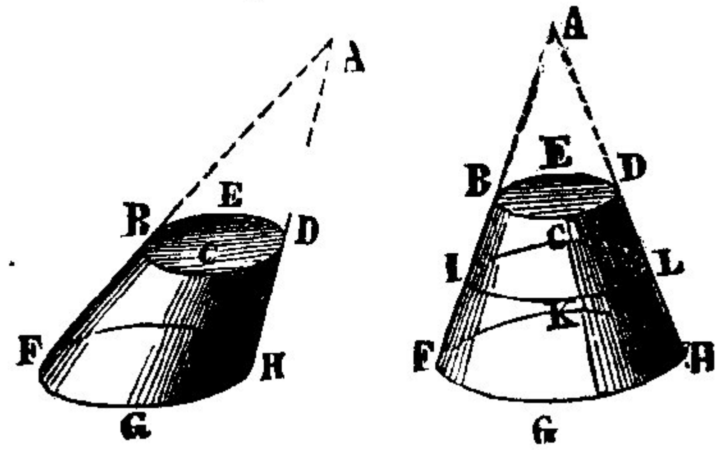
LV. Allorchè il cono è obliquo, la misura della sua superficie, come quella del cilindro obliquo, è assai difficile a trovare anco in modo approssimato, e questo pure è problema che non può trovar luogo negli Elementi.

I coni di egual base e di eguale altezza hanno lo stesso volume.

LVI. Quanto alla solidità de' coni sì retti che obliqui, essa si determina riguardando i coni come eguali alle ultime piramidi che si possano in essi inscrivere, ed applicando loro ciò che si è detto delle piramidi in generale.

E così i coni, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono uguali.

Fig. 229 e 230.



Il volume di qualsivoglia cono ha per misura il prodotto dell' area della base pel terzo dell'altezza.

LVII. E la solidità di un cono qualunque è misurata dal prodotto della base pel terzo della sua altezza.

Cono tronco a basi parallele.

LVIII. Occorre qualche volta di misurare un corpo come BCDEFGH (fig. 229 e 230), che si chiama cono tronco, cioè la parte che resta di un cono AFGH, allorchè se ne leva un altro cono più piccolo ABCDE con un taglio parallelo alla base FGH.

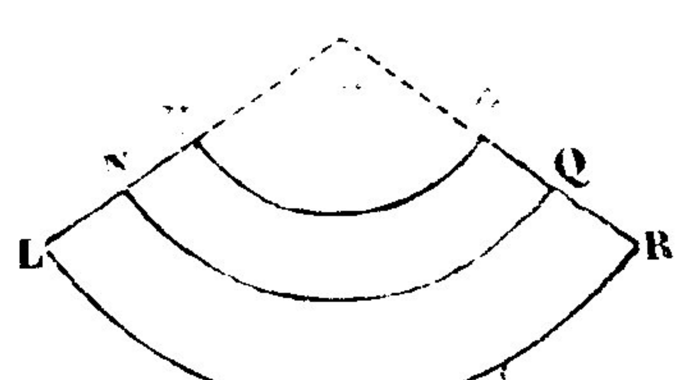
Misura del cono tronco a basi parallele.

Egli è evidente che il volume di questo solido sarà la differenza tra quelli dei due coni ABCDE, AFGH.

La superficie curva di un tronco di cono retto è eguale ad una porzione di corona circolare: come si misuri.

LIX. Quanto alla superficie di un tronco di cono retto, essa può determinarsi senza misurare separatamente la superficie dei due coni, per sottrarre l'una dall'altra. Ciò si farà col seguente metodo, che è una conseguenza dell'art. LIV.

Fig. 231.



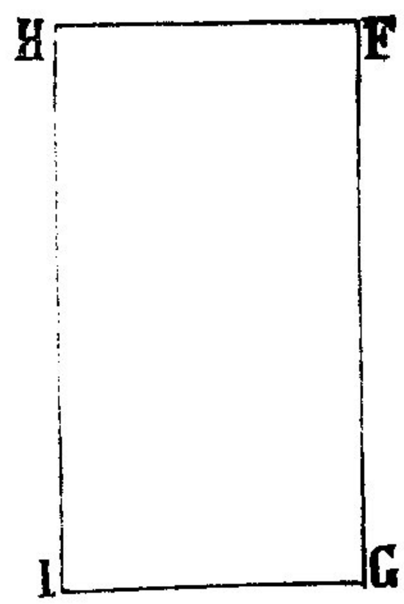
Supponiamo che ALR (fig. 231) sia il settore che bisogna costruire per poter coprire il cono AFGH (fig. 230): si descriva dal centro A l'arco MP, con raggio AM eguale al lato AB (fig. 230) del cono reciso ABCDE; egli è chiaro che la superficie MPRL sarà una porzion di circolo capace di coprire la superficie cercata del cono tronco.

Ora compiendo le due circonferenze cui appartengono gli archi MP ed LR, si avrebbe una corona circolare, misurata (parte III, art. VIII) dal prodotto di ML eguale a BF per la circonferenza, di cui AN è il raggio, essendo N il punto di mezzo di ML. Dunque la porzione di corona MPRL, ovvero la superficie del cono troncato BCDEFGH, si misurerà moltiplicando ML per l'arco NQ, ovvero, moltiplicando BF (fig. 230) per la circonferenza IKL della sezione fatta nel solido proposto da un piano parallelo alla base e condotto pel mezzo del lato BF.

Generazione del cilindro retto:

83. Il cilindro retto si può anche considerare generato da un rettangolo HIGF (fig. 232), che si aggira intorno ad uno de' suoi lati, per esempio HI. In tale ipotesi il lato stesso immobile HI è l'*asse del cilindro*, il lato FG, opposto ad HI è il *lato del cilindro* e nel suo rivolgimento genera la *superficie curva*, e i due lati IG e HF contigui all'asse, sono i *raggi delle due basi circolari* generate dal loro rivolgimento.

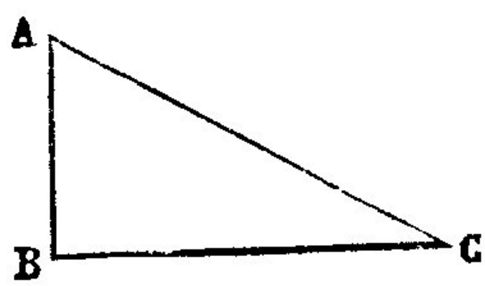
Fig. 232.



Generazione del cono retto.

84. Il cono retto s'immagina generato da un triangolo rettangolo ABC (fig. 233) che si aggira intorno ad uno de' suoi cateti AB. Il cateto immobile è l'*asse del cono retto* e ne misura l'altezza; l'altro cateto BC è il *raggio della base circolare* generata dal suo rivolgimento, e l'ipotenusa AC è il *lato* del cono, e col suo rivolgimento genera la *superficie curva*.

