

*Faint handwritten notes, possibly including "Galleggi 337" and "Allegri 1000 V. 3 82"*

# Padu Inst Analisi

*Ex libris studij yhe  
Romae 1662 18*





Die 23. mensis Novembris 1769.

*Reimprimatur, regiis juribus, legibus, moribusque Regni semper salvis.*

VARGAS MACCIUCCA.

Carulli.

CANDIDÆ ATQUE INGENUÆ  
 MATHEMATUM  
 STUDIOSE JUVENTUTI

*Has de Analyfi Institutiones  
 Præceptis breves, at exemplis  
 uberrimas,  
 De summorum Analystarum penitus  
 depromptas,  
 Auctas iterumque illustratas,  
 Auctor libens ultroque*

D. D. D.

## A D L E C T O R E M



IRABERIS fortasse, Eloquentiæ professorem, de ALGEBRA scribere, cum illa amœnitates, elegantiam & dicendi copiam amet, hæc sicca, austera & tota ad severitatem composita esse videatur. At mirare potius, me his temporibus de Algebra ipsa scribere, in quibus tot præclara de illa extant Clarissimorum Virorum volumina; quibus quicquam addere arrogantia, quicquam demere temeritatis est. Hoc quidem me, ut verum fatear, diu anticipem habuit, diuque prohibuit, quominus publici juris facerem, quæ meo tantum privato studio selegeram. At vero cum animadverterem magna illa Analyticæ Artis Autographa, quæ nobis incomparabiles viri Vieta, Cartesius, Wallisius, Newtonus, Reinau, ac Wolfius denique tradiderunt, ægre in omnium manibus posse versari, cum ob exemplorum paucitatem & pretium, tum ob multam ea percipiendi difficultatem, quæ in his  
sub-

subtiliora de Mathematicis & Physicis continentur; illa mihi potius conscripta esse videbantur viris jam in calculi scientia exercitatis, quam tironibus, qui faciliora, tum etiam pauciora petunt: quamobrem his saltem hunc libellum non inutilem fore, judicavi. Itaque id perpetuo præ oculis habens, me non viris doctis aliquid de Analyfi novum promere, sed juventutem a primis ejusdem disciplinæ rudimentis instituentam suscepisse, quæ scilicet ultra communem Arithmeticam, Euclidis elementa, & pauca Archimedis theoremata progressa non esset: in id totus incubui, ut quæ minus dilucide ab aliis essent explicata, aut ad tironum captum haud satis apta viderentur, ea magis explanarem, magisque ordinate disponerem. Idcirco etiam minima, quæ ad id conferrent, confectatus sum: quorum defectus sæpe solet ab incepto cursu discentes non sine multo temporis dispendio retardare. Neque enim juvenes omnes summo ingenio & acriori mentis vi donatos cogitare debemus. Sunt complures mediocri intellectu præditi, quibus tamen ad ejusmodi studia, unde eorum mens mirum in modum perfici ac roborari possit, iter omnino intercludi non debet. Adde, plerosque aliis quoque disciplinis addictos haud posse diem integrum in calculo & Mathematicis meditationibus ponere. Quid si illis divinatione opus sit, ut

aucto-

auctoris mentem assequantur, diuque subobscuri, vel ambigui sermonis sensum speculari cogantur? Quo quidem nihil est ab omni Mathesi magis alienum: in cuius laudibus Geometrae omnes perspicuitati & evidentiae primas deferunt. Quocirca videant, quam longe a proposito aberrant, qui his de rebus obscure ac perplexe loquentes, se tamen in juventutis usum scribere, profitentur. Pugnare (pace eorum dicam) secum ipsi videntur, dum scientiam alioqui reconditam obscuritate verborum & ambagibus infuscant, quam potissimum susceperant illustrandam. At vero cum *in scientiis addiscendis*, ut magnus Newtonus (a) inquit, *exempla magis, quam praecepta profint*, in iis tradendis brevitatem, quam maxima potui, usus sum: omissis idcirco demonstrationibus, sicubi eas minus necessarias putaverim. Exempla vero congeffi plurima, quae facilitate non minus, ac elegantia ceteris antecellerent, ex quibus non pauca Clarissimis Mathematicis, quos paulo ante nominavi, tum aliis quoque accepta refero; quorum nomina, praesertim si pulcherrimae alicujus methodi auctores extiterint, in Scholiis apposui, ut una simul tirones in Historia Mathematica erudiantur, tum etiam, ut debita unicuique laus tribuatur. *Est enim benignum*, ut nos Plinius (b) admonet,

O ple-

---

(a) Arithm. Univ. edit. 3. p. 179. (b) In praefat. hist. Natur.

& plenum ingenui pudoris fateri, per quos  
 profeceris. Ceterum quicquid sit de facilita-  
 te ac brevitate methodi a nobis susceptæ,  
 illud sibi studiosi juvenes persuadeant, nemi-  
 nem triduo vel quatrinduo fieri Algebristam;  
 neque inter ambulandum & oscitanter posse  
 calculi scientiam obtineri. Non emitur profe-  
 cto tam vili disciplina illa, quam summi inge-  
 nii & subtilitatis vir Cardanus (a) *Artem Ma-*  
*gnam*, quam *universæ Matheseos clavim* Oug-  
 thredus (b), quam denique Wolfius (c) *apicem*  
*totius humanæ eruditionis* appellat. An lu-  
 dus tibi videtur paucis lineis posse difficilli-  
 ma quæque in omni naturali scientia pro-  
 blemata solvere, ac geometricè componere?  
 Enimvero sedulo insistas, oportet in iis ma-  
 xime accurate calculandis, quæ quatuor, aut  
 quinque prioribus hujus libri capitibus com-  
 prehenduntur. Ubi ex his vadis emerferis,  
 omnia fere tibi plana occurrent, præsertim  
 si quempiam viæ ducem habeas, quod si ne-  
 minem (quod sæpe usuvenit); at tute ipse  
 tibi ductor sis & magister, mactè animo,  
 μελέτη τὸ πᾶν, inquit Periander. Quem tibi  
 offero libellum, diligenter evolve, nec pi-  
 geat calamo excipere, & ad calculum revo-  
 care figillatim, quæ inibi traduntur: cito  
 progressus in hoc studio non pœnitendos ex-  
 periere.

LE-

(a) Oper. Vol. 4. pag. 221. (b) Clavis Mathem.  
 Oxonii an. 1631. & 1693. (c) In præfat. ad Elem.  
 Analyf.

## LECTORI TYPOGRAPHUS.

**C**UM paucis annis exemplaria omnia Institutionum harum Analyticarum distracta essent, eaque a multis in diem exquirerentur, rogavi saepius Cl. Auctorem, ut, alteram harum editionem a me fieri, concederet, quod ille tandem annuit. Imo etsi publicis aliis studiis, & occupationibus impeditus, pro singulari tamen suo erga Mathematicas disciplinas amore, totum opus insudi reddere, politius limare, eique manum extremam admoveere sibi sumpsit. Summa itaque diligentia, & haud mediocri labore plura correxit, non pauca illustravit, nova demum problemata addidit, ita ut opus ex majori parte recusum esse videatur. Fruere igitur si sapis, ac vale.

# INSTITUTIONES

# ANALYTICÆ.

## DEFINITIONES.

I. **A**LGEBRA, seu ANALYSIS SPECIOSA, quæ a quibusdam MATHESIS UNIVERSALIS dicitur, est methodus resolvendi problemata circa quantitatem.

II. *Quantum* dicitur omne id, quod augeri & minui potest, ut numerus, linea, superficies, corpus, tempus, motus, velocitas &c.

III. Quantitates Analyticæ exprimentur per Alphabeti literas, sed hoc discrimine: literæ priores  $a, b, c, d$ , &c. adhibentur ad exprimendas quantitates *cognitas*, seu *datas*; postremæ vero  $x, z, y, v$  ad *incognitas* & *quesitas*.

IV. Conducit etiam memoriæ quantitates tam cognitas, quam incognitas designare per primam litteram rei, quam significant, ut numerum per  $n$ , summam per  $s$ , tempus per  $t$ , velocitatem per  $v$ , circuli radium per  $r$ , tangentem per  $t$  &c.

V. Multiplicia, vel submultiplicia quantitarum exprimi solent indeterminate, & in genere per literas  $m, n, r$ , ut  $mx, ny, rz$ , prout  $m, n, r$  numeros integros, vel fractos designant. In particulari vero, & in specie exprimentur per numeros integros, vel fractos, ut  $2x, 3z, 4y$ , & significant duplum, triplum, quadruplum quantitarum  $x, z, y$ . Que-

madmodum  $\frac{1}{2}a$ ,  $\frac{1}{3}b$ ,  $\frac{1}{4}c$ , vel etiam  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{3}$ ,  $\frac{c}{4}$  significant, partem aliquotam quantitatum  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; hoc est dimidium  $a$ , tertiam partem  $b$ , quartam partem  $c$ .

VI. Quanta, quibus præmittitur signum PLUS  $+$ , affirmativa, ac positiva dicuntur. Quæ vero præferunt signum MINUS  $-$ , negativa, seu privativa. Quæ autem principio posita sunt, & omni signo carent, habentur pro affirmativis, & quasi signo  $+$  affecta.

VII. Quantitates Analyticae, quæ signis  $+$  &  $-$  non sunt connexæ, dicuntur simplices, monomix, & incomplexæ, ut  $ab$ ,  $abc$ ,  $\frac{ab}{c}$ . Contra vero  $a + b$ ,  $ab - bb$ ,  $ac + m - r$  dicuntur compositæ, complexæ, seu polynomix; & si duobus terminis constant, ut  $a + b$ , vel  $ab - bb$ , binomix; si tribus, ut  $ac + m - r$ , trinomix, & sic deinceps, appellantur.

VIII. Nota Æqualitatis est  $=$ , ita ut  $a = b$ , vel  $x = 6$  significet  $a$  &  $b$  esse aequales, item valorem  $x$  esse 6.

IX. Sed  $a > b$  indicat,  $a$  majorem esse, quam  $b$ . Contra  $a < b$  denotat,  $a$  minorem esse, quam  $b$ .

X. Proportionalitas Geometrica, seu quatuor terminorum Geometricè proportionalium ratio exprimitur per quatuor puncta hoc modo  $a . b :: c . d$ , nempe  $a$  est ad  $b$ , ut  $c$  ad  $d$ . Si sit continuata, exprimitur per signum  $∴$ . Sic  $∴ a, b, c$  indicat,  $a$  esse ad  $b$ , ut idem  $b$  ad  $c$ . Item  $∴ 2, 4, 8, 16, 32$  &c.

XI. Proportionalitas vero Arithmetica exprimitur per tria puncta hoc pacto  $a . b ∷ c . d$ ; nimirum eadem est differentia inter  $a$  &  $b$ , quæ inter  $c$  &  $d$ , ut  $6 . 8 ∷ 10 . 12$ .

XII. Numeri, qui quantitates analyticas præcedunt, ut  $2x$ ,  $3y$ , & in trinomio  $aa + 2b - 4c$  numeri

## DEFINITIONES.

ri 2 & 4 dicuntur *Coefficientes*. Ubi nullus est numerus, semper pro coefficiente intelligitur unitas. Sic  $ab$  intelligitur  $1ab$ , &  $2a - b$  intelligitur  $2a - 1b$ .

## CAPUT I.

### *De Calculo Integrorum.*

### PROPOSITIO I.

#### *Quantitates simplices addere.*

I. **S**I quantitates addendæ eisdem literis sint expressæ, sufficit numeros præfixos addere, & numerorum summam eidem literæ præfigere. Sic ut addam  $a$  ad  $a$ , scribo  $2a$ ; ut addam  $b$  ad  $2b$ , scribo  $3b$  &c.

II. Si vero literæ sint diversæ, additio fit signo  $+$ . Sic  $a + b$  exprimit summam quantitatum  $a$  &  $b$ . Ecce exempla.

$a$	$a$	$c$	$\frac{1}{2} b$
$2a$	$b$	$d$	$2c$
$a$	$a$	$e$	$3x$
$4a$	$2a + b$	$c + d + e$	$\frac{1}{2}b + 2c + 3x$

SCHOLION. *Ordo literarum non attenditur. Summa  $2a + b$  idem valet, ac  $b + 2a$ . Sicuti  $10 + 5$  idem valet, ac  $5 + 10$ , nempe  $15$ .*

### PROPOSITIO II.

#### *Quantitates simplices subtrahere.*

I. **S**I quantitates iisdem literis sint expressæ, subtrahuntur numeri præfixi, & residuum eidem literæ præfigitur.

literæ præponitur . Ut subtraham  $2a$  ex  $5a$  , scribo pro residuo  $3a$  . Similiter sublato  $b$  ex  $2b$  , remanet  $b$  . Item sublato  $x$  ab  $x$  , remanet  $0$  , seu nihil .

II. Si quantitates diversis literis expressæ fuerint . subtractio fit signo  $-$  . Ut subtraham  $a$  ex  $b$  , scribo  $b - a$  . Similiter sublatis  $2a$  ex  $4y$  , residuum erit  $4y - 2a$  . Exempla .

$5a$	$5b$	$a$	$3c$
$3a$	$2b$	$b$	$4x$
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
$2a$	$3b$	$a - b$	$3c - 4x$

SCHOL. Intelligenti prima Arithmetica communis elementa nulla difficultas esse potest de duabus præcedentibus propositionibus . Nam si ponatur  $a = 5$  , erit summa  $4a = 5 + 5 + 5 + 5$  , hoc est  $4a = 20$  , ut in primo exemplo . Si ponatur  $a = 10$  , &  $b = 4$  , erit summa  $2a + b = 20 + 4$  , hoc est  $24$  , ut in secundo exemplo . Similiter si ponatur  $a = 10$  , & subtrahenda sint  $3a$  ex  $5a$  , nempe  $30$  ex  $50$  , residuum erit  $2a = 20$  . Tandem si ponatur  $a = 20$  , &  $b = 15$  , erit  $a - b = 20 - 15$  , hoc est  $5$  , ut ex primo , & tertio subtractionis exemplo habetur .

### P R O P O S I T I O III.

*Quantitates simplices multiplicare.*

I. **M**ultiplicatio fit per simplicem literarum conjunctionem , nullo interposito signo . Sic  $ab$  , vel  $ba$  ( ordo literarum non attenditur ) significat productum  $a$  in  $b$  , vel  $b$  in  $a$  ; unde si ponatur  $a = 5$  &  $b = 6$  , erit  $ab = 30$  .

II. Quantitates multiplicandæ  $a$  &  $b$  dicuntur factores , &  $ab$  factum . Si factoribus præfixi sint numeri , hi inter se multiplicentur , ut in communi

Arithmetica, eorumque productum præmittatur factio literarum. Ecce exempla:

$\frac{ab}{c}$	$\frac{ac}{b}$	$\frac{2cd}{3a}$	$\frac{\frac{1}{2}afg}{\frac{1}{3}cm}$
$abc$	$abc$	$6acd$	$\frac{1}{6}acfgm$

SCHOL. Multiplicatio aliquando indicatur per Crucem, quam S. Andrea vulgo vocant. Sic  $a \times b$  indicat factum  $a$  in  $b$ , seu  $ab$ . Ceterum cum in omni multiplicatione sit unitas ad factorem unum, ut alter ad productum, erit productum quarta proportionalis, hoc est  
 I.  $a \div b = ab$ , proinde optime exprimitur per  $ab$ .

### P R O P O S I T I O   I V.

*Quantitates simplices dividere.*

I. **R**egula est, ex dividendo dele divisorum, & habebis quotum. Sic ad dividendum  $ab$  per  $a$ , deleto  $a$  ex dividendo, restat  $b$  quotus.

II. Si adsint coefficientes, hos seorsim divides, ut in vulgari Arithmetica. Sic dividendo  $6ab$  per  $3b$ , quotus erit  $2a$ ; &  $\frac{4ax}{2x} = 2a$ .

III. Quod si dividendus & divisor nullam habeant literam communem, tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut  $\frac{ab}{c}$ ,  $\frac{ax}{n}$ ,  $\frac{2a}{3c}$  &c.

SCHOL. Divisio dissolvit id, quod fuit multiplicatione compositum, proinde divisor per quotientem multiplicatus restituit iterum dividendum. Nam multiplicato quotus  $b$  per divisorem  $a$ , restituitur dividendum  $ab$ . Atque hinc apparet, cur in divisione, deleto divisore ex quantitate dividenda, habeatur quotus. Nam quotus  $\frac{ab}{a} = b$

divisor sunt duo factores, qui producunt  $ab$ , & eliso divisore  $a$ , remanet alter ex factoribus pro quoto, nempe  $b$ .

## L E M M A.

*Quantitates complexas ad simpliciores.  
expressiones reducere.*

I. **S**I quantitates iisdem literis notatæ habent idem signum  $+$ , aut  $-$ , addantur earum coefficientes, & præponatur summæ idem signum. Sit reducenda ad simpliciores expressionem quantitas  $x + 3ab + 2x + 2ab$ , additis coefficientibus terminorum similium, reducitur ad  $3x + 5ab$ . Simili ratione quantitas  $y + 2xy - 2d + xy - d$ , erit  $y + 3xy - 3d$ .

II. Cum vero quantitates iisdem literis expressæ habent signa diveria, subducendus est minor coefficientis a majori, & residuo præponendum signum majoris. Sit quantitas  $4ac + bc - 3bc$ , subducto  $+ bc$  ex  $3bc$ , & præposito signo  $-$  quantitatis majoris, erit per reductionem  $4ac - 2bc$ . Pariter  $2ax - ax + 4b - 3b$  erit  $ax + b$ .

## P R O P O S I T I O V.

*Quantitates compositas addere.*

I. **S**I quantitates eisdem literis notatæ habent idem signum  $+$ , aut  $-$ , adduntur simul, illo eodem præfixo signo.

$$\begin{array}{r|l|l} -a + 3b & a - x & \frac{1}{2}cb + 2b - 3 \\ -a + 2b & 3a - 2x & \frac{1}{2}cb + 3b - 4 \\ \hline -2a + 5b & 4a - 3x & cb + 5b - 7 \end{array}$$

II.

II. Quod si eisdem literis notatae habent diversa signa, minor quantitas a majori subtrahitur, & residuo apponitur signum majoris.

$$\begin{array}{r|l|l}
 3a + 5b & a + d & ab - 2ac - 5 \\
 2a - 2b & a - 4d & ab + 6ac + 2 \\
 \hline
 5a + 3b & 2a - 3d & 2ab + 4ac - 5
 \end{array}$$

COROLL. Manifestum est, ad addendum  $3a + 5b$  ad  $2a - 2b$ , ut in primo exemplo, scribi posse unam quantitatem post aliam, nempe  $3a + 5b + 2a - 2b$ , & deinde reduci per Lem. ad simpliciores expressionem; habebitur enim eodem modo  $5a + 3b$ , & sic de aliis.

### P R O P O S I T I O   V I .

*Quantitates compositas subtrahere.*

Quantitas subducenda additur, mutatis signis, quantitati, ex qua subduci debet. Subducenda sit ex quantitate  $x + b - c$  quantitas  $a + y - d + 1$ , erit differentia, seu residuum  $x + b - c - a - y + d - 1$ . Similiter in exemplis, quæ sequuntur, intelligantur mutata signa in quantitate subtrahenda, erit facile habere residuum.

$$\begin{array}{r|l|l}
 3a + 2b & 2x - b & 4c - 3x - 2 \\
 a + 5b & x - 3b & 2c - 2x + 5 \\
 \hline
 2a - 3b & x + 2b & 2c - x - 7
 \end{array}$$

COROLL. Patet subtractionem quantitatum compositarum degenerare in additionem. Nam ad subtrahendam ex  $3a + 2b$  quantitatem  $a + 5b$ , mutatis signis in  $a + 5b$ , erit  $-a - 5b$ . Habemus ergo  $3a + 2b - a - 5b$ , quæ per Lem. ad simpliciores expressionem redacta dant residuum  $2a - 3b$ , ut in primo exemplo.

A + Ha-

Habeat enim quis aureos 100, debeat autem alteri aureos 100 + 50; mutatis signis in summa subducenda, habebit ille aureos + 100 - 100 - 50; hoc est - 50 aureos de are alieno.

## PROPOSITIO VII.

*Quantitates complexas multiplicare.*

**D**ucantur singuli unius quantitatis complexæ termini in singulos alterius terminos eo modo, quo factum est in multiplicatione simplicium; quod commode fit incipiendo a sinistra, & pergendo ad dexteram.

Pro signis hæc regula observetur, eadem signa faciunt +. diversa autem -.

Multiplicanda sint inter se  $A$  &  $B$ , dico factum esse  $E$ , resultans ex factis  $C$  &  $D$  simul additis. Nam primus terminus  $a$  quantitatis  $B$  multiplicans singulos terminos quantitatis  $A$  producit  $C$ ; & secundus terminus  $-x$  quantitatis ejusdem  $B$  multiplicans pariter singulos terminos quantitatis  $A$  producit  $D$ , ergo si facta  $C$  &  $D$  addantur per Prop. v. obtinebitur factum  $E$ . Quod &c.

EXEMPL. I.	$A$	$a + b - c$
	$B$	$a - x$
	$C$	$aa + ab - ac$
	$D$	$-ax - bx + cx$
	$E$	$aa + ab - ac - ax - bx + cx$

EXEM.

$$\begin{array}{r}
 \text{EXEMPL. II.} \quad 2a - 3bc + 1 \\
 \quad \quad \quad 3a - 2b \\
 \hline
 6aa - 9abc + 3a \\
 \quad \quad - 4ab + 6bbc - 2b \\
 \hline
 6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{EXEMPL. III.} \quad x + ax - 2b + 3 \\
 \quad \quad \quad x - \frac{1}{2}a + 2b \\
 \hline
 xx + axx - 2bx + 3x \\
 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a \\
 \quad \quad + 2bx + 2abx - 4bb + 6b \\
 \hline
 xx + axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab \\
 - \frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + 6b.
 \end{array}$$

*Demonstr. signorum regula.* Omnis multiplicatio fit per numeros . Nam quantitatis per quantitatem multiplicatio non est nisi iterata ejusdem quantitatis additio ; & per multiplicationis productum aliud non exprimitur , nisi quoties sumpta fuerit aliqua quantitas . Sic productum  $6a$  , quod oritur ex  $3$  in  $2a$  , exprimit bis ter , seu sexies  $a$  esse sumptum ; proinde ducendo  $+ 2a$  in  $+ 3$  , oritur  $6a$  , de quo nemini dubium est .

At vero ducendo  $+ in -$  , vel  $- in +$  , oritur  $-$  . Nam multiplicare per numerum negativum est tollere , seu negare positivum , sicuti multiplicare per numerum positivum est aliquid ponere . Itaque ducendo  $+ 3a$  in  $- 2$  , fit  $- 6a$  , quia bis ter , seu sexies negatur quantitas positiva  $a$  . Quod erat secundum .

De-

Denique  $\text{---}$  in  $\text{---}$  dat  $\text{+}$ . Nam in hoc casu quantitas negativa per numerum pariter negativum tollitur, & aliquid ponitur. Sicuti tollere debitum est ipsum solvere ponendo aliquid; unde ducendo  $\text{---} 3a$  in  $\text{---} 2$ , fit  $\text{+} 6a$ , quia dum quantitas negativa bis ter negatur, bis ter aliquid ponitur. Ergo &c.

Vel sic  $\text{---}$  in  $\text{---}$  dat  $\text{+}$ . Nam multiplicando quantitatem negativam per aliam negativam v. g.  $\text{---} 3a \times \text{---} 2b$ , illa toties subtrahitur, quot sunt in altera unitates. Negatio enim subtractionem importat, sicuti affirmatio additionem. Hæc autem subtractio cum sit subtractio quantitatis negativæ, signum negativum mutari debet in affirmativum per *Prop. vi.* proinde residuum subtractionis ( seu productum multiplicationis ) erit affirmativum. Sic  $\text{---} 3a$  in  $\text{---} 2b$  dat  $\text{+} 6ab$ . Nam quantitas  $\text{---} 3a$  bis subtrahi debet, quot scilicet sunt unitates in altera quantitate negativa  $\text{---} 2b$ ; & mutato signo negativo in affirmativum, habetur  $\text{+} 6ab$  multiplicationis productum.

SCHOL. I. *Hanc doctrinam si quis nunc penitus non percipiat, parum refert, percipiet postea. Interim ultra progrediatur.*

SCHOL. II. *Multiplicatio compositarum quantitatum exprimitur quoque aliquando per signum  $\times$ , ducta supra factores compositos linea sic,  $a + b - c \times a - x$ , Vel factores ipsi includuntur parenthesi, ut insigni calculi commodo excogitavit Leibnitius, quo Analystæ recentiores utuntur, nempe  $(a + b - c)(a - x)$ . Similiter  $(a + b - c) \times$  designat productum  $ax + bx - cx$ .*



## E X E M P L U M II.

Dividendum est polynomium  $B$  per polynomium  $C$ , dico quotum esse  $D$ .

$$\begin{array}{r|l}
 C \ 3a - 1 \ ) & B \ 6aa + 3ab + 13a - b - 5 \\
 \underline{-6aa} & + 2a \\
 \hline
 & \circ \quad + 15a \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 D \\
 + 2a \\
 + b \\
 + 5
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } E \ + 3ab + 15a - b - 5 \\
 \underline{-3ab} \qquad \qquad \qquad + b \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \circ \qquad \qquad \qquad \circ
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } F \ + 15a - 5 \\
 \underline{-15a + 5} \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \circ
 \end{array}$$

Dividendo  $6aa$  per  $3a$  oritur quotus  $2a$  per *Prop.* IV. quem pono in  $D$ , & per hunc multiplicans divisorem  $C \ 3a - 1$ , habeo productum  $6aa - 2a$ , subducendum (mutatis signis) ex dividendo; quo facto habetur residuum  $E$ . Divido igitur  $3ab$  per  $3a$ , quotus est  $b$  ponendus in  $D$ , per quem multiplicato divisore  $C$ , oritur productum  $3ab - b$ , subtrahendum (mutatis signis) ex dividendo, seu residuo  $E$ : quo facto, habetur residuum  $F + 15a - 5$  loco dividendi. Diviso itaque  $15a$  per  $3a$ , fit quotus  $5$ , per quem multiplicato divisore  $C$ , & producto  $15a - 5$  subtracto ex residuo  $F$ , nihil remanet. Est ergo quotus  $D \ 2a + b + 5$ , per quem si multiplicetur divisor  $C$ , oritur polynomium  $B$ .

EXEMPLUM III.

Dividenda sit quantitas  $A$  per quantitatem  $B$ , dico quatum esse  $C$ .

$$\begin{array}{r|l}
 Bx - 2 \ ) \ A & \\
 \hline
 xxx + 4x - 17 & \\
 - xxx + 2xx & \\
 \hline
 0 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C \\
 + xx \\
 + 2x \\
 + 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } D \ + 2xx + 4x - 17 \\
 - 2xx + 4x \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Resid. } E \quad 0 + 8x - 17 \\
 - 8x + 16 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Est ergo quotus } C \quad xx + 2x + 8 - \frac{1}{x-2}$$

COROLL. Si facta divisione aliquid remanet, illud ponitur post quotientem cum signo  $+$ , vel  $-$ , quo afficitur, ut in hoc tertio exemplo  $-\frac{1}{x-2}$  supponendo illi divisorem, ut fit in communi Arithmetica.

SCHOL. I. Liberum est sumere ex divisore composito, quam libuerit, literam ad dividendum; quæ tamen semel assumpta semper adhibetur, nec mutari potest. Sic in primo exemplo pro litera  $a$  sumi potuisset litera  $b$ . In secundo exemplo loco  $3a$  assumi poterat in divisorem quantitas  $-1$ , semper enim idem quotus obtinetur.

SCHOL. II. Sæpe numeri, qui præcedunt terminos dividendi, aut divisoris, impediunt, quominus fieri possit divisio. Tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut si dividenda sit  $3ab + c$  per  $2a - c$ , erit quotus  $\frac{3ab + c}{2a - c}$

Idem fit cum dividendus & divisor nullam  $2a - c$  habent literam communem; ut  $\frac{ad - ac}{d - c}$ , item  $\frac{dx - dc}{a + x}$  &c.

$$\frac{ad - ac}{d - c} \quad \frac{dx - dc}{a + x} \quad \&c.$$

SCHOL.

SCHOL. III. Aliquando etiam divisio quantitatum compositarum fit includendo divisorem & dividendum parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta; ut  $(a + b) : c$  indicat  $a + b$  divisum esse per  $c$ . Similiter  $(2ax - ab) : (a - c)$  designat, polynomium  $2ax - ab$  divisum esse per polynomium  $a - c$ , quod summo Leibnitii ingenio pariter debemus.

## PROPOSITIO IX.

*Data quantitatis divisores omnes invenire.*

I. **E**sto numerus 150, cujus singuli divisores quaeruntur. Divide illum per 2 & quotum 75 pone sub ipso numero dividendo, ut in *A*, divisorem autem 2 in *B*. Deinde quia totus 75 dividi non potest per 2 sine residuo, divide illum per 3 & pone quotum 25 in *A*, divisorem autem in *B*. Postea quotum 25 (cum adaequate dividi nequeat per 3) divide per 5 & quotum pone in *A*, divisorem in *B*. Demum quotus 5 divisus per 5, dat quotum 1, ponendum in *A*,posito divisore 5 in *B*. Habentur jam omnes divisores simplices dati numeri, hoc est 2, 3, 5, 5.

Ut habeantur divisores compositi, multiplica primum divisorem 2 per secundum 3, & pone productum 6 ad dexteram ejusdem secundi divisoris 3. Deinde duo primi divisores & productum 6 multiplicentur per tertium divisorem 5, & producta 10, 15, 30 ponantur ad dexteram ipsius divisoris 5. Demum multiplicentur per quartum divisorem 5 omnes numeri jam inventi, & habebis 25, 50, 75, 150, qui juxta ipsum ultimum divisorem apponuntur, ut infra patet. Ex compositis idem numerus bis non ponitur.

<i>A</i>	<i>B</i>
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

II. Quærantur omnes divisores numeri  $M$  120. Disponere, ut in superiori exemplo factum est, omnes divisores simplices infra  $N$ . & omnes quotos sub dato numero infra  $M$ . Deinde duc primum divisorem in secundum, & productum pone ad latus secundi divisoris. Postea duo primi divisores & productum modo inventum ducantur in tertium divisorem, & singula producta, unum post aliud, ponantur ad latus ipsius tertii divisoris, & sic deinceps operando inveniuntur omnes dati numeri divisores, ut infra apparet.

<i>M</i>	<i>N</i>
120	2.
60	2. 4.
30	2. 8.
15	3. 6. 12. 24.
5	5. 10. 20. 40. 15. 30. 60. 120.
1	

III. Sit quantitas  $aabcd$ , cujus omnes divisores quærantur. Inveniantur primo omnes divisores simplices  $a, a, b, c, d$ , qui ponantur infra  $B$ , singuli autem quoti infra  $A$ . Deinde ducendo divisorem primum in secundum, habetur productum  $aa$ , quod ponitur ad latus secundi divisoris  $a$ . Similiter ducendo tertium divisorem  $b$  in omnes quantitates supra existentes, habentur producta  $ab$ , &  $anb$ , quæ scribuntur ad latus ipsius divisoris  $b$ , & sic deinceps prosequendo habentur omnes divisores quæsi, ut infra.

<i>A</i>	<i>B</i>
<i>aabcd</i>	<i>a .</i>
<i>abcd</i>	<i>a . aa .</i>
<i>bcd</i>	<i>b . ab . aab .</i>
<i>cd</i>	<i>c . ac . aac . bc . abc . aabc .</i>
<i>d</i>	<i>d . ad . aad . bd . abd . aabd . cd .</i>
<i>1</i>	<i>acd . aacd . bcd . abcd . aabcd .</i>

IV. Quærentur omnes divisores quantitatis  $2abb - 4ac$ . Dividatur primo per 2, deinde diviso quotus  $abb - 2ac$  per  $a$ , remanet quotus indivisibilis  $bb - 2c$ . Sunt ergo divisores primi 2,  $a$ , &  $bb - 2c$ , quibus multiplicatis ordine jam supra explicato, habentur omnes divisores, scilicet.

$2abb - 4ac$	$2 .$
$abb - 2ac$	$a . \quad 2a .$
$bb - 2c$	$bb - 2c . 2bb - 4c . abb - 2ac .$
$1$	$2abb - 4ac .$

COROLL. Hinc patet, quotum indivisibilem, ut in hoc tertio exemplo  $bb - 2c$ , reponi debere inter divisores. Nam quælibet quantitas suimet divisor est. Unitas quoque primus omnium divisor intelligitur.

SCHOL. I. Divisoribus primis, ut supra, inventis, si singulos binos, ternos, quaternos &c. inter se ducas, habebis cum Newtono omnes divisores compositos. Sic numeri 60 divisores primi sunt per hanc Prop. 2. 2. 3. 5. Ex binis compositis sunt 4. 6. 10. 15; ex ternis 12. 20. 30; ex quaternis 60; qui omnes conficiunt summam divisorum 12.

SCHOL. II. Quod si inquiretur tantum summa divisorum dati numeri ex. gr. quot divisores habeat numerus 60, incluso quoque divisore 1; inventis divisoribus primis, ut supra, sub singulis eorum ponitur 2, si sint inæquales; sub binis æqualibus ponitur 3; sub ternis æqualibus 4, & sic deinceps, eorumque productum dat sum-

summam omnium divisorum. Primo divisori 1 nihil subscribitur, quia 1 in reliquas quantitates ducta nihil novi producit.

Divisores primi numeri 60 sunt  $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 Pone sub illis numeros, nempe  $3 \times 2 \times 2$   
 quorum productum 12 dat summam quasitam. Similiter  
 primi divisores numeri 2310 sunt  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ . Sub  
 singulis, quia sunt inaequales, pono  $2, 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$   
 quorum productum 32 dat summam omnium divisorum  
 numeri 2310. Ratio est, quia ubi plures sunt quantita-  
 tes diverse, si duae (omissa 1) inter se ducantur, ha-  
 bentur quatuor divisores, in quibus comprehenditur 1,  
 reliquae vero continuo duplicant ipsam divisorum summam.  
 Sit productum abc, cujus divisores primi sunt 1 . a . b . c.  
 Subscribe singulis (omisso divisore primo 1) numerum  
 2, eorum productum  $2 \times 2 \times 2 = 8$  dat numerum omnium  
 divisorum. Nam ducto a  $\times$  b fiunt quatuor divisores,  
 nempe 1 . a . b . ab, qui deinde duplicantur per quan-  
 titatem c in singulos ductam, & fiunt 8, scilicet  
 c . ac . bc . abc.

Quod si productum sit aabc, cujus primi divisores  
 sunt 1 . a . a . b . c, divisorum summa erit 12, hoc est  
 $3 \times 2 \times 2 = 12$ , ut in primo exemplo. Nam quanti-  
 tates similes a, a inter se ductae non quatuor, sed tres  
 duntaxat divisores efficiunt, nempe 1 . a . aa, qui dupli-  
 cati per b fiunt 6, & iterum duplicati per c fiunt 12.

## C A P U T II.

## De Calculo Fractorum.

**O**Mnia fere peraguntur, ut in communi Arithme-  
 tica. Ne qua tamen tironi difficultas in hoc  
 calculi genere suboriatur, quae praecipua sunt, &  
 ad praesentem usum magis faciunt, breviter illustra-  
 bimus; adjecta in fine appendice de Calculo Decimali.

## A X I O M A T A .

1. **I**ntegra quantitas in fractionem degenerat, si loco denominatoris ponatur unitas, ut  $\frac{ab}{1}$ ,  $\frac{a+b}{1}$  &c.

2. Integrum in fractionem dati denominatoris convertitur, si multiplicetur per denominatorem datum, & producto supponatur ipsemet denominator, ut si  $a$  reducenda sit ad fractionem denominatoris  $b$ , erit  $\frac{ab}{b}$ . Item  $x$  si reducenda sit ad fractionem dati denominatoris  $a+b$ , erit  $\frac{ax+bx}{a+b}$ .

3. Multiplicatis, aut divisis per eandem quantitatem tam numeratore, quam denominatore fractionis, fractio valorem non mutat. Sic multiplicando  $\frac{a}{b}$  per  $c$  fit  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ . Item dividendo  $\frac{bb}{bc}$  per  $b$ , fit  $\frac{b}{c}$ ; &  $\frac{ax+bx}{a+b}$  divisa per  $a+b$ , fit  $\frac{x}{1}$ .

4. Ut multiplicetur fractio per suum denominatorem, satis est delere ipsum denominatorem. Sic ad multiplicandum  $\frac{ax}{bc}$  per  $c$ , satis est scribere  $ax$ . Similiter  $\frac{bc}{a-b}$  multiplicatum per  $a-b$  erit  $bc$ ; &

$\frac{a}{2x}$  multiplicatum per  $2x$  erit  $a$ ; nam  $\frac{2ax}{2x} = a$

per 3. Axioma.

PRO.

PROPOSITIO I.

*Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.*

**S**it quantitas  $a + \frac{bc}{n}$  reducenda ad unam fractionem.

Multiplicetur quantitas integra  $a$  per denominatorem fractionis  $n$ , fiet fractio quaesita  $\frac{an + bc}{n}$ .

Eadem ratione  $\frac{aa}{c} - b$  erit  $\frac{aa - bc}{c}$ . Ratio patet

ex 2. *Axiom.*

PROPOSITIO II.

*Fractiones ad simpliciores expressionem reducere.*

**I.** Sit fractio  $\frac{aab}{ac}$  reducenda ad simpliciores. Divi-

datur tam numerator, quam denominator per divisorem communem, nempe per  $a$ ; quoti hinc inde orti dant fractionem simpliciores, & priori æqua-

lem per 3. *Axioma*, scilicet  $\frac{ab}{c}$ . Eadem ratione  $\frac{zabc}{8acd}$  erit  $\frac{1b}{4d}$ .

II. Quod si communis divisor non ita facile in oculos incurrat, ut in quantitatibus valde compositis contingere solet; tunc inveniantur per *Prop. IX. Cap. I.* omnes tam numeratoris, quam denominatoris divisores, ex quibus ille pro communi divisore feligatur, qui fuerit numeratori, & denomina-

tori communis. Sit fractio reducenda  $\frac{aac + abc}{aa - bb}$ ,

omnes quidem numeratoris divisores sunt  $a$ ,  $c$ ,  $a + b$ ; denominatoris autem sunt  $a - b$  &  $a + b$ . Divisor ergo utrique communis  $a + b$  est divisor quæsitus, per quem dividendo utrumque terminum

datæ fractionis  $\frac{aac + abc}{aa - bb}$  fit  $\frac{ac}{a - b}$ . Eadem ra-

tione  $\frac{aac - aad}{cd - dd}$  fit  $\frac{aa}{d}$ , dividendo per  $c - d$  diviso-

rem communem inventum, ut supra per *Propos. IX. Cap. I.*

SCHOL. *Alias regulas inveniendi divisorem communem, utpote difficiliiores, asserre, non putamus esse hujus loci.*

### P R O P O S I T I O III.

*Fractiones ad eandem denominationem reducere.*

I. SINT duæ fractiones reducendæ  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ . Ducantur duo termini fractionis primæ in denominatorem alterius, nempe  $\frac{a}{b}$  in  $d$ , & duo termini fractionis secundæ  $\frac{c}{d}$  in  $b$  denominatorem primæ, seu (quod idem est) multiplicentur per crucem, ut numeri fracti; fient  $\frac{ad}{bd}$  &  $\frac{cb}{bd}$  ejusdem nominis, & æquales prioribus ex 3. *Axiom.*

II. SINT reducendæ plures; ducantur ambo termini cujusque fractionis in productum, quod ex cæterarum fractionum denominatoribus resultat, fient fra-

fractiones quæsitæ. Sint  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{e}{f}$ , duc terminos primæ  $\frac{a}{b}$  in  $df$ , deinde terminos secundæ  $\frac{c}{d}$  in

$bf$ , item terminos tertiæ  $\frac{e}{f}$  in  $bd$ ; habebis  $\frac{adf}{bdf}$ ,

$\frac{cbf}{bdf}$ ,  $\frac{ebd}{bdf}$ . Ratio sequitur ex eod. 3. *Axiom.*

**COROLL.** Quando denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius fractionis, tunc ille fractiones ad idem nomen satis commode reducuntur multiplicando per illum quotum numeratorem & denominatorem fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint

reducendæ  $\frac{ab}{cd}$  &  $\frac{ef}{c}$ ; quia denominator  $c$  dividit exacte

denominatorem  $cd$ , multiplico per quotum  $d$  utrumque terminum fractionis  $\frac{ef}{c}$ , & fiunt  $\frac{ab}{cd}$  &  $\frac{edf}{cd}$  ejusdem

nominis. Ut si reducendæ sint  $\frac{5}{8}$  &  $\frac{3}{4}$ , quia  $4$  dividit exacte  $8$ , multiplicando per quotum  $2$  terminum utrumque fractionis  $\frac{3}{4}$ , erunt  $\frac{5}{8}$  &  $\frac{6}{8}$  ejusdem nominis, ut patet.

**PROPOSITIO IV.**

*Additio & subtractio fractionum.*

I. **A**ddendæ sunt fractiones  $\frac{a}{c}$  &  $\frac{b}{c}$ , summa

erit  $\frac{a+b}{c}$ . Eadem ratione  $\frac{ad}{a+b}$  &  $\frac{cf}{a+b}$  simul additæ con-

B

fi-

ficiunt summam  $\frac{ad + cf}{a + b}$ .

Si fuerint diversæ denominationis, ut  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ ;  
 reducantur ad eandem *per Prop. III.* fient  $\frac{ad}{bd}$  &  $\frac{cb}{bd}$ ,  
 earumque summa  $\frac{ad + cb}{bd}$ .

II. Quod si addenda sint integra cum fractis  
 $a + \frac{ab}{c}$  &  $b - \frac{ac}{b}$ , addi possunt integra integris  
 $a + b$ , & fractiones fractionibus  $\frac{ab}{c}$  &  $-\frac{ac}{b}$  (quæ  
 prius ad eandem denominationem reducendæ sunt  
*per Prop. III.*) eritque summa quaesita  $a + b + \frac{abb - acc}{bc}$ .

III. Vel possunt integra ad fractionem sibi anne-  
 xam reduci *per Prop. I.* nempe  $\frac{ac + ab}{c}$  &  $\frac{bb - ac}{b}$ ,  
 quæ redacta ad eandem denominationem *per Prop.*  
 III. erunt  $\frac{abc + abb}{bc}$  &  $\frac{bbc - acc}{bc}$ , earumque summa  
 $\frac{abc + abb + bbc - acc}{bc}$ .

IV. Si vero subtrahenda sit  $\frac{a}{b}$  ex  $\frac{c}{b}$ , differen-  
 tia erit  $\frac{c - a}{b}$ . Si sint diversæ denominationis, sem-

per

per ad eandem prius reduci debent. Sic ut  $\frac{a}{b}$  ex  $\frac{c}{d}$  subtrahi possit, reducuntur ad eandem denominationem per *Propos. III.* eritque differentia quaesita  $\frac{bc - ad}{bd}$ .

V. Quod si ex integra quantitate  $x$  subduci debeat fractio  $\frac{aa - ab}{a + b}$ ; redacta prius  $x$  ad fractionem ejusdem denominatoris per 2. *Axioma*, habetur  $\frac{ax + bx}{a + b}$ , ex qua subducta  $\frac{aa - ab}{a + b}$ , erit residuum  $\frac{ax + bx - aa + ab}{a + b}$ . Similiter si subtrahenda sit  $b +$

$\frac{cc}{b + d}$  ex  $a + b$ , redacta prima quantitate ad unam fractionem per *Propos. I.* & altera ad fractionem ejusdem nominis cum prima per *Axioma 2.* erit residuum  $\frac{ab + ad - cc}{b + d}$ , hoc est  $a - \frac{cc}{b + d}$  per

*Prop. VIII. Cap. I.*

SCHOL. Cum numerator fractionis pluribus constat terminis, juvat aliquando fractionem illam in plures dividere.

Sic  $\frac{ab - cd + dd}{a - b}$  dividi potest in  $\frac{ab}{a - b}$ ,  $\frac{-cd}{a - b}$ ,  $\frac{dd}{a - b}$ .

Hoc autem praesertim fit, ubi aliqui termini numeratoris sunt per denominatorem divisibiles, alii vero non. Sit

enim  $\frac{aa - 3ab - bb}{a + b}$ , dividatur in  $\frac{aa - bb}{a + b}$  &  $\frac{-3ab}{a + b}$ ,  
 quia vero  $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$  per Propof. VIII. Cap. I.

erit fractio propofita  $a - b - \frac{3ab}{a + b}$ .

## P R O P O S I T I O V.

*Fractioes multiplicare.*

I. S Int multiplicandæ duæ fractiones  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$ , du-  
 cantur inter fe numeratores, & denominatores pa-  
 riter inter fe, fiet productum quæfitum  $\frac{ac}{bd}$ . Eadem  
 ratione fractio  $\frac{a - b}{c}$  multiplicata per  $\frac{bd}{ab}$  producit  
 $\frac{aab - abb}{cx}$ .

II. Si multiplicanda fit fractio  $\frac{a}{b}$  per integrum  $c$ ,  
 fatis est numeratorem in integrum ducere, eritque  
 productum  $\frac{ac}{b}$ . Nam integro supponitur unitas,  
 & illud ad fractionem esse redactum, nempe  $\frac{c}{1}$   
 per I. Axiom.

III. Vel dividatur ( si quidem exacte fieri possit )  
 denominator fracti per integrum, habebitur produ-  
 ctum.

Etum . Sit  $\frac{a}{b}$  multiplicanda per  $c$ , divido  $\frac{bc}{c}$  per  $c$ ,  
 quotus  $\frac{a}{b}$  dat productum quaesitum ; nam  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ ,  
 ut patet . Item sit multiplicanda  $\frac{ac - ad}{ab - cd}$  per  $c - d$ ,  
 divido  $\frac{ac - ad}{ab - cd}$  per  $c - d$ , quotus est  $a$ , & produ-  
 ctum, erit  $\frac{a}{ab - cd}$ .

IV. Si ducenda sit  $a + \frac{aa}{b}$  in  $b - \frac{cc}{d}$ , reducan-  
 tur integra ad fractiones sibi annexas per Propos. I  
 nempe  $\frac{ab + aa}{b}$  &  $\frac{bd - cc}{d}$ , eritque earum produ-

ctum  $\frac{ab + aa \times bd - cc}{bd}$  hoc est  $\frac{abbd + aabd - abcc - aacc}{bd}$   
 seu  $ab + aa - \frac{bd}{d} - \frac{acc}{bd}$  per Schol. Prop. praec.

V. Fieri etiam potest multiplicatio non reductis  
 integris in fractos, ducendo  $a \times b$ , & habetur  $ab$ , tum  
 $\frac{aa}{b} \times b$ , & oritur  $\frac{aab}{b}$  & c.

$$\begin{array}{r}
 a + \frac{aa}{b} \\
 b - \frac{cc}{d} \\
 \hline
 ab + \frac{aab}{b} - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd} \\
 \hline
 ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aac}{bd}, \text{ ut supra.}
 \end{array}$$

Co.

COROLL. Si fractio multiplicetur per suum denomina-  
torem, productum est ipsius numerator. Sic  $\frac{aa}{a+b} \times a + b$

dat  $aa$  per 4. Axioma.

SCHOL. Factum ex integro in fractum, ut  $\frac{ax}{b}$ , quod  
oritur ex  $\frac{a}{b} \times x$ ; vel  $\frac{2ac}{3}$ , quod oritur ex  $\frac{2}{3} \times ac$ , expri-  
mi etiam potest seorsum hoc pacto  $\frac{a}{b} \times \frac{3}{3} \times ac$ , quod  
notetur.

## PROPOSITIO VI.

Fractioes dividere.

I. **U**T dividatur  $\frac{a}{b}$  per  $\frac{c}{b}$ , eliso communi deno-  
minatore, divide  $a$  per  $c$ , erit quotus  $\frac{a}{c}$ . Eadem  
ratione  $\frac{1aab}{2c}$  diviso per  $\frac{2ad}{3c}$ , quotus erit  $\frac{c}{4d}$ . Nam  
in divisione fractionum omnia fiunt, ut in multi-  
plicatione, inverso tamen denominatore minutiae di-  
videntis; proinde dividendo  $\frac{a}{b}$  per  $\frac{c}{b}$ , inverso di-  
visore, factaque multiplicatione, quam docuimus  
in *prac. Prop.*, erit quotus  $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$ , ut in primo  
exemplo.

II. Si denominatores diversi fuerint, est eadem  
omnino regula. Sic  $\frac{a}{b}$  divisa per  $\frac{c}{d}$  dat quotum  $\frac{ad}{bc}$ .

Pari

Pari ratione  $\frac{a-b}{c+d}$  divisa per  $\frac{n}{a}$  dat quotum  $\frac{aa-ab}{nc+nd}$ .

III. Si fractio  $\frac{ac}{b}$  dividenda sit per integrum  $c$ ,  
 divide ( si fieri potest , ut in hoc exemplo ) nume-  
 ratorem  $ac$  per  $c$ , quotus quæsitus erit  $\frac{a}{b}$ . Similiter  
 $\frac{ad-cd}{a-b}$  dividenda sit per  $a-c$ , divido  $ad-cd$  per  
 ipsum  $a-c$ , unde habetur  $d$ , & quotus quæsitus  
 erit  $\frac{d}{a-b}$ .

IV. Vel si numerator fractionis dividendæ divisi-  
 bilis non est, multiplicetur denominator ejusdem fra-  
 ctionis per integrum. Sit  $\frac{ac}{b}$  dividenda per  $d$ ,  
 quia  $ac$  non est divisibilis per  $d$ , multiplico per  
 ipsum  $d$  denominatorem, & habetur quotus quæsi-  
 tus  $\frac{ac}{bd}$ . Eadem ratione  $\frac{ad-cd}{a-b}$  divisa per  $a+b$ ,  
 dat quotum  $\frac{ad-cd}{aa-bb}$ , multiplicando scilicet  $a-b \times a+b$ .

Ratio patet, si divifori integro supposita intelliga-  
 tur unitas, nempe  $\frac{a+b}{1}$  per 1. *Axiom.* quo inverso,  
 fit multiplicatio, & producitur quotus, ut supra.

V. Si dividi oporteat  $a + \frac{aa}{b}$  per  $b - \frac{cc}{d}$ , reducantur

in-

integri ad fractos sibi adhærentes per *Propos. I.* dein-

de  $\frac{ab+aa}{b}$  dividatur per  $\frac{bd-cc}{d}$ , invertendo divi-

forem, & multiplicando modo supra explicato, erit

quotus  $\frac{abd+aad}{bbd-bcc}$

SCHOL. Si fractiones dividende sint valde compositæ, juvabit ad majorem facilitatem eas, antequam fiat divisio, ad terminos simpliciores reducere per *Prop. II.* hujus.

### P R O P O S I T I O VII.

*Polynomium cum fractionibus dividere.*

I. **S**It polynomium  $A$  cum fractionibus sibi annexis, quod dividendum sit per polynomium  $B$  pariter cum fractionibus, dico quotientem esse

$$Q = \frac{2}{3} x - \frac{1}{4} a,$$

$$A \frac{1}{3} axx - \frac{1}{2} bxx + \frac{2}{3} abx - \frac{1}{8} aax + \frac{3}{16} abx - \frac{1}{4} aab$$

o                    o                    o                    o                    o                    o

$$B \frac{1}{2} ax - \frac{3}{4} bx + ab$$

$$Q \frac{2}{3} x - \frac{1}{4} a$$

Nam dividendo  $\frac{1}{3} axx$  per  $\frac{1}{2} ax$ , quotus erit  $\frac{2}{3} x$  per *Prop. præc.* quem pono in  $Q$ , & statim deletur  $\frac{1}{3} axx$  supponendo illi zerum. Per quotum inventum

mul-

multiplico divisoris  $B$  residuum, hoc est  $-\frac{3}{4}bx + ab$ ; &

primo quidem  $-\frac{3}{4}bx \times \frac{2}{3}x = -\frac{6}{12}bxx = -\frac{1}{2}bxx$ ,  
quod (mutato signo) subtrahitur ex  $-\frac{1}{2}bxx$ , cui proin-

de suppono zerum. Deinde  $\frac{2}{3}x \times ab = \frac{2}{3}abx$ , quod  
pariter subtrahitur ex  $\frac{2}{3}abx$ , supposito zero.

Rursus per eundem divisorem  $\frac{1}{2}ax$  divido  $-\frac{1}{8}aax$ , quotus erit  $-\frac{1}{4}a$  per *Prop. præc.* quem po-  
no in  $Q$ ; & statim deleto  $-\frac{1}{8}aax$  per zerum il-  
li suppositum, multiplico per ipsum quotum resi-  
duum divisoris  $B$ , eritque primo  $-\frac{1}{4}a \times -\frac{3}{4}bx = \frac{3}{16}abx$ , secundo  $-\frac{1}{4}a \times ab = -\frac{1}{4}aab$ ;  
quæ facta, mutatis signis, subtrahuntur ex dividen-  
do, supponendo illi zerum, & nihil remanet; pro-

inde habetur quotus  $Q \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a = \frac{8x-3a}{12}$   
per *Prop. III. & IV.* hujus.

II. Sit dividendum polynomium  $C$  per polyno-  
mium  $D$ , dico quotum esse  $Q = \frac{1}{3}x - \frac{1}{c}$

$$C \quad \frac{x^3}{6b} + \frac{axx}{12b} - \frac{xx}{2c} - \frac{ax}{4c} - \frac{1}{3}cx + b$$

$$D \quad \frac{xx}{2b} + \frac{ax}{4b} - c$$

$$Q \quad \frac{1}{3}x - \frac{1}{c}$$

Nam

Nam dividendo  $\frac{x^3}{6b}$  ( hoc est  $\frac{xxx}{6b}$  ) per  $\frac{xx}{2b}$ , quotus erit *per Prop. præc.*  $\frac{x}{3}$ , quem pono in  $Q$ , & statim deleto  $\frac{x^3}{6b}$  ( apponendo illi zerum ) multiplico residuum divisoris  $D$ , nempe  $\frac{ax}{3} - c$ , eritque  $\frac{1}{3}x \times \frac{ax}{4b} = \frac{axx}{12b}$  &  $\frac{1}{3}x \times -c = -\frac{1}{3}cx$ , quæ facta subtraho ex dividendo, supponendo zerum.

Rursus per eundem divisorem  $\frac{xx}{2b}$  divido  $\frac{xx}{2c}$ , & oritur quotus  $\frac{xx}{c}$ , quem pono in  $Q$ ; & deleto  $\frac{xx}{2c}$  ( supposito illi zero ) multiplico per ipsum quotum residuum divisoris  $\frac{ax}{b} - c$ , & duo facta  $\frac{ax}{4b} \times \frac{ax}{b} = \frac{axx}{4b}$ , &  $-c \times \frac{ax}{b} = -\frac{1}{4}b$  subtraho ex dividendo, cumque nihil remaneat, patet quotum esse  $\frac{1}{3}x - \frac{b}{c} = \frac{cx - 3b}{3c}$  *per Prop. III.*  
 § IV. hujus.

SCHOL. Pro pleniori hujus secundi exempli & sequentis Propos. intelligentia sciant tirones,  $x^2$ , vel  $x^3$ ,  $x^4$  &c. idem esse, ac  $xx$ , vel  $xxx$ ,  $xxxx$  &c. hoc est quantitatem  $x$  elevatam ad quadratum, ad cubum, quadrato quadratum &c. prout infra explicabitur Cap. III. At compendii causa pro  $xx$ ,  $xxx$ , scribitur  $x^2$ ,  $x^3$  &c.

P R O P O S I T I O VIII.

*Valorem fractionis, cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.*

**D**ivisa sit quantitas  $aa - bb + c$  per  $a + b$ , quotus erit  $a - b$ , & remanet  $c$ , hoc est fractio

$\frac{c}{a+b}$  per *Propos. III. Cap. I.* cujus fractionis valor per infinitos terminos designari potest hoc pacto.

Dividatur  $c$  per  $a$ , erit quotus  $\frac{c}{a}$  per *Prop. VI. hujus*, quem duc in divisorem  $a + b$ , & factum  $\frac{ac + bc}{a}$  seu  $c + \frac{bc}{a}$  per *Schol. Prop. IV. hujus* subtrahe (mutatis signis) ex dividendo  $c$ , residuum erit  $-\frac{bc}{a}$  per *Prop. IV. hujus*.

Deinde hoc residuum  $-\frac{bc}{a}$  divide per eundem divisorem  $a$ , quotus erit  $-\frac{bc}{aa}$  per *Prop. VI. hujus*, quem duc in divisorem  $a + b$ , & factum  $-\frac{abc - bbc}{aa}$ , seu  $-\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$  subtrahe (mutatis signis) ex dividendi residuo  $-\frac{bc}{a}$ , remanet  $+\frac{bbc}{aa}$ .

Rursus hoc residuum dividatur per  $a$ ; & quotus

tus  $\frac{bbc}{a^3}$  ducatur in  $a + b$ , erit factum  $\frac{abbc + b^3c}{a^3}$ ,

seu  $\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$  subtrahendum (mutatis signis) ex

residuo  $+ \frac{bbc}{aa}$ , & relinquitur  $-\frac{b^3c}{a^3}$ , & sic deinceps.

Unde apparet ratio divisionem continuandi per infinitos terminos, qui sunt proportionales, & seriem Geometricam constituunt, nempe

$$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \&c. = \frac{c}{a+b}$$

COROLL. I. Si fiat  $a = 2$ ,  $b = 1$ , &  $c = 1$ ,

ita ut  $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ , & hi valores substituantur

in terminis seriei jam inventis, aut fractio  $\frac{1}{2+1}$  eodem pacto dividatur, quo divisa fuit fractio  $\frac{c}{a+b}$ , oritur series

Geometrica  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \&c.$  Similiter si fiat

$a = 3$ ,  $b = 1$ , &  $c = 1$ , nempe  $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3+1}$ , oritur

series  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} \&c.$  Quæ quidem series terminorum Geometricæ decrescentium, ut patet, exprimere valent quotum quam proxime verum datae fractionis, modo talis fractionis numerator sit unitas.

COROLL. II. Series fractionum hujusmodi continuo decrescentium, quæ ad verum valorem semper magis accedunt, dicuntur convergentes. Quod si termini continuo crescant, tunc a vero valore continuo recedunt, ac di-

divergentes appellantur. Ut si ponatur  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,

&  $c = 1$ , hoc est  $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+2}$ , fit series divergens

$1 - 2 + 4 - 8 + 16$  &c. quæ a valore fractionis

$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$  tanto magis recedit, quanto magis conti-

nuatur, ut rem consideranti patet.

SCHOL. I. Hanc doctrinam, quam tanquam inutilem Cruzas in sua Algebra Cap. XIV. num. 40. taxavit, plurimi fecerunt Cl. Viri Leibnitius (a), Jac. Bernoullius (b), Guido Grandus (c), Wolfius (d), & alii.

SCHOL. II. Cum fractiones Decimales in omni fere Mathesi magni sint usus, easque nobis in approximatione radicum Cap. XI. adhibere mens sit, brevem de illis notitiam in sequenti Appendice subjicimus.

## A P P E N D I X

### De fractionibus Decimalibus.

#### D E F I N I T I O I.

**F**Ractiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in 10 æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias 10 partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit: oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *secundæ*, *tertiæ*

---

(a) Acta. Erudit. Lips. ann. 1682. & 1683. (b) De Ser. infinit. p. m. 267. (c) Theor. Hugen. p. 126, (d) Elem. Analy. Cap. 1. Prob. 7.

ris, quarta &c. iisque distinguendis apponuntur virgulae, integris autem cyphra 0. Sic fractio decimalis

0 I II III IV  
 5. 8 6 4 2 significat quinque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed satis est virgulam ultimam apponere, & integra puncto distinguere, ut 5. 8 6 4 2. Quae quidem fra-

ctio idem valet, ac  $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$

seu  $\frac{58642}{10000}$ . At commodi gratia decimales scribuntur instar integrorum, omisso denominatore, modo supra

explicato, nempe 5. 8 6 4 2.

COROLL. I. Hinc sequitur, virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum; ut in decimali 5. 8 6 4 apex unus importat denominatorem 10, duo apices denominatorem 100, tres denominatorem 1000 &c. hoc est  $\frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$ .

COROLL. II. Hinc facile decimales ad eandem denominationem reducuntur, addendo tot zéros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis 3. 5 reducenda sit ad secundas, ad tertias, vel quartas &c. scribitur 3. 50, 3. 500, 3. 5000. Valor enim non mutatur;

nam  $5 = 50$ ,  $5 = 500$  &c. ut julii 5 sunt asses 50.

COROLL. III. Si integro cyphrae quotcunque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet, ut si ad 3 addas 000, ut fiat 3. 000, non mutatur integri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000, nam

*nam*  $\frac{2000}{1001} = 3.$

SCHOL. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus*  $\frac{8}{10}, \frac{24}{100}, \frac{725}{1000}$ , *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0. 8, 0. 24, 0. 725, *quæ æquivalent præcedentibus*  $\frac{8}{10}, \frac{24}{100}$  &c.

DEFINITIO II.

**F**ractionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0. 5679, & 0. 045 notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet  $\frac{6}{100}$  &  $\frac{4}{100}$ , item  $\frac{7}{1000}$  &  $\frac{5}{1000}$ . Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Corol. 1.*

DEFINITIO III.

**P**rogressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimalis, aut centesimæ nullæ sunt; ut 4. 2 5, ubi partes centesimæ, & millesimæ defunt, quæ quidem cyphris interpositis suppleantur: sic eadem decimalis, interpositis duabus cyphris, erit 4. 2005. Similiter 3. 5 7 fiet 3. 05007. Eadem ratione  $\frac{5}{1000}$  scribitur 0. 005, & 3 +  $\frac{45}{10000}$  scribitur 3. 0045. Semper enim valor est idem, ut in *Coroll. 2.* & 3. fuit explicatum.

# DE CALCULO PROPOSITIO I.

*Decimales addere, & subtrahere.*

**F**Ractiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant *per Defin. 2.*; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per defin. 3.* deinde additio & subtractio fiant, ut in communi Arithmetica additio & subtractio integrorum.

## ADDITIONIS EXEMPLA.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">A</td> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="text-align: right;">245</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right; font-size: small;">II</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">B</td> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="text-align: right;">39</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">C</td> <td style="text-align: right;">10.</td> <td style="text-align: right;">635</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> </table>	A	3.	245	III				II	B	7.	39						C	10.	635	III		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="text-align: right;">27.</td> <td style="text-align: right;">=</td> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="text-align: right;">207</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right; font-size: small;">II</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="text-align: right;">45</td> <td style="text-align: right;">=</td> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="text-align: right;">45</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="6" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td colspan="3"></td> <td style="text-align: right;">Summa</td> <td style="text-align: right;">11.</td> <td style="text-align: right;">657</td> </tr> </table>	5.	27.	=	5.	207	III						II	6.	45	=	6.	45											Summa	11.	657
A	3.	245	III																																																	
			II																																																	
B	7.	39																																																		
C	10.	635	III																																																	
5.	27.	=	5.	207	III																																															
					II																																															
6.	45	=	6.	45																																																
			Summa	11.	657																																															

**COROLL.** Patet ratio ex dictis: nam si decimales A & B fiant ejusdem denominationis per Coroll. 2. erunt per Coroll. 1.  $A = \frac{3245}{1000}$  &  $B = \frac{7390}{1000}$ , proinde  $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C$  10. 635 per Defin. 1.

## SUBTRACTIONIS EXEMPLA.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">A</td> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="text-align: right;">572</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right; font-size: small;">II</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">B.</td> <td style="text-align: right;">1.</td> <td style="text-align: right;">29</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">C</td> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="text-align: right;">282</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> </table>	A	4.	572	III				II	B.	1.	29						C	3.	282	III		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="text-align: right;">42</td> <td style="text-align: right;">=</td> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="text-align: right;">402</td> <td style="text-align: right; font-size: small;">III</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right; font-size: small;">II</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3</td> <td style="text-align: right;">5</td> <td style="text-align: right;">=</td> <td style="text-align: right;">0.</td> <td style="text-align: right;">035</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="6" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td colspan="3"></td> <td style="text-align: right;">differentia</td> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="text-align: right;">367</td> </tr> </table>	7.	42	=	7.	402	III						II	3	5	=	0.	035											differentia	7.	367
A	4.	572	III																																																	
			II																																																	
B.	1.	29																																																		
C	3.	282	III																																																	
7.	42	=	7.	402	III																																															
					II																																															
3	5	=	0.	035																																																
			differentia	7.	367																																															

COROLL. Ratio est eadem, ac additionis. Nam si decimales A & B ad eandem denominationem reducantur per

Coroll. 2. erunt per Coroll. 1.  $A = \frac{4572}{1000}$  &  $B = \frac{1290}{1000}$ ,

hinc  $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000} = C$  <sup>III</sup> 3.282 per

Defin. 1.

SCHOL. Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimales subtrahenda. Sic ad subtrahendum ex 8 integris tres centesimas, hoc est 0.03, adduntur ad 8 duo zeri, ut fiat 8.00

eritque residuum 7.97, ut patet.

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

Fractiones decimales multiplicantur, ut integra in communi Arithmetica, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

E X E M P L A.

<p>I. <sup>II</sup> 4 0 5</p> <p style="text-align: right;"><sup>I</sup> 3. 2</p> <hr/> <p style="text-align: right;">8 1 0</p> <p>1 2 1 5</p> <hr/> <p style="text-align: right;"><sup>III</sup> 1 2.9 6 0</p>	<p>II. <sup>III</sup> 0.7 4 5</p> <p style="text-align: right;"><sup>II</sup> 42</p> <hr/> <p style="text-align: right;">1 4 9 0</p> <p style="text-align: right;">2 9 8 0</p> <hr/> <p style="text-align: right;"><sup>V</sup> 0. 3 1 2 9 0</p> <p style="text-align: right;">C 3</p>	<p>III. <sup>VI</sup> 0.000356</p> <p style="text-align: right;"><sup>IV</sup> 0.0048</p> <hr/> <p style="text-align: right;">2848</p> <p style="text-align: right;">1424</p> <hr/> <p style="text-align: right;"><sup>X</sup> 0.0000017088</p> <p style="text-align: right;">Co-</p>
---	--	---

COROLL. I. Operandi modus ex dictis facile demonstra-

tur. Nam in primo exemplo  $4.05 = \frac{405}{100}$  &  $3.2 = \frac{32}{10}$  per

Defin. I. Ex communi autem Arithmetica  $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000}$

$= 12.960$  per Defin. I. & Coroll. I., quod est ejusdem exempli primi productum.

COROLL. II. Patet etiam ex primo exemplo, tres tantum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum equalem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot desunt in facto nota decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

COROLL. III. Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta, ut si multiplicari oportet  $4.5$

per  $3.2$ , primo progressio interpositis zeri fiat integra per

Defin. 3., hoc est fiat  $4.5 = 405$ , &  $3.2 = 3.02$ ,

deinde multiplicando  $405 \times 3.02$  habetur productum

1. 22310.

SCHOL. Si factorum unus sit numerus integer sine ullo sibi decimali annexo, in producto numerantur tot nota, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus.

### PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe

nu-

numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cyphræ, ut in III. exemplo.

E X E M P L A.

I.  $\overset{\text{II}}{3} \overset{\text{V}}{)0.13563} \overset{\text{III}}{|} \overset{\text{III}}{4.521}$ .    II.  $\overset{\text{III}}{5.24} \overset{\text{III}}{)18.864} \overset{\text{II}}{|} \overset{\text{I}}{3.6}$

$$\begin{array}{r} 3 \overset{\text{I}}{1} \overset{\text{I}}{4} \overset{\text{I}}{4} \\ - \overset{\text{V}}{00} \\ \hline \end{array}$$

III.  $\overset{\text{III}}{27.589} \overset{\text{III}}{)0.354} \dots \overset{\text{V}}{|} \overset{\text{V}}{0.01283}$

$$\begin{array}{r} 27589 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -78110 \\ 55178 \\ \hline 229320 \\ 220712 \\ \hline -86080 \\ 82767 \\ \hline \end{array}$$

3313 &c.

COROLL. Operandi ratio clara est. Nam in primo exem-

plo per Defin. I. habetur  $\overset{\text{II}}{3} = \frac{3}{100} \text{ \&Ocirc; } \overset{\text{V}}{0.13563} = \frac{13563}{100000}$   
 proinde dividendo numeratorem per numeratorem & denominatorem per denominatorem, ac si essent numeri in-

tegrum, habetur nova fractio  $\frac{4521}{1000} = 4.521$  per Defin. I. nempe quotus in primo exemplo inventus. In tertio exemplo cum quinquies addita sit cyphra 0, dividendi apex fit VIII, a quo divisoris apice III subtracto, residuum v dat quoti apicem.

SCHOL. Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per Defn. 3. deinde instituaturs divisio, ut supra dictum est.

### PROPOSITIO IV.

*Fractionem quancumque in partes decimales reducere.*

SI data fractio  $\frac{3}{5}$  reducenda in partes v. g. millesimas; Fiat  $5. 3. :: 1000. x$ ; erit per regulam proportionum  $x = \frac{3000}{5} = 600$ : unde apparet  $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.600$  per Defn. 1.

Similiter fractio  $\frac{3}{7}$  reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur  $\frac{3}{7} > 0.42857$ , sed  $< 0.42857$ , defectu existente minori, quam  $\frac{1}{100000}$ . Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem, nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

SCHOL. Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsita. Ratio autem operationis per se manifesta est.

### PROPOSITIO V.

*Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.*

Quæritur, quot uncias unius pedis romani con-  
ficient particulae decimales 750. Quia pes roma-  
ma-

manus dividitur in uncias 12, inferitur, particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas.

Sunt autem per *Defin.* 1. particulae  $750^{\text{III}} = \frac{750}{1000}$ .

Fiat jam  $1000. 750 :: 12. x$ ; erit per regulam proportionum  $x = \frac{9000}{1000} = 9$ . Habentur ergo  $\frac{9}{12}$ , pro-

inde  $750^{\text{III}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ . Igitur particulae datae conficiunt novem uncias, seu  $\frac{3}{4}$  unius pedis romani.

Similiter scire volo, quos asses, seu quot partes scuti romani, quod in asses 100 dividitur, contineant deci-

males particulae  $5610^{\text{IV}}$ . Cum per *Defin.* 1. sint  $5610^{\text{IV}} = \frac{5610}{10000}$ ; si fiat  $10000. 5610 :: 100. x$ , erit per regulam proportionum  $x = \frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$ . Continent ergo asses  $56 + \frac{1}{10}$ , hoc est asses 56, & unius quadrantis romani semissem. Ratio per se patet.

SCHOL. Simon Stevinus (a) decimalium auctor ingeniosissimus eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo; cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus (b), Præstetus (c), Reyneau (d), Wolfius (e), & alii hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.

CA-

(a) Oeuvres Mathemat. in f. p. m. 206.

(b) Arith. pract. l. 2. Cap. 9.

(c) Elemens des Mathemat. Tom. 1. l. 9.

(d) Science du Calcul.

(e) Elem. Matheseos edit. 2. Tom. 1. Cap. 9.

## C A P U T III.

*De Calculo Exponentiali.*

## D E F I N I T I O N E S.

I. SI quantitas ex gr.  $a$  seipsam multiplicet, ex dictis *Propof. 3. Cap. 1.* fit  $aa$ , quod etiam exprimitur per  $a^2$ , & dicitur *quadratum*, seu *secunda potestas*. Cujus radix, seu latus est ipsa  $a$ , quæ prima etiam potestas dicitur. Si  $aa$  multiplicetur per idem latus  $a$ , oritur  $aaa$ , seu  $a^3$ , nempe *cubus*, aut *tertia potestas*. Si  $aaa$  rursus per  $a$  multiplicetur, oritur  $aaaa$ , seu  $a^4$ , nempe *quadrato-quadratum*, aut *quarta potestas*, & sic in infinitum. Atque hinc habetur series continue proportionalium  $a^1$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$ ,  $a^6$ ,  $a^7$ , &c.

II. Numerus potestati adscriptus dicitur *Index*, seu *Exponens* illius potestatis. Exponit enim, quo dimensionis gradu gaudeat talis potestas, & indicat locum, quem occupare debet in serie proportionalium. Ut index 4 indicat quatuor dimensiones ipsius  $a$ , & quartum illi locum competere in ordine proportionalium illius seriei.

III. Literæ  $m$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $s$  indicant exponentem potentiaë indeterminatæ, ut  $a^m$ ,  $a^n$ ,  $a^r$ ,  $a^s$ , quæ possunt determinari ad quamlibet potentiam, tertiam, quartam, quintam &c.

IV. Series potestatum constituit progressionem geometricam, quæ procedit in ratione unitatis ad radicem. Exponentes vero progressionem Arithmeticam naturalem numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c.

V. Potestas, cujus exponens est numerus fractus, ut

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$a$ ,  $a$  &c. designat radicem ejus potestatis, quæ indi-

catur a denominatore fractionis ; nempe  $a^{\frac{1}{2}}$  radicem

secundam,  $a^{\frac{1}{3}}$  radicem tertiam, seu cubicam &c. un-

de oritur alia series  $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}$ , &c. potestatum, quæ dicuntur *imperfectæ*; & idem revera significant, ac  $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[6]{a}$  &c. quæ signa dicuntur *Radicalia*.

VI. Potestas, cujus exponens est cum signo negativo, ut  $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$  &c. significat unitatem divisam per talem potestatem. Sic  $a^{-1}$  idem est, ac  $\frac{1}{a}$ ,  $a^{-2}$  idem,

ac  $\frac{1}{aa}$ ,  $a^{-3}$  significat  $\frac{1}{aaa}$  &c. Nam si fuerit ex. gr.  $\frac{aa}{aaaa}$ , eliso  $aa$  tam in numeratore, quam in denomi-

natore, habetur 1, ( nam  $\frac{aa}{aa} = 1$  ) & remanet  $\frac{1}{aa}$ , quod equivalet ipsi  $a^{-2}$ . Atque hinc oritur series potestatum, quæ dicuntur negativæ, ut  $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}$  &c. huic æqualis  $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{5}}, a^{\frac{1}{6}}$  &c.

VII. Zero, seu nihilum dicitur exponens unitatis, ita ut  $a^0$  significet idem, ac unitatem. Hinc posita progressionem geometricam ab 1 incipiente, nempe 1, 2, 4, 8, 16 &c. erit  $a^0 = 1, a^1 = 2, a^2 = 4, a^3 = 8, a^4 = 16$  &c.

COROLL. Calculus potestatum, de quo agitur in hoc capite, fit per Exponentes ipsarum; proinde Calculus

EX-

Exponentialis nuncupatur: qui ob potestates imperfectas  
Defin. 5. explicatas extractionem quoque radicum com-  
plectitur.

SCHOL. I. Nota, magnum esse discrimen inter  $2a$  &  
 $2a$ , seu  $a^2$ . Nam  $2a$  significat duplum ejusdem  $a$ , seu  
 $a + a$ ; at vero  $a^2$  significat secundam potestatem ipsius  $a$ .  
Hinc posita  $a = 3$ , erit  $2a = 6$ , at vero  $a^2 = 9$ .