Fig. 233.

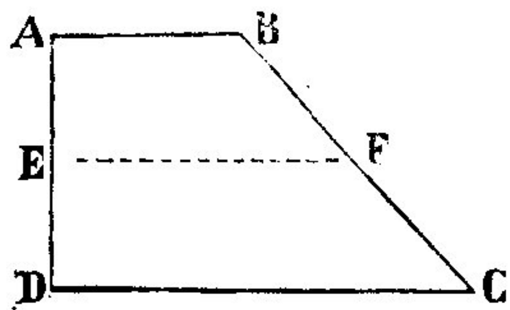


Generazione del tronco di cono retto a basi parallele.

85. Il tronco di cono retto a basi parallele si può considerare generato da un trapezio rettangolo ABCD, che si aggira

intorno al lato AD perpendicolare alle due basi. Il lato AD immobile è l'*asse del tronco di cono retto*, e ne misura l'altezza; il lato BC opposto ad AD è il *lato del tronco di cono retto* e col suo rivolgimento genera la ***superficie conica***, e i due lati paralleli AB, DC sono i ***raggi delle due basi circolari*** generate dal loro rivolgimento.

Fig. 234.



Il lato EF parallelo ai due AB e DC e condotto dal mezzo di AD al mezzo di BC, è il raggio del circolo condotto nel tronco da un piano parallelo alle basi ed equidistante da esse.

Dunque la superficie conica del cono tronco generato dal trapezio ABCD, si misurerà moltiplicando il lato BC per la circonferenza di raggio EF (LIX).

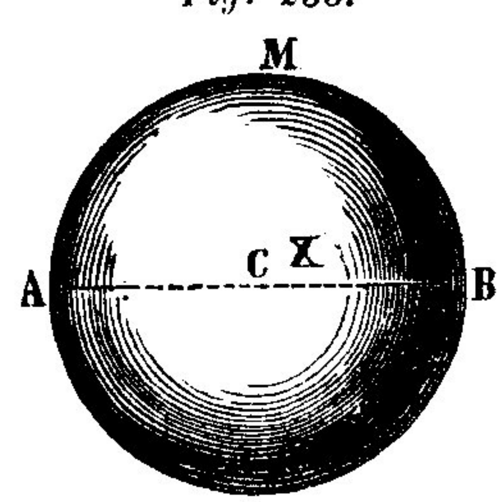
Sfera; *è un corpo terminato da una superficie che ha tutti i suoi punti equidistanti dal centro.*

LX. L'ultimo solido, di cui tratteremo, si chiama sfera o globo, ed è quello, la superficie del quale ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un medesimo punto, che n'è il centro. Spesso occorre di misurare questa superficie; per esempio, si domanderà quanta doratura vi voglia per una palla, o quanto piombo per una cupola ecc.

Generazione della sfera.

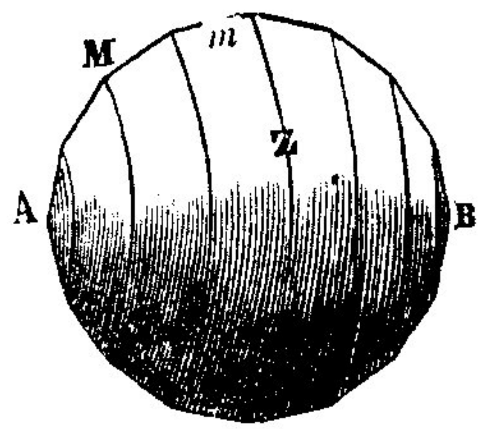
LXI. Sia X (fig. 235) la sfera di cui si ha da misurare la superficie; egli è evidente che si può concepire questo solido come prodotto dalla rivoluzione di un semicircolo AMB, attorno al suo diametro AB.

Fig. 235.



Supponiamo che in luogo della circonferenza noi abbiamo un poligono regolare di un numero infinito di piccoli lati, o se si vuole, di un grandissimo numero di lati, e si voglia misurare solamente la superficie Z (fig. 236) prodotta dalla rivoluzione di questo poligono. Sarà facile passar poi alla misura della superficie della sfera, come dalla misura delle figure rettilinee abbiamo potuto passare a quella del circolo.

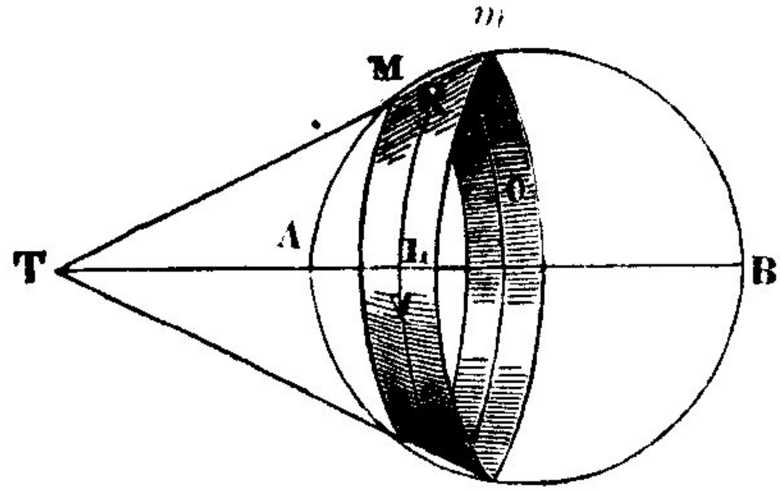
Fig. 236.



Ricerca della superficie generata dalla rivoluzione di un lato di un poligono regolare intorno al diametro.

LXII. Per misurare la superficie del solido Z (fig. 237), esaminiamo la piccola parte di questa superficie generata da un solo lato qualunque Mm del poligono inscritto, nel girare attorno al diametro AB. Egli è evidente che questo lato Mm (fig. 237) descrive in questo movimento la superficie V di un cono tronco; poichè

Fig. 237.



prolungando la retta mM, finchè incontri in T il diametro o asse di rivoluzione AB, se questa linea TMm gira nel tempo medesimo che il semicircolo AMB, essa descriverà manifestamente un cono retto, il quale avrà il vertice in T, ed il circolo descritto dal punto m per base. La superficie V generata dal movimento di Mm sarà dunque una porzione di superficie conica, compresa tra i piani de' circoli descritti dai punti M e m. Ma abbiam veduto (art. LIX) che la superficie V è uguale a un rettangolo che abbia per altezza Mm, e per base una retta eguale alla circonferenza KLO condotta pel punto K, mezzo di Mm. Dunque la superficie generata dalla rivoluzione del poligono è uguale alla somma di tanti rettangoli di questa natura, quanti sono i lati del poligono.