SCHOL. II. Etsi nullum existat in natura solidum,  
quod pluribus, quam tribus dimensionibus constet; in Al-  
gebra tamen alia atque alia concipiuntur solida, quorum  
dimensionum numerus in infinitum extenditur, ut supe-  
riora exempla docent. Usus autem est frequentissimus in  
seriebus Geometricis, & generatim in doctrina Curvarum.

### PROPOSITIO I.

Potentiam quamcumque per aliam ejusdem radicis  
multiplicare, aut dividere.

I. **A**dde simul exponentes, habebis factum.

$a^2$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{-2}$	$x^m$	$y^m$
$a^3$	$a^{\frac{1}{3}}$	$a$	$x^m$	$y^n$
$a^5$	$a^{\frac{5}{6}}$	$a^{-1}$	$x^{2m}$	$y^m + n$

II. Pro divisione subtrahe exponentem potentiae  
dividentis ab exponente potentiae dividendae, habe-  
bis quotum.

$a^5$	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^2$	$y^{m + n}$	$x^{2n}$
$a^7$	$a^{\frac{1}{3}}$	$a^3$	$y^n$	$x^r$
$a^3$	$a^{\frac{1}{6}}$	$a^5$	$y^m$	$x^{2n-r}$

EXPONENTIALI CAP. III.

45

*Demonstratio.*  $a^2 = aa$ , &  $a^3 = aaa$  ex *Defin.* 1. sed factum ex  $aa$  in  $aaa$ , si per extensum scriberetur, esset

$aaaaa$ , ergo  $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ . Similiter  $a^{-2} = \frac{1}{aa}$

per *Defin.* 6, &  $a^1 = \frac{1}{a}$  per *Ax.* 1. *Cap.* 2. Sed  $\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{aa}$

$\frac{1}{aa}$ , per *Prop.* 5. *Cap.* 2. &  $\frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ . Ergo multiplicando  $a^{-2}$  per  $a$ , factum erit  $a^{-1}$ . Quod &c.

Simili ratione  $a^5$  divisum per  $a^2 = \frac{aaaaa}{aa} = a^3$  hoc est, si per extensum fractio scribatur, =  $\frac{aaaaa}{aa}$ ; & ablati

hinc inde  $aa$ , residuum est  $aaa = a^3$ ; ergo ut dividatur  $a^5$  per  $a^2$ , quotus erit  $a^{5-2} = a^3$ . Pariter di-

videre  $a^2$  per  $a^{-3}$  idem est, ac dividere  $\frac{1}{aa}$  per  $\frac{1}{aaa}$

sed  $\frac{1}{aa}$  divisum per  $\frac{1}{aaa} = \frac{aaa \times a^3}{aa}$  per *Prop.* 6. *Cap.* 2. ergo dividendo  $a^2$  per  $a^3$  provenit quotus  $a^5$ . Quod &c.

PROPOSITIO II.

*Potestatem quamcunque ad aliam dati exponentis elevare.*

**E**Xponens potestatis ducatur in exponentem datum, factum erit exponens potestatis quaesitae. Sit elevanda  $a^2$  ad potentiam tertiam; ductis inter se exponentibus 2 & 3, habebis potestatem quaesitam  $a^6$ . Similiter sit elevanda potestas  $y^2$  ad potestatem 6; multiplicatis exponentibus 2 & 6, habebis  $y^{12}$  potestatem sextam quaesitam. Si elevanda sit

fit ad secundam, tertiam, quartam &c. potestatem scribitur  $x^{2n}$ ,  $x^{3n}$ ,  $x^{4n}$  &c.

Demonstratio patet ex *Defin.* I. Nam perspicuum est

$$a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2 \times 3} = a^6; \text{ sic etiam } x^{n \times 2} = x^{2n} \text{ \& } x^{n \times 3} = x^{3n} \text{ \&c.}$$

**COROLL.** Eodem modo elevantur ad potestatem dati exponentis quantitates, quæ constant factæ duarum, vel plurium quantitarum. Sic si ab elevetur ad potestatem

secundam, erit  $a^2 b^2$ , vel  $ab^2$ . Potestas tertia quantitates

$$a^2 b^1 c^3 \text{ erit } a^{2 \times 3} b^{1 \times 3} c^{3 \times 3} = a^6 b^3 c^9.$$

Potestas  $m$  quantitates  $abcd$  erit  $abcd^m$ .

**SCHOL.** Potestates dissimiles adduntur, subtrahuntur, multiplicantur &c. ut ceteræ quantitates. Sint enim duæ potestates  $a^m$  &  $b^n$ , earum summa erit  $a^m + b^n$ , differentia  $a^m - b^n$ , factum  $a^m b^n$ , quotus  $\frac{a^m}{b^n}$ .

### P R O P O S I T I O III.

*Binomium ad quamcunque potentiam elevare.*

**I.** Sit binomium  $a + b$  elevandum ad potentiam v. gr. sextam. Scribatur in primo termino prima radice pars evecta ad potestatem quæsitam, ut hic, ad 6, quæ erit  $a^6$ . In secundo termino scribatur eadem  $a$  evecta ad potentiam unitate minorem, & ducta in alteram radice partem  $b$ , quæ erit  $a^5 b$ . In tertio scribatur eadem radix  $a$  evecta ad potestatem rursus unitate minorem ducta in quadratum alterius partis radice, nempe in  $b^2$ , quæ erit  $a^4 b^2$ , & sic deinceps minuendo unitate in quolibet termino potestatem primæ partis radice, & contra augendo unitate potestatem secundæ partis

radicis, donec veniatur ad terminum, in quo prima pars radicis unica tantum dimensione constet, qui erit terminus penultimus, & in ultimo reperiatur secunda radicis pars evecta ad eandem potestatem quaesitam. Erit igitur potestas 6<sup>a</sup> dati binomii  $a \times b$ .

$$a^6. a^5b^1. a^4b^2. a^3b^3. a^2b^4. a^1b^5. b^6.$$

II. Pro faciliori autem methodo fieri solent ex duabus dati binomii litteris duae progressionēs Geometricae, quarum altera a potentia quaesita incipiens descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usque ad eandem potentiam, & multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, habetur dati binomii potentia quaesita. Quæritur potentia sexta ipsius  $a + b$ .

Series I.	$a^6$	$a^5$	$a^4$	$a^3$	$a^2$	$a^1$	1.
Series II.	1.	$b^1$	$b^2$	$b^3$	$b^4$	$b^5$	$b^6$

---


$$\text{Potestas VI. } a^6 + a^5b^1 + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6.$$

III. Coefficientes potentiarum, quos Ougtrhedus *uncias* vocat, sic reperiuntur. Exponens primi termini dat unciam secundi termini, ut in superiori exemplo 6 erit uncia secundi termini  $a^5b$ . Pro uncia tertii termini duc unciam modo inventam secundi termini, nempe 6, in exponentem 5, quem habet prima pars radicis in eodem secundo termino, & productum 30 divide per 2, quotus 15 est uncia tertii termini. Deinde duc hanc ipsam unciam 15 in exponentem 4, quem habet in tertio termino radicis prima pars, nempe  $a^4$ , & productum 60 divide per 3, quotus dat unciam quarti termini, & sic deinceps. Itaque potentia sexta binomii  $a + b$  cum unciis suis erit  $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ .

IV. Alii vero pro ejusmodi unciis inveniendis duas Geometricas progressionis numerorum componunt, ita ut ex terminis sibi ordine respondentibus fiat fractio, & multiplicando numeratores inter se, & denominatores pariter inter se, habentur numeri unciales quæsi. Ecce exemplum pro eadem potentia sexta.

Series I.           6. 5. 4. 3. 2. 1.

Series II.          1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc  $\frac{6}{1} = 6$  est uncia secundi termini.

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ uncia tertii termini.}$$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20 \text{ uncia quarti.}$$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{60}{2} = 30 \text{ uncia quinti.}$$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{1} = 6 \text{ uncia sexti.}$$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1 \text{ uncia ultimi.}$$

Hac methodo repertæ sunt uncia potentiarum 1.æ 2.æ 3.æ 4.æ &c. binomii  $a + b$ , ut ex sequenti exemplo apparet.

$$1.æ \ a + b$$

$$2.æ \ a^2 + 2ab + b^2$$

$$3.æ \ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4.æ \ a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$5.æ \ a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$6.æ \ a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

SCHOL. I. Si binomium sit positivum, omnia signa sunt affirmativa; ut patet ex superiori exemplo. Si vero secunda binomii pars sit negativa, ut  $a - b$ ; termini, in quibus radix  $-b$  elevata erit ad potestatem imparem 1, 3, 5 &c. afficiendi sunt signo  $-$ , reliqui

qui omnes signo +. Sic potestas tertia binomii  $a - b$  in superiori exemplo fieret  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  ob exponentes impares  $b^1, b^3$ .

SCHOL. II. Si numerus aliquis sive integer, sive fractus precedat alterutrum, vel utrumque binomii terminum, ex. gr. si elevari debeat ad tertiam potentiam  $a + 2b$ , elevetur primo binomium ipsum  $a + b$  ad tertiam potentiam, quod secundum methodum superius allatam erit  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . Deinde numerus 2, qui afficit  $b$ , elevetur ad eandem potentiam, ad quam in singulis terminis elevata existit quantitas  $b$ , erit pro secundo termino  $= 2$ , pro tertio  $= 4$ , pro ultimo  $= 8$ . Duc postea hos numeros, seu potestates in coefficientes terminorum, in quibus  $b$  equali potestate gaudet, habebis  $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$  pro tertia potestate quaesita binomii  $a + 2b$ . Similiter si elevanda sit ad quartam potestatem  $2ax + b$ , erit  $16a^4x^4 + 32a^3bx^3 + 24a^2b^2x^2 + 8ab^3x + b^4$ .

SCHOL. III. Aliquando juvat binomium ad datam potestatem elevare scribendo ad ejus dexteram exponentem potestatis quaesita, ducta desuper linea. Sic ut elevetur

$a + b$  ad quadratum, scribitur  $a + b$ ; ut ad cubum,  $a + b$ , & in genere ad quamcumque potestatem indeterminatam

$m$ , scribitur  $a + b$ .

COROLL. I. Hinc sequitur, ut potestas hoc modo efformata ad aliam potestatem dati exponentis elevetur, satis esse exponentem unius ducere in exponentem alterius. E-

levanda sit  $a + b$  ad tertiam potestatem, scribitur  $a + b$

$= a + b$ . Similiter elevanda sit  $a + b$  ad potestatem

$n$ , scribitur  $a + b$ .

COROLL. II. Item sequitur, ut duae potestates ejus-

dem quantitatis inter se multiplicentur, sufficere earum

exponentes simul addere. Sic  $a^2 + b^3 \times a^2 + b^3 = a^{2+2} + b^{3+3}$

$= a^4 + b^6$ . Similiter  $a^m - b^n \times a^m - b^n = a^{m+m} - b^{n+n}$

Contra vero ut dividantur, satis est exponentem divi-

dentis ab exponente dividendi subtrahere. Sic  $a^5 - x^2 = a^{5-2} - x^2$

$= a^3 - x^2$ , significat potentiam  $a^5 - x^5$  divisam per poten-

tiam  $a^2 - x^2$ . Item  $a^m + b^n$  est quotus resultans ex

divisione  $a^m + b^n$  per  $a + b$ .

#### P R O P O S I T I O I V .

Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quamcumque elevando assignare.

Sit binomium  $p + q$  elevandum ad quamlibet potestatem indeterminatam  $m$ . Fiant duæ progressionis Geometricæ sequentes:

$$\begin{array}{l} \text{I. } p^m \quad p^{m-1} \quad p^{m-2} \quad p^{m-3} \quad p^{m-4} \quad \&c. \\ \text{II. } 1 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^3 \quad q^4 \quad \&c. \end{array}$$

Quibus inter se ductis, habetur formula, seu Canon generalis  $p^m + p^{m-1}q + p^{m-2}q^2 + p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4 + \&c.$  Ut inveniatur coefficientes, seu uncia, fiant aliæ duæ series Geometricæ, nempe

$$\begin{array}{l} \text{I. } m \quad m-1 \quad m-2 \quad m-3 \quad m-4 \quad \&c. \\ \text{II. } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \&c. \end{array}$$

Fiat fractio, & multiplicatis terminis, ut in Pro-

pos. præc. erit  $\frac{m \cdot m-1}{1}$  uncia secundi termini:

uncia tertii termini:  $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  uncia quarti

ter-

EXPONENTIALI CAP. III.

51

termini &c. quibus suo loco in superiori Canone generali dispositis, habetur formula generalis pro quocumque binomio, aut polynomio ad quamlibet potestatem elevando, nempe  $p^m + m p^{m-1} q$

$$+ m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3$$

$$+ m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4 \&c.$$

Patet exponentem  $m$  continuo decrescere, proinde ubi fit  $= 0$ , ibi erit ultimus terminus potentiae quaesitae. Nam fiat ex. gr.  $m = 3$ , in quarto Canonis termino erit  $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$ .

Sit igitur elevandum ad tertiam potestatem binomium  $2ax + bb$ . Supponatur  $2ax = p$ ,  $+ bb = q$  &  $m = 3$ . Loco ipsorum  $p$ ,  $q$ ,  $m$  substituuntur eorum valores, nempe  $2ax$ ,  $+ bb$  &  $3$ ; adhibitaque formula generali, erit  $p^m = 8a^3 x^3$ ,  $m p^{m-1} q$

$$= 12a^2 b^2 x^2, m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = 6ab^4 x,$$

$$\text{mum } m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = b^6.$$

Est igitur tertia potestas quaesita  $8a^3 x^3 + 12a^2 b^2 x^2 + 6ab^4 x + b^6$ .

Sit secundo trinomium  $a + b - c$  elevandum ad quartam potestatem. Suppono  $a = p$ ,  $+ b - c = q$ ,  $m = 4$  factaque, ut modo docuimus, debita valorum substitutione, erit quarta potestas quaesita  $a^4 + 4a^3 b - 4a^3 c + 6a^2 b^2 - 12a^2 bc + 6a^2 c^2 + 4ab^3 - 12ab^2 c + 12abc^2 - 4ac^3 + b^4 - 4b^3 c + 6b^2 c^2 - 4bc^3 + c^4$

PROPOSITIO V.

*Potestates compositas multiplicare.*

**M**ultiplicatio potestatum compositarum nullam habet difficultatem, bene perceptis iis, quae

*Propos. VII. Cap. I. & Prop. I. hujus dicta sunt, ideoque unum, vel alterum exemplum hoc loco afferre satis erit.*

I. Multiplicanda sit quantitas  $A$  per  $B$ , productum erit  $C$ , nempe:

$$\begin{array}{r} A \quad a^2 - 2ab + b^2 \\ B \quad a^2 + 2ab - b^2 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{r} a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\ + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4 \end{array}$$

---


$$Ca^4 \quad 0 \quad - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$$

II. Multiplicari oporteat quantitas  $Mx^2 + 2ax - a^2$  per  $Nx^3 - 2a$ . Facilitatis gratia disponentur termini, ut sequitur, productum erit  $P$ .

$$\begin{array}{r} M \quad x^2 + 2ax - a^2 \\ \quad \quad 3bx - b^2 \end{array}$$

---


$$N \quad x^3 - 2a$$

---


$$\begin{array}{r} x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 \\ + 3bx^4 - b^2x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 \\ - 6abx + 2ab^2 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{r} P \quad x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 - 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 + 2ab^2 \\ \quad + 3bx^4 - b^2x^3 \quad \quad - 6abx \end{array}$$

Ubi videre est, terminos, in quibus  $x$  ad aliquam potestatem elevatur, ordinatim unum sub alio collocari, ita ut dignitates æquales sibi respondeant.

## P R O P O S I T I O VI.

*Potestates compositas dividere.*

**N**Equè multum negotii facessit potestatum compositarum divisio, si, quæ dicta sunt *Prop. VIII. Cap. I. & Propos. I. hujus* ante oculos habeantur.

I. Sit

I. Sit dividenda quantitas  $A$   $6a^3 - 15a^2b + 9ab^2$  per  $B$   $2a^2 - 3ab$ . Diviso primo termino  $6a^3$  per  $2a^2$ , quotus est  $3a$  per *Propos. 1. hujus*, quem pone in  $C$ , & per hunc multiplica totum divisorem  $B$ : productum  $6a^3 - 9a^2b$  subtrahitur (mutatis signis) ex dividendo  $A$ , & remanet  $-6a^2b + 9ab^2$ ; quod divide pariter per  $2a^2$ , quotus est  $-3b$  per *Prop. cit.*, quem pone in  $C$ , & per ipsum multiplica, ut antea, totum divisorem  $B$ : producitur  $-6a^2b + 9ab^2$  subtrahendum (mutatis signis) ex residuo prædicto, & nihil remanet. Habetur ergo quotus  $C$   $3a - 3b$ .

$$\begin{array}{r|l}
 B \ 2a^2 - 3ab \ ) \ A \ 6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 & C \\
 \underline{-6a^3 + 9a^2b} & + 3a \\
 \circ \ -6a^2b + 9ab^2 & \underline{- 3b} \\
 \underline{+6a^2b - 9ab^2} & \\
 \circ & \\
 \circ & 
 \end{array}$$

II. Dividere oporteat  $M$  per  $N$ , quotus est  $P$ , ut sequenti exemplo patet.

$$\begin{array}{r|l}
 N \ yy - 16 \ ) \ M \ y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 & P \\
 \underline{-y^6 + 16y^4} & + y^4 \\
 \circ \ + 8y^4 - 124y^2 & + 8y^2 \\
 \underline{-8y^4 + 128y^2} & + 4 \\
 \circ \ + 4y^2 - 64 & \\
 \underline{-4y^2 + 64} & \\
 \circ & \\
 \circ & 
 \end{array}$$

PROPOSITIO VII.

*Ex potestatibus radicem extrahere.*

I. **U**T extrahatur radix ex potestate data, datur exponens potestatis per exponentem radice quæsitæ, quotus erit quæsitæ radix. Quæritur radix secunda potestatis  $a^3$ , diviso exponente 3

D 3 per

per 2, habetur radix quæsitæ  $a^{\frac{3}{2}}$ . Similiter radix tertia ejusdem potestatis erit  $a^{\frac{3}{3}} = a^1$ . Item radix quinta potestatis  $a^7$  erit  $a^{\frac{7}{5}}$ , seu  $a^{1 + \frac{2}{5}}$  & generaliter  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ; eademque ratione  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

II. Si radix sit extrahenda ex facto plurium quantitatum, ut  $a^6 b^2 c$ , eodem modo operandum. Nam divisis exponentibus ejusdem  $a^6 b^2 c$  per exponentem radice quæsitæ, habetur radix. Erit ergo ipsius  $a^6 b^2 c$  radix secunda  $a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{2}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ , hoc est  $a^3 b c^{\frac{1}{2}}$ , ita ut  $\sqrt{a^6 b^2 c} = a^3 b c^{\frac{1}{2}}$ . Sic  $\sqrt{ab} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ , seu  $ab^{\frac{1}{2}}$ .

Ratio deducitur ex ipsa potestatum compositione. Nam sicuti una potestas ad aliam elevatur multiplicando earum exponentes per Prop. 2. hujus; sic ut radix extrahatur, contrario modo agitur, dividendo scilicet exponentem potentiae per exponentem radice quæsitæ.

SCHOL. I. Sed juvabit tironem sequentes expressiones, quæ apud auctores non raro occurrunt, hic adnotare.

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ , seu  $a^1 b^{\frac{1}{2}}$ ; nam  $a$  est radix ipsius  $a^2$  &  $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$ . Pariter  $\sqrt{a^3 b} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^1 + \frac{1}{2} b^{\frac{1}{2}} = a^1 a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$ ; ubi patet, quantitatem partim esse rationa-

lem, partim irrationalem. Item  $\sqrt{a^3 b^3} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} = ab\sqrt{ab}$ . Hæc pauca ceteris dignoscendis facem præferunt.

SCHOL. II. Hanc novam radices exprimendi rationem excogitavit Newtonus (a) magno calculi commodo. Nam

(a) Epist. ad Oldenburg. apud Wallisium Tom. III. pag. 622.



$$\begin{array}{r|l}
 & M \\
 2x + b - 1 & \begin{array}{r} x^2 + 2bx - 2x + b^2 - 2b + 1 \\ -x^2 - 2bx \qquad -b^2 \\ \hline 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array} \\
 \hline
 & \text{Resid.} - 2x - 2b + 1 \\
 & \quad + 2x + 2b - 1 \\
 \hline
 & 0 \qquad 0
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} N \\ x + b - 1 \end{array} \right.$$

**COROLL.** Patet, ex compositione potestatum, tum etiam ex earum resolutione, in omni quadrato quantitatis compositæ contineri quadrata partium quantitatum peculiarium, ex quibus constat radix, ut in primo exemplo  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ , unde radix est  $a + b + c$ , & ulterius contineri duplum rectanguli earundem partium, hoc est  $2ab$ ,  $2bc$ ,  $2ac$ .

**SCHOL. I.** Omne quadratum duplicem habet radicem, unam positivam, negativam alteram. Nam  $aa$  tam oritur ex  $a \times a$ , quam  $-a \times -a$ . Proinde in primo exemplo radix  $a + b + c$  fieri potest negativa  $-a - b - c$ , & in secundo  $x + b - 1$  fieri potest  $-x - b + 1$ , & eamem idem quadratum habebitur. Quod pro solutione problematum secundi gradus scire juvabit. Ex quantitate autem negativa radix quadrata extrahi non potest. Nam  $-aa$  neque oriri potest ex  $a \times a$ , neque ex  $-a \times -a$ , ut patet ex Propos. VII. Cap. I. idcirco dicitur quadratum imaginarium, quod dari revera non potest.

**SCHOL. II.** Si ex data quantitate radix quadrata extrahi nequit, designatur ipsa radix præfigendo quantitati propositæ signum radicale  $\sqrt{\quad}$ . Sic ad extrahendam radicem secundam ex  $aa + bb$ , scribitur  $\sqrt{aa + bb}$ ; & hinc oriuntur quantitates radicales, de quibus in sequenti Cap.

*Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.*

I. **S**it quantitas  $A$ , cujus radix cubica inquiritur.

1. Radix cubica extracta ex  $a^3$  est  $a$  per Prop. VII. quæ ponatur seorsim, ut in  $B$ , & per ejus quadrati triplum  $3aa$  positum in  $C$  dividatur secundus terminus, nempe  $-3aab$ , oritur quotus  $-b$  pro altera radice parte ponenda in  $B$ .

2. Ex  $a - b$  fiat cubus, quem subtrahe ex quantitate data  $A$ ; & cum nihil remaneat, erit radix quæsitæ  $a - b$ .

$$\begin{array}{r|l}
 A & a^3 - 3aab + 3ab^2 - b^3 \\
 C \ 3aa \ ) & -a^3 + 3aab - 3ab^2 + b^3 \\
 \hline
 & \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} B \\ a - b \end{array} \right.$$

II. Sit extrahenda radix cubica ex quantitate  $F$ .

1. Radix cubica primi termini  $8a^3$  per Prop. VII. est  $2a$ , quam pone in  $G$ , & per ejus quadrati triplum  $12a^2$  divide secundum terminum quantitatis  $F$ , nempe  $-36a^2$ , quotus  $-3$  dat alteram radice partem ponendam in  $G$ .

2. Ex radice  $2a - 3$  fiat cubus  $8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$ , quem subtrahe ex quantitate data  $F$ ; & cum nihil remaneat, signum est, radicem cubicam esse  $2a - 3$ .

$$\begin{array}{r|l}
 12a^2 \ ) & F \ 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27 \\
 & -8a^3 + 36a^2 - 54a + 27 \\
 \hline
 & \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} G \\ 2a - 3 \end{array} \right.$$

Si radix tribus, vel pluribus constet terminis, quod ex ipsa terminorum inspectione facile dignoscitur, tunc præstat cubicam radicem inquirere per formulas generales, de quibus in sequenti Propos.

**COROLL.** Latere non potest methodi hujus ratio nisi eos, qui cuborum genesin prorsus ignorant. Patet enim, cubum ex binomio ex. gr. efformatum constare cubis utriusque quantitatis, & ulterius triplo quadrati primæ in secundam, & vicissim secundæ in primam quantitatem ducti, ut in primo exemplo constat cubis  $a^3$ ,  $b^3$  tum etiam  $3a^2b$ , &  $3b^2a$ . Signa autem, quibus cubi illi sunt affecti, produnt signa eorum radices, ut in secundo exemplo cubus  $-27$  indicat radicem negativam  $-3$ .

**SCHOL. I.** Quod si ex data quantitate radix extrahi non possit modo prædicto, ex. gr. ex  $aa - bb$ ; indicatur

signo radicali cubico, nempe  $\sqrt[3]{aa - bb}$ , quod de aliis quibuscumque radicibus dictum intelligatur.

**SCHOL. II.** Fractionum radices habentur, si separatim ex numeratore, & denominatore eodem modo extrahantur. Juvabit tamen tironem ad expressiones sequentes animam advertere. Radix quadrata quantitatis

$\frac{xx + 2ax + aa}{x + a}$  erit  $\frac{aa}{b}$ . Similiter  $\frac{a}{bc}$  erit  $\frac{a}{\sqrt{bc}}$ . Radix cubica quanti-

tatis  $\frac{a^3}{b^3 c^3}$  erit  $\frac{a}{bc}$ . Item  $\frac{a}{\sqrt[3]{dm}}$  est pariter cubica quanti-

tatis  $\frac{a^3}{dm}$ .

**SCHOL. III.** Si fractio, ex qua radix extrahenda est, integro adhæreat, tunc primo integrum ad fractionem ejusdem nominis reducat per Prop. 1. Cap. 2. Deinde extrahatur, si fieri possit, radix quæsitæ ex numeratore & denominatore. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate  $6 + \frac{1}{4}$ , facta reductione per Prop. cit. habetur  $\frac{25}{4}$

$$c^2 - 4c$$

cujus radix est  $\frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$ . Similiter sit quantitas  $\frac{c^2 - 4c}{4}$

+ 1, facta reductione per Prop. cit. oritur  $\frac{c^2 - 4c + 4}{4}$ ,

cujus radix  $= \frac{c - 2}{2}$  per Prop. 8. hujus.

PROPOSITIO X.

*Radices quascumque extrahendi methodum generalem assignare.*

CONsideretur quantitas, ex qua radix eruenda est, uti quantitas elevanda ad eam potestatem, cujus radix inquiritur. Exponens pro radice quadrata ex *Defin.* 5. erit  $= \frac{1}{2}$ , pro cubica  $= \frac{1}{3}$ , pro quadrato quadrata  $= \frac{1}{4}$ . Exemplis nonnullis res fiet clarissima.

I. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate  $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + cc$ . Ex formula ge-

nerali *Prop.* 4. huius  $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2}$

$p$   $q$  &c. sumantur duo priores termini (nam alii sunt inutiles, cum radices extrahendæ sunt rationales) & ponatur  $a^2 = p$ ,  $+ 2ab - 2ac$  &c.  $= q$ , & (quia agitur de radice quadrata) erit  $m = \frac{1}{2}$ , ideoque primus terminus radice  $=$

$p^m = a^2 \times \frac{1}{2} = a$ . Secundus erit  $mp^{m-1}q =$

$\frac{1}{2} a^2 \times -\frac{1}{2} q$ , hoc est  $\frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab - 2ac}$ , nempe  $\frac{1}{2} a^{-1} \times 2ab = a^{-1} + 1 = a^0 b = 1b$ . Similiter  $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1} + 1 c = -a^0 c = -1c$ ; ideoque radix quaesita est  $a + b - c$ . Neque enim ulterius est progrediendum, ubi  $m$  fiat  $= 0$ ; proinde cum hic habeatur  $a^0 b$ , &  $-a^0 c$ , habentur duo ultimi radicis termini.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex quantitate

$$9a^2 - 12ab + 6a + 4bb - 4b + 1.$$

Ex eadem formula generali  $p^m + m p^{m-1} q = 0$ , pone  $p = 9a^2$ ,  $q = -12ab + 6a$  &c.  $m = \frac{1}{2}$ ; erit

$$\frac{1}{2} \times \quad \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$d^m = 9 a^2 = 3a$ , nam  $9 = 3$ , per *Defin. 5.*, & *Propos. 7.* Est igitur  $3a$  primus terminus.

Deinde  $m p^{m-1} = \frac{1}{2} \times 9^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times a^{2m-1} = \frac{1}{6} a^{-1} \times q = \frac{1}{6} a^{-1} \times -12ab = -\frac{12}{6} a^{-1} + 1 \times b = -2a^0 b = -2b$ , qui erit secundus radicis terminus. Pariter  $\frac{1}{6} a^{-1} \times 6a = a^{-1} + 1 = 1a^0$ . Unde habetur tertius terminus radicis  $+ 1$ . Est ergo radix quaesita  $3a - 2b + 1$ .

II. Quæritur radix cubica quantitatis  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ . Pone  $a^3 = p$ , &  $-3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$-b_3 = q$ , erit ( ob radicem cubicam )  $m = \frac{1}{3}$ . Positis igitur valoribus  $p$  &  $q$  in duobus formulæ generalis terminis  $p^m + mp^{m-1}p$ , habebis  $p^m = a^3 \times \frac{1}{3} = a$  primum radicis terminum. Deinde  $mp^{m-1}q = \frac{1}{3}a^3 \times \frac{2}{3}$ , hoc est  $\frac{1}{3}a^{-2}q = \frac{1}{3}a^{-2} \times -3a^2b = -a^{-2+2}b = -a^0b = -b$ . Atque hic sistendum, ut supra monuimus. Radix ergo cubica est  $a - b$ .

III. Quæritur radix quadrato quadrata quantitatis  $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ . Pone  $a^4 = p$ , &  $-4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = q$ , erit  $m = \frac{1}{4}$  ob radicem quadrato-quadratam. Positis jam valoribus in duobus formulæ generalis terminis, habebis primum terminum radicis  $p^m = a^4 \times \frac{1}{4} = a$ . Pro secundo erit  $mp^{m-1}q = \frac{1}{4}a^4 \times \frac{3}{4}$ , hoc est  $\frac{1}{4}a^{-3}q = \frac{1}{4}a^{-3} \times -4a^3b$ ; unde oritur productum  $-a^0b$ , ex quo admonemur, haberi jam secundum radicis terminum  $b$ , nec esse ulterius progrediendum. Est ergo radix quaesita  $a - b$ .

SCHOL. Cum valor exponentis  $m$  nullibi occurrit  $= 0$ , tunc radix datae quantitatis erit irrationalis, & extractio radicis continuari poterit in infinitum, seu per infinitos terminos, id quod approximatio radicum dicitur, de quo in Prop. sequenti.

## PROPOSITIO XI.

*Extractiones radicum per infinitos terminos  
continuate.*

I. **E**Xtrahenda sit ex quantitate  $a^2 - b^2$  radix  
ex. gr. quadrata per terminos infinitos  $A$ ,  
 $B$ ,  $C$ ,  $D$  &c. Adhibeantur formulæ generalis tot  
termini, per quot continuatam vis extractionem ra-

dicis, nempe  $p + mp^{\frac{m-1}{2}} q + m \times \frac{m-1}{2}$

$p^{\frac{m-2}{2}} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{2} p^{\frac{m-3}{2}}$

$q^3$  &c. Pone  $p = a^2$ ,  $q = -b^2$ , & (ob radicem  
quadratam)  $m = \frac{1}{2}$ , erit

$A(= p^{\frac{1}{2}}) = a$ .

$B(= mp^{\frac{m-1}{2}} q^{\frac{1}{2}} a^2 \times -\frac{1}{2} \text{ hoc est } -\frac{1}{2} a^{-1} q) = -\frac{b^2}{2a}$

$C(= m \times \frac{m-1}{2} p^{\frac{m-2}{2}} q^2 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \text{ hoc est } -\frac{1}{8} a^2 \times -\frac{3}{2}$ ,

hoc est  $-\frac{1}{8} a^{-3} q^2) = -\frac{b^4}{8a^3}$ .

$D(= m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{\frac{m-3}{2}} q^3 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{2}$ ,

hoc

hoc est  $\frac{1}{16} a^2 \times -\frac{5}{2}$ , hoc est  $\frac{1}{16} a^{-5} q^3$  ) =  $\frac{16a5}{16a5}$

Et sic deinceps in infinitum. Est ergo radix quæsitæ

$$A+B+C+D \&c. = a \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{b^8}{128a^7} + \frac{7b^{10}}{256a^9} \&c.$$

II. At pro hac formula, qua utitur *Cl. Guisneus* (*a*), atque alii, adhibere præstat formulam Newtonianam magis quidem expeditam, & molestiæ fractionum minus obnoxiam, videlicet  $P \frac{m}{n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n}$

$BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ \&c.$  in qua *P* significat primum terminum quantitatis illius, cujus radix investigatur; *Q* reliquos terminos divisos per

primum;  $\frac{m}{n}$  indicem dimensionis, seu radicis quæ-

sitæ. Termini jam inventi exprimuntur literis *A*, *B*, *C*, *D* &c. nempe *A* exprimit primum radicis

terminum =  $P \frac{m}{n}$ ; *B* secundum =  $\frac{m}{n} AQ$ ; *C* ter-

tium =  $\frac{m-n}{2n} BQ$ , & sic deinceps. Sed ecce exem-

plum.

Extrahenda sit radix secunda ex quantitate  $\sqrt{c^2 + x^2}$  seu

seu  $\sqrt[3]{c^2 + x^2}$  per *Prop. 7. hujus*; dico, radicem esse  $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$  &c. Nam erit in hoc ca-

su  $P = c^2$ ,  $Q = \frac{x^2}{c^2}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ ; proinde habetur

$$A (= P \frac{m}{n} = c^2 \times \frac{1}{2}) = c.$$

$$B (= \frac{m}{n} A Q = \frac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2}) = \frac{x^2}{2c}.$$

$$C (= \frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2c} \times \frac{x^2}{c^2}) = -\frac{x^4}{8c^3}.$$

$$D (= \frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{1}{2} \times -\frac{x^4}{8c^3} \times \frac{x^2}{c^2}) = \frac{x^6}{16c^5}.$$

$$E (= \frac{m-3n}{4n} D Q = -\frac{5}{8} \times \frac{x^6}{16c^5} \times \frac{x^2}{c^2}) = -\frac{5x^8}{128c^7}.$$

Radix ergo quaesita  $= A + B + C + D$  &c.  $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$  &c.

Similiter extrahenda sit radix tertia ex quantitate  $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$ , seu  $\sqrt[3]{a^3 - b^3}$  per *Prop. cit.* Procedendo eadem methodo, erit  $P = a^3$ ,  $Q = -\frac{b^3}{a^3}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 3$ , proinde

$$A (= P \frac{m}{n} = a^3 \times \frac{1}{3}) = a^2.$$

$$B \left( = \frac{m}{n} A Q \right) = - \frac{b^3}{3a^2}$$

$$C \left( = \frac{m-n}{2n} B Q \right) = - \frac{b^6}{9a^5}$$

$$D \left( = \frac{m-2n}{3n} C Q \right) = - \frac{5b^9}{81a^8}$$

$$E \left( = \frac{m-3n}{4n} D Q \right) = - \frac{10b^{12}}{243a^{11}}$$

Est ergo radix quaesita  $= A + B + C + D + E \&c. = a$   
 $\frac{b^3}{3a^2} + \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8} + \frac{10b^{12}}{243a^{11}} + \dots \&c.$

SCHOL. I. Hac formula uti quoque possumus in divisione

fractionis per terminos infinitos. Sit dividenda  $\frac{1}{a+b}$  (hoc  
 est  $a+b$  per Def. 6.) Pone  $P = a$ ,  $Q = \frac{1}{a+b}$ ,  $m = -1$ ,  
 $n = 1$ ; erit  $A \left( = P \frac{m}{n} = a \frac{-1}{1} = -a \right) = -\frac{a}{1}$ .

$$B \left( = \frac{m}{n} A Q \right) = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{b}{a} = -\frac{b}{a^2}$$

$$C \left( = \frac{m-n}{2n} B Q \right) = -1 \times \frac{b}{a^2} \times \frac{b}{a} = -\frac{b^2}{a^3} \&c.$$

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \dots \&c.$  ut in Prop. 8. Cap. 2.

SCHOL. II. Patet jam, ex duplici fonte oriri series infinitas terminorum proportionalium, scilicet ex divisione, & extractione radicum. Primo modo quaesita fuerunt a  
 E Ni-

Nicolao Mercatore Holfato (a) ; secundo a Newtono (b) . Earum usus est ad obtinendam radicem approximationem , ut vidimus ; ad inveniendas areas & longitudes Curvarum , ad Solidorum superficies dime- tiendas , aliaque magni momenti circa curvas Mecha- nicas expedienda . Nos aliquem ipsarum usum in reso- lutione aequationum experiemur .

## C A P U T IV.

## De Calculo Radicali .

## D E F I N I T I O N E S .

I. **Q**uantitas , five numerica , five literalis , ex qua radix extrahi non potest , dicitur potentia imperfecta , quantitas furda , & irrationalis ; & a signo  $\sqrt{\quad}$  , quod *radicale* dicitur , *radicalis* denominatur , ut  $\sqrt{5}$  ,  $\sqrt{a}$  ,  $\sqrt{a-b}$  ,  $\sqrt{ax+bb}$  ; five , ut aliis placet scribere ,  $\sqrt[3]{(a-b)}$  ,  $\sqrt[4]{(ax+bb)}$  .

II. Signa radicalia præfixos habent exponentes ejus potentiaë , cujus radicem designant . Ubi nullus est exponens , pro radice secundæ potentiaë accipitur , ut  $\sqrt{a}$  indicat radicem secundam quantitatis  $a$  . At  $\sqrt[3]{a-b}$  significat radicem tertiam , seu cubicam quantitatis  $a-b$  .

III. Si radicale signum præcedat numerus , aut quan-

(a) Logarithmo technia Londini 1668. Acta Erudit. Lips. an. 1693.

(b) Epist. ad D. Oldenburgium an. 1676. in Tom. 3. Operum Wallisii Analy. per quantit. series &c. in Tom. Philosophiæ Natur. Amstelod. ann. 1723.

quantitas literalis, ut  $2\sqrt{3}$ ,  $a\sqrt{b}$  &c. quantitas, quæ præcedit, dicitur esse *extra signum*, nempe  $2$  &  $a$ . A quibusdam vero quantitates illæ vocantur *Coefficientes*. Cum quantitas nulla præcedit, ibi semper intelligitur unitas, ut  $1\sqrt{2}$ , &  $1\sqrt{a}$  &c.

IV. Ut quantitas extra signum sub signo radicali poni possit, elevari prius debet ad illam ipsam potestatem, quam indicat exponens signi radicalis, & multiplicari per quantitatem sub signo radicali

existentem. Sic  $2\sqrt{3}$  fiet  $\sqrt{12}$ . Item  $a\sqrt{b-c}$  erit  $\sqrt{a^2b-ac}$ . Demum  $a\sqrt{bc}$ , erit  $\sqrt{ambc}$ .

V. Contra vero quantitas sub signo radicali existens, & eundem exponentem habens, quem habet signum radicale, est quantitas rationalis, & ponitur extra signum, extracta radice. Sic  $\sqrt{ab^2} = b\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{am^3} = m\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ . Relinquitur sub signo id, quod radicale est.

VI. Quantitas negativa sub signo radicali, cujus exponens est numerus par, dicitur radix *imaginaría*, seu impossibilis, ut  $\sqrt{-a}$ ,  $\sqrt[4]{-a}$ ,  $\sqrt[6]{-a}$ ; similiter  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-5}$  &c. nam impossibile est quadratum negativum ex dictis in *Schol. 1. Prop. 8. Cap. 3.*

VII. Duæ quantitates radicales dicuntur *commensurabiles* inter se, seu *communicantes*, cum ad simplicem expressionem redactæ habent sub signo radicali quantitatem eandem, ut  $3\sqrt{5}$ , &  $2\sqrt{5}$ ; pa-

riter  $b\sqrt{a-b}$ , &  $c\sqrt{a-b}$ . Nam exprimi potest ratio, quam inter se habent; est enim  $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} :: 3 \cdot 2$ .

Item  $b\sqrt{a-b} \cdot c\sqrt{a-b} :: b \cdot c$ , ut patet.

VIII. Si radicale signum quodcunque comprehen-

dat sub se aliam quantitatem radicalem, ut  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ,  
 vel  $\sqrt[3]{a^2 - b\sqrt{c}}$ , radix *universalis* dicitur; & deno-  
 minatur a signo, quod totam illam quantitatem,  
 linea superducta, seu vinculo, complectitur. Sic  
 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}\sqrt{5}}$  dicitur radix universalis cubica: hoc est  
 ex quantitate  $2 + \sqrt{3}\sqrt{5}$  radicem cubicam esse extra-  
 hendam eo pacto, quo inferius docebitur.

### P R O P O S I T I O I.

*Quantitates radicales diversæ denominationis  
 ad eandem reducere.*

I. **R**educendæ sint radicales  $\sqrt[2]{a}$ , &  $\sqrt[3]{b}$  ad ean-  
 dem denominationem. Erit ex *Defin. 5.*

*Cap. 3.*  $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , &  $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$ , redactisque fractio-  
 nibus ex communi Arithmetica ad eandem denomi-

nationem, fiunt  $a^{\frac{3}{6}}$ , &  $b^{\frac{2}{6}}$ ; proinde  $a$  elevari debet  
 ad tertiam potestatem, &  $b$  ad secundam, ut indi-  
 cant novi numeratores fractionum. Signis autem  
 radicalibus præfigendus exponens 6, communis sci-  
 licet ipsarum fractionum denominator. Erunt ergo

$$\sqrt[6]{a^3}, \text{ \& } \sqrt[6]{b^2}.$$

Similiter reducendæ sint  $\sqrt[2]{2}$  &  $\sqrt[6]{20}$  ad eandem  
 denominationem. Quia  $\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ , &  $\sqrt[6]{20} = 20^{\frac{1}{6}}$  per  
*Defin. cit.* redactis fractionibus  $\frac{1}{2}$  &  $\frac{1}{6}$  ad idem no-  
 men, habentur  $\frac{6}{12}$  &  $\frac{2}{12}$ , quibus ad minores termi-  
 nos reductis, dividendo per 2, habentur  $\frac{3}{6}$  &  $\frac{1}{6}$ ;  
 unde patet, 2 ad tertiam potestatem esse elevan-  
 dum

dum, & 20 ad primam; erunt ergo  $\sqrt[6]{8}$ , &  $\sqrt[6]{20}$ .

II. Vel sic: reducendæ sint ad idem signum  $\sqrt[6]{c}$ , &  $\sqrt[6]{a}$ ; quia exponent 6 præcise divisibilis est per exponentem 2, multiplico per quatum 3 tam exponentem 2, quam quantitatem sub signo existentem  $c$ , eam elevando ad potentiam tertiam, eritque  $\sqrt[6]{c^3}$  ejusdem nominis cum  $\sqrt[6]{a}$ . Eadem ratione  $\sqrt[2]{3}$ , &  $\sqrt[4]{5}$  reductæ ad idem signum fiunt  $\sqrt[4]{9}$ , &  $\sqrt[4]{5}$ . Praxis oritur ex Coroll. Prop. 3. Cap. 2.

Ratio autem est, quia una radix non fit major, etiam si ejus potentia major fiat, hoc est ad altiorum gradum eleveur. Est enim  $a$  radix tam potentia  $a^2$ , quam potentia  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$  &c. proinde si

$\sqrt[3]{a^2}$  per multiplicationem fiat  $\sqrt[3]{a^3}$ , remanet idem valor, &  $\sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3}$ .

SCHOL. I. In reducendis ad eandem denominationem, sive ad idem signum radicalibus, quantitates, quæ sunt extra signum, non immutantur, sed manent eadem.

Reducendæ sint ad idem signum  $3\sqrt[2]{2}$ , &  $4\sqrt[3]{5}$ ; fiunt

$3\sqrt[6]{8}$ , &  $4\sqrt[6]{25}$ . Similiter  $a\sqrt[2]{b}$ , &  $c\sqrt[3]{n}$  fiunt  $a\sqrt[6]{b^3}$ ,

&  $c\sqrt[6]{n^2}$ . Nam  $a\sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{a^2b}$  per Defin. 4. hujus,

sed  $\sqrt[2]{a^2b} = \sqrt[6]{a^6b^3}$  per hanc Propos., &  $\sqrt[6]{a^6b^3}$

$= a\sqrt[6]{b^3}$  per Prop. 7. Cap. 3. Ergo  $a\sqrt[2]{b} = a\sqrt[6]{b^3}$ .

Eadem ratione  $c\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{c^3n} = \sqrt[6]{c^6n^2} = c\sqrt[6]{n^2}$ , adeoque radicalium coefficientes non mutantur. Demon-

strationem licet per se claram tirones ex dicendis magis intelligent.

SCHOL. II. Ut radicales addi, subtrahi, multiplicari, aut dividi invicem possint, eas ad idem signum prius reducere necesse est, quod notetur.

## P R O P O S I T I O II.

*Radicales ad simpliciores expressionem reducere.*

I. **D**ividatur quantitas sub signo existens per potestatem ejusdem gradus, seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale, & relicto quoto sub signo, radix potestatis, per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum: hoc est extrahatur a quantitate radicali id, quod est rationale,

& ponatur extra signum. Sit  $\sqrt{aac + aab}$ ; divide per  $a^2$ , & quoto  $c + b$  sub signo relicto, pone extra signum radicem potestatis dividendis, nempe  $a$ : erit radicalis ad simpliciores expressionem redacta

$$a \sqrt{c + b} = \sqrt{aac + aab}.$$

Sit pariter  $\sqrt[3]{54}$  reducenda ad simpliciores expressionem. Divide 54 per cubum 27, & relicto quoto 2 sub signo, pone extra signum radicem ejusdem cubi, nempe 3; erit  $3 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$ . Eadem

ratione  $\sqrt[3]{8ab}$  erit  $2a \sqrt[3]{b}$ , &  $\sqrt[n]{ab^n}$  erit  $b \sqrt[n]{a}$ .

II. Quod si quantitas radicalis sit valde composita, ita ut ex sola terminorum inspectione non innotescat, an per maximam ejusdem gradus potestatem sit divisibilis, quærantur per Prop. 9. Cap. 1. omnes illius divisores: ex illis necessario apparebit, an sit

potestas requisita. Quæritur ex. gr., an  $\sqrt[3]{120}$  sit reduci-

ducibilis ad simpliciolem expressionem . Inter ejus divisores apparet 8 , qui est tertia potestas requisita . Divide ergo 120 per 8 , & relicto quo 15 sub

signo , habebis  $2 \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$  . Item si  $\sqrt[4]{48}$  re-

ducenda sit ad simpliciolem , erit  $2 \sqrt[4]{3}$  ; nam inter divisores numeri 48 , est 16 , qui est potestas quarta quæsitæ , ac ter dividit ipsum 48 .

COROLL. I. Pro faciliori præxi divide quantitatem radicalem sub signo existentem per 2 , per 3 , per 4 &c. successive , & examina , an quoti illi sint potestas quæsitæ : quod facile agnosces , si ex illis radicem extrahas .

Sit  $\sqrt{392}$  : divide 392 per 2 , quotus 196 est quadratum ex radice 14 , per quod si divides 392 , habebis 2 , proinde  $\sqrt{392} = 14 \sqrt{2}$  . Similiter sit reducenda

$\sqrt[3]{192}$  ; divide per 3 , quotus 64 dat cubum ex latere 4 , per quem cubum dividendo 192 , habebis 3 :

ideoque  $\sqrt[3]{192} = 4 \sqrt[3]{3}$  , & sic de aliis .

COROLL. II. Ex hac propositione dignoscitur , an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles & communicantes . Nam si scire velim , an  $\sqrt{8}$  , &  $\sqrt{18}$  sint communicantes , reduco illas ad simpliciolem expressionem  $2 \sqrt{2}$  , &  $3 \sqrt{2}$  , quæ ex Defin. 6. hujus erunt inter se , ut 2 ad 3 . Ita  $\sqrt{50}$  , &  $\sqrt{18}$  reductæ , fiunt  $5 \sqrt{2}$  , &  $3 \sqrt{2}$  ; erit ergo  $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: 5 . 3$  .

SCHOL. Ut id facile obtineatur , ex quantitativibus sub signo radicali existentibus fiat fractio , quæ ad minimos terminos reducatur . Sic in superiori exemplo  $\sqrt{8}$  , &  $\sqrt{18}$  facile dignoscuntur esse commensurabiles . Nam fractio

$\frac{8}{18}$  ad minimos terminos reducta fit  $\frac{4}{9}$  . Sunt ergo  $\sqrt{8} .$

$\sqrt{18} :: \sqrt{4} . \sqrt{9} :: 2 . 3$  . Similiter ex  $\sqrt{50}$  , &

E 4

$\sqrt{18}$

$\sqrt{18}$  fiat fractio  $\frac{50}{18}$ , quæ reducitur ad minimos terminos  $\frac{25}{9}$ ; unde  $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} :: \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} :: 5 \cdot 3$ .

Demum  $\sqrt[3]{a^3b}$ , &  $\sqrt[3]{bc^3}$  eadem ratione inveniuntur esse, ut a ad c.

### P R O P O S I T I O III.

*Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.*

I. **R**adicales addendæ, aut subtrahendæ reducantur, si fieri potest, ad simpliciorum expressionem *per Prop. antec.* Si communicantes sint, quantitates rationales extra signum addantur, vel subtrahantur, ut fieri solet in quantitatibus rationalibus, & earum summa, aut differentia præponitur signo radicali. Sint addendæ quantitates  $\sqrt{50}$ , &  $\sqrt{18}$ , quæ redactæ *per Prop. cit.* sunt  $5\sqrt{2}$ , &  $3\sqrt{2}$ ; additis quantitatibus extra signum 5 & 3, earum summa erit  $8\sqrt{2}$ . Subtrahenda sit  $\sqrt{18}$  ex  $\sqrt{50}$ , hoc est  $3\sqrt{2}$  ex  $5\sqrt{2}$  *per Prop. antec.* subtrahere 3 ex 5, residuum erit  $2\sqrt{2}$ .

II. Quod si radicales addendæ, aut subtrahendæ non sint communicantes, sed incommensurabiles, summa fit per signum  $+$ , subtractio per signum  $-$ . Sic duarum  $\sqrt{2}$ , &  $\sqrt{5}$  summa erit  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ ; differentia vero  $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ . Similiter duarum

$\sqrt{a+b}$ , &  $\sqrt{a-b}$  summa erit  $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ ; differentia autem  $\sqrt{a-b} - \sqrt{a-b}$ .

III. Quod si radicales addendæ, vel subtrahendæ sint compositæ, eadem ratione operandum, ut exempla sequentia indicant.

ADDITIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6} \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \end{array}$$

SUBTRACTIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{6} + 5\sqrt{7} \\ \hline 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{6} - 8\sqrt{7} \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

*Quantitates radicales multiplicare.*

I. **M**ultiplicentur inter se quantitates extra signum, tum seorsim quantitates sub signo existentes, habebis productum quæsitum, ut  $5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$ . Similiter  $m\sqrt[3]{a} \times n\sqrt[3]{a} = mn\sqrt[3]{aa}$ .

II. Quod si radicales habeant signum radicale quadraticum  $\sqrt{\phantom{x}}$ , & sint communicantes, operatio fit brevior. Nam satis est productum, quod fit ex quantitatibus extra signum existentibus, ducere in quantitatem sub signo radicali positam. Sint multiplicandæ  $3\sqrt{2}$ , &  $5\sqrt{2}$ : duc primo inter se 3 & 5, earumque factum 15 duc in 2, erit productum 30. Oritur enim quantitas rationalis; nam  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ , adeoque  $15 \times 2 = 30$ .

Sint pariter multiplicandæ  $\sqrt{x^4 + x^2 a^2}$ , &  $\sqrt{x^2 a^2 + a^4}$ , quæ ad simpliciores terminos redactæ per Prop. 2. hujus sunt  $x\sqrt{x^2 + a^2}$ , &  $a\sqrt{x^2 + a^2}$ , proinde communicantes per Defn. 6. Duc itaque

productum  $ax \times x^2 + a^2$ , in quantitatem scilicet sub signo existentem, perinde ac forent quantitates rationales, habebis productum rationale  $ax^3 + a^2x$ .

III. Si radicalis per rationalem, aut rationalis per radicalem fit multiplicanda (idem enim est)

ex. gr.  $\sqrt{a + b} \times c + d$ ; reducatur primo rationalis  $c + d$  ad idem signum radicale, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, ita ut

fiat  $\sqrt{c^2 + 2cd + d^2}$ : multiplicetur deinde  $c^2 + 2cd + d^2$  per  $a + b$ , perinde ac essent quantitates ra-

tionales; erit productum quæsitum  $\sqrt{ac^2 + 2acd + ad^2 + bc^2 + 2bcd + bd^2}$ , quod etiam exprimi poterat

hoc modo  $c + d \sqrt{a + b}$ . Multiplicando pariter

$3 \sqrt[3]{5}$  per 2, aut per  $\frac{2}{3}$ , productum erit  $6 \sqrt[3]{5}$ , aut  $\frac{2}{3} \sqrt[3]{5}$ .

IV. Si quantitates multiplicandæ compositæ sint ex radicalibus, vel ex radicalibus simul & rationalibus; ducantur singuli termini unius per singulos alterius secundum regulas radicalium simplicium superius explicatas, servata consueta signorum + & - ratione. Exempla rem satis declarant.

$$\begin{array}{r|l} \text{I. } \sqrt{5} + \sqrt{3} & \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} & \\ \hline 5 + \sqrt{15} & \\ - \sqrt{15} - 3 & \\ \hline 5 - 3 = 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{II. } 3 + 2\sqrt{5} & \\ 5 - 3\sqrt{5} & \\ \hline 15 + 10\sqrt{5} & \\ - 9\sqrt{5} - 30 & \\ \hline + \sqrt{5} - 15 & \end{array}$$

III:

$$\text{III. } \frac{2a + \sqrt{a+x}}{b - \sqrt{a+x}}$$

$$2ab + b\sqrt{a+x}$$

$$- 2a\sqrt{a+x} - a + x$$

$$2ab + b\sqrt{a+x} - 2a\sqrt{a+x} - a + x$$

Ratio multiplicandi quantitates radicales ita generatim demonstratur. Sit multiplicanda  $\sqrt{3}$  per  $\sqrt{2}$ ; dico, productum esse  $\sqrt{6}$ . Nam ex definitione multiplicationis ita debet esse unitas ad multiplicantem ( $\sqrt{2}$ ), ut multiplicandus ( $\sqrt{3}$ ) ad productum, quod voco  $P$ ; erit ergo  $1. \sqrt{2} :: \sqrt{3}. P$ ; & in eadem ratione erunt eorum quadrata, nempe  $1. 2 :: 3. P^2$ , sed  $1. 2 :: 3. 6$ , ergo  $P^2 = 6$ . &  $P = \sqrt{6}$ . Quod erat &c.

COROLL. I. Quod si binomium radicale quadraticum multiplicetur per se ipsum, mutato tamen in alterutro factore signo  $+$  in  $-$ , vel contra  $-$  in  $+$ , oritur monomium rationale, ut in primo exemplo  $\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3}$  producit quantitatem rationalem  $2$ , & hoc dicitur binomium multiplicari per sui contrarium, de quo inferius.

COROLL. II. Si trinomium radicale quadraticum, ex gr.  $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$  multiplicetur per seipsum, mutato aliquo ex signis, ut per  $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$ , oritur binomium partim radicale, partim rationale, ut  $3 + \sqrt{48}$ , quod per Coroll. I. ad monomium omnino rationale facile reducitur.

SCHOL. Si radicales signum diversum habeant, prius reducentur ad idem signum ex dictis Schol. 3. Prop. 1. hujus, deinde fiet multiplicatio ut supra. Sint multipli-

plicanda  $\sqrt[2]{5} \times \sqrt[3]{7}$ , erunt reductæ per Propos. 1. hujus  $\sqrt[6]{125}$ , &  $\sqrt[6]{49}$ , earumque productum  $\sqrt[6]{6125}$ .

### P R O P O S I T I O V.

*Quantitates radicales dividere.*

I. **S**I divisor & dividendus sint communicantes, factis est dividere quantitates extra signum; quotus est quantitas rationalis. Sic ad dividendum  $6\sqrt{3}$  per  $3\sqrt{3}$ , diviso 6 per 3, quotus est 2. Similiter  $4\sqrt{2}$  diviso per  $2\sqrt{4}$ , habetur quotus 2. Eadem ratione

$\frac{a\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a+b}}$  diviso per  $b\sqrt{a+b}$ , habetur pro quotus  $\frac{a}{b}$ .

Quod sic demonstratur. Ponantur sub signo quantitates 6 & 3: erit  $6\sqrt{3} = \sqrt{108}$  &  $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ . Dividatur jam  $\sqrt{108}$  per  $\sqrt{27}$ , hoc est 108 per 27, quotus est  $\sqrt{4} = 2$ . Quod &c. Simi-

liter positis sub signo  $a$  &  $b$ , erit  $\frac{a\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a^3 + a^2b}}{\sqrt{ab^2 + b^3}}$ ,

& dividendo  $\sqrt{a^3 + a^2b}$  per  $\sqrt{ab^2 + b^3}$  ( hoc est  $a^3 + a^2b$  per  $ab^2 + b^3$ , ut fit in rationali-

bus ), erit quotus  $\frac{\sqrt{aa} \cdot a}{\sqrt{bb} \cdot b} = \frac{a}{b}$ . Quod &c.

II. Si divisor & dividendus non fuerint communicantes, dividantur seorsim quantitates extra signum, & seorsim, quæ sub signo existunt. Sic ad dividendum  $6\sqrt{ab}$  per  $2\sqrt{a}$  habetur quotus  $3\sqrt{b}$ . Item dividendo  $\sqrt{6}$  per

per 2  $\sqrt{3}$ , quotus erit  $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ . Demum  $\sqrt{15}$  per  $\sqrt{3}$  dat quotum  $\sqrt{5}$ .

III. Quod si dividenda sit quantitas radicalis per rationalem, vel e contrario: temper quantitas rationalis ad radicalem reducatur, eam scilicet elevando ad potestatem ejusdem gradus, & ponendo illam sub signo radicali. Ut si dividenda sit  $a$  per

$\sqrt[3]{ab}$ , elevetur  $a$  ad tertiam potestatem, ita ut fiat

$$\sqrt[3]{a^3}, \text{ quæ divisa per } \sqrt[3]{ab} \text{ dabit quotum } \frac{\sqrt[3]{aa}}{\sqrt[3]{b}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{aa}{b}}, \text{ ut in sequenti Schol. I. hujus.}$$

Ratio dividendi radices ita generatim demonstratur. Dividenda sit radicalis  $\sqrt{15}$  per  $\sqrt{3}$ ; dico, quotum esse  $\sqrt{5}$ . Nam ex communi divisionis definitione divisor ad dividendum est, ut unitas ad quotum, quem voco  $Q$ : hoc est,  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} :: 1 \cdot Q$ ; & in eadem ratione sunt eorum quadrata,  $3 \cdot 15 :: 1 \cdot Q^2$ . Sed  $3 \cdot 15 :: 1 \cdot 5$ , ut patet; proinde  $Q^2 = 5$ , &  $Q = \sqrt{5}$ . Quod erat &c.

SCHOL. I. Si radicalium divisio exprimat per modum fractionis; (quod non raro fit) tunc signum radicale vel seorsim numeratori, & seorsim denominatori preponitur, ut superiora exempla docent; vel toti fra-

$$\text{ctioni, scilicet } \sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \text{ \&c.}$$

SCHOL. II. Si ex denominatore tantum, vel ex solo numeratore extrahi possit radix, utique extrahitur, sed

alteri signum radicale prefigitur. Sit  $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}}$ ; facta di-

visio-

visione, erit  $\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{b}}$  extractaque ex numeratore radice, fit

$\frac{x}{\sqrt{b}}$ . Similiter ex  $\sqrt{\frac{cb}{a^2 b}}$  facta divisione, oritur

$\sqrt{\frac{c}{a^2}}$ , & extracta ex denominatore radice, habetur  $\frac{\sqrt{c}}{a}$ .

## PROPOSITIO VI.

*Radicales compositas dividere.*

I. **D**ividenda sit radicalis composita  $\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}$  per  $\sqrt{3}$ . Dividantur singula trinomiali membra per  $\sqrt{3}$ , ut radicales simplices per *Prop. prac.* erit quotus  $\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$ . Eadem ratione dividendo per  $\sqrt{5}$  radicalem  $\sqrt{20} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$ , erit quotiens  $2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ . Rursus dividendum sit trinomiali  $10\sqrt{2} + 2\sqrt{15} - 3\sqrt{35}$  per 4, erit quotus  $\frac{5}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{3}{4}\sqrt{35}$ .

II. Quod si dividere oporteat binomiali  $A$  ex rationali quantitate & radicali compositum per aliud binomiali simile  $B$ , divisa quantitate rationali 8 per rationalem 2, habetur quotus  $C$ , per quem multiplicando totum divisorem  $B$ , productum  $8 + 4\sqrt{1}$  subducitur (mutatis signis) ex dividendo  $A$ , & nihil remanet. Idem fit in secundo exemplo. In tertio autem per eundem divisorem  $N$  dividitur fractionis  $M$  tam numerator, quam denominator,

tor, ut habeatur fractio in minimis terminis, ut in Q, quo exemplo infra utemur.

$$\text{EXEMPL. I.} \quad \begin{array}{r} \text{B} \qquad \qquad \qquad \text{A} \qquad \qquad \qquad \text{C} \\ 2 + \sqrt{1} \quad 8 + 4\sqrt{1} \quad (+4 \\ 8 + 4\sqrt{1} \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\text{EXEMPL. II.} \quad \begin{array}{r} -1 + \sqrt{-\frac{3}{4}} \quad 2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}} \quad (-2 \\ 2 - 2\sqrt{-\frac{3}{4}} \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\text{N } aa+cc) \frac{\overset{M}{a^3 \sqrt{aa+cc} + a^2 c \sqrt{aa+cc}}}{2aa+2cc} \quad \left| \quad \frac{\overset{Q}{a\sqrt{aa+cc}}}{2} \right.$$

seu  $\frac{1}{2} a\sqrt{aa+cc}$

III. At si divisor fit binomium radicale ex. gr.  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ , per quod dividenda fit quantitas  $\sqrt{18}$ ; tunc binomium illud reducatur ad monomium rationale per *Cor. 1. Prop. 4. hujus*, multiplicando illud per sui contrarium  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ , habebitur novus divisor  $5 - 2 = 3$ . Deinde per idem contrarium  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$  multiplicetur quoque quantitas dividenda, nempe  $\sqrt{18}$ , ut inter ipsam & divisorem maneat idem valor, qui antea, per *Axiom. 2. Cap. 2.* Exemplo res fit manifesta.

$\begin{array}{r} \text{Divisor } \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ \hline 5 - \sqrt{10} \\ + \sqrt{10} - 2 \\ \hline 5 - 2 = 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{Dividen.} \quad + \sqrt{18} \\ \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ \hline 3 \ ) \quad \sqrt{90} + 6 \\ \text{Quotus } \frac{1}{3} \sqrt{90} + 2 \end{array}$
--	---

Ratio clara est, si ex diviſore & dividendo fiat fractio, & tam numerator, quam denominator multiplicentur per eandem quantitatem. Sit enim dividenda radicalis quantitas  $A$  per trinomium radicale  $B$ ; fiat fractio, nempe

$$\frac{A}{B \sqrt{3} + \sqrt{1} + \sqrt{2}}$$

Multiplicato utroque fractionis termino per denominatorem  $B$  (uno tantum signo mutato), oritur nova fractio æqualis priori per *Axiom. 2. Cap. 2.* hoc est

$$\frac{C \sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{10}}{D \quad 2 + \sqrt{12}}$$

Multiplicetur pariter uterque terminus hujus novæ fractionis per denominatorem  $D$  (mutato signo), oritur nova fractio priori æqualis per *Axiom. cit.*, in qua divisor est quantitas rationalis, scilicet

$$2\sqrt{15} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{180} - \sqrt{60} + \sqrt{120}$$

— 8

Factaque actu divisione, erit quotus

$$-\frac{1}{2}\sqrt{15} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{2}{4}\sqrt{10} + \frac{2}{8}\sqrt{180} + \frac{2}{8}\sqrt{60} - \frac{2}{8}\sqrt{120}$$

Item, ut dividatur  $a-b$  per  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ , fit fractio

$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ , cujus termini per  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$  multiplicati dant

$$a-b \times \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

— : fiat divisio, erit quotus  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

$a-b$

SCHOL. I. Si divisor sit binomium, aut trinomium constans radicalibus cubicis, aut altiorum potestatum, hæc regula non sufficit. Tunc invenienda est aliqua quantitas, quæ divisor contrarius dicitur, per quam si tale binomium, aut trinomium multiplicetur, fiat rationale.

En

En methodus generalis inveniendi ejusmodi divisores contrarios. Quantitates sub signo radicali existentes, mutato aliquo signo, eleventur ad potestatem, cujus exponens sit unitate minor exponente radicali, neglectisque coefficientibus, habetur quantitas quasita. Sit binomium

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ , elevetur  $a - b$  (mutato scilicet signo) ad potestatem secundam, que neglectis coefficientibus, erit  $a^2 - ab + b^2$ , eaque posita sub signis radicalibus dati binomii, habetur divisor contrarius  $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ .

Similiter sit datum binomium  $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ , elevetur  $a - b$  ad tertiam potestatem, & abjiciantur coefficientes, oritur quantitas  $a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3$ , qua sub signis radicalibus binomii posita, habetur divisor contrarius

$\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2 b} + \sqrt[4]{ab^2} - \sqrt[4]{b^3}$ ; & sic de aliis.

SCHOL. II. Ceterum hujusmodi divisiones radicalium compositarum, ut monet Cl. Wolfius (a), aut vix, aut perraro occurrunt. Sed quia ejus methodus, quam Nicolao Tartaleæ (b) debemus, est non inelegans, haud erat omnino negligenda.

## PROPOSITIO VII.

*Radicales ad datam potestatem elevare.*

I. **R**egula est: quantitates sub signis existentes ad datam potestatem attolluntur per Prop. 2., vel 3. Cap. 3. radicali signo minime variato.

Sic radicalis  $\sqrt[3]{a}$  elevata ad quadratum erit  $\sqrt[3]{a^2}$ .

Radicalis  $\sqrt[2]{b}$  elevata ad cubum erit  $\sqrt[2]{b^3}$ . Item

F  $\sqrt[3]{3}$

(a) Elemen. Analy. edit. 2. Probl. 13. schol. 1.

(b) De Num. & mensuris par. 2. l. 5. Cap. 4.

$\sqrt[2]{3}$  elevata ad quartam potestatem fit  $\sqrt[2]{81}$ .

Ratio est, quia ex communi lege multiplicationis radicalium  $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$ . Similiter  $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{b^2}$  per *Prop. 4. hujus*.

II. Si adsit quantitas extra signum, illa quoque ad datam potestatem elevatur per *Prop. 2. vel 3.*

*Cap. 3.* Sic radicalis  $a\sqrt[3]{c}$  ad quadratum elevata, erit  $a^2\sqrt[3]{c^2}$ . Nam  $a\sqrt[3]{c} \times a\sqrt[3]{c} = a^2\sqrt[3]{c^2}$ . Eadem ratione  $2\sqrt[2]{a}$  ad cubum evecta erit  $8\sqrt[2]{a^3}$ . Nam  $2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} = 8\sqrt[2]{a^3}$  per *Prop. 4. hujus*.

III. Si radicales ad datam potestatem elevandæ sint complexæ, elevantur ad illam eadem omnino ratione, qua elevantur quantitates rationales; hoc est, si elevandæ sint ad quadratum, sumi debent quadrata partium, & duplum ejus, quod oritur ex mutua earundem partium multiplicatione per *Cor. Prop. 8. Cap. 3.* Si ad cubum, sumi debent cubi partium, triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum primæ per secundam, & triplum ejus, quod oritur multiplicando vicissim quadratum secundæ per primam per *Cor. Prop. 9. Cap. 3.* Atque ita deinceps.

Sic radicalis  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$ , ut ad secundam potestatem elevetur, fiant per primam partem *Prop. hujus* quadrata partium, nempe  $\sqrt[3]{a^2}$ , &  $\sqrt[3]{c^2}$ , earumque factum duplum  $2\sqrt[3]{ac}$ , proinde erit  $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}$ . Similiter  $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$  ad secundam potestatem evecta

erit  $a + b - 2\sqrt[3]{ab}$ . Si vero  $\sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$  elevanda sit ad

ad cubum, fiant primo per primam partem *Prop.* hujus cubi ex  $\sqrt{a}$ , &  $\sqrt{b}$ , nempe  $\sqrt{a^3}$ , &  $\sqrt{b^3}$ ; sumatur triplum ex multiplicatione quadrati primæ radicalis, nempe  $a$ , in secundam, hoc est  $3a\sqrt{b}$ , & vicissim triplum quadrati secundæ, nempe  $b$ , ducti in primam, hoc est  $3b\sqrt{a}$ , inque additis, erit  $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$ . Eadem ratione  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  ad cubum everta erit  $\sqrt{27} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \sqrt{8}$ ;

SCHOL. I. Cum radicales simplices considerari possint ut potentie imperfectæ per *Defin.* 5. *Cap.* 3. elevari possunt ad quamcunque datam potestatem, sumendo duplum, triplum, quadruplum &c. earum exponentium, si ad secundam, ad tertiam, vel quartam potestatem elevanda

sint. Nam sit  $\sqrt{a}$  ad tertiam potestatem elevanda, per

*Defin.* cit. est  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , & sumendo triplum hujus

exponentis, erit  $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ . Hoc autem sequitur ex

*Prop.* 1. *Cap.* 3. Nam  $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ .

SCHOL. II. Si radicalis elevanda sit ad potestatem, cujus exponens idem sit cum exponente ejusdem radicalis, oritur quantitas rationalis. Proinde satis est delere si-

gnum radicale. Nam  $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$ . Sic etiam

$\sqrt[3]{2}$  ad cubum everta erit 2. Nam  $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} =$

$\sqrt[3]{8} = 2$ . Quod etiam ex *Schol.* 1. inferitur. Nam

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , proinde  $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a$ . Pariter  $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$ ,

quæ ad tertiam potestatem everta fit  $c^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = c^{\frac{3}{3}} = c$ .

## PROPOSITIO VIII.

*Ex simplici radicali radicem extrahere.*

I. **E**Xtrahenda sit radix quadrata ex  $\sqrt{a}$ . Quia per *Defin. 5. Cap. 3.*  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ , dividatur per exponentem radicis quæsitæ exponens ipsius  $a^{\frac{1}{2}}$ , erit radix quadrata quæsitæ  $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ .

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex  $\sqrt[3]{a}$ . Quia per *Defin. cit.*  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ , dividendo per exponentem radicis quæsitæ exponentem ejusdem  $a^{\frac{1}{3}}$ , erit radix quæsitæ  $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$ .

II. Demum quæritur radix cubica quantitatis  $\sqrt{a}$ . Quia  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$  si dividatur per exponentem radicis quæsitæ 3 exponens ipsius  $a^{\frac{1}{2}}$ , erit radix cubica  $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$ .

**COROLLE.** *Hinc patet, ad extrahendas ejusmodi radices satis esse multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem radicis quæsitæ. Sic radix quinta quantitatis  $\sqrt[2]{2}$  erit  $\sqrt[10]{2}$ . Vel etiam exprimi potest sic  $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2}}$ ,  $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}$ ,  $\sqrt{\sqrt[2]{2}}$  &c.*

## PROPOSITIO IX.

*Ex binomio radicem quadratam extrahere.*

I. **E**Xtrahenda sit radix quadrata ex binomio dato  $7 + \sqrt{48}$ . Primo auferatur quadratum mi-

minoris termini ex quadrato majoris, hoc est 48 ex 49 quadrato, quod fit ex termino rationali 7. Secundo extrahatur ex differentia horum quadratorum (quæ hic est 1) radix quadrata, nempe 1, quam adde termino rationali, habebis 8, & ab eodem subtrahe, habebis 6. Summæ hujus & differentię semisses; hoc est 4 & 3 dant radicem quadratam

dati binomii, nempe  $\sqrt{4} + \sqrt{3}$ , seu  $2 + \sqrt{3}$ .

Similiter quæritur radix quadrata binomii  $8 - \sqrt{60}$ . Differentia quadratorum est 4, ejus radix quadrata 2. Hanc adde termino rationali, habebis 10: subtrahe ab eodem, habebis 6. Semisses ipso-

rum 10 & 6 dant radicem quæsitam  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ .

II. Sit pariter extrahenda radix quadrata ex binomio  $a + b - 2\sqrt{ab}$ ; ex quadrato  $a^2 + 2ab + b^2$  primi termini aufer  $4ab$  quadratum secundi termini  $- 2\sqrt{ab}$ , erit differentia  $a^2 - 2ab + b^2$ , cujus radix quadrata est  $a - b$ . Hanc adde termino rationali  $a + b$ , summa erit  $2a$ : subtrahe ex eodem termino, differentia erit  $2b$ . Horum semisses  $a$  &  $b$

dant radicem quæsitam  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .

Ex hoc tertio exemplo facile eruitur demonstratio. Nam si binomium  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  eleveur ad secundam potestatem, habetur  $a + b - 2\sqrt{ab}$ ; ubi apparent duo termini, alter rationalis continens summam radicum  $a + b$ , alter irrationalis continens duplum facti earundem radicum. Ex quadrato autem  $a^2 + 2ab + b^2$ , quod fit ex termino rationali, si auferatur quadratum secundi termini, nempe  $4ab$ , residuum  $a^2 - 2ab + b^2$  est pariter quadratum, cujus radix quadrata  $a - b$  est differentia quadratorum  $a$  &  $b$ . Hęc igitur differentia  $a - b$  addita ad eorum summam  $a + b$  dat  $2a$ ,

duplum scilicet quadrati ex  $\sqrt{a}$ ; eademque differentia  $a - b$  subducta ex eorum summa  $a + b$  relinquit  $2b$ , duplum quadrati alterius membri  $\sqrt{b}$ ; proinde horum semisses  $a$  &  $b$  dant terminos radicis

quæsitæ  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ .

COROLL. Hinc infertur, tria requiri, ut radix quadrata extrahi possit ex binomio radicali quadratico. Primo binomium constare non potest solis radicalibus, sed uno membro rationali, & altero radicali. Nam si ve fiat quadratum ex duobus terminis radicalibus, ut  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , si ve ex rationali & radicali, ut  $3 + \sqrt{5}$ ; semper oritur binomium continens terminum rationalem, & alterum radicalem. Secundo terminus rationalis, seu quadratum illius semper debet esse majus termino radicali, qui ab eo debet subtrahi. Tertio differentia quadratorum, quæ fiunt ex termino rationali & radicali, debet esse quadratum. Hæc omnia ex allatis exemplis satis patent.

SCHOL. De radice cubica, aliisque altioris gradus ex dato binomio, aut polynomio extrahendis, commodiori loco agemus. Ceterum si radix quadrata defectu earum conditionum extrahi nequeat ex dato binomio, tunc ejus binomii radix exprimitur signo radicali, quod utrumque binomii terminum comprehendit. Sic radix qua-

drata binomii  $1 + \sqrt{3}$  erit  $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ . Idem dicendum de cubica, aliisque altioribus radicibus, si extrahi nequeant. Tunc enim radix cubica binomii  $2 - \sqrt{7}$

erit  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{7}}$  &c. quæ quidem radices ita connexæ dicuntur radices universales, de quibus inferius.

PROPOSITIO X.

Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.

I. **D**esignet  $A$  majorem dati binomii partem,  $B$  vero partem minorem; erit ex Newtono in

*Arithmetica Universalis*  $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2}$  quadratum majoris partis quæsitæ radiceis, &  $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$

quadratum partis minoris, quæ cum majori annectenda est cum signo ipsius  $B$ .

Extrahenda sit radix ex binomio  $5 + \sqrt{24}$ : ponatur  $A = 5$ , &  $B = \sqrt{24}$ , erit  $\sqrt{AA - BB}$

$= 1$ ; proinde  $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{5 + 1}{2}$  hoc est  $3$ ,

quadratum majoris partis radiceis; &  $\frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$

$= \frac{5 - 1}{2} = 2$ , quadratum partis minoris. Horum

radices dant radicem quæsitam  $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ .

II. Rursum extrahenda sit radix ex binomio  $rr + 2x$

$\sqrt{rr - xx}$ . Ponatur  $A = rr$ , &  $B = 2x \sqrt{rr - xx}$ ; erit  $AA - BB = r^4 - 4rrxx + 4x^4$ , cujus radix

$rr - 2x^2 = \sqrt{AA - BB}$ : proinde  $\frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} =$

$$= \frac{2rr - 2xx}{2} = rr - xx. \text{ Similiter } \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2}$$

$= xx$ . Ex horum radicibus habetur dati binomii radix  $x + \sqrt{rr - xx}$ .

III. Sit polynomium  $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ , seu in terminis simplicioribus  $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$  per *Prop. 2. hujus*. Intelligatur divisum in duo binomia; & ponatur  $10 + 2\sqrt{6} = A$ , &

$2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} = B$ , erit  $\sqrt{AA - BB} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$  per *Prop. cit.* Nam si quadratum secundi termini  $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$ , quod in terminis simplicioribus est  $100 + 40\sqrt{6}$ , auferatur ex quadrato primi termini  $10 + 2\sqrt{6}$ , quod pariter in terminis simplicioribus est  $124 + 40\sqrt{6}$ , residuum erit  $24$ , hoc est  $2\sqrt{6}$  per *Prop. cit.* Addatur ergo hoc residuum  $2\sqrt{6}$  ad primum terminum  $10 + 2\sqrt{6}$ ,

$$\text{erit } \frac{A + \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Ex hoc autem binomio si ex prima parte *hujus Propos.* eruatur radix, habebitur  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ . Aufertur jam residuum ipsum  $2\sqrt{6}$  ex primo termino

$$10 + 2\sqrt{6}, \text{ erit } \frac{A - \sqrt{AA - BB}}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

cujus radix quadrata, hoc est  $\sqrt{5}$ , si priori jam inventæ addatur, erit polynomii propositi radix quaesita  $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ .

*Demonstratio* hujus methodi eadem est, ac superioris, ut consideranti patet.

PROPOSITIO XI.

*Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciores expressionem reducere.*

I. **R** Educentur ad idem nomen radicales universales eodem modo, quo aliae radicales, ut in *Prop. 1. hujus*. Sed claritatis gratia reducendae

sint ad eandem denominationem  $\sqrt{b} + \sqrt{cd}$ , &

$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{bc}$ . Fractiones radicalium exponentiales  $\frac{2}{3}$  &  $\frac{1}{3}$  reducantur ad idem nomen, ut fit in communi Arithmetica, erunt novi exponentes  $\frac{3}{6}$  &  $\frac{2}{6}$ ,

qui docent, signum radicale commune esse  $\sqrt[6]{\phantom{x}}$ , &

quantitatem  $b + \sqrt{cd}$  elevandam esse ad tertiam

potestatem; quantitatem vero  $a - \sqrt[3]{bc}$  ad secundam. Facta itaque operatione, habentur aliae duae radicales universales aequales prioribus & ejusdem

nominis nempe  $\sqrt[6]{b^3 + 3cbd + 3b^2 + cd} \times \sqrt[6]{cd}$

&  $\sqrt[6]{a^2 - 2a\sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{b^2c^2}}$ .

Radicales autem illae, quae sub signo universalibus  $\sqrt[6]{\phantom{x}}$  comprehenduntur, hoc est  $\sqrt[6]{cd}$ ,  $\sqrt[3]{bc}$ , &  $\sqrt[3]{b^2c^2}$

reduci facile possunt ad idem signum  $\sqrt[6]{\phantom{x}}$  per *Schol.*

*Prop. 1. hujus*: erunt  $\sqrt[6]{cd} = \sqrt[6]{c^2d^3}$ ,  $\sqrt[3]{bc} =$

$\sqrt[6]{b^2c^4}$ , &  $\sqrt[3]{b^2c^2} = \sqrt[6]{b^4c^4}$ .

II.

II. Reducenda fit ad simplicio<sup>rem</sup> expressionem  
 radicalis universalis ex. gr.  $\sqrt{a^2b + a^2c}\sqrt{d}$ . Divi-  
 datur  $a^2b + a^2c$  per  $a^2$ ; & relicto quoto sub signo  
 universali, ponatur  $a$  extra signum, fiet  $a\sqrt{b + c}\sqrt{d}$   
 ad terminos simpliciores redacta.

Similiter fit radicalis universalis  $\sqrt{b^2c + b^2c^2d}$   
 reducenda ad simplicio<sup>rem</sup>. Reducantur primo  $\sqrt{b^2c^2d}$ ,  
 dividendo illam per  $b^2c^2$ , fiet  $b^2c\sqrt{d}$ , quæ si  
 reponatur sub signo universali, erit  $\sqrt{b^2c + b^2c}\sqrt{d}$ :  
 hac demum ad simplicio<sup>rem</sup> redacta, eam scilicet  
 dividendo per  $b^2$ , habebitur  $b\sqrt{c + c}\sqrt{d}$ , id quod  
 quærebatur. Si fuerit  $\sqrt{8 + 4}\sqrt{3}$ , erit eadem ratio-  
 ne  $2\sqrt{2 + 2}\sqrt{3}$ . Similiter  $\sqrt{9}\sqrt{12}$  fiet  
 $3\sqrt{2}\sqrt{3}$ .

COROLL. I. Si habeatur radicalis universalis  $a\sqrt{b + c}\sqrt{d}$ ,  
 & ponenda sit sub signo universali quantitas  $a$ , mul-  
 tiplicari debet per secundam potestatem ipsius  $a$ , nempe  
 per  $a^2$ , tota quantitas  $b + c$ ; unde oritur  $\sqrt{a^2b + a^2c}\sqrt{d}$ .  
 Quod si iterum quantitas  $a^2c$  ponenda esset sub secundo  
 signo, elevanda hæc esset pariter ad secundam potestatem,  
 & tunc haberetur  $\sqrt{a^2b + a^4c^2d}$ . Hinc luculen-  
 ter apparet ratio explicata reductionis.

COROLL. II. Hoc totum convenit tam radicalibus uni-  
 ver-

versalibus, quæ habent idem signum radicale  $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}$ ,

quam iis, quarum exponens est diversus, ut  $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b}$ ,  
habita tamen ratione eorum, quæ dicta sunt in Prop. 2.  
hujus de reductionibus.

P R O P O S I T I O XII.

*Radicalium universalium calculus.*

I. **U**T addantur, & subtrahantur, reduci semper debent ad idem nomen, & ad simpliciorum expressionem, si fieri possit, per Prop. antec. Deinde per signa + & - habetur additio, vel subtractio, ut in ceteris radicalibus. Sint addenda

$$\begin{aligned} & \underline{3\sqrt{a+b}\sqrt{c}} \text{ \& } \underline{2\sqrt{bc}+\sqrt{d}}, \text{ summa erit } \underline{3\sqrt{a+b}\sqrt{c}} \\ & + \underline{2\sqrt{bc}+\sqrt{d}}; \text{ residuum erit } \underline{3\sqrt{a+b}\sqrt{c}} - \\ & \underline{2\sqrt{bc}+\sqrt{d}}. \end{aligned}$$

II. Quod si radicales habeant sub signis quantitates easdem, adduntur, vel subtrahuntur earum coefficientes.

Sic  $\underline{\sqrt{8}+\sqrt{6}}$ , &  $\underline{\sqrt{18}+\sqrt{6}}$  (quæ sunt  $\underline{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ , &  $\underline{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$  per Propos. antec.) summa erit  $\underline{5\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ ; residuum vero (subtrahendo primam ex secunda) erit  $\underline{1\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ .

III. Sit multiplicanda  $\underline{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$  per  $\underline{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ , deleto signo universalis, multiplicantur mutuo quantitates, & facto præfigitur signum radicale universale.

EXEM-

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r}
 3 + \sqrt{5} \\
 2 + \sqrt{2} \\
 \hline
 6 + 2\sqrt{5} \\
 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} \\
 \hline
 \sqrt{6} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10}
 \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{27}p^3 \\
 \hline
 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{27}p^3 \\
 \hline
 \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{27}p^3 \\
 + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 \\
 \hline
 \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \frac{1}{27}p^3 + q\sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{27}p^3
 \end{array}$$

IV. Si vero radix universalis per se ipsam multiplicanda sit, & signum universale sit potentiae secundae hoc est  $\sqrt{\quad}$ , tunc habetur productum, deleto signo ipso universali, quod praecedit, reliquis radicalibus, cujuscumque gradus sint, minime immu-

tatis. Sic  $\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{101} \times \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{101}$ , deleto signo universali, dat productum  $\frac{5}{4} + \sqrt{101}$ .

Similiter  $\sqrt[2]{7} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{5} \times \sqrt[2]{7} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{5}$  dat productum  $7 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{5}$ . Ratio est, quia summa illa ter-

terminorum  $7 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{5}$  ex hypothefi erāt quadratum. Deleto itaque figno radicali quadratico, habetur quadratum, hoc eſt, quantitas illa in ſe duſta.

V. Dividenda ſit radicalis univerſalis  $\sqrt{15} + \sqrt{7}$  per  $\sqrt{3}$ ; diviſis 15 per 3, & 7 per 3, habentur quoti 5 &  $\frac{7}{3}$ : quibus ſi præponantur ſigna radicalia, erit quotus quæſitus  $\sqrt{5} + \sqrt{\frac{7}{3}}$ .

VI. Quod ſi diviſor ſit binomium, aut polynomium, ut ſi dividenda ſit  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  per  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , deleto ſigno univerſali, multiplicatur per quantitatem contrariam tam diviſor, quam dividendus, ut docuimus *Prop. 6. hujus*. Fiet novus diviſor = 1,

& dividendus  $\sqrt{6} + \sqrt{20} - \sqrt{27} - \sqrt{15}$ . Ecce exemplum

Diviſor	$\begin{array}{r} 2 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \\ \hline 4 + 2\sqrt{3} \\ - 2\sqrt{3} - 3 \\ \hline 4 - 3 = 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 + \sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{3} \\ \hline 6 + 2\sqrt{5} \\ - 3\sqrt{3} - \sqrt{15} \\ \hline \end{array}$
Quantitas dividen.	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline \sqrt{6} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - \sqrt{15} = \\ \hline 2 \end{array}$	$\sqrt{6} + \sqrt{20} - \sqrt{27} - \sqrt{15}.$

SCHOL. Ceterum huiusmodi calculus raro occurrit. Interea tamen tirones in eodem exerceri non erit inutile.

PROPOSITIO XIII.

Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire.

I. **R**Adices imaginariæ ad idem ſignum radicale, & ad ſimplicioſiorem expreſſionem, ſi fieri id poſ-

possit, reducuntur; tum etiam adduntur, & invicem subtrahuntur iisdem omnino regulis, quas pro ceteris radicalibus tradidimus, ideoque iis non immoramur.

II. Si vero multiplicandæ sint, & ambæ habeant sub signo eandem quantitatem, observetur, an signa radicalia præferant idem signum  $+$ , aut  $-$ , an vero diversum. Nam in primo casu productum erit reale negativum, in secundo reale positivum. Ecce exempla

$$\begin{aligned} +1\sqrt{-a} \times +1\sqrt{-a} &= +1 \times -a = -a \\ -1\sqrt{-a} \times -1\sqrt{-a} &= +1 \times -a = -a \\ +1\sqrt{-a} \times -1\sqrt{-a} &= -1 \times -a = +a \end{aligned}$$

Idem omnino fit, etiamsi desit unitas, quæ semper intelligitur adesse tanquam radicalium coefficientis, si nullum aliud adsit coefficientis, scilicet

$$\begin{aligned} +\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a} &= + \times -a = -a \\ -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} &= + \times -a = -a \\ +\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} &= - \times -a = +a \end{aligned}$$

Ratio horum est, quia quod oritur ex  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ , semper est  $-a$ , utpote quadratum negativum. Sed hoc ipsum productum negativum duci debet ulterius in signum illud  $+$ , aut  $-$ , quo signa radicalia afficiuntur; proinde ex communi lege multiplicationis ducendo  $-a$  in  $+$ , habetur  $-a$ , ut in primo & secundo exemplo, & in utroque casu restituitur quantitas realis negativa  $-a$ . At vero ducendo  $-a$  in  $-$ , oritur quantitas positiva  $+a$ , ut in tertio exemplo.

III. Si vero quantitas sub signo non est eadem, aut si multiplicanda sit radix imaginaria per realem; ut tollatur omne æquivocum, præstat factum exprimere per signum multiplicationis  $\times$ . Multiplicanda sit  $a\sqrt{-a}$  per  $-\sqrt{-b}$ , productum erit  $-a\sqrt{-a}$   
 $\times\sqrt{-b}$

$\times \sqrt{-b}$ , non autem  $-a\sqrt{+ab}$ . Per multiplicationem enim radicalium imaginariarum non oritur quantitas realis negativa, nisi cum ipsa radix imaginaria elevatur ad potestatem, cujus exponents sit idem cum exponents signi radicalis. Sic  $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$  producit quantitatem realem negativam  $-a$ , ut supra explicavimus. In aliis vero casibus habetur

quantitas imaginaria; ut si multiplicetur  $\sqrt{-b}$  per  $\sqrt{b}$ , productum, quod oritur,  $\sqrt{-b^2}$  continet radicem imaginariam, ita ut si ponere velis  $b$  extra signum, necessario exprimi debeat  $b\sqrt{-1}$ ; ut nimirum servetur ratio radicis imaginariæ; nec ipsa quantitas imaginaria  $b$  confundatur cum quantitatibus realibus. Preinde ad evitandam confusionem, quæ dari facile posset, præstat multiplicationem peragere signo  $\times$ . Ecce exempla

$$\begin{aligned}
 + c\sqrt{a} \times -\sqrt{-b} &= -c\sqrt{ab} & a \times \sqrt{-b} \\
 + 2\sqrt{3} \times -1\sqrt{-5} &= -2\sqrt{15} & 3 \times \sqrt{-5} \\
 + 3\sqrt{-c} \times -2 &= -6\sqrt{-c}
 \end{aligned}$$

IV. Simili ratione expedit divisionem per modum fractionis exprimere, ad confusionem evitandam. Di-

videndo  $\sqrt{-a}$  per  $\sqrt{-b}$ , quotus erit  $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ . Item

dividendo  $\sqrt{-3}$  per  $\sqrt{-5}$ , erit quotus  $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$ . Sic

$\frac{c}{\sqrt{-a}}$  &  $\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{-m}}$  significant quantitatem realem divi-

sam per imaginariam, & imaginariam per realem, ut patet.

V. Quod si eadem quantitas imaginaria tam in numeratore, quam in denominatore reperitur, ex communi lege divisionis utrinque deletur. Sic divi-

den-

dendo  $a\sqrt{-d}$  per  $b\sqrt{-d}$ , scribitur  $\frac{a\sqrt{-d}}{b\sqrt{-d}}$ , quotus erit  $\frac{a}{b}$ . Item si dividatur  $-b$  per  $\sqrt{-b}$ , prodit quotus  $\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}}$ . Nam si fiat  $-b = \sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$ , erit  $\frac{-b}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}$  quotus quaesitus. Dividendo autem  $\sqrt{-b}$  per  $-b$ , erit divisio  $\frac{1}{\sqrt{-b}}$  quotus. Similiter quotus ex quantitate  $a\sqrt{-bb}$  divisa per  $-bb$  erit  $\frac{1}{\sqrt{-bb}}$  quotus. Tandem dividendo  $\frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}}$  per  $\frac{+1}{-1}$ , erit quotus  $-1$ . Nam  $\frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$ .

SCHOL. *Quidam non obscuri nominis Algebrae doctores, productum ex multiplicatione duarum quantitarum imaginariarum, aut quotum ex divisione illarum, esse quantitatem veram & realem. Sic multiplicando v.g.  $\sqrt{-3}$  per  $\sqrt{-2}$  oriri  $\sqrt{6}$ , non autem  $\sqrt{-6}$ . Similiter dividendo  $\sqrt{-6}$  per  $\sqrt{-2}$  oriri quotum realem  $\sqrt{3}$ , non autem  $\sqrt{-3}$ . Proinde libere asserunt, hallucinatum fuisse Jac. Ozananum (a) qui contrarium docuit. At quicquid illi dicant, Ozananum sequitur Cl. Wolfius (b) Mathematicus nostri temporis celebratissimus, qui contendit, in multiplicatione quantitarum imaginariarum signum negativum non esse mutandum, sed factum perinde, ac factoribus praefigi debere semper signum  $-$ . Alias enim, inquit, factores imaginarii efficerent factum reale, quod est absurdum. Quamobrem vult, signorum regulam observari tantum respectu radicum, minime*

(a) Nouveaux Elemens liv. 1. sect. 4.

(b) Elementa Analy. edit. 2. cap. 2. p. m. 315.

RADICALI. CAP. IV.

time vero respectu quantitatum sub signo radicali existentium. Placet hic unum, vel alterum ipsius exemplum multiplicationis afferre.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3} + \sqrt{-2} \\ + \sqrt{-3} \\ \hline -3 + \sqrt{-6} \end{array}$$

EXEMP. II.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} \\ \hline -45 + 6\sqrt{-15} \\ -6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6} \\ \hline -45 + 6\sqrt{-15} - 6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6} \end{array}$$

COROLL. Ex allatis exemplis satis liquet, quantitates imaginarias complexas eodem modo multiplicari, ac ceteras radicales complexas. Exercitationis tamen gratia nonnulla adducimus tam multiplicationis, quam divisionis complexæ exempla, in quibus quantitates imaginariæ realibus adherent. A est quantitas multiplicanda. B multiplicans, P vero productum.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} A \sqrt{a-2\sqrt{-b}} \\ B \sqrt{c+3\sqrt{-b}} \\ \hline \sqrt{ac-2\sqrt{c}\sqrt{-b}} \\ + 3\sqrt{a}\sqrt{-b} - 6\sqrt{-b} = +6b \\ \hline P \sqrt{ac-2\sqrt{c}\sqrt{-b}+3\sqrt{a}\sqrt{-b}+6b} \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r} A 2 + \sqrt{-5} \\ B 3 - \sqrt{-2} \\ \hline 6 + 3\sqrt{-5} \\ - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-2} \times \sqrt{-5} \\ \hline P 6 + 3\sqrt{-5} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \times \sqrt{-5} \end{array}$$

Divisionis exempla, in quibus A significat dividendum, D divisorem, Q quotum; zeri autem quantitates ex actuali divisione deletas.

EXEMPL. I.

$$A \quad x^2 - ax - x\sqrt{-b} + x\sqrt{-c} - a\sqrt{-c} - \sqrt{-b} \times \sqrt{-c}$$

○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○

---

$$D \quad \frac{x + \sqrt{-c}}{\quad}$$

$$Q \quad x - a - \sqrt{-b}$$

EXEMPL. II.

$$A \quad 9\sqrt{-30} - 6\sqrt{-10} + 6\sqrt{-18} - 4\sqrt{-6}$$

○   ○   ○   ○

---

$$D \quad \frac{3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3}}{\quad}$$

$$Q \quad 3\sqrt{-6} - 2\sqrt{-2}$$

## C A P U T V.

*De Æquationibus simplicibus.*

## D E F I N I T I O N E S.

I. **Æ**quatio est comparatio duarum quantitarum, quæ signo æqualitatis junguntur, ut  $x = a$ ,  $xx + 2ax = ab$  &c.

II. Quantitates, quæ præcedunt, & quæ consequuntur æqualitatis signum, ut  $x$  &  $a$  in prima æquatione, item  $xx + 2ax$ , &  $ab$  in secunda, dicuntur *membra æquationis*.

III. Æquatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, ubi quantitas incognita est unius dimensionis, ut  $x = a + b + c$ : dicitur *quadratica*, seu *secundi gradus*, si ad duas dimensiones assurgit, ut  $xx = ab$ : *cubica*, seu *tertii gradus*, cum ad tres dimensiones, ut  $x^3 = a^2 + b^2$ ; & generatim dicitur æquatio *quarti*, *quinti*, *sexti gradus* &c. si potestas incognitæ ad tales dimensiones ascendat:  $x^n = a - b$  dicitur æquatio inde-

determinata, quæ determinabitur, si fiat  $n = 2, = 3, = 4$  &c.

IV. Æquatio dicitur *affecteda*, cum incognitæ potestas diversos habet dimensionis gradus, ut  $x^2 + ax = ab$ ,  $x^3 - ax^2 + bx = cd$  &c. unde dicuntur affectæ quadraticæ, affectæ cubicæ &c. Dicitur autem *pura*, cum incognitæ potestas eandem servat ubique dimensionem, ut  $ax + bx = cd$ ,  $xx - bxx = cdd$ ,  $x^3 = abc$  &c.

V. *Radix* æquationis est valor incognitæ, quæ æquationem ingreditur; ut in æquatione  $x = a + b$ , *radix* est  $a + b$ ; nam  $x$  tanti valet, quanti aggregatum  $a + b$ . Similiter in æquatione  $x^2 = a - c$ , extracta utrinque radice quadrata, *radix* æquationis, seu valor incognitæ  $x$ , ex  $\sqrt{a - c}$ .

VI. Si valor incognitæ fuerit positivus,  $x = 3$ , radix dicitur *vera*. Si negativus, ut  $x = -50$ , radix dicitur *negativa*, seu, ut Cartesius vocat, *falsa*. Utraque tamen realis est. Nam si alteri debeam aureos 50, & non habeam; revera asseritur, me habere  $-50$ . Quod si incognitæ valor exprimatur per radicem quadratam negativam, ut  $x = \sqrt{-a^2}$ , radix dicitur *imaginaria*, & impossibilis, per Schol. 1. Prop. 8. Cap. 3.

## A X I O M A T A.

1. **N**on tollitur æqualitas, si unus, aut quot placuerit, termini de uno æquationis membro ad alterum, mutatis signis, transferantur. Ut si  $x + 2 = 5$ , non tollitur æqualitas, si fiat  $x = 5 - 2$ .

2. Non tollitur æqualitas, si utrique æquationis membro addatur, aut subtrahatur quantitas æqualis. Vel si per eandem, aut æqualem quantitatem mul-

tiplicentur, aut dividantur ambo æquationis membra. Nam sit  $x = 3$ , multiplicando per 3, erit  $3x = 9$ ; aut dividendo per 3, erit  $\frac{1}{3}x = 1$ .

3. Non tollitur æqualitas, si utrumque membrum elevetur ad eandem potestatem; vel utrinque eadem radix extrahatur. Sit enim  $y = ab$ , erit  $y = \sqrt[n]{ab}$ . Contra vero si  $y^2 = a - b$ , extracta radice utrinque, erit  $y = \sqrt{a - b}$ .

4. Non tollitur æqualitas, si in alterutro æquationis membro, loco unius quantitatis, sive complexæ, sive incomplexæ, ponatur alia quantitas æqualis. Ut si  $x^2 = ay + by$ , & ponatur  $d = a + b$ , erit  $x^2 = dy$ . Hoc dicitur *substituere*, quod in Analyfi magnum, & perpetuum usum habet, ut deinceps videbitur.

## PROPOSITIO I.

*Explicantur regulae reductionis Æquationum.*

**O**Mnis æquatio continere solet quantitates notas cum incognitis permixtas secundum propositi problematis condiciones. Debent itaque quantitates illæ tandiu versari, & immutari, donec æquatio illa simplicissimam formam obtineat, quæ sit velut ultima conclusio, ad quam tota problematis difficultas reducatur, eaque dicitur *æquatio finalis*. Hoc autem præstant sequentes regulæ.

*Reg.<sup>a</sup> 1.<sup>a</sup>* Æquatio reducitur ad pauciores terminos transferendo terminos illius ex una parte in aliam sub signo contrario, nam per *Ax. 1.* remanet æqualitas. Sit  $x - 3 = 12$ , erit per transpositionem  $x = 12 + 3$ , hoc est  $x = 15$ . Similiter si  $x - b = a$ , erit  $x = a + b$ . Patet ratio ex 2.

*Ax.,*

*Ax.*, nam additur utrinque  $+ 3$ , & in secundo exemplo additur  $+ b$ .

Eadem ratione si fuerit  $x + 3 = 5$ , erit per transpositionem  $x = 5 - 3$ , hoc est  $x = 2$ . Item  $x + b = a$ , erit  $x = a - b$ . Patet ratio ex 2. *Axiom.* Nam subtrahitur utrinque  $- 3$ , & in secundo exemplo subtrahitur  $- b$ . Hæc transpositio vulgo *Antithesis* dicitur.

*Reg.<sup>a</sup> 2.<sup>a</sup>* Si sint fractiones, æquatio reducitur per multiplicationem, hoc est multiplicando terminos omnes per denominatores fractionum, ducendo scilicet omnes denominatores, unum post alium, in totam æquationem; seu, quod idem est, ducendo semel productum omnium denominatorum in æquationem, & deinde fractiones ad simplices terminos

reducendo. Sit æquatio  $\frac{abd}{c} + dx = \frac{bcd}{a}$ : multiplicetur primo tota æquatio per  $c$ , deinde per  $a$ , vel semel per  $ac$ , & habetur  $\frac{aabcd}{c} + acdx = \frac{abccd}{a}$ ,

quæ, reductis terminis per *Propos. 2. Cap. 2.*, erit  $aabd + acdx = bccd$ .

Similiter sit æquatio cum fractionibus, ut inferius *Probl. 4.*

$$a + \frac{x - a}{n} = 2a + x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

Multiplicetur primo per  $n$ , fit per *Axiom. 4. Cap. 2*

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

Rursus multiplicetur per  $n$ , erit

$$an^2 + nx - an = 2an^2 + nx - 3an - x + a$$

Ac deletis ex utraque parte terminis æqualibus, & ordinata æquatione, ut in *Coroll.* 1. & 3., quæ habentur in fine hujus, explicatur, fiet æquatio  $x = an^2 - 2an + a$ .

Regula hæc patet ex 2. *Axiom.* Multiplicatur enim tota æquatio per æqualia. Nam sublato denominatore, fractio multiplicata intelligitur per *Axiom.* 4. *Cap.* 2.

*Reg.ª 3.ª* Reductio fit dividendo utrumque membrum per eandem quantitatem, ut si fuerit  $3x = 12$ , dividendo per 3, erit  $x = 4$  æquatio priori æqualis per *Axiom.* 2. Similiter sit  $ax + bx = ac$  dividendo

per  $a + b$ , erit  $x = \frac{ac}{a + b}$ . Demum  $axx + fxx = gb$ ,

erit  $xx = \frac{gb}{a + f}$ .

*Reg.ª 4.ª* Reducitur æquatio per elevationem terminorum ad aliquam potestatem, cum quantitas incognita signo radicali implicatur. Ut si fuerit

$\sqrt{xx - aa} + b = c$ , relinquatur ex una parte æquationis quantitas signo radicali affecta, ita ut

sit  $\sqrt{xx - aa} = c - b$ : tum utraque pars æquationis elevetur ad quadratum, erit  $xx - aa = c^2 -$

$2cb + b^2$ . Similiter si fuerit æquatio  $m - \sqrt{4dx + 4dz}$

$= \sqrt{2dx + dz}$ , elevato utroque membro ad quadratum habetur

$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4dz} + 4dx + 4dz = 2dx + dz$ ; factaque reductione,

$$mz - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

Ponatur seorsim in altero membro quantitas radicalis, quæ remanet, erit

$$mz + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

& rursus elevato utroque membro ad quadratum, evanescit quantitas radicalis, & habetur *per Lem. Cap. 1.*

$$mz^2 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0.$$

Patet ex 3. *Ax.* Hoc vulgo dicitur, *Asymmetriam* tollere.

*Reg.<sup>a</sup> 5.<sup>a</sup>* Reducitur æquatio, cum ex utroque ejus membro extrahitur radix; ut si fuerit  $xx = 16$ , extracta utriusque radice, erit  $x = 4$ . Similiter æquatio  $xx = a^2 - 2ab + b^2$ , extracta radice fit  $x = a - b$ . Demum  $x^3 = 125$ , radice cubica extracta, fit  $x = 5$ . Sequitur ex 3. *Axiom.*

*Reg.<sup>a</sup> 6.<sup>a</sup>* Reducitur æquatio, seu plures æquationes ad unam, substituendo valorem unius incognitæ loco ipsius. Ut si sit æquatio  $x - y = d$ , sit autem  $a - x$  valor incognitæ  $y$ : qui substitui debet loco ipsius  $y$ : facta substitutione, habetur æquatio  $x - a + x = d$ , (variatis ob  $-y$  signis in  $a - x$ ) hoc est habetur *per Reg. 1.*

$$2x = a + d, \text{ \& per Reg. 3. } x = \frac{a + d}{2}.$$

Eadem ratione sit æquatio  $x^2 + y^2 = d^2$ , &  $a - x$  valor ipsius  $y$ , qui ut substituatur loco  $+y^2$ , fiat quadratum ex  $a - x$ , nempe  $a^2 - 2ax + x^2$ : quo posito loco ipsius  $y^2$ , erit æquatio  $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = d^2$ ; seu  $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$ , &  $x^2 - ax$

$$= \frac{d^2 - a^2}{2} \text{ per Reg. 1., \& 3.}$$

COROLL. I. Ex Reg. 1. tria sequuntur valde utilia: primo relinquendo incognitam in una æquationis parte, & transferendo omnes alias quantitates in partem alteram, habetur valor illius incognitæ. Sic æquatio  $x + y = 100$  per transpositionem fiet  $x = 100 - y$ , &  $100 - y$  dicitur valor incognitæ  $x$ .

COROLL. II. Insuper quantitates negativæ fieri possunt positivæ, & e contrario; transferendo scilicet illas in partem oppositam sub signo contrario. Sic ut in æquatione  $a - = b + c$  incognita  $x$  fiat positiva, & haberi possit ejus valor, facta transpositione quantitatum in alteram partem sub signo contrario, erit  $a - b - = c = x$ .

COROLL. III. Cum in utroque membro occurrit eadem quantitas sub eodem signo, deleri potest utrinque, & æquatio simplicior fit, ut si fuerit  $xx + ab - c = d - c + ab$ , æquatio reducitur ad  $xx = d$ .

SCHOL. In reducendis æquationibus illud primo curandum, ut omnes incognitæ, cujuscumque sint gradus, in uno eodemque æquationis membro consistant, in altero quantitates cognitæ, id quod per regulas jam traditas obtinetur.

## PROPOSITIO II.

*Plures simplices æquationes ad unam reducere.*

I. Sint reducendæ ad unam duæ æquationes simplices  $x + y = a$ , &  $x - y = b$ .

Addantur simul, summa erit  $2x = a + b$ . Vel subtrahatur secunda ex prima, habetur  $2y = a - b$ .

Patet ex 2. Axiom.

II. Sint tres æquationes ad unam reducendæ

$$\begin{array}{l} \text{I.} \quad x + y = a \\ \text{II.} \quad x + z = b \\ \text{III.} \quad y + z = c \end{array}$$

In prima æquatione sumatur valor incognitæ  $y$  per *Cor. 1. Prop. antec.* ita ut habeatur  $y = a - x$ , & in secunda valor incognitæ  $z$  erit  $z = b - x$ . Deinde hi duo valores substituantur in tertia æquatione loco  $y$  &  $z$  per *Reg. 6.* habebitur  $a - x + b - x = c$ ; & facta reductione, erit  $a + b - c = 2x$  per *Reg. 1.*,

$$\text{seu } x = \frac{a + b - c}{2} \text{ per Reg. 3.}$$

III. Sint plures æquationes ad unicam reducendæ, nempe  $A, B, C, D$ .

$A$	$x + y + z = a$		$E$	$x = a - y - z$
$B$	$x + y + v = b$			
$C$	$x + z + v = c$			
$D$	$y + z + v = d$			

---

$F$	$a - z + v = b$		$H$	$z = a + v - b$
$G$	$a - y + v = c$		$M$	$y = a + v - c$

---

$$N \quad 2a + 3v - b - c = d$$

$$b + c + d - 2a$$

$$\text{hoc est } v = \frac{b + c + d - 2a}{3}.$$

Sumatur ab æquatione  $A$  valor quantitatis  $x$ , qui per *Cor. 1. Prop. ant.* erit  $E$ : quo posito in æquationibus  $B$  &  $C$ , oriuntur duæ æquationes ejusdem valoris  $F$  &  $G$ . Sumatur deinde ex æquatione  $F$  valor incognitæ  $z$ , oritur æquatio  $H$ . Similiter ex æquatione  $G$  sumpto valore incognitæ  $y$ , habetur æquatio  $M$ . Hi duo valores ponantur in æquatione  $D$ , oritur æquatio  $N$ , in qua non est nisi unica

incognita  $v$ , cujus valor  $\frac{b + c + d - 2a}{3}$  si sub-

stituat in æquationibus  $H$  &  $M$  loco quantitatis  $v$ , statim innotescunt  $z$  &  $y$ , quorum valor si tandem ponatur in æquatione  $E$ , nota erit quoque incognita  $x$ . Quod &c.

**COROLL.** *Ut hæc reductio fieri possit, necesse est, ut eadem incognita in pluribus æquationibus reperiat, ut ex allatis exemplis manifestum est.*

**IV.** Quod si non omnes incognitæ sint unius dimensionis, ut in æquationibus  $A$  &  $B$ , quæ sequuntur.

$$A \quad xyy = bc, \quad B \quad xx + yy = by - ax$$

in quibus una tantum incognita  $x$  est unius dimensionis; tunc quæritur valor hujus, & in alia æquatione substituitur hac ratione:

$$\begin{aligned} \text{Quia } xyy = bc, \text{ erit } x &= \frac{bc}{yy} \text{ per Reg. 3. \& } xx \\ &= \frac{b^2c^2}{y^4} \text{ per Axiom. 3. Item } ax = \frac{abc}{yy} \text{ per Axiom. 2.} \end{aligned}$$

His valoribus in æquatione  $B$  substitutis per *Ax. 4.* habetur

$$\frac{b^2c^2}{y^4} + yy = by - \frac{abc}{yy}$$

Et multiplicando omnes terminos per  $y^4$ , ut fractiones exterminentur, oritur æquatio, in qua unica tantum incognita,

$$\text{Sch. Prop. 1.} \quad \begin{aligned} b^2c^2 + y^6 &= by^5 - abcy^2 \\ y^6 - by^5 + abcy^2 &= -b^2c^2 \end{aligned}$$

## PROPOSITIO III.

*Theoremata nonnulla explicantur, quæ equationibus conficiendis inserviunt.*

*Theor. 1.* **I**N proportione Arithmetica trium terminorum  $a$ ,  $a + 1$ ,  $a + 2$ , summa termini primi, & tertii æquatur duplo secundi, nempe  $a + a + 2$  (hoc est  $2a + 2$ ) =  $2a + 2$ . Item in numeris Arithmetice proportionalibus 7, 5, 3, erit  $7 + 3 = 10$ .

*COROLL. I.* Semissis aggregati ex primo & tertio dat terminum secundum. Sic  $\frac{2a + 2}{2} = a + 1$ .

Item  $\frac{7 + 3}{2} = 5$ .

*COROLL. II.* Datis duobus mediis quatuor continue proportionalium Arithmetice, ut  $a$ ,  $x$ , facile innotescit primus, quem voco  $y$ . Nam si retrocedendo fiat  $x \cdot a \therefore a \cdot y$ , erit per *Theor.*  $x + y = 2a$ , &  $y = 2a - x$ . Eadem ratione innotescit etiam quartus, quem item voco  $y$ . Nam si fiat  $a \cdot x \therefore x \cdot y$ , erit per *Theor.*  $a + y = 2x$ , &  $y = 2x - a$ . Sunt ergo  $2a - x$ ,  $a$ ,  $x$ ,  $2x$ , a quatuor termini continue proportionales Arithmetice. Quod nota ex Newtono (a).

*Theor. 2.* In proportione Arithmetica quatuor terminorum, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum mediorum; ut si fuerint  $a$ ,  $a + 1 \therefore a + 2$ ,  $a + 3$ , erit  $2a + 3 = 2a + 3$ . Sic etiam in numeris Arithmetice proportionalibus 2, 5, 15, 18, erit  $2 + 18 = 15 + 5$ .

*Theor. 3.* Quantitatum duarum inæqualium major æquatur aggregato ex semisumma & semidifferentia

ea-

---

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV.

earum : minor vero differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum . Sic partium inæqualium 7 & 5 , quæ componunt 12 , semisumma est 6 , semidifferentia 1 , pars major erit  $6 + 1$  , minor  $6 - 1$  .

**COROLL.** Si ponatur summa  $= 2a$  & differentia  $2y$  , erit pars major  $a + y$  , minor  $a - y$  . At si semisumma ponatur  $x$  , & semidifferentia  $y$  ; quantitas major erit  $x + y$  , minor  $x - y$  . Quod notetur .

**Theor. 4.** In proportione Geometrica quatuor terminorum , factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis ; hoc est si  $a . b :: c . d$  , erit  $ad = bc$  . Est Prop. 16. l. 6. Eucl.

**COROLL. I.** Hinc semper quartus terminus proportionalis exprimi potest per factum secundi & tertii divisum per primum . Sit enim  $a . b :: c . d$  , erit ex hoc Theor.

$bc = ad$  & dividendo utrumque per  $a$  , erit  $\frac{bc}{a} = d$  ;  
proinde  $a . b :: c . \frac{bc}{a}$  .

**COROLL. II.** Hinc quoque certo scire possumus , an quatuor termini sint proportionales , observando , an productum ex duobus extremis æquale sit producto ex duobus mediis . Nam termini proportionales varie disponi & permutari possunt secundum varios argumentandi modos , quos in toto fere lib. 5. Euclides docuit . Ut si supponatur  $a . b :: c . d$  , erit permutando  $a . c :: b . d$  , & invertendo  $c . a :: d . b$  , & componendo  $c + a . a :: d + b . b$  , & sic ulterius . Nihilominus in omnibus his permutationibus hoc Theorema semper verum esse debet .

**Theor. 5.** In proportione Geometrica continua trium terminorum factum primi & tertii termini æquatur quadrato secundi . Nam cum ex hypothese  $a . b :: b . c$  , erit per Theor. 4.  $ac = bb$  .

**COROLL. I.** Datis primo & tertio termino ,  $a$  &  $c$  ,  
ha-

habetur medius proportionalis  $= \sqrt{ac}$ . Nam in tribus continue proportionalibus  $a, b, c$ , cum sit  $ac = bb$ , extracta secunda radice, erit  $\sqrt{ac} = b$ . Et generatim factum duarum quantitatum est medium proportionale inter quadrata illarum.

COROLL. II. Datis autem primo & secundo termino trium Geometricè proportionalium, habetur tertius, si fiat ex secundo quadratum, & dividatur per primum. Nam sit tertius  $= f$ , erunt ex hypothesi  $a, b, f$  continue proportionales, sed per hoc Theor. 5.  $af = bb$ , proinde di-

videndo per  $a$ , erit  $f = \frac{bb}{a}$ . Hac ratione inveniri possunt

infiniti termini Geometricè proportionales.

COROLL. III. Denique in proportione continua Geometrica quadratum primi termini est ad quadratum secundi, ut primus terminus est ad tertium. Quod evidens est ex proportione continua  $1, a, a^2$ ; tum etiam ex Propos. 20. l. 6. Euclidis.

Theor. 6. Si quatuor termini Geometricè proportionales sint, erunt quoque proportionales, ad quamcunque illi dignitatem eleventur. Sit  $a . b :: c . d$ , erit quoque  $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$ . Item  $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$ . Demum  $a^n . b^n :: c^n . d^n$ . Sequitur ex Propos. 13. l. 8. Eucl. vel etiam potest numeris illustrari.

COROLL. Terminorum proportionalium radices sunt pariter proportionales. Nam si  $a^n . b^n :: c^n . d^n$ ; erit quoque  $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$ .

SCHOL. I. Progressio Arithmetica terminorum quorumcumque  $b, d, f, g, h$  &c. exprimi solet per iteratam differentiam additionem. Sit inter primum & secundum terminum  $b$  &  $d$  differentia  $c$ , erit progressio  $b . b + c . b + 2c . b + 3c . b + 4c$  &c. Quod si progressio sit descendens, ita ut primus terminus  $b$  secundum superet excessu  $c$ , tunc exprimitur per iteratam differentiam subtra-

tionem, nempe  $b$ .  $b-c$ .  $b-2c$ .  $b-3c$ .  $b-4c$  &c.

SCHOL. II. Axiomata, reductionis regula & theorematum superius allata sunt fundamenta æquationum instituendarum; neque sine illis resolvi possunt, ut mox videbimus. Eadem minute citare non solent Analystæ, unde sæpe tironibus obscuritas. Nos in gratiam eorum in duabus sequentibus propositionibus id faciemus, quod deinde magna ex parte omittetur; siquidem memoriæ hæreant, cum eorum usus in Analysisi perpetuus sit.

#### PROPOSITIO IV.

*Quæstionem datam ad æquationem redigere.*

**D**esignentur quantitates incognitæ per ultimas Alphabeti literas  $x$ ,  $z$ ,  $y$ , ut distinguantur a cognitis & datis, quæ literis prioribus  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  exprimi solent, ut diximus *Defin. 3.* ad *Cap. 1.* (quam & ipsæ priores literæ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  &c. aliquando pro incognitis, & indeterminatis usurpentur, ut inferius in *Probl. 6.* factum videbitur.) Expendantur deinde singulæ quæstionis conditiones & relationes, quæ dantur inter cognitæ & incognitæ, seu quæsitæ quantitates; & ex utrisque simul tot formetur æquationes, quot sunt incognitæ assumptæ. Sed hæc usu magis, quam verbis addiscuantur. Ecce tibi plura exempla.

1. Invenire duos numeros, quorum summa est 100, & differentia 30.

Numerus major quæsitus sit  $= x$ , minor  $= y$ , summa  $= 100$ , differentia  $= 30$ . Ex conditione problematis oriuntur duæ æquationes, nempe

$$x + y = 100, \text{ \& } x - y = 30.$$

Vel in terminis generalibus: numerorum quæditorum summa sit  $= a$ , differentia  $= b$ , erunt duæ æquationes

$$x + y = a, \text{ \& } x - y = b$$

2. Invenire duos numeros tales, ut triplum primi superet secundum excessu =  $a$ , secundus vero superet primum excessu =  $b$ .

Sit primus quæsitum =  $x$ , alter =  $y$ , oriuntur duæ æquationes

$$3x = y + a, \text{ \& } y = x + b$$

3. Invenire duos numeros, qui sint in ratione 1. ad 5; sed si minori addas 2, & majori 3, sint in ratione ad 2. Pone minorem =  $x$ , majorem =  $y$ , erunt duæ æquationes,

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x : y :: 1 : 5 & \text{II. } x + 2 : y + 3 :: 1 : 2 \\ \text{Theor. 4. } y = 5x & \text{Theor. 4. } 2x + 4 = y + 3 \end{array}$$

Ponatur in secundo loco  $y$ , ejus valor ex æquatione prima inventus, hoc est  $5x$ , erit

$$\text{Ax. 4. } 2x + 4 = 5x + 3$$

$$\text{Sch. Prop. 1. } 4 - 3 = 5x - 2x$$

Reg. 3.

$$1 = 3x$$

$$\frac{1}{3} = x, \text{ \& } y (= 5x) = \frac{5}{3}$$

Adde ad  $\frac{1}{3}$  numerum 2, & ad  $\frac{5}{3}$  numerum 3, erit  $x = \frac{7}{3}$ , &  $y = \frac{17}{3}$ ; & problema omnino resolutum.

5. Numerum invenire, a quo si auferatur  $f$ , deinde  $g$ , numeri residui sint in proportione  $m$  ad  $n$ .

Sit numerus quæsitus =  $x$ , erit per conditionem problematis

$$x - f : x - g :: m : n$$

$$\text{Theor. 4. } mx - mg = nx - nf$$

$$\text{Sch. Prop. 1. } mx - nx = mg - nf$$

Reg. 3.

$$x = \frac{mg - nf}{m - n}$$

Sit

Sit  $f = 15$ ,  $g = 20$ ,  $m = 6$ ,  $n = 1$ , erit  $x = \frac{105}{5} = 21$ .

Ex quo si auferas 15 & 20, habebis  $6 \cdot 1 :: 6 \cdot 1$ .

Vel sit  $f = 3$ ,  $g = 5$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$ , erit  $x = \frac{7}{1} = 7$ ;

ex quo si auferas 3 & 5, habebis  $4 \cdot 2 :: 2 \cdot 1$ .

5. Invenire quadratum, cui si addatur 6, fiat sui lateris quintuplum.

Sit latus quadrati quæsitæ  $x$ , erit per conditionem problematis

$$xx + 6 = 5x, \text{ \& } xx - 5x = -6 \text{ per Sch. cit.}$$

6. Invenire cubum, cui si ter addatur ejus radix, & ter auferatur quadratum radice ejusdem, æqualis sit unitati. Sit latus cubi quæsitæ  $x$ , erit per conditionem problematis

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 1.$$

SCHOL. I. Quo pauciores adhibentur incognita, eo facilius & expeditius problema solvitur. Ut si quærantur due quantitates, quarum una sit tripla alterius; si una denominetur  $x$ , præstat alteram denominare  $3x$ , quam aliam incognitam  $y$  inducere. Similiter si invenire oporteat tres continue proportionales  $x$ ,  $z$ ,  $y$  præstat duas tantum incognitas assumere, cum pro tertia sumi possit

$zz$

— per Coroll. 2. Theor. 5.

$x$

SCHOL. II. Ceterum curent tirones æquationes recte instituere. Nam ex earum efformatione facilis, aut difficilis fieri solet quæstionum propositarum solutio: proinde nos multa exempla congeessimus, plura quoque mox allaturi.

## P R O B L. I.

*Interrogatus Socrates, quanam esset hora, respondit: horæ e media nocte elapsæ ad horas usque ad meridiem residuas se habent, ut 2 ad 3: queritur, quanam esset hora.*

Sint horæ elapsæ =  $x$ , erunt residuæ usque ad meridiem =  $12 - x$ . Habetur ergo æquatio

$$x . 12 - x :: 2 . 3 .$$

*Theor. 4.*  $3x = 24 - 2x.$

*Reg. 1.*  $5x = 24$

*Reg. 3.*  $x = \frac{24}{5}$

Erant ergo horæ  $4\frac{4}{5}$ , hoc est hora quarta matutina cum min. 48.

Vel in terminis generalibus: sint horæ elapsæ a media nocte =  $x$ , horæ autem a media nocte ad meridiem =  $a$ , erit residuum ad meridiem usque =  $a - x$ ; proportio vero horarum præteritarum ad residuas sit, ut  $n$  ad  $m$ , erit æquatio

$$x . a - x :: n . m .$$

*Theor. 4.*  $mx = na - nx$

*Sch. Prop. 1.*  $mx + nx = na$

*Reg. 3.*  $x = \frac{na}{m+n}$

Sit  $n = 2$ ,  $m = 3$ , &  $a = 12$ ; erit  $x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} =$  hor. 4. min. 48.

Vel sit  $n = 5$ ,  $m = 1$ , &  $a = 12$ ; erit  $x = \frac{60}{6} = 10$

Fuit ergo hora decima matutina.

H

. PRO-

## P R O B L. II.

*Canis leporem insequitur, eorumque distantia est passuum 100; velocitas autem canis ad velocitatem leporis est, ut 3 ad 2: queritur, ad quot passus canis leporem assequetur.*

**D**Um canis percurrit spatium 100, quod voco  $a$ , lepus interea spatium aliquod transcurrit  $= x$ ; erit ergo spatium a cane percurrendum  $= a + x$ : proinde habetur æquatio

$$a + x . x :: 3 . 2$$

Vel in terminis generalibus

$$\begin{array}{l} \text{Theor. 4.} \\ \text{Sch. Prop. 1.} \\ \text{Reg. 3.} \end{array} \quad \begin{array}{l} a + x . x :: m . n \\ mx = an + nx \\ mx - nx = an \\ x = \frac{an}{m - n} \end{array}$$

Posito igitur  $a = 100$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$ ; erit  $x = 200$ , &  $a + x = 300$ . Assequetur ergo post passus 300.

SCHOL. Hoc idem problema proponit Fr. Lucas Pacioli (a) e Burgo Sancti Sepulcri, sed confuse & per ambages, quod illi Nic. Tartalea (b), & Hieron. Cardanus (c) duriter exprobrant.

PRO-

(a) Summa de Arithm. & Geomet. proport. ann. 1523.

(b) Tom. 2. lib. I. cap. 15. quæst. 21.

(c) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

## P R O B L. III.

*Lucilius in alenda familia quotannis impendit tritici modios 60, reliquos seminat. Contigit, ut singulis tribus annis sextuplum ex messe collegerit, unde factus decuplo ditior in re frumentaria, quam antea fuerat: quæritur, quot tritici modios primo haberet.*

**P**one, primo habuisse modios  $= x$ , modios autem 60 pro annuo familiae alimento esse  $= a$ , messem ex semine quotannis sextuplam  $= m$ ; erunt modii, detractis familiae alimentis,  $= x - a$ , qui si multiplicentur per  $m$ , dant primi anni messem  $= mx - am$ .

Secundo anno detrahe rursus  $a$  pro alimentis familiae, erit residuum  $mx - am - a$ , & multiplicando per  $m$ , habetur secundi anni messis  $m^2x - am^2 - am$ .

Tertio anno, detractis similiter alimentis  $= a$ , erit residuum  $m^2x - am^2 - am - a$ , & multiplicando per  $m$ , obtinetur fructus tertii anni  $= m^3x - am^3 - am^2 - am$ .

Hæc autem quantitas ex conditione problematis debet esse decupla modiorum, quos primo habuit; proinde erit æquatio

$$m^3x - am^3 - am^2 - am = 10x$$

Schol. Prop. I.  $m^3x - 10x = am^3 + am^2 + am$

$$am^3 + am^2 + am$$

Reg. 3.  $x = \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$

Substituantur jam pro literis, earumque potestatibus determinati earum valores; innotescet valor ipsius  $x$ . Nam posito  $a = 60$ , &  $m = 6$ ; erit  $m^3 = 216$ ,  $m^2 = 36$ ,  $am^3 = 12960$ ,  $am^2 = 2160$ ,  $am = 360$ ;

$$\text{hinc } \frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10} = \frac{15480}{206} = 75 \frac{15}{103} = x. \text{ Habuit}$$

ergo primo modios  $75 + \frac{15}{103}$  unius modii.

### P R O B L. IV.

*Metellus duos filios testamento reliquit hæredes hac ratione, ut major natu accipiat aureos 100, & quartam partem ejus, quod restat de tota hæreditate; minor vero accipiat aureos 50, & dimidium ejus, quod remansit de hæreditate, detractis prius & portione sui fratris, & aureis illis 50. Divisione facta, apparuit, utrumque filium esse ex æquo hæredem: quæritur, quanta fuerit hæreditas, & quæ filiorum portio.*

**P**one, hæreditatem fuisse  $= x$ , aureos 100  $= a$ ; erit residuum totius hæreditatis  $x - a$ , & ejus

$$\text{quarta pars } \frac{x - a}{4}. \text{ Majoris igitur portio } = a + \frac{x - a}{4}.$$

**P**one secundo aureos 50  $= b$ ; erit filii minoris portio  $= b + \frac{x - a - b}{4}$ . Sed portiones inventæ fuerunt æquales, hinc

$$a + \frac{x - a}{4} = b + \frac{x - a - b}{4}$$

Et multiplicando primo per 2, deinde per 4, erit

$$2a +$$

$$2a + \frac{2x - 2a}{4} = 2b + x - a - b - \frac{x + a}{4}$$

$$8a + 2x - 2a = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a$$

$$\text{Lem. Cap. 1. } 6a + 2x = 4b + 3x - 3a$$

$$\text{Reg. 1. } x = 9a - 4b$$

Cum sit  $a = 100$ ,  $b = 50$ ; erit hæreditas  $x$  ( $= 9a - 4b$ )  $= 500$ , & valore ( $9a - 4b$ ) in superiori æquatione posito, innotescit utriusque filii portio  $= 250$ .

Idem problema proponi poterat paulo universalius, quod ad tironum exercitationem facimus.

*Metellus filios suos reliquit hæredes hac lege, ut primus omnium A accipiat aureos  $a$ , & de reliqua hæreditate partem  $n$ . Secundus filius B accipiat aureos  $2a$ , & partem itidem  $n$  de reliqua hæreditate. Filius C habeat aureos  $3a$ , & de eo, quod remmet, partem similiter  $n$ , & sic de aliis. Facta inter filios divisione, repertum est, singulos esse æqualiter hæredes: queritur, quanta fuerit hæreditas, qui filiorum numerus, eorumque portio.*

Sit hæreditas  $= x$ , & accipiat  $A$  de illa portionem

$= a$ ; residuum erit  $x - a$ , cuius pars  $\frac{x - a}{n}$  ad

ipsum  $A$  spectans. Erit ergo filii  $A$  portio  $= a + \frac{x - a}{n}$

$n$

$$x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

Filii vero  $B$  portio  $= 2a + \frac{x - 3a - \frac{x + a}{n}}{n}$ ,

H 3

quæ

quæ portiones ex hypothesi sunt æquales ; proinde

$$a + \frac{x - a}{n} = 2a + \frac{x - 3a - \frac{x + a}{n}}{n}$$

hoc est multiplicando per  $n$ , erit

$$an + x - a = 2an + x - 3a - \frac{x + a}{n}$$

& rursus multiplicando per  $n$  totam æquationem, & auferendo terminos, qui superfluent, habetur, ordinata æquatione, valor ipsius  $x = an^2 - 2an + a$ , valor scilicet totius hæreditatis. Quo valore in prima æquatione

$a + \frac{x - a}{n}$  substituto, invenitur

portio filii  $A = a + \frac{n^2 a - 2na}{n} = na - a$ , per

quam ( cum portiones sint æquales ) si dividatur tota hæreditas jam inventa  $na - 2na + a$ , quotus  $n - 1$  dat numerum filiorum.

Sit  $a = 100$  ; &  $n = 6$  ; erit  $an - a = 600 - 100 = 500$  portio singulorum. At vero  $n - 1 = 6 - 1 = 5$  filiorum numerus ; adeoque  $5 \times 500$  dat integram hæreditatem 2500.

**COROLL.** Pro generati problematis solutione habetur triplex Canon. 1.º Denominator fractionis unitate multatus ( $n - 1$ ) dat numerum filiorum. 2.º Denominator fractionis unitate multatus in quantitatem datam ductus

$n - 1 \times a$  dat filiorum portionem. 3.º Denominatoris unitate multati quadratum in quantitatem datam ductum

$n - 1 \times n - 1 \times a$  dat integram hæreditatem. PRO.

## P R O B L. V.

Tres mercatores, inita societate, lucrati sunt summam quondam aureorum. Hoc unum constat, primum cum secundo accepisse summam aureorum  $a$ , & eundem primum cum tertio aureos  $b$ , secundum vero cum tertio aureos  $c$ : quæritur, quantum fuerit lucrum singulorum.

Sint tres focii  $x$ ,  $z$ ,  $y$ , summæ vero  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; erit per conditionem Probl.

$$\begin{array}{l|l} x + z = a & z = a - x \\ x + y = b & y = b - x \\ z + y = c & \end{array}$$

Fiat reductio, ut in Prop. 2. docuimus, & quantitatis  $x$  valor ( $\frac{a + b - c}{2}$ ) ponatur in duabus æ-

quationibus  $z = a - x$ , &  $y = b - x$ ; innotescet lucrum singulorum, nempe

$$x = \frac{a + b - c}{2}, z = \frac{a - b + c}{2}, y = \frac{b - a + c}{2}$$

Sit  $a = 100$ ,  $b = 120$ ,  $c = 160$ ; erit  $x = 30$ ,  $z = 70$ ,  $y = 90$ .

COROLL. Patet, singulas alternas summas excedere debere summam quamlibet tertiam; alias valor prodiret negativus. Sic in prima æquatione  $a + b > c$ , in secunda  $a + c > b$  & c.

Idem problema aliter. Sint tres æquationes, ut prius,

$$x + z = a, x + y = b, z + y = c$$

Addantur simul per Prop. 2. hujus, erit nova æquatio

$$H \quad 4 \quad 2x +$$

$$2x + 2z + 2y = a + b + c$$

*Divid. per 2.*  $x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Ex hac æquatione subtrahe *per Prop. cit.* tres æquationes priores sigillatim : innotescet valor  $x$ ,  $z$ ,  $y$ .

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

*Subtr.*

$$z + y = c$$

---


$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$$

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

*Subtr.*

$$x + y = b$$

---


$$z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$$

$$x + z + y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$$

*Subtr.*

$$x + z = a$$

---


$$y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a$$

Posito, ut supra,  $a = 100$ ,  $b = 120$ ,  $c = 160$ . iterum prodit  $x = 30$ ,  $z = 70$ ,  $y = 90$ .

## P R O B L E M VI.

*Lucius ad edificandam domum lapides, calcem & sabulum comparaverat. Mutato deinde consilio, ea omnibus tribus emptoribus A, B & C vendidit, nempe.*

*A emit* 2. currus lapidum )  
 3. currus calcis ) *Julis 34*  
 7. currus sabuli )

*B emit*



$$\text{Reg. 2.} \quad -b = -3c - 10$$

$$\text{Reg. 1.} \quad b = 3c + 10$$

$$\text{Adde} \quad + \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}c + 5$$

---


$$\frac{3}{2}b = \frac{9}{2}c + 15$$

Sed inventa fuit  $a = -\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$ ; proinde, si in hac æquatione pro  $-\frac{3}{2}b$  ponatur ejus valor ( $\frac{9}{2}c + 15$ , erit per 4. *Ax. hujus*

$$a = -\frac{9}{2}c - 15 - \frac{7}{2}c + 17$$

$$\text{Lem. cit.} \quad a = -8c + 2$$

Substituantur jam in tertia æquatione C valores inventi  $a$  &  $b$ , obtinebitur æquatio

$$-32c + 8 + 3c + 10 + 13c = 42$$

$$\text{Lem. cit.} \quad -16c = 24$$

$$\text{Reg. 3.} \quad c = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

Sunt autem  $a = -8c + 2$ , &  $b = 3c + 10$ . Substituto igitur valore ejusdem  $c$ , determinantur  $a$  &  $b$ , scilicet

$$a = 12 + 2 = 14$$

$$b = -\frac{9}{2} + 10 = 5\frac{1}{2}$$

Proinde lapides pro singulis curribus venduntur juliis 14. Calcis currus quilibet juliis  $5\frac{1}{2}$ . Currus autem sabuli ob valorem negativum ( $c = -1\frac{1}{2}$ ) nihil venditur; immo ipse sabuli dominus solvit julium

lium  $1\frac{1}{2}$  emptoribus illis pro unoquoque fabuli curru e damo amovendo.

SCHOL. I. Hoc probl. a Hieronymo Cardano (a) paucis verbis propositum, visum est nobis non inelegans, & tironibus in calculo exercendis opportunum.

SCHOL. II. Poterant hæc problemata abstracta, & in terminis generalibus proponi, ut plerique faciunt. Sed quia specialia, & particularibus circumstantiis deducta phantasiam magis juvant; & juvenes, cum statim ab initio artis, alioquin difficilis, usum aliquem specialem agnoscunt, ad ulteriora alacriores fiunt, ea sic afferre satius duximus.

SCHOL. III. Si ex problematis propositi conditionibus haberi non possint tot æquationes, quot incognitæ fuerunt assumptæ, problema dicitur indeterminatum; quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, & tunc una ex incognitis ad arbitrium sumitur. Ut si quærantur duo numeri, quorum factum æquale sit numero dato, v. g. 12. Sint illi  $x$  &  $y$ : per conditionem problematis una tantum haberi potest æquatio, nempe  $xy = 12$ ; unde

$y = \frac{12}{x}$ . Sumatur ad arbitrium  $x = 2$ , erit  $y = \frac{12}{2} = 6$ . Si sumatur  $x = 3$ , erit  $y = \frac{12}{3} = 4$ . Si  $x = 4$ , erit  $y = 3$  &c. Hujus generis sunt problemata, quæ sequuntur.

Problemata Indeterminata.

### P R O B L. I.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad eorum differentiam in quacumque data ratione.

Si quæditorum unus  $= x$ , alter  $= y$ , & ratio data sit  $a$  ad  $b$ , erit per conditionem Probl.

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{a-b}$$

(a) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

$$x + y . x - y :: a . b$$

Theor. 4.  $ax - ay = bx + by$

Schol. Prop. 1.  $ax - bx = ay + by$

Divid. per  $a - b$   $x = \frac{ay + by}{a - b}$

Sit  $a = 3$ ,  $b = 1$ , & sumatur ad arbitrium  $y = 2$ ; erit

$$x = \frac{6 + 2}{2} = 4, \text{ proinde } 4 + 2 . 4 - 2 :: 3 . 1.$$

Sit  $a = 4$ ,  $b = 3$ , & sumatur, si libet,  $y = 5$ ; erit

$$x = \frac{20 + 15}{1} = 35. \text{ Hinc } 35 + 5 . 35 - 5 :: 4 . 3.$$

## P R O B L. II.

*Duos numeros invenire, quorum summa sit ad summam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data.*

**S**it unus numerus quæsitus  $= x$ , alter  $= xy$ , & ratio data sit  $a$  ad  $b$ , erit ex conditione problematis

$$x + xy . xx + xxyy :: a . b$$

Theor. 4.  $bx + bxy = axx + axxyy$

Reg. 3.  $b + by = ax + axyy$

Reg. 3.  $x = \frac{b + by}{a + ayy}$

Sit  $a = 3$ ,  $b = 1$ , & sumatur ad libitum  $y = 2$ , erit

$$x = \frac{1 + 2}{3 + 12} = \frac{1}{5}; \text{ proinde } x + xy = \frac{3}{5}, \text{ \& } xx + xxyy$$

$$= \frac{5}{25} = \frac{1}{5}; \text{ ideoque } \frac{3}{5} . \frac{1}{5} :: 3 . 1.$$

Sit  $a = 2$ ,  $b = 1$ , & sumatur  $y = 3$ , erit  $x =$

$$\frac{1 + 3}{2 + 18} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \text{ \& } x + xy = \frac{4}{5}, \text{ \& } xx + xxyy = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5}; \text{ proinde habetur } \frac{4}{5} - \frac{2}{5} :: 2.1.$$

SCHOL. I. Eodem modo resolvitur problema, si quaerantur duo numeri, quorum summa sit ad differentiam quadratorum ex ipsis in quacumque ratione data a ad b. Vel duo numeri, quorum differentia sit ad differentiam quadratorum, quae ex ipsis fiunt, in ratione data a ad b. Vel duo numeri, quorum differentia sit ad summam quadratorum ex ipsis, ut a ad b. Quos omnes casus Diofantus Alexandrinus (a) accurate resolvit.

SCHOL. II. Non a, pro altero numero quaesitorum non sumi simpliciter x, vel y, sed xy, ut scilicet tota aequatio multiplicata per x existat, & inde haberi possit divisor communis, & facta divisione, quadrata illa ad quantitatem unius dimensionis reducantur, quod quidem pro similibus casibus est advertendum.

### P R O B L. III.

Datum numerum quadratum in alia duo quadrata dividere.

Sit latus dati quadrati = a, latus quaesiti = x, & alterius quaesiti = y; erit  $a^2 = x^2 + y^2$ . Quia vero latus a majus est alterutro latere x, vel y seorsim accepto, fieri poterit  $a - x = y$ , vel sumpto ad libitum v, fieri poterit  $a - vx = y$ , vel etiam  $vx - a = y$ . Tunc enim superior aequatio  $a^2 = x^2 + y^2$  in sequentem transformabitur, substituto, loco  $y^2$ , ejus valore.

$$a^2 = x^2 + v^2 x^2 - 2avx + a^2$$

$$v^2 x + x = 2av$$

$$2av$$

Divid. per  $v^2 + 1$

$$x = \frac{2av}{v^2 + 1}$$

Hoc

---

(a) Arithmet. lib. 1. & 2. cum Bacheto, & de Fermat.

Hoc valore ipsius  $x$  posito in æquatione  $vx - a = y$ ,

$$\text{habetur } y = \frac{avv - a}{v^2 + 1}.$$

Sit  $a = 10$ , assumpto ad libitum  $v = 3$ , erit  $x = \frac{60}{10} = 6$ , &  $y = \frac{80}{10} = 8$ . Fiant quadrata, erit  $100 = 36 + 64$ .

Sit  $a = 12$ , & ad libitum  $v = 2$ , erit  $x = \frac{48}{5}$ , &  $y = \frac{36}{5}$ . Fiant quadrata reducendo 12 ad fractionem ejusdem nominis, hoc est ad  $\frac{60}{5}$ , erit (deleto communi denominatore 25)  $3600 = 2304 + 1296$ .

#### P R O B L. IV.

*Datum numerum in duos secare, quorum factum sit quadratum.*

**S**it numerus datus  $= 2a$ , partium vero, in quas dividi debet, differentia sit  $= 2y$ ; erit *per Theor.* 3. pars major  $a + y$ , minor autem  $a - y$ , earumque factum  $aa - yy$ , quod ex conditione problematis debet esse quadratum. Pro cuius latere sumpto  $v$  ad libitum, fiat  $a = vy$ , seu  $vy - a$ , erit

$$aa - yy = vvy^2 - 2avy + a^2$$

Factaque reductione *per Lem. Cap. .* habetur

$$v^2y^2 + y^2 = 2avy$$

$$\text{Divid. per } y \quad v^2y + y = 2av$$

Tum per  $v^2 + 1$

$$y = \frac{2av}{v^2 + 1}$$

Sit  $2a = 20$ , sumatur ad arbitrium  $v = 3$ , erit  $y = \frac{60}{10} = 6$ ; proinde  $a + y = 16$ , &  $a - y = 4$ , unde  $aa - yy = 100 - 36 = 64 = 4 \times 16$ . Sit

Sit  $2a = 30$ , sumpto  $v = 2$ , erit  $y = \frac{60}{5} = 12$ ; proinde  $a + y = 27$ ,  $a - y = 3$ , &  $aa - yy = 81$ .

SCHOL. *Quantitas v est quidem arbitraria, sed talis sumi debet, ut y semper maneat minor, quam a, cujus differentia esse supponitur.*

## P R O B L. V.

*Quadratum invenire, quod sive addito, sive dempto quocumque suæ radicis multiplici, submultiplici, superparticulari, & quavis alia proportionis specie, semper sit quadratum.*

Sit quæsitæ quadrati latus  $= x$ , & radicis addendæ, aut detrahendæ multipulum  $= m$ ; erit  $x^2 + mx$  quadratum una cum multiplo suæ radicis, cui quadratum æquale quæritur. Pro cuius latere, sumpto ad libitum  $v$ , fiat  $v - x$ ; erit ex conditione Probl.

$$x^2 + mx = vv - 2vx + xx$$

Sch. Prop. 1.

$$2vx + mx = vv$$

$$vv$$

Reg. 3.

$$x = \frac{vv}{2v + m}$$

Sit  $m = 2$ , & sumatur ad libitum  $v = 5$ ; erit  $x = \frac{25}{12}$ , hinc  $x^2 + mx = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144}$ , cujus  $\sqrt{\quad} = \frac{35}{12}$ .

Sit  $m = 3$ , & ad libitum  $v = 4$ ; erit  $x = \frac{16}{11}$ , &  $x^2 + mx = \frac{256}{121} + \frac{48}{11} = \frac{784}{121}$ , cujus  $\sqrt{\quad} = \frac{28}{11}$ .

Quod si data radicis proportio non addi, sed subtrahi debeat a suo quadrato, tunc invenietur  $x =$

$$v^2$$

ut calculum ineunti palam est.

$$2v - m$$

Sit

Sit enim, ut supra,  $m = 3$ ,  $v = 4$ ; erit  $x = \frac{16}{5}$ , &  $x^2 - mx = \frac{256}{25} - \frac{240}{25} = \frac{16}{25}$ , cujus  $\sqrt{\quad} = \frac{4}{5}$ .

Sit demum  $m = 4$ ,  $v = 5$ ; erit  $x = \frac{25}{6}$ , &  $x^2 - mx = \frac{625}{36} - \frac{100}{6} = \frac{25}{36}$ , cujus  $\sqrt{\quad} = \frac{5}{6}$ .

SCHOL. In hoc problema satis elegans casu incidit, ut ipse asserit, P. Augustinus Thomas a S. Josepho (a) Schol. Piarum Geometra & Astronomus in Germania clarissimus. Pro quo, suppressa analysi, canonem

at  $\dagger 2a^2 m^2$   
tradidit universalem  $\frac{\quad}{4a^3 - 4am^2} \dagger m^4 =$  radici qua-

drati quæsiti; ubi  $m$  denotat proportionem cujuscumque speciei;  $a$  sumitur ad libitum, modo major sit quam  $m$ . At canon a nobis traditus longe simplicior est, ut patet.

### P R O B L. VI.

Tres numeros invenire, quorum tum summa, tum bini quadratum efficiant.

Sint numeri quæsiti  $x, y, z$ ; primi autem quadrati  $x \dagger y \dagger z$  latus sit  $r$ , secundi quadrati  $x \dagger y$  latus sit  $s$ , tertii  $x \dagger z$  sit  $t$ , & quarti  $y \dagger z$  sit  $v$ ; erunt quatuor æquationes

$$\begin{array}{l} 1.^a \quad x \dagger y \dagger z = rr \\ 2.^a \quad x \dagger y = ss \\ 3.^a \quad x \dagger z = tt \\ 4.^a \quad y \dagger z = vv \end{array}$$

Ex prima & secunda æquatione habentur duo valores ipsius  $x$ , per Coroll. 1. Prop. 1. nempe

$$x =$$

---

(a) Sylloge Epist. Mathem. Pragæ an. 1713.

$$x = rr - y - z, \text{ \& } x = ss - y$$

$$rr - y - z = ss - y$$

*Axiom. 2.*

$$rr - z = ss$$

*Coroll. cit.*

$$z = rr - ss$$

Ex tertia æquatione habetur  $x = tt - z$  per *Coroll. cit.*, positoque loco  $z$  ejus valore modo invento, habetur per *Axiom. 4.*

$$x = tt - rr + ss$$

Cumque habeatur ex secunda æquatione  $x = ss - y$ , duæ æquationes æquales erunt, scilicet

$$tt - rr + ss = ss - y$$

*Ax. 2.*

$$tt - rr = -y$$

*Ax. 1. & Cor. 2. Prop. 1.*

$$y = rr - tt$$

Positis autem in quarta æquatione  $y + z = vv$ , valoribus  $y$  &  $z$  jam inventis, erit per *Ax. 4.*

$$rr - tt + rr - ss = vv$$

$$2rr - tt - ss = vv$$

Fiat  $r - m = t$ , erit  $rr - 2rm + m^2 = tt$ . Item fiat  $r - n = s$ , erit  $rr - 2rn + n^2 = ss$ ; & his valoribus in superiori æquatione substitutis loco  $-tt - ss$ , oritur æquatio

$$2rr - rr + 2rm - m^2 - rr + 2rn - n^2 = vv$$

*Lem. Cap. 1.*  $2rm + 2rn - m^2 - n^2 = vv$

*Ax. 1.*  $2rm + 2rn = vv + m^2 + n^2$

$$vv + m^2 + n^2$$

*Reg. 3.*

$$v = \frac{vv + m^2 + n^2}{2m + 2n}$$

$m, n, v$  sunt ad libitum.

Sit  $m = 1, n = 2, v = 7$ , erit  $r = \frac{54}{6} = 9$ ;  
hinc  $r - m = t = 9 - 1 = 8$ , &  $r - n = s = 9 - 2 = 7$ .  
I Pro

Proinde

$$\begin{array}{l|l} x = 32 & x + y + z = 81 \\ y = 17 & x + y = 49 \\ z = 32 & x + z = 64 \\ & y + z = 49 \end{array}$$

Sit  $m = 2$ ,  $n = 4$ ,  $v = 8$ , erit  $r = \frac{84}{12} = 7$ , &

$t - m = t = 5$ ,  $r - n = s = 3$ ; adeoque

$$\begin{array}{l|l} x = -15 & x + y + z = 49 \\ y = 24 & x + y = 9 \\ z = 40 & x + z = 25 \\ & y + z = 64 \end{array}$$

SCHOL. *Problemata indeterminata qui plura cupit, Diophantum adeat, qui in numeris infinita fere proponit, unde Analysis Diophantea nomen accepit. Horum solutionem recentiores alia via per analysim speciosam indagaverunt, Billy (a) praesertim, Ozanann (b), & Praestetus (c). Haec quidem determinatis difficiliora tironi evadunt. Negligenda tamen non sunt, cum in doctrina curvarum usum habeant plurimum, ut nos opportune Wolfius (d) admonet. Quae nos hic pauca selegimus, ad ceterorum intelligentiam, siquidem probe percepta fuerint, satis erunt.*

## C A P U T VI.

### De Æquationibus compositis.

**H**AETenus de æquationibus simplicibus. Nunc ad compositas, quæ pluribus constant dimensionum gradibus, transitum facimus. Quarum naturam, & proprietates præcipuas hoc loco breviter explicabimus.

PRO-

(a) Diophant. redivivus.

(b) Nouveaux elem. d'Algeb. l. 3.

(c) Nouveaux elemens de Mathematiqu. T. 2.

(d) Elem. analy. edit. 2. Cap. 2. §. 249.

## PROPOSITIO I.

*Explicatur æquationum compositarum genesis.*

**A** Sumantur nonnullæ æquationes simplices, quæ radices positivas, vel negativas contineant, & æquentur nihilo. Deinde ad invicem multiplicentur; orientur æquationes compositæ tot graduum, quot assumptæ fuerint radices.

$$\begin{aligned} \text{Sit } x &= a, \text{ seu } x - a = 0 \\ x &= b, \text{ seu } x - b = 0 \end{aligned}$$

Multiplicentur inter se hæ duæ æquationes simplices, oritur

$$\begin{aligned} x^2 - ax + ab &= 0 \\ - bx & \end{aligned}$$

Sit deinde  $x = c$ , seu  $x - c = 0$ , & per hanc multiplicetur æquatio jam inventa; erit æquatio composita tertii gradus

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx \\ - bx^2 + acx - abc &= 0 \\ - cx^2 + bcx & \end{aligned}$$

Eadem ratione fit  $x = 2$ , seu  $x - 2 = 0$

$$x = -3, \text{ seu } x + 3 = 0$$

$$x = 4, \text{ seu } x - 4 = 0$$

Multiplicentur ad invicem hæ tres æquationes simplices, fit æquatio tertii gradus

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Quæ quidem si ulterius multiplicetur per aliam æquationem simplicem  $x + 1 = 0$ , fit æquatio quarti gradus, nempe

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$$

I 2

Atque

Atque hic nonnulla circa æquationes hujusmodi diligenter observanda sunt:

I. In qualibet æquatione tot dari radices, quot incognita primi termini dimensiones habet, seu quot habet exponens unitates; nempe duas in quadratica, tres in cubica &c.