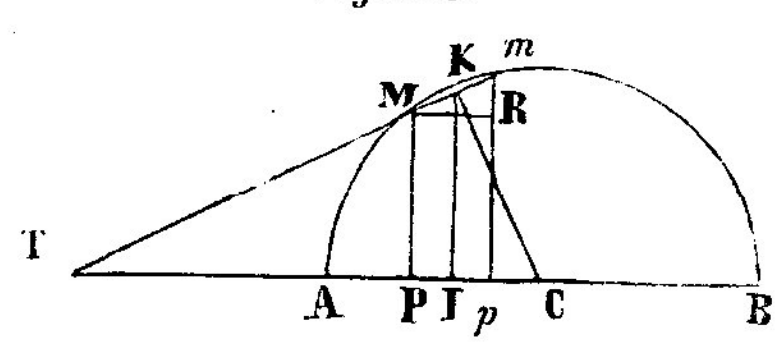
Or siccome tutti i lati Mm, cioè le altezze di questi rettangoli sono supposti eguali, si potrà riguardare la superficie cercata come un rettangolo che avrà l'altezza eguale ad Mm, e la base uguale alla somma di tutte le circonferenze come KL, cioè condotte pei punti di mezzo di ciascun piccolo lato.

Ma il poligono iscritto nel semicircolo AMB, avendo un grandissimo numero di lati, la piccolezza dell'altezza Mm, e la grandezza eccessiva della base rendono questo rettangolo impossibile a costruirsi.

Per rimediare a questo inconveniente, conviene trasformare questi piccoli rettangoli in altri equivalenti che abbiano tutti la medesima altezza, non impercettibile come Mm, ma assai grande, e la base invece assai piccola; poichè la somma di tutte queste piccole basi, darà una lunghezza paragonabile all'altezza.

LXIII. Vediamo dunque di trasformare in questo modo i nostri piccoli rettangoli. Fingiamo per rendere semplice il ragionamento, che invece delle circonferenze KL (fig. 237), essi abbiano per basi i raggi KI (fig. 238) di queste circonferenze. Non sarà poi difficile di applicare ciò che avremo trovato per questi ultimi rettangoli, a quelli di cui dobbiamo trattare.

Fig. 238.

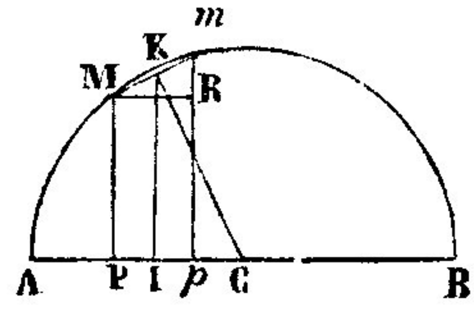


Debbasi dunque trovare un rettangolo eguale al prodotto di Mm per KI, e che abbia per altezza qualche linea incomparabilmente più grande che Mm, e che sia la medesima dovunque sia collocato questo piccolo lato Mm. Scegliamo, per esempio, la retta CK, che è l'apotema del poligono del quale Mm è il lato, e che per conseguenza è sempre il medesimo a qualunque lato del poligono appartenga. Dovrem cercare una linea il cui prodotto per CK sia eguale al prodotto di KI per Mm, cioè (Parte II, art. VII) una quarta proporzionale alle tre linee KC, KI, Mm. Abbassiamo la MR perpendicolare a mp: avremo così i triangoli MmR, KIC, che saranno simili, poichè saranno rettangoli, l'uno in R, l'altro in I, e di più gli angoli mMR, IKC saranno uguali tra loro, perchè il primo sommato con MmR fa un angolo retto, e l'altro IKC sommato con MKI, eguale ad MmR, fa pure un angolo retto. Ne concluderemo facilmente, che KC sta a KI, come Mm a MR, cioè che la MR è la quarta proporzionale cercata; o quel che è il medesimo, che il rettangolo di KC per MR o per Pp è uguale al rettangolo di Mm per KI. Ma poichè il rettangolo che volevamo trasformare non era quello di Mm per KI, ma sibbene di Mm per la circonferenza, di cui KI è il raggio; e siccome le circonferenze sono tra loro come i raggi, ne concluderemo ancora che l'uguaglianza del rettangolo di Mm per KI, e del rettangolo di Pp per CK, si tira dietro necessariamente l'eguaglianza del rettangolo Mm per la circonferenza di raggio KI, col rettangolo di Pp per la circonferenza di raggio CK. Poichè si vede facilmente che dati due rettangoli equivalenti, se non si variano le loro altezze e si aumentano nella stessa ragione le loro basi, i nuovi rettangoli così formati saranno ancora equivalenti.

Altra maniera di ricercare la superficie generata dalla rivoluzione di un lato di un poligono regolare intorno al diametro (fig. 239).

86. La figura MmpP è un trapezio rettangolo, il quale, girando intorno al suo lato perpendicolare Pp, genera un tronco di cono retto, del quale la superficie curva, generata dal lato Mm, si misura moltiplicando Mm per la circonferenza generata dal lato KI, come raggio (79).

Fig. 239.



Ora i due triangoli MmR, KIC sono simili, poichè hanno i lati rispettivamente perpendicolari (58), dunque (Parte I, art. XXXV): Mm sta a MR ossia a Pp come KC a KI, o anche Mm sta a Pp come la circonferenza fatta con raggio KC sta alla circonferenza fatta con raggio KI (Parte III, art. v); e quindi si avrà Pp moltiplicato nella circonferenza fatta con raggio KC, uguale a Mm moltiplicato nella circonferenza fatta con raggio KI, ossia uguale alla superficie curva generata dal lato Mm.

Ricerca della superficie generata dalla rivoluzione di un poligono regolare intorno al diametro.

LXIV. Avendo trovato ne' due articoli precedenti che tutte le piccole superficie coniche tronche, come V (fig. 237) sono eguali ad altrettanti rettangoli, tutti di altezza uguale alla circonferenza, di cui KC (fig. 238) è il raggio; e ciascuno dei quali ha per base una piccola retta Pp corrispondente a ciaschedun lato Mm; se ne ricaverà che la somma delle piccole superficie coniche generate dai lati inscritti nel semicircolo AmB dal punto A fino al punto B, sarà eguale a un rettangolo che abbia per altezza una retta uguale alla circonferenza di CK, e per base la somma di tutte le linee Pp, prese da A fino a B, cioè la retta AB.

Dunque per avere la superficie totale prodotta dalla rivoluzione del semipoligono intero, bisogna fare un rettangolo che abbia per base la circonferenza descritta dal raggio CK, e per altezza il diametro AB.

La superficie della sfera ha per misura il prodotto del suo diametro per la circonferenza del suo circolo massimo.