II. Quantitatem cognitam secundi termini continere summam omnium radicum sub signo contrario, hoc est radices positivas cum signo —, negativas cum signo +. Quantitatem cognitam tertii termini exhibere productum ex singulis binis radicibus sub signo proprio: cognitam quarti productum ex singulis ternis radicibus sub signo contrario, & sic deinceps. Terminum vero ultimum (quem homogeneum comparationis vocant) esse factum omnium radicum. Hæc omnia in prima, & secunda æquatione oculis patent.

III. In omni æquatione tot dari radices positivas, seu veras, quot sunt mutationes signorum de + in —, & de — in +; tot vero negativas, seu falsas, quot successiones signorum eorundem + +, vel — —. Sic in æquatione  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , quia duplex est mutatio signorum + —, & — +, duplex est radix positiva, nempe  $x = 2$ , &  $x = 3$ . In æquatione vero  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , quia una est signorum eorundem successio + +, & una mutatio + —, una radix est negativa, nempe  $x = -4$ , & altera positiva  $x = 1$ . Si vero omnia signa sint positiva, ut in æquatione  $x^2 + 5x + 6 = 0$ , radices omnes falsæ sunt, nempe  $x = -2$ , &  $x = -3$ .

IV. Si radices veræ sint falsis æquales, secundus terminus æquationis evanescit, & fit æqualis zero. Sit  $x = 2$ ,  $x = 3$ , &  $x = -5$ . Fiat æquatio, ut supra docuimus, oritur  $x^3 - 19x + 30 = 0$ ,  
in qua

in qua secundus terminus deficit . Si radices veræ superant falsas, secundus terminus æquationis est cum signo  $-$  . Sit radix vera  $x = 5$  major, quam falsa  $x = -2$  ; erit æquatio  $x^2 - 3x - 10 = 0$ , in qua  $-3$  denotat excessum radices veræ  $+5$  supra falsam  $-2$  . Si denique radices falsæ majores sunt, quam veræ ; secundus terminus æquationis est cum signo  $+$  . Sit radix falsa  $x = -5$ , vera autem sit  $x = 2$  ; erit æquatio  $x^2 + 3x - 10 = 0$ , in qua  $+3$  exprimit excessum radices falsæ  $-5$  supra veram  $+2$  .

V. Duplici ratione cognoscitur, quantitatem aliquam positivam, aut negativam esse radicem æquationis . Primo si fiat binomium constans incognita, & quantitate aliqua data cum signo  $-$ , si sit quantitas positiva ; vel cum signo  $+$ , si sit negativa, & per ipsum exacte, & sine ullo residuo æquatio sit divisibilis . Sic quia æquatio superior  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$  divisibilis est exacte per  $x - 2$ , seu per  $x + 3$ , vel per  $x - 4$ , deducitur,  $+2$ ,  $-3$ ,  $+4$  esse radices ejusdem æquationis : cum æquationes oriuntur ex multiplicatione, & divisio sit multiplicationi contraria . Secundo si substituendo in æquatione, loco incognitæ, quantitatem datam cum signo  $+$ , si est positiva, aut cum signo  $-$ , si est negativa, & omnia producta per signa contraria sese destruant ; erit illa quantitas radix æquationis . Sit eadem æquatio  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$  . Substituatur loco incognitæ  $x$  ubique ejus valor  $+2$  ; erit  $8 - 12 - 20 + 24 = 0$  . Substituatur rursus loco ejusdem incognitæ  $x$  valor  $-3$  ; erit  $-27 - 27 + 30 + 24 = 0$  . Demum substituto valore  $+4$ , erit  $64 - 48 - 40 + 24 = 0$  .

Similiter in æquatione  $x^2 - ax - ab = 0$ . Radices sunt  
 $+ bx$

$+ a$ ,  $- b$ : substituuntur hi valores loco incognitæ  $x$ ; erit  $a^2 - a^2 + ab - ab = 0$ . Item  $b^2 - b^2 + ab - ab = 0$ .

SCHOL. I. Præter radices racionales positivas, aut negativas, de quibus hætenus locuti sumus, dantur etiam in æquationibus radices irrationales, & incommensurabiles tam positivæ, quam negativæ. Sic æquatio  $x^2 - 6x + 4 = 0$  habet duas radices irrationales  $3 + \sqrt{5}$ , &  $3 - \sqrt{5}$ .

SCHOL. II. Præter radices reales racionales, & irrationales jam allatas, æquatio aliquando continet radices imaginarias & impossibiles. Nam cum nonnullæ quæstiones casus impossibiles involvant, ut si quærat in circulo dato applicari rectam, quæ diametro circuli major sit, necesse est, radix illi casui respondeat impossibilis. Sic æquatio  $x^2 - 2x + 7 = 0$  continet duas radices imaginarias  $1 + \sqrt{-6}$ , &  $1 - \sqrt{-6}$ , quæ in æquationibus sunt semper numero pares.

SCHOL. III. Regula, quam ex Cartesio docuimus supra num. 3. pro dignoscendis ex permutatione, aut successione signorum radicibus veris ac falsis, non valet pro æquationibus, quæ radicibus imaginariis constant. Nam superior æquatio  $x^2 - 2x + 7 = 0$  ex signorum permutatione continere videtur duas radices veras, quod tamen est falsum. Multiplicetur enim per  $x + 3 = 0$ , ut præter duas veras aliam quoque falsam contineat: oritur  $x^3 + 1x^2 + 1x + 21 = 0$ , in qua dispositio signorum ex præcit. regula indicat, omnes radices esse falsas. Non erant ergo in æquatione duæ radices veræ, quales apparebant, sed imaginariæ  $1 + \sqrt{-6}$ , &  $1 - \sqrt{-6}$ . Proinde hic regula fallit.

## PROPOSITIO II.

*Æquationem quamcunque ordinare,*

**P**onantur in uno æquationis membro omnes incognitæ, ita ut primo loco statuatur incognita maximæ potestatis, quæ dicitur *primus* æquationis terminus: secundo loco incognita potestatis uno gradu inferioris, quæ dicitur *secundus* terminus æquationis, deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decrescentes, quæ constituunt *tertium, quartum, quintum &c.* terminum æquationis. In altero æquationis membro ponantur omnes termini, qui ex cognitis quantitibus componuntur.

Sit æquatio inventa  $bx^2 + x^3 = bx - ab + cd$   
erit ordinata  $x^3 + bx^2 - bx = cd - ab$

Item sit æquatio  $by^3 - dy + y^4 = abc + cy + mf$   
erit ordinata  $y^4 + by^3 - cy - dy = abc + mf$

II. Si terminus maximæ potestatis multiplicatus existat per aliam quantitatem sive literariam, sive numericam, dividi debet per illam, ut simplex evadat. Sit  $3x^2 + 6ax = ab$ , dividendo per 3 totam æquationem, erit  $x^2 + 2ax = \frac{1}{3} ab$ . Eadem ratione si sit æquatio  $ax^2 - 2ax = abc$ , dividendo per  $a$ , fit  $x^2 - 2x = bc$ .

III. Si terminus maximæ potestatis afficitur signo  $-$ , fieri debet per terminorum transpositionem positivus. Sic in æquatione  $ax - x^2 = ab - cf$ , facta terminorum transpositione, erit  $x^2 - ax = cf - ab$ .

IV. Omnes illi termini, in quibus incognita eandem habet dimensionem, statuatur unus infra alium; idemque fiat de quantitibus cognitis, si plures sint, ut

$$\begin{array}{r} x^3 + ax^2 - bx \\ - bx + abc \end{array}$$

quantitates  $ax^2 - bx^2$  stant ambæ loco secundi termini, &  $-bx + cx$  loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$\begin{array}{r} x^2 - ax = ac - bc + mf \\ - bx \end{array}$$

quantitates  $ac - bc + mf$  unicum terminum constituunt.

COROLL. I. Hinc habetur modus revocandi quamcunque æquationem compositam ad simplicem. Si enim in superiori prima æquatione ponatur  $a - b = p$ ; erit  $ax^2 - bx^2 = px^2$ . Item ponendo  $-b + c = q$ , erit  $-bx + cx = qx$ , demum ponendo  $abc = r$ , eadem æquatio transformabitur in hanc simplicissimam  $x^3 + px^2 + qx = r$ . Similiter in superiori secunda æquatione fiat  $-a - b = -p$ ; erit  $-ax - bx = -px$ ; fiat  $ac - bc + mf = q$ ; ea in hanc transformabitur  $x^2 - px = q$ . Quod quidem quanti sit usus, ex inferius dicendis satis constabit.

COROLL. II. Præstat non raro omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ita ut omnes quantitates nihilo fiant æquales. Sic æquatio  $x^2 - px = q$  fiet  $x^2 - px - q = 0$ . Item  $x^3 - ax^2 + bx = a^2 b^2$ , erit  $x^3 - ax^2 + bx - a^2 b^2 = 0$ . Quod artificium Algebrae, ut videbimus, valde commodum, Thomæ Harrioto (a) Anglo tribuitur.

COROLL. III. Si quis terminus in æquatione desit, ut secundus, tertius, quartus, &c. notatur termini, aut terminorum (si plures desint) defectus asterismo, ut æquatio  $x^3 * + ax - a^3 = 0$ , quæ secundo termino caret. Pariter  $x^4 * - cx^2 * + a^2 bc = 0$  caret

ter-

terminis secundo & quarto. Tunc autem minime variatur sequentium terminorum ordo, aut conditio. Sed ax v.g. in prima æquatione manet terminus æquationis tertius; & in secunda  $+ abc$  tenet locum æquationis quintum, licet absint duo termini, & sic de aliis.

## PROPOSITIO III.

*Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare.*

**M**Utentur in æquatione signa terminorum parium, ea nempe, quæ præcedunt terminos secundum, quartum, sextum &c. radices veræ degenerabunt in falsas, & vicissim falsæ in veras. Sit æquatio  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ , quæ ex *anted.* Prop. habet duas radices veras  $+ 2$ ,  $+ 4$ , & unam falsam  $- 3$ : variatis autem terminorum parium signis, fit  $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$ , quæ quidem habet easdem cum priore radices, sed quas falsas  $- 2$ ,  $- 4$ , & unam veram  $+ 3$ .

*Demonstratio.* Substituatur in eadem æquatione loco incognitæ  $x$  una ex radicibus, seu valoribus  $- 2$ , tota æquatio evanescit, nempe  $- 8 + 12 + 20 - 24 = 0$ . Substituatur deinde  $- 4$ , iterum æquatio evanescit; nam  $- 64 + 48 + 40 - 24 = 0$ . Idem fiat cum radice vera  $+ 3$ ; erit enim  $27 + 27 - 30 - 24 = 0$ , ergo  $- 2$ ,  $- 4$ ,  $+ 3$  sunt radices illius æquationis *per Prop. 1. hujus num. 5.* Quod &c.

## PROPOSITIO IV.

*Radices augere vel minuere data quantitate.*

**I.** Sit æquatio  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ , quæ ex *Prop. 1. hujus* habet duas radices veras  $+ 2$ ,  $+ 4$ , & unam falsam  $- 3$ : augere volo ejus radices quantitate data  $= 3$ . Fig

Fiat  $x + 3 = y$ , erit  $x = y - 3$ . Substituatur hic valor in æquatione loco ipsius  $x$ ; erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\
 - 3x^2 & \quad - 3y^2 + 18y - 27 \\
 - 10x & \quad \quad - 10y + 30 \\
 + 24 & \quad \quad \quad + 24
 \end{array}$$

---

Summa  $y^3 - 12y^2 + 35y + 24 = 0$

Hæc nova æquatio habet singulas radices ternario auctas, nempe  $+ 5$ ,  $+ 7$ ,  $+ 0$  (nam  $- 3 + 3 = 0$ ) quæ quidem prius erant  $+ 2$ ,  $+ 4$ ,  $- 3$ . Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, ex. gr.  $+ 5$ , fiet  $125 - 300 + 175 = 0$ , ergo  $+ 5$  est radix ejusdem æquationis per *Propos. 1. num. 5.*

II. Minuenda sit eadem æquatio  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$  numero binario. Fiat  $x - 2 = y$ , erit  $x = y + 2$ . Substituatur in eadem æquatione hic valor loco ipsius  $x$ , erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\
 - 3x^2 & \quad - 3y^2 - 12y - 12 \\
 - 10x & \quad \quad - 10y - 20 \\
 + 24 & \quad \quad \quad + 24
 \end{array}$$

---

Summa  $y^3 + 3y^2 - 10y + 8 = 0$

Hæc nova æquatio habet singulas radices binario minutas, nempe  $0$ ,  $- 5$ ,  $+ 2$ , quæ prius erant  $+ 2$ ,  $- 3$ ,  $+ 4$ . Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, v. g.  $- 5$ ; erit  $- 125 + 75 + 50 = 0$ ; ergo per *Prop. 1. num. 5.* radix  $- 5$  est radix ejusdem æquationis.

COROLL. I. *Augendo radices æquationis, singula radices vere augmentur: contra vero falsæ minuuntur. Nam si ad radicem falsam  $- 4$  addatur  $+ 3$ ; minuitur, & fit  $- 1$ . Imo aliquando falsæ in veras transeunt, ut si ad falsam  $- 4$  addas  $+ 5$ , fit radix vera  $+ 1$ . Quod evidens est.*

COR.

COROLL. II. Minuendo radices æquationis, radices falsæ augmentur. Nam si ex radice falsa  $-3$  subtrahitur quantitas  $+2$ , fit  $-5$ , ut patet. At veræ minuuntur, imo & aliquando fiunt falsæ; ut si ex radice  $+2$  auferas  $+5$ , fiet  $-3$ , radix scilicet falsa.

SCHOL. Augendo radices æquationis habetur methodus convertendi radices falsas in veras, nec propterea veræ fiunt falsæ; quod docuit Cartesius (a), & patet ex Cor. I.

PROPOSITIO V.

Ex data æquatione secundum terminum tollere.

SI secundus terminus datæ æquationis afficitur signo  $+$ , augeantur radices quantitate cognita secundi termini divisa per exponentem æquationis. Si afficitur signo  $-$ , minuuntur radices eadem quantitate; in utroque casu habebitur nova æquatio secundo termino carens.

Sit æquatio  $x^2 + 6x - 16 = 0$ , ex qua secundus terminus tolli debeat.

Divisa quantitate cognita secundi termini 6 per exponentem 2; quotus 3 est quantitas, qua augeri debent (ob signum  $+$ ) radices æquationis.

Fiat ergo ut in Prop. antec.  $x + 3 = y$ , erit  $x = y - 3$ , quo valore substituto in æquatione, loco ipsius  $x$ , erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = y^2 - 6y + 9 \\
 + 6x & + 6y - 18 \\
 - 16 & - 16 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^2 - 25 = 0
 \end{array}$$

Est ergo  $y = 5$ ; proinde  $x (= y - 3) = 5 - 3 = 2$ .

II. Sit æquatio  $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ , in qua secundus terminus evanescere debeat.

Di-

---

(a) Geometriæ lib. 3. edit. 3. pag. m. 74.

Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur  $\frac{12}{3} = 4$  quantitas, qua minui debent (ob signum  $-$ ) æquationis datæ radices. Fiat ergo  $x - 4 = y$ , erit  $x = y + 4$ ; factaque hujus valoris substitutione, oritur nova æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\
 - 12x^2 & \quad - 12y^2 - 96y - 192 \\
 + 44x & \quad + 44y + 176 \\
 - 48 & \quad - 48 \\
 \hline
 \text{Summa} & y^3 \quad * \quad - 4y \quad * \quad = 0
 \end{array}$$

III. Quid vero si secundus terminus ex æquatione tollendus utroque signo  $+$  &  $-$  afficitur?

Sit æquatio  $x^2 - ax - ab = 0$ , ex qua tolli debet  $+ bx$  secundus terminus. Divisa quantitate cognita  $-a + b$  per exponentem 2, habetur  $\frac{-a + b}{2}$ , seu  $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ .

Fiat  $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = y$ , erit  $x = y + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ ; factaque hujus valoris substitutione, habetur æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = y^2 + ay - by + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \\
 - a & \quad - ay + by - \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}b^2 \\
 + b^x & \quad - ab \\
 - ab & \quad - ab \\
 \hline
 \text{Summa} & y^2 \quad * \quad - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 = 0
 \end{array}$$

*Demonstratur per Coroll. 1. & 2. Prop. antec.* Radices veræ ac falsæ ita augeri possunt, ac minui, ut fiant æquales nullitati, seu zero. Sic in primo exemplo æquatio  $x^2 + 6x - 16 = 0$  habet duas radi-

dices, unam falsam  $-8$ , alteram veram  $+2$ ; proinde augendo numero ternario utramque, prima erit  $-8 + 3 = -5$ , altera vero  $+2 + 3 = 5$ ; proinde  $-5 + 5 = 0$ .

Similiter sit æquatio  $x^2 - 4x - 12 = 0$ ; ut tollatur secundus terminus, minui debent ejus radices numero binario. Una ipsius radix vera est  $+6$ , altera falsa  $-2$ ; proinde utramque minuendo, erit prima  $+6 - 2 = 4$ , altera  $-2 - 2 = -4$ ; hinc  $+4 - 4 = 0$ . Atque hinc est, quod in æquatione, cujus omnes radices æquales sunt, sublato secundo termino, omnes alii evanescunt, ut videre est in æquatione  $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$ , atque aliis. Qua ratione autem regula sit augendi, vel minuendi radices sit inventa, patebit ex sequenti *Propos. ejusque Schol. 1.*

SCHOL. I. *Cum sæpe divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem primi, oriatur fractio, ut in tertio exemplo superiori contigit, quo praxis facilior in æquationibus præsertim altioribus evadat, præstat loco fractionis indeterminatam aliquam assumere, & binomium  $x + n$ , vel  $x - n$  elevare ad omnes illos gradus, quos æquatio data exigit; peractaque operatione, valores indeterminata  $n^1, n^2, n^3$  &c. substituere. Sic enim molestia fractionum minuitur, & facilius poterit ad examen operatio tota revocari. Data sit æquatio, ex qua secundus terminus auferri debeat,  $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$ . Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur fractio  $\frac{2}{3}$ ; fiat  $n = \frac{2}{3}$ , &  $x + n = y$ , erit  $x = y - n$ , quo quidem binomio ad secundam, & tertiam potestatem elevato, hoc est*

$$\begin{aligned} x &= y - n \\ x^2 &= y^2 - 2ny + n^2 \\ x^3 &= y^3 - 3ny^2 + 3n^2y - n^3 \end{aligned}$$

positivæ loco  $n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ , eorum valoribus  $n = \frac{5}{3}$ ,  $n^2 = \frac{25}{9}$ ,  $n^3 = \frac{125}{27}$ , facili negotio invenitur.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 - 5y^2 + \frac{75}{9}y - \frac{125}{27} \\
 + 5x^2 & + 5y^2 - \frac{50}{3}y + \frac{125}{9} \\
 - 2x & - 2y + \frac{10}{3} \\
 - 24 & - 24
 \end{array}$$

$$\text{Summa } y^3 - \frac{93}{9}y - \frac{308}{27} = 0$$

SCHOL. II. In omni æquatione terminus secundus, qui deficit, supponi potest affectus utroque signo  $+$  &  $-$ ; sic æquatio  $x^3 - ax + b^3 = 0$  supponitur  $x^3 + -ax + b^3 = 0$ , proinde facta comparatione cum termino, qui præcedit, nempe cum  $+x^3$ , habetur & permutatio & successio signorum, hoc est  $+ - & + +$ . Quod pariter accidit, facta comparatione cum termino, qui consequitur, nempe cum  $-ax$ . Nam similiter habetur  $+ - & - -$ ; ideoque in utroque casu indicatur una radix vera, & altera falsa per Prop. I. hujus num. 3.

## PROPOSITIO VI.

Ex æquatione terminum tertium tollere.

I. Sit æquatio  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ , ex qua tertius terminus sit auferendus.

Inveniri debet quantitas, qua radices datæ æquationis sic augeantur, aut minuantur, ut tertius terminus evanescat, quod quidem per analysim obtineatur hoc artificio.

Sit quantitas quæsitæ  $= z$ , fiat  $x + z = y$ , erit  $x = y - z$ : substituto hoc valore ipsius  $x$  in data æquatione, erit

$$\begin{array}{l|l} z^3 & = y^3 - 3zyy + 3z^2y - z^3 \\ + px^2 & + pyy - 2pzy + pzz \\ + qx & + qy - qz \\ - r & - r \end{array}$$

Cum igitur tertius terminus debeat evanescere, fiat æqualis zero, scilicet

$$\begin{array}{l} \text{Divid. per } y \quad 3z^2y - 2pzy + qy = 0 \\ \text{Tum per } 3 \quad 3z^2 - 2pz = -q \\ z^2 - \frac{2}{3}pz = -\frac{1}{3}q \end{array}$$

Occurrit æquatio secundi gradus resolvenda, ut docebitur infra *Prop. 1. Cap. 8.* quæ ab hac non dependet. Addatur scilicet utrinque quadratum ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe  $\frac{1}{9}pp$ , erit

$$z^2 - \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}pp = \frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q$$

$$\text{Extr. Rad.} \quad z - \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

$$z = \frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

$$\text{Sed } x = y - z, \text{ ergo } x = y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}.$$

Quo valore in data æquatione substituto, fiet æquatio termino tertio carens, ut in duobus sequentibus exemplis.

1. Sit enim æquatio  $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$ , erit

$$p = -4, \text{ \& } q = 4; \text{ hinc } y - \frac{1}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3}. \text{ Est ergo } x = y + \frac{2}{3}, \text{ ideoque erit}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27} \\
 - 4x^2 & - 4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9} \\
 + 4x & + 4y + \frac{8}{3} \\
 - 6 & - 6
 \end{array}$$

Summa  $y^3 - 2y^2 - \frac{130}{27} = 0$

2. Similiter sit æquatio data  $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ ,

erit  $p = -3$  &  $q = 3$ ; proinde  $y = \frac{2}{3}p - \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q} = y + 1$ . Fiat cum hoc valore nova æquatio, nempe

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\
 - 3x^2 & - 3y^2 - 6y - 3 \\
 + 3x & + 3y + 3 \\
 - 4 & - 4
 \end{array}$$

Summa  $x^3 - 3 = 0$

Habetur ergo æquatio termino tertio carens, in qua

$y = \sqrt[3]{3}$ .

II. Sit æquatio quarti gradus, ex qua tertius terminus exterminari debeat,  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ .

Fiat  $x + z = y$ , erit  $x = y - z$ , quo valore ipsius  $x$  in æquatione data substituto, habetur.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 - 4zy^3 + 6z^2y^2 - 4z^3y + z^4 \\
 + px^2 & + pyz^2 - 2pzy + pz^2 \\
 + qx & + qy - qz \\
 + r & + r
 \end{array}$$

Fiat terminus  $6z^2y^2 + py^2 = 0$ ; dividendo per  $y^2$ , erit  $6z^2$

$6z^2 + p = 0$ , hoc est  $z^2 = -\frac{p}{6}$ , &  $z = \sqrt{-\frac{p}{6}}$ ; ha-

betur ergo valor ipsius  $z$ .

Data sit jam æquatio specialis  $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$ , ex qua tertius terminus auferendus sit. Facta comparatione terminorum hujus cum terminis æquationis superioris, erit  $p = -6$ ,  $q = -8$

&c. adeoque  $z (= \sqrt{-\frac{p}{6}}) = \sqrt{\frac{6}{6}} = 1$ . Est ergo

$x = y - 1$ , qui valor si ponatur in æquatione data, oritur

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\
 - 6x^2 & \qquad \qquad - 6y^2 + 12y - 6 \\
 - 8x & \qquad \qquad \qquad - 8y + 8 \\
 - 3 & \qquad \qquad \qquad \qquad - 3
 \end{array}$$

Summa  $y^4 - 4y^3 \quad * \quad * \quad * = 0$

Unde æquatio facillime resolvitur. Nam  $y^4 = 4y^3$ ; proinde  $y = 4$ . Sed posita fuit  $x = y - z$ ; ergo  $x = 4 - 1 = 3$ : est ergo 3 radix ipsius æquationis.

SCHOL. I. Hoc eodem artificio inventa est regula tollendi ex æquationibus terminum secundum, quam in Prop. ant. docuimus. Nam si ex æquatione generali superiori secundus terminus supponatur æqualis zero, erit  $-3zyy$

$+ pyy = 0$ , proinde  $3z = p$ , &  $z = \frac{p}{3}$ ; unde pa-

ret, quantitatem addendam, vel subtrahendam radici datæ æquationis esse quantitatem cognitam secundi termini divisam per exponentem primi termini.

SCHOL. II. Eadem plane ratione tolli possunt ex æquationibus termini quartus, quintus, sextus &c. Sed quia pro quarto tollendo æquatio tertii gradus, pro quinto æqua-

tio quarti gradus, pro sex o æquatio quinti gradus occurrit; ideo non est hujus loci ulterius progredi.

### PROPOSITIO VII.

Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.

I. **A**ugeatur radix æquationis datæ quantitate aliqua per Prop. 4. exurget æquatio completa. Sit æquatio complenda  $x^3 - 19x - 30 = 0$ , in qua deest secundus terminus. Fiat per Prop. cit.  $x + 1 = y$ , erit  $x = y - 1$ . Substituatur hic valor loco  $x$  in data æquatione, erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 19x & \qquad \qquad - 19y + 19 \\ - 30 & \qquad \qquad \qquad = 30 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^3 - 3y^2 - 16y - 12 = 0$$

Habetur ergo æquatio completa cum secundo termino, in qua  $y = x + 1$ .

II. Sit æquatio incompleta  $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ , in qua tertius terminus deficit. Fiat, ut supra,  $x + 1 = y$ , erit  $x = y - 1$ , & facta substitutione hujus valoris loco ipsius  $x$ , erit

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ - 3x^2 & \qquad \qquad - 3y^2 + 6y - 3 \\ + 2 & \qquad \qquad \qquad + 2 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$$

En integra æquatio, in qua pariter  $y = x + 1$ .

Ratio est, quia secundus terminus v. g. deficit in æquatione, cum radices veræ æquantur falsis per Prop. 1. num. 4. Ergo si una ex veris augeatur, integra æquatio restituitur.

## PROPOSITIO VIII.

*Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.*

I. **E**st æquatio  $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$ , cujus radices  $+ a$ ,  $+ b$ ,  $- b$  multiplicandæ sunt per datam quantitatem  $= c$ .

Fiat  $cx = y$ , erit  $x = y : c$  (duo puncta (:)) sunt divisionis signum *ex Schol. 3. Prop. 8. Cap. 1.*). Substituatur ubique hic valor in data æquatione loco ipsius  $x$ , erit nova æquatio

$$\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} - \frac{b^2y}{c} + abb = 0$$

Et multiplicatis singulis terminis per  $c^3$ , factaque reductione, habetur

$$y^3 - acy^2 - bbc^2y + abbc^3 = 0$$

cujus radices sunt  $+ ac$ ,  $+ bc$ ,  $- bc$ .

II. Similiter est æquatio  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ , cujus radices  $+ 1$ ,  $+ 2$ ,  $+ 3$  multiplicari debent per quantitatem  $= 2$ .

Fiat  $2x = y$ , erit  $x = y : 2$ ; & hoc valore substituto in data æquatione loco ipsius  $x$ , oritur

$$\frac{y^3}{8} - \frac{6y^2}{4} + \frac{11y}{2} - 6 = 0$$

Multiplicentur omnes termini per cubum 8, factaque reductione, erit nova æquatio

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

cujus radices sunt  $+ 2$ ,  $+ 4$ ,  $+ 6$ .

COROLL. I. *Ex utroque exemplo satis apparet, ad multiplicandam æquationem per datam quantitatem satis esse eam multiplicare per progressionem Geometricam,*

ejus terminus primus sit 1, terminus secundus sit denominator rationis &c. Nam multiplicande sint radices ejusdem prioris æquationis per c, assumpta alia incognita y loco ipsius x; erit, ut prius

$$\begin{array}{ccccccc} y^3 & - & ay^2 & - & b^2y & + & abb = 0 \\ 1. & & c. & & c^2. & & c^3. \end{array}$$


---

$$y^3 - acy^2 - b^2c^2y + abbc^3 = 0$$

Similiter multiplicande sint per 2 radices alterius æquationis: assumpta y loco ipsius x, & multiplicata æquatione per progressionem Geometricam; erit, ut prius.

$$\begin{array}{ccccccc} y^3 & - & 6y^2 & + & 11y & - & 6 = 0 \\ 1. & & 2. & & 4. & & 8. \end{array}$$


---

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

### PROPOSITIO IX.

Radices æquationis dividere per datam quantitatem.

I. Sit æquatio  $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$ , cujus radices  $+ a$ ,  $+ b$ ,  $- b$  dividere oporteat per quantitatem  $= c$ .

Fiat  $\frac{x}{c} = y$ , erit  $x = cy$ , & substituto hoc

valore in data æquatione, erit

$$c^3y^3 - ac^2y^2 - b^2cy + abb = 0$$

Dividantur singuli termini per  $c^3$ , habetur

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

ejus radices sunt  $+ \frac{a}{c}$ ,  $+ \frac{b}{c}$ ,  $- \frac{b}{c}$ .

COROLL. Hinc apparet, ad dividendam æquationem per

per datam quantitatem, satis esse eam dividere per progressionem Geometricam, cujus primus terminus sit 1, secundus terminus sit denominator rationis. Nam assumpta nota incognita  $y$ , & progressionem Geometricam 1.  $c$ .  $c^2$ .  $c^3$  &c. erit æquatio, ut prius, divisa per  $c$ , nempe

$$\begin{array}{cccc} y^3 & \text{---} & ay^2 & \text{---} & b^2y & \text{+} & abb & \text{=} & 0 \\ 1. & & c. & & c^2. & & c^3. & & \end{array}$$


---

$$y^3 \text{ --- } \frac{ay^2}{c} \text{ --- } \frac{b^2y}{c^2} \text{ + } \frac{abb}{c^3} = 0$$

II. Eadem ratione dividenda sit per 3 æquatio numerica superior  $x^3 \text{ --- } 6x^2 \text{ + } 11x \text{ --- } 6 = 0$ , cujus radices sunt  $+ 1$ ,  $+ 2$ ,  $+ 3$ . Dividatur æquatio (assumpta incognita  $y$ ) per progressionem Geometricam 1, 3, 9 &c. nempe

$$\begin{array}{cccc} y^3 & \text{---} & 6y^2 & \text{+} & 11y & \text{---} & 6 & \text{=} & 0 \\ 1. & & 3. & & 9. & & 27. & & \end{array}$$


---

$$y^3 \text{ --- } 2y^2 \text{ + } \frac{11y}{9} \text{ --- } \frac{2}{9} = 0$$

Habetur nova æquatio, cujus radices sunt  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 1. Nam harum qualibet substituta in æquatione loco ipsius  $y$ , tota æquatio evanescit: proinde sunt radices quæsitæ per Propos. 1. hujus num. 5.

SCHOL. Ut æquationum radices augeantur, minuantur, multiplicentur, aut dividantur et ratione, quam docuimus, plane non opus est, ut illæ sint cognitæ, imo a Cartesio, & aliis tanquam prorsus incognitæ supponuntur. Nos tamen consulto, illustrandæ rei gratia, ut jam cognitæ usurpavimus.

## PROPOSITIO X.

*Æquationem a fractionibus liberare.*

I. **M**ultiplicetur radix æquationis per factum omnium denominatorum fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

$$\text{Sit æquatio data } x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$$

Multiplicetur per factum omnium denominatorum  $bcd$  radix æquationis; hoc est fiat  $bcdx = y$ , erit  $x = y : bcd$ , factaque hujus valoris substitutione in data æquatione, oritur

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^2c^2d^2} + \frac{aay}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0$$

Multiplicentur singuli termini per  $b^3c^3d^3$ , habetur æquatio sine fractionibus

$$y^3 - acdy^2 + a^2 b^2 cd^2 y + a^3 b^3 c^3 d^2 = 0.$$

II. Similiter sit æquatio  $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0$ . Multiplicetur radix æquationis per factum ex denominatoribus, hoc est per 10, nempe per progressionem Geometricam 1. 10 &c. per Coroll. Prop. 8. hujus.

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0$$

$$\text{I.} \quad 10. \quad 100. \quad 1000.$$

---


$$y^3 - 5y^2 + 20y - 24000 = 0$$

In qua quidem æquatione est  $y = 10x$ , proinde

$$\text{erit } x = \frac{y}{10}.$$

III.

III. Demum sit æquatio  $x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0$ .  
 Quia quantitas 3 metitur utrumque denominatorem,  
 multiplicetur radix æquationis per 3 modo explicato,  
 nempe

$$x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0$$

1. 3. 9.            27.

---

$$y^3 + 6y - 81 = 0$$

In hac æquatione habetur  $y = 3x$ , proinde dividi  
 debent per 3 singulæ radices hujus, ut habeantur  
 radices æquationis datæ, quod semper advertendum.

PROPOSITIO XI.

*Æquationem a radicalibus liberare.*

**I**D non eadem via semper assequimur; ideoque plu-  
 ra exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio  $x^3 + \sqrt{2} - 5x = 0$ . Fiat  $x:$   
 $\sqrt{2} = y$ , erit  $x = y\sqrt{2}$ , & hoc valore in data  
 æquatione substituto, erit

$$x^3 = 2y^3 \sqrt{2}$$

$$- 5x = - 5y \sqrt{2}$$

$$+ \sqrt{2} = + \sqrt{2}$$


---

Summa  $2y^3 \sqrt{2} - 5y \sqrt{2} + \sqrt{2}$

Et divisis omnibus terminis per  $\sqrt{2}$ , fit æquatio sine  
 radicalibus

$$2y^3 - 5y + 1 = 0.$$

II. Quandoque fit progressio Geometrica ex radi-  
 calibus, per quam tota æquatio multiplicata ab ir-  
 rationalibus liberatur. Ecce exemplum

K 4  $x^4 +$

$$x^4 + 2ax \sqrt{2} + 5abx^2 - a^3x \sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$

I                       $\sqrt{2}$ .                      2.                       $\sqrt{8}$ .                      4.

---

$$y^4 + 4ay^3 + 10aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$$

Radices autem hujus æquationis dividendæ erunt per  $\sqrt{2}$ , ut habeantur radices æquationis datæ. Nam  $y = x \sqrt{2}$ .

III. Sæpe etiam tota æquatio dividitur per radicalium progressionem Geometricam.

$$x^3 - ax + \sqrt[3]{2} + abx \sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$

I.                       $\sqrt[3]{2}$ .                       $\sqrt[3]{4}$ .                      2.

---

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \frac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione est  $y = x: \sqrt[3]{2}$ .

IV. Radicales ex æquationibus aliquando exterminantur per multiplicationem. Sit æquatio

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3 = 0$$

Multiplicentur radices universales per Propof. 12.  
Cap. 4.

$$\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3$$


---

$$\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3$$


---

$$\frac{1}{4}qq + \frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3$$


---

$$-\frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq} - \frac{1}{27}p^3 - \left( \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 \right)$$


---

$$\frac{1}{4}qq$$

$$\frac{1}{4}qq \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$$

$$= \frac{1}{3}p, \text{ hinc } x = \frac{1}{3}p. \text{ Ex } - 1 \times \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

$$\text{oritur } - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3.$$

V. Aequatio a radicalibus liberatur supponendo terminos radicales æquales litteris ad libitum assumptis, quæ singulatim in uno æquationis membro collocantur, & tota æquatio elevatur ad potentiam ab exponente radicis indicatam. Sit æquatio

$$x^3 - x\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$$

Fiat  $\sqrt{a} = p$ , &  $\sqrt{b} = q$ ; æquatio in hanc transformatur

$$x^3 - px + q = 0$$

Ponatur  $px$  seorsim in uno æquationis membro, nempe  $px = x^3 + q$ , & (ob  $\sqrt{a} = p$ ) tota æquatio elevetur ad secundam potestatem per *Reg. 4. Cap. 5.*

$$p^2 x^2 = x^6 + 2qx^3 + q^2$$

Deinde ponatur  $2qx^3$  in uno æquationis membro, hoc est  $2qx^3 = p^2 x^2 - x^6 - q^2$ , & iterum utrumque membrum ad secundam potestatem elevetur ob  $\sqrt{b} = q$ ; per *Reg. cit.* erit

$$4q^2 x^6 = p^4 x^4 - 2p^2 x^8 + x^{12} - 2p^2 q^2 x^2 + 2q^2 x^6 + q^4$$

$$\text{hoc est } x^{12} - 2p^2 x^8 - 2q^2 x^6 + p^4 x^4 - 2p^2 q^2 x^2 + q^4 = 0$$

Quod si fiat  $x^2 = y$ , deprimi poterit ad æquationem sexti gradus, scilicet

$$y^6 - 2p^2 y^4 - 2q^2 y^3 + p^4 y^2 - 2p^2 q^2 y + q^4 = 0$$

Demum in hac ultima æquatione loco  $p^2$ ,  $p^4$ ,  $q^2$ ,  $q^4$  substituantur eorum valores, nempe  $a$ ,  $a^2$ ,  $b$ ,  $b^2$ : obtinebitur æquatio a radicalibus expedita

$$y^6 -$$

$$y^5 - 2ay^4 - 2by^3 + a^2b^2 - 2aby + b^2 = 0$$

SCHOL. Si radicales sint cubicae, æquationis membra ad tertiam potestatem elevantur.

## PROPOSITIO XII.

*Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscumque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datae quantitati æqualis.*

I. **I**Nveniri debet quantitas, per quam ita multiplicentur æquationis datae radices, ut quantitas cognita in aliam datam commutetur.

Sit æquatio  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ , quantitas data  $= a$ , quæ sita sit  $= z$

Fiat  $x = \frac{y}{z}$ , & hic valor ponatur in data æquatione loco ipsius  $x$ ; assumpta nova incognita  $y$ , erit

$$y^3 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0$$

1. Fieri debeat quantitas cognita secundi termini

$p = a$ : si supponatur  $pz = a$ , erit  $z = \frac{a}{p}$ .

2. Quantitas cognita tertii termini  $q$  fieri debeat æqualis datae quantitati  $a$ ; erit  $qz^2 = a$ , proinde

$$z^2 = \frac{a}{q}, \text{ atque hinc } z = \sqrt{\frac{a}{q}}.$$

3. Pari modo fieri debeat ultimus terminus  $rz^3 = a$ ; erit  $z^3 = \frac{a}{r}$ , ideoque  $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$ .

Jam si multiplicetur secundus terminus cujuscunque æquationis per valorem inventum ipsius  $z$ , tertius

tius terminus per quadratum, quartus per cubum ejusdem valoris, & sic deinceps; habebitur æquatio quaesita. Tironum gratia res exemplis illustratur.

Sit æquatio  $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$ : quaeritur loco ipsius alia, in qua coëfficiens secundi termini 3 sit  $= 2$ . Erit ergo  $p = 3$ ,  $a = 2$ ; & cum sit ex

dictis  $z = \frac{a}{p}$ , erit  $z = \frac{2}{3}$ : proinde si per hunc va-

lorem multiplicentur radices hujus æquationis, assumpta nova incognita  $y$ , ut moris est, habebitur

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27} \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$$

II. Sit æquatio  $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$ , cujus loco quaeritur alia, in qua quantitas cognita tertiæ termini sit 4. Erit  $q = 9$ ,  $a = 4$ .

Quia vero  $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$  ex dictis superius, erit  $z =$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ; per hanc igitur quantitatem multiplicandæ sunt æquationis radices, nova incognita  $y$  assumpta, hoc est

$$\begin{array}{r} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27} \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 - 8y^2 + 4y - 8 = 0$$

III. Sit pro tertio casu eadem æquatio  $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$ , quæ in aliam commutanda, cujus terminus ultimus sit  $= 1$ .

Erit  $r = 27$ ,  $e = 1$ : quia vero ex annotatis su-

perius  $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$ ; erit  $z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$ , per quam quidem quantitatem multiplicari debent radices datæ æquationis, ut factum vides, & nova incognita  $y$  subrogari.

$$\begin{array}{r} x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0 \\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \\ \hline y^3 - 4y^2 + y - 1 = 0 \end{array}$$

**COROLL.** *Nemo non videt, huius propositionis mysterium in eo esse, ut per Analysis inveniatur incognita illius  $z$  assumptæ quantitas, per quam multiplicatis datæ cujuscumque æquationis radicibus, alia nova oritur æquatio, in qua terminorum coefficientes, sive etiam ultimus terminus sunt datæ quantitati æquales.*

## PROPOSITIO XII.

*Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.*

**I.** **M**AJOR æquatio, ea nempe, quæ altioris gradus incognitam continet ( si sint æqualis gradus, utraque per aliam ) dividatur per minorem, omnino ut fit in aliis quantitatibus compositis per *Prop. 8. Cap. 1.* & neglecto quoto, continuetur divisio, donec incognita in residuo fiat minoris dimensionis, quam in divisore. Tunc enim divisor ipse dividatur per illud residuum, neglecto quoto; & sic semper, donec nihil ex divisione remaneat. Nam talis divisor erit maximus divisor communis, qui quæritur, per quem æquationes illæ datæ sunt divisibiles. **Exemplis res illustratur.**

Sint

Sint duæ æquationes  $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6 = 0$ ,  
&  $-12x^2 + 30x - 18 = 0$ , quarum maximus  
divisor communis quæritur.

Cum utraque sit multiplicata per 3, dividi pote-  
rit per 3, ut termini minores fiant; erunt  $x^3 -$   
 $4x^2 + 5x - 2 = 0$ , &  $-4x^2 + 10x - 6 = 0$ , imo  
hæc adhuc dividi potest per 2, unde fit  $-2x^2 + 5x$   
 $- 3 = 0$ .

Quia vero dividendo primum terminum  $x^3$  per

$$-2x^2, \text{ quotus est } \frac{x^3}{-2x^2} = \frac{x}{-2}; \text{ hinc apparet,}$$

æquationem illam actu dividi non posse, quin prius  
multiplicetur per denominatorem  $-2$ . Quo facto,  
habetur  $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$ . Hæc autem  
divisa per  $-2x^2 + 5x - 3$  (neglecto quoto) dat re-  
siduum  $+3x^2 - 7x + 4$ .

Continuetur divisio, & quia dividendo  $3x^2$  per  
 $-2x^2$ , quotus est  $= \frac{3}{-2}$ , signum est, æquationem

dividendam prius multiplicari debere per denomina-  
torem  $-2$ , unde fit  $-6x^2 + 14x - 8 = 0$ ; factaque  
divisione, habetur residuum  $-x + 1$ , seu  $x - 1 = 0$ ,  
per quod dividendo quantitatem ipsam, quæ hæcte-  
nus fuit divisor, scilicet  $-2x^2 + 5x - 3$ , nihil re-  
manet. Est ergo  $x - 1$  maximus divisor communis  
duarum datarum æquationum, qui tamen multipli-  
cari debet per eandem quantitatem, per quam pri-  
mo æquatio utraque communiter fuit divisa, eritque  
 $3x - 3 = 0$ .

II. Sint duæ æquationes  $x^3 - 16x^2 + 61x - 66 = 0$ ,  
&  $x^3 + 3x^2 - 34x + 48 = 0$ , quarum maxima com-  
munis mensura quæritur. Dividatur prima per se-  
cundam, & neglecto quoto 1, per residuum  $-19x^2$   
+

+  $95x - 114$  (quod, ut simplicius evadat, dividitur per  $-19$ , fitque  $x^2 - 5x + 6$ ) dividatur secunda æquatio data: neglecto quoto  $x$ , habetur residuum  $8x^2 - 40x + 48$ , quod divisum per  $8$ , dabit  $x^2 - 5x + 6$ . Hoc autem cum sit idem ac superius residuum, si fiat divisio, nihil remanet. Sunt ergo datæ æquationes divisibiles per  $x^2 - 5x + 6$  maximum earum divisorem communem.

III. Sint duæ æquationes  $a^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$ , &  $x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$ . Dividatur prima per secundam, habetur 1 pro quoto: quo neglecto, remanet  $-ax^3 - a^2x^2 - 4a^3x - 12a^4$ , quo diviso per  $-a$ , habetur primum residuum  $x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3$ .

Per hoc primum residuum dividatur secunda æquatio data; habetur quotus  $x - 4a$ : quo neglecto, remanet  $12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4$ , atque hoc diviso per  $12a^2$ , habetur secundum residuum  $x^2 - ax + 6a^2$ . Per hoc secundum residuum dividatur primum, nihil remanet. Maximus ergo divisor communis est  $x^2 - ax + 6a^2$ .

COROLL. I. Ex primo exemplo constat, communem divisorem inventum tunc solum esse multiplicandum per quantitatem, per quam divisa fuit æquatio, cum non una tantum, sed utraque æquatio per communem quantitatem divisa fuerit. Sic  $x - 1$  multiplicatur quidem per  $3$ , per quem divisa fuerat utraque æquatio, non autem per  $2$ , per quem una tantum æquatio fuit divisa.

COROLL. II. Reperto communi duarum æquationum divisore, habentur pariter earum radices, & problematis resolutio. Nam divisoris communis radices sunt eadem ac radices earundem æquationum. Sic in secundo exemplo divisor communis, seu æquatio  $x^2 - 5x + 6 = 0$  habet radices  $3$  &  $2$ , per Prop. 1. hujus num. 5., quas datarum æquationum easdem esse facile intelligitur.

SCHOL. I. Si æquationes fuerint plures, quam duæ, reperto communi divisore inter primam & secundam, inveniri deinde eodem modo debet divisor communis inter tertiam æquationem, & divisorem communem jam inventum. Sed hoc perraro accidit.

SCHOL. II. Hanc regulam eandem esse, ac regulam communis Arithmetica, qua invenitur maxima communis mensura, seu divisor inter duos numeros datos, iisdemque principiis inniti, nemo non videt.

PROPOSITIO XIV.

Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.

I. Sint duæ æquationes Propos. præc. quarum divisor communis quæritur, nempe  $A$  &  $B$

$$A \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$$

$$B \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$$

Sumatur ex  $A$  primi termini valor per Coroll. I. Prop. 1. Cap. 5. erit  $x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^4$ , qui subrogetur in æquatione  $B$  loco  $x^4$ , habebitur, facta terminorum inutilium reductione, æquatio

$$\begin{array}{l} \text{Div. per } a ) \quad ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0 \\ \quad C \quad x^3 + ax^2 + 4a^2x + 12a^3 = 0 \end{array}$$

Valor ipsius  $x^3$  ex hac æquatione  $C$  sumptus ponatur in æquatione  $A$ , non solum loco secundi termini  $-4ax^3$ , sed etiam loco primi  $x^4$  (multiplicando  $-ax^2 - 4a^2x - 12a^3$  X  $x$ , ut fiat  $= x^4$ ) erit primo  $x^4 = -ax^3 - 4a^2x^2 - 12a^3x$ ; subrogato deinde valore ejusdem  $x^3$  tam pro  $-ax^3$  hujus æquationis, quam pro  $-4ax^3$  æquationis  $A$  (hoc est pro  $-5ax^3$ ) scilicet  $5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4$ , æquatio prima transformatur in sequentem

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = -4a^2x^2 - 12a^3x \\
 - 5ax^3 & + 5a^2x^2 + 20a^3x + 60a^4 \\
 11a^2x^2 + 20a^3x & + 11a^2x^2 - 20a^3x \\
 + 12a^4 & + 12a^4
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{l}
 \text{Summa} \quad 12a^2x^2 - 12a^3x + 72a^4 = 0 \\
 \text{Divid. per } 12a^2 \quad ) \quad x^2 - ax + 6a^2 = 0
 \end{array}$$

Sumatur ex hac postrema æquatione valor primi termini, *per Coroll. cit.*  $x = ax - 6a^2$ , qui subrogetur ubique in tertia æquatione C, etiam pro primo termino (ducendo  $ax - 6a^2 \times x$ , ut fiat ad  $x^3$  æqualis) factaque terminorum substitutione, invenitur

$$6a^2x - 6a^2x + 12a^3 - 12a^3 = 0$$

Cumque termini omnes per signa contraria sese destruant, signum est, æquationem  $x^2 - ax + 6a^2 = 0$ , ex qua terminorum contrarietas ista derivatur, esse communem divisorem maximum datarum æquationum, qualem prorsus in secundo exemplo *Prop. præc.* invenimus.

II. Quæritur divisor communis duarum æquationum, quæ sequuntur *M* & *N*.

$$\begin{array}{l}
 M \quad x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14\frac{1}{2}x + 5 = 0 \\
 N \quad x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0
 \end{array}$$

Sumatur ex secunda valor primi termini *per Coroll. 1. Prop. 1. Cap. 5.* nempe

$$x^3 = -4x^2 - 8x - 8$$

Quo posito in prima æquatione (multiplicando illum per  $x$ , ut fiat ad  $x^4$  æqualis) habetur  $2x^2 + 6\frac{1}{2}x + 5 = 0$ , & multiplicando per 2 ad fractionem eliminandam, erit  $4x^2 + 13x + 10 = 0$ . Hac divisa  
per

per 4, oritur æquatio  $R$

$$R \quad x^2 + \frac{13x + 10}{4} = 0$$

Valor hujus  $x^2$  ex hac æquatione  $R$  desumptus per

*Coroll. cit.* ( hoc est  $\frac{-13x - 10}{4}$  ) subrogetur in se-

cunda æquatione  $N$  modo jam explicato ; invenitur

$$\frac{49x + 93}{16} = 0, \text{ \& dividendo per } \frac{49}{16}, \text{ habetur quotus}$$

$$x + 2 = 0, \text{ adeoque } x = -2.$$

Ponatur demum hic valor in æquatione tertia  $R$ , provenit

$$4 \frac{26 + 10}{4} = 0, \text{ hoc est } \frac{-26 + 26}{4} = 0$$

Proinde arguitur,  $x + 2 = 0$ , unde ista terminorum oritur oppositio, esse datarum æquationum divisorem communem quæsitum.

SCHOL. *Hoc problema sane ingeniosum, quod Joh. Huddenius (a) Belga vir subtilissimus excogitavit, usum quoque habet ad inveniendum communem divisorem duarum quarumcunque quantitatum. Nihil enim obstat, quin illæ considerari possint instar duarum æquationum, & æquari nihilo: imo in illis sumi potest ad libitum pro incognita quæcumque litera, quæ in utraque earum reperiatur. Sic in duabus sequentibus quantitibus, vel æquationibus  $d^2 - ad^2 + 2a^2b - 2abd = 0$ , &  $d^2 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$  sumi potest ad libitum pro in-*

L

co-

---

(a) V. in fine Geometr. Renati des Cartes edit. 3. ann. 1683.

cognita  $d$ ,  $a$ , vel  $b$ ; & procedendo eo ordine, quem nos in duobus exemplis sequuti sumus, invenietur communis earum divisor  $d - a$ , siquidem  $d$  pro incognita fuerit assumpta.

## C A P U T VII.

*De Resolutione Æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.*

### PROPOSITIO I.

*Æquationis data radices rationales, si quæ sint, invenire.*

I. **I**Nveniantur omnes ultimi termini divisores *per Propos. 9. Cap. 1.* ex quibus una cum incognita fiant totidem æquationes simplices, & per illas sigillatim dividatur æquatio: nam quæ exacte, & sine ullo residuo æquationem datam dividet, erit radix rationalis quæsitæ.

Sit æquatio  $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$ . Divisores ultimi termini *per Prop. cit.* sunt 1, 2, 4, 8. Quia vero ex mutatione signorum dignoscitur *per num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* radices omnes esse veras; proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt omnes cum signo  $-$ , nempe  $x - 1 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x - 4 = 0$ ,  $x - 8 = 0$ . Divisio autem frustra tentatur per  $x - 1$ , & per  $x - 2$ ; quare nec  $+ 1$ , nec  $+ 2$  possunt esse radices quæsitæ. Succedit autem divisio sine ullo residuo per  $x - 4$ , ut instituta divisione patet.

$$\begin{array}{r|l}
 x-4 \ ) \ x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0 & \begin{array}{l} x^2 \\ - 5x \\ + 2 \end{array} \\
 \hline
 \phantom{x-4 \ ) \ } x^3 - 4xx & \\
 \hline
 \phantom{x-4 \ ) \ } 0 - 5xx + 22x & \\
 \phantom{x-4 \ ) \ } - 5xx + 20x & \\
 \hline
 \phantom{x-4 \ ) \ } 0 + 2x - 8 & \\
 \phantom{x-4 \ ) \ } + 2x - 8 & \\
 \hline
 \phantom{x-4 \ ) \ } 0 \quad 0 & 
 \end{array}$$

Est ergo  $+ 4$  una ex radicibus quaesitis, & ex hac divisione oritur æquatio secundi gradus, nempe  $xx - 5x + 2 = 0$ . Cujus radices ut inveniuntur, tentanda non est divisio per  $x - 1 = 0$ , aut per  $x - 2 = 0$ . Nam cum per has quantitates tota æquatio ex dictis divisibilis non fuerit, neque una ejusdem pars divisibilis erit.

Tentetur itaque divisio per  $x - 4 = 0$ , & per  $x - 8 = 0$ : sed cum neque per hos divisores divisio exacte succedat, signum est, alias duas radices non esse rationales. Quæ tamen obtineri poterunt per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.* eritque altera  $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{17}$ , per quam si dividatur eadem æquatio secundi gradus  $xx - 5x + 2 = 0$ , emerget tertia radix quaesita  $= \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{17}$ .

II. Sit alia æquatio  $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ , cujus radices rationales inquiruntur.

Divisores ultimi termini per *Prop. 9. Cap. 1.* sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ex signis autem æquationis propositæ per *num. 3. Prop. 1. Cap. 6.* patet, radices fore duas quidem veras, & unam falsam; proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt tam cum signo  $+$ , quam cum

signo  $-$ , hoc est  $x - 1 = 0$ ,  $x + 1 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ ,  $x + 2 = 0$ ,  
 $x - 3 = 0$ ,  $x + 3 = 0$  &c. Divisio autem frustra ten-  
 tatur per  $x - 1$ , & per  $x + 1$ . Sed exacte succedit  
 per  $x - 2$ , per  $x + 3$ , & per  $x - 4$ . Sunt ergo ra-  
 dices quæsitæ  $+ 2$ ,  $- 3$ ,  $+ 4$ , ut computanti fit  
 evidens.

III. Demum sit æquatio  $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ ,  
 cujus radices rationales quærentur.

Ex signis æquationis apparet per num. 3. Prop. 1.  
 Cap. 6. radices tres esse veras, & unam falsam.  
 Inveniantur omnes divisores ultimi termini per Prop.  
 9. Cap. 1. Cum divisio exacte fieri non possit per  
 $x - 1$ , neque per  $x + 1$ , succedat autem sine ullo  
 residuo per  $x - 2$ : erit  $+ 2$  una ex radicibus veris.

Ex divisione hujusmodi oritur æquatio  $x^3 - 2x^2$   
 $- 23x + 60 = 0$ , quæ frustra dividitur per  $x - 2$ ,  
 vel per  $x + 2$ , succedit tamen exacta divisio per  
 $x - 3$ . Habetur ergo  $+ 3$  radix vera, & ex divi-  
 sione oritur æquatio secundi gradus  $x^2 + 1x - 20 = 0$ .  
 Cujus unam radicem esse veram, alteram falsam, ex  
 signis satis apparet. Dividatur itaque per  $x - 4$ , di-  
 visio succedit sine residuo, & quotus est  $+ 5$ ; pro-  
 ïnæ aliæ duæ radices habentur  $+ 4$ ,  $- 5$ , una ve-  
 ra, altera falsa.

SCHOL. Æquationis divisionem per tot divisores ten-  
 tari si cui res molesta sit, sequenti methodo uti pote-  
 rit, quæ divisores illos ad pauciores reducit. Cete-  
 rum si nullus sit divisor, qui datam æquationem exa-  
 cte & sine ullo residuo dividere possit, signum est,  
 nullam dari radicem rationalem, quod notetur.

## PROPOSITIO II.

*Radices rationales propius investigare.*

I. Sit æquatio  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ , cujus radices rationales quærimus. Inveniantur *per Prop. 9. Cap. 1.* divisores ultimi termini, nempe 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deinde æquationis datæ radices minuantur unitate *per Prop. 4. Cap. 6.* hoc est fiat  $x - 1 = y$ , ideoque erit  $x = y + 1$ , unde

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\
 - 9x^2 & \quad - 9y^2 - 18y - 9 \\
 + 26x & \quad \quad + 26y + 26 \\
 - 24 & \quad \quad \quad - 24 \\
 \hline
 \end{array}$$

Summa  $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$

Divisores ultimi termini hujus secundæ æquationis sunt 1, 2, 3, 6. Cum autem radices hujus deficient unitate a radicibus datæ æquationis, hæc, addita unitate, fient æquales prioribus, hoc est

$$\begin{array}{l}
 1 + 1 = 2 \\
 2 + 1 = 3 \\
 3 + 1 = 4 \\
 6 + 1 = 7
 \end{array}$$

Ex omnibus itaque divisoribus ultimi termini primæ æquationis, nempe 24, illi tantum seligantur, qui cum his convenire, & utrique æquationi communes esse reperiuntur, scilicet 2, 3, 4; nam 7 non reperitur inter divisores primæ æquationis. Ecce tibi tres tantum divisores, seu melius tres radices (pauciores enim esse non possunt *per num. 1. Prop. 1. Cap. 6.*) datæ æquationis.

II. Quod si æquatio data radices habeat partim

veras, partim falsas; divisores ultimi termini æquationis transformatæ & augeri & minui debent ea quantitate, qua minuta fuit radix æquationis propositæ, ut detegantur radices tam veræ, quam falsæ. Exemplo res fit clarissima.

Sit æquatio  $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ , quæ duas habet radices veras  $+ 2$ ,  $+ 3$ , & duas falsas  $- 4$ ,  $- 1$ , quæ tamen supponuntur non cognitæ. Minuatur æquatio unitate per *Prop. 4. Cap. 6.* hoc est, fiat  $x - 1 = y$ , erit  $x = y + 1$ ; proinde

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 & = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\
 - 15x^2 & \phantom{=} - 15y^2 - 30y - 15 \\
 + 10x & \phantom{=} + 10y + 10 \\
 - 24 & \phantom{=} + 24 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^4 + 4y^3 - 9y^2 - 16y + 20 = 0$$

Radices veræ hujus æquationis deficiunt unitate a radicibus veris æquationis datæ per *Cor. 2. Prop. 4. Cap. 6.* Contra vero radices falsæ erunt unitate majores. Itaque divisores ultimi termini 20 (inter quos quæsitæ radices latent) si augeantur unitate, fient æquales radicibus veris datæ æquationis. Contra vero si minuuntur unitate, fient æquales radicibus falsis ipsius æquationis datæ. Divisores ultimi termini sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 per *Prop. 9. Cap. 1.* qui unitate aucti fiunt 2, 3, 5, 6, 11, 21. Conferantur cum divisoribus ultimi termini æquationis datæ, hoc est 24; nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; tres tantum utriusque æquationi communes inveniuntur, scilicet 2, 3, 6. Ex quibus duæ sunt radices veræ quæsitæ, hoc est 2 & 3. Minuti vero unitate sunt 0, 1, 3, 4, 9, 19, qui si conferantur cum divisoribus æquationis datæ, nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; inveniuntur, tres tantum cum his convenire, scilicet, 1, 3, 4, ex quibus habentur duæ radices falsæ quæsitæ  $- 1$ ,  $- 4$ .

COROLL. Redactis hoc pacto ad paucissimos ultimi termini divisoribus, facile inveniuntur radices rationales, vel dividendo per illos datam æquationem, ut in propositione antecedente factum est; vel illos substituendo in æquatione proposita loco incognitæ, ut docuimus in Prop. 1. Cap. 6. num. 5. Ratio autem hujus methodi fundatur in Coroll. 1. & 2. Prop. 4. Cap. 6.

SCHOL. Hujus inventi laudem Jacobo a Waeffenaer Ultrajectino egregio Geometræ Franciscus a Schooten (a) acceptam refert.

PROPOSITIO III.

*Idem problema in æquationibus literalibus.*

Si æquatio ex literis composita, cujus radices rationales inquiruntur,

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 - abx + abd = 0 \\ + bx^2 + adx \\ - dx^2 - bdx \end{aligned}$$

I. Cum singulæ radices appareant in secundo termino sub signo contrario per num. 2. Prop. 1. Cap. 6. tentari debet divisio per  $x - a = 0$ , aut per  $x + b = 0$ ; quæ cum exacte, & sine ullo residuo succedat, patet radices datæ æquationis esse  $+ a$ ,  $- b$ ,  $+ d$ .

II. Quod si æquatio sit magis composita, fiat æquatio ex singulis terminis, in quibus sunt eadem literæ, & supponantur æquales zero per Cor 2. Prop. 2. Cap. 6. ut sic obtineri possit incognitæ valor. Exemplo res fit clarior. Sit data æquatio

$$\begin{aligned} x^3 - 2ax + a^2 x - abb = 0 \\ - bx^2 + abx - b^3 \\ + bbx \end{aligned}$$

L 4

Fiat

---

(a) Comment. in lib. III. Geometr. Cartes. p. m. 307.

Fiat æquatio ex omnibus terminis, in quibus reperitur quantitas  $bb$ , & supponatur æqualis zero, idest  $bbx - abb - b^3 = 0$ . Hæc dividatur per  $bb$ , quotus  $x - a - b = 0$  est divisor, per quem si divides æquationem datam, nihil remanet; proinde  $a + b$  est una ex illius radicibus: & ex divisione oritur æquatio secundi gradus  $x^2 - ax + bb = 0$ , cujus radices facile erit invenire per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.*

III. Sit demum æquatio, cujus radices rationales quæruntur

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx \\ - cx^3 + adx^2 - acdx \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{aligned}$$

Fiat æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur quantitas  $abd$ , eos supponendo æquales zero, nempe  $- abdx + abcd = 0$ , erit  $abdx = abcd$ , &  $x = c$ .

Dividatur æquatio proposita per  $x - c = 0$ , nihil remanet; proinde  $+ c$  est una ex illius radicibus. Divisa autem ipsamet data æquatione per  $x - c = 0$ , oritur æquatio tertii gradus, quæ sequitur.

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ - bx^2 + adx \\ - dx^2 + bdx \end{aligned}$$

Fiat iterum æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur  $ad$ , eos supponendo æquales zero, hoc est  $adx - abd = 0$ ; erit  $x = b$ : & cum divisio, quæ tentatur per  $x - b = 0$ , exacte succedat; habetur secunda radix datæ æquationis, eademque ratione reliquæ duæ obtineri possunt.

PROPOSITIO IV.

*Alia methodus æquationes compositas resolvendi.*

**I**nveniendæ sunt radices æquationis propositæ , nempe

$$\begin{aligned}
 x^4 &- ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\
 &- bx^3 + acx^2 - abdx \\
 &- cx^3 + adx^2 - acdx \\
 &- dx^3 + bcx^2 - bcdx \\
 &\quad + bdx^2 \\
 &\quad + cdx^2
 \end{aligned}$$

Primo dividatur æquatio in duas æquationes , quarum altera contineat omnes terminos , in quibus quantitas  $c$  reperitur , altera reliquos : erit

$$\begin{aligned}
 1.^a &- cx^3 + acx^2 - abcx + abcd = 0 \\
 &\quad + bcx^2 - acdx \\
 &\quad + cdx^2 - bcdx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.^a &x^4 - ax^3 + abx^2 - abdx = 0 \\
 &- bx^3 + adx^2 \\
 &- dx^3 + bdx^2
 \end{aligned}$$

Patet , primam dividi posse per quantitatem  $c$  , secundam per  $x$  : quo facto , habetur

$$\begin{aligned}
 1.^a &- x^3 + ax^2 - abx + abd = 0 \\
 &\quad + bx^2 - adx \\
 &\quad + dx^2 - bdx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.^a &x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\
 &- bx^2 + adx \\
 &- dx^2 + bdx
 \end{aligned}$$

Harum prima per secundam exacte dividitur , ut patet , & quotus est  $- 1$  ; unde apparet , haberi ex hac secunda æquatione divisorem exactum primæ .

Per

Per hanc si æquatio proposita dividatur, habebitur  $x - c = 0$ , una scilicet ex radicibus quæsitis. Restat autem æquatio ipsa ad gradum inferiorem depressa, scilicet

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ - bx^2 + adx \\ - dx^2 + bdx \end{array}$$

Hæc similiter dividatur in duas alias æquationes, in quarum una sint termini, in quibus quantitas  $b$  reperitur, in alia reliqui, erit

$$1.^a \quad - bx^2 + abx - abd = 0 \\ + adx$$

$$2.^a \quad x^3 - ax^2 + adx = 0 \\ - dx^2$$

Dividatur prima per  $b$ , secunda per  $x$ ; erit

$$1.^a \quad - x^2 + ax - ad = 0 \\ + dx$$

$$2.^a \quad x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx$$

Quarum prima per secundam exacte dividitur: nam quotus est  $-1$ , & nihil remanet. Per hanc secundam igitur dividatur superior tertii gradus; habebitur  $x - b$  pro secunda vera radice datæ æquationis: & remanet æquatio secundi gradus, videlicet

$$\begin{array}{r} x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx \end{array}$$

Quæ similiter divisibilis est in alias duas, nimirum

$$- ax + ad = 0, \text{ \& } x^2 - dx = 0$$

Harum una divisa per  $a$ , altera per  $x$ , habentur  $-x + d = 0$ , &  $x - d = 0$ ; ex quibus prima cum  
sit

fit exacte divisibilis per secundam ( nam quotus est  $-1$ , & nihil remanet ) dividi per hanc poterit æquatio superior secundi gradus, nempe

$$x^2 - ax + ad = 0 \\ - dx$$

atque erit  $x - d$  tertia radix quæsitæ ; quarta autem  $x - a$ , facta divisione, habetur ex quotò .

COROLL. I. *Vel ex hoc uno exemplo apparet, methodum in eo esse : 1.º ut æquatio proposita in duas dividatur æquationes, quarum qualibet contineat terminos iisdem fere literis conflatos : 2.º ut dividendo per quantitatem, quæ in illis communiter reperitur, earum æquationum terminos, ad inferiorem gradum æquationes illæ deprimantur : 3.º ut observetur, an una æquatio per alteram sit exacte & sine ullo residuo divisibilis . Nam tunc illa erit communis mensura, hoc est dividere poterit non solum illam æquationis partem, sed etiam totam æquationem datam, & aliquam ex illius radicibus exhibere . Ratio est, quia quantitas, quæ exacte dividit partes, etiam totum dividat, necesse est . Ceterum æquatio proposita dividi poterat in duas alias alio, vel alio modo, ac a nobis factum est, ut consideranti patebit .*

COROLL. II. *Quod si non omnes æquationis datæ radices hac ratione inveniri possint, indicio est, reliquas esse irrationales, de quibus inferius .*

## P R O P O S I T I O V.

*Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere.*

I. **S**I data æquatio duas æquales radices habere supponitur, multiplicetur per quamcumque progressionem Arithmeticam, hoc est primus terminus æquationis per primum terminum progressionis, secundus terminus per secundum &c. & productum, quod inde

inde fit, erit  $\equiv 0$ , sicuti æquatio ipsa data supponitur  $\equiv 0$ . Deinde inveniatur æquationum duarum, datæ & productæ, communis divisor *per Prop. 13. Cap. 6.* per quem divisa ipsamet æquatio data, quoties opus sit, exhibebit radices æquales. Sit æquatio

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 8x & - & 4 & = & 0 \\ 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$


---

$$3x^3 - 10x^2 + 8x - 0 = 0$$

Hæc divisa per  $x$  fit uno gradu inferior, nempe

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Divisor autem communis hujus & datæ æquationis est  $x - 2 = 0$  *per Prop. 13. Cap. 6.* per quem data æquatio bis divisa dat radices 2, 2, 1.

II. Poterat autem eadem æquatio per progressionem Arithmeticam alio, vel alio modo multiplicari, scilicet

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 8x & - & 4 & = & 0 \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \end{array}$$


---

$$0 - 5x^2 + 16x - 12 = 0$$

Hujus enim & propositæ æquationis communis divisor est, ut antea,  $x - 2 = 0$ .

III. Similiter si secundum terminum auferre libeat, ita progressio Arithmetica disponitur.

$$\begin{array}{rcccc} x^3 & - & 5x^2 & + & 8x & - & 4 & = & 0 \\ 1 & & 0 & & -1 & & -2 & & \end{array}$$


---

$$x^3 \quad * \quad - 8x + 8 = 0$$

Cujus quidem æquationis & datæ communis divisor semper reperitur  $x - 2 = 0$ .

IV. Si æquatio data tres habeat radices æquales, his multiplicentur ejus termini per terminos progressionis Arithmeticæ, ut supra: si habeat quatuor radi-

dices æquales , ter multiplicentur : si quinque radices æquales , quater &c. Sit æquatio , quæ tres radices æquales habere supponitur.

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & - & 6x^2 & + & 8x & - & 3 = 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{ccccccc} 0 & - & 12x^2 & + & 24x & - & 12 = 0 \\ & & 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

---


$$0 + 24x - 24 = 0$$

Communis divisor est  $x - 1$  ; per quem si ter dividatur æquatio proposita , quotus dabit tres radices æquales  $+ 1$  ,  $+ 1$  ,  $+ 1$  . Quarta vero ( cum in æquatione secundus terminus desit ) erit  $- 3$  per Prop. 1. Cap. 6. num. 4.

*Demonstr.* Per progressionem Arithmeticam æquatio data in aliam convertitur , quæ continet easdem radices æquales una minus . Nam ut superiora exempla docent , ea potissimum progressio assumitur , quæ vel incipit a zero , vel desinit in zerum , ut æquatio , quæ inde producitur , fiat uno gradu inferior , ideoque radicum numerus decrescit , fitque una radice minor . Per iteratas autem ejusmodi multiplicationes ad eam æquationem devenitur , in qua una tantum æqualium radicum continetur : proinde si hujus & propositæ æquationis communis divisor inveniat , ille æqualium radicum unam dabit .

**COROLL. I.** Manifestum est , hac ratione tolli posse ex æquatione data terminum , quem quis voluerit , collocando sub eo zerum , ut allata exempla docent .

**COROLL. II.** Si communis divisor nullo modo reperiri possit , tunc infertur , radices æquales esse irracionales , quæ non sunt hujus loci .

**SCHOL. I.** Communis divisor non est necesse , ut inveniat inter æquationem datam & æquationem ex Arithmetica progressionem productam , ut in primo exemplo factum est :

est: sed commodius aliquando sumitur inter duas æquationes productas, ut inter  $3x^2 - 10x + 8 = 0$ , &  $5x^2 + 16x - 12 = 0$ , quæ habentur in eodem primo exemplo, quarum divisor communis est  $x - 2$ , ut prius.

SCHOL. II. Pulcherrimum hoc problema, quod Johanni Huddenio (a) Belgæ acerrimi ingenii viro debemus, quanti sit usus in Geometria sublimiori producendis Tangentibus, pro determinandis quæstionibus de Maximis, & Minimis, aliisque pluribus, satis intelliget, qui ad eam gradum faciet.

## C A P U T VIII.

### De Æquationibus Quadraticis.

I. **S**I æquationum radices inveniri nequeant per ea, quæ in Capite præcedenti explicavimus, signum erit, radices irrationales, vel etiam imaginarias in illis contineri, aliaque via resolutionem illarum esse ineundam. Proinde regulas peculiare pro æquationibus ejusmodi trademus a quadraticis incipiendo; quæ si fractionibus, aut radicalibus implicentur, prius ab illis expediri debent per ea, quæ docuimus in Prop. 2. 8. & 9. Cap. 6.

## P R O P O S I T I O I.

*Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.*

I. **S**I æquatio quadratica sit pura, ut  $x^2 = ab$ , extracta hinc inde secunda radice, habetur valor quæsitus, nempe  $x = \sqrt{ab}$ . Eadem ratione  $x^2 = 14400$ , extracta pariter radice, erit  $x = \sqrt{14400}$ : & si per communem Arithmeticam acta radix extrahatur, habetur  $x = 120$ .

II. Si

---

(a) De reductione æquat. Reg. x. in fine Geom. Cartes. pag. m. 433.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut  $x^2 + ax = b^2$ , regula hæc erit: ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe ex  $\frac{1}{2} a$ , fiat quadratum  $\frac{1}{4} aa$ , quod utrique membro æquationis addatur, ut potentia fiat completa, unde radix secunda extrahi possit. Ecce exemplum. Sit æquatio data

$$\begin{array}{r}
 x^2 + ax = bb \\
 \text{Adde} \quad \frac{1}{4} a^2 \quad \frac{1}{4} a^2 \\
 \hline
 x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2 = bb + \frac{1}{4} a^2 \\
 \text{Extr. rad.} \quad x + \frac{1}{2} a = \sqrt{bb + \frac{1}{4} a^2}
 \end{array}$$

$$x = \sqrt{bb + \frac{1}{4} a^2} - \frac{1}{2} a$$

Sit aliud exemplum  $x^2 - 3ax = b^2$ . Fiat ex dimidio coefficientis  $\frac{3}{2} a$  quadratum  $\frac{9}{4} a^2$ , quod utrimque addatur, erit

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3ax = b^2 \\
 \text{Adde} \quad \frac{9}{4} a^2 \quad \frac{9}{4} a^2 \\
 \hline
 x^2 - 3ax + \frac{9}{4} a^2 = b^2 + \frac{9}{4} a^2 \\
 \text{Extr. rad.} \quad x - \frac{3}{2} a = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4} a^2} \\
 x = \sqrt{b^2 + \frac{9}{4} a^2} + \frac{3}{2} a
 \end{array}$$

*Demonstratio* ex ipsa potentia secunda genesi emanat. Nam in binomio ad potentiam secundam eleva-

vato quantitas secundæ termini est duplum facti ex utraque binomice radicis parte. Cum igitur habeatur ( in primo exemplo )  $x$  pars una, erit  $\frac{1}{2} a$  pars altera radicis, ex qua potentia secunda completetur.

COROLL. Hinc patet, in eisdemmodi æquationibus radicem secundam obtineri, accipiendo summam, vel differentiam radicis primæ & tertiæ termini potentie completæ. Accipitur summa, cum omnes termini sunt positivi, ut  $x + \frac{1}{2} a$  in primo exemplo; differentia vero, si secundus terminus sit negativus, ut  $x - \frac{3}{2} a$  in secundo exemplo.

SCHOL. I. Æquationes affectæ secundi gradus resolvuntur etiam facillime, sublato secundo termino per Prop. 5. Cap. 6. Sit enim eadem æquatio resolvenda  $x^2 - 3ax = b^2$ , seu  $x^2 - 3ax - b^2 = 0$ . Ut tollatur secundus terminus, fiat  $x = y + \frac{3}{2} a$ , erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = y^2 + 3ay + \frac{9}{4} a^2 \\
 - 3ax & \quad - 3ay - \frac{9}{2} a^2 \\
 - b^2 & \quad \quad - b^2 \\
 \hline
 & y^2 - \frac{9}{4} a^2 - b^2 = 0
 \end{array}$$

Est ergo  $y^2 = \frac{9}{4} a^2 + b^2$ , & extracta radice,  $y =$

$\sqrt{\frac{9}{4} a^2 + b^2}$ . Ponatur hic valor loco  $y$  in æquatione

$x = y + \frac{3}{2} a$ , erit  $x = \frac{3}{2} a + \sqrt{\frac{9}{4} a^2 + b^2}$   
omnino ut prius.