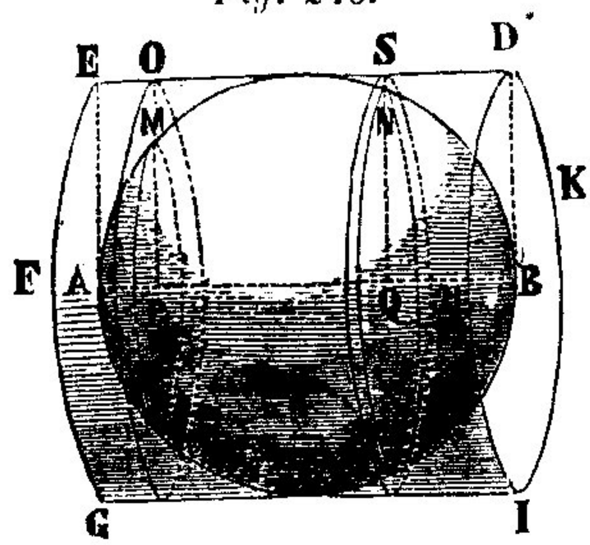
LXV. Riuscirà ora cosa facilissima il misurare la superficie della sfera. Poichè è chiaro che quanti più lati avrà il poligono, e più il solido prodotto dalla sua rivoluzione si approssimerà ad esser uguale alla sfera, e più ancora l'apotema CK si accosterà ad essere eguale al raggio; in modo che supponendo che il poligono si confonda col circolo, l'apotema CK sarà il raggio medesimo, e la superficie della sfera sarà equivalente ad un rettangolo, del quale l'altezza e la base siano il diametro e la circonferenza del circolo che con la sua rivoluzione ha generata la sfera, e che si vuole chiamare il circolo massimo della sfera stessa.

Segmento sferico; ***che sia: la sua superficie ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo della sfera per la saetta del segmento.***

LXVI. Quanto alla superficie curva di un segmento di sfera AMLNO (fig. 241), cioè della parte di sfera recisa da un piano qualunque MLNO, essa ha per misura il prodotto della sua grossezza, o vogliam dire della *saetta* AP, per la circonferenza del circolo massimo AMBN. Ciò risulta dalla dimostrazione colla quale abbiamo provato (art. LXIV), che la somma delle superficie di tutti i piccoli coni tronchi compresi da A fino a m (fig. 238) è uguale al rettangolo, di cui l'altezza è Ap, e la base una linea uguale alla circonferenza, di cui CK è il raggio.

La superficie della sfera è uguale alla superficie curva del cilindro circoscritto.

Fig. 240.



LXVII. La misura precedente della superficie della sfera ci mostra che facendo girare il rettangolo ABDE ed il semicircolo AMNB (fig. 240) intorno ad AB, la superficie curva del cilindro retto EFGIKDH, prodotta dalla rivoluzione del rettangolo (83), sarà uguale a quella della sfera descritta dal semicircolo, ciò che si esprime ordinariamente così: La superficie della sfera è uguale alla superficie curva del cilindro circoscritto.

Tagliando con piani paralleli la superficie della sfera e del cilindro circoscritto, le bende comprese tra gli stessi piani sulle due superficie sono equivalenti.

LXVIII. E se si dividono tanto il cilindro quanto la sfera per mezzo di due piani qualunque perpendicolari in P ed in Q al diametro AB, le porzioni delle superficie sferica e cilindrica generate dal movimento della retta OS, e dell'arco MN, saranno eguali.

La superficie della sfera è quadrupla di quella di un circolo massimo.

LXIX. Segue ancora dalle cose dette che la superficie della sfera è uguale all'area del suo circolo massimo presa quattro volte. Perchè la superficie di questo circolo ha per misura il prodotto della metà del raggio, ossia della quarta parte del diametro per la circonferenza; e la superficie della sfera è uguale al prodotto del diametro intiero per la medesima circonferenza.

Il volume della sfera è uguale al prodotto della sua superficie pel terzo del raggio.

LXX. Trovata la misura della superficie della sfera, è facile misurarne la solidità: infatti la sfera può considerarsi come composta di una infinità di piccole piramidi che abbiano tutte il loro vertice nel centro, e le cui basi ricoprano l'intera superficie della sfera. Or ciascuna di queste piramidi, avendo per misura il prodotto del terzo della sua altezza, cioè del terzo del raggio per la sua base, la loro somma totale, ossia la solidità della sfera si misurerà moltiplicando il terzo del raggio per la sua superficie, cioè per l'area del circolo massimo presa quattro volte.

Il volume della sfera è uguale ai due terzi di quello del cilindro circoscritto.

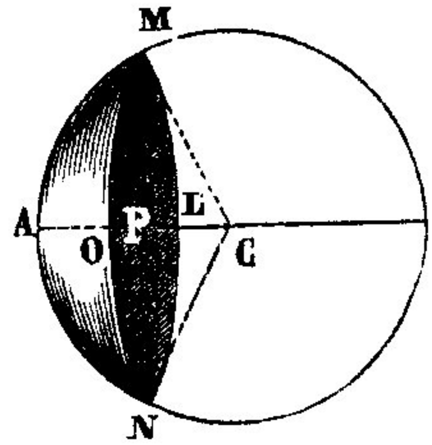
LXXI. Siccome tanto fa il dire il prodotto del terzo del raggio per l'area del circolo massimo presa quattro volte, quanto il dire il prodotto del terzo del raggio preso quattro volte, cioè di due terzi del diametro, pel circolo massimo; e per altra parte la solidità del cilindro EFGIKDH ha per misura il prodotto del diametro pel circolo massimo che gli serve di base, ne segue che la solidità della sfera è uguale ai due terzi di quella del cilindro circoscritto.

Come si trovino i volumi di un settore, e di un segmento di sfera.

LXXII. Per misurare la solidità di un segmento di sfera

AMLNO (fig. 241), è evidente che converrà misurare la porzione di sfera prodotta dalla rivoluzione del settore CAM, la qual cosa si farà moltiplicando il terzo del raggio per la superficie del proposto segmento AMLNO: poi detrarre da questa misura quella del cono prodotto dalla rivoluzione del triangolo CPM, cioè il cono che ha per base il circolo MLNO e per altezza CP; il resto sarà il valore dimandato del segmento.

Fig. 241.



In che consista la similitudine dei corpi terminati da facce piane.

LXXIII. Conchiuderemo questi elementi con alcune proposizioni sulle solidità e sulle superficie de' corpi simili. Queste proposizioni .immediatamente derivano dalle condizioni da cui dipende la similitudine di due corpi, e l'analogia potrebbe bastare a farle scoprire rammentando ciò che abbiam detto (Parte I, art. XXXIV e seguenti) dalla similitudine delle figure piane.

Abbiamo stabilito (art. XXXII) in che consista la similitudine di due piramidi; la definizione delle piramidi simili si può stendere a tutti i corpi terminati da facce piane. Due corpi qualunque così terminati si diranno dunque simili, quando tutti gli angoli formati dai lati del primo saranno eguali agli angoli formati dai lati del secondo, ed i lati di quello saranno proporzionali ai lati omologhi di questo.