SCHOL.

SCHOL. II. *Omnis æquatio quadratica duas habet radices, alteram affirmativam, negativam alteram. Nunc quadratum quodlibet, v. g. 25, tam oritur ex 5 X 5, quam ex -5 X -5. Proinde si fuerit æquatio  $x^2 = ab$ , valor erit  $x = \pm \sqrt{ab}$ , hoc est valor ipsius  $x$  tam habetur per radicem positivam  $+\sqrt{ab}$ , quam per negativam  $-\sqrt{ab}$ . Sic etiam in exemplo superiori*

Schol. I. *radix positiva est  $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ ,*

*negativa vero  $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ . Quod adeo certum est, ut si alterutra ponatur in æquatione data loco  $x$ , termini omnes evanescunt, proinde utraque est vera radix per num. 5. Prop. 1. Cap. 6. Brevitatis autem gratia utrumque signum apponunt, unum sub alio  $\pm$ . Quod pro iis, quæ dicenda sunt, notetur.*

## PROPOSITIO II.

*Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.*

**S**It æquatio generalis  $x^2 + 2px + q = 0$ , repræsentans omnes æquationes secundi gradus, ita ut  $+2p$  repræsentet coefficientem secundi termini cum suo signo; &  $+q$  ultimum terminum cum suo pariter signo, ut explicavimus in Coroll. 1. Prop. 2. Cap. 6. Summa radicum ejusdem æquationis sit  $= 2f$ , earumque differentia  $= 2g$ ; erit radix major  $f + g$ , minor vero  $f - g$  per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5. Cumque utraque sit unus valor ipsius incognitæ  $x$ , erit  $x = f + g$ , &  $x = f - g$ . Fiant igitur (mutatis signis) æquationes simplices  $x - f - g = 0$ , &  $x - f + g = 0$ , ex quarum multiplicatione oritur æquatio

$$x^2 - 2fx + ff = 0 \\ - gg$$

Quæ ex suppositione æqualitatis radicum erit æqualis æquationi  $x^2 + 2px + q = 0$ . Fiat ergo terminorum comparatio (neglecto primo utriusque termino) erit  $-2f = 2p$ ; unde habetur  $f = -p$ , &  $ff = p^2$ . Item  $ff - gg = q$ . seu  $gg = ff - q$ , & ponendo  $p^2$  loco  $ff$ , erit  $gg = p^2 - q$ , extractaque radice habetur  $g = \sqrt{p^2 - q}$ .

Determinato ita valore ipsarum  $f$  &  $g$ , erit radix major  $f + g = -p + \sqrt{p^2 - q}$ , minor vero  $f - g = -p - \sqrt{p^2 - q}$ .

**COROLL.** *Hinc habentur quatuor illæ formulæ generales pro æquatione quacunque secundi gradus resolvenda, de quibus in sequenti Propositione.*

### PROPOSITIO III.

*Æquationes secundi gradus per formulas generales resolvere.*

I. **Æ**quationes secundi gradus affectæ quatuor modis ratione signorum variari possunt, ideoque quatuor formulis generalibus exprimi solent, in quibus  $2p$  semper denotat quantitatem cognitam secundi termini,  $q$  vero quantitatem cognitam tertii, videlicet

$$\begin{aligned} \text{I. } & x^2 - 2px - q = 0 \\ \text{II. } & x^2 + 2px - q = 0 \\ \text{III. } & x^2 + 2px + q = 0 \\ \text{IV. } & x^2 - 2px + q = 0 \end{aligned}$$

II. Reperto valore incognitæ  $x$  per Prop. antec. habent-

bentur sequentes formulæ generales cum duplici signo  $\pm$  ob duplicem radicem affirmativam & negativam ex dictis *in Schol. 2. Prop. 1. hujus.*

$$\text{I. } x = p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

$$\text{II. } x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

$$\text{III. } x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$\text{IV. } x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

I. Proposita sit igitur æquatio secundi gradus resolvenda  $x^2 - 10x - 6 = 0$ .

Ex signis statim apparet, hanc æquationem pertinere ad primam formulam,  $x^2 - 2px - q = 0$ . Comparentur mutuo termini, erit  $2p = 10$ , &  $p = 5$ ; item  $q = 6$ . Est autem radix primæ formulæ generalis  $x = p + \sqrt{p^2 + q}$ , in qua si ponantur loco  $p$  &  $q$  earum valores, erit  $x = 5 + \sqrt{25 + 6}$ , seu  $x = 5 + \sqrt{31}$ . Altera ejusdem formulæ radix

$x = p - \sqrt{p^2 + q}$ , hoc est  $x = 5 - \sqrt{31}$ .

2. Sit æquatio  $x^2 + 1x - 2 = 0$ , quæ, ut ex signis liquet, pertinet ad secundam formulam  $x^2 + 2px - q = 0$ . Fiat comparatio terminorum, erit  $2p = 1$ , unde  $p = \frac{1}{2}$ , &  $q = 2$ . Radix formulæ

secundæ est  $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$ , ideoque positis loco  $p$  &  $q$  earum valoribus, habetur  $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$ , seu  $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$ . Altera radix ejusdem formulæ est  $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$ , proinde  $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$ .

3. Sit æquatio  $x^2 + 4x + 6 = 0$  pertinens ad tertiam formulam, ut ex signis patet,  $x^2 + 2px + q = 0$ . Comparando terminos utriusque, erit  $2p = 4$ , &  $p = 2$ , item  $q = 6$ . Radix autem generalis ejusdem formulæ est  $x = -p + \sqrt{p^2 - q}$ : substitutis in ea valoribus  $p$  &  $q$ , erit  $x = -2 + \sqrt{4 - 6}$ , seu  $x = -2 + \sqrt{-2}$ . Altera radix erit  $x = -2 - \sqrt{-2}$ . Hinc apparet, propositæ æquationis radices esse imaginarias.

4. Sit æquatio  $x^2 - 6x + 8 = 0$ , quæ ad quartam formulam spectat propter signorum similitudinem, nempe ad  $x^2 - 2px + q = 0$ . Facta terminorum comparatione, erit  $2p = 6$ , &  $p = 3$ , item  $q = 8$ : quibus valoribus  $p$  &  $q$  positis in formula radices generalis  $x = p + \sqrt{p^2 - q}$ , erit una radix  $x = 3 + \sqrt{9 - 8}$ , seu  $x = 3 + \sqrt{1}$ ; altera vero  $x = 3 - \sqrt{1}$ ; vel una  $x = 4$ , altera  $x = 2$ : ambæ sunt positivæ.

**COROLL.** Contingit non semel, ut tertiæ & quartæ formulæ radices sint imaginariæ, cum scilicet  $q$  major est, quam  $p^2$ , ut supra in tertio exemplo, quod solutioni problematum nihil obstat. Idem quoque accidit, si in æquatione desit secundus terminus, tertius autem sit cum signo  $+$ , ut  $x^2 + q = 0$ . Nam una radix erit  $x = -\sqrt{-q}$ , altera  $x = +\sqrt{-q}$ , proinde ambæ imaginariæ. Ceterum ubi ultimus æquationis terminus signo negativo afficitur, radices semper sunt reales, ut ex prima & secunda formula apparet.

PROPOSITIO IV.

*Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.*

I. **Æ**quationes tribus tantum terminis constantes, quarum primus ad quatuor, ad sex, & ad altiores quoque dimensiones ascendit; & in quibus exponentes terminorum incognitorum habent inter se & zero eandem differentiam, hoc est sunt in eadem proportione Arithmetica, ut 4, 2, 0, vel 6, 3, 0 &c. dicuntur æquationes *derivativæ secundi gradus*, & resolvuntur similiter, ac ipsæmet secundi gradus æquationes; ut, quæ afferuntur exempla, docent.

Sit æquatio  $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$ . Pone  $x^2 = y$ , erit  $x^4 = y^2$ , unde oritur  $y^2 - 6y - 4 = 0$ ; quæ si resolvatur per primam formulam generalem *Prop. antec.* habetur  $y = 3 + \sqrt{13}$ .

Quia vero posita fuit  $x^2 = y$ , erit  $x = \sqrt{y}$ , adeoque  $x = \sqrt{3 + \sqrt{13}}$ .

II. Sit æquatio  $x^6 + 4x^3 - 12 = 0$ . Pone  $x^3 = y$ , erit  $x^6 = y^2$ , unde oritur  $y^2 + 4y - 12 = 0$ . Quæ si resolvatur per formulas generales *Prop. ant.*, cum ratione signorum pertineat ad secundam formulam, erit valor ipsius  $y = -2 + \sqrt{16}$ , seu  $y = 2$ . At

vero cum posita fuerit  $x^3 = y$ , erit  $x = \sqrt[3]{y}$ , hoc est  $x = \sqrt[3]{2}$ .

Hæc omnia ex solutione problematum, quæ sequuntur, clarius elucescent.

P R O B L E M A I.

*Invenire quadratum, cui si addatur ejus radix, fiat æquale unitati.*

**S**it quæsitæ quadrati latus  $= x$ , erit per conditionem problematis æquatio

$$xx + = 1$$

per Prop. 1. adde

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

---


$$xx + x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Extr. radix

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$xx = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4}$$

adde

$$x = + \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$$

---


$$xx + x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

### P R O B L. II.

Duos numeros invenire, quorum summa a summa quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, subtracta relinquit 78; addita vero ad eorum factum efficit 39.

Sit numerorum quæditorum summa =  $2x$ , eorumque differentia =  $2y$ , erit major =  $x + y$ , minor =  $x - y$  per Coroll. Theor. 3. Cap. 5. Sit vero  $b = 39$ ; erunt  $2b = 78$ .

Si fiant quadrata, & ex eorum summa  $2x^2 + 2y^2$  auferatur summa numerorum  $2x$ ; erit per primam problematis conditionem æquatio

$$2x^2 + 2y^2 - 2x = 2b$$

Div. per 2 )  $x^2 + y^2 - x = b$

Quod si ad factum eorundem numerorum  $x^2 - y^2$  addatur eorum summa  $2x$ ; oritur ex secunda problematis conditione æquatio altera

$$x^2 - y^2 + 2x = b$$

Prop. 2. Cap. 5.  $x^2 + y^2 - x = b$

---


$$2x^2 + 1x = 2b$$

Div. per 2 )  $x^2 + \frac{1}{2}x - b = 0$

Hæc autem finalis æquatio pertinet ad secundam formulam generalem *Propos. 3. hujus*, ex qua habetur

$$\begin{aligned} \text{radix } x &= -p + \sqrt{p^2 + q} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 39} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6. \text{ Nam } p = \frac{1}{4}, \& q = b = 39. \end{aligned}$$

Valor autem ipsius  $y$  innotescit ex prima æquatione  $x^2 + y^2 - x = b$ , ex qua  $y^2 = b - x + x$ ; proinde substituto valore modo invento pro  $x$  &  $x^2$ , habetur  $y^2 = 39 - 36 + 6 = 9$ , unde  $y = 3$ ,  $x + y = 9$ , &  $x - y = 3$ .

SCHOL. Clavius (a) putavit hoc problema, quod ipse ænigma vocat, difficillimum; pro cuius solutione ipsemet Geometriæ opem implorat, contenditque, illud sine Geometria vix, aut nullo modo solvi posse. Quod quidem de Algebra Numerosa, quæ id temporis obtinebat, fortasse verum. Ceterum quam facile nunc per Speciosam a summis viris Vieta & Cartesio inductam hujusmodi problema sine Geometria resolvitur, jam vidimus. Atque hinc appret, quanta sit hujus supra illam utilitas & præstantia.

P R O B L. III.

Invenire tres numeros in proportione Arithmetica, quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2, & tertius per 3; producta sint equalia numero dato 30, quadrata vero, quæ ex ipsis numeris fiunt, equalia sint numero 66.

Pone numerum datum  $30 = a$ ,  $66 = b$ , & tres numeri quæsitæ vocentur  $A, B, C$ . Sit primus quæsitæ  $A = x$ , tertius  $C = y$ , eorum summa  $x + y$ , si bifariam dividatur, dabit per *Coroll. Theor.*

1. Cap. 5. numerum secundum  $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ .

Sunt autem ex prima problematis conditione

M 4

A

(a) V. Algeb. Cap. xxxi. Ænigma 58. p. m. 343.

## DE ÆQUATIONIBUS

$$A \quad x \times 1 = x$$

$$B \quad \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y \times 2 = x + y$$

$$C \quad y \times 3 = 3y$$

$$A + B + C = 2x + 4y = a$$

Proinde  $2x = a - 4y$

$$x = \frac{1}{2} a - 2y (= A)$$

$$\frac{1}{2} x = \frac{1}{4} a - y$$

Positoque hoc valore in quantitate  $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y (= B)$

erit  $B = \frac{1}{4} a - \frac{1}{2} y.$

Sunt ergo tres numeri quæsitæ

$$A \quad \frac{1}{2} a - 2y$$

$$B = \frac{1}{4} a - \frac{1}{2} y$$

$$C = y \quad (\text{nam } 2B - A = C = y)$$

Eorumque quadrata erunt

$$AA = 4y^2 - 2ay + \frac{1}{4} aa$$

$$BB = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{4} ay + \frac{1}{16} aa$$

$$CC = yy$$

$$\text{Summa} = 5 \frac{1}{4} y^2 - 2 \frac{1}{4} ay + \frac{5}{16} aa = b$$

$$21y^2 - 9ay + 1 \frac{1}{4} aa = 4b$$

$$\text{Divid. per 21} \quad y^2 - \frac{3}{8} ay + \frac{5}{74} aa = \frac{4}{21} b$$

Et substitutis loco  $a$  &  $b$  numeris datis, erit

$y^2$

$$y^2 - 12 \frac{6}{7} y + 53 \frac{4}{7} = 12 \frac{4}{7}$$

Subtr.  $53 \frac{4}{7} \quad 53 \frac{4}{7}$

---

$$y^2 - 12 \frac{6}{7} y = -41$$

Hinc per Prop. 1. vel 3. hujus inveniatur  $y = 7$  ;  
proinde innotescant reliqui

$$A = \frac{1}{2} a - 2y = 1$$

$$B = \frac{1}{4} a - \frac{1}{2} y = 4$$

$$C = y = 7$$

P R O B L. IV.

*Datum numerum 26 in tres partes continuo proportionales geometricè dividere, ut quadratum mediæ aquetur duplo facti mediæ & minimæ, & præterea sextuplo ejusdem minimæ.*

Pone numerum datum dividendum  $26 = a$ , & sit trium proportionalium minima  $= x$ , media  $= y$ ; erit maxima  $= a - x - y$ . Cum autem factum maximæ & minimæ sit æquale quadrato mediæ per Theor. 5. Cap. 5. erit

$$ax - xx - xy = y^2$$

sed ex conditione problematis  $y^2 = 2xy + 6x$ ; ergo

$$\begin{array}{l} ax - xx - xy = 2xy + 6x \\ \text{Div. per } x \quad a - x - y = 2y + 6 \end{array}$$

Hinc habentur tres partes proportionales

$$\begin{array}{r} 2y + 6 \\ + y \\ + x \\ \hline \end{array}$$

Summa

$$3y + x + 6 = a$$

Di-

$$3y = a - x - 6$$

*Divid. per 3.*  $y = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}x - 2$

Ponatur brevitatis causa loco  $a$  numerus datus 26 ,  
erit

$$y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$$

$$y^2 = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

Cui æqualis supponitur  $2yx + 6x$ . Substituto proinde  
in hac quantitate pro  $2y$  ejus valore , oritur æquatio

$$-\frac{2}{3}x^2 + 19\frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x + 44\frac{4}{9}$$

*Subtr.*  $\frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x$        $\frac{1}{9}x^2 - 4\frac{4}{9}x$

---

$$-\frac{7}{9}x^2 + 23\frac{7}{9}x = 44\frac{4}{9}$$

*Mult. per 9*       $-7x^2 + 214x = 400$

*Divid. per 7*       $x^2 - 30\frac{4}{7}x = -57\frac{1}{7}$

Hinc *per Propos. 1. vel 3. hujus* innotescet  $x = 2$ ,  $y$   
(  $= -\frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$  )  $= 6$ , & pars maxima  $= 18$ .  
Quæ simul conficiunt numerum 26.

## P R O B L. V.

*Datis duobus numeris , duos alios invenire , inter quos  
datorum alter sit geometricè , alter arithme-  
tice proportionalis .*

**S**It ex datis numeris alter  $= a$ , alter  $= b$ ; qua-  
sitorum primus  $= x$ , secundus  $= y$  : erit per  
primam problematis conditionem

$$x . a :: a . y$$

*Theor.*

Theor. 4. Cap. 5.  $xy = aa$ , &  $x = \frac{aa}{y}$

Similiter per secundam problematis conditionem erit

Theor. 1. Cap. cit.  $x \cdot b \therefore b \cdot y$   
 $x + y = 2b$ , hinc  $x = 2b - y$

Et ( ob  $x = \frac{aa}{y}$  )  $\frac{aa}{y} = 2b - y$

Multiplic. per  $y$   $aa = 2by - yy$

Prop. 1. hujus adde  $yy - 2by = -aa$   
 $b^2 \qquad b^2$

---


$$yy - 2by + b^2 = b^2 - aa$$

Extr. rad.  $y - b = \sqrt{b^2 - aa}$

$$y = b + \sqrt{b^2 - aa}$$

$$x (= 2b - y) = b - \sqrt{b^2 - aa}$$

Sit  $a = 3$ ,  $b = 5$ : erit  $y = 5 + \sqrt{25 - 9} = 5 + 4 = 9$ ,  
 &  $x = 5 - \sqrt{25 - 9} = 5 - 4 = 1$ . Inveniuntur ergo 1 & 9, inter quos datorum alter 3 mediat geometrica, alter 5 arithmetice.

Sit  $a = 4$ ,  $b = 5$ ; erit  $y = 8$ ,  $x = 2$ : habentur ergo 2 & 8, inter quos unum datorum 4 est medius geometrica proportionalis, alter 5 est medius arithmetice.

### P R O B L E M A VI.

*Duo Mercatores societatem ineunt. Primus summam nescio quam posuit, & mansit in societate menses 12: alter posuit aureos 30, quos in societate reliquit mensibus 17. Invenerunt, lucrum esse aureorum  $18\frac{3}{4}$ . Primus pro pecunia in sortem collata una cum lucro habuit aureos 26: quaritur quantum ipsemet primus posuerit?*

**E**Sto summa a primo posita =  $x$ , tempus, seu menses 12 =  $a$ : summa alterius 30 =  $b$ , menses

les  $17 = c$ ; erit summa primi cum suo tempore  $= ax$ , summa alterius cum tempore  $= bc$ , & utriusque summa  $= ax + bc$ . Lucrum ex societate factum sit  $= d$ . Sors autem primi cum lucro est  $26 = f$ . Ut innotescat lucrum primi, fiat

$$\text{Cor. 1. Theor. 4. } ax + bc. d :: ax. \frac{adx}{ax + bc}$$

*Cap. 4.*  
Cui si addatur pecunia ab ipso in sortem collata, nempe  $x$ , habetur æquatio

$$x + \frac{adx}{ax + bc} = f$$

Et ad tollendas fractiones multiplicando per  $ax + bc$ , habetur.

$$\begin{array}{r} axx + bcx + adx = afx + bcf \\ \text{Propos. 2.} \quad \quad \quad axx + bcx = bcf \\ \text{Cap. 6.} \quad \quad \quad \quad \quad + adx \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - afx \end{array}$$

Positis autem numeris determinatis loco  $a, b, c$ , &  $f$ , erit

$$\begin{array}{r} 12x^2 + 423x = 13260 \\ \text{Divid. per 12} \quad x^2 + 35\frac{1}{4}x = 1105 \end{array}$$

Hinc per *Prop. 1. vel 3.* hujus invenitur  $x = 20$  pro pecunia a Mercatore primo posita.

SCHOL. Hoc problema fuit Florentiæ publice propositum ann. 1653. Cumque diu insolutum remansisset, ubi ad notitiam Caroli Rinaldini illud venit, fuit ab eodem statim resolutum, ut ipse testatur in *Arte Analytica Mathematicum pag. 526.* Expedita tamen magis hæc nostra solutio est.

Problemata Geometrica.

P R O B L. I.

*Datis in triangulo rectangulo perpendiculari AB, & aggregato hypotenuse ac basis AC + BC, hypotenusam & reliquum latus invenire. Fig. 1.*

**S**It perpendicularis  $Ab = a$ , aggregatum hypotenuse ac basis  $AC + BC = b$ , &  $AC = x$ : erit  $BC = b - x$ : proinde per 47. l. 1. Eucl.

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2; \bullet$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b} = AC$$

$$b^2 - a^2$$

$$BC (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

SCHOL. Ex aequatione ultima problematum erui possunt regulæ arithmeticae, quarum aliquas ad ceterarum exemplum hic subijcimus.

*Regula Arithm. 1.* Summa quadratorum perpendicularis ( $a^2$ ) & aggregati hypotenuse & basis ( $b^2$ ) dividatur per duplum ejus aggregati ( $2b$ ); quotus dabit hypotenusam  $AC$ .

*Regula Arithm. 2.* Ex quadrato aggregati hypotenuse & basis ( $b^2$ ) subtrahere quadratum perpendicularis ( $a^2$ ), & residuum ( $b^2 - a^2$ ) divide per duplum ejusdem aggregati ( $2b$ ); quotus dabit basim  $BC$ .

## P R O B L. II.

*Datis in triangulo rectangulo basi BC, & aggregato hypotenusæ & perpendicularis AC + AB, hypotenusam & perpendicularem invenire. Fig. 1.*

**S**It basis  $BC = a$ , aggregatum hypotenusæ & perpendicularis  $AC + AB = b$ , hypotenusæ vero  $AC = x$ , erit  $AB = b - x$ , & per 47. l. 1. *Eucl.* habetur in terminis analyticis

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 - 2bx + x^2 + a^2 \\ b^2 - 2bx + a^2 & \\ 2bx &= a^2 + b^2 \\ & \quad b^2 + a^2 \\ x &= \frac{b^2 + a^2}{2b} = AC \end{aligned}$$

$$\text{Et } AB (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

*Regula Arith.* Summa quadratorum basis & aggregati hypotenusæ & perpendicularis ( $a^2 + b^2$ ) divisa per duplum ejusdem aggregati ( $2b$ ) dat hypotenusam  $AC$ . Differentia vero eorumdem quadratorum ( $b^2 - a^2$ ) divisa per duplum ejusdem aggregati ( $2b$ ) dat perpendicularem  $AB$ .

**COROLL.** *Tam ex primo quam ex secundo problema-ze habetur regula inveniendi in numeris infinita triangula rectangula, quorum latera per numeros integros, & rationales exprimantur. Habentur enim tria latera BC*

$$= a, AC = \frac{a^2 + b^2}{2b}, \text{ \& } AB = \frac{b^2 - a^2}{2b}, \text{ qui-}$$

*bus ad eandem denominationem redactis (multiplicando a X 2b), & deleto communi denominatore; erunt BC = 2ab, AC = a^2 + b^2, & AB = b^2 - a^2.*

Su-

$$30 \overline{) 100} \begin{array}{r} 3 \\ 90 \\ \hline 10 \end{array}$$

QUADRATICIS. CAP. VIII. 191

Sumantur itaque ad arbitrium pro  $a$  &  $b$  duo quicumque numeri. Sic  $a = 1$ ,  $b = 2$ , erit  $2ab = 4$ ,  $a^2 + b^2 = 5$ ,  $b^2 - a^2 = 3$ . Latera ergo trianguli rectanguli quæsitæ sunt 3, 4, 5.

Sic  $a = 5$ ,  $b = 7$ ; erit  $2ab = 70$ ,  $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$ , &  $b^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$ . Sunt ergo latera quæsitæ 24, 70, 74, & sic de aliis infinitis.

P R O B L. III.

In triangulo quocunque  $ABC$  datis uno angulo  $BAC$ , latere  $AC$  adjacente, & reliquorum laterum  $AB + BC$  summa, latus  $AB$  invenire. Fig. 2.

EX puncto  $C$  ad latus quæsitum  $AB$  demittatur perpendicularis  $CD$ . In triangulo rectangulo  $ADC$  ob datum angulum  $DAC$  & hypotenusam  $AC$  dantur etiam latera  $AD$ , &  $CD$  per *Problem. 2. Trigonom. Tacquet.* Ex data itaque laterum  $AB + BC$  summa auferatur latus  $AD$  jam notum, relinquetur summa  $BD + BC$  pariter nota. Quæritur latus  $BD$ .

Sit laterum  $BD + BC$  summa data  $= c$ , latus  $CD = b$ , latus quæsitum  $BD = x$ ; erit  $BC = c - x$ , &  $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$  per *Propos. 47. l. 1. Eucl.* hoc est

$$x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$$

$$2cx = c^2 - b^2$$

$$c^2 - b^2$$

$$x = \frac{\quad}{2c} = BD$$

2c

*Regula Arithm.* Inventis per Trigonometriam lateribus  $AD$  &  $CD$ , si quadratum lateris  $CD$  ( $b^2$ ) auferas a quadrato aggregati laterum  $BD + BC$  ( $c^2$ ), & resi.

residuum  $(c^2 - b^2)$  dividas per duplum ejusdem aggregati laterum  $(2c)$  dabitur latus  $BD$ , quod additum lateri jam invento  $AD$ , dat latus quæsitum  $AB$ .

SCHOL. Hinc patet, Trigonometriam quoque opem suam Algebrae conferre, Nam sine illa longiori sane calculo opus fuisset. Hoc problemate Guil. Whiston (a) utitur ad calculum Planetarum geometricum supputandum. At prolixiori circuitu hanc ipsam æquationem assequitur.

### P R O B L. IV.

Datis tribus cujuscunque trianguli lateribus superficiem invenire. Fig. 3.

PRoducatur, si opus sit, latus  $BC$  in  $D$ , in quod cadit a vertice  $A$  perpendicularis  $AD$ . Pona-  
tur autem  $AB = a$ ,  $AC = b$ ,  $BC = c$ ,  $AD = x$ ,  $CD = y$ ; erit  $BD = c + y$ .

Jam habetur per Prop. 47. l. 1. Eucl.

$$\begin{array}{l|l} \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 & \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \\ x^2 = b^2 - y^2 & x^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Proinde } b^2 - y^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2 \\ 2cy = a^2 - b^2 - c^2 \\ y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} \end{array}$$

$$\text{Hinc } y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}$$

Substituto valore  $y^2$  in superiori prima æquatione & extracta deinde radice, oritur

$$AD =$$


---

(a) Prælect. Astronom. Lem. vi. pag. 272. Londini 1707.

$$AD = \sqrt{\left( b^2 - \frac{a^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2} \right)}$$

$$\text{hoc est } AD = \sqrt{\left( \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2} \right)}$$

Quod si altitudo  $AD$  multiplicetur per dimidium basis  $BC$  ( $= \frac{1}{2} c$ ) hoc est per  $\frac{1}{4} cc$  (ob signum radicale ex *Prop. 4. Cap. 4.*) erit superficies quaesita

$$\sqrt{\left( \frac{1}{8} a^2 b^2 + \frac{1}{8} a^2 c^2 + \frac{1}{8} b^2 c^2 - \frac{1}{16} a^4 - \frac{1}{16} b^4 - \frac{1}{16} c^4 \right)}$$

*Regula Arithmetica* ad Geometriam practicam valde utilis, quam auctores communiter tradunt, est hujusmodi: ex laterum semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur tres differentiae, quae inter se multiplicentur, earumque productum ducatur in ipsam semisummam laterum: nam hujus producti radix quadrata erit area trianguli quaesita.

*Vel sic*: primo multiplicetur semisumma laterum per differentiam unius lateris, & fiat productum  $A$ . Secundo multiplicentur inter se differentiae reliquorum duorum laterum, & fiat productum  $B$ . Tertio duo illa producta  $A$  &  $B$  invicem multiplicentur, & extrahatur inde radix quadrata, quae dabit superficiem trianguli quaesitam.

<i>Semisumma later.</i>	$\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$
<i>Differ. unius later.</i>	$-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$
<i>Productum A</i>	$-\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{2} bc + \frac{1}{4} c^2$
	<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> <span>N</span> <span>Dis-</span> </div>

$$-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$$

*Differ. duor. lat.*

$$+\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$$


---

*Productum B*       $-\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}a^2$

Ductis invicem productis  $AXB$ , oritur omnino ut supra

$$\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}b^2c^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 - \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{16}c^4$$

Cujus radix quadrata dat quæsitam trianguli superficiem.

Sit  $a = 15$ ,  $b = 13$ ,  $c = 14$ , erit summa laterum  $= 42$  & semisumma  $= 21$ . Differentiæ inter hanc & latera sunt 8, 7, 6, quarum productum  $= 336$  si multiplicetur per semisummam 21 dat 7056. Cujus radix quadrata 84 dat trianguli superficiem quæsitam.

SCHOL. I. *Verum quo pacto ex superiori æquatione*  $\sqrt{\left(\frac{1}{8}a^2b^2 + \frac{1}{8}a^2c^2 + \dots\right)}$  *regula hæc arithmetica eruatur, non illico apparet. Sed advertatur, tres quantitates*  $a, b, c$ , *quæ invicem simul multiplicantur, & nusquam ternæ in producto reperiuntur, necessario elidi debere per signa negativa & alternatim opposita; tertium autem productum oriri ex omnibus illis positive sumptis, scilicet*

$$\frac{-a + b + c}{2} \times \frac{a - b + c}{2} \times \frac{a + b - c}{2} \times \frac{a + b + c}{2}$$

*Ex harum enim multiplicatione habetur productum supra inventum; cujus coefficientes fracti oriuntur ex eo, quod singula summe divisa sint per 2, ut evidens est.*

SCHOL. II. Porro egregii hujus problematis, teste Adriano Metio (a), auctor est Theon Alexandrinus,

---

(a) Geometr. Pract. part. 2. cap. 3. num. 4.

nus magus Geometra & Astronomus. Dn. de la Hire (a) tanti fecit, ut illud Academia regia Parisiensi, faciliori solutione concinnatum proposuerit.

P R O B L. V.

In dato semicirculo ducta perpendiculari DE ad diametrum AC, ducere ab extremitate diametri rectam AB, ita ut pars intercepta FB equalis sit semidiametro AO, vel CO. Fig. 4.

Esto factum: ductisque BG parallela perpendiculari DE, & recta BC, sit diameter AC = a, AE = b, AB = x; erit AF = x -  $\frac{1}{2}a$ , cum supponatur FB = AO, vel CO =  $\frac{1}{2}a$ .

Ob triangula BAG & EAF similia erit AF . AE :: AB . AG, & in terminis analyticis

$$x - \frac{1}{2}a . b :: x . \frac{bx}{x - \frac{1}{2}a} \left( = \frac{2bx}{2x - a} \right) = AG$$

Similiter ob triangula ABC & BAG similia erit per Cor. Propos. 8. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

$$CA . AB :: AB . AC$$

$$a . x :: x . \frac{2bx}{2x - a}$$

$$x^2 = \frac{2abx}{2x - a}$$

N 2

Mul-

(a) Memoires de l'Acad. des sciences an. 1700. & Acta Erudit. Lipsiæ an. 1704.

Multipl. per  $2x - a$ )  $2x^3 - ax^2 = 2abx$

Divid. per  $2x$   $x^2 - \frac{1}{2}ax = ab$

Propos. 1. adde  $\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2$

$$x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{16}a^2 + ab$$

$$x - \frac{1}{4}a = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

Extr. rad.  $x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$

Innotescit ergo quantitas chordæ quæsitæ  $AB$ , quæ ducenda est a puncto  $A$ , ut imperatur. Etenim si ponatur  $a = 4$  &  $b = 1$ ; erit  $x (= \frac{1}{4}a +$

$\sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}) = 1 + \sqrt{5}$ ; ideoque ipsa chorda  $AB = 1 + \sqrt{5}$ .

Aliter (Fig. 5.) Completo circulo, producat  $DE$  in  $F$ , & sit diameter  $AB = a$ ,  $AE = b$ ,  $DE = c$ ,  $CG = AM$ , vel  $BM = \frac{1}{2}a$ ,  $AC = x$ ; erit  $AG = x - \frac{1}{2}a$ .

Cum  $DF$  secta sit bifariam in  $E$  per Prop. 3. l. 3. Eucl., & non bifariam in  $G$ , erit  $\overline{DE}^2 = DG \times CF + \overline{GE}^2$  per Propos. 5. l. 2. sed  $DG \times GF = AG \times GC$  per Prop. 35. l. 3. &  $\overline{GE}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$  per Prop. 47. l. 1. Ergo  $\overline{DE}^2 = AG \times GC + \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$ , hoc est in terminis analyticis

$$c^2 =$$

$$c^2 = x^2 - \frac{1}{2} ax - b^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2} ax = b^2 + c^2$$

Quæ quidem æquatio resolvitur per Prop. 1. hu-

jus, & habetur  $x = \frac{1}{4} a + \sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2}$ ,  
 quæ a superiori non differt. Nam posita  $AB$  ( $a$ )  
 $= 4$ ,  $AE$  ( $b$ )  $= 1$ ; erit  $EB = 3$ ; proinde  $DE$   
 ( $c$ )  $= \sqrt{3}$ , cum sit media proportionalis inter  $AE$   
 &  $EB$  per Cor. Prop. 13. l. 6. *Euc.* Exit ergo  $c^2 = 3$ ,

adeoque  $\sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5}$ , &  $x = 1 + \sqrt{5}$ ;  
 atque hinc chorda  $AC = 1 + \sqrt{5}$ , ut prius.

P R O B L. VI.

Datis in circuli diametro  $AB$  duobus punctis  $D$  &  $E$   
 a centro  $C$  squidistantibus, invenire in peripheria  
 punctum  $F$ , a quo ductæ  $FD$ ,  $FC$ , &  $FE$  sint in  
 continua proportione geometrica. Fig. 6.

Esto  $F$  punctum quæsitum, a quo demittatur per-  
 pendicularis  $FG$ . Sit  $DC = CE = a$ ,  $AD =$   
 $EB = b$ ,  $FC = CA$  vel  $CB = r$ ,  $DG = x$ ; erit  
 $AG = b - x$ , &  $GB = 2a + b + x$ .

$$AG \times GB = 2ab + b^2 - 2ax - x^2 = \overline{FG}^2$$

$$\text{adde } \overline{GD}^2 = x^2$$

---

Prop. 47. l. 1.  $\overline{FD}^2 = 2ab + b^2 - 2ax$

N 3

At

$$\text{At } GE = 2a + x, \text{ \& } \overline{GE}^2 = 4a^2 + 4ax + x^2$$

$$\text{adde. } \overline{FG}^2 = 2ab + b^2 - 2ax - x^2$$


---

$$\text{Propos. cit. } \overline{FE}^2 = 4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax$$

Sunt autem ex conditione problematis  $FG$ ,  $FC$ , &  $FD$  in continua proportione geometrica; ergo etiam eorum quadrata *per Theor. 6. Cap. 5.*, nempe

$\overline{FE}^2$ ,  $\overline{FC}^2$ ,  $\overline{FD}^2$ , & in terminis analyticis

$$4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax \cdot r^2 :: r^2 \cdot 2ba + b^2 - 2ax$$

Fiant porro facilioris calculi gratia quantitates notæ  $4a^2 + 2ab + b^2 = m$ , &  $2ba + b^2 = n$ , erit

$$m + 2ax \cdot r^2 :: r^2 \cdot n - 2ax$$

$$\text{Th. 4. Cap. 5. } mn + 2anx - 2amx - 4a^2 x^2 = r^4$$

$$\text{Sch. Prop. 1. } 4a^2 x^2 + 2amx - 2anx = mn - r^4$$

Cap. 5.

$$\text{Div. per } 4a^2 \quad x^2 + \frac{m-n}{2a} X x = \frac{mn-r^4}{4a^2}$$

$$\text{Fiat } \frac{m-n}{2a} = 2p, \text{ \& } \frac{mn-r^4}{4a^2} = q; \text{ erit per Cor. Prop. 2.}$$

Cap. 6. æquatio

$$x^2 + 2px - q = 0$$

Quæ quidem *per Prop. 3. hujus* facile resolvitur, eritque nota quantitas  $DG$ , seu punctum  $G$ , ex quo elevata perpendiculari  $GF$ , obtinetur in peripheria punctum quæsitum.

SCHOL. *Problemata Geometrica fere omnia constructionem geometricam admittunt. Nos hoc loco arithmeticas tantum regulas deduxisse contenti, geometricam constru-*  
 etio

*tionem ad caput ultimum referre statuimus, ne tirones rerum multitudine & varietate perturbentur*

C A P U T IX.

*De Æquationibus Cubicis.*

**Q**UO calculus facilius evadat, supponitur jam secundus terminus ab æquatione sublatus: item fractiones, & termini radicales, ut in *Prop. 2. 8. & 9. Cap. 6.* docuimus.

Omnes æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad aliquam sequentium formularum reducuntur

$$x^3 - px + q = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

$$x^3 + px - q = 0$$

P R O P O S I T I O I.

*Explicatur æquationum cubicarum genesis.*

I. **S**It æquatio generalis  $x^3 - px + q = 0$ , præsentans omnes æquationes cubicas secundo termino carentes, quæ, ut ex signis apparet, duas habent radices positivas, & tertiam negativam duabus illis positivis æqualem; alias secundus terminus non evanesceret *per num. 4. Prop. 1. Cap. 6.*

Sint igitur duæ radices positivæ  $f - g$ , &  $f + g$ , erit earum summa  $= 2f$ , earumque differentia  $= -2g$ , & radix negativa  $= -2f$ . Fiant (mutatis signis) æquationes simplices  $x - f + g = 0$ ,  $x - f - g = 0$ , &  $x + 2f = 0$ , ex quarum facto oritur æquatio tertii gradus indeterminata  $A$ , tres radices reales continens, duas quidem positivas, & tertiam negativam earum summæ æqualem, scilicet:

N. 4

$A x^3$

$$A \quad x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ - ggx - 2ggf$$

Comparentur hujus termini cum terminis æquationis generalis assumptæ  $x^3 - px + q = 0$ , cui ex hypothesi æquatur; fiunt duæ æquationes.

$$1.^a \quad 3ff + gg = p, \text{ hinc } ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$$

$$2.^a \quad 2f^3 - 2ggf = q, \text{ hinc } f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$$

II. Sit æquatio generalis  $x^3 - px - q = 0$  representans omnes æquationes cubicas, in quibus ( ut signa indicant ) sunt duæ radices negativæ, & una positiva earum summæ æqualis; alias secundus terminus non evanisset *per numer. 4. Propos. 1. Cap. 6.*

Sint igitur radices negativæ  $-f + e$ , &  $-f - g$ : earum summa  $= -2f$  dat radicem positivam illis æqualem, earumque differentia erit  $= -2g$ . Fiant ( mutatis signis ) æquationes simplices  $x + f - g = 0$ ,  $x + f + g = 0$ , &  $x - 2f = 0$ , ex quarum facto oritur æquatio indeterminata  $B$ , continens tres radices reales, duas negativas, & tertiam positivam, scilicet

$$B \quad x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ - ggx + 2ggf$$

Cujus terminis comparatis cum terminis æquationis generalis assumptæ  $x^3 - px - q = 0$ , cui æqualis supponitur, fiunt duæ æquationes

$$1.^a \quad -3ff - gg = -p, \text{ hinc } ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$$

$$2.^a \quad -2f^3 + 2ggf = -q, \text{ hinc } -f^3 + ggf = -\frac{1}{2}q$$

Ex utraque æquatione  $A$  &  $B$ , in quibus  $f$  supponi-

ponitur major, quam  $g$  ( alias  $f - g$  non esset radix positiva, nec  $-f + g$  esset radix negativa, ut fuit suppositum ) nonnulla inferuntur, ex quorum notitia maxime pendet æquationum cubicarum resolutio, scilicet.

1. Si duæ radices ( sive positivæ, sive negativæ illæ sint ) æquales existant; tunc cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini est æqualis quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ .

Nam in hoc casu in duabus æquationibus simplicibus  $x - f + g = 0$ , &  $x - f - g = 0$ , earum differentia seu quantitas  $2g$  fit nulla, hoc est  $2g = 0$ ; proinde in æquatione  $A$  ( idem fit in æquatione  $B$  ) evanescit quantitas  $-ggx + 2ggf$ , & remanet  $x^3 - 3fx - 2f^3 = 0$ . Comparantur hi termini residui cum terminis æquationis generalis assumptæ  $x^3 - px + q = 0$ , oriuntur duæ æquationes; prima  $-3f = -p$ , seu  $f = \frac{1}{3} p$ , secunda  $-2f^3 = +q$ , seu  $f^3 = -\frac{1}{2} q$ . Harum prima elevetur ad cubum, & ad quadratum altera: erunt  $f^3 = \frac{1}{27} p^3$ , &  $f^6 = \frac{1}{4} qq$ ; proinde  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ .

2. Si cubus idem ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major fuerit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est si  $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ , tunc tres radices reales erunt inæquales.

Nam comparatis terminis æquationis  $A$  cum terminis formulæ generalis  $x^3 - px + q = 0$ , habentur

tur æquationes illæ duæ, prima  $ff + \frac{1}{3} gg = \frac{1}{3}$

secunda  $f^3 - ggf = \frac{1}{2} q$ , & elevando primam ad cubum, oritur

$$f^6 + ggf^4 + \frac{1}{3} g^4 ff + \frac{1}{27} g^6 = \frac{1}{27} p^3$$

Elevando autem secundam ad quadratum, habetur

$$f^6 - 2ggf^4 + g^4 ff = \frac{1}{4} qq$$

Si hæc ex illa auferatur, erit residuum

$$3ggf^4 - \frac{2}{3} g^4 ff + \frac{1}{27} g^6 = \frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$$

Jam vero quia ex dictis  $f$  major est, quam  $g$ ; erit quoque  $3ggf^4$  major, quam  $\frac{2}{3} g^4 ff$  (nam divisa utra-

que per  $ggff$ , quotus  $3ff$  major erit, quam  $\frac{2}{3} gg$ ):

ideoque cum in superiori æquatione  $3ggf^4 - \frac{2}{3} g^4 ff$

$+ \frac{1}{27} g^6 = \frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$  unum membrum sit

positivum, erit quoque alterum membrum, nempe

$\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$ ; ergo  $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ .

3. Si idem cubus fuerit minor quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est  $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$ , tunc æquatio duas radices imaginarias continebit. Nam si omnes reales essent, fierent ex dictis  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ ,

vel  $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ .

vel  $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ .

Hæc omnia vera existunt, quacunque alia formula generali assumpta, si pari ratione procedatur.

COROLL. Ubi non adsunt radices imaginariæ, sed omnes sunt reales, tertius terminus semper apparet cum signo  $-$ , nempe  $-p$ . Si duæ radices sint positivæ, & rationales, ultimus terminus erit cum signo  $+$   $q$ . Si negativæ, & rationales, erit  $-q$ . Contra vero si duæ radices irrationales sint, ultimus terminus erit  $\pm q$ .

PROPOSITIO II.

In æquationibus cubicis, an duæ radices sint æquales, & quænam sint, explorare.

I. **S**It data æquatio  $x^3 - 12x + 16 = 0$ . Patet per Propos. I. ejusquæ Coroll. haberi tres radices reales, duas quidem positivæ & tertiam negativam; quæritur an duæ illæ positivæ sint æquales? Fiat comparatio terminorum cum terminis formulæ generalis  $x^3 - px + q = 0$ , erit

$$\begin{array}{l|l} p = 12 & q = 16 \\ \frac{1}{27} p^3 = 64 & \frac{1}{4} qq = 64 \end{array}$$

Habentur ergo per Prop. præc. duæ radices æquales.

II. Ut una ex illis inveniatur, dividatur triplum ultimi termini per duplum coefficientis tertii ter-

mini; quotus dabit radicem quæsitam, hoc est  $\frac{3q}{2p} =$

$\frac{48}{24} = 2$ . Tertia itaque radix erit  $-4$  earum sum-

mæ æqualis per num. 4. Prop. I. Cap. 6.

Demonstr. Nam ex Prop. præc. cum radices sint æquales, tunc in æquationibus simplicibus  $x - f + g = 0$ , &  $x - f - g = 0$  fit  $g = 0$ ; hinc facta ex illis multiplicatione, & comparatis terminis æquationis, quæ inde oritur, cum terminis formulæ genera-

nera-

neralis, ut in *Prop. cit.* factum est, æquatio illa

$3ff + gg = p$ , fiet  $3ff = p$ ; atque hinc  $f = \frac{1}{3} p$ . Si-

militer  $2f^3 - 2ggf = q$ , fit  $2f^3 = q$ ; unde oritur  $f^3$

$= \frac{1}{2} q$ . Dividatur jam hæc æquatio per illam, hoc

est primum membrum per primum, & secundum per

secundum membrum, erit  $f^3 : f = \frac{1}{2} q : \frac{1}{3} p$ , unde

$f = \frac{3q}{2p}$ , quæ quidem æquatio allatam regulam nobis  
exhibet.

### PROPOSITIO III.

*In æquationibus cubicis, an radix aliqua sit rationalis,  
& quænam sit, explorare?*

I. **S**it æquatio generalis  $x^3 - px + q = 0$ , quæ tres radices reales habet, duas quidem positivas, & tertiam duabus illis æqualem negativam *per Cor. Prop. 1. hujus*. Quæritur primo, an radix illa negativa, alterutra positiva major, sit rationalis?

Subtrahatur quantitas  $p$  ex quadrato proxime majori, & per residuum dividatur  $q$ . Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, erit ipse idem radix rationalis quæsitæ. Si vero successive nullum reperiat quadratum majus  $p$ , quod hunc præstet effectum, signum est, radicem illam esse irrationalem.

Sit exemplum  $x^3 - 39x + 70 = 0$  (facta comparatione cum terminis formulæ generalis) erit  $p = 39$ ,  $q = 70$ . Quadratum proxime majus, quam  $p$ , est  $= 49$ , ex quo subtracto  $p$ , erit  $49 - 39 = 10$ . Per hoc residuum dividatur  $q = 70$ , quotus 7 æqualis radici quadrati assumpti dat radicem rationalem negativam quæsitam.

Ex.

Explorandum deinde fit, an aliqua ex radicibus positivis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus, quam  $p$ , quod subtrahatur ex ipso  $p$ , & per residuum dividatur  $q$ . Si quæsitus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, ille dabit radicem rationalem quæsitam. Si vero nullum successive quadratum reperiat minus ipso  $p$ , quod hunc præter effectum, signum est, radices illas esse irrationales.

Sit eadem æquatio, quæ prius,  $x^3 - 39x + 70 = 0$ ; cum sit  $p = 39$ ,  $q = 70$ , quadratum proxime minus  $p$  erit  $= 36$ , quo subtracto ex  $p$ , fit  $39 - 36 = 3$ , & dividendo per hoc residuum quantitatem  $q = 70$ , quotus  $= 23 \frac{1}{3}$  non est radix assumpti quadrati.

Sumatur quadratum adhuc minus, nempe 25, quo subtracto ex  $p$ , erit  $39 - 25 = 14$ , per quod residuum dividendo  $q = 70$ , habetur quotus  $= 5$  æqualis radici quadrati assumpti, qui dat unam ex radicibus positivis rationalem, nempe 5.

II. Sit æquatio generalis  $x^3 - px - q = 0$ , quam ex *Propos. 1. hujus*, ejusque *Coroll.* liquet, habere tres radices reales, duas quidem negativas & tertiam positivam illis æqualem, proinde alterutra negativa majorem. Quæritur, an radix illa positiva sit rationalis? Regula est eadem.

Sit exemplum  $x^3 - 13x - 12 = 0$ , erit  $p = 13$ , &  $q = 12$ . Quadratum proxime majus, quam  $p$ , est  $= 16$ , ex quo subtrahatur  $p$ , erit  $16 - 13 = 3$ , & dividendo per hoc residuum  $q = 12$ , habetur quotus 4, qui est æqualis lateri quadrati assumpti, proinde radix rationalis quæsitæ  $= 4$ .

Quæritur deinde, an aliqua ex radicibus negativis sit rationalis? Sumatur quadratum proxime minus, quam  $p$ , hoc est 9, quod ex ipso subtrahatur, erit  $13 - 9 = 4$ , per quod residuum diviso  $q = 12$ , ha-

habetur quotus æqualis lateri quadrati assumpti, & radix rationalis quæsitæ, nempe  $-3$ .

*Demonstr.* Positis duabus radicibus positivis ( ut in Propos. 1. hujus )  $f + g$ , &  $f - g$ , earum summa  $2f$  dat radicem negativam illis æqualem, ejusque quadratum  $= 4ff$ , ex quo subtrahatur  $3ff + gg (= p)$ , residuum est  $4ff - 3ff - gg$ , hoc est  $ff - gg$ ; per quod residuum si dividatur  $2f^3 - 2ggf (= q)$  remanet  $2f$ , radix scilicet quadrati  $4ff$  & æquationis; unde patet ratio regulæ pro prima parte.

Pro altera parte fiat ex aliqua radice, sive positiva  $f - g$ , sive negativa  $-f + g$  quadratum  $ff - 2gf + gg$ , quod subtrahatur ex  $3ff + gg (= p)$ , residuum erit  $2ff + 2gf$ , per quod dividendo  $2f^3 - 2ggf (= q)$ , quotus dat  $f - g$ , radicem scilicet quadrati & æquationis; unde evidens est ratio secundæ partis problematis.

**COROLL. I.** Tum ex praxi, tum ex demonstratione patet, ex quadrato assumpto subtrahi coefficientem  $p$ , ubi maxima radicem inquiritur; contra vero quadratum assumptum subtrahi debere ex coefficiente  $p$ , ubi radix una ex minoribus queritur. Quod si in neutro casu prodeat ultimi termini  $q$  divisor talis, ex cujus divisione habeatur quotus, qui sit assumpti quadrati latus, signum est, radices illas quæsitæ esse irracionales, ut ex Propos. sequenti clarius apparebit.

**COROLL. II.** Inventa una ex radicibus rationalibus, sive illa positivæ, sive negativæ sit, dividitur per illam æquatio, quæ sit secundi gradus, & aliæ duæ radices facile innotescunt per Prop. 1. & 3. Cap. 8.

**SCHOL. I.** Si radix inventa, quæ sit  $= a$ , ponatur duarum reliquarum summa, erit illa coefficientis secundi termini in æquatione quadratica, quæ reliquas duas radices continet; & si per illam dividatur ultimus æqua-

tionis datæ terminus  $q$ , erit  $\frac{q}{a}$  productum duarum ipsarum radicum in æquatione quadratica contentarum, nempe  $x^2 - ax + \frac{q}{a} = 0$ , si radices illæ positivæ sint; vel

$x^2 + ax - \frac{q}{a} = 0$ , si negativæ: adeoque in primo casu

radix una positiva erit  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}\right)}$ ,

altera  $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}\right)}$ . In secundo casu

una negativa  $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}\right)}$ , altera

$x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}\right)}$ . Sic in superiori æqua-

tione  $x^3 - 13x - 12 = 0$  cum inventa fuerit radix positiva  $= 4$ , quæ reliquis duabus negativis æqualis esse

debet, si dicatur  $a$ , erit  $\frac{q}{a} = \frac{12}{4} = 3$ ; proinde ex allata

formula erit una radix negativa  $x = -2 - \sqrt{4 - 3}$

$= -3$ , altera  $x = -2 + \sqrt{4 - 3} = -1$ .

SCHOL. II. Ubi duplex signum occurrit  $\pm$  vel  $\mp$ ; hæc est regula: in primo casu sumitur signum positivum, in secundo negativum. Plerumque tamen  $\pm$  significat, quantitatem illam tum positive, tum negative posse usurpari, ut in Schol. 2. Prop. 1. Cap. 8. dictum est.

## PROPOSITIO IV.

*Æquationes cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem continent, expedire.*

**Æ**quationes cubicas secundo termino carentes tunc duas radices imaginarias continere, certum est:

1. Cum tertius terminus  $p$  afficitur quidem signo  $-$ , sed  $\frac{1}{27} p^3$  minus est, quam  $\frac{1}{4} qq$ , ut in Pr. 1. hujus dictum est, & tunc æquatio generalis erit  $x^3 - px \pm q = 0$ .

2. Cum tertius terminus signo  $+$  afficitur, in quo casu formula generalis est  $x^3 + px \pm q = 0$ .

3. Demum cum æquatio secundo & tertio termino caret, (quæ æquatio pura tertii gradus dicitur) ut  $x^3 \pm q = 0$ ; tunc autem radix realis semper erit

$$x = \sqrt[3]{\pm q}.$$

In ejusmodi autem æquationibus habetur  $-q$ , ubi radices imaginariæ negativæ sunt; habetur  $+q$ , ubi radices imaginariæ sunt positivæ: adeoque in formulis generalibus ponitur utrumque signum  $\pm q$ .

In his resolvendis quæritur primum radix realis, quæ erit vel positiva, vel negativa, semper æqualis summæ duarum radicum imaginariarum, alias secundus terminus tolli non potuisset. Ipsa vero radix realis potest esse rationalis & irrationalis. An sit rationalis, ita detegitur.

I. Sumatur quadratum minus, vel majus, quam  $p$ , cui addatur  $\pm p$ ; hoc est si in data æquatione sit  $-p$ , sumatur  $-p$ ; si vero sit  $+p$ , sumatur  $+p$ ; & per hoc residuum, vel summam dividatur  $q$ . Si divisio dat quotum, qui sit radix quadrati assumpti, habetur radix rationalis quæsitæ, ut in primo & secun-

cundo exemplo sequenti; alias est irrationalis, ut in tertio exemplo.

Data sit æquatio  $x^3 - 1x + 6 = 0$ , quæ comparari debet cum formula generali  $x^3 - px + q = 0$ . Cum autem  $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$  minor sit, quam  $\frac{1}{4}qq = 9$ , jam manifestum est, duas radices imaginarias, & quidem positivas ob  $+q$  in ea delitescere. Sumatur quadratum  $4$ , cumque habeatur  $-p = -1$ , per quadratum  $4 - 1 = 3$  dividatur  $q = 6$ ; quotus, qui est latus quadrati assumpti, dat radicem realem rationalem negativam  $-2$  per num. 4. *Propos. 1. Cap. 6.*

Radices imaginariæ habentur per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.*, nempe  $1 + \sqrt{-2}$ , &  $1 - \sqrt{-2}$ . Nam data æquatio si dividatur per radicem rationalem inventam, deprimitur ad secundum gradum, ut patet.

II. Data sit æquatio  $x^3 + 27x - 28 = 0$ , quæ convenit cum formula generali  $x^3 + px - q = 0$ , & signum  $+p$  indicat, duas radices imaginarias in ea contineri: quæritur radix rationalis ejusdem. Sumatur quadratum  $1$ , cui addatur  $p = 27$ , & per hanc summam  $1 + 27 = 28$  dividatur  $q = 28$ : quotus  $1$ , cum sit latus quadrati assumpti, dat radicem rationalem quæsitam.

Radices vero imaginariæ (depressa æquatione ad secundum gradum) habentur per *propos. 1. & 3. Cap.*

8.  $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$ , &  $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$ , negativæ quidem, ut æquationis datæ signa indicant; proinde radix realis necessario positiva est.

III. Sit æquatio  $x^3 - 6x - 16 = 0$ , quæ convenit cum formula generali  $x^3 - px - q = 0$ , & quia  $\frac{1}{27}p^3 = 8$  minus est, quam  $\frac{1}{4}qq = 64$ , signum est, haberi duas radices imaginarias. Videndum, an radix

realis sit rationalis. Sumatur quadratum 4, cui addatur  $-p \equiv -6$ , & per summam  $4 - 6 \equiv -2$  diviso  $-q \equiv -16$ , habetur  $+8$ , quod quidem non est latus quadrati assumpti. Sumatur aliud successive quadratum, nempe 9, cui addatur  $-p \equiv -6$ , & per summam hanc  $9 - 6 \equiv 3$  dividatur  $-q \equiv -16$ . Sed hoc cum fieri non possit exacte & sine residuo, sumatur successive aliud quadratum majus, nempe 16, quod additum ad  $-p \equiv -6$ , summa fit 10, per quam pariter non est divisibilis sine residuo quantitas  $q \equiv 16$ . Et cum aliud & aliud quadratum frustra ad hunc effectum assumatur, signum est, radicem realem esse irrationalem, alia sane methodo inferius inveniendam per Prop. 6.

*Demonstr.* fere eadem est ac *præc. Propos.* Nam si supponantur duæ radices imaginariæ negativæ  $-f + \sqrt{-3gg}$ , &  $-f - \sqrt{-3gg}$ , ex quibus fiant æquationes simplices  $x + f - \sqrt{-3gg} \equiv 0$ , &  $x + f + \sqrt{-3gg} \equiv 0$ ; earum summa  $2f$  dabit radicem realem positivam, quæ ob secundum terminum, quo æquatio caret, illis debet esse æqualis. Habetur itaque  $x - 2f \equiv 0$ . Multiplicentur tres hujusmodi æquationes, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx - 2f^3 &\equiv 0 \\ + 3ggx - 6ggf & \end{aligned}$$

Et facta comparatione cum terminis formulæ generalis  $x^3 + px - q \equiv 0$ , erit

$$-3ff + 3gg \equiv \pm p, \text{ \& } -2f^3 - 6ggf \equiv -q.$$

Quod si radices imaginariæ positivæ fuerint, scilicet  $f + \sqrt{-3gg}$ , &  $f - \sqrt{-3gg}$ , tunc radix realis earum summæ æqualis ob secundum terminum, qui deest, necessario erit negativa, nempe  $-2f$ , factaque, ut supra, multiplicatione trium æquationum simplicium, oritur

$$x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ + 3ggx + 6ggf$$

Comparatis hujus terminis cum terminis formulæ generalis  $x^3 \pm px + q = 0$ , habetur

$$-3ff + 3gg = \pm p, \text{ \& } 2f^3 + 6ggf = q$$

Proinde si  $4ff$  (quadrato radicis realis  $\pm 2f$ ) addatur  $-3ff + 3gg = \pm p$ , summa erit  $4ff - 3ff + 3gg$ , hoc est  $ff + 3gg$ : per quam si dividatur  $-2f^3 - 6ggf = -q$  in primo casu, vel  $2f^3 + 6ggf = q$  in secundo casu; quotus dabit radicem realem quaesitam  $\pm 2f$ .

SCHOL. In æquationibus puris tertii gradus  $x^3 \pm q = 0$

præter radicem realem  $x = \sqrt[3]{q}$ , vel  $x = \sqrt[3]{-q}$ , dantur quoque aliæ duæ radices, quæ ex dictis in Prop. imaginariae sunt. He autem sic inveniuntur. Dividatur

$x^3 q = 0$  per ejus radicem realem inventam  $x - \sqrt[3]{q}$

$= 0$ , quotus  $x^2 + x\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q}^2$  erit æquatio secundi gradus, quæ duas radices imaginarias continebit. Fiat brevitatis gratia  $q = 8$ , erit  $x^3 - 8 = 0$ , ejusque radix realis  $x - 2 = 0$ , per quam dividendo  $x^3 - 8 = 0$ , habetur æquatio secundi gradus  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , cujus radices, ut ex signis patet, imaginariae sunt, & quidem negativæ, nempe  $-1 + \sqrt{-3}$ , &  $-1 - \sqrt{-3}$ .

Similiter divisa æquatione  $x^3 + 8 = 0$  per ejus radicem  $x + 2 = 0$ , invenitur  $x^2 - 2x + 4 = 0$ , quæ dat duas radices imaginarias positivas  $1 + \sqrt{-3}$ ,  $1 - \sqrt{-3}$ .

Sic etiam si fiat  $q = 1$ , seu  $x^3 - 1 = 0$ , erunt tres ipsius unitatis radices cubicae  $1$ ,  $-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$ , &  $-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}$ .

DE ÆQUATIONIBUS  
PROPOSITIO V.

*Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.*

I. Sit æquatio data  $x^3 + 12x = 427$ , cujus una radix rationalis inquiritur.

Quia incognitæ cubus minor est cubo cognitæ, hoc est  $x^3 < 427$ , nam  $x^3 = 427 - 12x$ ; sumatur radix cubica ipsius 427 proxime minor, nempe 7, ejusque cubus 343 subtrahatur ex ipsa quantitate cognita 427, subtracto ex altera parte incognitæ cubo  $x^3$ . Ex residuo  $12x = 84$  habetur  $x = 7$ , radix æquationis assumptæ radici cubicæ æqualis, nempe

$$\begin{array}{r} x^3 + 12x = 427 \\ \text{Subtr.} \quad x^3 \qquad \qquad 343 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Divid. per 12} \quad + 12x = 84 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad x = 7 \end{array}$$

II. Sit æquatio proposita  $x^3 - 12x = 1584$ : cum sit  $x^3 > 1584$ , nam  $x^3 = 1584 + 12x$ ; sumatur radix cubica proxime major ipsius 1584, nempe 12, ejusque cubus 1728 subtrahatur ex ipso 1584, subtracto pariter incognitæ cubo  $x^3$ , habetur radix quæsitæ 12 assumptæ radici æqualis

$$\begin{array}{r} x^3 - 12x = 1584 \\ \text{Subtr.} \quad x^3 \qquad \qquad 1728 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Divid. per 12.} \quad - 12x = - 144 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad x = 12 \end{array}$$

III. Sit æquatio  $x^3 + 27x = 28$ , ut in *præced. Prop.* facile cognoscitur, cubum  $x^3$  minorem esse cubo ipsius 28; nam  $x^3 = 28 - 27x$ . Radix cubica proxime minor ejusdem 28 est 3, ejusque cubus 27, qui-

qui subductus a 28 relinquit 1: proinde fieret  $x = \frac{1}{27}$ , qui non est valor quæsitus, ut patet. Sumpta radice cubica adhuc minori, nempe 2, factaque cubi subtractione, idem sequitur inconueniens: haberetur enim  $x = \frac{20}{27}$ . Sumatur itaque pro radice cubica ipsius 28 unitas, ejusque cubo 1 subtracto ex eodem 28, habetur  $x = 1$  radix quæsitæ

$$\begin{array}{r} x^3 + 27x = 28 \\ \text{Subtr. } x^3 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Div. per } 27 \quad + 27x = 27 \\ \qquad \qquad \qquad x = \frac{27}{27} = 1 \end{array}$$

COROLL. Patet ratio, cur in hoc tertio exemplo radix cubica proxime minor ad rem non fuerit; sed multo minor, imo omnium minima apte fuerit assumpta. Nam cubus incognitæ  $x^3$  minimam habet rationem ad quantitatem 28. Adduntur enim illi  $27x$ , ut habeatur æquatio. Hoc pro similibus casibus advertatur.

SCHOL. Æquationes cubicæ, de quibus hætenus egimus, in quibus scilicet una saltem radix rationalis inventa fuit, poterant certe resolvi per ea, quæ diximus in Cap. 7. Sed quis non videt, hanc viam esse breviorē, cum opus non sit plures ultimi termini divisores tentare, pluresque divisiones peragere? Sentiant aliud, qui volunt.

PROPOSITIO VI.

Æquationes Cubicæ, quæ duas imaginarias, & realem irrationalem continent, expedire.

I. Sit æquatio  $x^3 - px - q = 0$ , in qua duas radices imaginarias & realem irrationalem contineri jam constat per Prop. 4. & 5. hujus: inveniri debet ipsa radix irrationalis.

1. Subtrahatur  $\frac{1}{27} p^3$  ex  $\frac{1}{4} qq$ , & ex residuo extrahatur radix quadrata, cui addatur  $\frac{1}{2} q$  dimidium ultimi termini. Et ex hac summa extracta radice cubica, habetur prima pars radices realis irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} + \frac{1}{2} q$$

2. Dividatur quantitas  $p$  per triplum primæ partis radices jam inventæ; quotus dabit alteram radices partem priori addendam, scilicet

$$\frac{p}{3 \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} + \frac{1}{2} q}$$

Formula proinde generalis quæsitæ radices est hujusmodi

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} + \frac{1}{2} q + \frac{p}{3 \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} + \frac{1}{2} q}$$

Sit exemplum æquatio  $x^3 - 6x - 16 = 0$ , in qua per *Prop. præc.* radix realis est irrationalis: facta terminorum comparatione cum formula generali, erit  $p = 6$ , &  $q = 16$ ; proinde  $\frac{1}{27} p^3 = 8$ , &  $\frac{1}{4} qq = 64$ , hinc  $\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3 = 64 - 8 = 56$ .

Hujus residui radix quadrata, nempe  $\sqrt{56}$ , addatur ad  $\frac{1}{2} q = 8$ , & ex hac summa extrahatur radix cubica; erit prima pars radices irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$$

Et dividendo  $p = 6$  per triplum hujus

jus primæ partis, obtinetur altera pars radicis, videlicet

$$3 \sqrt[6]{8 + \sqrt[2]{56}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{56}. \text{ Tota itaque radix erit}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{56}$$

II. Si æquatio data  $x^3 + px - q = 0$ , in qua tertius terminus est cum signo +, eadem est regula, si duo excipias. Primo  $\frac{1}{27}p^3$  &  $\frac{1}{4}qq$  addi debent, non subtrahi. Secundo radicis inventæ partes non sunt addendæ, sed secunda ex prima subtrahitur, ideoque formula generalis erit

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Sit exemplum  $x^3 + 3x - 26 = 0$ , facta comparatione cum superiori formula generali, erit  $p = 3$ ; &  $q = 26$ ; proinde  $\frac{1}{27}p^3 = 1$ , &  $\frac{1}{4}qq = 169$ . Hinc  $\frac{1}{4}qq$

$$+ \frac{1}{27}p^3 = 170, \text{ \& } \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{170}, \text{ quæ radix addatur ad } \frac{1}{2}q = 13, \text{ \& ex summa extrahatur radix}$$

cubica, erit  $\sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170}$  prima pars radicis, & dividendo per hujus triplum quantitatem  $p = 3$ , habetur secunda pars subtrahenda ex prima; proinde tota radix erit

$$x = \sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170} - \sqrt[3]{13} + \sqrt[3]{170}$$

*Demonstr.* Sit ut in Prop. 4. æquatio, duas radices ima-

imaginarias negativas, & unam positivam illis æ-  
qualem continens

$$x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 \\ + 3ggx - 6ggf$$

factaque comparatione cum terminis formulæ pri-  
mæ generalis  $x^3 - px - q = 0$ , erit  $-3ff + 3gg =$   
 $-p$ , seu  $3ff - 3gg = p$ , unde  $ff - gg = \frac{1}{3}p$ , & u-  
triusque membri cubus

$$A \quad f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Similiter quia  $-2f^3 - 6ggf = -q$ , erit  $2f^3 + 6ggf$   
 $= q$ , &  $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$ , & quadratum utriusque  
membrum

$$B \quad f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Jam si ex æquatione  $B$  subtrahatur æquatio  $A$ , re-  
siduum erit

$$9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extractaque radice quadrata, habetur

$$3gff + g^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Cui addatur superior æquatio  $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$ , sit  
summa

$$f^3 + 3ggf + 3gff + g^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Ex qua si radix cubica extrahatur, prodit prima  
pars radice

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

Dividendo autem superiorem æquationem  $ff - gg = \frac{1}{3} p$  per hanc ultimam, hoc est primum membrum per primum, & secundum per secundum, oritur

$$\frac{1}{3} p$$

$$f - g = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$$

Quæ duæ æquationes simul junctæ dant realem radicem quæsitam  $2f$ , nempe

$$2f (= x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} q} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$$

*Demonstr.* Quoad secundam formulam  $x^3 + px - q = 0$ . Sit eadem æquatio, in qua tamen supponitur  $g$  major  $f$ ,

$$x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$$

$$+ 3ggx - 6ggf$$

Facta comparatione cum terminis formulæ generalis, erit  $3gg - 3ff = p$ ; unde  $gg - ff = \frac{1}{3} p$ , & utriusque membri cubus

$$M \quad g^6 - 3ffg^4 + 3f^4gg - f^6 = \frac{1}{27} p^3$$

Similiter habetur  $-2f^3 - 6ggf = -q$ , seu  $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2} q$  & utriusque membri quadratum

$$N \quad f^6 + 6f^4gg + 9ffg^4 = \frac{1}{4} qq$$

Addantur duæ æquationes  $M$  &  $N$ , erit summa

$$g^6 + 6ffg^4 + 9f^4gg = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3$$

Ex qua si extrahatur radix quadrata, prodit

$$g^3 + 3ffg = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Huic adde æquationem superiorem  $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$ ,  
erit

$$g^3 + 3ffg + 3ggf + f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Atque hinc radice tertia extracta, oritur prima pars  
radicis quæsita, nempe

$$g + f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Ut secundam partem obtineas, divide per hanc pri-  
mam partem æquationem superiorem  $gg - ff = \frac{1}{3}p$ ,  
scilicet

$$\frac{gg - ff}{g + f} = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

$$g - f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \text{ erit}$$

Quod si hæc ex priori parte radicis subducatur,  
erit radix quæsita

$$2f(\frac{1}{2}q) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

COROLL. Si in alterutra formula haberetur  $+q$ ,  
eadem manet demonstratio, eo solum discrimine, quod  
in eo casu radices imaginariae essent positivae, & radix  
realis illis æqualis negativa  $-2f$ .

SCHOL. I. Per radicem irrationalem inventam dividi debet æquatio, & ad secundum gradum deprimi, ut radices imaginariæ innotescant. Quo id commodius fiat, substituatur loco ejusdem radicis irrationalis, quantitas rationalis. Sit v. g. æquationis  $x^3 - px - q = 0$  radix irrationalis inventa  $\sqrt[3]{3}$ , fiat  $\sqrt[3]{3} = m$ , & dividendo per  $x - m$  ipsam æquationem, oritur æquatio secundæ gradus  $x^2 + mx + m^2 - p = 0$ , quæ duas radices imaginarias continet, facile inveniendas per Prop. 1. & 3. Cap. 8. Residuum autem illud  $m^3 - mp - q$ , quod ex hac divisione habetur, negligitur tanquam zero, seu nihil. Hoc recte fieri hinc patet, quod si substituas loco ipsius  $m$  incognitam  $x$ , cujus valorem representat, termini æquationis datæ restituuntur.

SCHOL. II. Hactenus dicta sufficerent ad plenam æquationum cubicarum notitiam. Sed æquum non est Cardani regulas prorsus omittere, quas Cartesius, Newtonus, Wolfius, & fere omnes recentiores celebrarunt. Earum inventionem Scipioni Ferreo Bononiensi Cardanus tribuit. Audiunt vulgo Cardani regulæ, quod fortasse ipse omnium primus publicaverit. Miror, quod eruditi viri Fontanellus (a), & Lamy (b) easdem Varignonno tanquam auctori attribuerint.

PROPOSITIO VII.

Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.

I. Sit æquatio generalis  $x^3 - px - q = 0$ . Fiat  $x = f + g$  (fieri debet  $f - g$ , ubi habetur  $+ px$ ) erit

$$x^3 = f^3 + 3fg + 3gf + g^3$$

Est

(a) Histoire de l'Acad. Royale des Scien. 1699.

(b) Elemens de Mathematique a Paris 1704.

Est autem  $3ffg + 3ggf = 3fg \times \overline{f+g}$ , & ex hypothesi  $x = f + g$ ; proinde  $3fg \times \overline{f+g} = 3fgx$ ; adeoque  $3fgx = 3ffg + 3ggf$ : unde

$$x^3 = f^3 + 3fgx + g^3$$

$$x^3 - 3fgx - f^3 - g^3 = 0$$

Comparando jam hujus æquationis terminos cum terminis æquationis generalis assumptæ, oriuntur duæ æquationes ( duo puncta (:) divisionem significant ) scilicet

$$\begin{array}{l|l} 1.^{\circ} & 3fg = p \\ & g = \frac{1}{3} p : f \\ & g^3 = \frac{1}{27} p^3 : f^3 \\ \hline 2.^{\circ} & f^3 + g^3 = q \end{array}$$

Et substituendo in secunda æquatione valorem ipsius  $g^3$ , erit.

$$f^3 + \frac{1}{27} p^3 : f^3 = q$$

Mult. per  $f^3$  

---

$$f^6 + \frac{1}{27} p^3 = qf^3$$

Sch. Prop. 1.  $f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27} p^3$

Cap. 5.

Hæc autem æquatio utpote derivativa secundi gradus facile resolvitur per Prop. 4. Cap. 8. hoc pacto

$$f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27} p^3$$

$$\frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq$$

---


$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3$$

Extr.

*Extr. rad.*  $f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

$$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

*Extr. rad.*

*Cubica*  $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

Erat autem  $f^3 + g^3 = q$ ; proinde  $g^3 = q - f^3$ ; substituendo igitur loco  $f^3$  ejus valorem, habetur

$$g^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

*Extr. rad.*  $g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

*Cubica*

Atque hinc  $x (= f + g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Quæ quidem est formula generalis radice pro æquatione  $x^3 - px - q = 0$ .

COROLL. I. Si æquatio habeat  $+q$ , ut  $x^3 - px + q = 0$ , tunc in formula generali radice habetur  $-\frac{1}{2}q$ . In ceteris

nihil differt, nempe  $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

II. Sit æquatio generalis  $x^3 + px - q = 0$ , fiat  $x = f - g$  (ob  $+px$ ), erit

$$x^3 =$$

$$x^3 = f^3 - 3ffg + 3ggf - g^3$$

$$- 3ffg + 3ggf = - 3fg \times \frac{f-g}{1}$$

Sed ex hypothesi  $x = f - g$ ; ergo  $- 3fg \times \frac{f-g}{1} = - 3fgx$ . Proinde subrogatis in superiori æquatione  $- 3fgx$  pro  $- 3ffg + 3ggf$ , habetur

$$x^3 = f^3 - 3fgx - g^3$$

$$x^3 + 3fgx - f^3 + g^3 = 0$$

Comparatis terminis hujus cum terminis æquationis generalis assumptæ  $x^3 + px - q = 0$ , habentur duæ æquationes

$$\begin{array}{l|l} 1.^a & 3fg = p \\ & g = \frac{1}{3} p : f \\ & g^3 = \frac{1}{27} p^3 : f^3 \\ \hline 2.^a & g^3 - f^3 = -q \end{array}$$

Ponatur in secunda valor ipsius  $g^3$ , erit

$$\frac{1}{27} p^3 : f^3 - f^3 = -q$$

$$\text{Mult. per } f^3 \quad \frac{1}{27} p^3 - f^6 = -qf^3$$

$$\text{Sch. Prop. 1. Cap. 5. } f^6 - qf^3 = \frac{1}{27} p^3$$

Ex hac æquatione derivativa secundi gradus facile extrahitur radix per Prop. 4. Cap. 8. nam addendo utrinque  $\frac{1}{4} qq$ , habetur

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3$$

$$\text{Extr. rad.} \quad f^3 - \frac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

$$f^3 =$$

$$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

$$\text{Cubica } f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem  $g^3 - f^3 = -q$ , proinde  $g^3 = -q + f^3$ ,  
& subrogato valore ipsius  $f^3$ , oritur

$$g^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad.

$$\text{Cubica } g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$\text{Atque hinc } x (= f - g) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$- \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

COROLL. II. Quod si in æquatione fuerit  $+q$ , ut  $x^3 + px + q = 0$ ; tunc in formula generali prima pars radicis ha-

$$\text{bet } -\frac{1}{2}q, \text{ eritque } x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

$$- \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

### PROPOSITIO VIII.

Æquationes cubicas per formulas generales Cardani  
resolvere.

**O**Mnes æquationes cubicæ, ut in principio hu-  
jus capituli adnotavimus, ad tres sequentes for-  
mulas reduci possunt.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x^3 - px - q = 0 \\ \text{II.} \quad & x^3 + px - q = 0 \\ \text{III.} \quad & x^3 - px + q = 0 \end{aligned}$$

Singulis autem singulæ respondent formulæ generales radicis cubicæ earumdem, quas ex Cardani methodo *in preced. Prop.* invenimus, scilicet

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \text{II.} \quad & \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} \\ \text{III.} \quad & \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \end{aligned}$$

Harum formularum usum celebratissimum exempla, quæ sequuntur, satis ostendent.

I. Sit data æquatio  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . Fiat comparatio cum formula generali  $x^3 - px - q = 0$ ,

$$= 0, \text{ erit } p = 15, \frac{1}{3}p = 5, \& \frac{1}{27}p^3 = 125$$

$$\text{Item } q = 4, \frac{1}{2}q = 2, \& \frac{1}{4}qq = 4. \text{ Hinc}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt[3]{4 - 125} = \sqrt[3]{-121}, \&$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

prima pars radicis. Similiter  $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

$= \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  dat alteram partem. Unde ha-

betur  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Quod

Quod si ex binomio cubico  $2 + \sqrt{-121}$ , &  $2 - \sqrt{-121}$  radix extrahatur per methodum inferius tradendam, erit una pars radicis  $2 + \sqrt{-1}$ , altera  $2 - \sqrt{-1}$ , ideoque  $x = 4$ .

Divisa autem æquatio data per radicem jam inventam hoc, est per  $x = 4$ , deprimitur ad æquationem secundi gradus, ejusque radices reliquæ facile eruuntur per Prop. 1. & 3. Cap. 8.

II. Sit data æquatio  $x^3 - 1x + 6 = 0$ . Facta terminorum comparatione, erit  $p = 1$ ,  $\frac{1}{3} p = \frac{1}{3}$ , &  $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{27}$ . Item  $q = 6$ ,  $\frac{1}{2} q = 3$ ,  $\frac{1}{4} qq = 9$

$$= 9. \text{ Hinc } \sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3} = \sqrt{9 - \frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{242}{27}}$$

$$\& \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q} - \sqrt{\frac{1}{4} qq} - \frac{1}{27} p^3 = \sqrt[3]{-3} - \sqrt{\frac{242}{27}}$$

dat primam radicis partem. At vero  $\sqrt{-\frac{1}{2} q} + \sqrt{\frac{1}{4} qq} - \frac{1}{27} p^3$

$$p^3 = \sqrt[3]{-3} + \sqrt{\frac{242}{27}} \text{ dat alteram; proinde } x =$$

$\sqrt[3]{-3} - \sqrt{\frac{242}{27}} + \sqrt[3]{-3} + \sqrt{\frac{242}{27}} = (\text{radice cubica ex utroque membro extracta per Prop. 10. hu-}$

$$\text{jus}) - 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = - 2.$$

III. Sit data æquatio  $x^3 + 3x - 6 = 0$ . Fiat comparatio cum formula generali  $x^3 + px - q = 0$ ,

erit  $p = 3$ ,  $\frac{1}{3} p = 1$ , &  $\frac{1}{27} p^3 = 1$ . Item

$$q = 6, \frac{1}{2} q = 3, \frac{1}{4} qq = 9; \text{ proinde } \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3} =$$

$$= \sqrt[3]{9 + 1}, \text{ \& } \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} \sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} =$$

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{10}}; \text{ \& } \text{atque } x \sqrt[3]{3 + \sqrt{10}} -$$

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{10}}.$$

SCHOL. Omisimus cum Wolfio quartam formulam cubicam  $x^3 + px + q = 0$ , utpote inutilem, seu minus necessariam, cujus radix non differt a radice tertiae formulæ, nisi in hoc tantum, quod in prima parte radicis apponi debet  $-\frac{1}{2}q$ , in secunda vero  $+\frac{1}{2}q$ .

Imo ad solvendam quamcunque æquationem cubicam, cui desit secundus terminus, sufficit prima Cardani formula, qua una tanquam generali Canone potest quis satis commode uti.

### PROPOSITIO IX.

*Idem Problema brevius absolvitur.*

SIT æquatio generalis cubicas omnes repræsentans, quæ secundo termino carent,  $x^3 + px + q = 0$ . Fiat  $x = a + b$  ( $a$  &  $b$  sunt indeterminatæ) erit

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 3abXa + b, \text{ \& } x = a + b$$

Proinde  $3a^2b + 3ab^2 = 3abx$

Adeoque  $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Posito hoc valore loco ipsius  $x^3$  in æquatione generali, habetur

$$a^3 + 3abx + b^3 + px + q = 0$$

Fiant duæ æquationes, quarum altera contineat quan-

quantitates radicales, altera rationales, & utraque æquetur zero.

$$1.^a \quad 3abx + px = 0 \qquad 2.^a \quad a^3 + b^3 + q = 0$$

Ex prima habetur  $b = -\frac{p}{3a}$ , &  $b^3 = -\frac{p^3}{27a^3}$ .

Hoc valore posito in secunda æquatione, oritur

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} + q = 0$$

Mult. per  $a^3$   $a^6 + qa^3 = \frac{p^3}{27}$

Et resoluta hac æquatione derivativa secundi gradus, addendo utrinque  $\frac{1}{4}qq$  per Prop. 4. Cap. 8. habetur.

$$a^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem  $b = -\frac{p}{3a}$ , proinde secunda pars radicis (ob  $x = a + b$ ) obtinebitur dividendo  $-p$  per triplum primæ partis radicis inventæ, hoc est

per  $3a$ , eritque  $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} -$

$$\frac{p}{3 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

I. Sit æquatio  $x^3 - 7x - 6 = 0$ , erit  $p = -7$ , &  $\frac{p^3}{27} = -\frac{343}{27}$ . At  $q = -6$ , &  $\frac{1}{4}qq = 9$ , hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{3} \pm \sqrt{-\frac{100}{27}} + \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{-4} \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}.$$

II. Sit æquatio  $x^3 - 6x + 8 = 0$ : comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, erit  $p = b$ , &  $\frac{1}{27}p^3 = -8$ : item  $q = 8$ , &  $\frac{1}{4}qq = 16$ . Hinc habetur

$$x = \sqrt[3]{-4} \pm \sqrt{8} + \sqrt[3]{-4} \pm \sqrt{8}.$$

COROLL. Hæ formulæ radices generales conveniunt, ut patet, cum formulis, quas in Propos. 6. hujus alia via tradidimus. Sunt hæ quidem multa simpliciores illis, quas in superiori Prop. 7. explicavimus, cum hæ unicam radices extractionem, illæ duas requirant.

SCHOL. I. At dubitant hic tirones, an per diversas ejusmodi formulas eadem omnino radix obtineatur. An ex gr. superioris primæ æquationis  $x^3 - 7x - 6 = 0$  ra-

dix per formulam Propos. hujus expressa  $\sqrt[3]{3} \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}$

$+ 3 \sqrt[3]{3} \pm \sqrt{-\frac{100}{27}}$  sit omnino eadem cum æquationis ejusdem radice, quæ per primam Cardani formulam habere-

tur, nempe  $\sqrt[3]{3} + \sqrt{-\frac{100}{27}} + \sqrt[3]{3} - \sqrt{-\frac{100}{27}}$ , hoc est in secunda hujus pars secunda parti alterius formulæ sit æqua-

æqualis. Sed nullum est prorsus dubium. Ponatur enim

$$3 \sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{-\frac{100}{27}} \text{ seu } \sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{-\frac{100}{27}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$$

erit ex communi lege æquationum  $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$

$\times \sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$ , factaque radicalium multiplicatio-

ne per Prop. 12. Cap. 4. invenitur  $\frac{7}{3} = \sqrt[3]{\frac{27}{3}} = \frac{7}{3}$ .  
 Et quidem extracta radice tertia ex binomio cubico  $3 \pm \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$  per Prop. 10. hujus, habetur  $1 \pm \sqrt[3]{-\frac{100}{27}}$ ,  
 adeoque  $1 + \sqrt[3]{-\frac{100}{27}} \times 1 - \sqrt[3]{-\frac{100}{27}} = 1 - \frac{100}{27} = \frac{27}{27}$ ,  
 ut prius; proinde evidens est, ex utraque formula eam-  
 dem radicem obtineri.

SCHOL. II. Si in æquatione cubica radix aliqua ratio-  
 nalis existat, tunc ejusmodi formulas inutilis quidem esse  
 censeo, cum talis æquatio via brevissima resolvi possit per  
 Prop. 4. vel 5. hujus; & absurdi genus sit, radicem  
 rationalem per terminos radicales, imo etiam per radi-  
 ces imaginarias inquirere. Quod si æquatio duas radices  
 imaginarias continet & unam realem irrationalem; tunc  
 hujusmodi formulae opportune adhibentur.

SCHOL. III. Ceterum ubi in æquatione  $x^3 - px \pm q$   
 $= 0$ , habetur  $\frac{1}{4} p^3 > \frac{1}{4} qq$ ; adeoque tres radices rea-  
 les, & inæquales sunt per Prop. 1. num. 2. & nulla  
 earum rationalis invenitur per Propos. 3. vel 5.; tunc

necessario  $\sqrt{\frac{1}{4} qq - \frac{1}{27} p^3}$  erit quantitas imaginaria.  
 Proinde radices, quæ ex natura æquationis reales esse de-  
 bent

*bent, tanquam imaginariae per Cardani, aliorumque formulas nobis exhibentur. Quod plane est absurdum. Et licet sagacissimum Analystarum ingenium, ut huic malo occurreret, ex binomio cubico radices imaginarias involvente radicem realem erui posse docuerit, quod & nos in sequenti Propos. explicabimus, id tamen nodum non solvit. Nam hoc tunc solum bene est, cum æquatio unam saltem radicem realem & simul rationalem continet: sed ubi nulla rationalis est, & omnes reales, tunc ars deficit, nullaque ratione per Analysim radices ejusmodi exprimi possunt. Et hic dicitur casus irreductibilis, & irresolutus; in quo opus est ad Geometriam confugere, quæ radices illas per lineas exprimit: quemadmodum ipsa rationem, quam quadrati latus ad diametrum habet incommensurabilem, quæque numeris explicari non potest, per lineas opportune designat.*

### PROPOSITIO X.

*Ex binomio cubico radicem extrahere.*

**E**Xtrahenda sit radix cubica ex binomio  $20 + \sqrt{392}$ . Reducatur pars radicalis  $\sqrt{392}$  ad simpliciores expressionem per Cor. 1. Prop. 2. Cap. 4. fiet  $14\sqrt{2}$ .

Certum est binomiæ radicis partem unam fore  $\sqrt{2}$ , vel hujus multipulum ( ut in secundo exemplo ) per numerum rationalem exprimendum, quem voco  $m$ . Nam si  $\sqrt{2}$  non ingrederetur radicem, neque cubum ingrederetur, ut manifestum est.

Ponatur itaque binomii cubici  $20 + 14\sqrt{2}$  pars rationalis  $20 = a$ , irrationalis autem  $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$ ; erit tota radix  $a + m\sqrt{c}$ , ex qua ( $a, c, m$  sunt indeterminatæ ) fiat cubus

$$a^3 + 3a^2 m \sqrt{c} + 3mmac + m^3c \sqrt{c}$$

Cu-

Cujus pars rationalis est  $a^3 + 3mmac$  ; pars irrationalis  $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$ . Quia vero  $\sqrt{c} = \sqrt{2}$ , erit

$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^3 \cdot 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$   
 Posito  $m = 1$ , & dividendo per  $\sqrt{2}$ , habetur

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2 &= 14 \\ 3a^2 &= 12 \\ a^2 &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Valore autem ipsius  $a$  in altera radicis parte substituto erit

$$a^3 + 3mmac = 8 + 12 = 20$$

Quod quidem cum hypothese optime convenit, proinde radix cubica  $a + m\sqrt{c} = 2 + \sqrt{2}$ .

II. Sit extrahenda radix cubica ex binomio  $\sqrt{18252} - 135$ . Reducatur per Prop. 2. Cap. 4. ad simplicem expressionem, fiet  $78\sqrt{3} - 135$ .

Ponatur, radix esse  $m\sqrt{c} - a$  (hoc est  $78\sqrt{3} = m\sqrt{c}$ , &  $-135 = -a$ ) & fiat cubus

$$m^3c\sqrt{c} - 3m^2ac + 3a^2m\sqrt{c} - a^3$$

Cum sit  $\sqrt{3} = \sqrt{c}$ , pars irrationalis erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 3a^2m\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

Posito autem  $m = 1$ , & dividendo per  $\sqrt{3}$ , erit

$$\begin{aligned} 3 + 3a^2 &= 78 \\ 3a^2 &= 75 \\ a^2 &= 25 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Quo valore subrogato in altera radicis parte, habetur

$-a^3 - 3m^2 ac = -125 - 45 = -170$   
 Quod cum hypothesi minime convenit, deberet enim esse  $-135$ : proinde signum est,  $m$  sumptum esse justo minorem.

Ponatur  $m = 2$ , adeoque  $m \sqrt{c} = 2 \sqrt{3}$ , erit

$$m^3 c \sqrt{c} + 3a^2 m \sqrt{c} = 24 \sqrt{3} + 6a^2 \sqrt{3} = 78 \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{l} \text{Div. per } \sqrt{3} ) \quad 24 + 6a^2 = 78 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 6a^2 = 54 \\ \quad \quad \quad \quad \quad a^2 = 9, \text{ hinc } a = 3 \end{array}$$

Proinde pars rationalis  $-a^3 - 3m^2 ac = -27 - 108 = -135$ . Quod quia cum hypothesi recte convenit; inferitur, radicem cubicam  $m \sqrt{c} = a = 2 \sqrt{3} = 3$ .

III. Sit binomium  $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ , cujus radix cubica quæritur. Habetur per *Propos. 2. Cap. 4.*  $\sqrt{-\frac{100}{27}} = \frac{5}{3} \sqrt{-3}$ . Hinc ponatur  $3 + \frac{5}{3} \sqrt{-3} = a + m \sqrt{c}$  radici, ex qua fiat cubus

$$a^3 + 3a^2 m \sqrt{c} + 3am^2 c + m^3 c \sqrt{c}$$

Et quia  $\sqrt{c} = \sqrt{-3}$ , pars radicalis erit

$$3a^2 m \sqrt{c} + m^3 c \sqrt{c} = 3a^2 m \sqrt{-3} + m^3 \times -3 \sqrt{-3}.$$

Posito  $m = 1$ , & dividendo per  $\sqrt{-3}$ , oritur

$$3a^2 - 3 = 5, \text{ \& } 3a^2 = 8$$

$$a^2 = \frac{8}{3}, \text{ \& } a = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Quod valore substituto, habetur pars rationalis

$$a^3 + 3m^2 ac = -1 + 4 = 3$$

Quod

Quod convenit cum hypothesi, unde radix quaesita  
 $a + m\sqrt{c} = 1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$ .

IV. Extrahenda fit radix cubica ex binomio, cu-  
 jus utraque pars est irrationalis  $\sqrt{243} + \sqrt{242}$ ,  
 quod per *Propos. 2. Cap. 4.* fit  $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$ .

Ponatur prima pars radiceis  $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$  secun-  
 da vero  $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$ ; adeoque tota radix erit  
 $m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$ , & cubus ex illa factus

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}$$

Atque hinc ob  $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$ ; erit una pars

$$m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Posito autem  $m = 1$ , & dividendo per  $\sqrt{3}$ , habetur

$$3 + 6n^2 = 9, \text{ \& } 6n^2 = 6$$

hinc  $n = 1$

Id/oque hoc valore in altero membro substituto, erit

$$3m^2nc\sqrt{d} + n^3d\sqrt{d} = 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

Quod sane cum hypothesi convenit, unde radix cu-  
 bica quaesita  $m\sqrt{c} + n\sqrt{d} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

**COROLL.** Cum substituto valore provenit numerus nu-  
 mero rationali major ( ut in secundo exemplo pro  $-135$   
 proveniebat  $-170$  ) signum est, valorem ipsum in sum-  
 ptum esse justo minorem; adeoque sumendum alium illo  
 majorem. Sin autem pro  $-135$  provenisset numerus  
 minor, tunc esset indicium, in sumptum esse justo majo-  
 rem; proinde si in primo casu fuit  $m = 1$ , & in se-  
 cundo  $m = 2$ , sumi debet intermedium, hoc est  $m = 1$   
 $\frac{1}{2}$ . Quo facto, si res nec bene succedat, signum est,  
 binomii radicem, qualis quaritur, non haberi: Ceterum  
 valor ipsius  $m$  semper debet esse vel numerus integer,  
 vel saltem integri dimidius.

SCHOL.

SCHOL. I. Si in non est pars aliquota quantitatis, quæ signo radicali præfigitur, radix cubica non obtinetur, quod advertatur.

SCHOL. II. Præclara hæc methodus est Jo: Wallisii (a) quæ, ut ipse ait, est ceteris longe simplicior. Nam quæ primum a Francisco Schootenio (b), deinde a Jacobo Ozanam (c) aliisque inde Scriptoribus tradita est regula, prolixior est, & plures exigit conditiones. Quæ autem traditur a Wolfio (d) per analysin, non modo prolixior est, sed æquationis cubicæ solutionem involvit, cujus radix non ita facile occurrit; imo illa, nisi sit rationalis, inveniri non potest. Ex hac vero methodo cito certi sumus, an radix quæsitæ ex binomio dato extrahi possit,

SCHOL. III. Pro facili & expedito examine radicis ex binomio cubico inventæ, satis erit investigare ejus partem rationalem tantum: quod fit addendo cubum partis rationalis ad triplum ejusdem partis multiplicatæ per quadratum partis alterius. Sic ex binomio  $78 \sqrt[3]{3} - 135$  fit radix inventa  $2 \sqrt[3]{3-3}$ . Adde cubum partis rationalis  $-3$ , scilicet  $-27$ , ad triplum ejusdem partis  $-9$  multiplicatæ per quadratum partis alterius  $12$ , nempe ad  $-108$ , summa dat  $-135$ , quod quia convenit cum parte rationali binomii dati; constat,  $2 \sqrt[3]{3-3}$  esse veram radicem. Ceterum radix cubica per superiorem Wallisii methodum inventa hoc examine probari non indiget, cum de ipsa aliunde certi simus.

SCHOL. IV. Quod si e binomio cubico radix extrahi nullo modo possit, & æquationis datæ radices per Cardani regulas expressæ valde implicatæ appareant, tunc præstat, ut Franciscus Schotenus (e) opportune admonet,

æqua-

---

(a) Algebra Cap. 47. Oper. Tom. 2. (b) Comment. Geometr. Cartes. edit. 3. pag. m. 389. (c) Nouveaux Elements de Algeb. Cap. 5. Probl. VIII. (d) Elementa Analysis. edit. 3. Probl. 169. (e) Comment. in lib. 3. Geom. Cartes.

æquationem illam ex sola sua constitutione invenire, quam ipsam confuse per easdem Cardani formulas exprimere. Sic data æquatione  $x^3 = 8x + 24$ , ejus naturam facilius concipies, si dicas, radicem hujus æquationis  $x$  talem esse, ut si multiplicetur per 8, & insuper addantur 24, æqualis sit futura suo cubo  $x^3$ , quam si eandem per Cardani formulam primam hoc modo exprimas:  $x = \sqrt[3]{12 + \sqrt{125 \frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{125 \frac{1}{2}}}$ . Ec sic de aliis.

## PROBLEMATATA CUBICA

### PROBL. I.

*Data summa duorum cuborum & differentia laterum, latera ipsa invenire.*

Si summa cuborum  $= 2a$ , latera  $= 2x$ , quorum differentia sit  $= 2b$ ; erit latus majus  $x + b$ , minus  $x - b$  per Theor. 3. Cap. 5. Cubi vero ex ipsis dant æquationem, quæ sequitur

$$\begin{array}{l} 2x^3 + 6b^2x = 2a \\ \text{Div. per 2.} \quad x^3 + 3b^2x = a \\ \quad \quad \quad x^3 + 3b^2x - a = 0 \end{array}$$

Si fiat  $a = 14$ ,  $b = 1$ ; erit æquatio determinata

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Quæ resolvitur per Propos. 4. hujus. Nam assumendo quadratum 4, erit  $4 + 3 = 7$ ; per quem dividendo 14, quotus 2 (radix quadrati assumpti) dat radicem æquationis quæsitam. Erit ergo unum latus  $x + b = 2 + 1$ , alterum  $x - b = 2 - 1$ .

Brevius resolvitur per Propos. 5. hujus. Nam sumpta

pta

pta radice cubica proxime minori ipsius 14, nempe 2, fit cubus 8, & facta hinc inde utriusque cubi subtractione, habetur statim  $x = 2$

$$\begin{array}{r} \text{Subtr.} \quad x^3 + 3x = 14 \\ \quad \quad \quad x^3 \qquad \qquad 8 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{r} + 3x = 6 \\ \quad \quad x = 2 \end{array}$$

## P R O B L E M A II.

Data summa duorum cuborum & rectangulo sub lateribus, invenire ipsa cuborum latera.

Si cuborum summa  $= 2a$ , rectangulum ex lateribus  $= 2b$ , latus unum quaesitum  $= x$ , & alterum  $= y$ ; erit  $x^3 + y^3 = 2a$ , &  $xy = 2b$ : hinc  $y = \frac{2b}{x}$ , &  $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$ . Et substituto in prima æquatione loco  $y^3$  ejus valore, habetur

$$x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$$

$$\begin{array}{r} \text{Mult. per } x^3 \quad x^6 + 8b^3 = 2ax^3 \\ \quad \quad \quad \quad x^6 - 2ax^3 = -8b^3 \end{array}$$

Quæ cum sit derivativa secundi gradus, si fiat  $x^3 = z$ , erit per Prop. 4. Cap. 8. æquatio

$$z^2 - 2az = -8b^3$$

Si supponatur  $2a = 72$ , &  $2b = 8$ , æquatio convertitur in sequentem

$$\begin{array}{r} \text{Prop. 1. Cap. 8. adde} \quad z^2 - 72z = -512 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1296 \quad \quad 1296 \end{array}$$

Extr. rad.

$$\begin{array}{r} z^2 - 72z + 1296 = 784 \\ z - 36 = \sqrt{784} = 28 \\ z = 36 + 28 = 64 \end{array}$$

Sed

Sed posita fuit  $x^3 = z$ ; ergo  $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} = 4$ .

Est ergo  $x = 4$ , &  $y (= \frac{2b}{x}) = \frac{8}{4} = 2$ .

P R O B L. III.

*Invenire tres numeros arithmetice proportionales, quorum differentia & solidum ab illis factum sunt data.*

Si trium proportionalium quæditorum differentia data =  $d$ , solidum =  $s$ , & numerorum quæditorum primus =  $x$ , erit secundus =  $x + d$ , tertius =  $x + 2d$  per *Schol. 1. Prop. 5. Cap. 5.*, & solidum ab illis factum

$$x^3 + 3dx^2 + 2ddx = s$$

Auferatur secundus terminus per *Propos. 5. Cap. 6.* facto  $x = y - d$ , oritur æquatio

$$y^3 - 3dy^2 + 2ddy = s$$

Proinde si supponatur  $d = 3$ , &  $s = 28$ , æquatio eadem erit

$$y^3 - 9y^2 + 18y = 28$$

$$y^3 - 9y^2 - 28 = 0$$

Hæc autem facile resolvitur per *Prop. 6. hujus*. Fiat enim  $p = 9$ ,  $q = 28$ ; ex formula generali  $x^3 - px + q = 0$

$$= 0 \text{ invenitur } y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \frac{\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}}}{\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}}}$$

Ex hoc binomio cubico extracta radice per *Prop. 10.*

*hujus*; habetur  $y = 2 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{2 + \sqrt{1}}}$  factaque

reductione, hoc est multiplicando primam partem per

denominatorem alterius, & addendo illi  $\frac{1}{3}p$ , seu ( in

hoc exemplo ) 3, habetur  $\frac{8 + 4\sqrt{1}}{2 + \sqrt{1}}$ . Fiat actu di-

visio per Prop. 6. Cap. 4. erit quotus 4. Est ergo  $y = 4$ ; sed posita fuit  $x = y - d$ , unde erit  $x = 4 - 3 = 1$ . Sunt ergo numeri proportionales quæsti 1, 4, quorum solidum = 28.

COROLL. .Poterat quoque Problema resolvi per Prop. 4. vel 5. hujus, cum unam radicem rationalem habeat, ut patet: imo & per Propos. 1. Cap. 7. cum habeatur 4. unus ex ultimi termini divisoribus, positoque  $y = 4$ , tota æquatio evanescat. Malui tamen per prop. 6. hujus illud resolvere, ut tirones discant radices ex binomio cubico extractas reducere, & alia, in quibus difficultatem quandoque solent experiri.

#### P R O B L. IV.

Numerum 10 ita dividere in quatuor partes geometricæ continuo proportionales, ut si prima ducatur in 8, secunda in 4, tertia in 3, & quarta in 1; summa omnium fiat 16.

Si una dati numeri pars =  $x$ , & proportionis geometricæ denominator =  $y$ , erit ex prima problematis conditione  $x + xy + xy^2 + xy^3 = 10$ , & ex secunda  $8x + 4xy + 3xy^2 + xy^3 = 16$ . Sumptoque ex utraque æquatione valore ipsius  $x$ , erit

$$x = \frac{10}{1 + y + y^2 + y^3}, \quad x = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$$

Proinde  $\frac{10}{1 + y + y^2 + y^3} = \frac{16}{8 + 4y + 3y^2 + y^3}$  Unde

$$\text{Unde } y^3 - \frac{7}{3}y^2 - 4y - \frac{32}{3} = 0$$

1.	3.	9.	27.
----	----	----	-----

---

$$y^3 - 7y^2 - 36y - 288 = 0$$

Et dividendo per  $y - 12$ , nihil remanet, adeoque  $y = 12$ . Sed cum radix superioris æquationis ad fractiones tollendas multiplicata sit per progressionem geometricam triplam; erit 12 triplum quæsitæ radice: hinc posito in alterutra æquatione  $y = 4$ , erit  $x = \frac{2}{17}$  pri-

ma pars quæsitæ, reliquæ vero  $\frac{8}{17}$ ,  $\frac{32}{17}$ ,  $\frac{128}{17}$ , quarum

summa  $\frac{170}{17} = 10$ , & si singulæ ducantur in numeros

imperatos, erit earum summa  $\frac{272}{17} = 16$ , ut patet.

SCHOL. *Problematis hujus auctor est Lucas Pacioli (a) a quo fuit particulari ratione per numeros determinatos solutum. Generalem ejusdem solutionem per Algebram tentavit Joannes Camillus Gloriosus (b), sed cum immenso pene calculo plures paginas implevisset, opus omnino non absolvit. Concinna hæc solutio ab Antonino de Monforte (c) tradita est.*

### P R O B L. V.

*Datis duabus rectis, alteram earum ita producere, ut alterius quadratum ad quadratum partis productæ eandem rationem habeat, quam pars productæ ad totam rectam.*

**S**int rectæ datæ  $a$  &  $b$ , & producat  $b$ , cujus pars productæ sit  $x$ ; tota recta erit  $b + x$ , & ex conditione probl.  $a^2$

---

(a) Arithm. Quæst. 27. (b) Exercitat. Mathematicæ. 4. Neap. 1635. (c) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

$$\begin{aligned} a^2 \cdot x^2 &:: x \cdot b + x \\ \text{Theor. 4. Cap. 5.} \quad x^3 &= a^2 b + a^2 x \\ x^3 - a^2 x - a^2 b &= 0 \end{aligned}$$

Sit  $a = 2, b = 12$ , æquatio fiet

$$x^3 - 4x - 48 = 0$$

Cujus resolutio facile obtinetur per Prop. 4. vel 5. hujus, ex quibus innotescit  $x = 4$ ; unde  $b + x = 16$ .

Quod si ponatur  $a = 2, b = 5$ , fiet æquatio, quæ nonnisi per Cardani regulas expeditur, nempe

$$x^3 - 4x - 20 = 0$$

Erit igitur  $p = 4, \frac{1}{3}p = \frac{4}{3}, \& \frac{1}{27}p^3 = \frac{64}{27}$ . Item

$q = 20, \frac{1}{2}q = 10, \frac{1}{4}qq = 100$ . Hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6}{27}}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6}{27}}}$$

Hujus autem binomii cubici radix ( si quidem extrahi possit ) obtinebitur per Prop. 10. hujus

## P R O B L. VI.

Invenire triangulum ABC, cujus latera AB, AC, BC, & perpendicularum DC sint in arithmetica proportione. Fig. 7

Ponatur perpendicularum  $CD = x$ , differentia laterum trianguli  $= d$ , erit  $BC = x + d, AC = + 2d, AB = x + 3d$  per Schol. 1. Propos. 3. Cap. 5. Est autem

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2, \& \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 \text{ per Prop.}$$

47. l. I. Eucl. Erunt proinde  $AD = \sqrt{(\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2)}$ , &

$$BD = \sqrt{(\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2)}; \text{ adeoque } AD = \sqrt{4dx}$$

$4dx + 4d^2$ , &  $BD = \sqrt{2dx + d^2}$ ; proinde tota  $AB$

$$(\equiv x + 3d) = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

Fiat calculi commodo  $x + 3d = m$ , erit

$$m = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

$$m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$$

Elevetur utrumque membrum ad quadratum, ut radicales exterminentur *per Reg. 4. Prop. 1. Cap. 5.* erit

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$$

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

Elevato rursus ad quadratum utroque hujus æquationis membro, & facta terminorum reductione *per Lem. Cap. 1.* habetur

$$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0$$

Substitutis autem valoribus loco  $m^4$ , &  $m^2$ , factaque reductione *per Lem. cit.* invenitur tandem æquatio

$$x^3 - 24d^2x - 48d^3 = 0$$

Quæ quidem est eadem, quam innuit Newtonus (a) in hoc eleganti problemate, cujus ipse auctor est. Resolvitur autem ultimo *per Prop. 8. vel 9. hujus.* Nam

fiat  $d = 1$ ,  $p = 24$ ,  $\frac{1}{3}p = 8$ , &  $\frac{1}{27}p^3 = 512$ : item

$q = 48$ ,  $\frac{1}{2}q = 24$ , &  $\frac{1}{4}qq = 576$ , invenitur per Car-

dani formulas  $x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$

Q

CA-

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. xiv. Londini an. 1722.

## CAPUT X.

*De Æquationibus Biquadraticis, & aliis altiorum graduum.*

**S**ecundus terminus, radicales, & fractiones supponuntur, si forte adsint, ad æquatione sublatae per *Propos. 2. 8. & 9. Cap. 7.*

## PROPOSITIO I.

*Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.*

**S**it æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus secundo termino carentes

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Cum hæc concipi possit veluti orta ex duabus æquationibus secundi gradus, quas *Componentes* vocabimus, nempe

$$x^2 + yx + f = 0, \quad \& \quad x^2 - yx + g = 0$$

Fiat ex earum multiplicatione æquatio æqualis priori  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ , secundo termino carens (ob terminos  $+yx$ , &  $-yx$  contrario signo affectos) nimirum

$$\begin{array}{r} x^4 + fx^2 - fyx + fg = 0 \\ + gx^2 + gyx \\ - y^2 x^2 \end{array}$$

Comparantur æquationis utriusque termini; erunt tres æquationes

$$f + g - y^2 = p, \quad gy - fy = q, \quad \& \quad fg = r$$

Ex

Ex quibus efformari debet alia, in qua non occurrat ulla incognita præter  $y$ , quæ in utraque componente est secundi termini coefficientis.

Hinc quia  $f + g - y^2 = p$ , erit quoque  $f + g = p + y^2$ ; & multiplicando omnes terminos per  $y$ , fit

$$fy + gy = py + y^3$$

Sed habetur ex secunda æquatione  $gy - fy = q$ ; ergo hæ duæ æquationes simul additæ efficiunt  $2gy = py + y^3 + q$ . Si subtrahantur vero, fiunt  $2fy = py + y^3 - q$ ; unde eruuntur ipsarum  $f$  &  $g$  valores, scilicet

$$g = \frac{py + y^3 + q}{2y}, f = \frac{py + y^3 - q}{2y}$$

$$fg = \frac{py + y^3 - q}{2y} \times \frac{py + y^3 + q}{2y}$$

$$fg = \frac{p^2 y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$$

Mult. per  $4y^2$   $\frac{4fgy^2 = p^2 y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2}{4y^2}$

Erat autem  $fg = r$ ; proinde si utrumque membrum multiplicetur per  $4y^2$ : erit  $4fgy^2 = 4ry^2$ ; ideoque fiet

$$4ry^2 = p^2 y^2 + 2py^4 + y^6 - q^2$$

Et ordinata æquatione habetur æquatio generalis cubica, nimirum

$$y^6 + 2py^4 + p^2 y^2 - q^2 = 0$$

$$- 4ry^2$$

Quæ, licet sexti gradus esse appareat, habetur tanquam cubica, cum omnes incognitæ termini sint

divisibiles per 2, & dicitur *Cubica derivata*, cui in-  
nititur æquationum omnium quarti gradus resolutio,  
ut per exempla, quæ sequuntur, planum fiet.

**COROLL. I.** Cum æquatio hæc *Cubica derivata* sit  
generalis, utpote orta ex æquatione illa generali  $x^2 + px^2$   
 $+ qx + r = 0$ , quæ æquationes omnes quarti gradus re-  
presentare supponitur; hinc est, quod data quarti gradus  
æquatione speciali, poterit statim haberi ejus *Cubica de-*  
*derivata*, substituendo in cubica generali loco  $p$ ,  $q$ , &  $r$   
valores æquationis particularis datae. Sit data æquatio  $x^4$   
 $- 4x^2 - 8x + 35 = 0$ , erit  $p = -4$ ,  $q = -8$ , &  
 $r = 35$ . Positis his valoribus in cubica generali, habe-  
tur cubica derivata particularis  $y^6 - 8y^4 - 124y^2 -$   
 $64 = 0$ . Similiter sit data æquatio  $x^4 - 17x^2 - 20x -$   
 $6 = 0$ ; erit  $p = -17$ ,  $q = -20$ ,  $r = -6$ . Unde  
*Cubica derivata* erit  $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$ .  
Quæ quidem semper considerari poterit, ut simpliciter cu-  
bica, & tanquam mese cubica resolvi, secundo termino  
subiato. Nam si ponatur  $y^2 = z$ , fiet  $z^3 - 34z^2 +$   
 $313z - 400 = 0$ , & ob  $z = y^2$ , erit  $\sqrt{z} = y$ .

**COROLL. II.** Si in duabus illis componentibus  $x^2 + yx$   
 $+ f = 0$ , &  $x^2 - yx + g = 0$  ponatur valor duarum  
indeterminatarum  $f$  &  $g$  per hanc Propos. inventus,  
oriuntur duæ æquationes

$$x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Quæ quidem, cognito valore  $y$ , sunt omnino cognita  
& determinata, ut patet.

**SCHOL. I.** Si in data æquatione particulari habea-  
tur  $+ p$ , tunc in utraque harum duarum ponitur

+

$\pm \frac{1}{2} p$ . Contra vero in utraque ponitur  $-\frac{1}{2} p$ , si æquatio particularis data habet  $-p$ .

SCHOL. II. Si in data æquatione habeatur  $\pm q$ , tunc in una duarum, in qua scilicet habeatur  $\pm yx$ , ponitur  $-\frac{q}{2y}$ . In altera, in qua est  $-yx$ , ponitur  $+\frac{q}{2y}$ . Contra vero si in data æquatione habeatur  $-q$ , ponendum est  $-\frac{q}{2y}$  in illa, in qua habeatur  $-yx$ , &  $+\frac{q}{2y}$  in altera, ubi reperitur  $\pm yx$ .

## PROPOSITIO II.

*Æquationes quarti gradus resolvere.*

**Æ**quatio data reducatur ad cubicam per Cor. 1. Prop. præc. & ex cubica derivata extrahatur radix per Prop. 4. vel 5. Cap. 9. si sit rationalis, vel per Propos. 8. aut 9. si sit irrationalis. Radicis hujus cubicæ valor, tum etiam valores  $p$  &  $q$  æquationis datæ ponantur in duabus illis indeterminatis secundi gradus, quæ habentur in Coroll. 2. Prop. præc. Facile erit obtinere quatuor æquationis datæ radices, quemadmodum exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio, qua Cartesius (a) ipse utitur,  $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$ ; erit (facta comparatione cum formula generali  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ )  $p = -17$ ,  $q = -20$ ,  $r = -6$ ; ejusque cubica derivata  $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$  per Coroll. 1. Prop. præc. Inveniatur valor  $y$  per Prop. 4. vel 5. Cap. 9. tollendo prius secundum terminum. Vel brevius reperiri potest, dividendo æquationem ipsam per aliquod quadratum, quod inter divisores ultimi termini existat,

Q 3

stat,

(a) Geometr. lib. III. edit. 3. pag. m. 80.

stat, ex. gr. per  $yy = 16$ . Sic enim divisio exacte succedit; unde  $yy = 16$ , &  $y = 4$ .

Hoc valore una cum valoribus  $p$  &  $q$  posito in

$$\text{duabus } \text{æquationibus } x^2 + yx + \frac{11}{2}y^2 + \frac{11}{2}p - \frac{q}{2y} = 0,$$

$$\text{\& } x^2 - yx + \frac{11}{2}y^2 + \frac{11}{2}p + \frac{q}{2y} = 0, \text{ habentur duæ } \text{æ-}$$

quationes secundi gradus  $x^2 + 4x + 2 = 0$ , &  $x^2 - 4x - 3 = 0$  per *Coroll. 2. Prop. præc.* in quibus apparent signa  $+$  &  $-$ , ut docuimus in *Schol. 1. & 2. Prop. cit.* earumque resolutio obtinetur per *Prop. 1. & 3. Cap. 8.* Radices enim prioris ambæ negativæ sunt  $-2 + \sqrt{2}$ , &  $-2 - \sqrt{2}$ ; alterius vero affirmativæ  $2 + \sqrt{7}$ , &  $2 - \sqrt{7}$ .

II. Sit æquatio  $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$ : comparatis terminis cum formula generali, erit  $p = -12$ ,  $q = 12$ , &  $r = -3$ ; ejusque cubica derivata  $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$  per *Coroll. 1. Prop. præc.* cujus radix invenitur per *Prop. 4. vel 5. Cap. 9.* Vel brevius dividendo æquationem per aliquem ultimi termini divisorem v. g. per  $yy = 12$ , per quem divisio exacte succedit. Est ergo  $yy = 12$ , &  $y = 2\sqrt{3}$ .

Ponatur hic valor simul, & valores  $p$  &  $q$  in duabus indeterminatis secundi gradus, ut factum est supra in primo exemplo; erunt duæ secundi gradus æquationes  $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$ , &  $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$  per *Coroll. 2. & Schol. 1. & 2. Prop. præc.* Quarum radices facile obtinentur per *Prop. 1. Cap. 8.* addendo utrique quadratum quantitatis cognitæ secundi termini divisæ per 2, nempe adden-

do  $+ 3$  (nam  $\frac{1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , cujus quadratum  $= 3$ )

Prioris ergo radices sunt  $\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}$ , &  $-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$ . Posterioris vero sunt  $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ , &  $-\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3}$ .

III. Sit æquatio  $x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$ . Comparatis terminis cum formulæ generalis terminis, erit  $p = -6$ ,  $q = 12$  &  $r = -10$ , & ejus cubica derivata  $y^6 - 12y^4 + 76y^2 - 144 = 0$ , seu  $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$  per *Coroll. 1. Prop. præc.* Hæc autem cum nullum divisorem admittat, indicio est, non habere valorem rationalem. Inveniatur ergo valor ejusdem per *Propos. 8. Cap. 9.* sed prius auferatur ab æquatione secundus terminus hoc pacto. Fiat  $z - 4 = v$ , erit  $z = v + 4$ , factaque potestatum substitutione, habetur transformata secundo termino carens, scilicet

$$\begin{array}{r|l} z^3 & = v^3 + 12v^2 + 48v + 64 \\ -12z^2 & -12v^2 - 96v - 192 \\ +76z & +76v + 304 \\ -144 & -144 \end{array}$$

Summa  $v^3 + 28v + 32 = 0$

Ex hac æquatione eruitur valor  $v$  per *Schol. Propos. 8. Cap. 9.* nempe

$$v = \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}}$$

Sed posita fuit  $z - 4 = v$ ; proinde erit

$$z = 4 + \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}}$$

Erat autem  $y^2 = z$ ; unde  $y = \sqrt{z}$ , atque hinc

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt[3]{-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}} - \sqrt[3]{16 + \sqrt{\frac{28864}{27}}}}$$

Hoc valore ipsius  $y$  simul cum valoribus  $p$  &  $q$  subrogatis in duabus illis æquationibus secundi gradus, ut in primo & secundo exemplo factum est, hæc

determinantur per Coroll. 2. Prop. præc. & quatuor, quæ inde eruntur radices, dant radices æquationis propositæ. Hoc autem cum calculum valde prolixum & permolestum exigat, necesse non erit ultra pergere: nam problemata, quæ ab æquationibus hujus generis dependent, ad Solidorum Geometriam amandantur.

COROLL. *Valor incognitæ y ex cubica derivata inventus vel rationalis est, ut in primo exemplo; vel radices quadraticas continet, ut in secundo; vel denique est irrationalis radicales cubicas involvens, ut in tertio. In primo & secundo casu æquatio quarti gradus dicitur plana, & in duas secundi gradus divisibilis est, ut vidimus. In tertio casu æquatio vere & proprie quarti gradus dicitur, & a nonnullis affectionem cubicam continere. Problema autem, ad quod solvendum ordinatur, dicitur solidum, quod non per regulam & circinum, sed per aliquam sectionem conicam, cujus ope radices exhibentur, construi tantummodo potest.*

### PROPOSITIO III.

*An biquadraticæ, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, resolvi possint.*

CUM certum sit, biquadraticas, quæ duas radices reales & duas imaginarias habent, resolvi posse, ex eo quod tunc earum cubica derivata unam realem, & duas imaginarias radices contineat, adeoque solubilis sit per Prop. 4. Cap. 9.; cum tamen biquadratica quatuor imaginariis radicibus constat, tunc omnes ejus cubicæ derivatæ radices reales fiunt, proinde oritur dubium, an in eo casu resolvi valeat.

I. Sit igitur æquatio  $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$ . Comparentur hujus termini cum terminis formulæ generalis  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ; erit  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $r = 6$ , & ejus cubica derivata  $y^6 + 2y^4$

---

—  $23y^2 - 4 = 0$  per Cor. 1. Prop. 1. hujus. Hæc si dividatur per  $yy - 4$ , nihil remanet; proinde  $y = 2$ : quo valore una cum valoribus  $p$  &  $q$  in duabus componentibus per Cor. 2. Propos. cit. fiunt  $x^2 - 2x + 3 = 0$ , &  $x^2 + 2x + 2 = 0$ , earumque radices, ut ex signis patet, sunt imaginariæ; nempe  $1 + \sqrt{-2}$ ,  $1 - \sqrt{-2}$ , &  $-1 + \sqrt{-1}$ ,  $-1 - \sqrt{-1}$ .

II. Sit æquatio  $x^4 + 70x^2 - 3744x + 27993 = 0$ : comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, ut supra, invenitur ejus cubica derivata per Coroll. 1. Propos. 1. hujus  $y^6 + 140y^4 - 107072y^2 - 14017536 = 0$ , & dividendo illam per  $yy - 324$ , cum divisio exacte fiat, erit  $yy = 324$ , &  $y = 18$ ; quo valore in duabus componentibus posito per Coroll. 2. Propos. cit. fiunt  $x^2 - 18x + 93 = 0$ , &  $x^2 + 18x + 301 = 0$ , ex quibus quatuor radices imaginariæ prodeunt,  $9 + \sqrt{-12}$ ,  $9 - \sqrt{-12}$ ,  $-9 + \sqrt{-220}$ ,  $-9 - \sqrt{-220}$ .

COROLL. I. Atque hinc patet, biquadraticas, quæ quatuor radicibus imaginariis constant, sortiri posse cubicam derivatam, quæ radicem aliquam realem & rationalem contineat, quæ quidem vel per aliquam divisorem, vel per extractionem radicis ex binomio cubico obtineatur, tunc vero tam ipsam, quam biquadraticam optime posse resolvî. Quanquam biquadratica ejusmodi ad problematis solutionem, ad quod erat ordinata, inepta sit, cum nulla radix realis ad illud construendum assignari valeat, ut Cartesius advertit.

COROLL. II. At generatim si cubica derivata talis sit, ut tres radices reales irrationales contineat, ita ut casum irreductibilem involvat, de quo in Schol. 3. Propos. 9. Cap. 9. tunc neque ipsa, neque biquadratica solvi poterunt, cum omnis æquationum quarti gradus  
reso-

250 DE ÆQUAT. BIQUADRAT.  
*resolutio a cubica derivata solutione maxime pendeat ,  
 eique tanquam fundamento imitatur.*

PROPOSITIO IV.

*Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.*

**A**lia quoque methodus æquationes biquadraticas resolvendi, & illas in duas planas secundi gradus dividendi, si divisibiles sint, excogitata fuit a Cl. Huddenio; quæ insuper id habet commodi, ut si adsit secundus terminus, nihil obstet.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus, etiam secundo termino præditas

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Dividatur in duas partes, ita ut altera contineat  $x^4 + px^3$ , altera  $x^2 + rx + s$ , utraque scilicet parium dimensionum potestates  $x^4$ , &  $x^2$ , erit

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$$

Ut prima pars quadratum fiat, ponatur radix  $x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{2} y$ , ejus quadratum erit

$$x^4 + px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 + \frac{1}{2} pyx + \frac{1}{4} yy + yx^2$$

Quod quidem alteri quoque æquationis parti addatur, omissis  $x^4 + px^3$ , cui æqualis supponitur  $-qx^2 - rx - s$ ; ita ut loco  $x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$  habeatur

$$x^4 + px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 + \frac{1}{2} pyx + \frac{1}{4} yy = -qx^2 - rx - s$$

$$yx^2 \qquad \frac{1}{4} p^2 x^2 + \frac{1}{2} pyx + \frac{1}{4} yy$$

$$yx^2$$

Cum

Cum igitur prima pars sit quadratum, altera quoque pars quadrato æquali debet. Ponatur, hujus radix esse  $vx + z$ ; ejus quadratum erit  $v^2x^2 + 2vzx + zz$ ; utque habeantur valores  $v$ , &  $z$ , fiat terminorum comparatio; erit

$$vv = \frac{1}{4}pp - q + y, \text{ \& } v = \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}$$

$$2vz = \frac{1}{2}py - r, \text{ \& } z = \frac{\frac{1}{2}py - r}{2v}, \text{ hoc est}$$

$$z = \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}}. \text{ Proinde radix } vx + z \text{ erit}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \times x + \frac{\frac{1}{2}py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}}, \text{ cujus quadratum}$$

$$\frac{1}{4}pp - q + y \times xx + \frac{1}{2}py - r \times x + \frac{\frac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y}$$

Comparando jam hujus quadrati terminos cum terminis quadrati secundæ partis præcedentis æquationis, destruuntur termini similes, & remanet

$$\frac{\frac{1}{4}ppyy - pry + rr}{pp - 4q + 4y} = \frac{1}{4}yy - s$$

Factaque multiplicatione, & ordinata æquatione, oritur cubica generalis

$y^3 -$

$$y^3 - qyy - 4sy - pps = 0 \\ + pry + 4qs \\ - rr$$

Cujus valoribus  $p, q, r, s$  per coefficientes æquationis specialis datæ determinatis, quæritur valor ipsius  $y$ . Quo invento, si rationalis sit, poterunt ejusdem ope determinari duæ sequentes æquationes secundi gradus, quæ ex æqualium quadratorum radicibus componuntur, & per illas æquatio proposita dividi, ut, quæ inferius sequuntur exempla, rem ostendunt.

$$x^2 + \frac{1}{2} px + \sqrt{\frac{1}{4} pp - q + y} X x + \frac{1}{2} y + \frac{\frac{1}{2} py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4} pp - q + y}} \\ = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2} px - \sqrt{\frac{1}{4} pp - q + y} X x + \frac{1}{2} y - \frac{\frac{1}{2} py - r}{2\sqrt{\frac{1}{4} pp - q + y}} \\ = 0$$

I. Data sit æquatio  $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ ; erit  $p = -1, q = -3, r = 1, s = 2$ , quibus valoribus in cubica generali positis, fit  $y^3 + 3y^2 - 9y - 27 = 0$ , quæ si dividatur per  $y + 3$ , nihil remanet; est ergo  $y = -3$ , qui valor, cum sit rationalis, indicio est; æquationem datam in duas secundi gradus esse divisibilem. Ponatur igitur hic valor una cum valoribus  $p, q, r$  in duabus præcedentibus secundi gradus; eruitur ex prima  $x^2 - 1 = 0$ , ex altera  $x^2 - 1x - 2 = 0$ , & per utramque æquatio data dividi potest, ut patet.

II. Sit Cartesii æquatio a nobis allata in *Propos. præc.*  $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$ . Erit  $p = 0, q = -17, r = -20, s = -6$ ; & per hos valo-

valores cubica generali determinata, invenitur  $y^3 + 17y^2 + 24y + 8 = 0$ , quæ si dividatur per  $x + 1$ , nihil remanet. Est ergo  $y = -1$ , & hoc valore in duabus secundi gradus substituto, inveniuntur  $x^2 + 4x + 2 = 0$ , &  $x^2 - 4x - 3 = 0$ , omnino ut antea per Cartesii regulam.

COROLL. Si valor ipsius  $y$  ex cubica inventus non sit rationalis, æquatio proposita quarti gradus non erit divisibilis in duas secundi gradus, sed problema erit solidum.

SCHOL. Cum præclara hujus methodi artificium Huddeus nobis occultum reliquerit, illud Antonii de Monforte solertia detexit (a). Quod & nos, paucis mutatis, hoc loco referre in laudem Cl. Viri de Matthesi optime meriti, æquum duximus.

## PROPOSITIO V.

Æquationem biquadraticam puram, vel secundo & quarto termino carentem solvere.

I. Si æquatio biquadratica pura  $x^4 = q$ , vel  $x^4 = -q$ . Extrahatur primo radix quadrata; erit  $x^2 = \sqrt{q}$ , vel  $x^2 = \sqrt{-q}$ . Deinde iterum extrahatur eadem radix; & habebitur  $x = \sqrt{\sqrt{q}}$ , vel  $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$ . Sit ex. gr.  $x^4 = 50$ , erit  $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ; extractaque rursus radice, erit  $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$ .

II. Si in æquatione biquadratica, præter secundum terminum, desit etiam quartus (sæpe fit, ut auferendo secundum terminum, quartus quoque evanescat) ut  $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$ ; facile erit eam resolvere, ut derivativam secundi gradus per Prop. 4. Cap. 8.

COROLL.

---

(a) Tract. de Probl. determinat. Neap. 1690.

COROLL. Omnes ergo biquadratica, quæ primum & ultimum terminum tantum habent, vel quæ termino secundo, & quarto carent, ab omni affectione cubica sunt immunes, & in duas secundi gradus dividi possunt.

SCHOL. Raphael Bombelli (a) Bononiensis anno 1579. æquationes biquadraticas resolvendi methodum in sua Algebra tradidit, sed a Ludovico de Ferrariis eam accepisse, ferunt. Quicquid sit, Italorum hominum ingenium & gloria fuit hucusque progredi (b). Post Vietam Cartesius nova sua methodo mirum quantum illam illustraverit, quem deinde secuti sunt duces quotquot de Analysis scripserunt. Ceterum majores nostri ultra æquationes biquadraticas non sunt progressi, summam rei difficultatem prospicientes. Recentiores aliqui generalem æquationes quascunque resolvendi methodum tradiderunt; non advertentes fortasse, eam methodum inutilem jure censi, quæ immensum (quod ipsi fatentur) & inexplicabilem fere calculum postulat. Nos duntaxat de reductione æquationum quarti, quinti, & sexti gradus paulo post agemus: quæ si reducibiles sint, facile possunt per ea, quæ de cubicis & biquadraticis diximus, resolvi. Sin autem reduci non poterunt, saltem constabit, problema, ad quod illæ ordinantur, esse solidum, & nonnisi per Sectiones Conicas resolvendum. Sed tironum studio obsequentes nonnulla quarti gradus problemata ad eorum ingenii exercitationem præmittimus.

PRO-

---

(a) Algebra lib. 2. pag. 353. Wallisii Algeb. cap. IV. pag. 229.

(b) Histoire de l'Acad. Royale des scien. an. 1705. p. m. 103.

PROBLEMATATA QUARTI GRADUS

P R O B L. I.

*Numerum datum in duos ita dividere, ut eorum quadrata inter se multiplicata producant numerum æqualem numero dato c.*

**E** Sto numerus datus dividendus =  $2a$ , & partium differentia =  $2x$ ; erit pars major  $a + x$ , minor vero  $a - x$  per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5. Et ex conditione problematis habetur

$$\begin{array}{r} \text{-----}^2 \quad \text{-----}^2 \\ a + x \times a - x = c \\ x^4 - 2a^2 x^2 + a^4 = c \end{array}$$

Brevitatis gratia, ut quantitates  $a$  &  $c$  determinentur, pono  $2a = 14$ , &  $c = 2304$ ; erit æquatio, & quidem derivativa secundi gradus, facile resolven-  
da per Prop. 4. Cap. 8.

$$\begin{array}{r} x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304 \\ x^4 - 98x^2 = -97 \\ \text{adde} \quad \quad \quad 2401 \quad \quad 2401 \end{array}$$

---


$$x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$$

$$\begin{array}{l} \text{Extr. rad. } x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48 \\ x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1} \\ x = 1 \end{array}$$

Unde  $a + x = 8$ , &  $a - x = 6$ , quorum quadratis invicem multiplicatis æquatur  $c = 2304$ .

## P R O B L. II.

*Invenire quatuor numeros in continua proportione arithmetica, qui inter se multiplicati faciant numerum a.*

**P**one numerum datum  $a = 100$ , & terminorum differentiam  $= d$ . Sit primus terminus  $x$ , erit secundus  $x + d$ , tertius  $x + 2d$ , & quartus  $x + 3d$  per Sch. 1. Prop. 3. Cap. 5. quibus invicem multiplicatis, habetur æquatio

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0$$

Inventis autem per Prop. 9. Cap. 1. ultimi termini divisoribus 1, 2, 4, 5 &c. tentetur divisio per  $x \pm 1$ ,  $x \pm 2$ ,  $x \pm 4$  &c. quæ non succedit sine residuo. Tollatur secundus terminus æquationis per Propos. 5. Cap. 7. Quamobrem fiat  $x = z - \frac{3}{2}d$ ; æquatio transformabitur in sequentem derivativam secundi gradus, quæ secundo & quarto termino caret, nempe

$$z^4 - \frac{5}{2}d^2z^2 + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$$

Proinde si ponatur  $d = 1$ , erit

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 = 99 \frac{7}{16}$$

$$\text{adde} \quad \frac{25}{16} \qquad \frac{25}{16}$$


---

$$z^4 - \frac{5}{2}z^2 + \frac{25}{16} = 101$$

*Extr. rad.*

$$z^2 - \frac{5}{4} = \sqrt{101}$$

$$z^2 =$$

$$z^2 = \frac{5}{4} + \sqrt{101}$$


---

*Extr. rad.*  $z = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$

Sed posita fuit  $x = z - \frac{3}{2}d$ ; erit ergo primus

terminus quæsitus  $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2}$ , se-

cundus  $x + d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{1}{2}$ , tertius

$x + 2d = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{1}{2}$ , quartus  $x + 3d$

$= \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{3}{2}$ . Factum ex primo & quar-  
to est  $-1 + \sqrt{101}$ , factum vero ex secundo &  
tertio est  $+1 + \sqrt{101}$  per num. 4. Propos. 12.

Cap. 4. Atque hinc  $-1 + \sqrt{101} \times +1 + \sqrt{101} = 100$ .

Sit iterum  $a = 100$ ,  $d = 2$ ; æquatio superior fiet  $z^4 - 10z^2 - 91 = 0$ , seu

$$\begin{array}{r} z^4 - 10z^2 = 91 \\ adde \quad \quad \quad 25 \quad \quad 25 \end{array}$$


---

*Extr. rad.*  $z^4 - 10z^2 + 25 = 116$   
 $z^2 - 5 = \sqrt{116}$   
 $z^2 = 5 + \sqrt{116}$

$$z = \sqrt{5 + \sqrt{116}}$$

Sed  $x = z - \frac{3}{2}d$ ; ergo primus terminus pro-  
R
por-

portionalis erit  $x = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 3$ , secundus

$x + d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} - 1$ , tertius  $x + 2d =$

$\sqrt{5 + \sqrt{116}} + 1$ , quartus  $x + 3d = \sqrt{5 + \sqrt{116}} + 3$ . Proinde factum ex primo & quarto est  $-4 + \sqrt{116}$ , factum vero ex secundo & tertio  $+4 +$

$\sqrt{116}$  per *Propos. citat.*; adeoque  $-4 + \sqrt{116}$

$X + 4 + \sqrt{116} = 116 - 16 = 100$ .

### P R O B L. III.

*Tres numeros invenire, quorum quadrata sint harmonice proportionalia.*

**S**it quæditorum primus 1, secundus  $x$ , tertius  $x + 1$ , eorumque quadrata 1,  $xx$ ,  $x^2 + 2x + 1$ : quæ cum sint ex hypothese harmonice proportionalia, erit maximum ad minimum, ut differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi, nimirum

$$x^2 + 2x + 1. 1 :: 2x + 1. xx - 1$$

Et multiplicatis mediis & extremis, habetur

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 2x + 1$$

$$\cdot \quad x^4 + 2x^3 - 4x - 2 = 0$$

Quæ quidem æquatio cum per nullum binomium divisibilis sit, tentanda est solutio per *Propos. 4. hujus*.

\*Sit igitur  $p = 2$ ,  $q = 0$ ,  $r = -4$ ,  $s = -2$ : positisque his valoribus in cubica generali, oritur  $y^3 - 8 = 0$ , hoc est  $y = 2$ . Quo valore una cum valoribus  $p$ ,  $r$ ,  $s$  substituto in duabus secundi gradus æquationibus, sunt

$$x^2 +$$

$$x^2 + 1x + 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 0, \text{ \& } x^2 + 1x + 1 - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0$$

$$+ \sqrt{3} X x \quad \quad \quad - \sqrt{3} X x$$

Cum autem ex neutra habeatur radix, quæ numeris explicari possit, ut evidens est, aliam viam, quam Jacobus de Billy (a) innuit ex Diophanti methodo, ingredimur, & est hujusmodi.

Inveniantur duo numeri quadrati tales, ut eorum differentia addita majori faciat quadratum. Ponantur, ut supra, quadrata  $x^2 + 2x + 1$ , &  $xx$ , quorum differentia  $2x + 1$  addita majori, fit  $x^2 + 4x + 2$ . Cum autem hæc summa debeat æquari quadrato, si pro ejus latere sumatur  $x - 2$ ; erit  $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 2$ ; & sublatis utrinque terminis similibus, habetur  $x = \frac{1}{4}$ : quo valore in duobus

quadratis assumptis posito, erunt  $\frac{25}{16}$  &  $\frac{1}{16}$ , seu in integris 25 & 1, quorum differentia 24 majori quadrato addita facit quadratum 49, ut patet. Jam igitur numeri quadrati harmonice proportionales ab initio positi 1,  $xx$ ,  $x^2 + 2x + 1$  erunt 1,  $xx$ , 25  $xx$ ; adeoque  $25xx \cdot 1 :: 24xx \cdot xx - 1$ ; & multiplicatis tum mediis, tum extremis, oritur  $25x^4 - 25x^2 = 24x^2$ , seu  $25x^2 = 49$ , hoc est  $x^2 = \frac{49}{25}$ , &  $25x^2 = \frac{1225}{25}$ ; proinde numeri quæsitæ sunt 1,  $\frac{49}{25}$ , &  $\frac{1225}{25}$ , vel in integris 25, 49, 1225.

COROLL. Si pro quadrati latere  $x - 2$ , ponatur  $x - 3$ , vel  $x - 4$  &c. invenientur alii atque alii infinitum tres numeri quadrati harmonice proportionales, ut supra.

R 2

SCHOL.

(a) Diophanti Redivivi p. 2. Probl. xvi.

SCHOL. Duo hic notent tirones. 1.º Hujus problematis solutionem ab ea conditione necessario pendere, ut duorum quadratorum, quæ assumuntur, differentia majori quadrato addita quadratum efficiet: 2.º Non esse omnino desperandum de solutione problematis, quæ primo impossibilis videatur; nam si nequit per unam methodum, per aliam saepe satis commode expeditur.

P R O B L. IV.

In rectangulo datis area & diametri aggregato, & differentia laterum, invenire latera, diametrum, & aream. Fig. 8.

Si area & diametri summa =  $a$ , differentia laterum =  $2d$ , quaesitorum eorundem laterum summa =  $2x$ ; erit latus minus  $AB = x - d$ , majus vero  $BC = x + d$  per Theor. 3. Propos. 3. Cap. 5. & ex eorum facto innotescit rectanguli  $BD$  area =  $x^2 - d^2$ , quæ si auferatur ex summa data =  $a$ , prodit diameter  $AC = a - x^2 + d^2$ .

Cum igitur sit  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$  per Prop. 47. l. 1. Eucl., erit in terminis analyticis

$$\begin{array}{r}
 \overline{a - x^2 + d^2}^2 = \overline{x + d}^2 + \overline{x - d}^2 \\
 a^2 - 2ax^2 + 2ad^2 + x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = 2x^2 + 2d^2 \\
 x^4 - 2d^2x^2 = 2d^2 - 2ad^2 - d^4 - a^2 \\
 \quad - 2ax^2 \\
 \quad - 2x^2
 \end{array}$$

Et si ponatur  $a = 58$ ,  $d = 1$ , æquatio determinabitur, nempe

Prop. 4. Cap. 8.  $x^4 - 120x^2 = -3479$   
 $\qquad\qquad\qquad 3600 \qquad\qquad\qquad 3600$

$$x^4 - 120x^2 + 3600 = 121$$

Extr. rad.  $x^2 - 60 = \pm \sqrt{121}$   
 $x^2 = 60 - 11 = 49$

Extr. rad.  $x = 7$

Erit ergo latus minus  $x - d = 6$ , majus  $x + d = 8$ , & area rectanguli = 48, quæ detracta ex aggregato areæ & diametri  $a$  (= 58), relinquit diametrum = 10, ut evidens est.

P R O B L. V.

*Data summa laterum trianguli, dataque ratione summe quadratorum, quæ fiunt a lateribus, ad aream ejusdem trianguli, reperire latera.*

Pone summam laterum datam =  $2a$ , atque hinc sume basim  $AB = b$ ; erit aggregatum reliquorum  $AC + CB = 2a - b$ . Esto ex illis unum  $AC = x$ , erit aliud  $2a - b - x$ . Ratio vero summe quadratorum ad trianguli aream ponatur; ut  $m$  ad  $n$ , sive 8 ad 1.

Ut inveniatur trianguli ipsius area, subtrahere ex semisumma laterum =  $a$  singula trianguli ejusdem latera; erunt tres differentiæ  $a - b$ ,  $a - x$ ,  $-a + b + x$ : ex quarum facto ducto in semisummam laterum, obtinetur trianguli area per ea, quæ diximus in *Probl. 4. Cap. 8.* nempe

---


$$\sqrt{-a^4 + 2a^3 b + 2a^3 x - 3a^2 bx - a^2 x^2 - a^2 b^2 + ab \cdot x$$

$$+ abx^2}, \text{ quam voco } g.$$

Summa vero quadratorum ex lateribus ejusdem trianguli erit

$$2x^2 + 2bx - 4ax + 2b^2 - 4ab + 4a^2, \text{ quam voco } f.$$

Est autem ex conditione problematis

$f \cdot g :: m \cdot n$

*Th. 6. Prop. 3. Cap. 5.*  $f \cdot g^2 :: m^2 \cdot n^2$   
*Theor. 4. Propos. cit.*  $f^2 \times n^2 = g^2 \times m^2$

Positis proinde valoribus  $m^2$ ,  $n^2$ ,  $f^2$ , &  $g^2$ , factaque de more reductione, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^4 - 4ax^3 + 24a^2x^2 - 40a^3x - 40a^3b = 0 \\ + 2bx^3 - 24abx^2 + 60a^2bx + 24a^2b^2 \\ + 3b^2x^2 - 24ab^2x - 4ab^3 \\ + 2b^3x + 20a^4 \\ + b^4 \end{aligned}$$

Jam si ponatur  $a = 6$ , &  $b = 3$ ; prodit eadem æquatio determinata  $x^4 - 18x^3 + 459x^2 - 3402x + 7209 = 0$ . Hæc autem cum per nullum binomium dividi possit sine residuo, quærenda est, sublato secundo termino, ejus solutio *per Propos. 2. vel 3. hujus*:

Quod si manentibus, ut prius,  $a = 6$ ,  $b = 3$ ; fiat  $m \cdot n = 8 \frac{1}{2} \cdot 1$ , seu  $m \cdot n = 25 \cdot 3$ , eademque methodo procedatur; invenietur æquatio determinata

$$\begin{array}{cccccc} x^4 & - & 18x^3 & + & 483\frac{1}{2}x^2 & - & 3622\frac{1}{2}x & + & 7650 & = & 0 \\ \mathbf{1.} & & \mathbf{4.} & & \mathbf{16.} & & \mathbf{64.} & & \mathbf{256.} & & \end{array}$$

$z^4 - 72z^3 + 7736z^2 - 231840z + 1958400 = 0$   
 Quæ si dividatur per  $z - 16$ , nihil remanet; est ergo  $z = 16$ . Sed ob progressionem geometricam quadruplam, qua multiplicatæ sunt radices prioris æquationis, erit  $4x = z$ , seu  $4x = 16$ , &  $x = 4$ . Proinde latus quæsitum  $AC = 4$ .

P R O B L. VI.

*Datis, quadrato AC, & recta M producere latus DC in E, ita ut ex angulo A ducta AE, pars intercepta EF aequalis sit datae M. Fig. 24.*

Sit  $AB$ , vel  $BC = a$ ,  $BF = x$ ; erit  $FC = a - x$ . Sit  $M$  (ex hypothesi  $= FE$ )  $= c$ . Ob triangula similia  $CFE$ , &  $AFB$ , erit  $CF (a - x)$ ,  $FE (c)$

$\therefore FB (x) \cdot AF \frac{cx}{a - x}$ . Et ob triangulum  $ABF$

rectangulum, est  $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$ , hoc est

$$\frac{ccxx}{aa - 2ax + xx} = aa + xx; \text{ atque hinc oritur } x$$

$$- 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$

Ut tollatur secundus terminus, fiat  $x - \frac{1}{2}a = z$ ; oritur

$$z^4 x + \frac{1}{2} aaz^2 - a^3 z + \frac{5}{16} a^4 = 0$$

$$- ccz^2 - accz - \frac{1}{4} aacc$$

Invenienda modo est ejus cubica derivata *per Prop. 1. hujus, ejusque Coroll.* proinde necesse est nosse, an termini hujus biquadraticae sint cum signo  $+$ , vel  $-$ . Quod ex ipsis dati problematis conditionibus explicari debemus; Hoc est videndum, an  $a > c$ , vel contra  $c > a$ . Certum est,  $FE (= M)$  esse  $> AB$ , vel  $BC$ ; adeoque  $c > a$ , item  $cc > aa$ , & multo magis  $cc > \frac{1}{2}aa$ . Igitur tertius aequationis datae terminus

est negativus, nempe  $\frac{1}{2}aa - cc = -p$ . Similiter

$- a^3 - acc = - q$ . Demum quia  $cc > aa$ , erit  
 $cc > \frac{5}{4} aa$ , & multiplicando utrinque per  $aa$ , erit  
 $aacc > \frac{5}{4} a^4$ , &  $\frac{1}{4} aacc > \frac{5}{16} a^4$ ; unde ultimus ter-  
 minus est negativus, nempe  $\frac{5}{16} a^4 - \frac{1}{4} aacc = -r$ . Om-  
 nes ergo biquadraticæ termini sunt cum signo  $-$ .  
 Nimirum  $2p = aa - 2cc$ ,  $p^2 - 4r = -a^4 + c^4$ ,  
 $-q^2 = -a^6 - 2a^4cc - aac^4$ . Quibus in cubica  
 generali derivata positis, habetur per *Propos. cit.*

$$\begin{aligned}
 y^6 + aay^4 - a^4y^2 - a^6 &= 0 \\
 - 2ccy^4 - c^4y^2 - 2a^4cc \\
 &= aac^4
 \end{aligned}$$

Jam videndum, an hæc divisibilis sit per aliquem  
 ultimi termini divisorem sine residuo. Divisores  
 sunt  $a$ ,  $aa$ ,  $aa + cc$ ,  $a^3 + acc$  per *Propos. 9.*  
*Cap. 1.* Divisio tentari potest per  $yy - aa$ , vel  
 $yy - aa - cc$ . Et quidem dividendo per hunc se-  
 cundum, nihil remanet. Quotus autem est  $y^4 -$   
 $ecy^2 + 2aay^2 + a^4 + aacc = 0$ , unde patet, cubi-  
 cam derivatam conflare ex duabus æquationibus, una  
 secundi, altera quarti gradus. At nobis satis est æqua-  
 tio secundi gradus  $yy - aa - cc = 0$ ; unde habe-  
 mus valorem ipsius  $y$ , hoc est  $y = \pm \sqrt{aa + cc}$ ,  
 qui valor substituendus est in his duabus indetermi-  
 natis secundi gradus per *Propos. 1. hujus* cum notis  
 & observationibus *Sch. 1. & 2.*

$$1.^a \quad z^2 + yz + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 - yz + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p + \frac{q}{2y} = 0$$

Substituto valore ipsius  $y$ , cum valoribus  $p$  &  $q$ , erit

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4} aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa + cc}} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4} aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}} = 0$$

Multiplicando autem tam numeratorem, quam denominatorem fractionis  $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}}$  per  $\sqrt{aa + cc}$ ,

remanet idem valor, & prodit  $\frac{a^3\sqrt{aa + cc} + acc\sqrt{aa + cc}}{2aa + 2cc}$ ;

& dividendo hanc per  $aa + cc$ ; erit  $\frac{a\sqrt{aa + cc}}{2}$ ,

seu  $\frac{1}{2} a\sqrt{aa + cc}$ , quæ ponenda est in duabus illis secundi gradus loco ipsius  $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa + cc}}$ : adeoque

fiunt

$$1.^a \quad z^2 - z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4} aa - \frac{1}{2} a\sqrt{aa + cc} = 0$$

$$2.^a \quad z^2 + z\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4} aa + \frac{1}{2} a\sqrt{aa + cc} = 0$$

Ex

Ex utraque obtinetur duplex valor ipsius  $z$  per *Prop. 1. Cap. 8.* si disponantur termini, ut moris est, & addatur utrinque quadratum semicoefficientis secundi termini. Sic ex priori

$$z^2 - z\sqrt{aa + cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = -\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$$

$cc$ . Extracta radice secunda, habetur duplex valor, nempe

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

Et quia positum fuit  $x - \frac{1}{2}a = z$ , adeoque  $a = z + \frac{1}{2}a$ , si valori invento ipsius  $z$  addatur  $+\frac{1}{2}a$ ; habebitur valor ejusdem  $x$ , qui maxime quærebatur, nimirum

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$$

Qui duo valores ipsius  $x$  dant longitudinem quæsitam  $BF$ ; & sunt iidem, qui nobis a Cartesio (a) paucissimis verbis indicantur; sed tironibus ob multiplicem Asymmetriam non ita facile occurrunt.

SCHOL. I. Breviorem aliam præclari hujus problematis solutionem, quæ secundi gradus æquationem non excedit, trademus inferius, ubi de Geometrica æquationum Constructione Cap. 12. agetur.

SCHOL. II. Si loco quadrati detur rectangulum  $ABCD$ , ex cujus angulo  $A$  ducenda sit recta æqualis datæ  $M$ , ut supra; tunc problema esset solidum. Sit enim  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $EF = c$ , &  $BF = x$ , erit  $CF = b - x$ :

ob triangula  $CFE$ ,  $BFA$  similia,  $AF = \frac{cx}{b - x}$ , &

$$\overline{AF}^2$$

(a) Geometr. lib. 3. pag. 83.

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2, \text{ hoc est } \frac{ccxx}{b^2 - 2bx + x^2} = aa + xx:$$

unde prodit biquadratica priori similis, sed quæ nullo modo divisibilis est in duas secundi gradus, adeoque in problema solidum transit. Hinc Pappus Alexandrinus (a) hoc ipsum problema resolvit per hyperbolam intra Asymptotos, & Circulum.

### DEFINITIONES.

I. **O**Mnis æquatio composita *Reducibilis* dicitur, quæ per æquationes inferioris gradus exacte dividi, & ad inferiorem gradum deprimi potest. Sic æquatio quinti gradus, quæ dividi potest exacte per duas æquationes inferiores, alteram secundi & alteram tertii gradus, dicitur *Reducibilis*.

2. *Æquatio composita*, quæ per nullam æquationem inferioris gradus est divisibilis, dicitur *Irreducibilis*. Ut æquatio sexti gradus, quæ nec per duas æquationes, unam secundi, alteram quarti gradus, nec item per duas tertii gradus dividi exacte potest, dicitur *Irreducibilis*.

SCHOL. *Reductio*, de qua hic agimus, eo tendit, ut dignoscatur, an data æquatio deprimi possit ad gradum inferiorem: quod fiet, si illa sit exacte divisibilis in alias æquationes inferioris gradus. Sic ex. gr. æquatio quinti gradus deprimatur ad unam cubicam & alteram secundi gradus, si exacte valeat in illas duas dividi. Sine hac doctrina haud satis distingueretur natura æquationum & problematum, unde ipsæ æquationes oriuntur. Nam problemata inferioris gradus facile confunderentur cum iis, quæ sunt superioris ordinis, & horum instar resolverentur, quod est absurdum. Utimur autem methodo generali & pulcherrima; digna sane, cui tirones satis diligenter incumbant.

PRO-

(a) *Mathemat. Collect. lib. 4. Prop. 31.*

## PROPOSITIO VI.

*An æquatio biquadratica reducibilis sit, explorare.*

**S**it æquatio quarti gradus indeterminata, & generalis omnes alias repræsentans  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ : quæritur an dividi possit exacte in duas alias secundi gradus, & quænam illæ sint?