Due cilindri retti sono simili quando le loro altezze sono proporzionali ai raggi delle basi.

LXXIV. Quanto a'corpi che non sono terminati da ogni parte da'piani, quali sono per esempio i cilindri ed i coni, è facile di determinare le condizioni della loro similitudine: così due cilindri retti sono simili quando le loro altezze sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

Se i cilindri sono obliqui oltre alla condizione precedente è necessario che i due cilindri sieno egualmente inclinati.

LXXV. Se i cilindri sono obliqui, è di più necessario che le linee, che congiungono i centri delle due basi in ciascuno di questi cilindri, facciano angoli eguali coi piani delle basi.

Le medesime condizioni sono necessarie acciò due coni sieno simili.

LXXVI. Le medesime definizioni si possono applicare ai coni sostituendo alla linea, che passa pei centri delle due basi del cilindro, quella che va dal vertice del cono al centro della base.

Due tronchi di coni sono simili quando appartengono a coni simili, ed hanno altezze proporzionali ai raggi delle loro basi.

LXXVII. Perchè due coni tronchi sieno simili è necessario in primo luogo che i coni, di cui fanno parte, sieno simili; in secondo luogo che le loro altezze sieno tra loro come i raggi delle basi.

Tutte le sfere sono simili; e lo stesso avviene pei circoli, pei quadrati, pei cubi, ecc., e generalmente per tutte le figure che sono interamente conosciute quando è data una sola delle loro dimensioni.

LXXVIII. Quanto alle sfere si vede subito che esse sono tutte simili; e lo stesso avviene per tutte le figure piane o solide, che sono pienamente determinate quando in esse si conosce una linea sola, quali sono il circolo, il quadrato, il triangolo equilatero, il cubo, il cilindro circoscritto alla sfera ecc.

Generalmente i solidi simili differiscono tra loro unicamente per la scala con cui sono costrutti.

LXXIX. In generale si può affermare rispetto alle figure solide simili quel che si è detto delle figure simili e piane; cioè che esse differiscono soltanto per la scala con cui sono state costrutte.

Ciò basta per condurre a due proposizioni fondamentali sulle superficie e sulle solidità de'corpi simili.

Le superficie dei solidi simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi.

LXXX. La prima proposizione ci insegna, che le superficie di due solidi simili sono tra loro come i quadrati dei loro lati omologhi; per esempio, che tra le superficie di due piramidi simili *z* e Z (fig. 242 e 243) passa la medesima relazione che tra' quadrati *abcd*, ABCD (fig. 244 e 245), fatti sui lati *ab*, AB, che si corrispondono in queste due piramidi.

Fig. 242.

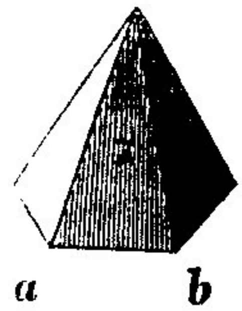


Fig. 243.

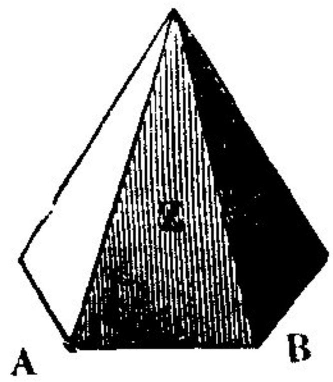


Fig. 244.

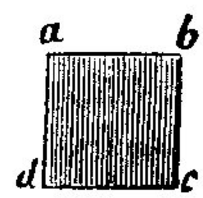


Fig. 245.

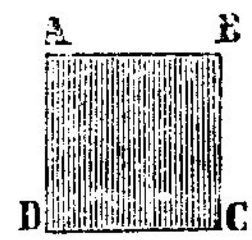


Fig. 246.

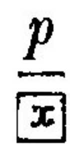


Fig. 247.

Per discoprire la verità di questa proposizione non occorrono nuove dimostrazioni (Parte prima, art. XLII e XLIV), e basta considerare che se P è la scala della piramide Z, e *p* la scala della piramide simile *z*, le linee che bisogna misurare per trovare le superficie di Z e del quadrato ABCD, conterranno tante volte la linea P, quante volte la *p* sarà contenuta in quelle che s'impiegheranno per misurare le superficie di *z* e del quadrato *abcd*.

Onde segue che il prodotto delle linee, che entrano nella misura delle superficie di Z e di ABCD, conterrà tante volte il quadrato X fatto sulla linea P, quante volte il prodotto delle linee che entrano nella misura delle superficie *z* e *abcd*, conterrà il quadrato *x* fatto su *p*: cioè a dire che il numero che esprime il rapporto della superficie della piramide Z al quadrato ABCD, sarà il medesimo che esprimerà il rapporto della superficie *z* al quadrato *abcd*.

Il medesimo discorso varrà per tutti gli altri corpi simili, siano essi terminati da piani, ovvero da superficie curve: perchè le linee impiegate a misurare le superficie di tutti questi corpi conterranno sempre il medesimo numero di parti delle loro rispettive scale; e per conseguenza il prodotto di queste linee conterrà un medesimo numero di volte i quadrati di queste medesime parti.

E se le linee necessarie per misurare la superficie dei corpi simili fossero incommensurabili, è chiaro che la dimostrazione sussisterebbe sempre, potendo qui applicarsi i medesimi principii de' quali ci siamo serviti (Parte II, art. XXVIII) per le figure piane simili di lati incommensurabili.

Le superficie delle sfere stanno tra loro come i quadrati dei raggi.

LXXXI. Si dimostrerà nello stesso modo che le superficie delle sfere sono tra loro come i quadrati de' loro raggi. Ma per vederlo ancora più chiaramente, basterà ricordarsi che le superficie de' circoli sono tra loro come i quadrati de' loro raggi (Parte III, art. VI) e che le superficie delle sfere sono quadruple di quelle de' loro circoli massimi (art. LXIX).

La proposizione precedente si applica non meno alle superficie di cui si ignora la misura, che a quelle che si sanno misurare.

LXXXII. La proporzionalità tra le superficie de' corpi simili ed i quadrati de' loro lati omologhi è sì generale, che si può applicare tanto a' corpi de' quali si conosce la misura, quanto a quelli di cui la misura è ignota.

Per esempio, senza saper misurare la superficie di un cilindro obliquo, si può affermare, che la superficie di due cilindri obliqui simili sono tra loro come i quadrati dei diametri delle basi di questi cilindri. Perchè iscrivendo a questi due cilindri due prismi simili di quante facce si vorrà, si vedrà tosto che le superficie di questi prismi saranno tra loro come i quadrati de' diametri delle basi. Dunque considerando i cilindri medesimi come gli ultimi prismi inscritti, si concluderà che le loro superficie hanno la medesima ragione.

I volumi dei solidi simili stanno tra loro come i cubi dei lati omologhi.

LXXXIII. La proposizione fondamentale rispetto alla solidità de' corpi simili è questa:

I solidi simili stanno tra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

Questa proposizione si può dimostrare come la precedente, considerando che le figure simili non differiscono tra loro che per la scala con cui sono state costrutte.

Fig. 248.

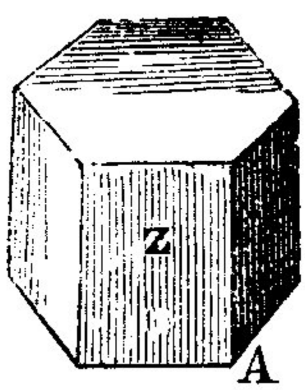


Fig. 249.

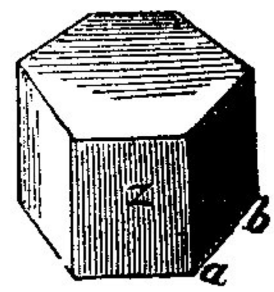


Fig. 250.

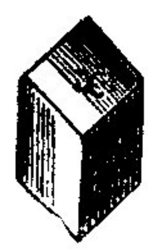


Fig. 251.

Per rendere più semplice la dimostrazione, noi ci serviremo dell'esempio di due prismi simili Z e *z* (fig. 248 e 249), e di due cubi X e *x* (fig. 250 e 251), i lati dei quali sieno eguali ad AB, *ab*, linee omologhe in questi due prismi; di più supporremo queste linee AB, *ab*, divise in un numero eguale e grandissimo di parti per poter misurare le dimensioni di questi solidi. Or ciò posto, è chiaro che il prisma *z* ed il cubo *x* conterranno tante volte il cubo di una delle parti di *ab*, quante volte il prisma Z ed il cubo X contengono il cubo fatto sopra una delle parti di AB.

Si farà il medesimo discorso per tutti gli altri solidi, e quelli stessi le cui dimensioni sono incommensurabili, staranno tuttavia nella medesima ragione che i cubi dei loro lati omologhi.

I volumi delle sfere stanno tra loro come i cubi dei raggi.

LXXXIV. Così, per esempio, le solidità delle sfere stanno tra loro come i cubi de' loro raggi.

Crediamo utile di terminare questi Elementi di Geometria *raccogliendo in un breve riepilogo i principali teoremi che si riferiscono alla misura delle lunghezze, delle superficie e dei volumi, e rappresentando i detti teoremi mediante la formola algebrica corrispondente. Il Professore troverà col loro mezzo facile occasione di esercitare i suoi alunni in una grande varietà di problemi, i quali, nel mentre saranno un utilissimo esercizio sopra le equazioni algebriche, serviranno anche a richiamare le proposizioni di geometria precedentemente apprese.*

Qui noi diamo semplicemente le formole, lasciando al Professore l'incarico di spiegarle a' suoi alunni.

87. Formole relative alla lunghezza:

I. Del lato di un poligono simile ad un altro e avente con quello il rapporto $m:n$ . . . . $L = l.\sqrt{\frac{m}{n}}$.

II. Del raggio del circolo inscritto in un triangolo . . . . $R = \frac{2S}{l+l'+l''}$.

III. Del raggio del circolo circoscritto ad un triangolo . . . . . . $R = \frac{l.l'.l''}{4S}$.

IV. Del raggio del circolo ex-inscritto . $R = \frac{2S}{l+l'-l''}$.

V. Dell'apotema d'un poligono regolare $a = \frac{\sqrt{4R^2 - l^2}}{2}$.

VI. Del lato del poligono regolare inscritto d'un numero doppio di lati, supposto $R = 1$ . . . . $L = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}$.

VII. Del lato del poligono regolare circoscritto simile all'inscritto, supposto $R = 1$ . . . . $L = \frac{2l}{\sqrt{4 - l^2}}$.

VIII. Della diagonale di un quadrato . $D = l \cdot \sqrt{2}$.

IX. Del lato di un poliedro simile ad un altro dato e avente con esso il rapporto $m:n$ . . . . $L = l \sqrt[3]{\frac{m}{n}}$.

X. Della diagonale di un cubo . . . $L = l \cdot \sqrt{3}$.

XI. Dell'altezza mancante di un tronco di cono retto a basi parallele . . $a = \frac{A \cdot r}{R - r}$.

XII. Del perimetro di un poligono regolare . . . . $P = n \cdot l$.

XIII. Della circonferenza . . . . . $C = 2\pi \cdot r = \pi \cdot D$.

XIV. Dell'arco . . . . $A = 2\pi \cdot r \cdot \frac{a^0}{360}$.

88. Formole relative alla superficie:

I. Del triangolo . . . . $S = \frac{a \cdot b}{2}$:

II. Del triangolo isoscele . . . . . $S = \frac{b \cdot \sqrt{4 l^2 - b^2}}{4}$.

III. Del triangolo equilatero . . . . $S = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

IV. Del rettangolo . . . . $S = a \cdot b$.

V. Del parallelogrammo . . . . . $S = a \cdot b$.

VI. Del rombo (D,d diagonali) . . . $S = \frac{D \cdot d}{2}$.

VII. Del quadrato . . . . $S = l^2$.

VIII. Del trapezio . . . . $S = a \cdot \frac{b + b^1}{2}$.

IX. Del poligono regolare . . . . $S = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$.

$$= \frac{n \cdot l \cdot \sqrt{4R^2 - l^2}}{4}.$$

X. Del circolo . . . . $S = \pi \cdot r^2$.

XI. Del settore . . . . $S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{a}{360}$.

XII. Della corona circolare . . . . $S = (R - r) \cdot \pi \cdot (R + r)$.

XIII. Laterale di un prisma retto . . $S = p \cdot L$.

XIV. Laterale di una piramide retta . $S = \frac{p \cdot A}{2}$.

XV. Laterale di un tronco di piramide retta . . . . $S = \frac{P + p}{2} \cdot A$.

XVI. Curva di un cilindro retto . . $S = 2\pi . r . L$.

XVII. Totale di un cilindro retto . . $S = 2\pi . r . (L + r)$.

XVIII. Curva di un cono retto . . . $S = \pi . r . L$.

XIX. Totale di un cono retto . . . $S = \pi . r . (L + r)$.

XX. Curva di un tronco di cono retto. $S = \pi . (R + r) . L$.

XXI. Della sfera . . . . $S = 2\pi . r . D . S = 4\pi . r^2$.

$S = \pi . D^2$.