Concipiatur illa orta ex duabus indeterminatis secundi gradus  $x^2 + fx + g = 0$ , &  $x^2 + hx + i = 0$ , quæ si invicem multiplicentur, oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{aligned} x^4 + fx^3 + gx^2 + ghx + ig = 0 \\ + hx^3 + fhx^2 + ifx \\ + ix^2 \end{aligned}$$

Comparentur termini utriusque æquationis, & fiant æquationes particulares: erit

$$1.^a f + h = p; 2.^a g + fh + i = q; 3.^a gh + if = r; 4.^a ig = s.$$

Sumatur ex prima valor  $h$ , erit  $h = p - f$ , & ex

quarta valor  $i = \frac{s}{g}$ , qui duo valores substituantur in

tertia æquatione loco  $h$  &  $i$ ; fiet  $pg - fg + \frac{fs}{g} = r$ ;

& multiplicando per  $g$ , erit  $pgg - fgg + fs = rg$ , hoc est  $fs - fgg = rg - pgg$ ; unde habetur  $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$ .

$$f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$$

Cujus valor, ut plane innotescat, innotescere debet  $g$ . Est autem ex quarta æquatione  $ig = s$ ; proinde  $g$  est unus ex divisoribus ultimi termini cogniti  $s$ , quo cum signo  $+$  vel  $-$  dividi potest exacte ultimus terminus  $s$ . Tentandi sunt igitur sub utroque signo  $\pm$  singuli divisores, ut docuimus *Propos. 1. Cap. 7.* Sed exemplo res illustrabitur.

I. Sit

I. Sit æquatio data  $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$ ; erit  $p = -4$ ,  $q = -10$ ,  $r = -28$ ,  $s = -8$ . Ut inveniatur quantitas  $g$ , tentandi sunt omnes divisores ultimi termini  $-8$  sub utroque signo, nempe  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm 8$ . Ponatur primo, esse  $g = 1$ ; erit ex superiori formula  $f = \frac{-28 + 4}{9} = \frac{-24}{9} = \frac{-8}{3}$ .

Item  $h = -4 - \frac{8}{3} = -\frac{20}{3}$ , &  $i = -8$ . His autem valoribus positis in duabus indeterminatis  $x^2 + fx + g = 0$ , &  $x^2 + hx + i = 0$ , fiunt  $x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$ , &  $x^2 - \frac{20}{3}x - 8 = 0$ ; per quas si dividatur æquatio data  $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$ , divisio exacte non succedit. Non est igitur  $g = 1$ , ut fuit suppositum.

Neque item divisio succedit, si ponatur  $g = -1$ , vel  $g = +2$ , vel  $g = -2$ ; bene tamen si ponatur  $g = 4$ : tunc enim erit  $f = 2$ ,  $h = -6$ , &  $i = -2$ . Quibus valoribus in duabus illis æquationibus secundi gradus substitutis, habentur  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , &  $x^2 - 6x - 2 = 0$ , per quas æquatio data exacte dividitur, ejusque radices ex resolutione duarum illarum secundi gradus facile obtinentur per *Propos. 2. Cap. 8.* nempe  $x = -1 \pm \sqrt{-3}$ , &  $x = 3 \pm \sqrt{11}$ .

II. Sit æquatio  $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0$ , ea ipsa, quam Newtonus in *Arithm. Univers.* etiam per *Divisores furdos* resolvit. Concipiatur orta ex duabus illis indeterminatis secundi gradus  $x^2 + fx + g = 0$ , &  $x^2 + hx + i = 0$ . Inventum jam fuit supra  $f = \frac{rg - pss}{s - gg}$ ,  $h = p - f$ ,  $i = \frac{s}{g}$ . Comparatis autem

æquationis datæ terminis cum formula generali, habetur  $p = -1$ ,  $q = -5$ ,  $r = 12$ ,  $s = -6$ ; & ultimi termini  $(-6)$  divisores, ex quibus  $g$  (ob  
ig

$g = s$  ) est unus, sunt 1, 2, 3, 6, qui ponantur singulatim in superiori formula loco  $g$  cum signo  $\pm$ . Et cum frustra adhibeantur  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , pono

$$\text{ipsum } g = 3; \text{ unde } f \left( = \frac{rg - pgg}{s - gg} \right) = \frac{36 + 9}{-6 - 9} = -\frac{45}{15} = -3; \text{ item } h \left( = p - f \right) = -1 + 3 = 2, \&$$

$$i \left( = - \frac{g}{h} \right) = -\frac{3}{2} = -1 \frac{1}{2}. \text{ Per hos valores determi-}$$

natis duabus secundi gradus æquationibus, habetur  $x^2 - 3x + 3 = 0$ , &  $x^2 + 2x - 2 = 0$ , quæ æquationem datam exacte dividunt, earumque radices  $x = 1 \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ , &  $x = -1 \pm \sqrt{3}$  quatuor æquationis datæ radices exhibent.

**COROLL.** *Substitutis ipsarum  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , &  $i$  valoribus in duabus illis secundi gradus æquationibus, si æquatio data per neutram possit exacte dividi, signum est, eam esse irreducibilem. Tunc autem ejus solutio quaerenda est per prop. 2. hujus, cum ex natura sua biquadratica sit: quemadmodum cubicas, quæ deprimi nequeunt ad gradum inferiorem, per Cardani regulas solvimus.*

## PROPOSITIO VII.

*An æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.*

**S**It æquatio generalis repræsentans omnes quinti gradus æquationes  $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ : quæritur, an exacte dividi possit in alias duas inferioris gradus, alteram scilicet secundi, alteram tertii gradus, & quænam sint tales æquationes? Supponantur, illæ duæ æquationes esse  $x^2 + fx + g = 0$ , &  $x^3 + hx^2 + ix + l = 0$ , ex quarum facto habetur æquatio priori ex hypothesi æqualis, nempe

$$ax^5 + fx^4 + ix^3 + lx^2 + flx + gl = 0$$

$$+ bx^4 + gx^3 + ghx^2 + gix$$

$$+ fhx^3 + fix^2$$

Comparatis terminis, habentur quinque æquationes:

1.<sup>a</sup>  $f + b = p$ ; 2.<sup>a</sup>  $i + g + fb = q$ ; 3.<sup>a</sup>  $l + gb + fi = r$ ; 4.<sup>a</sup>  $fl + gi = s$ ; & 5.<sup>a</sup>  $gl = t$ .

Ex prima æquatione habetur  $b = p - f$ , & ex se-

cunda  $b = \frac{q - i - g}{f}$ ; erit ergo  $p - f = \frac{q - i - g}{f}$

& multiplicando per  $f$ , oritur  $pf - ff = q - i - g$ .

Ex hac æquatione sumatur valor  $i$ , erit  $i = \frac{ff - pf + q}{s - fl}$ ,

$-g$ , & ex quarta valor alter ipsius  $i$ , nempe  $i = \frac{g}{s - fl}$

& in hac substituto valore  $l$ , qui ex æquatione quin-

ta desumitur (hoc est  $l = \frac{t}{g}$ ); erit  $i = \frac{s}{g} \frac{ft}{gg}$ :

proinde oritur  $ff - pf + q - g = \frac{s}{g} \frac{ft}{gg}$ , & ordi-

nando æquationem respectu ad incognitam  $f$ , habetur æquatio secundi gradus

$$ff - pf + q = 0$$

$$+ \frac{tf}{gg} - \frac{g}{s}$$

Ex qua ut obtineatur valor ipsius  $f$ , determinari prius debet quantitas  $g$ , quæ habetur ut cognita; cum sit unus ex divisoribus ultimi termini æquationis datæ; nam ex quinta æquatione  $gl = t$ . Ponatur ergo  $g = 1$ . Sed claritatis gratia ecce exemplum.

Sit data æquatio  $ax^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$

$\equiv 0$ ; erit  $p \equiv -4$ ,  $q \equiv 6$ ,  $r \equiv -8$ ,  $s \equiv 5$ ,  $t \equiv -1$ .  
 Positis valoribus  $p$ ,  $q$ ,  $s$ ,  $t$  in illa æquatione secundi gradus cum valore  $g$ , fiet illa  $ff + 3f \equiv 0$ , unde  $f \equiv -3$ . Ponantur hi valores  $f \equiv -3$ , &  $g \equiv 1$  in æquatione  $x^2 + fx + g \equiv 0$ ; oritur  $x^2 - 3x + 1 \equiv 0$ , per quam dividi debet æquatio superior data  $x^5 - 4x^4 + 6x^3$  &c. quæ divisio exacte succedit, & habetur in quoto  $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 \equiv 0$ , quæ quidem amplius divisibilis non est. Habentur ergo duæ æquationes quæsitæ, & æquationem datam esse reducibilem, concluditur. Radices æquationis secundi gradus habentur per Prop. 1. & 3. Cap. 8. Cubicæ vero per Prop. 8. vel 9. Cap. 9.

COROLL. I. Manifestum est, æquationem  $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 \equiv 0$ , quæ provenit ex divisione propositæ æquationis, habere pro coefficientibus valores indeterminatarum  $h$ ,  $i$ ,  $l$ , quæ suppositæ fuerunt, nempe  $-1$ ,  $+2$ ,  $-1$ ; proinde æquationem datam per alterutram potuisse dividi. Quod & pro sequenti Propos. intelligitur.

COROLL. II. Substitutis singulis ultimi termini, divisoribus  $+1$ ,  $-1$  in æquatione  $x^2 + fx + g \equiv 0$ , si per hanc æquatio data exacte dividi minime potuisset, signum erat, illam esse irreducibilem, & solidum quinque dimensionum problema proprie constituere, cujus latera per curvas inveniri debent.

## PROPOSITIO VIII.

*An æquatio sexti gradus sit reducibilis, examinare.*

Sit æquatio generalis repræsentans omnes alias sexti gradus æquationes  $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v \equiv 0$ ; quæritur, an divisibilis sit in alias duas inferioris gradus, & quænam illæ sint?

I. Sppponatur, esse altera quarti gradus  $x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i \equiv 0$ ; altera secundi gradus  $x^2 + mx + n$

+  $n = 0$ . Ex quarum facto oritur æquatio prior æqualis, nempe

$$x^6 + fx^5 + gx^4 + bx^3 + ix^2 + imx + in = 0$$

$$+ mx^5 + fm x^4 + gm x^3 + bmx^2 + bmx$$

$$+ nx^4 + fnx^3 + gn x^2$$

Unde facta terminorum utriusque æquationis comparatione, habentur sex æquationes. 1.<sup>a</sup>  $f + m = p$ ; 2.<sup>a</sup>  $g + fm + n = q$ ; 3.<sup>a</sup>  $b + gm + fn = r$ ; 4.<sup>a</sup>  $i + bm + gn = s$ ; 5.<sup>a</sup>  $im + hn = t$ ; 6.<sup>a</sup>  $in = v$ .

Sumatur ex prima valor  $f$ , nempe  $f = p - m$ , quo in secunda æquatione posito, oritur  $g + pm - mm + n = q$ ; unde eruitur valor  $g = q - pm + mm - n$ . Cum autem habeatur in sexta  $in = v$ ; erit  $i = \frac{v}{n}$ , quo valore posito in quinta æquatione, ha-

betur  $\frac{mv}{n} + hn = t$ , ex qua eruitur valor  $h$ , nempe

$$h = \frac{t}{n} - \frac{mv}{nn}$$

Jam valor ipfarum  $g, h, i$  ponatur in quarta æquatione; oritur  $\frac{v}{n} + \frac{tm}{n} - \frac{m^2}{nn} \frac{v}{n} + qn$

$$- pmn + m^2 n - nn = s$$

Duæ fractiones  $\frac{v}{n} + \frac{tm}{n}$  reducantur ad idem nomen cum alia  $-\frac{m^2}{nn} \frac{v}{n}$ ; fiet

$$\text{æquatio } \frac{vn + tmn - m^2 v}{nn} + qn - pmn + m^2 n - nn = s$$

& multiplicando omnes terminos per  $nn$ , ut fractio evanescat, fit  $vn + tmn - m^2 v + qn^3 - pmn^3 + m^2 n^3 - n^4 = snn$ , hoc est

$$m^2 n^3 - m^2 v = pmn^3 - tmn - vn - qn^3 + n^4 + sn^2$$

Dividendo autem utrumque æquationis membrum per  $n^3 - v$ , & ordinando æquationem secundi gradus in ordine ad incognitam  $m$ , habetur

S

$m^2$

## DE ÆQUAT. BIQUADRAT.

$$\begin{aligned}
 m^2 - pn^3 m + vn &= 0 \\
 + tmn + qn^3 \\
 &= n^4 \\
 &= sn^2
 \end{aligned}$$


---

$$n^3 = v$$

Est autem quantitas  $n$  unus ex divisoribus ultimi termini æquationis; nam ex sexta æquatione habetur  $in = v$ . Itaque divisores singuli, quibus æquari potest  $n$ , cum signis  $+$  &  $-$  substituendi sunt successive in superiori æquatione una cum valoribus  $p, q, t, s, v$  ad obtinendum valorem ipsius  $m$ . Sed claritatis gratia

Sit æquatio data  $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$ ; erit  $p = -13, q = 45, r = -71, s = 57, t = -16, v = 2$ . Ponatur  $n = 2$ . Æquatio superior secundi gradus fit  $m^2 + 12m + 20 = 0$ ; unde per Prop. 1. Cap. 8. habetur valor ipsius  $m = -2$  substituendus in æquatione assumpta  $x^2 + mx + n = 0$  una cum valore  $n$ , quæ proinde fit  $x^2 - 2x + 2 = 0$ . Per hanc tentari debet divisio æquationis datae  $x^6 - 13x^5 + 45x^4$  &c. quæ quidem exacte dividitur, & in quoquo habetur æquatio altera quarti gradus  $x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 7x + 1 = 0$ , quæ amplius divisibilis non est. Æquatio autem  $x^2 - 2x + 2 = 0$  exhibet duas radices  $x = 1 \pm \sqrt{-1}$  per Prop. 1. Cap. 8. Reliquæ habentur per Propos. 2. hujus, aut per curvas, si biquadratica solutionem non admittat.

II. Quod si, his peractis, æquatio data sexti gradus dividi non potuisset per æquationem secundi gradus, ut supra, inventam; tunc videndum, an illa ex duabus tertii gradus fuerit composita: ideoque in duas tertii gradus sit divisibilis. Sit igitur una ex his  $x^3 + fx^2 + gx + h = 0$ , altera  $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$ , ex quarum facto oritur

$$\begin{aligned}
 x^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + bmx^2 + bnx + bl = 0 \\
 + mx^5 + fmx^4 + gmx^3 + gn x^2 + glx \\
 + nx^4 + fnx^3 + flx^2 \\
 + lx^3
 \end{aligned}$$

Quæ ex hypothefi est æqualis æquationi generali repræfentanti omnes feñti gradus æquationes, fcilicet

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0$$

Facta igitur terminorum comparatione, habentur feñ æquationes: 1.<sup>a</sup>  $f + m = p$ ; 2.<sup>a</sup>  $g + fm + n = q$ ; 3.<sup>a</sup>  $b + gm + fn + l = r$ ; 4.<sup>a</sup>  $bm + gn + fl = s$ ; 5.<sup>a</sup>  $bn + gl = t$ ; 6.<sup>a</sup>  $bl = v$ .

Cum ex prima deducatur  $f = p - m$ ; multiplicando per  $m$ , erit  $fm = pm - m^2$ . Ponatur in feñda æquatione loco  $fm$  ejus valor; fiet  $g + pm - m^2 + n = q$ , hoc eft  $g = q - pm + m^2 - n$ , feñ  $m^2 - pm - n + q = g$ : quæ quidem æquatio fi ducatur in  $l$ , erit  $m^2 l - pml - nl + ql = gl$ ; fed ex quinta  $gl = t - bn$ : erit ergo  $m^2 l - pml - nl + ql = t - bn$ . Utraque ducatur in  $l$ ; oritur  $m^2 ll - pml l - nll + qll = tl - bnl$ . Cum autem ex feñta fit  $bl = v$ , fubftituito hoc valore, habetur  $m^2 ll - pml l - nll + qll = tl - vn$ , feñ  $m^2 ll - pml l + qll - tl = nll - vn$ ; unde eruitur valor  $n = \frac{m^2 ll - pml l + qll - tl}{ll - v}$ .

Inveniri debet jam alter ipfius  $n$  valor hac ratione. Ducatur æquatio tertia  $b + gm + fn + l = r$  in  $l$ ; oritur  $bl + gml + fnl + ll = rl$ : cumque ex feñta habeatur  $bl = v$ ; fubftituito hoc valore, erit  $v + gml + fnl + ll = rl$ , feñ  $gml = rl - v - fnl - ll$ . Habetur autem ex feñda æquatione  $g = q - fm - n$ , quæ fi multiplicetur per  $ml$ , oritur  $gml = qml - fm^2 l - mnl$ ; hinc  $rl - v - fnl - ll = qml - fm^2 l - mnl$ . Ponatur loco  $f$  ejus valor ex prima æqua-

tione desumptus ; erit  $rl - v - pnl + mnl - ll = qml - pm^2l + m^3l - mnl$ , seu  $2mnl - pnl = m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v$ ; atque hinc tandem obtinebitur  $n = \frac{m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$ .

Ex duobus ejusdem  $n$  valoribus inventis deducitur  $\frac{m^2 ll - pmll + qll - tl}{ll - v} = \frac{m^3l - pm^2l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$

Factaque invicem multiplicatione, & ordinata æquatione tertii gradus, ad quem ascendit indeterminata  $m$ , erit

$$\begin{aligned} m^3 - 2pl^3m^2 - 2tl^2m - pql^3 &= 0 \\ - vplm^2 + p^2l^3m + pl^2 & \\ + ql^3m - l^4 & \\ + vqlm + rl^3 & \\ - vrl & \\ + vv & \\ \hline l^3 + vl & \end{aligned}$$

Quæritur modo valor ipsius  $m$ ; sed prius determinari debet  $l$ , qui est unus ex divisoribus ultimi termini datæ æquationis. Nam  $bl = v$  ex sexta æquatione. Utque id omne clarius intelligatur,

Sit æquatio  $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$ . Erit  $p = -8$ ,  $q = 13$ ,  $r = -23$ ,  $s = 10$ ,  $t = -7$ ,  $v = -12$ , cujus divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 12 per Prop. 9. Cap. 1. Ponatur igitur  $l = 1$ , & singulis valoribus  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $l$  in superiori æquatione substitutis, invenitur æquatio ipsa  $m^3$

$+ \frac{80m^2 + 65m - 4}{11} = 0$ . Hæc, ut a fractione liberetur, per Propos. 10. Cap. 6. fiat  $m = \frac{y}{11}$ : oritur  $y^3 +$

$80y^2 + 715y - 484 = 0$ , quæ quidem si dividatur per binomium  $y + 11$ , hoc est per unum ex divisoribus ultimi termini inventum per Prop. 1. vel 2. Cap. 7.

divisio fit sine residuo ; proinde innotescit  $y = - 11$

per Schol. 1. Prop. 1. Cap. 6. atque hinc  $m = \frac{y}{11} =$

$\frac{- 11}{11} = - 1$ . Hoc valore ipsius  $m$  una cum valoribus  
 $m^2 l - pm l + ql - tl,$   
 $p, q, t, l$  positis in æquatione  $n = \frac{m^2 l - pm l + ql - tl}{l - v}$

fit  $n = \frac{- 1}{1} = 1$ . Determinatis ergo jam valoribus  $m,$   
 $n, l,$  determinata quoque existit æquatio assumpta  
 $x^3 + mx^2 + nx + l = 0,$  quæ fit  $x^3 - 1x^2 + 1x + 1$   
 $= 0,$  per quam fieri debet divisio æquationis datæ  
 $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0,$  quæ  
 quidem exacte succedit, & habetur in quoto  $x^3 -$   
 $7x^2 + 5x - 12 = 0,$  quæ amplius non est divisibilis.  
 Patet ergo, æquationem datam reducibilem esse in  
 duas tertii gradus  $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0,$  &  $x^3 -$   
 $1x^2 + 1x + 1 = 0.$  Quarum radices per Cardani re-  
 gulas ex Propos. 8 Cap. 9. obtineri facile possunt.

COROLL. Si æquationis divisio haud successisset, sub-  
 stituendi erant successive loco  $l$  singuli divisores ipsius  
 $v = - 12.$  At si divisoribus his frustra tentatis, di-  
 visio fieri non possit, æquatio erit revera sexti gradus &  
 irreducibilis.

SCHOL. Plerique de his reductionibus agunt, cum æ-  
 quationum compositarum radices rationales inquirunt, ad  
 quas proprie pertinent. At differre huc nobis placuit,  
 quod tirones sine prævia resolutione æquationum eas  
 haud satis percipere valeant, ut ex reductionibus æ-  
 quationum quinti & sexti gradus supra allatis evidens  
 est.

*De limitibus radicum, earumque approximatione.*

PROPOSITIO I.

*Radicum limites invenire.*

**I**Nveniri debent per Analyſium duæ quantitates, inter quas radix æquationis continetur, quæ limites dicuntur, hoc pacto:

I. Sit æquatio  $x^2 + px - q = 0$ ; erit  $x^2 + px = q$ , & ſublato ex uno membro  $x^2$ , remanet  $px < q$ ; atque hinc  $x < q : p$ . Duo puncta ( $:$ ) ſunt nota diſiſionis.

Similiter quia  $x^2 + px = q$ , ſublato ex una parte  $px$ ; erit  $q > x^2$ , &  $\sqrt{q} > x$ . Multiplicando autem per  $x$ , erit  $x\sqrt{q} > x^2$ , & addendo utrinque  $px$ , habetur  $x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ ; ſed  $x^2 + px = q$ : proinde erit quoque  $x\sqrt{q} + px > q$ ; atque hinc

habetur  $x > \frac{q}{p + \sqrt{q}}$ . Sunt ergo limites quæſiti  $q : p$ , &  $q : (p + \sqrt{q})$  unde propoſitæ æquationis radix minor eſt  $q : p$  & major  $q : p + \sqrt{q}$ .

Sit exemplum  $x^2 + 4x - 12 = 0$ ; erit  $p = 4$ ,  $q = 12$ : unde  $q : p = 12 : 4 = 3$ ; &  $q : (p + \sqrt{q}) = 12 : 4 + 3 = 12 : 7 = 1 \frac{5}{7}$ . Sunt ergo limites quæſiti  $3$ , &  $1 \frac{5}{7}$ : proinde radix nequit eſſe major, quam  $3$ , nec minor, quam  $1 \frac{5}{7}$ . Equidem ſi tentetur diſiſio per  $x + 2$ , minime ſuccedit; bene tamen ſuccedit exacte per  $x - 2$ , & habetur in quoto altera æquationis radix  $x + 6$ . Unde vel hoc uno exemplo patet,

ter, beneficio limitum nos multo labore liberari, cum ex omnibus ultimi termini divisoribus duo tantum tentandi fuerint  $x + 2$ , &  $x - 2$ . Vide Coroll. 2. hujus.

II. Sit  $x^2 - px + q = 0$ ; erit  $x^2 + q = px$ : proinde  $x^2 < px$ , & dividendo per  $x$ ,  $x < p$ . Similiter quia  $x^2 + q = px$ ; erit  $q < px$ , &  $q : p < x$ . Sunt ergo limites quæsti  $p$ ; &  $q : p$ , ita ut radix minor sit quantitate cognita  $p$ , sed major, quam  $q : p$ .

Sit exemplum  $x^2 - 3x + 3 = 0$ ; erit  $p = 3$ , &  $q = 3$ , cujus limites sunt  $p = 3$ , &  $q : p = 3 : 3 = 1$ . Radix ergo non erit major, quam 3, nec minor unitate, nempe  $x = 1 \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ . Vide Coroll. 3. hujus.

III. Sit  $x^2 - px - q = 0$ ; erit  $x^2 = px + q$ : proinde  $x^2 > q$ ; ideoque  $x > \sqrt{q}$ , & multiplicando utrinque per  $\sqrt{q}$ , habetur  $x \sqrt{q} > q$ . Jam si in æquatione  $x^2 = px + q$  loco ipsius  $q$  ponatur  $x \sqrt{q}$ ; erit  $x^2 < px + x \sqrt{q}$ , & dividendo per  $x$ , erit  $x < p + \sqrt{q}$ .

Pariter quia  $x^2 = px + q$ ; erit  $x^2 > px$ : & dividendo per  $x$ ; erit  $x > p$ : & multiplicando utrinque per  $p$ ; erit  $px > pp$ . Sed  $x^2 = px + q$ ; ergo  $x^2 > pp + q$ : & extrahendo utrinque radicem secundam, habetur  $x > \sqrt{pp + q}$ . Sunt ergo limites quæsti  $p + \sqrt{q}$ ,  $\sqrt{p^2 + q}$ , hoc est radix debet esse minor, quam  $p + \sqrt{q}$ ; sed major, quam  $\sqrt{pp + q}$ .

IV. Sit æquatio cubica secundo termino carens  $x^3 - qx + r = 0$ ; erit  $x^3 = qx - r$ : unde  $x^3 < qx$ , & dividendo per  $x$ ,  $x^2 < q$ ; ideoque  $x < \sqrt{q}$ . Similiter

liter cum sit ex hypothefi  $x^3 - qx + r = 0$ ; erit  $x^3 + r = qx$ : atque hinc  $qx > r$ , &  $x > r : q$ . Sunt ergo limites quæfiti  $\sqrt[3]{q}$ , &  $r : q$ ; ita ut radix æquationis nequeat esse major  $\sqrt[3]{q}$ , nec minor  $r : q$ .

Sit exemplum  $x^3 - 19x + 30 = 0$ ; erit  $q = 19$ ,  $r = 30$ ; unde  $\sqrt[3]{q} = 4$ , &  $r : q = \frac{30}{19} = 1 \frac{1}{2}$  circiter. Tentanda est ergo divisio per  $x + 2$ , vel  $x - 2$ , vel  $x + 3$ , aut  $x - 3$ : & quidem exacte succedit per  $x - 2$ , & habetur in quoto æquatio secundi gradus  $x^2 + 2x - 15 = 0$ , cujus una radix est  $+ 3$ , altera  $- 5$  per *Propof. 1. vel 3. Cap. 8.*

V. Sit æquatio cubica  $x^3 - px - q = 0$ ; erit  $x^3 - px = q$ : & dividendo per  $x$  primam partem, fit  $x^2 - p < q$ ; adeoque  $x^2 < p + q$ , &  $x < \sqrt{p + q}$ . Similiter cum sit  $x^3 - px = q$ ; auferendo ex prima parte  $px$ , erit  $x^3 > q$ : adeoque  $x > \sqrt[3]{q}$ .

Sit exemplum  $x^3 - 12x - 12 = 0$ ; erit  $p = 12$ , &  $q = 12$ : adeoque  $x < \sqrt{24} = 4$ , item  $x > \sqrt[3]{12} = 2$ . Est ergo  $x$  minor, quam 4; sed major, quam 2: proinde radix inter 4 & 3 latet, ut inferius patebit.

VI. Demum sit æquatio cubica  $x^3 + qx - r = 0$ ; erit  $x^3 + qx = r$ : & subtrahendo ex una tantum parte  $x^3$ , erit  $qx < r$ ; dividendo autem per  $q$ , habetur  $x < r : q$  pro primo limite.

Similiter quia  $x^3 + qx = r$ , sublato ex una tantum parte  $qx$ , erit  $x^3 < r$ , &  $x < \sqrt[3]{r}$ ; & elevando ad secundam potentiam utrumque membrum, erit  $xx < \sqrt[3]{r}$ ; & multiplicando per  $x$ , erit  $x^3 < x$

$$\sqrt[3]{r}$$

$\sqrt[5]{rx}$ . Hoc autem valore in æquatione data substituto, habetur  $qx + x\sqrt[3]{r^2} > r$ ; proinde  $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$  dat alterum limitem quæsitum. Radix

igitur minor est  $r : q$ , sed major  $\frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$

VII. Sit æquatio quarti gradus  $x^4 - px^2 - qx - r = 0$ ; erit  $x^4 - px^2 = qx + r$ : proinde  $x^4 > px^2$ ; alias in hac ipsa æquatione  $qx + r$  non esset quantitas positiva. Est ergo  $x^2 > p$ , &  $x > \sqrt{p}$ .

Similiter quia  $x^4 - px^2 - qx = r$ , si dividatur primum membrum per  $x$ ; erit  $x^3 - px - q < r$ , pariterque  $x^3 - px < r + q$ . Dividatur primum membrum per  $x$ ; erit multo magis  $x^2 - p < r + q$ , item  $x^2 < r + q + p$ : & extracta radice, habetur  $x < \sqrt{r + q + p}$ . Sunt ergo limites  $\sqrt{p}$ , &  $\sqrt{r + q + p}$ .

Sit exemplum  $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$ ; erit  $p = 8$ ,  $q = 4$ ,  $r = 3$ : hinc  $\sqrt{p} = 2$ , &  $\sqrt{r + q + p} = 1 + 2 + 2 = 5$ . Est ergo radix inter limites 2 & 5.

COROLL. I. Eadem ratione inveniri possunt limites pro iisdem æquationibus, etiamsi nullo termino careant; tum etiam pro æquationibus altiorum graduum, quemadmodum egregie fecit Florimundus de Beaune (a);

---

(a) Introduct. ad Geometricam Cartesii Amstelodami an. 1683. pag. 121.

cui tam præclarum inventum, teste Erasmo Bartolino, debemus acceptum.

COROLL. II. In limitibus dignoscendis numeri integri sufficiunt; ideoque fractiones tuto negligi possunt, præsertim in extractione radicum. Item ex radicalibus, quæ in formulis limitum apparent, satis est radicem extrahere proxime minorem, neglectis fractionibus, ut limes sit quantitas a fractionibus immunis & rationalis.

COROLL. III. Quanquam in æquatione generali quantitates  $p, q, r$  &c. denotent quantitates negativas; in speciali tamen æquatione quantitates omnes tanquam positive accipiuntur, ut exempla superiora satis docent.

## PROPOSITIO II.

*Radicum limites pro quacunque æquatione methodo Newtoniana indagare.*

I. **M**ultiplicentur singuli datæ æquationis termini per numerum dimensionum, quas in illis habet incognita, hoc est per progressionem arithmeticam naturalem descendentem, ita ut ultimus terminus sit zero, & factum dividatur per radicem æquationis. Deinde æquatio, quæ oritur uno gradu inferior, multiplicetur per aliam similem progressionem arithmeticam, & hoc factum similiter dividatur per radicem æquationis: quod quidem toties fiet, donec occurrat æquatio simplex linearis.

Sit æquatio  $A \ x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Progr.            3.        2.        1.        0.

---

Div. per  $x$              $3x^3 - 2x^2 - 14x = 0$

$B \ 3x^2$

$$B \quad 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

Progr.      2.      1.      0.

---

$$6x^2 - 2x = 0$$

Div. per  $x$        $6x - 2 = 0$

$$C \quad 3x = 1$$

Æquationes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dicuntur æquationes limitum. Jam vero ad indagandum limitem, intra quem continentur radices positivæ datæ æquationis, hæc est regula. In æquationibus  $A$ ,  $B$ , &  $C$  loco incognitæ  $x$  ponitur quilibet numerus 1, vel 2, vel 3 &c. incipiendo ab unitate: nam numerus, qui in singulis æquationibus summam positivam efficit, dat limitem quæsitum. Sic in superiori exemplo ponendo 1 loco  $x$  in æquatione  $C$ ,  $3x - 1 = 2$ , prodit summa positiva; sed in æquatione  $B$ ,  $3x^2 - 2x - 14 = -13$ , prodit negativa. Idem sequitur ponendo 2, & 3 loco  $x$ . Quare infertur, limitem his numeris fore majorem. Pono igitur 4, & prodeunt numeri omnes positivi scilicet

$$3x - 1 = 11$$

$$3x^2 - 2x - 14 = 26$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 16$$

Omnes hi numeri positivi indicant, numerum 4 esse limitem, quem nulla potest radicum positivaram transcendere. Et quidem dividendo superiorem æquationem per  $x - 3$ , divisio exacte & sine residuo succedet; adeoque habetur 3 una ex radicibus positivis ejusdem æquationis.

II. Pro inveniendò limite, quem maxima radicum negativarum non transcendit, examinandum est si-  
mili

mili ratione, quinam numerus negativus positus loco  $x$  in iisdem tribus æquationibus  $A$ ,  $B$ , &  $C$  efficiat summam positivam in æquationibus illis, quæ habent dimensiones numero pares; summam vero negativam in æquationibus dimensionum numero imparium. In superiori exemplo frustra tentantur  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,  $-4$ : sed posito  $-5$  loco  $x$ , prodit summa negativa in æquationibus numero imparium dimensionum, positiva vero in æquationibus dimensionum numero parium; proinde  $-5$  est limes, quem radix negativa non transcendit, videlicet

$$3x - 1 = -16$$

$$3x^2 - 2x - 14 = +71$$

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = -56$$

Itaque si superior æquatio data  $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$  dividatur per  $x + 4$ , divisio exacte succedit; unde habetur radix negativa  $-4$ .

III. Pro obtinendo radicum negativarum limite adhiberi possunt etiam numeri affirmativi, modo mutantur signa terminorum parium in æquationibus limitum, quod in sequenti exemplo factum videbis: tunc enim radices falsæ sunt veræ per *Prop. 3. Cap. 6.* ideoque assumi possunt numeri affirmativi.

Sit æquatio  $x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$ : facta eadem operatione, ut supra, habentur æquationes limitum, scilicet

$$5x - 1 = 0$$

$$10x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1 = 0$$

$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$$

In

In quibus si loco  $x$  substituantur 1, vel 2, vel 3, non ubique prodit summa positiva; substituendo autem 4, summa oritur in singulis positiva; proinde 4 est quantitas, quam radicum positivarum maxima non transgreditur.

Ad inveniendum limitem, quem radicum negativarum maxima non excedit, mutatis terminorum pariam signis, adhibentur eodem modo numeri affirmativi. Itaque ponendo in singulis æquationibus loco  $x$  numerum 2, prodit ubique summa affirmativa. In æquatione tamen  $5x^5 + 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x + 4 = 0$ , prodit zero, quod indicat, numerum 2 non modo esse limitem quæsitum, sed etiam unam ex radicibus ejusdem æquationis; quæ proinde facit, ut omnia producta se mutuo destruant *per num. 5. Prop. 1. Cap. 6.* En limitum æquationes cum signis mutatis.

$$\begin{aligned} 5x + 1 &= 11 \\ 10x^2 + 4x - 7 &= 41 \\ 10x^3 + 6x^2 - 21x - 1 &= 61 \\ 5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4 &= 28 \\ x^5 + 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Habentur ergo limites 4, &  $-2$ , inter quos radices omnes æquationis datæ continentur.

*Ratio* methodi hujus est, quia in æquatione radicem positivam habente omnis numerus positivus loco incognitæ  $x$  substitutus vel est æqualis ipsi radici, & sic æquatio illa tota evanescit *per num. 5. Prop. 1. Cap. 6.*, vel est major, & tunc efficit, omnia illa producta positiva esse; vel est ipsa radice minor, & in hoc casu aliquod ex illis productis negativum apparet. Sit brevitatis gratia æquatio secundi gradus  $A x^2 + 3x - 10 = 0$ , cujus radices sunt 2, &  $-5$ ; ex superiori canone limitum æquatio

tio erit  $B \ 2x + 3 = 0$ . Pono in utraque æquatione  $A$  &  $B$  loco  $x$  numerum positivum 3 radice ipsa positiva 2 majorem; erit  $A$ ,  $9 + 9 - 10 = 8$ , &  $B$ ,  $6 + 3 = 9$ : ideoque 3 est limes æquationis quæsitus. Quod si ponatur 1 eadem radice positiva 2 minor, erit  $A$ ,  $1 + 3 - 10 = -6$ , &  $B$ ,  $2 + 3 = 5$ : quod regulæ repugnat, ut patet, cum productum unum sit negativum. Proinde 1 nequit esse datæ æquationis limes.

Similiter in eadem æquatione radix negativa est  $-5$ . Pono in utraque æquatione  $A$  &  $B$  loco  $x$  numerum negativum  $-6$  radice ipsa negativa majorem; quo quidem substituto, erit  $A$ ,  $36 - 18 - 10 = 8$ ; at  $B$ ,  $-12 + 3 = -9$ , quod cum regula optime convenit. At si ponatur  $-4$ , numerus scilicet radice ipsa negativa minor; tunc facta substitutione in iisdem æquationibus  $A$  &  $B$ , prodit  $A$ ,  $16 - 12 - 10 = -6$ , at  $B$ ,  $-8 + 3 = -5$  quod regulæ adversatur; cum æquatio  $A$ , quæ paris dimensionis est, producta positiva debeat efficere. Igitur ex hujusmodi productis affirmativis & negativis limites æquationum recte inferuntur.

**COROLL.** *Inventis limitibus, non solum minimo labore inveniuntur radices rationales, si quæ sunt, quas alioquin per ultimi termini divisores inquirere valde laboriosum est; sed etiam in cognitionem devenimus, an æquatio proposita radices surdas habeat. Nam si illa per nullum numerum intra limites constitutum exacte dividi possit, signum est, ipsam non alias, nisi surdas radices habere. Sic æquationis  $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ , quam Cl. Auctor affert in Arith. Univers. radices consistunt inter limites 2, &  $-3$ ; unde tentandi sunt solummodo divisores 1,  $-1$  &  $-2$ , qui inter eos limites continentur, ut dignoscatur, an talis æqua-*

*æquatio per eos dividi exacte possit, adeoque radices racionales habeat. At quantus labor, si ad hanc rem sub utroque signo  $\pm$  omnes ultimi termini 120 divisores tentandi sint!*

PROPOSITIO III.

*Æquationum radices prope veras per approximationem extrahere.*

I. **S**it æquatio data  $x^3 - 12x - 12 = 0$ . Inveniantur limites per Prop. 1. vel 2. hujus, qui sunt 4 & 3; proinde radix, cum sit media inter 4 & 3, est incommensurabilis, quæ tamen inveniri poterit prope vera hac methodo.

Sumatur semidifferentia inter duos limites 4 & 3, nempe  $\frac{1}{2}$ , quæ addatur limiti minori, ita ut fiat  $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ ; & dividatur æquatio data per  $x - \frac{7}{2}$ , residuum est cum signo  $-$ , hoc est  $-11\frac{1}{2}$ . Proinde sumatur iterum semidifferentia inter limitem majorem 4, &  $\frac{7}{2}$ , quæ est  $\frac{1}{4}$ , & addatur ad  $\frac{7}{2}$ ; fiet  $= \frac{15}{4}$ . Dividatur æquatio data per  $x - \frac{15}{4}$ , residuum adhuc est negativum, nempe  $-4\frac{17}{64}$ .

Itaque rursus sumatur semidifferentia inter limitem majorem 4, &  $\frac{15}{4}$ , nempe  $\frac{1}{8}$ , quæ addatur ad  $\frac{15}{4}$ ; fit  $= \frac{31}{8}$ . Dividatur per  $x - \frac{31}{8}$  æquatio data, residuum adhuc est negativum, nempe  $-\frac{161}{512}$ . Igitur semidifferentia inter majorem limitem 4, &  $\frac{31}{8}$ , quæ

quæ est  $\frac{1}{16}$  addenda est ad  $\frac{31}{8}$ , ut fiat  $= \frac{63}{16}$ ; factaque divisione æquationis datæ per  $x - \frac{63}{16}$ , habetur residuum positivum  $+ 1 \frac{3263}{4096}$ : proinde  $\frac{63}{16}$  est limes, qui radicem jam transcendit, adeoque propinquiores quæsitæ radicis limites sunt  $\frac{63}{16}$ , &  $\frac{31}{8}$ , hoc est  $\frac{63}{16}$  &  $\frac{62}{15}$ ; & radix ipsa media est inter  $3 \frac{5}{16}$  &  $3 \frac{14}{10}$ ; ideoque differentia non est, nisi  $\frac{1}{16}$ .

II. Si radix adhuc propinquior desideretur, continuari potest eodem modo approximatio. Nam in superiori exemplo cum ex additione semidifferentiæ  $\frac{1}{16}$  facta ad  $\frac{31}{8}$  innotescat provenire residuum positivum  $+ 1 \frac{3263}{4096}$ ; addi potest ad  $\frac{31}{8}$  dimidium tantum ejusdem semidifferentiæ  $\frac{1}{16}$ , nempe  $\frac{1}{32}$ , ut fiat  $= \frac{125}{32}$ : factaque divisione æquationis datæ per  $x - \frac{125}{32}$ , provenit residuum pariter positivum  $+ \frac{23000}{32768}$ . Habentur igitur duo limites quæsitæ radicis adhuc propinquiores, nempe  $\frac{21}{8}$ , &  $\frac{125}{32}$ , hoc est  $\frac{124}{32}$ , &  $\frac{125}{32}$ : proinde radix est inter  $3 \frac{28}{32}$ , &  $3 \frac{29}{32}$ , ita ut differentia tantum sit  $\frac{1}{32}$ . Hac ratione continuari potest approximatio, quantum quis voluerit.

Co-

COROLL. Radix ergo data æquationis prope vera in

notis decimalibus erit inter  $3.87500$  &  $3.90625$ ,  
& differentia  $\frac{1}{100000}$ , quod quidem obtinetur addendo  
ad numeratores fractionum quinque zéros, & dividendo  
per 32.

SCHOL. Pro æquationibus quadraticis radices appro-  
ximatio habetur ex communi Arithmetica addendo ad re-  
siduum tot cyphrarum paria, quot libuerit; hinc  $\sqrt{13}$

$= 3.6055$ , quater additis 00. Orontius Finæus id  
primus docuit.

### PROPOSITIO IV.

*Aliæ approximandi rationes expediuntur.*

Sit eadem æquatio  $x^3 - 12x - 12 = 0$ , cujus  
una radix sit minor 4, sed major 3, ut in præ-  
cedenti propositione dictum est. Ponatur esse  $x = 3$   
+  $y$ , & hoc valore in æquatione posito, oritur

$$\begin{array}{r} x^3 = 27 + 27y + 9y^2 + y^3 \\ - 12x = - 36 - 12y \\ - 12 = - 12 \end{array}$$

---


$$- 21 + 15y + 9y^2 + y^3$$

Quia vero  $y$  hoc loco denotat fractionem; quæ ad-  
ditur ad 3, ut fiat ad veram radicem approxima-  
tio, & fractionum potentia continuo decrescunt;  
hinc tuto negliguntur  $+ 9y^2 + y^3$ , quod etiam in  
sequentibus observabitur. Est igitur  $15y = 21$ , hoc

est  $y = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1. \frac{1}{4}$  (reducendo  $\frac{7}{5}$  ad fra-  
ctiones decimales facilius calculi gratia) est ergo

$y = 1. \frac{1}{4}$ . Ponatur jam  $x = 3 + 1. \frac{1}{4} + y$ , hoc  
est

est  $x = 4 \cdot 4^{\text{I}} + y$ , & hoc valore in æquatione substituto, erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 85 \cdot 184 + 58 \cdot 08y \dots \\ - 12x &= - 52 \cdot 800 - 12 \cdot 60y \\ - 12 &= - 12. \end{aligned}$$

$$+ 20 \cdot 384 + 46 \cdot 08y \dots$$

Hinc habetur  $46 \cdot 08 y = - 20 \cdot 384$ , hoc est

$$y = - \frac{20 \cdot 384}{46 \cdot 08} = - 4. \text{ Sed si hujus residuo divisionis addantur duæ, aut tres cyphræ ob majorem approximationem ; erit quotus } - 4023 \text{ subtrahendus}$$

( ob signum - ) ex  $x = 4 \cdot 4$ ; hoc est ex  $4 \cdot 4000$ , eritque residuum  $3 \cdot 9577$  radix æquationis magis magisque approximans.

Quod si rursus ponatur  $x = 3 \cdot 9577 + y$ , & pari ratione operatio eadem continuetur ; multo major fiet ad veram radicem approximatio : sed hoc ad methodi intelligentiam satis.

COROLL. I. *Hinc facile eruuntur approximandi formulæ, quæ ad hanc rem afferrî solent. Sit enim, ut supra, æquatio*  $- 21 + 15y = 0$ . *Si fiat*  $p = - 21$ , &  $q = 15$ ; *erit*  $qy = - p$ : *proinde*  $y = - \frac{p}{q}$ ; *hoc est*  $y = \frac{21}{15} = 1 \cdot 4$  *omnino, ut superius.*

COROLL. II. *Vel cum Hallejo (a) sit eadem æquatio*

(a) In Transact. Anglican. n. 210.

tio  $- 21 + 15y + 9y^2 = 0$ , & fiat  $p = -21$ ,  
 $q = 15$ , &  $r = 9$ ; erit  $ry^2 + qy = -p$ : &  
 dividendo per  $q + ry$ ; habetur  $y = -p : (q + ry)$ .  
 Sed ex Coroll. 1. est  $y = -p : q$ , ergo  $y = -p :$   
 $(q - pr : q)$  proinde  $y = 21 : (15 + \frac{189}{15}) = 21 :$   
 $(15 + \frac{63}{5}) = 21 : (\frac{138}{5})$ , hoc est  $y = \frac{105}{138}$ : & di-

videndo per 3, erit  $y = \frac{35}{46}$ ; quæ fractio si ad decima-  
 les reducatur per Prop. 4. Append. erit  $y = 76086$ .  
 Hic valor si addatur ad 3 <sup>v</sup> limitem æquationis, ita ut  
 fiat  $x = 3 + 76086$ , & continuetur eodem modo  
 operatio, invenitur ex eadem Halleji formula radix  
 prope vera, vel quæ a vera minimum dissentiet.

SCHOL. Approximandi regulæ hæcenus explicatæ sunt  
 tantum pro æquationibus numericis.

PROPOSITIO V.

*Radices prope veras in æquationibus literalibus  
 indagare.*

SI data æquatio secundi gradus  $x^2 - 2nx - r^2 = 0$ ,  
 cujus radix per Prop. 1. vel 3. Cap. 8. erit

$$x = n + \sqrt{r^2 + n^2}, \text{ seu } x = n + \sqrt{r^2 + n^2}$$

per Defin. 5. Cap. 3. Quæritur valor approximatus

potentiæ imperfectæ  $r^2 + n^2$ , quod quidem dupli-  
 ci methodo obtineri potest.

I. Ex  $r^2 + n^2$  extrahatur radix secunda, habebi-  
 tur per Prop. 11. Cap. 3. valor quæsitus per seriem



totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum  $a, b, c, d$  &c.

Erit 1.<sup>a</sup>  $a^2 = r$ , atque hinc  $a = r$ .

2.<sup>a</sup>  $2ab = 1$ , & posito  $r$  loco  $a$ ; erit  $2rb = 1$ , seu

$$b = \frac{1}{2r}.$$

3.<sup>a</sup>  $2ac = -bb$ , & substitutis valoribus  $b$  &  $a$ , erit

$$2rc = -\frac{1}{4rr} = c = -\frac{1}{8r^3}.$$

4.<sup>a</sup>  $2ad = -2bc$ , hoc est  $ad = -bc$ : & positis

$$\text{valoribus } a, b, c, \text{ habetur } d = \frac{1}{16r^5} \text{ \&c.}$$

Subrogentur hi valores in serie assumpta  $an^0 + bn$

$$+ cn^4 + dn^6 \text{ \&c. erit } r + \frac{1}{2r} n^2 - \frac{1}{8r^3} n^4 +$$

$$\frac{1}{16r^5} n^6 \text{ \&c.}$$

Quod si ponatur  $n = 1$ ; erit valor quæsitus ipsius  $r^2 + n^2$

$$= r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5} \text{ \&c. ut supra.}$$

Esto ergo radix propositæ æquationis  $x = 1 + r + \frac{1}{2r}$

$$- \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5} \text{ \&c.}$$

SCHOL. Poterat series efformari ex altera quantitate cognita  $r$ , ita ut fieret  $z = ar^0 + br^2 + cr^4$  &c.

si  $r$  minor fuisset, quam  $n$ . Nam series, ut ad verum valorem magis accedat, debet esse convergens. Quod ut fiat, necesse est, numerator fractionis denominatore sit minor per Coroll. 2. Prop. 8. Cap. 2. unde in hoc casu quantitas  $n$  fieret in seriei terminis denominator. Hoc semper erit in ejusmodi seriebus efformandis observandum.

## PROPOSITIO VI.

*Idem problema alio modo resolvitur.*

I. **S**it eadem  $x^2 - 2nx - r^2 = 0$ , cujus radix per approximationem quaeritur. Supponatur statim valor incognitæ  $x$  æqualis seriei indeterminatæ quorumcunque terminorum, nempe

Sit  $x = an^0 + bn^1 + cn^2 + dn^3 + en^4 \&c.$  Quantitates  $a, b, c \&c.$  sunt indeterminatæ, &  $n^0 = 1$ , unde  $an^0 = a$ . Elevetur series ad singulos gradus, quos habet  $x$  in data æquatione, ita ut æquatio transformetur in aliam indeterminatam, scilicet

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 & = a^2 + 2abn + 2acn^2 + 2adn^3 + 2aen^4 \&c. \\
 & \quad + bbn^2 + 2bcn^3 + 2bdn^4 \&c. \\
 - 2nx & - 2an - 2bn^2 - 2cn^3 + cn^4 \&c. \\
 - r^2 & - r^2 \quad \quad \quad - 2dn^4 \&c.
 \end{array}$$

Jam singuli termini æquentur zero, ut determine- tur valor ipsarum  $a, b, c, d \&c.$  ex æquationibus particularibus, quæ sequuntur.

1.<sup>a</sup>  $a^2 - r^2 = 0$ , atque hinc  $a^2 = r^2$ , &  $a = r$ .  
 2.<sup>a</sup>  $2ab - 2a = 0$ , & posito  $r$  loco  $a$ ; erit  $rb = r$ , hoc est  $b = 1$ .

3.<sup>a</sup>  $2ac + bb - 2b = 0$ , &  $2ac + bb = 2b$ , in qua

qua positis valoribus  $a$  &  $b$ , habetur  $2rc + 1 = 2$ ;

atque hinc  $c = \frac{1}{2r}$ .

4.<sup>a</sup>  $2ad + 2bc - 20 = 0$ , &  $ad + bc = c$ , in eaque substitutis valoribus ipsarum  $a, b, c$ , erit  $d = 0$ .

5.<sup>a</sup>  $2ae + 2bd + cc - 2d = 0$ , & abjectis (ob  $d = 0$ ) terminis  $2bd - 2d$ , remanet  $2ae = -cc$ ,

unde eruitur  $e = -\frac{1}{8r3}$ .

His valoribus subrogatis in serie  $a + bn^1 + \frac{cn^2}{1} + dn^3$  &c. oritur series determinata  $r + n^1 + \frac{1}{2r}$

$n^2 - \frac{1}{8r3} n^4 - \frac{1}{32r5} n^6$  &c. ac posito  $n = 1$ ; erit

$x = r + 1 + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r3} - \frac{1}{32r5}$  &c. Ex his pau-

cissimis terminis patet, hanc seriem magis, quam duas superiores, esse convergentem.

II. Sit æquatio cubica  $x^3 + bbx - 2b^3 = 0$   
 $+ abx - a^3$

Fiat series ex quantitate cognita omnium minima, quæ sit  $a$ , multiplicata per indeterminatas  $f, g, h, i$  &c. & eidem æqualis ponatur incognita  $x$ , erit  $x = fa^0 + ga^1 + ha^2 + ia^3 + la^4$  &c. quæ series elevetur ad omnes gradus, quos habet  $x$  in æquatione data, erit

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 = & f^3 + 3ffga + 3fgga^2 + g^3 a^3 + 3fhba^4 \&c. \\
 & + 3ffha^2 + 3ffia_3 + 3ggha^4 \&c. \\
 & + 6fgha_3 + 3ffla_4 \&c. \\
 & + 6fgia_4 \&c. \\
 + bbx & + bbf + bbga + bbha^2 + bbia_3 + bbla^4 \&c. \\
 + abx & + bfa + bga^2 + bha_3 + bia_4 \&c. \\
 - 2b^3 & - 2b^3 \\
 - a^3 & - a^3
 \end{array}$$

Fiant singuli termini zero æquales, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipsarum  $f, g, h, i$  &c.

1.<sup>a</sup>  $f^3 + fbb - 2b^3 = 0$ , quæ si dividatur per  $f - b$ , divisio exacte succedit; proinde  $b$  est radix vera ejusdem æquationis per num. 5. Prop. 1. Cap. 6. eritque  $f = b$ .

2.<sup>a</sup>  $3ffg + bbg + bf = 0$ , &  $3ffg + bbg = -bf$ ; & posito  $b$  loco  $f$ , habetur  $g = -\frac{1}{4}$ . Nam  $g = -$

$$\frac{bb}{4bb} = \frac{1}{4}$$

3.<sup>a</sup>  $3ffb + bbb = -bg - 3fgg$ ; in qua posito valore ipsarum  $f$  &  $g$ , invenitur  $b = \frac{1}{64b}$ .

4.<sup>a</sup>  $3ffi + bbi = -bb - g^3 - 6fgh + 1$ , & substitutis valoribus jam inventis loco  $f, g, h$ , habe-

$$\text{tur } i = \frac{131}{512b^2}$$

5.<sup>a</sup>  $3ffl + bbl = -bi - 6fgi - 3ggh - 3fhh$ ;

$$\text{ex qua eodem modo eruitur valor } l = \frac{509}{16384b^3}$$

Por-

Porro his valoribus substitutis in serie  $fa^0 + ga^1 + ha^2 + ia^3$  &c. habetur  $x = b - \frac{1}{4}a + \frac{1}{64b}$

$a^2 + \frac{131}{512b^2}a^3 + \frac{509}{16384b^3}a^4$  &c. Et posito  $a = 1$ ,

erit  $x = b - \frac{1}{4} + \frac{1}{64b} + \frac{131}{512b^2} + \frac{509}{16384b^3}$ .

SCHOL. I. Si æquatio data duas incognitas  $x$  &  $y$  contineat, ut sæpe in Geometria composita contingit, tunc termini seriem componentes desumuntur ex incognita, quæ minor est, ut series convergens fiat, quemadmodum in Schol. Propos. præc. dictum est. Ut si  $x$  major est, quam  $y$ , fiat series  $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5$  &c. Cetera peraguntur ut supra. At plura his addere non est hujus loci.

SCHOL. II. Cum series infinitæ primo a Mercatore Hollato per divisiones, secundo a Cl. Newtono per radicum extractiones quæsitæ fuerint, ut in Schol. 2. Propos. 11. Cap. 3. innuimus; demum celeberrimus Leibnitijs (a) ad eas pervenit per suppositionem ipsius seriei quæsitæ tanquam inventæ; ita ut coefficientes terminorum ejusdem seriei postea determinantur, ut series ipsa determinata fiat: quæ sane methodus commodior est longeque ceteris universalior, cum hæc non modo in calculo communi, sed etiam in Differentiali & Integrali usum habere possit plurimum. Nos facile & ad discendum intelligentiam aptum specimen in hac Propositione duntaxat exhibuimus.

(a) Acta Erudit. Lipsiæ an. 1683.

*De Geometrica Constructione Æquationum.*

**G**eometricam æquationum constructionem aggredimur. Intelligent hinc tirones ingentem Analyseos in Geometria usum. Intelligent, qua ratione Euclides, Apollonius, magnus Archimedes, aliique veteres Geometræ, quæ per Analysin problemata subtiliter invenerant, ea deinde, suppresso calculo, composuerint, ac synthetice demonstraverint. Horum vestigiis insistentes *Simplices* tantum, & *Quadraticas Æquationes* in hoc capite constituimus. Nam quæ altioris sunt gradus, curvarum doctrinam ad constructionem requirunt. Præmittimus autem his quantitates analyticas geometricè exprimentis rationem, cum id tironibus soleat negotium facessere.

## P O R I S M A I.

*Fractiones in terminos proportionales resolvere.*

**F**ractiones analyticae, quibus incognita æqualis existit, in terminos proportionales resolvuntur variis quidem modis.

I. Sit  $x = \frac{ab}{c}$ ; erit  $c . a :: b . x$ : nimirum est  $x$  quarta proportionalis *per Prop. 12. l. 6. Eucl.*

II. Sit  $x = \frac{aa - bb}{c - d}$ : quia  $a + b \times a - b = aa - bb$ ; erit  $c - d . a + b :: a - b . x$  *per Propos. cit.*

III. Sit  $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n}$ . Inveniatur  $\frac{ab}{c} = n$ , &  $\frac{adc}{n} = m$  *per Propos. cit.*; erit  $x = n + m$ .

IV. Sit  $x = \frac{ab + cd}{m + n}$ : quia nulla litera in nu-

me-

meratore bis habetur; fiat  $a.d :: c$  ad quartam proportionalem  $= r$ : erit  $ar = cd$  per Propof. 16. l. 6.

Eucl. proinde æquatio mutatur in hanc  $\frac{ab + ar}{m + n}$ ,

in qua reperitur bis  $a$ ; adeoque sic resolvitur  $m + n$ .  
 $b + r :: a.x$ .

V. Sit  $x = \frac{abc}{ddf}$ : fiat primo  $d.a :: a$  ad quartam proportionalem  $= m$ , erit  $aa = dm$ ; proinde ponendo  $dm$  loco  $aa$ , erit  $x = \frac{dmbc}{ddf}$ , seu  $x = \frac{mbc}{df}$ . Se-

cundo fiat  $d.m :: b$  ad quartam proportionalem  $= n$ ; erit  $dn = mb$ : unde subrogando  $dn$  loco ipsius  $mb$ ;

erit  $x = \frac{dnc}{df}$ , seu  $x = \frac{nc}{f}$ : itaque habetur  $f.n :: c.x$ ,

ut supra num. 1. aut si fiat  $f.n :: c.l$ , erit  $x = l$ ,

cum sit  $\frac{nc}{f} = l$ , ut patet.

COROLL. Hinc facile invenitur recta æqualis pluribus fractionibus datis. Nam sit  $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n} + \frac{cn}{f} \&c$ .

Si reperiatur, ut superius factum est, per Prop. 12. l.

6.  $\frac{ab}{c} = n$ ,  $\frac{adc}{n} = m$ , &  $\frac{cn}{f} = l$ ; erit  $x = n + m + l$ ,

nempe  $x =$  recta lineæ composita ex rectis  $n, m, l \&c$ .

## P O R I S M A II.

Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones geometrice exprimere. Fig. 10.

I. Sit triangulum  $ABC$  rectangulum in  $B$ , cujus hypotenusa sit  $AC = a$ , unum latus  $AB = b$ ,

& alterum  $BC = c$ ; quia  $\overline{AC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$  per 47. l. 1.

I. 1. *Eucl.* erit  $aa = bb + cc$ , &  $AC (a) = \sqrt{bb + cc}$ .

Similiter quia  $\overline{AB} = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ ; erit  $bb = aa - cc$ ,  
&  $AB (b) = \sqrt{aa - cc}$ . Item  $cc = aa - bb$ , &  
 $BC (c) = \sqrt{aa - bb}$ .

II. Quod si demittatur perpendicularum  $BD$ , ita  
ut basis segmentum sit  $DC = x$ ; erit  $AD = a - x$ :

& ob angulum rectum in  $D$ , erit  $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 =$   
 $cc - xx$ ; unde  $BD = \sqrt{cc - xx}$ . Similiter quia  
 $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = bb - aa + 2ax - xx$ , erit  $BD =$   
 $\sqrt{bb - aa + 2ax - xx}$ .

III. Similiter (*Fig. 11.*) si in semicirculo  $ABC$   
ducantur duæ quælibet chordæ  $AB$  &  $BC$ ; erit an-  
gulus  $ABC$  rectus *per 20. l. 3. Eucl.* Hinc posita dia-  
metro  $AC = a$ ,  $AB = b$ , &  $BC = c$ , habentur eadem  
omnino quantitates, quæ supra. Erit enim  $AC (a) =$   
 $\sqrt{bb + cc}$ . Item  $AB (b) = \sqrt{aa - cc}$ , &  $BC (c)$   
 $= \sqrt{aa - bb}$ .

IV. Demisso autem ex quovis circuli puncto per-  
pendicularo  $BD = y$ , sit  $DC = x$ , erit  $AD = a - x$ ,  
& *per Coroll. Propos. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet*  $\overline{BD}^2 =$   
 $AD \times DC$ , hoc est  $yy = ax - xx$ : unde  $BD (y)$   
 $= \sqrt{ax - xx}$ . Vel sit  $ED = x$ ,  $DB = y$ , &  $CE$ , vel  
 $BE = a$ , erit  $\overline{BD}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{ED}^2$ , hoc est  $yy = aa - xx$ ,  
&  $BD (y) = \sqrt{aa - xx}$ .

COROLL. I. Ex his patet, quomodo exprimi possit geome-  
trice hæc, aut alia similis quantitas analytica  $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc}$ .

Nam

Nam inveniatur, ut supra,  $a = \sqrt{bb + cc}$ , fiet  $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc}$

$= \frac{ar}{n}$ , quæ quantitas si per Porif. 1. in analogiam resolvatur, haberi potest  $\frac{ar}{n} = 1$ ; unde  $\frac{r}{n} \sqrt{bb + cc} = 1$ .

COROLL. II. Patet, quo pacto media proportionalis per quantitatem radicalem designata, geometricè sit exprimenda. Nam (Fig. 11.) si fiat  $AD = a$  &  $DC = b$ , & ducatur  $BD$  perpendicularis ad diametrum  $AC$ ; erit  $BD = \sqrt{ab}$  per Cor. Prop. 17. l.6. Eucl. ex Tacquet.

COROLL. III. Patet demum, qua ratione dato plano  $= ab$ , reperitur quadratum illi æquale  $cc$ . Nam sit, ut prius,  $AD = a$ ,  $DC = b$ , & ducatur in circulo ad diametrum  $AC$  perpendicularis  $DB = c$ , erit  $DB^2 = AD \times DC$  per Cor. cit. hoc est  $cc = ab$ . Contra vero dato quadrato  $cc$ , & alterutro plani  $bd$  latere, facile est invenire ipsum planum.

P O R I S M A III.

Æquationes secundi gradus geometricè construere.

Quatuor formulis comprehendi solent omnes secundi gradus æquationes, earumque radices ob duplicem valorem affirmativum, & negativum duplici signo afficiuntur  $\pm$ , ut sæpe diximus, scilicet *Formulae*.

*Radices.*

1. $x^2 = ax + bb$	$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$
2. $x^2 = -ax + bb$	$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$
3. $x^2 = ax - bb$	$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}$
4. $x^2 = -ax - bb$	$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}$

I. Pro prima formula construenda (*Fig. 12.*) fiat triangulum  $ABC$  rectangulum in  $B$ , cujus latus  $BC = b$ , &  $AB = \frac{1}{2}a$ ; erit per *Porif. 2.* basis  $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . Centro igitur  $A$  & intervallo  $AB$  fiat circulus  $ABE$ , & producat  $AC$  in  $D$ ; erit recta  $CD = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , ut patet.

Vel sic (*Fig. 13.*) fiat  $AB = \frac{1}{2}a$ , & perpendicularis  $BC = b$ ; tum centro  $A$  cum intervallo basis  $AC$  fiat semicirculus  $DCE$ , in quo producat  $AB$  hinc inde ad peripheriam; erit  $DB = x$ .

Nam  $DB = AB + AD$ , vel  $AC$ ; sed  $AB = \frac{1}{2}a$ , &  $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ; ergo  $DB = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ .

II. Pro secunda formula constructio est eadem: nam in *Fig. 12.* (non producta  $AC$  in  $D$ ) erit  $CE = x$ . Nam  $CE = CA - AE$ , seu  $AB$ ; sed  $AB = \frac{1}{2}a$ ,

&  $CA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ; ergo  $CE = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$ .

Vel in (*Fig. 13.*)  $EB = AE$ , (vel  $AC$ ) -  $AB$ ; proinde  $EB = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$ .

III. Pro tertia formula construenda (*Fig. 14.*) quæ quidem duas habet radices positivas, ut signorum dispositio docet per *num. 3. Prop. 1. cap. 6.* sit in semicirculo  $AEB$  diameter  $AB = a$ ; erit semidiameter  $AC$ , vel  $CB$ , vel  $CE = \frac{1}{2}a$ . Elevetur ex puncto  $B$  perpendicularis  $BF = b$ , & ducatur diametro  $AB$  parallela  $EF$ , quæ secabit circulum in  $E$ . Tum ex puncto  $E$  ducta  $ED$  ad diametrum perpendiculari, erit  $AD = x$ .

Nam  $AD = AC + CD$ , sed  $AC = \frac{1}{2}a$ , &  $CD =$

✓

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ ; ergo  $AD = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$ .

Erit autem  $DB$  altera radix positiva. Nam  $DB = BC - CD$ ; proinde  $DB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$ .

IV. Formula autem quarta, cuius constructio est omnino eadem, ambas radices habet negativas, ut ex signorum dispositione dignoscitur *per num. 3. Prop. 1. cap. 6.* quarum prima erit  $-AD = -AC - CD$ , hoc est  $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$ . Altera vero  $-DB = -CB + CD$ ; hoc est  $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = x$ .

SCHOL. I. Ceterum ad absolutam problematis resolutionem una radix, & quidem positiva sufficit. Proinde Cartesius de radicibus negativis construendis sollicitus nunquam fuit. Recentiores tamen singulas construunt, ut & nos in tertia & quarta formula. Pro prima autem formula radix negativa (Fig. 13.) erit  $EB$ . Nam  $EB = -AE$  (seu  $-AC$ )  $+ AB$ ; proinde  $EB = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$ . Pro secunda formula radix negativa erit  $-DB$ . Nam  $-DB = -BA - AD$  (seu  $-AC$ ) idest  $= -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = x$ .

Hinc apparet, constructionem esse eandem, sed radices negativas ad partem oppositam esse desumendas; hoc est si radix positiva  $DB$  desumpta fuit ex  $B$  versus  $D$ ; e contrario radix negativa  $BE$  desumi debet ex  $B$  versus  $E$ . Quæ regula in Geometricis Constructionibus semper observatur.

SCHOL. II. Si in tertia vel quarta formula  $BF (=b)$  major sit, quam  $CB (= \frac{1}{2}a)$  fieri non poterit, ut parallela  $EF$  circulum secet, & in hoc casu problema erit im-

impossibile. Ratio est, quia ubi  $b > \frac{1}{2}a$ , erit quoque

$bb > \frac{1}{4}aa$ ; ideoque  $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$  fit quantitas imaginaria, & problema contradictionem involvere signum est.

Quod si  $BF = CB$ , hoc est  $b = \frac{1}{2}a$ , tunc parallela  $EF$  non secat circulum, sed illum tangit in puncto; ex quo si ducatur perpendicularis  $ED$ , hæc in centro consistit, & recta  $CD$  evanescit; proinde  $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bb} = 0$ .

Hæc ex ipsa constructione patent.

SCHOL. III. Ut obtineantur equationes supra allatae, vel aliae similes, proposito problemate, delineatur figura, in qua problema ipsum quasi solutam ponitur, ducendo in ea lineas perpendiculares, parallelas, angulos æquales, circulos, triangula similia, vel rectangula, aliasque figuras, quarum notæ relationes & proprietates algebraicas equationes nobis exhibent. Quæ quidem plenius docent problemata, quæ sequuntur, fere omnia ab Euclide, Archimede, aliisque summis Geometris de industria accepta: cum in his primo versari ex usu discentium esse, putaverim.

## P R O B L. I.

Datam rectam  $AB$  sectam utcumque in  $C$  ita producere in  $E$ , ut rectangulum  $AEB$  sit æquale quadrato  $CE$ .

FACTUM jam sit (Fig. 15.) & esto data  $AB = a, CB = b$ , quæsitæ  $BE = x$ ; erit tota  $AE = a + x$ , & ex conditione problematis  $AE \times EB = CE^2$ , hoc est

$$\begin{aligned} ax + xx &= b^2 + 2bx + xx \\ ax &= b^2 + 2bx \\ ax - 2bx &= b^2 \end{aligned}$$

$$\text{Div. per } a - 2b \quad x = \frac{b^2}{a - 2b}$$

Qua æquatione in terminos proportionales resoluta per *Poris. 1.* habetur  $a - 2b . b :: b . x$ . Est ergo  $BE = x$  tertia proportionalis ; unde oritur constructio , quæ sequitur .

*Constructio* ( *Fig. 16.* ) Sumatur in  $AB$  pars  $CD = CB$ , erit  $DB = 2b$ , &  $AD = a - 2b$ . Fiat  $AD (a - 2b) . DC (b) :: DC$ , vel  $CB (b) . BE (x)$  tertiam proportionalem quæsitam .

*Demonstr.* Cum ex construct. sit  $AD . DC$ , vel  $CB :: CB . BE$ , erit componendo per *Propos. 18. l. 5.*  $AC . DC$ , vel  $CB :: CE . BE$ . Est autem ut  $AC$  antecedens ad  $CB$  consequentem , ita  $CE$  antecedens ad  $BE$  consequentem , ergo  $AE$  summa antecedentium erit ad  $CE$  summam consequentium , ut  $CE$  una antecedentium ad  $BE$  unam consequentium per *Prop. 12. l. 5.* ergo rectangulum sub extremis  $AE \times BE$ , nempe  $AF$ , erit æquale quadrato sub mediis  $CE \times CE$ , idest  $CH$  per *Prop. 17. l. 6.* Quod erat &c.

SCHOL. Hinc apparet methodus , aut alia huic affinis , quam Euclides , Archimedes , Apollonius , alique veteres in suis problematibus investigandis , construendis , ac demonstrandis tenuerunt .

P R O B L. II.

In dato triangulo  $ABC$  quadratum inscribere . *Fig. 17.*

**E** Sto factum , & quadratum inscriptum sit  $EDFG$ . Ducatur perpendicularis  $AH$ , quæ ob triangulum datum erit pariter data . Sit  $BC = a$ ,  $AH = b$ ,  
V
&

&  $HL$  seu  $FG = x$ ; erit  $AL = b - x$ . Jam ob triangula similia  $BAC$  &  $FAG$  erit  $AH (b)$ .  $BC (a) :: AL (b - x)$ .  $FG (x)$ : proinde

$$bx = ab - ax$$

$$bx + ax = ab$$

$$\text{Divid. per } a + b \quad x = \frac{ab}{a + b}$$

Resoluta æquatione in terminos proportionales, habetur  $a + b . a :: b . x$  per *Porif. 1.* unde patet, quæsitam  $LH = x$  esse quartam proportionalem. Hinc oritur constructio, quæ sequitur.

*Constructio*. Producta  $BC$  indefinite, fiat  $HM = BC$ , &  $MN = AH$ ; erit  $HM + MN = a + b$ . Jungatur  $AN$ , cui ex puncto  $M$  parallela ducatur  $LM$ , quæ secabit  $AH$  in puncto quæsito  $L$ .

*Demonstr.* Ob parallelas  $AN$  &  $LM$  triangula  $AHN$ , &  $LHM$  sunt similia, proinde  $MN$ , seu  $AH . AL :: HM$ , seu  $BC . LH$ . Item ob triangula similia  $BAC$  &  $FAG$  est  $AH . AL :: BC . FG$ ; ergo  $AH . AL :: BC . LH$ : ideoque  $BC$  ad duas  $FG$  &  $LH$  eandem rationem habet, quæ idcirco sunt æquales per *Propos. 9. lib. 5.* Est ergo  $EDFG$  quadratum. Quod &c.

*COROLL.* Tam ex hoc, quam ex præc. problemate apparet, fractiones, quibus quantitas incognita in æquatione finali æquatur, in terminos proportionales esse resolvendas, ut in *Porif. 1.* docuimus.

### P R O B L. III.

In quadrilatero  $ABDE$  circulo inscripto rectanguli, quod fit ex diagonalibus  $AD \times EB$  ad rectangula, quæ fiunt ex lateribus oppositis  $AE \times BD$ , &  $AB \times DE$ , rationem invenire. Fig. 18.

**D**ucatur  $DF$  faciens angulum  $EDF$  æqualem angulo  $ADB$ , erunt triangula  $ADB$  &  $EDF$  si-  
mi-

milia, cum etiam anguli  $DAB$  &  $BED$  sint æquales, utpote eidem arcui  $BD$  insistentes; proinde  $AD \cdot DE :: AB \cdot EF$ ; & si ponatur  $AD = a$ ,  $DE = b$ ,  $AB = c$ , &  $EF = x$ ; erit  $a \cdot b :: c \cdot x$ , adeoque  $ax = bc$ .

Similiter triangula  $ADE$  &  $BDF$  sunt æquiangula & similia. Nam si æqualibus ex constructione angulis  $EDF$ , &  $ADB$  addatur communis  $ADF$ , erit  $ADE = BDF$ . Item  $DAE = DBF$ , cum eidem arcui  $DE$  insistant, & hinc  $BF \cdot AE :: BD \cdot AD$ . Jam si ponatur tota  $BE = f$ , erit  $BF = f - x$ . Sit  $AE = d$ , &  $BD = e$ , erit  $f - x \cdot d :: e \cdot a$ ; ideoque  $af - ax = ed$ . Addatur huic æquationi altera  $ax = bc$ , erit  $af = ed + bc$ ; unde patet, rectangulum, quod fit ex diagonalibus  $AD \times BE = af$ , æquari duobus rectangulis, quæ fiunt ex lateribus oppositis  $AE \times BD = ed$ , &  $AB \times DE = bc$  simul sumptis.

*Demonstr.* Ob triangula similia  $ADB$  &  $EDF$  est  $AD \cdot DE :: AB \cdot EF$ ; ergo per 16. l. 6.  $AD \times EF = DE \times AB$ . Item ob triangula similia  $ADE$  &  $BDF$  est  $BF \cdot AE :: BD \cdot AD$ ; ergo per Prop. cit.  $AD \times BF = AE \times BD$ . Sed  $AD \times BF$  &  $AD \times EF = AD \times EB$  totam per 1. l. 2.; ergo  $AD \times EB = DE \times AB + AE \times BD$ . Quod erat &c.

SCHOL. *Praclarum hinc oritur Ptolomæi (a) theoremata*: In quadrilatero inscripto in circulo rectangulum sub diagonalibus æquale est rectangulis, quæ a lateribus oppositis fiunt. *Quod quidem magnum habet in Trigonometria usum.*

---

(a) Almagesti lib. 1. Cap. 9.

## P R O B L. IV.

*Datam rectam AB media & extrema ratione  
secare. Fig. 19.*

**S**ecta sit  $AB$  in puncto  $C$ , ut imperatur; & sit ipsa  $AB = a$ ,  $AC = x$ ; erit  $CB = a - x$ , & per conditionem problematis cum tota  $AB$  debeat esse ad majus segmentum  $AC$ , ut  $AC$  ad segmentum minus  $CB$ ; erit  $a \cdot x :: x \cdot a - x$ : hinc

$$xx = aa - ax$$

$$xx + ax = aa$$

*Prop. 1. Cap. 8.*  $\frac{1}{4} a^2$   $\frac{1}{4} a^2$

---

$$x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{5}{4} a^2$$

*Extra. rad.*  $x + \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$

$$x = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

*Construct.* A rectæ  $AB$  puncto  $B$  eleveur perpendicularis  $BD = \frac{1}{2} a$ ; ductaque  $AD$ , secetur  $ED = DB (= \frac{1}{2} a)$ . Facto deinde centro in  $A$  cum intervallo  $AE$ , secetur  $AC = AE$ ; erit  $C$  punctum quaesitum.

*Demonstr.* Triangulum  $ABD$  est rectangulum in  $B$ , ergo  $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4} aa = \frac{5}{4} a^2$ ; unde

$AD = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$ . Est autem  $DE = DB = \frac{1}{2} a$ ; ergo

$AE = AD - DE = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a = AC$ .