XXII. Della calotta sferica . . . . . $S = 2\pi . r . a$.

XXIII. Del fuso sferico . . . . . . $S = 2r . A$ (87; XIV).

89. Formole relative al volume:

I. Del prisma qualunque . . . . . . $V = B . A$.

II. Del prisma retto . . . . $V = B . L$.

III. Del parallelepipedo retto . . . $V = L . L' . L''$.

IV. Del cubo . . . . $V = L^3$.

V. Del prisma regolare . . . . . . $V = \frac{p . a}{2} . L = \frac{n . l . a . L}{2}$

VI. Della piramide qualunque . . . $V = \frac{B . A}{3}$.

VII. Della piramide regolare . . . . $V = \frac{p . a . A}{6}$.

$= \frac{n . l . a . A}{6}$.

VIII. Del tronco di piramide . . . . $V = \frac{A(B + b + \sqrt{B . b})}{6}$.

IX. Del cilindro . . . . $V = \pi . r^2 . A^3$.

X. Del cilindro retto . . . . $V = \pi . r^2 . L$.

XI. Del cono . . . . $V = \frac{\pi . r^2 . A}{3}$.

XII. Del tronco di cono . . . . . . $V = \pi (R^2 + r^2 + R . r) . \frac{A}{3}$.

XIII. Della sfera . . . . $V = \frac{4\pi . R^3}{3}$.

$V = \frac{\pi . D^3}{6}$.

XIV. Del settore sferico . . . . . . $V = \frac{2\pi . r^2 . a}{3}$.

90. Equazioni che somministrano il mezzo di sciogliere mediante l'algebra i problemi del n° 76.

$$i^2 = c^2 + c'^2; \quad i = s + s'; \quad p^2 = s . s'.$$

99. *E finalmente proponiamo alcuni pochi problemi da sciogliere mediante costruzione geometrica e dipen-*

denti dai teoremi dimostrati; alcuni di essi serviranno anche come esempi delle moltissime applicazioni che dai teoremi stessi si possono ricavare; applicazioni che la intelligente e coscienziosa attività del Professore saprà moltiplicare con grandissimo vantaggio dei suoi scolari.

PROBLEMI

da risolversi mediante costruzione geometrica.

1. Per un punto dato condurre una retta ugualmente distante da due punti dati.
2. Da due punti dati condurre ad uno stesso punto di una retta, due rette in modo che facciano con questa due angoli uguali.
3. Dati due angoli d'un triangolo trovare il terzo.
4. Verificare se la somma di due angoli dati è uguale a due retti.
5. Dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi lati, costrurre il triangolo.
6. Data la ipotenusa ed un angolo acuto, costrurre il triangolo.
7. Date le due diagonali, costrurre il rombo.
8. Data la base di un triangolo isoscele e l'angolo al vertice, costrurre il triangolo.
9. Dividere un triangolo in 2, 3, 4..... parti equivalenti o aventi fra loro un dato rapporto, mediante rette condotte da uno de' suoi vertici al lato opposto.
10. Dividere un triangolo mediante una retta condotta da un angolo al lato opposto in due parti, che abbiano lo stesso rapporto de' due lati che formano l'angolo.
11. Dividere un rettangolo in tre parti equivalenti mediante due rette condotte da uno de' suoi vertici.
12. Per un punto, situato entro un angolo dato, condurre una retta, la quale sia divisa in quel punto in due parti uguali.
13. Trovare un punto dentro un triangolo tale, che unito coi vertici, resti il triangolo diviso in tre parti equivalenti.
14. Costrurre un rettangolo equivalente ad un quadrato e colla base doppia dell'altezza.
15. Inscrivere un quadrato in un triangolo.
16. Dividere un quadrilatero qualunque in due parti equivalenti mediante una retta condotta da uno de' suoi angoli.
17. Per un punto dato sopra il lato di un triangolo condurre una retta, in modo che divida il triangolo in due parti aventi un dato rapporto fra loro.
18. Dividere, mediante una, due, tre .... rette parallele ad uno stesso lato, un triangolo in due, tre, quattro..... parti aventi fra loro un dato rapporto.
19. Costrurre un rettangolo equivalente ad un dato quadrato

e i di cui lati sieno uguali ad una data somma; o a una data differenza.

20. Inscrivere un circolo ad un dato rettangolo.
21. Circoscrivere un circolo ad un dato rettangolo.
22. Costrurre un triangolo, conoscendo un lato e il circolo inscritto.
23. Far passare una circonferenza di raggio dato per due punti dati.
24. Trovare nell'interno d'un triangolo il centro del circolo da inscriversi in esso triangolo.
25. Trovare esteriormente ad un triangolo il punto egualmente distante dai tre lati di esso.
26. Descrivere una circonferenza che passi per un punto dato e sia tangente ad una retta data.
27. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati e sia tangente ad una retta data.
28. Innalzare una perpendicolare all'estremità di una retta senza prolungarla.
29. Dividere un angolo retto in tre parti uguali.
30. Descrivere una circonferenza tangente ad una retta data e a un punto dato di una circonferenza.
31. Descrivere una circonferenza tangente ad una circonferenza data e ad una retta data in un punto dato.
32. Condurre una tangente comune a due circoli dati.
33. Per un punto preso fra due rette parallele condurre una circonferenza tangente alle due rette.
34. Per un punto preso fra due rette convergenti far passare una circonferenza tangente alle due rette.
35. Dato un punto dentro di un circolo, far passare per esso la minima corda.
36. Dividere mediante circoli concentrici un circolo in due, tre, quattro..... parti uguali o aventi fra loro un dato rapporto.
37. Dividere una retta in due parti disuguali, così che il quadrato della maggiore sia equivalente al rettangolo fatto colla minore e con tutta la retta.
38. Dimostrare che la parte maggiore del raggio così diviso è il lato del decagono regolare inscritto nel circolo di quel raggio.
39. Inscrivere in un circolo un pentagono regolare.
40. Inscrivere in un circolo un pentadecagono regolare.
41. Condurre da un punto dato una parallela ad un piano, o ad una retta sita nel piano stesso.
42. Trovare il rapporto tra il lato del cubo e la sua diagonale.
43. Dividere una piramide mediante un piano parallelo alla base in due parti uguali o aventi fra loro un dato rapporto.
44. Trovare la superficie e il volume di un tronco di cilindro retto.
45. Dividere una sfera, mediante superficie concentriche, in due, tre, quattro..... parti uguali o aventi fra loro un dato rapporto.

46. Trovare il volume di un segmento sferico a basi parallele.
47. Trovare il rapporto tra la superficie totale del cilindro retto e la superficie della sfera in esso inscritta.
48. Trovare il rapporto tra la superficie e il volume del cono equilatero (1) e della sfera in esso inscritta.
49. Trovare il rapporto tra la superficie e i volumi di una sfera e del cilindro in essa inscritto.
50. Trovare il rapporto tra le superficie e i volumi della sfera e del cono equilatero in essa inscritto.
51. Trovare il rapporto tra le superficie e i volumi di una sfera e del poliedro qualunque ad essa circoscritto.

PROBLEMI

da risolversi mediante operazioni da eseguirsi sul terreno.

1. Tracciare collo squadro una circonferenza sul terreno.
2. Verificare collo squadro se un arco è circolare.
3. Condurre mediante lo squadro un diametro ad un circolo.
4. Verificare mediante lo squadro se due rette sono parallele.
5. Determinare l'angolo formato dalle visuali condotte da due punti accessibili ad un punto inaccessibile, nel caso 1° che tra i due punti si possa condurre una visuale e 2° che tra i due punti non si possa condurre la visuale.
6. Misurare col grafometro la distanza di due oggetti.
7. Misurare la lunghezza di una retta accessibile soltanto alle sue estremità.
8. Misurare la distanza fra due punti lungo i quali si può condurre una visuale.
9. Misurare la distanza fra due punti separati da un ostacolo.
10. Misurare la distanza inaccessibile ad ambo gli estremi.
11. Prolungare una retta al di là d'un ostacolo.
12. Determinare la distanza di un punto da una retta, sulla quale quel punto è invisibile.
13. Misurare la lunghezza di un oggetto verticale accessibile al suo piede; per es. di una torre.
14. Misurare la lunghezza di un oggetto verticale inaccessibile al suo piede.
15. Misurare l'altezza di un punto sopra il piano orizzontale.

(1) Chiamasi equilatero il cono, quando la sezione in esso condotta pel vertice e pel diametro della base è un triangolo equilatero.

FINE.

PROGRAMMA PARTICOLAREGGIATO

PER

l'insegnamento nella scuola

PARTE PRIMA

DEI MEZZI CHE DEBBONO NATURALMENTE ESSERE STATI IMPIEGATI PER LA MISURA DEI TERRENI

PARTE SECONDA

DEL METODO GEOMETRICO PEL CONFRONTO DELLE FIGURE RETTILINEE

PARTE TERZA

DELLA MISURA DELLE FIGURE CIRCOLARI E DELLE LORO PROPRIETÀ

PARTE QUARTA

DELLA MANIERA DI MISURARE I SOLIDI E LE LORO SUPERFICIE

PROGRAMMA D'ESAME
ordinato con decreto 10 ottobre 1867.

Geometria.

Prime nozioni e definizioni relative alle figure geometriche (14, 15, 29, 41, 42, 43, 47, 50, 52, 53, 55, 57, 58, 66, 67, 98, 99, 100).
Linea retta (2).
Superficie piane (8).
Verificazione dei regoli e delle superficie piane (9, 10, 11).
Rette perpendicolari ed oblique (12, 13, 17).
Angoli adiacenti (99, 101, 103, 104, 105).
Angoli opposti al vertice (102-106).
Rette parallele (30-35, 124).
Angoli coi lati paralleli (141).
Angoli coi lati perpendicolari (142).
Definizioni relative al circolo (18, 19, 20, 63, 188, 190, 191, 197, 199, 200).
Eguaglianza degli angoli corrispondenti ad archi eguali in due circoli del medesimo raggio. — *Non si dimostra perchè evidente.*
Misura degli angoli (96).
Divisione sessagesimale della circonferenza (97).
Rapportatori grafici (108-110).
Costruzione di angoli eguali ad angoli dati (62, 64, 109).
Costruzione di triangoli con elementi dati (59, 61, 62, 65).
Condizioni per l'eguaglianza di due triangoli (61, 62, 65).
Proprietà del triangolo isoscele (68, 74, 75).
Costruzione di perpendicolari e parallele (16, 21, 24, 33, 34).
Bisezione di rette e di angoli (26, 132, 133).
Punti equidistanti da due punti dati o da due rette date (145-148).
Strumenti per tracciare linee perpendicolari e parallele sulla carta, sul terreno, ecc.; loro verificazione (22, 23, 107; 111-121).
Somma degli angoli d'un triangolo (123, 126, 128-131).
Angolo esterno (127).
Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono convesso 139-140).
Costruzione di parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati (27, 28).
Loro proprietà elementari (134-138).
Equivalenza delle figure (45, 46, 49).
Trasformazione di parallelogrammi, triangoli, trapezi, in un rettangolo (150, 151, 152, 211, 212, 216-220)
Rapporto fra due rettangoli (149, 153).
Area del rettangolo e delle figure piane rettilinee (36, 40, 44, 48, 51, 56, 60).

Area delle figure piane mistilinee e curvilinee per approssimazione (179-184, 189, 192).
Regoli divisi (81-85).
Misura delle rette e delle aree sul terreno e nelle applicazioni alle arti (1, 3-7, 69, 82, 93, 122, 208, 209 (V. problemi in fine)
Regole pratiche per calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza (V. formule XIII al n° 87 e X al n° 88).
Area d'un settore circolare (193. V. formula XI al n° 88).
Lunghezza d'un'area corrispondente ad un angolo dato (V. formula XIV al n° 87).
Teorema di Pitagora (159-162).
Sue applicazioni (163-170, 187).
Proprietà delle corde di un circolo (174-177, 210, 211).
Costruzione della tangente in un punto dato sulla circonferenza (201, 202, 203).
Centro del circolo a cui appartiene un arco dato (194).
Costruzione del circolo che passa per tre punti dati o tocca tre rette date (195. V. form. II, III, IV, al n° 87 e probl. 24 e 25).
Eguaglianza degli archi compresi fra rette parallele (178).
Misura dell'angolo compreso da due rette che si tagliano sulla circonferenza, dentro e fuori del circolo (198, 204-207, 215).
Costruzione del triangolo rettangolo con elementi dati (215).
Costruzione delle tangenti che passano per un punto dato fuori del circolo (196, 223).
Segmenti fatti sui lati d'un triangolo da una retta parallela al terzo lato (78).
Similitudine dei triangoli (70, 71, 76, 143, 144).
Costruzione dei poligoni simili e similmente posti (72, 73).
Rapporto fra le aree dei triangoli e dei poligoni simili (86, 91, 172, 173, 185, 186).
Costruzione della quarta e della media proporzionale (79, 154-158, 213, 214)
Divisione di una retta in parti eguali e in parti di rapporti dati (77).
Scala ticonica (83, 85).
Definizioni di rette perpendicolari e parallele ad un piano 231-235, 240, 241 e probl. 41).
Angolo d'una retta con un piano.
Angolo diedro; come si misura (238).
Angolo poliedro (270-273).
Definizioni delle principali specie di poliedri e dei tre corpi rotondi (224, 225, 230, 242, 243, 244, 248, 249, 252, 253, 254, 274, 277, 278, 283, 284, 290, 293, 294, 295, 296, 297, 302).
Regole pratiche per calcolare la superficie ed i volumi del parallelepipedo retto, del prisma retto, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera (247, 250, 251, 268, 279, 280, 282-285, 291, 292, 301, 302, 306. V. formule ai n. 88 e 89).

INDICE