Insuper  $CB = a - x$  erit  $= \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$ . Sunt

autem  $AB = a$ ,  $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a}$ , &  $CB = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$  tales inter se, ut rectangulum sub extremis  $AB \times CB$  sit æquale quadrato mediæ  $AC$ , hoc est  $\frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ ; hinc  $AB$ ,  $AC$ , &  $CB$  sunt continue proportionales per 17. l. 6. proinde  $AB$  secta est in  $C$  media & extrema ratione.

COROLL. I. Hinc facile eruitur synthetica demonstratio: Nam si data  $AB$  secetur in  $C$ , ita ut rectangulum  $AB \times CB$  sit æquale quadrato  $AC$ , ut docet Prop. 11. l. 2. erit  $AB.AC :: AC.CB$  per 17 lib. 6. ergo  $AB$  secta est in  $C$  secundum mediam & extremam rationem per Defin. 3. lib. 6.

SCHOL. Certum est, quadratum  $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$  posse oriri tam ex radice positiva  $x + \frac{1}{2}a$  quam ex negativa  $-x - \frac{1}{2}a$ . In primo casu habetur radix positiva, quam supra construximus  $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ ; in secunda radix negativa & equaliso nihil  $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ , qua tamen construi potest hac ratione.

Supposita superiori constructione, producat  $BA$  versus  $F$ , & fiat  $AF = DB = \frac{1}{2}a$ , &  $FG = AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$  erit tota  $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -x$ , &  $GB (= a - x) = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ . Sunt porro tres continue proportionales  $BA = a$ ,  $AG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ , &  $GB = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ . Nam  $BA \times GB = \overline{AG}^2$ , cum utrinque oriatur  $\frac{3}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

COROLL. II. In construction. radicum negativarum quantitates cognite signo — affectæ desumi debent ad partem oppositam radicum positivarum; quod in Schol. I. Porif. 3. fuit prenotatum, & ex hac constructione apparet.

## P R O B L. V.

Datam rectam AB inæqualiter ita secare in C, ut quadrata totius AB, & minoris segmenti BC sint tripla quadrati, quod fit a segmento majori AC. Fig. eadem.

Sit  $AB = a$ ,  $AC = x$ ; erit  $CB = a - x$ , & per conditionem problematis

$$a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2$$

$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$

$$x^2 + ax = a^2$$

Prop. I. cap. 8.

$$\frac{1}{4} a^2 \quad \frac{1}{4} a^2$$


---

$$x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{5}{4} a^2$$

Extr. rad.  $x + \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$

$$x = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$$

Quæ quidem æquatio cum sit eadem, ac superioris problematis, indicio est, rectam AB secandam esse

media & extrema ratione, ut duo quadrata  $AB$  &

$BC$  sint tripla quadrati  $AC$ . Facta igitur eadem constructione, sectaque AB in C media & extrema ratione, erunt tres continue proportionales  $AB = a$ ,

$AC = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a$ , &  $BC = \frac{3}{2} a \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$ ; atque

hinc quadrata  $AB + BC = 3 AC$ , hoc est  $\frac{5}{4} a^2 -$

$$3a \sqrt{\frac{5}{4} a^2}.$$

Co-

COROLL. Hinc oritur Theorema 4. l. 13. Euclidis :  
Si recta linea media & extrema ratione secta fue-  
rit, totius & minoris portionis utraque simul qua-  
drata tripla sunt quadrati ejus, quod a majori fit  
portione. Cujus demonstratio ex superiori æquatione &  
constructione sponte sua sequitur.

P R O B L. VI.

A dato puncto E rectam ducere, quæ datum circumulum  
tangat. Fig. 20.

Punctum E positione datur, circulus vero *ABGD*  
positione & magnitudine; proinde ducta *AE*,  
dantur *AD* & *DE*. Sit ergo  $AD = a$ ,  $DE = b$  &  
 $EG = x$ ; producta autem *AD* in *B*, erit tota *BE*  
 $= 2a + b$ , &  $BE \times ED = \overline{EG}^2$  per 36. l. 3. Eucl. hinc  
habetur æquatio

$$2ab + b^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{b^2 + 2ab}$$

Constr. Centrum circuli *A*, & punctum datum con-  
nectantur recta *AE*, super qua describatur semicircu-  
lus *AE G*, in quo ducantur chordæ *AG* & *EG*.

Demonstr. Angulus *AGE* in semicirculo rectus est  
per Prop. 31. l. 3. ergo  $\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2$  per 47. l. 1. hoc  
est  $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + x^2$ , seu  $x^2 = 2ab + b^2$ ; pro-  
inde  $x = \sqrt{2ab + b^2} = EG$ .

Verum demonstratio synthetica unico verbo potest  
absolvi. Nam angulus *AGE* in semicirculo est re-  
ctus; ergo *EG* circumulum tangit in *G* per 16. l. 3.  
Quod erat &c.

## P R O B L. VII.

*Dato circulo invenire latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscribendi. Fig. 21.*

**S**It  $AB = x$  latus trianguli quæsitæ, & ducatur chorda  $BC$  æqualis semidiametro  $CD = a$ , quæ erit latus hexagoni per 15. l. 4. *Eucl.* eritque  $AC = 2a$ .

Ob angulum  $ABC$  in semicirculo rectum  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ , hoc est

$$\begin{aligned} xx + a^2 &= 4a^2 \\ xx &= 3a^2 \\ x &= \sqrt{3a^2} \end{aligned}$$

Est ergo latus trianguli æquilateri medium proportionale inter circuli, cui inscribitur, radium, ejusque triplum, nempe inter  $a$  &  $3a$ . Hinc si ponatur  $a = 1$ , erit trianguli æquilateri latus ad radium, ut  $\sqrt{3}$  ad 1.

*Constructio* tamen facilior est, quæ vulgo traditur. (*Fig. 22.*) Super diametro  $AB$  describatur triangulum æquilaterum  $ABC$ , & ducatur  $CD$ ; erit  $CD$  latus quæsitum. Nam in triangulo rectangulo  $CDB$  erit  $CB = 2a$ ,  $DB = a$ , &  $CD = x$ ; unde  $x = \sqrt{3aa}$ .

**COROLL.** *Hinc infertur, non omnes concinniores constructiones geometricas ex calculo analytico derivari, nec proinde eidem semper esse inhærendum, cum in solutione problematum geometricorum elegantiora quandoque media operantis ingenium, quam talis determinata æquatio suppeditet, quæ quidem respicit problema illud solitarie sumptum, & ab omnibus aliis independens, ut Cl. Wolfius observat, & ex hoc ipso problemate intelligi potest:*

potest: quod quidem multis aliis modis eleganter & a superiori æquatione independenter construitur.

SCHOL. Ex penultima æquatione habetur egregium theorema, quod est Propos. 12. lib. 13. Euclidis: Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, quadratum ex trianguli latere triplum est ejus, quod fit ex circuli semidiametro. Nam si ponatur  $BC = a$ , &  $AC = 2a$ , erit  $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ ; proinde  $\overline{AB}^2 = 3a^2$ , &  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} :: 3a^2 : a^2 :: 3 : 1$ . adeoque  $BC$ , seu  $CD = \sqrt{\quad}$ . Fig. 21.

P R O B L. VIII.

Rationem invenire, quam pentagoni latus habet ad hexagoni & decagoni simul sumpta latera in eodem circulo inscriptorum. Fig. 23.

Sit  $AC$  latus pentagoni, divisioque bifariam arcu  $AC$  in  $B$ , chorda  $AB$ , seu  $BC$  erit latus decagoni; & circuli radius  $AF$ , vel  $FC$  latus hexagoni, ut patet. Ducatur  $FD$  perpendiculariter super  $AB$ , quam bifariam secabit in  $D$  per 3. l. 3. & ducatur  $EB$ . Duo triangula  $ACF$ ,  $ECF$  sunt æquiangula & similia; nam præter angulum communem  $C$ , angulus  $CFE = FAC$ : est enim arcus  $BC$  gr. 36. &  $BD$  gr. 18. ergo totus  $DC$ , nempe angulus  $CFE$  gr. 54. Similiter cum in trigono isoscele  $AFC$  angulus ad centrum sit gr. 72., erunt singuli ad basim gr. 54. proinde  $FAC = CFE$ .

Sit  $AF = a$ ,  $AC = b$ ,  $EC = x$ ; erit  $AE = b - x$ ,  $AB = c$ . Ratione triangulorum similibus  $ACF$ ,  $ECF$  est  $AC \cdot AF :: AF \cdot EC$ , hoc est  $b \cdot a :: a \cdot x$ , hinc  $bx = aa$ . Deinde triangulum isoscele  $AEB$  simile est triangulo isosceli  $ABC$ . Habent enim angulum  $A$  communem, proinde omnes alios æquales, ut patet. Sunt ergo  
pro.

proportionales  $AE . AB :: AB . AC$ , hoc est  $b - x . c :: c . b$ ; unde  $bb - bx = cc$ . Addatur huic altera æquatio, habetur  $bb = aa + cc$ , hoc est latus pentagoni regularis post latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum, ut in *Prop. 10. lib. 13.* proposuit Euclides.

### P R O B L E M A IX.

*Dato quadrato ABCD, ex angulo A ducere rectam AE, ut pars FE a latere DC continuato intercepta sit æqualis data rectæ M. Fig. 24.*

**E**X puncto  $E$  demittatur  $EG$  perpendicularis ad  $AE$ , quæ lateri producto  $AB$  occurrat in  $G$ . Ducta perpendiculari  $EH$ , facile erit ostendere,  $EG$  æqualem esse  $AF$ , cum triangula  $EHG$  &  $ABF$  sint rectangula, similia per *Prop. 8. lib. 6.* & etiam æqualia; &  $EH = CB = AB$ ; proinde  $EG$  &  $AF$  latera homologa & æqualia.

Sit ergo  $AB$ , vel  $BC = a$ ,  $FE = M = b$ ,  $AF = EG = y$ , &  $BG = x$ ; erit  $AE = y + b$ , &  $AG = a + x$ . Tum ob triangula similia  $ABF$  &  $AEG$ , erit  $AB . AF :: AE . AG$ , hoc est  $a . y :: y + b . a + x$ ; unde habetur  $aa + ax = yy + by$ . Deinde ob trian-

gulum  $AEG$  rectangulum in  $E$ ,  $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$ , hoc est  $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + bb$ . In hac secunda æquatione ponatur pro  $y^2 + by$  ejus valor ex prima inventus  $aa + ax$ , habebitur  $aa + 2ax + x^2 = 2a^2 + 2ax + b^2$ , quæ reducitur ad simplicissimam secundi gradus  $xx = aa$

$+ bb$ , atque  $x = \sqrt{aa + bb}$ , =  $BG$ .

*Construct.* (*Fig. 25.*) Producat quadrati latus  $AD$  in  $O$ , ita ut  $AO$  sit æqualis rectæ datæ  $M$ : erit  $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2$  (ob triangulum rectangulum  $OAB$ ) =  $aa + bb$ ,

+  $bb$ , &  $BO = \sqrt{aa + bb} = x$ . Producat<sup>ur</sup> ergo latus  $AB$  in  $G$ , ita ut  $BG$  sit æqualis  $BO$ , & super  $AG$  diametro describatur semicirculus  $AEG$ , qui secabit quadrati latus  $DC$  productum in  $E$ , & jungatur  $AE$ ; erit  $EF$  recta quæsitæ.

SCHOL. Hæc constructio eadem est, quæ a Pappo fuit allata, & a Cartesio indicatur, tum ad usum reductionis æquationum ostendendum, tum ad docendum nos, plurimum interesse unam vel aliam quantitatem incognitam assumere. Sive enim pro incognita assumatur  $BF$ , sive  $FC$ , vel  $AF$ , aut  $CE$ : semper oritur æquatio biquadratica. Sumpta autem  $BG$ , prodit æquatio simplicissima secundi gradus, ut vidimus. Jure igitur in hoc ipso problemate solvendo post Cartesium recentiores Analystæ fere omnes ingenium suum exercuerunt, apud quos illud passim invenias.

P R O B L. X.

Circulum invenire datæ superficiæ conicæ æqualem.  
Fig. 26.

Sit circuli quæsitæ radius =  $x$ , & ratio radii ad peripheriam sit  $r . p$ . Si fiat  $r . p :: x . \frac{px}{r}$ , erit  $\frac{px}{r}$  peripheria circuli; & inde innotescit area circuli =  $\frac{px^2}{2r}$  per Coroll. 1. Propos. 5. Archim. ex Tacquet.

Sit conici dati latus =  $a$ , peripheria circuli basis ejusdem =  $p$ ; erit superficies conicæ =  $\frac{1}{2} ap$  per Coroll.

*coll. 1. Prop. 13. ex Archim. cit.* Erit ergo ex hypothefi  $\frac{px^2}{2r}$

$= \frac{1}{2} ap$ , & multiplicando per  $2r$

$$px^2 = arp$$

$$x^2 = ar$$

$$x = \sqrt{ar}$$

**COROLL.** *Hinc oritur Archimedis theorema: Circulus, cujus radius est medius proportionalis inter conii recti latus, & radium basis conicæ, æqualis est superficiei conicæ. Est ejusdem Propof. 13. de Sphæ. & Cylin.*

*Demonstr.* ( *Fig. 26. & 27.* ) Sit conus rectus datus  $R$ . Fiat circulus  $MLN$ , cujus radius  $OL$  sit medius proportionalis inter conii latus  $AB$ , & conicæ basis radium  $BC$ : hoc est ponatur radius  $OL$  medius proportionalis inter  $AB$  &  $BC$ ; erit *per Propof. 7. Archim. cit.* peripheria  $BED$  ad peripheriam  $MLN$ , ut  $BC$  ad  $OL$ , sive ut  $OL$  ad  $AB$ : proinde rectangulum sub prima, nempe peripheria  $BED$ , & quarta  $AB$ , sive ejus dimidium ( nempe triangulum, cujus basis est peripheria  $BED$ , & quarta  $AB$  altitudo ) æquatur rectangulo sub secunda, seu peripheria  $MLN$ , & tertia  $OL$ , seu triangulo sub eadem secunda  $MLN$  & tertia  $OL$ , quod est ejusdem rectanguli dimidium. Sed triangulum, cujus basis est peripheria  $BED$ , & altitudo  $AB$ , æquatur dati conii superficiei *per Coroll. 1. Prop. 13. ex Archim. cit.* & triangulum sub peripheria  $MLN$ , & tertia  $OL$  æquatur circulo  $OLM$  *per Prop. 5. ex Archim. cit.* ergo habetur circulus æqualis conicæ superficiei quæsitus. Quod &c.

P R O B L. XI.

Dato cono recto  $ABC$ , circulum invenire aequalem superfici conica  $BDCE$  planis parallelis  $BC$  &  $DE$  interceptæ. Fig. 28.

SEctus sit conus per axem triangulo  $ABC$ , erunt rectæ  $BC$  &  $DE$  parallelæ per *Propos. 16. lib. 11. Eucl.* cum sint sectiones communes ejusdem trianguli cum planis parallelis  $BHC$  &  $DEL$ . Sit conilatus  $AB = l$ ,  $AD = m$ ; erit  $BD = l - m$ ; item esto  $BF$  radius circuli basis =  $r$ ,  $DG$  radius circuli paralleli =  $s$ , & circuli quæsitæ radius =  $x$ . Ob triangula similia  $ABC$  &  $ADE$  est  $AB . BF :: AD . DG$ , hoc est  $l . m :: r . s$ ; atque hinc  $ls = mr$ , &  $ls - mr = 0$ .

Superficies autem conica  $ABC$  æquatur circulo (per *Theor. præc.*) cujus radius =  $\sqrt{lr}$ , seu cujus radii quadratum =  $lr$ ; item superficies conica  $ADE$  æquatur circulo, cujus radius =  $\sqrt{ms}$ , seu cujus radii quadratum =  $ms$ ; erit ergo radius circuli quæsitæ, sive ejus quadratum

$$x^2 = lr - ms$$

$$x = \sqrt{lr - ms}$$

COROLL. Si superior æquatio  $x^2 = lr - ms$  in proportionem resolvatur; erit  $l - m . x :: x . r + s$ .

Nam  $l - m \times r + s = lr + ls - mr - ms$ .

Inventum autem fuit supra  $ls - mr = 0$ ; proinde  $l - m$

$\times r + s = lr - ms$ ; atque hinc oritur theorema Archimedis, quod est *Propos. 15. de Sphæ. & Cylin.* Circulus habens radium proportionem medium inter interceptam parallelis planis  $BC$  &  $DE$  partem lateris

ris  $DB$  ( $= l - m$ ) & summam radiorum  $BF + DG$  ( $= r + s$ ) circuloꝝ, qui sunt in planis parallelis, æquatur superfici ei conicæ  $BDCE$  parallelis planis interceptæ.

## P R O B L. XII.

*Dato cylindro spheram æqualem invenire.*

Fig. 29. & 30.

**S**upponatur factum, & sphaera  $M$  sit æqualis cylindro  $ABCD$ . Concipiatur sphaeræ  $M$  circumscriptus cylindrus  $EFGH$  habens tam latus  $FH$ , quam diametrum basis  $HG$ , utrumque æquale diametro sphaeræ  $LN$ ; erit cylindrus  $EFGH$  sphaeræ circumscriptus ejusdem sesquialter; hoc est  $= \frac{3}{2}$  sphaeræ per *Propos. 32. Archim. ex Tacquet.* Proinde si fiat  $PC = \frac{3}{2} DC$ , erit cylindrus  $BP = \frac{3}{2}$  cylindri  $BD$  per *Prop. 14. l. 12.* & æqualis cylindro circumscripto  $EFGH$ ; cum sphaera & cylindrus  $BD$  ex hypothese sint æquales.

Sit jam cylindri dati diameter  $BC = a$ , altitudo  $DC = b$ ; erit altitudo  $PC = \frac{3}{2} b$ . Sit autem sphaeræ diameter  $LN$ , vel  $FH = x$ .

In cylindris æqualibus  $BP$  &  $FG$  erit basis  $BCK$  ad basim  $CHZ$  (vel quadrata diametrorum earumdem  $\overline{BC}^2$ ,  $\overline{GH}^2$  per *Prop. 2. l. 12.*) ut reciproce altitudo  $FH$  ad altitudinem  $PC$ , hoc est

$$a^2 . x^2 :: x . \frac{3}{2} b$$

$$x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{2} a^2 b}$$

Ex quo patet, problema esse solidum, & ad ejus solutionem duas medias proportionales esse invenien-

das inter  $a$  &  $\frac{3}{2} b$ ; nempe  $\div a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$ . Nam

ex quadratis diametrorum  $a^2$  &  $x^2$  habentur tres

continue proportionales  $\div a, x, \frac{x^2}{a}$  per Propos. 20.

l. 6. Eucl., ex superiori autem æquatione  $x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$

$a^2 b$  eruitur  $\frac{x^3}{a^2} = \frac{3}{2} b$  dividendo per  $a^2$ ; proinde

$\div a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{3}{2} b$ .

SCHOL. Egregium hoc Archimedis problema, quod ipse statim initio lib. 2. de Sphæ. & Cyl. analytico fere modo proposuit, illud deinde componit per duas medias proportionales, & nos eodem modo, sed aliquanto brevius absolvemus.

Demonstr. Sit  $CD = \frac{2}{3} CP$ ; erit cylindrus  $BD = \frac{2}{3} BP$  cylindri. Tum inter  $BC$  &  $CP$  inveniantur duæ mediæ proportionales  $LN$  &  $R$  per modum aliquem mechanicum ex allatis a P. Tacquet ad Propos. 13. lib. 6. Eucl. Dico,  $LN$  esse diametrum sphæ-

Sphæræ æqualis cylindro dato  $BD$ . Nam sphæræ  $M$  concipiatur circumscriptus cylindrus  $EFGH$ , cujus basis diameter, & altitudo sint æquales diametro sphæræ  $LN$ , vel  $EG$ ; erit eadem sphæra  $= \frac{2}{3}$  cylindri circumscripti  $EFGH$  per *Prop. 32. Archim ex Tacquet.* Idem autem cylindrus circumscriptus æquatur cylindro  $BP$ . Nam cum sint quatuor continue proportionales  $BC, LN, R, CP$ , erit vicissim  $BC.R :: LN.CP$  per 16. l. 5. *Eucl.* Sed  $BC.LN :: \overline{BC}^2 . \overline{LN}^2$  per 2. l. 12. *Eucl.* ergo erit  $BC$  ad  $LN$ , basis ad basim, ut  $LN$ , vel  $EG$  altitudo cylindri  $GF$  ad  $CP$  altitudinem cylindri  $BP$ ; ergo hi duo cylindri æquantur per 15. l. 22. *Eucl.* proinde etiam sphæra  $M$ , & cylindrus  $BD$  æquabuntur, cum ambo sint  $= \frac{2}{3}$  æqualium cylindrorum  $BP, GF$ . Quod &c.

## A P P E N D I X.

### *De constructione problematum solidorum.*

CUM toties in hoc tractatu de resolutione problematum solidorum per curvas obtinenda mentio facta sit, abs re non erit hoc loco de illa breve aliquod specimen exhibere. Cum autem nulla sit methodus, quantum ego opinor, Cartesiana brevior, aut facilior, quæ nimirum circulum duntaxat, & parabolam adhibet; hanc ipsam ex Cl. Halleii (a) annotatis explicare conabimur, præmissis, quæ ad rei intelligentiam viam sternunt. Hæc autem methodus secundum terminum ex æquatione sublatum petit.

DE-

---

(a) In *Transact. Anglicanis* n. 183. p. 335.

## DEFINITIONES.

I. **C**urva Algebraica illa dicitur, quæ per æquationem Algebraicam defini potest; vel illa, in qua per lineas rectas explicari potest ratio, quam singula curvæ puncta ad axem, vel diametros dicunt. Sic in circulo  $AMB$  (*Fig. 31.*) ex quovis diametri puncto  $P$  ducta perpendiculari  $PM$ , ponatur  $AB = a$  &  $AP = x$ ; erit  $BP = a - x$ : sit  $PM = y$ ; erit  $\overline{MP}^2 = AP \times PB$  per *Prop. 35. lib. 3. Eucl.*, hoc est  $yy = ax - xx$ , & cum talis æquatio, seu circuli proprietas semper eadem reperitur ex quocumque diametri puncto ducatur perpendicularis  $PM$ , dicitur æquatio circuli, & ipse circulus curva algebraica, licet ob summam in ejus descriptione facilitatem tanquam figura plana consideretur. Perpendicularis  $PM$  dicitur *semiordinata*, seu *applicata* ad axem, vel ad diametrum  $AB$ , portio vero diametri  $AP$  dicitur *abscissa*. Utraque quantitas dicitur *variabilis*, quia utraque crescit & decrefcit; adeoque exprimi solent per  $x$  &  $y$ . *Semidiameter* vero circuli, & in Parabola aliisque curvis *latus rectum*, seu *parameter* dicuntur quantitates *constantes*: nam aliis crescentibus, vel decrefcntibus, ipsæ eadem manent.

II. *Parabola* est curva algebraica (*Fig. 32.*) in qua semiordinatæ quadratum æquatur factò ex abscissa in parametrum. Sit Parabola  $BAC$ , cujus vertex punctum  $A$ , recta  $AD$  indefinite producta *axis*,  $AL$  *latus rectum*, seu *parameter*: perpendiculares ad axem  $PM$ ,  $pm$ , dicuntur *semiordinata*;  $AM$ , vel  $Am$  *abscissa*. Quælibet vero recta  $ON$ , vel  $PQ$  axi  $AD$  parallela dicitur *Parabole diameter*.

Ponatur semiordinata  $PM = x$ , & abscissa  $AM = y$ , parameter  $AL = a$ : cum ex *Propos. 11. l. b. 1.*

*Conic. Apollonii* fit  $\overline{MP}^2 = AVXAL$ , erit  $xx = ay$ : quæ quidem est proprietas & natura Parabolæ, quæ per talem equationem algebraicam designatur.

*COROLL.* Est ergo  $x = \sqrt{ay}$ , hoc est semiordinata  $MP$  est media proportionalis inter parametrum  $AL$  & abscissam  $AM$ . Nam  $a. x :: x. y$ : unde  $x = \sqrt{ay}$ .

## P O R I S M A I.

*Parabolam in plano describere. Fig. 33.*

**S**int in eodem plano duæ rectæ  $AZ$  &  $BX$  indefinite productæ, & ad angulos rectos sibi invicem occurrentes in  $A$ . Sumatur in  $AZ$  parametri longitudo  $AD$ , & in  $BX$  axis  $AB$ . Tum ex puncto  $D$  ducatur  $DE$  axi  $AB$  parallela. Postea sumantur aliæ duæ rectæ  $AR$  &  $CT$ , quarum prior  $AR$  circa punctum fixum  $A$  revolvatur, altera vero  $CT$ , servato semper ad axem  $AB$ , vel ad diametrum  $DE$  situ parallelo, progrediatur in rectam  $AZ$ ; quæ rectæ tamen sic moveantur, ut jugiter sit  $DF = AC$ . Nam si notentur puncta intersectionum duarum illarum rectarum  $AR$  &  $CT$ ; prodibit curva quæsitæ, quam dico esse Parabolam.

*Demonstr.* Ex aliquo curvæ puncto  $M$  ducatur recta  $MP$  parallela rectæ  $AD$ , & ad axem  $AB$  ordinata.; erit  $MP = AC$ , &  $CM = AP$  per *Prop. 44. lib. 1. Eucl.* Jam vero ob triangula similia  $FAD$  &  $MAC$  est  $AD . DF$  ( seu  $AC$  ex constructione ) ::  $AC . CM$ , seu  $AP$ . Habetur ergo  $AC$ , seu  $PM$  ( $= x$ ) media proportionalis inter  $AD$  parametrum ( $= a$ ), & abscissam  $AP$  ( $= y$ ); proinde  $x^2 = ay$ : ideoque curva  $AFL$  est Parabola ex *Defin. 2. hujus*.

SCHOL.

SCHOL. *Ad praxim loco rectarum AR & CT, quas modo explicato moveri concipimus, apponi solent duæ regulæ mobiles, quarum prima circa clavum in A fixum revolvatur, altera in situ ad axem parallelo progrediatur; ex quarum mutua interfectione habentur puncta pro descriptione Parabolæ, ut Fig. 34. satis ostendit.*

P O R I S M A II.

*Parabolam in plano alia ratione describere.*

Fig. 35.

**P**arabolæ parameter  $AL$  producat in  $N$ , & ex puncto  $A$ , quod erit Parabolæ vertex, elevetur perpendicularis indefinita  $AO$ . Deinde sumptis in  $NL$  centris quocunque pro arbitrio (circino tamen utique ad  $L$  aperto) fiant arcus rectam  $AO$  intersecantes in punctis  $M, M, M$ , tum etiam rectam  $AN$  in punctis  $P, P, P$ . Patet, quamlibet ex his  $AM$  esse mediam proportionalem inter datam parametrum  $AL$ , & abscissas  $AP, AP, AP$  per *Coroll. Prop. 13. l. 6. Eucl. ex Tarquet.* Igitur positis pro parametro  $AL$ , &  $AQ$  pro axe Parabolæ describendæ, si abscissæ  $AP, AP, AP$  transferantur in axem  $AQ$  in punctis  $1, 2, 3$  &c. & ex iisdem punctis ducantur ad axem  $AQ$  normales  $1N, 2N, 3N$  &c. quæ æquales sint ipsi  $AM, AM, AM$  &c. curva per extrema harum perpendicularium transiens erit Parabolæ  $BAC$ . Quæ quidem Parabolæ descriptio ceteris longe tutior esse censetur, cum mechanicis instrumentis, quæ plerumque vitio laborant, minus sit obnoxia. Innititur autem *Coroll. post defin. 2.* ut patet.

## PROPOSITIO I.

*Explicatur Constructionis Cartesianæ methodus.*

Fig. 36.

1. **D**escribatur Parabola  $OAN$  prr Poris. 1. aut 2. cujus vertex  $A$ , & axis  $AQ$ , parameter autem  $AL$  ponatur  $a = 1$ , & transferatur parametri dimidium  $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$  ex vertice  $A$  in  $C$ .

2. Ex puncto  $C$  secetur  $CD = \frac{1}{2} p$  in ipso axe deorsum; si in æquatione habeatur  $-p$ : vel sursum retrogrediendo versus  $A$ ; si fuerit  $+p$ , & producendo (si opus sit) axem ad partes ipsius  $A$ . Quod si punctum  $p = 0$ , hoc est si æquatio termino careat; tunc  $CD$  non ducitur.

3. Ex puncto  $D$  (vel ex  $C$ , si desit  $CD$ ) erigatur ad axem perpendicularis  $ED = \frac{1}{2} q$  dextrorsum quidem, si fuerit in æquatione  $-q$  (ut in hac figura); at sinistrorsum, si fuerit  $+q$ ; erit  $EA$  radius circuli describendi.

4. Centro  $E$  cum intervallo  $AE$  describatur circulus, qui Parabolam secat in punctis  $O, B, N$ , ex quibus ducta ad axem perpendiculara  $OP, BC, \& FN$  dant radices æquationis quæsitæ; hoc est, quæ sunt ad axis dexteram, ut  $FN$ , semper sunt veræ, quæ vero ad sinistram, ut  $BC, \& OP$ , sunt falsæ. Hæ simul sumptæ radicem veram  $FN$  æquare debent, cum æquatio cubica secundo termino careat, ut supponitur. At quæ sequuntur exempla, rem clare ostendunt.

SCHOL. Ratio hujus methodi a locorum geometricorum doctrina pendet, quæ docet modum combinandi circulum cum Parabola, ceterisque sectionibus conicis, sub-

latis

*latis incognitarum secundis terminis. Sed Cartesius rem dissimulavit sola praxi contentus. Nos digitum ad fontem tantummodo intendimus, ne propositæ appendicis limites transgrediamur.*

PROPOSITIO II.

*Æquationum Cubicarum constructio exemplis illustratur. Fig. 37.*

I. **C**onstruenda sit æquatio  $x^3 - px - q = 0$ .  
 Describatur Parabola per Porif. 1. vel 2.  $OAN$ , cujus parameter  $AL$  sit  $a = 1$ , vertex  $A$ , & axis  $AQ$ . Sumatur  $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$ , &  $CD = \frac{1}{2} p$ . Deinde elevetur ex puncto  $D$  perpendicularis  $ED = \frac{1}{2} q$  dextrorsus quidem ob  $-q$ ; & centro  $E$  cum intervallo  $EA$  describatur circulus  $OAN$ , qui secabit Parabolam in punctis  $O, B, \& N$ , ex quibus ducta perpendiculara  $OP, BC, FN$  dant propositæ æquationis radices, duas quidem falsas  $OP$  &  $BC$  ad sinistram axis, & tertiam  $FN$  veram ad dexteram, quæ duabus prioribus æquatur.

*Demonstr.* Sit  $FN = x$ , ut supponitur; abscissa  $AF = y$ , & parameter  $AL = 1$ , erit ex natura Parabolæ  $\overline{FN}^2 = AF \times AL$ , hoc est  $x^2 = 1y$  per *Defin.* 2. unde  $AF = x^2$ , &  $FD$  (seu  $EM$ )  $= AF - AC - CD = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p$ . Item  $MN = FN - FM$  (seu  $DE$ )  $= x - \frac{1}{2} q$ ; adeoque in triangulo rectangulo  $EMN$  erit  $\overline{EN}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MN}^2 = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$ .  
X 3 Simi.

Similiter in triangulo rectangulo  $ADE$  erit  $\overline{AE}^2$   
 $= \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$ .

Ex radiorum autem  $AE$ ,  $EN$  æqualitate habetur æquatio; proinde deletis utrinque terminis similibus, remanet.

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

Quod si sumatur aliqua ex radicibus falsis v. g.  $OP = -x$ , eadem manet demonstratio. Nam sit abscissa  $AP = y$ , semiordinata  $OP = -x$ , parameter  $AL = 1$ ; erit ex natura Parabolæ per *Defin. 2.*

$\overline{OP}^2 = AP \times AL$ , hoc est  $x^2 = 1y$ : unde  $AP = x^2$ .

Est autem  $PT = DE$  ( $= \frac{1}{2} q$ ); unde  $OT$  ( $= OP$

$+ PT$ )  $= -x + \frac{1}{2} q$ , &  $AD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p$ :

proinde  $DP$  ( $= DA - AP$ )  $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p - x^2$ .

Jam in triangulo rectangulo  $ETO$  est  $\overline{EO}^2 = \overline{OT}^2$   
 $+ \overline{ET}^2$  seu  $\overline{DP}^2 = x^4 - px^2 - qx + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$

$pp + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$ . Item in triangulo rectangulo

$EDA$  est  $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} pp +$

$\frac{1}{4} qq + \frac{1}{4}$ ; adeoque ob radiorum  $EO$  &  $AE$  æqualitatem habetur æquatio; deletis proinde utrinque terminis similibus, remanet

$$x^4 - px^2 - qx = 0$$

$$x^3 - px - q = 0$$

II. Sit æquatio construenda  $x^3 + px - q = 0$ , seu  $x^3 + 3x - 6 = 0$ . Descripta Parabola (Fig. 38.)  $NAM$ , cujus axis  $AO$ , vertex  $A$ . Assumpta parametro  $= 1$ , secetur  $AC = \frac{1}{2}$ , & sumatur  $CD (= \frac{1}{2} p) = \frac{3}{2}$  supra punctum  $A$ , cum adsit in æquatione  $+ p$ . Elevata deinde perpendiculari ad axem  $ED (= \frac{1}{2} q) = 3$ , dextrorsum ob  $-q$ , fiat centrum in  $E$ , & intervallo  $EA$  describatur circulus  $EAM$ , qui Parabolam secat in unico puncto  $M$ , ex quo ducta normalis  $PM$  ad axem dat radicem veram  $PM$ .

*Demonstr.* Producta  $PM$  in  $F$ , cui occurrat perpendicularis  $EF$  demissa ex puncto  $E$ , quæ parallela, & æqualis erit ipsi  $DP$ , ut patet; sit  $AC = \frac{1}{2}$ ,  $CD = \frac{1}{2} p$ ,  $ED = PF = \frac{1}{2} q$ ,  $PM = x$ ,  $AP = y$ , & parameter  $= 1$ . Erit  $FM (= PF - PM) = \frac{1}{2} q - x$ , &  $DA (= DC - AC) = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$ .

Jam ex natura Parabolæ  $\overline{PM} = 1 \times AP$ , hoc est  $xx = 1y$ ; unde  $AP = xx$ , &  $PD (= PA + AD) = xx + \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$ . Ob duo triangula rectangula

$$EDA, EFM \text{ est } \overline{AE} = \overline{ED} + \overline{AD} = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} pp - \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$$

$$\text{X } \overline{EM} = \overline{EF} + \overline{MF} = x^2$$

$= x^4 + px^2 - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ , sed  $EA$  &  $EM$  sunt æquales; ergo & eorum quadrata: proinde habetur æquatio; & deletis terminis similibus utrinque, remanet

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 - qx &= 0 \\ x^3 + px - q &= 0 \end{aligned}$$

Subrogatis autem valoribus  $p$ ,  $q$ , erit  $x^3 + 3x - 6 = 0$ .

**COROLL.** Ubi circulus Parabolam non secat (ut in hoc casu) nisi in unico puncto, signum, est alias duas æquationis datæ radices esse imaginarias. Quod optime convenit cum iis, quæ diximus in Propos. 4. Cap. 9. nimirum duas radices imaginarias haberi, si in æquatione fuerit  $+p$ .

III. Construenda sit æquatio  $x^3 + px + q = 0$ , seu  $x^3 + 1x + 1 = 0$ . Describatur Parabola (Fig. 39.) cujus parameter  $= 1$ , vertex  $A$ , axis  $AR$ . Secetur  $AC = \frac{1}{2}$ , & a puncto  $C$  versus  $A$  sumatur  $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$ . Punctum  $D$  cadit præcise in  $A$ , & ex puncto  $A$ , vel  $D$  ducatur perpendicularis  $AE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$  sinistrorsus ob  $+q$ , factoque centro in  $E$  cum intervallo  $EA$ , fiat circulus  $EAF$  secans Parabolam in  $F$ , ex qua intersectione ducta ad axem normali  $FM$ , habetur radix falsa  $FC$  (cum sit ad axis sinistram), & aliæ duæ imaginariæ ex super. Coroll.

*Demonstr.* Sit parameter  $AL = 1$ , abscissa  $AC = y$ , & applicata  $FC$  ex hypothese  $= -x$ ; erit ex natura Parabolæ  $\overline{FC}^2 = AC \times AL$ , hoc est  $x^2 = 1y$ ,  
unde

unde  $AC$ , seu  $EN$  ( quæ ex centro  $E$  ducitur ad  $FC$  perpendicularis )  $= x^2$ , &  $ED$ , seu  $NC = \frac{1}{2}$ ;

ideoque  $FN = (FC - CN) = -x - \frac{1}{2}$ . Jam

igitur in triangulo rectangulo  $ENF$  est  $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{FN}^2$ , hoc est

$$\frac{1}{4} = x^4 + x^2 + 1x + \frac{1}{4}$$

$$x^4 + x^2 + 1x = 0$$

$$x^3 + x + 1 = 0$$

SCHOL. Si circulus Parabolam tangit, duæ intersectiones coincidunt, perinde ac illam in duobus punctis per exiguo ac fere nullo intervallo distantibus secaret, & sectiones illæ in puncto contactus coirent; adeoque tunc æquatio duas habet radices æquales. Quod si eam nec tangit, nec secat, radices omnes sunt impossibiles.

### PROPOSITIO III.

Æquationes biquadraticas construere. Fig. 40.

**D**Escrip̄ta Parabola cum parametro, vertice, & axe omnino ut in præc. Prop. factum est, debet insuper pro æquatione biquadratica construenda augeri, vel minui circuli describendi radius  $AE$ ; hoc est si in æquatione fuerit  $-r$ , additur; si fuerit  $+r$ , subtrahitur ex quadrato radii  $AE$  rectangulum  $ar$  factum ex parametro  $a$ , & ex data quantitate  $r$ . Nam circuli hujus intersectiones cum Parabola dant quæsitæ æquationis radices, veras quidem semper ad axis dexteram, falsas ad sinistram. Res fiet exemplis clarissima.

I. Construenda sit æquatio  $x^4 - qx - r = 0$ , quæ præter secundum etiam tertio termino caret. Descripta Pa-

330 DE GEOMETRICA CONSTRUCT.  
 parabola  $FAG$ , cujus latus rectum  $AL = a = 1$ , vertex  $A$ , axis  $AN$ , ex puncto  $C$  dextrorium (ob  $-q$ ) elevetur normalis  $CE = \frac{1}{2} q$ . Circuli describendi

radius  $AE$  augeri debet ob  $-r$  rectangulo  $ar$ . Igitur producat  $AE$  hinc inde indefinite, &  $AB$  secetur æqualis parametro  $AL = a$ ,  $AS = r$ . Tum descripto super  $BS$  semicirculo  $BDS$ , & ex puncto  $A$  elevata perpendiculari  $AD$  ad diametrum  $BS$ ; erit  $\overline{AD}^2 = BA \times AS = ar$ , ductaque  $ED$ , erit  $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$ . Habetur ergo  $DE$  circuli describendi radius quæsitus auctus rectangulo  $ar$ ; factoque centro  $E$  cum intervallo  $ED$ , fiat circulus  $DRG$ , qui Parabolam secabit in punctis  $R$  &  $G$ , ex quibus ducta ad axem perpendicula  $RM$  &  $NG$  dant radices æquationis propositæ,  $NG$  veram, utpote ad axis dexteram, &  $MR$  falsam ad sinistram. Ducatur ex puncto  $E$  perpendicularis  $EQ$ .

*Demonstr.* Sit  $NG = x$ , & abscissa  $AN = y$ .  $\overline{AD}^2 = AB \times AS = ar$ ; unde  $AD = \sqrt{ar}$ .  $QG = CE - NG = \frac{1}{2} q - x$ ; & ex natura Parabolæ  $\overline{NG}^2 = NA \times a$ , nempe  $x^2 = ay$ , atque hinc  $y = \frac{xx}{a} = AN$ . Si-

militer  $EQ (= AN - AC) = \frac{xx}{a} - \frac{1}{2} a$ .

Jam in triangulo rectangulo  $ECA$  est  $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa$ . Item in triangulo rectangulo  $EQG$  est  $\overline{EG}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa$ .

aa. Tandem in triangulo  $EAD$  est  $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$   
 $= \frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} aa + ar$ . Igitur ob æqualitatem ra-  
 diorum  $ED$  &  $EG$ , erit

$$ar = \frac{x^4}{a^2} - qx$$

$$x^4 - a^2 qx = ax^2$$

(ob  $a = 1$ )  $x^4 - qx = r$

$$x^4 - qx - r = 0$$

Idem demonstrari potest assumpta radice negativa  
 $RM = -x$ .

II. Sit (Fig. 41.) construenda æquatio  $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$ , seu  $x^4 - px^2 + qx + r = 0$ . Describa-  
 tur Parabola, cujus latus rectum  $a = 1$ , vertex  $A$ , &  
 axis  $AD$ , in quo secetur  $AC = \frac{1}{2}$ , &  $CD = \frac{1}{2} p$ .

Tum sinistrorsum ob  $+q$  elevetur perpendicularis  
 ad axem  $DE = \frac{1}{2} q$ . Liquet ex dictis, minuendum  
 esse ob  $+r$  circuli describendi radium rectangulo  $ar$ .  
 Proinde producta utrinque  $AE$  indefinite, secetur  
 $AB = a$ , &  $AH = r$ : tum super diametro  $BH$  de-  
 scribatur semicirculus  $HMB$ , & ex puncto  $A$  ele-  
 vetur perpendicularis  $AM$ . Similiter super  $AE$  de-  
 scribatur semicirculus  $ANE$ , in quo ducatur chor-  
 da  $= AM$ ; seu (quod idem est) secetur arcus  $AN$ ,  
 posito circino in  $A$  cum intervallo  $AM$ . Igitur in-  
 intervallum  $EN$  erit radius quæsitus circuli centro  $E$

describendi. Nam  $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$  in triangulo re-

ctangulo  $ENA$ , &  $\overline{AN}^2 (= \overline{AM}^2) = BAX AH = ar$ .

Itaque descripto sic circulo, Parabola intersecatur  
 in punctis  $G, F, P, \& Q$ , ex quibus demissæ ad  
 axem

axem normales  $Gc$ ,  $FR$ ,  $OP$ , &  $CQ$ , habentur quatuor æquationis datæ radices; duæ quidem ad axis dexteram veræ, & duæ falsæ ad sinistram.

*Demonstr.* Sumatur quælibet radix v. g.  $OP = x$ , & sit abscissa  $AO = y$ : erit ex natura Parabolæ  $\overline{OP}^2 = AO \times a$ , hoc est  $x^2 = ay$ ; atque hinc  $y = \frac{x^2}{a}$ . Deinde  $\overline{AM}^2$ , seu  $\overline{AN}^2 = BA \times AH = ar$ , unde  $AN = \sqrt{ar}$ , & in triangulo rectangulo  $ENA$  (ductis rectis  $EN$  &  $AN$ ) erit  $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} ap + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} q^2 - ar$ .

Similiter quia  $PK = x + \frac{1}{2} q$ , &  $OD$ , seu  $EK = AO - AC - CD = \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} p$ ; in triangulo rectangulo  $EKP$  erit  $\overline{EP}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + \frac{1}{2} ap + \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} p^2 + qx + \frac{1}{4} q^2$ . Igitur propter radiorum  $EP$  &  $EN$  æqualitatem habetur æquatio

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = -ar$$

Hinc posito  $a = 1$ , & subrogatis valoribus  $p$ ,  $q$ , &  $r$ ; erit  $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$ , qualis proposita fuit.

**COROLL.** *Constructiones æquationum tertii & quarti gradus fere omnino conveniunt. In hoc tamen differunt, quod in cubicis circulus transit per Parabolæ verticem, non autem in biquadraticis.*

**SCHOL. I.** *Praclara hæc Cartesii methodus id incom-*

modi nonnullis habere visa est, quod secundum æquationis terminum, si adsit, tolli jubeat. Huic molestiæ Thomas Bakerus (a) Anglus occurri posse animadvertit, si loco axis Parabolæ, uti Cartesius fecit, adhiberetur aliqua Parabolæ ipsius diameter, ad quam ducerentur ex intersectionibus Parabolæ & circuli ea perpendiculara, quæ ut vidimus, dant radices quæsitas. Hac regula, quam a ratione tradita circuli centrum determinandi, Centralem vocat, æquationes omnes cubicas & biquadraticas quomodolibet affectas & completas sine ulla prævia reductione construere docet. At vero tot illa nodis intricata est, & tot cautionibus de signis + & - obnoxia, ut remoto libro, vix possit quis omnes memoria retinere, ut Cl. Hallejus (b) testatur, qui multis annotationibus ei plurimum lucis attulit; quemadmodum deinde Christophorus Sturmus (c) & Wolfius (d) fecerunt, apud quos videant, qui volunt.

SCHOL. II. Sicuti Parabolam & circulum mutuo intersecari vidimus, & inde obtineri datarum tertii & quarti gradus æquationum radices, ita circulus cum ellipti, vel hyperbole, aut duæ quælibet ex iisdem conicis sectionibus pari ratione combinari possunt ad problemata cujuscunque gradus construenda, quemadmodum Dn. de la Hire (e) & Marchio (f) Hospitalis egregie fecerunt. Nos duas medias continue proportionales ex duarum Parabolæ intersectione mox inveniemus. Menechmus id primus docuit.

PRO.

---

(a) Clavis Geometrica Cathol. Londini 1684. (b) Trans. Anglic. n. 188. p. 135. an. 1687. (c) Mathes. enucl. p. 349. (d) Construct. æquat. probl. 254. (e) Sections Coniques liv. 9. & 10. (f) Construct. des æquat. Analyt.

Inter datas  $a$  &  $q$  duas medias proportionales invenire.

Fig. 42.

I. Sit prior quæsitæ  $= x$ , erunt quatuor continue proportionales  $a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2}$ ; proinde  $\frac{x^3}{a^2} = q$ ,

&  $x^3 = aaq$ , seu  $x^3 - aaq = 0$ .

Vel sic: sit prior quæsitæ  $= x$ , altera  $= y$ . Quoniam ex hypothesi  $\therefore a \cdot x \cdot y \cdot q$  sunt continue proportionales; erit  $a^2 \cdot x^2 \therefore x \cdot q$  per Coroll. Prop. 20. l. 6. Eucl. adeoque  $x^3 = aaq$ , seu  $x^3 - aaq = 0$ , ut prius.

Pro constructione descripta Parabola  $FAP$ , cujus parameter  $a = 1$ , vertex  $A$ , & axis  $AQ$ , secetur  $AC = \frac{1}{2}$ , & ex puncto  $C$  elevetur normalis  $CE = \frac{1}{2} q$  dextrorsum quidem ob  $-q$ . Tum centro  $E$  cum intervallo  $AE$  describatur circulus  $EAP$ , Parabolam secans in puncto  $P$ ; erit applicata  $PM$  radix quæsitæ  $= x$ .

Demonstratio a ceteris non differt, ductis recta  $EP$ , & perpendicularo  $EN$ . Nam sit parameter  $= a$ ,  $AC = \frac{1}{2} a$ ,  $EC = \frac{1}{2} q$ ,  $AM = y$ , &  $MP = x$ ; erit  $PN (= PM - MN) = x - \frac{1}{2} q$ . Cum autem

ex natura Parabolæ sit  $AM \times a = \overline{PM}^2$ ; hoc est  $ay = xx$ , erit  $y = \frac{xx}{a}$ ; adeoque  $AM = \frac{xx}{a}$ , &  $MC$ , seu  $EN$

$(= AM - AC) = \frac{xx}{a} - \frac{1}{2} a$ . Jam in triangulo rectan-

gulo  $ENP$  est  $\overline{EP}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{PN}^2 = \frac{x^4}{a^2} - qx + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$ ;

$qq$  ; eademque ratione in triangulo rectangulo  $ACE$  est  $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$ , quæ duæ æquationes sunt æquales ob æqualitatem radiorum ejusdem circuli  $EP$  &  $AE$  ; proinde æqualibus utrinque detractis, remanet

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{a^2} - qx &= 0 \\ x^4 - aaqx &= 0 \\ x^3 - aaq &= 0 \end{aligned}$$

**COROLL.** *Hinc habetur modus inveniendi inter duas datas tot medias proportionales, quot volueris. Sint datae  $a$  &  $q$ , & quæsitæ primæ  $x$ . Continuetur*

*progressio geometrica ::  $a \cdot x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2} \cdot \frac{x^4}{a^3} \cdot \frac{x^5}{a^4} \cdot \frac{x^6}{a^5}$  &c. &c.*

*numerus terminorum, qui binario superat quæsitum proportionalium numerum, fiat equalis alteri quantitati datæ  $q$ . Sic ut habeantur tres mediæ proportionales,*

*fiat  $\frac{x^4}{a^3} = q$ , unde erit  $x^4 = a^3q$ . Item si quærantur quatuor proportionales mediæ, fiat  $\frac{x^5}{a^4} = q$  ; erit  $x^5 =$*

*$a^4q$  & sic de ceteris.*

II. Sint, ut prius, datæ  $a$  &  $q$ , inter quas inveniendæ sint duæ mediæ proportionales  $x$  &  $y$  ; erit  $a \cdot x :: x \cdot y$ , unde  $ay = x^2$ . Similiter  $x \cdot y :: y \cdot q$ , adeoque  $qx = y^2$ , quæ duæ æquationes Parabolæ naturam exprimunt ex *Defin. 2. hujus*. Ex prima ha-

betur  $y = \frac{x^2}{a}$  ; quo valore posito in secunda, oritur

$qx = \frac{x^4}{a^2}$ , atque hinc  $x^3 = aaq$ , seu  $x^3 - aaq = 0$ ,

ut superius.

*Pro Construct.* ( *Fig. 43.* ) secent se ad angulos rectos in  $A$  duæ rectæ  $DB$  &  $EC$ . Secetur  $AB = a$  datarum priori, &  $AC = q$  alteri datæ. Tum super axe  $AD$  cum parametro  $AB$  describatur Parabola  $AMP$ . Item super axe  $AE$  cum parametro  $CA$  describatur Parabola  $AMN$ ; & ex punctis intersectionum ducantur ad suos axes semiordinatæ  $MP$  &  $MN$ ; erunt  $AN$  &  $AP$  duæ mediæ proportionales quæsitæ, hoc est  $AB \cdot AN :: AN \cdot AP :: AP \cdot AC$ .

*Demonst.* Sit  $AN (= PM) = x$ , &  $AP (= MN) = y$ , æquatio ad Parabolam  $AMP$  est  $\overline{PM}^2 = AP \times AB$ , hoc est  $x^2 = ay$ . Eadem ratione æquatio ad Parabolam  $MAN$  est  $\overline{MN}^2 = AN \times AC$ , hoc est  $y^2 = qx$ . Cum igitur ex priori habeatur  $a \cdot x :: x \cdot y$ , ex altera vero  $x \cdot y :: y \cdot q$ , evidens est, in continua esse ratione  $a \cdot x \cdot y \cdot q$ , nempe  $AB \cdot AN \cdot AP \cdot AC$ . Quod &c.

**COROLL.** *Ex inventione duarum proportionum mediarum sequitur celebratissima cubi duplicatio, quæ tamdiu veterum Geometrarum mentem exercuit. Sint enim in continua proportione  $a \cdot x \cdot y \cdot q$ , seu (positis  $a = 1$  &  $q = 2$ )  $1 \cdot x \cdot y \cdot 2$ . habebit prima 1 ad quartam 2 rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima 1 ad secundam  $x$  per Defin. 10. lib. 5. Eucl. Sed cubus ex prima 1 ad cubum ex secunda  $x$  habet pariter rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima 1 ad secundam  $x$ , hoc est, quam habet 1 ad 2 per Propos. 33. lib. 11. Eucl. ergo cubus ex secunda  $x$  duplus est cubi dati 1.*

**SCHOL.** D. Guido Grandus ( *a* ) celeberrimus in Academia Pisana Matheseos Professor Mesolabium expeditissimum pro inventionem duarum mediarum inter duas datas publicavit Florentiæ anno 1728. cujus ope non mo-

do

---

(*a*) Flores Geometrici in Appendice.

do duplicatio cubi, sed anguli quoque trisectio, divisio sphaerae in partes datae rationis, & omne prorsus problema solidum potest facillime solvi.

P R O B L. II.

Datum angulum  $AED$ , vel arcum  $ABCD$  in tres aequales partes dividere. Fig. 44.

Supponatur divisio jam facta in punctis  $B$  &  $C$ ; erit chorda  $AB = BC = CD$ . Ducantur radii  $EA$ ,  $EB$ ,  $EC$  &  $ED$ , tum chorda  $AD$ ; at  $BN$  sit parallela radio  $CE$ .

Triangula  $AEB$ ,  $BEC$ ,  $CED$  sunt aequalia, isoscelia & similia, quod evidens est. Item triangula  $EAB$  &  $BAR$  similia sunt: nam praeter angulum  $ABR$  communem, angulo quoque ad centrum  $AEB$  aequatur angulus  $BAD$  ad circumferentiam per Prop. 20. lib. 3. Eucl. cum subtendat arcum duplum: unde  $EB$ , seu  $EA$ .  $AB :: AB$ .  $BR$ : & cum triangulum  $AEB$  sit isoscele; erit quoque  $BAR$  isoscele; proinde  $AB = AR$ . Idem omnino demonstrari potest de triangulo  $DEC$  respectu trianguli  $CMD$ , quod pariter est isoscele: unde  $CD = MD$ .

Jam in isoscele  $BAR$  anguli  $ABR$  &  $ARB$  ad basim aequantur, itaque angulus  $CBE$  ( $= ABR$ )  $= BRA$ , seu  $MRE$  ad verticem, ideoque  $BC$  &  $RM$  sunt parallelæ. At vero triangula  $ABR$  &  $BRN$  sunt æquiangula: nam praeter angulum communem  $BRN$  angulus quoque  $NBR =$  (ob parallelas  $BN$ ,  $CM$ )  $CEB = BEA = BAR$ , & tertius  $ABR = BNR$  tertio. Cum autem triangulum  $ABR$  sit isoscele; erit quoque  $NBR$  isoscele; hinc  $BN = BR$ , & ob triangulorum similitudinem  $AR$ , seu  $AB$ .  $BR :: BR$ .  $RN$ . Erat autem  $EA$ .  $AB :: AB$ .  $BR$ ; sunt ergo in continua ratione  $EA$ .  $AB$ .  $BR$ .  $RN$ .

Sit jam radius  $EA = 1$ , chorda  $AB = x$ , erunt quatuor termini continuo proportionales  $1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3$ . At quia in ifoscele  $BAR$  est  $AB = AR$ , item in ifoscele  $CDM$  est  $CD = MD$ , in parallelogrammo autem  $NC$  est  $BC = NM$ ; sequitur, chordam  $AD$  (quam voco  $q$ ), addita  $NR$ , æqualem esse tribus rectis  $AB, BC \& CD$ ; hoc est  $AD + NR = AB + BC + CD$ ; proinde  $q + x^3 = 3x$ . Habetur ergo æquatio  $x^3 - 3x + q = 0$ .

*Constr.* Describatur Parabola (Fig. 45.)  $MAN$ , cujus parameter  $AL$  sit  $a = 1$ , vertex  $A$ , & axis  $AQ$ , in quo secentur  $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ , &  $CD (= \frac{1}{2}p) = \frac{3}{2}$ . Tum ex puncto  $D$  elevetur normalis ad

axem  $DE = \frac{1}{2}q$  ad sinistrum axis latus ob  $+q$ .

Factoque centro  $E$  cum intervallo  $EA$  fiat circulus  $EANM$  secans Parabolam in punctis  $P, N \& M$ ; ex quibus ad axem applicata  $PT$  est æqualis chordæ quæsitæ  $AB = BC = CD$ . At  $RN$  est radix æqualis chordæ  $AF$ , quæ tripartito dividit alterum arcum  $AFD$ . Tertia  $MQ$  est radix falsa duabus  $PT \& RN$  veris æqualis.

*Demonstr.* Sit abscissa  $AT = y$ , & semiordinata  $TP = x$ , parameter  $AL = 1$ ; erit ex natura Parabolæ  $\overline{TP}^2 = AT \times AL$ , hoc est  $x^2 = 1y$ : unde  $AT = x^2$ . Est autem  $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ ;

& in triangulo rectangulo  $AED$  est  $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 = 4 + \frac{1}{4}qq$ .

Deinde  $DT (= EG) = DA - AT = 2 - x^2$ , &  $GP = GT$  (seu  $ED$ )  $+ TP = \frac{1}{2}q + x$ ; proinde

inde in triangulo rectangulo  $EGP$  est  $\overline{EP}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GP}^2$   
 $= 4 - 4x^2 + x^4 + x^2 + qx + \frac{1}{4} qq$  ; adeoque ob  
 radiorum  $EP$  &  $AE$  æqualitatem oritur æquatio

$$4 + \frac{1}{4} qq = x^4 - 3x^2 + qx + 4 + \frac{1}{4} qq$$

$$x^4 - 3x^2 + qx = 0$$

$$x^3 - 3x + q = 0$$

**COROLL.** *Hinc liquet, oleum & operam perdere Geometrie tirones, dum anguli trisectioni per lineam rectam & circulum inveniendæ insudant, cum sit problema solidum.*

P R O B L. III.

*In Æquationibus cubicis usus præc. problematis peculiaris ostenditur.*

**S**It æquatio cubica  $x^3 - px - q = 0$ , in qua cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major sit quadrato ex femisse ultimi termini, hoc est  $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$  ; tunc erunt tres radices reales & inæquales per *Propos. 1. num. 2. Cap. 9.*, quæ quidem per Algebram obtineri non possunt, & occurrit casus ille *Irreducibilis* de quo diximus in *Schol. 3. Prop. 9. Cap. 9.* Adhibitis enim Cardani formulis, æquationis radix, quæ realis esse debet, per quantitates imaginarias exprimitur, quod est absurdum. At vero per subtensas arcuum, seu per anguli trisectionem æquationis ejusdem radices opportune designantur modo nunc explicando *Fig. 44.*

Radio  $AE = \sqrt{\frac{1}{3} p}$ , qui sit proportione medius inter quantitatis cognitæ  $p$  trientem & unitatem

Vide Schol. Probl. 7. Cap. 12. ) describatur circulus

$ADF$ , in quo ducatur chorda  $AD = \frac{3q}{p}$ ; quæ nempe fit ad datam quantitatem  $q$ , ut 1 ad  $\frac{1}{3}p$ , adeoque obtinebitur, si fiat ut  $\frac{1}{3}p \cdot 1 :: q \cdot \frac{3q}{p}$ . De-

inde supponatur divisus arcus  $ABCD$  in tres æquales partes  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  per *Probl. præc.* ita ut  $AB$ , vel  $BC$ , aut  $CD$  sit  $= -x$ : patet enim ex signis, in data æquatione haberi duas radices falsas, & unam veram. Cum triangula  $AEB$ ,  $BAR$  &  $RBN$  similia sint, erit  $AE (\sqrt{\frac{1}{3}p}) \cdot AB(-x) :: AB(-x) \cdot$

$$BR \left( \frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} \right) :: BR \left( \frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} \right) \cdot RN \left( \frac{x^4}{-\frac{1}{3}px} \right) =$$

$-\frac{x^3}{\frac{1}{3}p}$ . Est autem recta  $AD + NR = AB + BC + \frac{1}{3}p$ , ut in *præc. Probl.* vidimus; proinde  $\frac{3q}{p} - \frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = -3x$ , atque hinc  $\frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = 3x - \frac{3q}{p}$ , hoc est  $x^3 = px + q$ , seu  $x^3 - px - q = 0$ .

Descripta igitur Parabola  $OAN$  (*Fig. 37.*) per *Porif. 1. aut 2.* tum etiam circulo  $ENO$ , qui eam secat in punctis  $O$ ,  $B$ ,  $N$ , si ex his applicentur ad axem rectæ  $BC$ ,  $OP$  &  $FN$ , prodibunt radices æquationis datæ, nimirum  $BC$  æqualis chordæ  $AB = -x$ ,  $OP$  æqualis chordæ  $AF = -x$ , &  $FN = x$ ; quæ quidem est vera, & duabus prioribus (ad sinistram positis) falsis æqualis. Itaque catus in Algebra Irreducibilis ex Geometria per anguli trisectionem facile solvitur.

SCHOL. Albertus Girardus (a) hanc methodum, cuius est auctor, fuse demonstrat, quam Nic. de Martino (b) in Neapolitano Lyceo Regius Mathematicæ Professor egregie contraxit.

P R O B L. IV.

*Questionem Pappi resolvere.*

P Appus Alexandrinus initio *lib. 7. Collect. Mathematic.* mentionem facit de problemate quodam perplexo, ac difficili, cuius solutionem neque Euclides, neque Apollonius invenerant. Hanc vero Cartesius (c) novo Analyseos præsidio post quinque, aut sex hebdomadas extricavit, ibique Geometriæ suæ initia auspicatus est, ubi veteres terminum sibi statuerant. Infinitos autem casus quæstio illa complectitur: ex quibus nos unum vel alterum ex facillioribus, quique per circulum & parabolam construi possint, expendemus, ne tirones tam famosæ quæstionis notitia diutius lateat. En igitur, qualis a Cartesio (d) luculenter exponitur, quæ a Pappo tantum fuerat verbis subobscuris indicata.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis, quæritur primo punctum, a quo totidem aliæ rectæ lineæ singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum datarum, si sint quatuor; aut si quinque sint, ut parallelepipedum

Y 3

dum

---

(a) Invention Nouvelle en l'Algebre an. 1629. Vid. Fr. a Schooten in Append. de Cubic. æquat. resolut.

(b) Nova Algeb. Elem. lib. 2. Cap. 7. num. vi.

(c) Epist. 71. Tom. 1. (d) Geometr. lib. 1. pag. m. 10.

dum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur, & alia quadam data. Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum &c. Atque ita porro quæstionem hanc ad omnem alium linearum numerum extendere licet.

I. Datae sint ( *Fig. 46.* ) quinque rectæ inter se parallelæ *Aa, Bb, Dd, Ee, Ff*, quæritur punctum *C*, ex quo si ad quinque rectas datas ducantur *CA, CB, CD, CE, CF*, quæ cum prioribus faciant angulum datum gr. 80., parallelepipedum sub *CA X CD X CE* sit ad parallelepipedum sub *CB X CF*, & recta data  $2a$ , ut 2 ad 1.

Esto factum: & quia datis parallelis datur quoque earum distantia, seu rectæ *AB, BD, DE*; sint hæ singulæ =  $a$ ,  $EF = \frac{1}{2} a$ , &  $CB = x$ : erit  $CA = x + a$ ,  $CD = x - a$ ,  $CE = x - 2a$ ,  $CF = x - \frac{1}{2} a$ . Atque hinc erit ex conditione problematis

$$\begin{aligned} x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 &: 2ax^2 - 5a^2x :: 2 : 1 \\ x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 &= 4ax^2 - 10a^2x \\ x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 2a^3 &= 0 \end{aligned}$$

Hæc autem æquatio cum per nullum binomium dividi possit, tolli debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construi possit. Fiat igitur  $x - 2a = y$ ; erit  $x = y + 2a$ , factaque terminorum substitutione, oritur æquatio secundo termino carens per *Prop. 5. Cap. 6.*

$$y^3 - 3a^2y + 4a^3 = 0$$

Hinc ex formula generali  $y^3 - py + q = 0$ , erit  $-3a^2 = -p$ ,  $4a^3 = q$ , descriptaque parabola cum para-

rametro  $a = 1$ , tum etiam circulo omnino, ut in *Propos. 1. hujus* factum est, inveniatur  $y$ , cui si addantur  $2a$ , innotescet punctum  $x (= y + 2a) = BC$ . Ducta jam  $Cc$  ceteris  $Aa, Bb$  &c. parallela, ex quovis puncto ejusdem ducantur rectæ datas parallelas in angulo dato secantes, solvitur quæstio.

II. Datae sint (*Fig 47.*) positione septem parallelæ, quarum sit æqualis distantia  $= a$ , quæ faciant quemcunque angulum cum recta  $AG$ : quæritur punctum  $M$ , ita ut solidum  $MC \times MA \times ME \times MG = MD \times MB \times MF \times 4a$ . Sit  $MD = x$ ; erit  $MC = x + a$ ,  $MB = x + 2a$ ,  $MA = x + 3a$ ,  $ME = MD - DE = x - a$ ,  $MF = FE + ED - DM = 2a - x$ ,  $MG = GD - DM = 3a - x$ . Atque hinc oritur æquatio

$$-x^4 + 10a^2 x^2 - 9a^4 = 16a^3 x - 4ax^3$$

$$x^4 - 4ax^3 - 10a^2 x^2 + 16a^3 x + 9a^4 = 0$$

Quæ quidem cum per nullum binomium dividi possit, auferri debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construatur. Itaque sumatur  $x - a = y$ ; erit  $x = y + a$ , & per *Prop. 5. Cap. 6.* oritur æquatio secundo termino carens

$$y^4 - 16a^2 y^2 - 12a^3 y + 12a^4 = 0$$

Et comparatis hujus terminis cum formula generali, erit  $-16a^2 = -p$ ,  $-12a^3 = -q$ ,  $+12a^4 = r$ . Proinde facile construatur per *Prop. 3. hujus*, & inveniatur  $y$ , cui si addatur  $+ a$ , innotescet punctum quæsitum  $x = y + a$ , a quo ducta  $Mm$  ceteris  $Aa, Bb, Cc$  &c. parallela, ex quocunque illius puncto ducatur recta parallelas  $Aa, Bb, Cc$  &c. secans in angulo dato; erit problema solutum.

F I N I S.

# I N D E X

## CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones. pag. 1

### C A P U T I.

#### De Calculo Integrorum.

Prop. I. <i>Quantitates simplices addere.</i>	pag. 3
Prop. II. <i>Quantitates simplices subtrahere.</i>	ib.
Prop. III. <i>Quantitates simplices multiplicare.</i>	4
Prop. IV. <i>Quantitates simplices dividere.</i>	5
Lemma. <i>Quantitates complexas ad simpliciores expres- siones reducere.</i>	6
Prop. V. <i>Quantitates compositas addere.</i>	ib.
Prop. VI. <i>Quantitates compositas subtrahere.</i>	7
Prop. VII. <i>Quantitates complexas multiplicare.</i>	8
Prop. VIII. <i>Quantitates complexas dividere.</i>	11
Prop. IX. <i>Data quantitatis divisores omnes invenire.</i>	14

### C A P U T II.

#### De Calculo Fractorum.

Axiomata.	pag. 18
Prop. I. <i>Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.</i>	19
Prop. II. <i>Fractiones ad simpliciozem expressionem redu- cere.</i>	ib.
Prop. III. <i>Fractiones ad eandem denominationem re- ducere.</i>	20
Prop. IV. <i>Additio &amp; subtractio fractionum.</i>	21
Prop. V. <i>Fractiones multiplicare.</i>	24
Prop. VI. <i>Fractiones dividere.</i>	26
	Prop.

- 345
- Prop. VII. *Polynomium cum fractionibus dividere.* p.28
- Prop. VIII. *Valorem fractionis, cujus denominator est terminus compositus, per infinitos terminos designare.* 31

## A P P E N D I X

### De Fractionibus Decimalibus .

Definitiones .	pag. 33
Prop. I. <i>Decimales addere, &amp; subtrahere.</i>	36
Prop. II. <i>Decimales multiplicare.</i>	37
Prop. III. <i>Decimales dividere.</i>	38
Prop. IV. <i>Fractionem quamcunque in partes decimales reducere.</i>	40
Prop. V. <i>Decimales particulas ad fractionem data denominationis reducere.</i>	ib.

## C A P U T III.

### De Calculo Exponentiali .

Definitiones .	pag. 42
Prop. I. <i>Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare, aut dividere.</i>	44
Prop. II. <i>Potestatem quamcunque ad aliam dati exponentis elevare.</i>	45
Prop. III. <i>Binomium ad quamcunque potentiam elevare.</i>	46
Prop. IV. <i>Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quamcunque elevando assignare.</i>	50
Prop. V. <i>Potestates compositas multiplicare.</i>	51
Prop. VI. <i>Potestates compositas dividere.</i>	52
Prop. VII. <i>Ex potestatibus radicem extrahere.</i>	53
Prop. VIII. <i>Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.</i>	55
Prop. IX. <i>Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.</i>	57
	Prop.

- Prop. X. Radices quascunque extrahendi methodum generalem assignare. pag. 59  
 Prop. XI. Extractiones radicum per infinitos terminos continuare. 62

## C A P U T IV.

### De Calculo Radicali.

- Definitiones. pag. 66  
 Prop. I. Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere. 68  
 Prop. II. Radicales ad simpliciore[m] expressionem reducere. 70  
 Prop. III. Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere. 72  
 Prop. IV. Quantitates radicales multiplicare. 73  
 Prop. V. Quantitates radicales dividere. 76  
 Prop. VI. Radicales compositas dividere. 78  
 Prop. VII. Radicales ad datam potestatem elevare. 81  
 Prop. VIII. Ex simplici radicali radicem extrahere. 84  
 Prop. IX. Ex binomio radicem quadratam extrahere. ib.  
 Prop. X. Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere. 87  
 Prop. XI. Radicales universales ad idem nomen, & ad simpliciore[m] expressionem reducere. 89  
 Prop. XII. Radicalium universalium calculus. 91  
 Prop. XIII. Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire. 93

## C A P U T V.

### De Æquationibus simplicibus.

- Definitiones. pag. 98  
 Axiomata. 99  
 Prop.

<i>Prop. I. Explicantur regulæ reductionis Æquationum.</i>	347 p. 100
<i>Prop. II. Plures simplices æquationes ad unam reducere.</i>	104
<i>Prop. III. Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.</i>	107
<i>Prop. IV. Quæstionem datam ad æquationem redigere.</i>	110
<i>Problemata.</i>	113
<i>Problem. Indeterminata.</i>	123

## C A P U T VI.

### De Æquationibus Compositis.

<i>Prop. I. Explicatur Æquationum compositarum Genesis.</i>	pag. 131
<i>Prop. II. Æquationem quamcunque ordinare.</i>	135
<i>Prop. III. Radices veras in falsas, &amp; falsas in veras commutare.</i>	137
<i>Prop. IV. Radices augere, vel minuere data quantitate.</i>	ib.
<i>Prop. V. Ex data æquatione secundum terminum tollere.</i>	139
<i>Prop. VI. Ex æquatione terminum tertium tollere.</i>	142
<i>Prop. VII. Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.</i>	146
<i>Prop. VIII. Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.</i>	147
<i>Prop. IX. Radices æquationis dividere per datam quantitatem.</i>	148
<i>Prop. X. Æquationem a fractionibus liberare.</i>	150
<i>Prop. XI. Æquationem a radicalibus liberare.</i>	151
<i>Prop. XII. Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitæ æqualis.</i>	154
<i>Prop. XIII. Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.</i>	156
<i>Prop. XIV. Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.</i>	159

## C A P U T VII.

De Resolutione *Æ*quationum Compositarum, quæ Radices Rationales habent.

- Prop. I. *Æ*quationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire. pag. 162  
 Prop. II. Radices rationales propius investigare. 165  
 Prop. III. Idem problema in *æ*quationibus literalibus. 167  
 Prop. IV. Alia methodus *æ*quationes compositas resolvendi. 169  
 Prop. V. *Æ*quationes compositas, in quibus duæ, vel plures radices sunt æquales, resolvere. 171

## C A P U T VIII.

De *Æ*quationibus Quadraticis.

- Prop. I. *Æ*quationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere. pag. 174  
 Prop. II. *Æ*quationes secundi gradus alia ratione expenduntur. 177  
 Prop. III. *Æ*quationes secundi gradus per formulas generales resolvere. 178  
 Prop. IV. *Æ*quationes derivativas secundi gradus resolvere. 181  
 Problemata. ib.  
 Problemata Geometrica. 189

## C A P U T IX.

De *Æ*quationibus Cubicis.

- Prop. I. Explicatur *Æ*quationum cubicarum genesis. p. 199.  
 Prop. II. In *Æ*quationibus cubicis, an duæ radices sint æquales, & quænam sint, explorare. 203  
 Prop. III. In *Æ*quationibus cubicis, an radix aliqua sit  
 10-

<i>rationalis , &amp; quænam sit , explorare.</i>	349
Prop. IV. <i>Æquationes cubicas , quæ duas radices imaginarias &amp; realem continent , expedire.</i>	204
Prop. V. <i>Æquationes cubicas , in quibus una saltem radix est rationalis , brevius expedire.</i>	208
Prop. VI. <i>Æquationes cubicas , quæ duas imaginarias , &amp; realem irrationalem continent , expedire.</i>	212
Prop. VII. <i>Formulas generales , seu regulas Cardani dictas invenire.</i>	213
Prop. VIII. <i>Æquationes cubicas per formulas generales Cardani resolvere.</i>	219
Prop. IX. <i>Idem problema brevius absolvitur.</i>	223
Prop. X. <i>Ex binomio cubico radicem extrahere.</i>	226
Problemata Cubica.	230
	235

## C A P U T X.

De Æquationibus Biquadraticis , & aliis altiorum graduum.

Prop. I. <i>Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.</i>	pag. 242
Prop. II. <i>Æquationes quarti gradus resolvere.</i>	245
Prop. III. <i>An biquadratica , quæ quatuor radicibus imaginariis constant , resolvi possint.</i>	248
Prop. IV. <i>Æquationes quarti gradus alia ratione resolvere.</i>	250
Prop. V. <i>Æquationem biquadraticam puram , vel secundo &amp; quarto termino carentem solvere.</i>	253
Problemata quarti gradus.	255
Definitiones.	267
Prop. VI. <i>An Æquatio biquadratica reducibilis sit , explorare.</i>	268
Prop. VII. <i>An Æquatio quinti gradus reducibilis sit , inquirere.</i>	270
Prop. VIII. <i>An Æquatio sexti gradus sit reducibilis , examinare.</i>	272

## C A P U T XI.

De Limitibus Radicum, earumque Approximatione.

- Prop. I. Radicum limites invenire. pag. 278  
 Prop. II. Radicum limites pro quacunque æquatione  
*methodo Newtoniana indagare.* 282  
 Prop. III. Æquationum radices prope veras per appro-  
*ximationem extrahere.* 287  
 Prop. IV. Aliæ approximandi rationes expediuntur. 289  
 Prop. V. Radices prope veras in Æquationibus litera-  
*libus indagare.* 291  
 Prop. VI. Idem Problema alio modo resolvitur. 294

## C A P U T XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

- Porisma I. Fractiones in terminos proportionales resol-  
*vere.* 298  
 Porisma II. Summam, differentiam quadratorum, &  
*radicum extractiones geometricè exprimere.* 299  
 Porisma III. Æquationes secundi gradus geometricè  
*construere.* 301  
 Problemata. 304

## A P P E N D I X

De Constructione Problematum Solidorum.

- Definitiones. pag. 321  
 Porisma I. Parabolam in plano describere. 322  
 Porisma II. Parabolam in plano alia ratione descri-  
*bere.* 323  
 Prop. I. Explicatur Constructionis Cartesianæ metho-  
*dis.* 324  
 Prop. II. Æquationum cubicarum constructio exemplis  
*illustratur.* 325  
 Prop. III. Æquationes biquadraticas construere. 329  
 Problemata. 334

F I N I S.







